> 这一章开始有一些数学公式上的推导和定义的理解，但是还不算太难😀

三维空间刚体运动

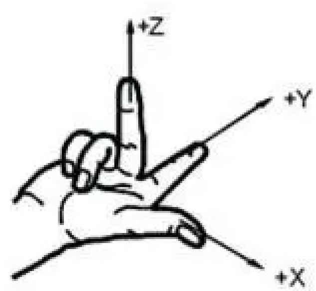
旋转矩阵

1.点，向量和坐标系

- 点是指空间中的基本元素，向量是指某点指向某点的有方向的箭头，而点和向量都只有在坐标系中讨论才有意义。
- 复习一下线代的知识，关于向量的运算！
  - 基底：不共线的向量e_1，e_2叫做这一平面内所有向量的一组基底，平面上任何向量（包括零向量）都可以用基底表示。
    空间中也是如此，任意向量a在空间的一组基(e_1,e_2,e_3)有这样一个坐标：

$$a = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

  - 坐标系：右手系为伸开右手，大拇指是X轴正方向，食指是Y轴正方向，其他三个手指是Z轴正方向，左手系同理。



  - 向量内积：内积可理解为第一个向量投影到第二个向量上（无所谓向量的顺序），可以表示为

$$a \cdot b = a^Tb = \sum_{i=1}^{3} a_ib_i = |a||b|cos < a, b >$$
$$a, b \in R^3$$

  - 向量外积：a和b的外积结果是一个法向量，垂直于a和b构成的平面。
    还有一个用途是通过两个向量的外积，生成第三个垂直于a，b的法向量，从而构建X、Y、Z坐标系。

外积可以表示为$a \times b = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} b \overset{def}{=} a\text{^}b$
式中^符号，可以理解为反对称符号，将向量a写成一个矩阵，这样两个向量的乘法就变成了矩阵和向量的乘法，把它变成线性运算。

2.坐标系间的欧式变换

- 欧式变换：由两个坐标系间的旋转和平移运动组成。
- 描述坐标系间的运动：旋转矩阵和平移矩阵
  - 书中关于旋转矩阵的推导：用一个正交正交基(e_1, e_2, e_3)很形象的代表一个三维坐标系，现在这个坐标系动了一下，变成(e_1', e_2', e_3')，而曾经在坐标系中有一个向量小a，自身在坐标系中的位置也随着坐标系在变化，前后变化是$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T$和$\begin{bmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \end{bmatrix}^T$。

    接下来的推导其实很简单，正交基和这个向量在坐标系的位置相乘就等于向量本身，所以可以得出
    $\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1' & e_2' & e_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix}$
    将等式简化，可以两边同时左乘$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}^T$，这样左边的系数就会变为1，整个式子会变成这个样子
    $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T e_1' & e_1^T e_2' & e_1^T e_3' \\ e_2^T e_1' & e_2^T e_2' & e_2^T e_3' \\ e_3^T e_1' & e_3^T e_2' & e_3^T e_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} \overset{def}{=} Ra'$
    是的，中间那一大块就是旋转矩阵了。

> 看上去比较复杂难懂，但其实旋转矩阵就是绕三个轴的基本旋转的序列复合。

  - 平移矩阵
    同理，平移矩阵也是在三个轴方向不同移动的复合。坐标系1到坐标系2的平移移动中，向量a在两个坐标系下的坐标为a_1, a_2，它们的关系是：
    $a_1 = R_{12}a_2 + t_{12}$
    其中R_{12}指坐标系2的向量变换到坐标系1中，t_{12}指从坐标系1到坐标系2的平移向量。

3.变换矩阵与齐次坐标

- 变换矩阵：当我们拥有旋转矩阵和平移矩阵后，人们更喜欢用一个统一简单的形式来描述欧式变换，这就诞生了变换矩阵：$T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$
- 齐次坐标：当旋转矩阵和平移矩阵并排放在一起形成一个4X3的矩阵时，一切都显得那么不和谐，所以我们在三维向量底部添加1，使之变为4X4的向量，称为齐次坐标。

