

In [1]:

```

import numpy as np
import dolfin as dl
from ufl import lhs, rhs, replace
import scipy.sparse as sps
import scipy.sparse.linalg as spla
import scipy.linalg as sla
import matplotlib.pyplot as plt
from pathlib import Path
from nalger_helper_functions import *
import meshio
import sys
from scipy.spatial import KDTree as scipy_KDTree
from scipy.optimize import root_scalar
from localpsf import localpsf_root
from localpsf.newtoncg import newtoncg_ls, cgsteihaug
from nalger_helper_functions import *

import hlibpro_python_wrapper as hpro
from localpsf.product_convolution_kernel import ProductConvolutionKernel
from localpsf.product_convolution_hmatrix import make_hmatrix_from_kernel
from localpsf.derivatives_at_point import StokesDerivativesAtPoint
from localpsf.bilaplacian_regularization import BiLaplacianRegularization

```

Options

In [2]:

```

# mesh_type = 'coarse'
# mesh_type = 'medium'
mesh_type = 'fine'
noise_level=1e-2
relative_prior_correlation_length=0.1
save_plots=True
gamma=1e4 # regularization gamma
m0_constant_value = 1.5 * 7.
rel_correlation_length = 0.1
reg_robin_bc=True
# mtrue_type = 'aces_building'
mtrue_type = 'angel_peak'
# mtrue_type = 'sinusoid'
# mtrue_string = 'm0 - (m0 / 7.)*std::cos((x[0]*x[0]+x[1]*x[1])*pi/(Radius*Radius)'
mtrue_string = 'm0 - (m0 / 7.)*std::cos(2.*x[0]*pi/Radius)'
solver_type = 'mumps'
# solver_type = 'default'
# solver_type = 'petsc'
# solver_type = 'umfpack'
# solver_type = 'superlu'
outflow_constant = 1.0e6

num_batches = 5 # number of batches used for Newton solves
tau = 3.0
num_neighbors = 10
hmatrix_tol = 1e-6
newton_rtol = 1e-8
# gamma_morozov = 15428.012899090285 # medium mesh, noise_level=1e-2
# gamma_morozov= 6932.714344119822 # fine mesh, noise_level=1e-2
# gamma_morozov= 6975.784285975133 # fine mesh, noise_level=1e-2
gamma_morozov = None

```

```
forcing_sequence_power = 0.5 # 1.0
num_gn_iter = 5

run_finite_difference_checks = False
check_gauss_newton_hessian = False

all_num_batches = [1, 5, 25] # number of batches used for spectral comparisons
```

In [3]:

```
save_dir = localpsf_root / 'numerical_examples' / 'stokes' / 'data'
save_dir.mkdir(parents=True, exist_ok=True)
save_dir_str = str(save_dir)
```

Mesh

Load unmodified mesh

In [4]:

```
if mesh_type == 'coarse':
    mfile_name = str(localpsf_root) + "/numerical_examples/stokes/meshes/cylinder_coarse.xml"
    lam = 1e10
elif mesh_type == 'medium':
    mfile_name = str(localpsf_root) + "/numerical_examples/stokes/meshes/cylinder_medium.xml"
    lam = 1e11
elif mesh_type == 'fine':
    mfile_name = str(localpsf_root) + "/numerical_examples/stokes/meshes/cylinder_fine.xml"
    lam = 1e12
else:
    raise RuntimeError('invalid mesh type '+mesh_type+', valid types are coarse, medium or fine')
mesh = dl.Mesh(mfile_name+".xml")
mesh
```

Out[4]:

Boundary submeshes and subdomains

In [5]:

```
class BasalBoundary(dl.SubDomain):
    def inside(me, x, on_boundary):
        return dl.near(x[2], 0.) and on_boundary

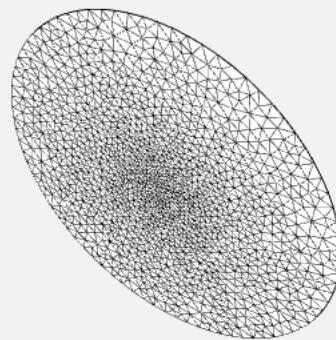
class BasalBoundarySub(dl.SubDomain):
    def inside(me, x, on_boundary):
        return dl.near(x[2], 0.)

class TopBoundary(dl.SubDomain):
    def __init__(me, Height):
        me.Height = Height
        dl.SubDomain.__init__(me)
    def inside(me, x, on_boundary):
        return dl.near(x[1], me.Height) and on_boundary

boundary_markers = dl.MeshFunction("size_t", mesh, mfile_name+"_facet_region.xml")
boundary_mesh = dl.BoundaryMesh(mesh, "exterior", True)
basal_mesh3D = dl.SubMesh(boundary_mesh, BasalBoundarySub())

basal_mesh3D
```

Out[5]:



Modify mesh

In [6]:

```
r0 = 0.05
sig = 0.4
valleys = 4
valley_depth = 0.35
```

```
bump_height = 0.2
min_thickness = 0.08 / 8.
avg_thickness = 0.2 / 8.
theta = -np.pi / 2.
max_thickness = avg_thickness + (avg_thickness - min_thickness)
A_thickness = max_thickness - avg_thickness

dilition = 1.e4
Length = 1.
Width = 1.
Length *= 2 * dilition
Width *= 2 * dilition
Radius = dilition

prior_correlation_length = relative_prior_correlation_length * Radius

coords = mesh.coordinates()
bcoords = boundary_mesh.coordinates()
subbcoords = basal_mesh3D.coordinates()
coord_sets = [coords, bcoords, subbcoords]

def topography(r, t):
    zero = np.zeros(r.shape)
    R0 = r0 * np.ones(r.shape)
    return bump_height * np.exp(-(r / sig) ** 2) * (
        1. + valley_depth * np.sin(valleys * t - theta) * np.fmax(zero,

def depth(r, t):
    zero = np.zeros(r.shape)
    R0 = r0 * np.ones(r.shape)
    return min_thickness - A_thickness * np.sin(valleys * t - theta) * np.exp(
        -(r / sig) ** 2) * np.fmax(zero, (r - R0) / sig)

for k in range(len(coord_sets)):
    for i in range(len(coord_sets[k])):
        x, y, z = coord_sets[k][i]
        r = np.sqrt(x ** 2 + y ** 2)
        t = np.arctan2(y, x)
        coord_sets[k][i, 2] = depth(r, t) * z + topography(r, t)
        coord_sets[k][i] *= dilition

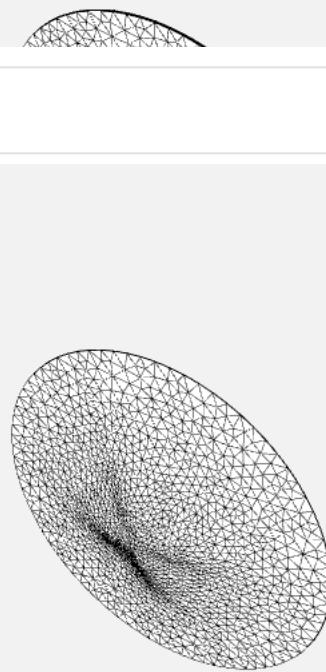
mesh
```

