# 李群与李代数基础

# 群

- 直观的理解：群就是一种特殊的代数结构，这种代数结构是由一种集合加上一种运算组成，我们把集合记作A，运算记为·，那么群记为$G=(A,\cdot)$。

> 例如：我规定“土豆list(TODO list)”是一种代数结构，其由待办事项和添加待办、删除待办这样的运算组成，那么“土豆list”也可以和“群”作类比来理解。

- 要求的满足条件：
  1.封闭性：$\forall a_1, a_2 \in A, \quad a_1 \cdot a_2 \in A.$
  2.结合律：$\forall a_1, a_2, a_3 \in A, \quad (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3).$
  3.幺元：$\exists a_0 \in A, s.t. \forall a \in A, \quad a_0 \cdot a = a \cdot a_0 = a.$
  4.逆：$\forall a \in A$， $\quad \exists a^{-1} \in A, \quad s.t. \quad a \cdot a^{-1} = a_0.$

> 矩阵中常见的群有特殊正交群(旋转矩阵群) $SO(n)$和特殊欧式群（n维欧式变换）$SE(n)$。
> 以三维旋转矩阵 $SO(3)$为例，旋转矩阵和乘法构成了旋转矩阵群，旋转矩阵之间的乘法满足封闭性和结合性，而幺元就是单位矩阵，$R$乘以$R^{-1}$也确实等于幺元。

- 李群：指具有连续光滑性质的群，可以直观地以相机位姿在空间中的连续旋转来想象。

# 李代数

> 以下的推导将书中的内容细分，虽然说看上去有些多，但是也将推导过程变得更容易理解，鼓励手推一遍，这样会很有成就感～

**旋转矩阵求导**

1. 定义一个三维向量$\alpha = [a_1, a_2, a_3]^T$.
   引出^符号，来表示将向量$\alpha$变成了反对称矩阵A：$\hat{\alpha} = A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$.
2. 对于任意旋转矩阵R，它会随时间连续的变化，是时间的函数，满足$R(t)R(t)^T = I$，求导得$\dot{R}(t)R(t)^T = -(\dot{R}(t)R(t)^T)^T$.

3. $\dot{R}(t)R(t)^T$是一个反对称矩阵，记作$\phi(t)^\wedge$，**则**$\dot{R}(t) = \phi(t)^\wedge R(t)$，也就是说，对旋转矩阵求导数，只要左乘一个$\phi(t)$矩阵即可。

**旋转矩阵和反对称矩阵的关系——$R(t) = exp(\phi_0^t t)$**

1. R(t)在t = 0时，规定此时旋转矩阵R(t)为$I$。
2. $\dot{R}(t) = \phi(t)^\wedge R(t)$，此时引入一个小概念——矩阵指数。

> 有一个简单的标量一阶线性微分方程 $\dot{x}(t) = ax(t)$，其中$x(t) \in R, a \in R$，且初始条件为$x(0) = x_0$，那么解为$x(t) = e^{at}x_0$。

3. 有了矩阵指数的概念，我们可以轻地得出$R(t) = e^{\phi(t_0)^\wedge t}R(t_0)$。
4. 因为$R(0) = I$，在$t_0$附近，设$\phi$保持为常数$\phi_0$，所以上式可化为$R(t) = e^{\phi_0^\wedge t}$即$R(t) = exp(\phi_0^\wedge t)$。

**李代数的引出**

1. 按照导数定义，使旋转矩阵在t=0附近一阶泰勒展开，得：$R(t) \approx R(t_0) + \dot{R}(t_0)(t - t_0) = I + \phi(t_0)^\wedge(t)$.
2. 可以看到$\phi$反映了R的导数性质，故称它在SO(3)上的原点 $\phi_0$ 附近的正切空间上。这个$\phi$正是李群SO(3)对应的李代数so(3)。
3. 简单地理解就是，李代数so(3)是三维向量$\phi$的集合，李群SO(3)是旋转矩阵的集合，冥冥之中两个集合建立了联系：**李群空间的任意一个旋转矩阵R，都可以用李代数空间的一个向量的反对称矩阵指数来近似**。

**李代数的定义**

1. 每个李群都有对应的李代数，李代数描述了李群的局部性质，准确地说，是单位元附近的正切空间。
2. 李代数由一个集合V、一个数域F和一个二元运算[,]组成。如果满足以下几条性质，则称(V,F,[,])为一个李代数。
   - 封闭性：$\forall X, Y \in V, [X, Y] \in V.$
   - 双线性：$\forall X, Y, Z \in V, a, b \in F$，有$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z], [Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$
   - 自反性：$\forall X \in V, [X, X] = 0.$
   - 雅可比等价：$\forall X, Y, Z \in V, [X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$
3. 其中的二元运算被称为李括号，例如，三维向量$R^3$上定义的叉积x就是一种李括号。