旋转向量和欧拉角

> 用几何的方式来描述旋转

- 旋转向量：是一个三维向量，其方向与旋转轴一致，长度等于旋转角。相比起旋转矩阵来说可以更紧凑简洁的描述旋转信息。
  旋转向量到旋转矩阵的转换——由罗德里格斯公式完成。
  $R = cos\theta I + (1 - cos\theta)nn^T + sin\theta\hat{n}$
  转角$\theta = \arccos\frac{tr(R)-1}{2}$,转轴$Rn = n$,因此，转轴n是矩阵R特征值对应的特征向量。
- 欧拉角：假设一架飞机在天上飞行，飞机正前方为X轴，飞机右侧为Y轴，正上方为Z轴，那么可以把任意的旋转分解为这三个轴上的转角。

1. 绕飞机的Z轴旋转，得到偏航角yaw；
2. 绕**旋转后的**Y轴旋转，得到俯仰角pitch；
3. 绕**旋转后的**X轴旋转，得到滚转角roll。
   用这样三个分离的转角欧拉角，可以很形象的看到旋转的变化，不像矩阵那样难懂。

- 万向锁：选择±90°作为pitch角，就会导致第一次旋转和第三次旋转等价，整个旋转表示系统被限制在只能绕竖直轴旋转，丢失了一个表示维度。

> 对万向锁的理解：在网上有解释比较详细，是以手机为例，长边为X轴，短边为Y轴，屏幕方向为Z轴，假如绕Y轴不是90度，那么手机可以任意旋转；假如绕Y轴旋转了90度，接下来的旋转不管是绕X轴还是绕Z轴，Z轴会永远平行与桌面。

四元数

> 人们喜欢紧凑，精巧的表达旋转的方式，同时既不像旋转矩阵那样有冗余性，又不像欧拉角那样有奇异性，这就诞生了四元数，其在计算机图形学，物理学上有大量的应用。

- 什么是四元数：四元数是数学家Hamilton找到的一种扩展的复数，形如$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$（其中，$i^2 = k^2 = j^2 = ijk = -1$），四元数也可以写成标量和向量的有序对形式，即实

部与虚部分开，并用一个三维的向量表示虚部。

$q = [s, v] \ (v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} s, x, y, z \in R)$

- 四元数的简单理解：复数的运算可以形象的表示在二维中向量的运动，两个复数相乘实际上是旋转与缩放的组合。到三维空间中，也有相应的四元数可以表示向量的旋转。
- 四元数表示旋转：
  定义点p(x,y,z),点p用虚四元数表示为

$$p = \left[0, x, y, z\right]^T = \left[0, v\right]^T$$

  ，这样可以看作四元数三个虚部与空间中的三个轴对应，旋转后的点$p' = qpq^{-1}$，最后把p'的虚部取出，即为旋转之后点的坐标。
  - 四元数到旋转矩阵的变换关系：设$q = [s, v]^T$
    则有$R = vv^T = s^2 I + 2s\hat{v} + (\hat{v})^2$
  - 四元数到旋转向量的转换公式：$\begin{cases} \theta = 2arccos q_0 \\ \left[n_x, n_y, n_z\right]^T = \left[q_1, q_2, q_3\right]^T / sin\frac{\theta}{2} \end{cases}$

相似，仿射，射影变换

- 相似变换：允许物体均匀缩放。
  $T_s = \begin{bmatrix} sR & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$
- 仿射变换：对物体平移+线性变换，平行关系，比例关系都不变。
  $T_A = \begin{bmatrix} A & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$
- 射影变换（透视变换），像油画里的透视关系一样，满足近大远小。
  $T_P = \begin{bmatrix} A & t \\ a^T & v \end{bmatrix}$