Out[6]:

In [7]:

 Options
basal_mesh3D Summary

Out[7]:



2D Basal mesh

 Summary

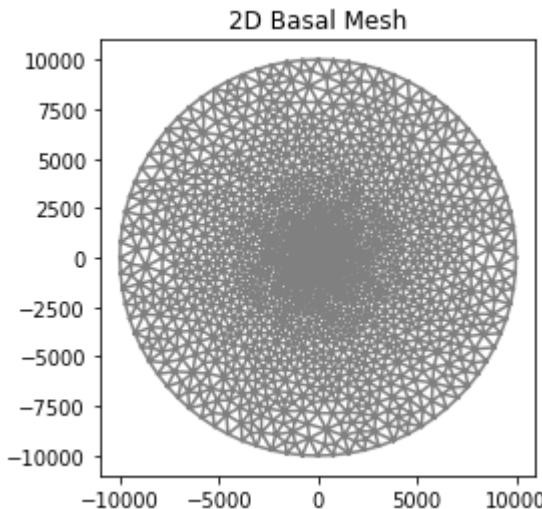
In [8]:

```
# ----- generate 2D mesh from 3D boundary subset mesh
coords = basal_mesh3D.coordinates()[:, :2]
cells = [("triangle", basal_mesh3D.cells())]
mesh2D = meshio.Mesh(coords, cells)
mesh2D.write("mesh2D.xml")
basal_mesh2D = dl.Mesh("mesh2D.xml")

dl.plot(basal_mesh2D)
plt.title('2D Basal Mesh')
```

WARNING:root:DOLFIN XML is a legacy format. Consider using XDMF instead.
Text(0.5, 1.0, '2D Basal Mesh')

Out[8]:



Plots to make (1):

- 3D mesh, colors, light mesh edges
- 2D mesh top-view, edges only, black and white

In [9]:

```
# Save mesh
dl.File(save_dir_str + "/ice_mountain_mesh3D.xml") << mesh
dl.File(save_dir_str + "/ice_mountain_mesh_base3D.xml") << basal_mesh3D
dl.File(save_dir_str + "/ice_mountain_mesh_base2D.xml") << basal_mesh2D
```

Function spaces

In [10]:

```
P1 = dl.FiniteElement("Lagrange", mesh.ufl_cell(), 1)
P2 = dl.VectorElement("Lagrange", mesh.ufl_cell(), 2)
TH = P2 * P1

Zh = dl.FunctionSpace(mesh, TH) # Zh: state, also adjoint
Wh = dl.FunctionSpace(mesh, 'Lagrange', 1) # Wh: parameter, full 3D do
Vh3 = dl.FunctionSpace(basal_mesh3D, 'Lagrange', 1) # Vh3: parameter, 2d basal n
Vh2 = dl.FunctionSpace(basal_mesh2D, 'Lagrange', 1) # Vh2: parameter, 2d basal n
Xh = [Zh, Wh, Zh] # Xh: (state, parameter full)
```

Transfer operators between function spaces

In [11]:

```
def function_space_prolongate_numpy(x_numpy, dim_Yh, inds_Xh_in_Yh):
    y_numpy = np.zeros(dim_Yh)
    y_numpy[inds_Xh_in_Yh] = x_numpy
    return y_numpy

def function_space_restrict_numpy(y_numpy, inds_Xh_in_Yh):
    return y_numpy[inds_Xh_in_Yh].copy()

def function_space_prolongate_petsc(x_petsc, Yh, inds_Xh_in_Yh):
    y_petsc = dl.Function(Yh).vector()
    y_petsc[:] = function_space_prolongate_numpy(x_petsc[:], Yh.dim(), inds_Xh_i
```

```

    return y_petsc

def function_space_restrict_petsc(y_petsc, Xh, inds_Xh_in_Yh):
    x_petsc = dl.Function(Xh).vector()
    x_petsc[:] = function_space_restrict_numpy(y_petsc[:], inds_Xh_in_Yh)
    return x_petsc

def make_prolongation_and_restriction_operators(Vsmall, Vbig, inds_Vsmall_in_Vbig,
    Vbig_to_Vsmall_numpy = lambda vb: function_space_restrict_numpy(vb, inds_Vsm)
    Vsmall_to_Vbig_numpy = lambda vs: function_space_prolongate_numpy(vs, Vbig)

    Vbig_to_Vsmall_petsc = lambda vb: function_space_restrict_petsc(vb, Vsmall,
    Vsmall_to_Vbig_petsc = lambda vs: function_space_prolongate_petsc(vs, Vbig,

    return Vbig_to_Vsmall_numpy, Vsmall_to_Vbig_numpy, Vbig_to_Vsmall_petsc, Vsm