**两种李代数so(3)和se(3)**

1. 李代数 **so(3)** 是定义在$R^3$上的向量，记作$\phi$。每个$\phi$都可以生成一个反对称矩阵：
   $\Phi = \phi\hat{} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix} \in R^{3\times3}$
   两个向量的李括号为$[\phi_1, \phi_2] = (\Phi_1\Phi_2 - \Phi_2\Phi_1)^{\vee}$.
2. 李代数 **se(3)** 与 **so(3)** 相似，**se(3)** 位于$R^6$空间中：$se(3) = \{\xi = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix} \in R^6, \rho \in R^3, \phi \in so(3), \xi = \begin{bmatrix} \phi\hat{} & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \in R^{4\times4}\}$
   这里把每个se(3)元素记作$\xi$，它是一个六维向量，前三维为平移，记作$\rho$，后三维为旋转，记作$\phi$，实质上是so(3)元素。在se(3)中，同样使用^符号，但是^不再表示反对称，而是表示将一个六维向量转换成四维矩阵。
   se(3)的李括号为：$[\xi_1, \xi_2] = (\xi_1\hat{}\xi_2\hat{} - \xi_2\hat{}\xi_1\hat{})^{\vee}$.

# 指数与对数映射

> 公式写麻了。。。就以so(3)为例吧

**SO(3)上的指数映射**

- 刚才已经推导出来：$R(t) = exp(\phi_0^t t)$，$exp(\phi_0^t t)$显然是一个矩阵的指数，这也是为什么叫它指数映射。那么具体该怎样算呢？
  首先，任意矩阵的指数映射可以写成一个泰勒展开，其结果仍是一个矩阵，即 $exp(\phi\hat{})) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi\hat{}^n$.
  其次，我们规定三维向量$\phi$的模长为$\theta$，方向为a，于是有$\phi = \theta a$，为了接下来运算方便，我们提前算一下简便形式，$\hat{a}\hat{a} = aa^T - I$，$\hat{a}\hat{a}\hat{a} = -\hat{a}$.
  接下来，把指数映射展开：$exp(\phi\hat{}) = exp(\theta\hat{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\theta\hat{a})^n$.
  (公式太多了。。直接截图了🤡)

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{I} + \theta \boldsymbol{a}^{\wedge} + \frac{1}{2!}\theta^2 \boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge} + \frac{1}{3!}\theta^3 \boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge} + \frac{1}{4!}\theta^4 (\boldsymbol{a}^{\wedge})^4 + \cdots \\
&= \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge} + \theta \boldsymbol{a}^{\wedge} + \frac{1}{2!}\theta^2 \boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge} - \frac{1}{3!}\theta^3 \boldsymbol{a}^{\wedge} - \frac{1}{4!}\theta^4 (\boldsymbol{a}^{\wedge})^2 + \cdots \\
&= \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + \underbrace{\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots\right)}_{\sin\theta} \boldsymbol{a}^{\wedge} - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots\right)}_{\cos\theta} \boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge} \\
&= \boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge} + \boldsymbol{I} + \sin\theta \boldsymbol{a}^{\wedge} - \cos\theta \boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge} \\
&= (1-\cos\theta)\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge} + \boldsymbol{I} + \sin\theta \boldsymbol{a}^{\wedge} \\
&= \cos\theta \boldsymbol{I} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + \sin\theta \boldsymbol{a}^{\wedge}.
\end{aligned}
$$

最后这个式子：$exp(\theta\hat{a}) = cos(\theta I) + (1 - cos(\theta))aa^T + sin(\theta)\hat{a}$，就是罗德里格斯公式，世界线收回了！