```

In [12]:

```

pp_Vh3 = Vh3.tabulate_dof_coordinates()
pp_Vh2 = Vh2.tabulate_dof_coordinates()
pp_Wh = Wh.tabulate_dof_coordinates()

KDT_Wh = scipy_KDTree(pp_Wh)
inds_Vh3_in_Wh = KDT_Wh.query(pp_Vh3)[1]
if np.linalg.norm(pp_Vh3 - pp_Wh[inds_Vh3_in_Wh, :]) / np.linalg.norm(pp_Vh3) >
    warnings.warn('problem with basal function space inclusion')

pp_Vh3_2D = pp_Vh3[:, :2]

KDT_Vh3_2D = scipy_KDTree(pp_Vh3_2D)
inds_Vh2_in_Vh3 = KDT_Vh3_2D.query(pp_Vh2)[1]
if np.linalg.norm(pp_Vh2 - pp_Vh3[inds_Vh2_in_Vh3, :2]) / np.linalg.norm(pp_Vh2) >
    warnings.warn('inconsistency between manifold basal mesh and flat basal mesh')

inds_Vh2_in_Wh = inds_Vh3_in_Wh[inds_Vh2_in_Vh3]

Wh_to_Vh3_numpy, Vh3_to_Wh_numpy, Wh_to_Vh3_petsc, Vh3_to_Wh_petsc = \
    make_prolongation_and_restriction_operators(Vh3, Wh, inds_Vh3_in_Wh)

Vh3_to_Vh2_numpy, Vh2_to_Vh3_numpy, Vh3_to_Vh2_petsc, Vh2_to_Vh3_petsc = \
    make_prolongation_and_restriction_operators(Vh2, Vh3, inds_Vh2_in_Vh3)

Wh_to_Vh2_numpy, Vh2_to_Wh_numpy, Wh_to_Vh2_petsc, Vh2_to_Wh_petsc = \
    make_prolongation_and_restriction_operators(Vh2, Wh, inds_Vh2_in_Wh)

```

Forward Stokes forms

In [13]:

```

m_Wh = dl.Function(Wh) # Basal sliding friction
u = dl.Function(Zh) # Stokes state: (velocity, pressure)
p = dl.Function(Zh) # Stokes adjoint variable

mtrue_Wh = dl.Function(Wh) # True parameter
utru = dl.Function(Zh) # True state
uobs = dl.Function(Zh) # observed state (true state plus noise)

grav = 9.81           # acceleration due to gravity
rho = 910.0           # volumetric mass density of ice
stokes_forcing = dl.Constant( (0., 0., -rho*grav) )

```

```

ds = dl.Measure("ds", domain=mesh, subdomain_data=boundary_markers)
ds = ds
ds_base = ds(1)
ds_top = ds(2)
ds_lateral = ds(3)
normal = dl.FacetNormal(mesh)
# Strongly enforced Dirichlet conditions. The no outflow condition will be enforced
bcs = []
bcs0 = []

# Define the Nonlinear Stokes varfs
# rheology
stokes_n = 1.0
stokes_A = dl.Constant(2.140373e-7) # dl.Constant(1.e-16)
smooth_strain = dl.Constant(1e-6)

velocity, pressure = dl.split(u)
strain_rate = dl.sym(dl.grad(velocity))
normEul2 = 0.5 * dl.inner(strain_rate, strain_rate) + smooth_strain

tangent_velocity = (velocity - dl.outer(normal, normal)*velocity)

energy_t1 = stokes_A ** (-1.) * normEul2 * dl.dx
energy_t2 = -dl.inner(stokes_forcing, velocity) * dl.dx
energy_t3 = dl.Constant(.5) * dl.inner(dl.exp(m_Wh) * tangent_velocity, tangent_
energy_t4 = lam * dl.inner(velocity, normal) ** 2 * ds_base

energy_t5 = dl.Constant(outflow_constant) * dl.inner(velocity, normal)**2 * ds_l

energy = energy_t1 + energy_t2 + energy_t3 + energy_t4 + energy_t5
energy_gradient = dl.derivative(energy, u, p)

adjoint_velocity, adjoint_pressure = dl.split(p)
div_constraint = dl.inner(-dl.div(velocity), adjoint_pressure)
div_constraint_transpose = dl.inner(-dl.div(adjoint_velocity), pressure)

forward_form_ff = energy_gradient + div_constraint + div_constraint_transpose #

```

Misfit forms

In [14]:

```

def Tang(vel, n):
    return vel - dl.outer(n, n)*vel

dummy_u1 = dl.Function(Zh)
dummy_u2 = dl.Function(Zh)

dummy_velocity1, dummy_pressure1 = dl.split(dummy_u1)
dummy_velocity2, dummy_pressure2 = dl.split(dummy_u2)

data_inner_product_form = dl.inner(Tang(dummy_velocity1, normal),
                                   Tang(dummy_velocity2, normal))*ds_top

def data_inner_product(u_petsc, v_petsc):
    dummy_u1.vector()[:] = u_petsc[:]
    dummy_u2.vector()[:] = v_petsc[:]
    return dl.assemble(data_inner_product_form)

```

```

true_velocity, true_pressure = dl.split(utru)
observed_velocity, observed_pressure = dl.split(uobs)

velocity_discrepancy = observed_velocity - velocity

misfit_form = 0.5*dl.inner(Tang(velocity_discrepancy, normal),
                           Tang(velocity_discrepancy, normal))*ds_top

```

Lagrangian, adjoint, gradient, hessian

In [15]:

```

def input_vector_transformation(m_Vh2_numpy):
    m_Vh2_petsc = dl.Function(Vh2).vector()
    m_Vh2_petsc[:] = m_Vh2_numpy
    return Vh2_to_Wh_petsc(m_Vh2_petsc)

def output_vector_transformation(m_Wh_petsc):
    m_Vh2_numpy = Wh_to_Vh2_petsc(m_Wh_petsc)[:]
    return m_Vh2_numpy

SDAP = StokesDerivativesAtPoint(misfit_form, forward_form_ff, bcs,
                                 m_Wh, u, p,
                                 input_vector_transformation,
                                 output_vector_transformation,
                                 solver_type=solver_type)

```

Solve for true observations

In [16]:

```

if mtrue_type == 'angel_peak' or mtrue_type == 'aces_building':
    image_dir = localpsf_root / 'localpsf'

    if mtrue_type == 'angel_peak':
        image_file = image_dir / 'angel_peak_badlands_cropped9.png' # good
        image_file = image_dir / 'angel_peak_badlands_cropped7.png'
    else:
        image_file = image_dir / 'aces_building.png'

    mtrue_Vh2 = load_image_into_fenics(Vh2, image_file)
    minc = 9
    maxc = 12
    mtrue_Vh2_vec = mtrue_Vh2.vector()[:]
    mtrue_Vh2_vec *= 3
    mtrue_Vh2_vec += 9
    mtrue_Vh2.vector()[:] = mtrue_Vh2_vec
elif mtrue_type == 'sinusoid':
    mtrue_expr = dl.Expression(mtrue_string, element=Vh2.ufl_element(), m0=m0_cc)
    mtrue_Vh2 = dl.interpolate(mtrue_expr, Vh2)
else:
    raise RuntimeError('BAD mtrue_type')

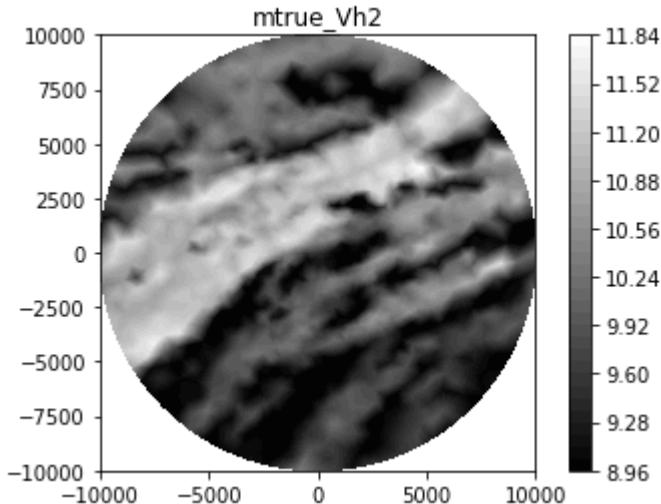
mtrue_Vh3 = dl.Function(Vh3)
mtrue_Vh3.vector()[:] = Vh2_to_Vh3_numpy(mtrue_Vh2.vector()[:])

cm = dl.plot(mtrue_Vh2, cmap='gray')

```

```
plt.colorbar(cm)
plt.title('mtrue_Vh2')
```

Out[16]: Text(0.5, 1.0, 'mtrue_Vh2')



In [17]:

```
SDAP.update_m(mtrue_Vh2.vector()[:])
SDAP.update_forward()
utruve.vector()[:] = SDAP.u.vector()[:].copy()
```

Plots to make (2):

- True velocity (arrows or not, up to you)
- mtrue (basal sliding friction field)

In [18]:

```
dl.File(save_dir_str + "/mtrue_Vh2.pvd") << mtrue_Vh2
dl.File(save_dir_str + "/mtrue_Vh3.pvd") << mtrue_Vh3

dl.File(save_dir_str + "/true_velocity" + str(outflow_constant)+".pvd") << utruve
dl.File(save_dir_str + "/true_pressure" + str(outflow_constant)+".pvd") << utruve
```

Add noise

In [19]:

```
utruve_vec = utruve.vector()[:]
noise_vec = noise_level * np.random.randn(Zh.dim()) * np.abs(utruve_vec)
uobs.vector()[:] = utruve_vec + noise_vec
```

In [20]:

```
def compute_misfit_datanorm():
    return np.sqrt(2.0 * SDAP.misfit())

noise_vec_petsc = dl.Function(Zh).vector()
noise_vec_petsc[:] = noise_vec
noise_datanorm = np.sqrt(data_inner_product(noise_vec_petsc, noise_vec_petsc))
print('noise_datanorm=', noise_datanorm)
```

noise_datanorm= 866.2663059032905

Regularization

In [21]:

```
m_prior_mean_Vh2 = dl.Function(Vh2)
m_prior_mean_Vh2.vector()[:] = m0_constant_value * np.ones(Vh2.dim())
m_Vh2 = dl.Function(Vh2)
m_Vh2.vector()[:] = Wh_to_Vh2_numpy(m_Wh.vector()[:])

REG = BiLaplacianRegularization(gamma, prior_correlation_length, m_Vh2, m_prior_mean_Vh2)

/home/nick/anaconda3/envs/fenics4/lib/python3.9/site-packages/scipy/sparse/linalg/dsolve/linsolve.py:318: SparseEfficiencyWarning: splu requires CSC matrix format
  warn('splu requires CSC matrix format', SparseEfficiencyWarning)
/home/nick/anaconda3/envs/fenics4/lib/python3.9/site-packages/scipy/sparse/coo.py:431: SparseEfficiencyWarning: Constructing a DIA matrix with 1416 diagonals is inefficient
  warn("Constructing a DIA matrix with %d diagonals "%
```

In [22]:

```
REG.update_gamma(1e5)
REG.update_correlation_length(prior_correlation_length)
```

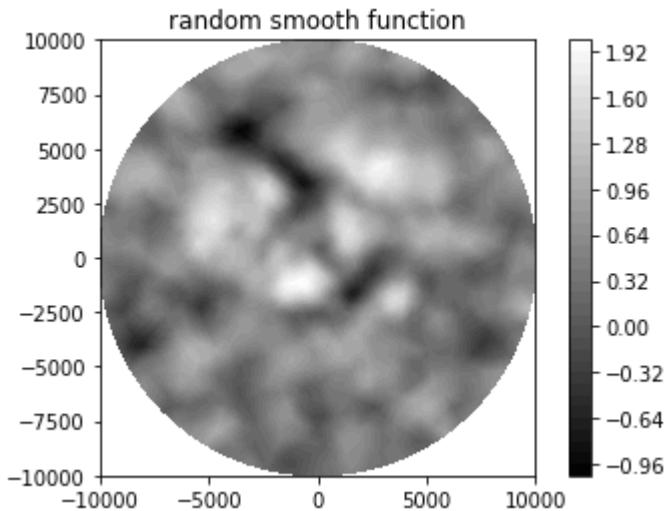
In [23]:

```
def random_smooth_Vh2_function(min_f, max_f):
    f_vec = REG.solve_R_numpy(np.random.randn(Vh2.dim()))
    f_vec = f_vec - np.min(f_vec)
    f_vec = (max_f - min_f) * f_vec / np.max(f_vec)
    f_vec = f_vec + min_f
    f = dl.Function(Vh2)
    f.vector()[:] = f_vec
    return f

random_smooth = random_smooth_Vh2_function(-1.0, 2.0)

cm = dl.plot(random_smooth, cmap='gray')
plt.colorbar(cm)
plt.title('random smooth function')
```