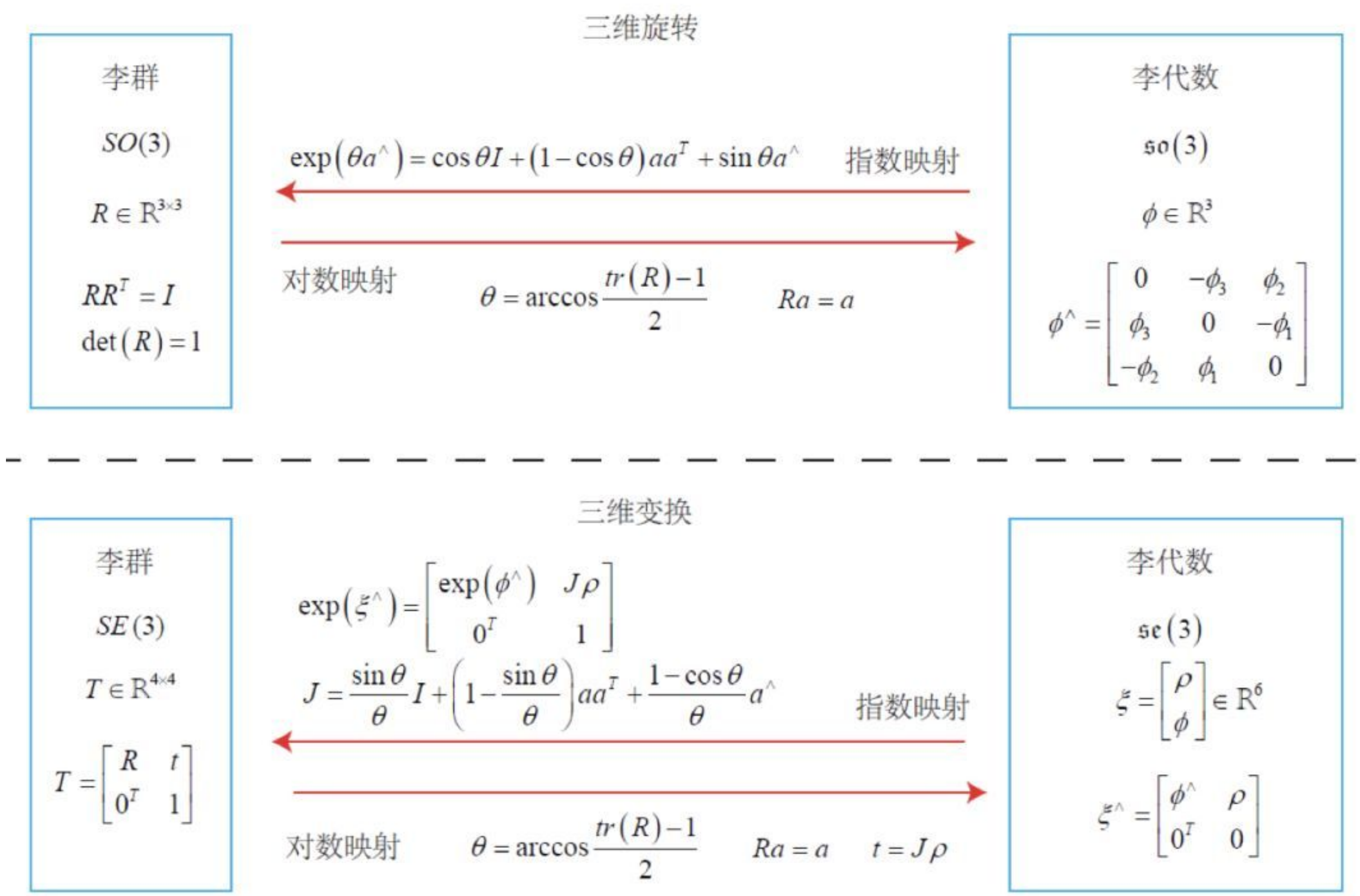
- 反过来，用对数映射也能把SO(3)李群空间中元素映射到so(3)李代数空间中去，书中给出了对数映射的公式。即$\phi = ln(R)^{\vee} = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1^n}{n+1}(R-I)^{n+1})^{\vee}$.
  
  但是书中也同时提到了，可以用第三章提到的方法，利用迹的性质分别求解角和转轴，更方便快捷。

> 小推导如下～

首先放出罗德里格斯公式：$R = cos(\theta I) + (1 - cos(\theta))nn^T + sin(\theta)\hat{n}$.
然后我们对转角$\theta$取两边的迹（矩阵的主对角线元素之和），有
$tr(R) = cos\theta tr(I) + (1 - cos\theta)tr(nn^T) + sin\theta tr(\hat{n})$
$= 3cos\theta + (1 - cos\theta)$
$= 1 + 2cos\theta$

因此：$\theta = arccos\frac{tr(R)-1}{2}$.
关于转轴n，由于旋转轴经过旋转之后方向不变，所以向量不发生改变，即$Rn = n$.

- 最后，书中给出了李群，李代数的定义与相互的转换关系，如图




se(3)的关系也在图里啦。偷个懒~

# 扰动模型

**问题引出**

李代数求导分两种：根据李代数加法来对李代数求导，但是不是很方便。第二种是对李群进行左乘或者右乘微小的扰动，然后对该扰动求导，比第一种更简单。

- 一些小技巧：$exp((\phi + \Delta\phi)\hat{}) = exp((J_l\Delta\phi)\hat{})exp(\phi\hat{})$
  $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$
  $a\hat{}b = a \times b = -b \times a = -b\hat{}a$

**so(3)李代数求导**

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}\right)}{\partial\boldsymbol{\phi}} &= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to\mathbf{0}} \frac{\exp\left(\left(\boldsymbol{\phi}+\delta\boldsymbol{\phi}\right)^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to\mathbf{0}} \frac{\exp\left(\left(\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi}\right)^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to\mathbf{0}} \frac{\left(\boldsymbol{I}+\left(\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi}\right)^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to\mathbf{0}} \frac{\left(\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi}\right)^{\wedge}\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to\mathbf{0}} \frac{-\left(\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}\right)^{\wedge}\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi}}{\delta\boldsymbol{\phi}} = -(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^{\wedge}\boldsymbol{J}_l.
\end{aligned}
$$

**so(3)左扰动模型**

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}\right)}{\partial\boldsymbol{\varphi}} &= \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0} \frac{\exp\left(\boldsymbol{\varphi}^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}} \\
&\approx \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0} \frac{\left(1+\boldsymbol{\varphi}^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}} \\
&= \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0} \frac{\boldsymbol{\varphi}^{\wedge}\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}} = \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0} \frac{-(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^{\wedge}\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}} = -(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^{\wedge}.
\end{aligned}
$$