Out[23]:



In [24]:

```
def update_m(new_m_Vh2_numpy):
    SDAP.update_m(new_m_Vh2_numpy)
    REG.parameter.vector()[:] = new_m_Vh2_numpy

def cost():
    return SDAP.misfit() + REG.cost()

def gradient():
    return SDAP.gradient() + REG.gradient_numpy()

def apply_hessian(z_Vh2_numpy):
    return SDAP.apply_hessian(z_Vh2_numpy) + REG.apply_hessian_numpy(z_Vh2_numpy)

def apply_gauss_newton_hessian(z_Vh2_numpy):
    return SDAP.apply_gauss_newton_hessian(z_Vh2_numpy) + REG.apply_hessian_numpy(z_Vh2_numpy)
```

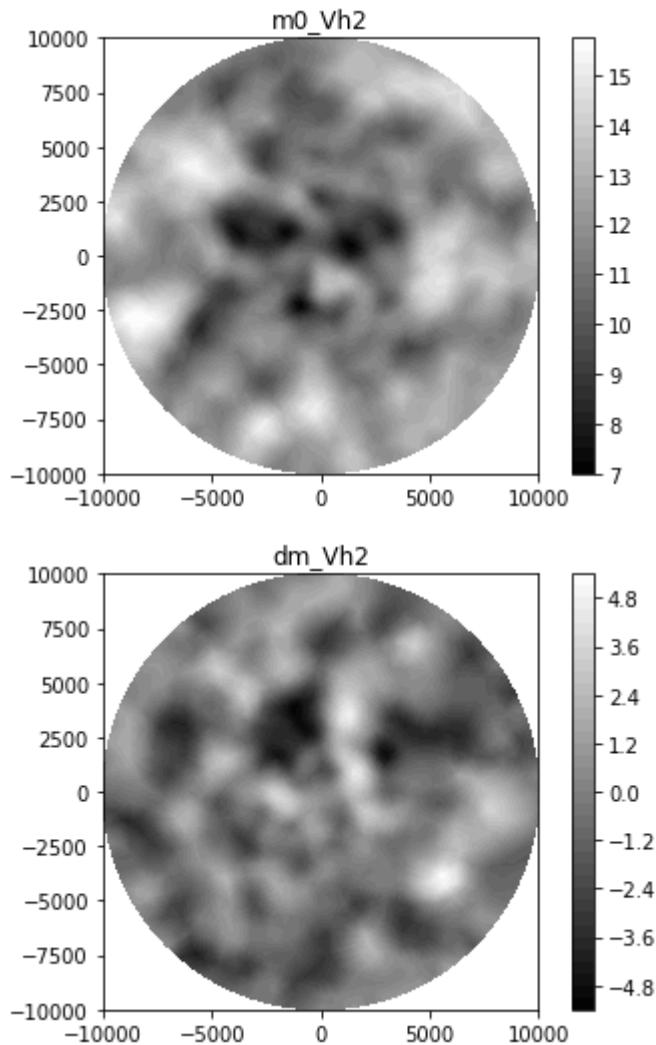
Finite difference check

In [25]:

```
m0_Vh2 = random_smooth_Vh2_function(m0_constant_value/1.5, m0_constant_value*1.5)
plt.figure()
cm = dl.plot(m0_Vh2, cmap='gray')
plt.colorbar(cm)
plt.title('m0_Vh2')

plt.figure()
dm_Vh2 = random_smooth_Vh2_function(-m0_constant_value/2.0, m0_constant_value/2.0)
cm = dl.plot(dm_Vh2, cmap='gray')
plt.colorbar(cm)
plt.title('dm_Vh2')
```

Out[25]:



In [26]:

```
if run_finite_difference_checks:
    m0_Vh2_numpy = m0_Vh2.vector()[:]
    dm_Vh2_numpy = dm_Vh2.vector()[:]

    update_m(m0_Vh2_numpy)
    J0_d = SDAP.misfit()
    g0_d = SDAP.gradient()
    H0dm_d = SDAP.apply_hessian(dm_Vh2_numpy)

    J0_r = REG.cost()
    g0_r = REG.gradient_numpy()
    H0dm_r = REG.apply_hessian_numpy(dm_Vh2_numpy)

    J0 = cost()
    g0 = gradient()
    H0dm = apply_hessian(dm_Vh2_numpy)

# ss = [1e-6]
ss = [1e0, 1e-1, 1e-2, 1e-3, 1e-4, 1e-5, 1e-6, 1e-7, 1e-8, 1e-9, 1e-10, 1e-11]
errs_grad_d = []
errs_hess_d = []
errs_grad_r = []
errs_hess_r = []
errs_grad = []
errs_hess = []
for s in ss:
```

```

m1_Vh2_numpy = m0_Vh2_numpy + s * dm_Vh2_numpy
update_m(m1_Vh2_numpy)
J1_d = SDAP.misfit()
g1_d = SDAP.gradient()
#     H1dm_d = SDAP.apply_hessian(dm_Vh2_numpy)

J1_r = REG.cost()
g1_r = REG.gradient_numpy()
#     H1dm_r = REG.apply_hessian_numpy(dm_Vh2_numpy)

J1 = cost()
g1 = gradient()
#     H1dm = apply_hessian(dm_Vh2_numpy)

# Gradient

dJ_diff_d = (J1_d - J0_d) / s
dJ_d = np.dot(g0_d, dm_Vh2_numpy)
err_grad_d = np.abs(dJ_diff_d - dJ_d) / np.abs(dJ_diff_d)
errs_grad_d.append(err_grad_d)

dJ_diff_r = (J1_r - J0_r) / s
dJ_r = np.dot(g0_r, dm_Vh2_numpy)
err_grad_r = np.abs(dJ_diff_r - dJ_r) / np.abs(dJ_diff_r)
errs_grad_r.append(err_grad_r)

dJ_diff = (J1 - J0) / s
dJ = np.dot(g0, dm_Vh2_numpy)
err_grad = np.abs(dJ_diff - dJ) / np.abs(dJ_diff)
errs_grad.append(err_grad)

# Hessian

dg_diff_d = (g1_d - g0_d) / s
err_hess_d = np.linalg.norm(dg_diff_d - H0dm_d) / np.linalg.norm(dg_diff_d)
errs_hess_d.append(err_hess_d)

dg_diff_r = (g1_r - g0_r) / s
err_hess_r = np.linalg.norm(dg_diff_r - H0dm_r) / np.linalg.norm(dg_diff_r)
errs_hess_r.append(err_hess_r)

dg_diff = (g1 - g0) / s
err_hess = np.linalg.norm(dg_diff - H0dm) / np.linalg.norm(dg_diff)
errs_hess.append(err_hess)

print('s=' , s)
print('err_grad_d=' , err_grad_d, ', err_grad_r=' , err_grad_r, ', err_grad=' , err_grad)
print('err_hess_d=' , err_hess_d, ', err_hess_r=' , err_hess_r, ', err_hess=' , err_hess)

ss = np.array(ss)
errs_grad_d = np.array(errs_grad_d)
errs_hess_d = np.array(errs_hess_d)
errs_grad_r = np.array(errs_grad_r)
errs_hess_r = np.array(errs_hess_r)
errs_grad = np.array(errs_grad)
errs_hess = np.array(errs_hess)

plt.figure()
plt.loglog(ss, errs_grad_d)
plt.loglog(ss, errs_hess_d)
plt.title('finite difference check for misfit')

```

```

plt.xlabel('step size s')
plt.ylabel('error')
plt.legend(['misfit gradient', 'misfit hessian'])

plt.figure()
plt.loglog(ss, errs_grad_r)
plt.loglog(ss, errs_hess_r)
plt.title('finite difference check for regularization')
plt.xlabel('step size s')
plt.ylabel('error')
plt.legend(['regularization gradient', 'regularization hessian'])

plt.figure()
plt.loglog(ss, errs_grad)
plt.loglog(ss, errs_hess)
plt.title('finite difference check for overall cost')
plt.xlabel('step size s')
plt.ylabel('error')
plt.legend(['gradient', 'hessian'])

```

Check Gauss-Newton Hessian

In [27]:

```

if check_gauss_newton_hessian:
    m0_Vh2_numpy = m0_Vh2.vector()[:]

    uobs_vec_backup = uobs.vector()[:].copy()
    uobs.vector()[:] = utrue.vector()[:].copy()

    update_m(mtrue_Vh2.vector()[:].copy())

    z_Vh2_numpy = random_smooth_Vh2_function(-m0_constant_value/2.0, m0_constant)

    Hz = SDAP.apply_hessian(z_Vh2_numpy)
    HGNz = SDAP.apply_gauss_newton_hessian(z_Vh2_numpy)

    GN_discrepancy_at_truth_nonoise = np.linalg.norm(Hz - HGNz) / np.linalg.norm(Hz)
    print('GN_discrepancy_at_truth_nonoise=', GN_discrepancy_at_truth_nonoise)

    update_m(m0_Vh2_numpy)

    Hz = SDAP.apply_hessian(z_Vh2_numpy)
    HGNz = SDAP.apply_gauss_newton_hessian(z_Vh2_numpy)

    GN_discrepancy_elsewhere_nonoise = np.linalg.norm(Hz - HGNz) / np.linalg.norm(Hz)
    print('GN_discrepancy_elsewhere_nonoise=', GN_discrepancy_elsewhere_nonoise)

    uobs.vector()[:] = uobs_vec_backup

    update_m(mtrue_Vh2.vector()[:].copy())
    Hz = SDAP.apply_hessian(z_Vh2_numpy)
    HGNz = SDAP.apply_gauss_newton_hessian(z_Vh2_numpy)

    GN_discrepancy_at_truth_yesnoise = np.linalg.norm(Hz - HGNz) / np.linalg.norm(Hz)
    print('GN_discrepancy_at_truth_yesnoise=', GN_discrepancy_at_truth_yesnoise)

    update_m(m0_Vh2_numpy)
    Hz = SDAP.apply_hessian(z_Vh2_numpy)

```

```

HGNz = SDAP.apply_gauss_newton_hessian(z_Vh2_numpy)

GN_discrepancy_elsewhere_yesnoise = np.linalg.norm(Hz - HGNz) / np.linalg.norm(z_Vh2_numpy)
print('GN_discrepancy_elsewhere_yesnoise=', GN_discrepancy_elsewhere_yesnoise)

# SDAP.update_m(m0_Vh2_numpy)
SDAP.update_forward()

p_Vh2_numpy = random_smooth_Vh2_function(-m0_constant_value/2.0, m0_constant_value)
q_Vh2_numpy = random_smooth_Vh2_function(-m0_constant_value/2.0, m0_constant_value)

SDAP.update_z(p_Vh2_numpy)
SDAP.update_incremental_forward()
du_dm_p = dl.Function(Zh)
du_dm_p.vector()[:] = SDAP.du_dm_z.vector()[:].copy()

SDAP.update_z(q_Vh2_numpy)
SDAP.update_incremental_forward()
du_dm_q = dl.Function(Zh)
du_dm_q.vector()[:] = SDAP.du_dm_z.vector()[:].copy()

C1 = data_inner_product(du_dm_p.vector(), du_dm_q.vector())

Hgn_p = SDAP.apply_gauss_newton_hessian(p_Vh2_numpy)
C2 = np.dot(q_Vh2_numpy, Hgn_p)

gauss_newton_error = np.abs(C1 - C2) / np.abs(C1)

print('gauss_newton_error=', gauss_newton_error)

```

In [97]:

```

def apply_misfit_gauss_newton_hessian_petsc(u_petsc):
    v = dl.Function(Vh2).vector()
    v[:] = SDAP.apply_gauss_newton_hessian(u_petsc[:])
    return v

class PCHWrapper:
    def __init__(me, do_updates=False):
        me.do_updates = do_updates

        me.PCK = None
        me.Hd_pch = None
        me.R_hmatrix = None
        me.H_pch = None
        me.preconditioner = None

    def build(me):
        me._make_Hd_hmatrix()
        me._make_reg_hmatrix()
        me._make_pre_hmatrix()

    def _make_pre_hmatrix(me):
        me.H_pch = me.Hd_pch + me.R_hmatrix
        me.preconditioner = me.H_pch.factorized_inverse()

    def _make_Hd_hmatrix(me):
        print('building PCH preconditioner')
        me.PCK = ProductConvolutionKernel(Vh2, Vh2,

```

```

apply_misfit_gauss_newton_hessian_pets
apply_misfit_gauss_newton_hessian_pets
num_batches, num_batches,
tau_rows=tau, tau_cols=tau,
num_neighbors_rows=num_neighbors,
num_neighbors_cols=num_neighbors)
Hd_pch_nonsym, extras = make_hmatrix_from_kernel(me.PCK, hmatrix_tol=hma
me.Hd_pch = Hd_pch_nonsym.spd()

def _make_reg_hmatrix(me):
    print('Building Regularization H-Matrix')
    me.R_hmatrix = REG.make_R_hmatrix(me.Hd_pch.bct, rtol=1e-6)

def update_reg(me):
    if me.Hd_pch is None:
        me._make_Hd_hmatrix()
    me._make_reg_hmatrix()
    me._make_pre_hmatrix()

def update_Hd(me):
    me._make_Hd_hmatrix()
    if me.R_hmatrix is None:
        me._make_reg_hmatrix()
    me._make_pre_hmatrix()

def low_rank_update(me, xx, yy):
    if me.do_updates and (me.preconditioner_hmatrix is not None):
        pass
        # me.preconditioner_hmatrix = me.preconditioner_hmatrix.

def solve(me, u_Vh2_numpy):
    if me.preconditioner is None:
        return REG.solve_hessian_numpy(u_Vh2_numpy)
    else:
        return me.preconditioner.matvec(u_Vh2_numpy)

def reset(me):
    me.PCK = None
    me.Hd_pch = None
    me.R_hmatrix = None
    me.H_pch = None
    me.preconditioner = None

```

In [98]:

```

REG.update_gamma(1e4)

get_optimization_variable = lambda : Wh_to_Vh2_numpy(m_Wh.vector()[:])
set_optimization_variable = update_m
cost_triple = lambda : [cost(), SDAP.misfit(), REG.cost()]
build_nothing = lambda : None
update_nothing = lambda X, Y: None

```

```

/home/nick/anaconda3/envs/fenics4/lib/python3.9/site-packages/scipy/sparse/linal
g/dsolve/linsolve.py:318: SparseEfficiencyWarning: splu requires CSC matrix form
at
    warn('splu requires CSC matrix format', SparseEfficiencyWarning)

```

```
In [99]: PCH1 = PCHWrapper(do_updates=False)

def morozov_helper():
    misfit_datanorm = np.sqrt(2.0 * SDAP.misfit())
    print('gamma=', REG.gamma, ', noise_datanorm=', noise_datanorm, ', misfit_danorm=', misfit_datanorm)
    return misfit_datanorm

morozov_gammas = list()
morozov_discrepancies = list()

def log_morozov_function(log_gamma):
    gamma = np.exp(log_gamma)
    print()
    print('----- gamma=' , gamma, ' -----')
    REG.update_gamma(gamma)

    preconditioner_build_iters = (3,)
    if PCH1.preconditioner is None:
        preconditioner_build_iters = (3,)
    else:
        PCH1.update_reg()
        preconditioner_build_iters = tuple([])

    update_m(m0_constant_value * np.ones(Vh2.dim()))
    newtoncg_ls(get_optimization_variable,
                set_optimization_variable,
                cost_triple,
                gradient,
                apply_hessian,
                apply_gauss_newton_hessian,
                PCH1.build,
                update_nothing,
                PCH1.solve,
                preconditioner_build_iters = preconditioner_build_iters,
                rtol=newton_rtol,
                forcing_sequence_power=forcing_sequence_power)

    misfit_datanorm = morozov_helper()
    morozov_gammas.append(gamma)
    morozov_discrepancies.append(misfit_datanorm)

    log_mismatch = np.log(noise_datanorm) - np.log(misfit_datanorm)
    return log_mismatch

if gamma_morozov is None:
    sol_morozov = root_scalar(log_morozov_function, x0=np.log(5e3), x1=np.log(5e3))
    print(sol_morozov)
    gamma_morozov = np.exp(sol_morozov.root)
    print('gamma_morozov=' , gamma_morozov)

REG.update_gamma(gamma_morozov)
```

Plots to make (3):

- Morozov discrepancy log-log plot

```
In [31]: morozov_gammas = np.array(morozov_gammas)
```

```

morozov_discrepancies = np.array(morozov_discrepancies)

sort_inds = np.argsort(morozov_gammas)
morozov_gammas = morozov_gammas[sort_inds]
morozov_discrepancies = morozov_discrepancies[sort_inds]

print('morozov_gammas=', morozov_gammas)
print('morozov_discrepancies=', morozov_discrepancies)
print('noise_datanorm=', noise_datanorm)

np.savetxt(save_dir_str + '/morozov_gammas.txt', morozov_gammas)
np.savetxt(save_dir_str + '/morozov_discrepancies.txt', morozov_discrepancies)
np.savetxt(save_dir_str + '/noise_datanorm.txt', np.array([noise_datanorm])))

plt.figure()
plt.loglog(morozov_gammas, morozov_discrepancies)
plt.loglog(morozov_gammas, noise_datanorm*np.ones(len(morozov_gammas)))
plt.plot(gamma_morozov, noise_datanorm, '*r')
plt.title('Morozov discrepancy')
plt.xlabel(r'$\gamma$')
plt.ylabel('misfit norm')
plt.legend(['morozov discrepancy', 'norm of noise'])

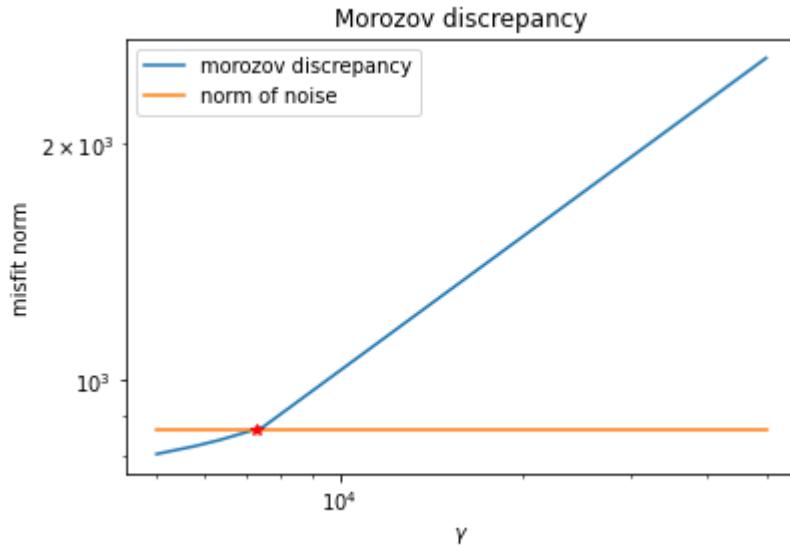
```

```

morozov_gammas= [ 5000.          5774.86476799  6344.50318043  7266.77474578
    7285.1582313   7285.48465351  7285.48829713  7476.08321631
    50000.          ]
morozov_discrepancies= [ 805.55463841   824.34302485   839.37764994   865.70833707
    866.25658052
    866.26619855   866.2663068   872.00007074  2572.87233884]
noise_datanorm= 866.2663059032905
<matplotlib.legend.Legend at 0x7fa3582d2040>

```

Out[31]:



Newton Solve with PCH preconditioning

In [115...]

```

PCH1 = PCHWrapper(do_updates=False)
REG.update_gamma(gamma_morozov)
update_m(m0_constant_value * np.ones(Vh2.dim()))

iter_PCH = list()
m_iter_PCH = list()

```

```

def PCH_callback(it, m_Vh2_numpy):
    iter_PCH.append(it)
    m_iter_PCH.append(m_Vh2_numpy)
    m_Vh2 = dl.Function(Vh2)
    m_Vh2.vector()[:] = m_Vh2_numpy
    plt.figure()
    cm = dl.plot(m_Vh2, cmap='gray')
    plt.colorbar(cm)
    plt.title('m_'+str(it))

PCH_convergence_info = newtoncg_ls(get_optimization_variable,
                                    set_optimization_variable,
                                    cost_triple,
                                    gradient,
                                    apply_hessian,
                                    apply_gauss_newton_hessian,
                                    PCH1.build,
                                    update_nothing,
                                    PCH1.solve,
                                    callback=PCH_callback,
                                    preconditioner_build_iters = (3,),
                                    rtol=newton_rtol,
                                    num_gn_iter=num_gn_iter,
                                    forcing_sequence_power=forcing_sequence_power)

misfit_datanorm = morozov_helper()

```

```

/home/nick/anaconda3/envs/fenics4/lib/python3.9/site-packages/scipy/sparse/linalg/dsolve/linsolve.py:318: SparseEfficiencyWarning: splu requires CSC matrix format
  warn('splu requires CSC matrix format', SparseEfficiencyWarning)
using Gauss-Newton Hessian
it= 0 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=True
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 1.947e+07
||M r0|| = 1.947e+07
(M r0, r0) = 1.947e+07
Iteration : 0 (r, r) = 379080272233562.7
Iteration : 1 (r, r) = 42697972707314.5
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 1 iterations with final norm 6534368.57755319

===== Begin Newton CG convergence information =====
=====
Preconditioned inexact Newton-CG with line search
Hp=-g
u <- u + alpha * p
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0      : u=u0          -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1      : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
...
it=last   : linesearch u -> J -> g -> Done.

it:      Newton iteration number
nCG:     number of CG iterations in Newton iteration
nJ:     number of cost function evaluations in Newton iteration

```

nG: number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp: number of Hessian-vector products in Newton iteration
GN: True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
BP: True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
cost: cost, $J = Jd + Jr$
misfit: misfit cost, Jd
reg: regularization cost, Jr
(g,p): inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
||g||L2: l2 norm of gradient
alpha: step size
tolcg: relative tolerance for $Hp=-g$ CG solve (unpreconditioned residual decrease)

it nCG nJ nG nHp GN BP	cost	misfit	reg	(g,p)	g L2	alpha	t
0 1 1 1 T F	2.086848e+08	2.1e+08	0.0e+00	-3.2e+08	1.9e+07	-----	5.0e-01

converged : False
reason : unknown reason
cumulative CG iterations : 1
cumulative cost evaluations : 1
cumulative gradient evaluations : 1
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 1
===== End Newton CG convergence information =====
=====

using Gauss-Newton Hessian
it= 1 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=True
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 5.759e+06
||M r0|| = 5.759e+06
(M r0, r0) = 5.759e+06
Iteration : 0 (r, r) = 33166444994024.17
Iteration : 1 (r, r) = 10778455539875.082
Iteration : 2 (r, r) = 3559104459029.746
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 2 iterations with final norm 1886558.8936022501

===== Begin Newton CG convergence information =====
=====

Preconditioned inexact Newton-CG with line search
 $Hp=-g$
u <- u + alpha * p
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0 : u=u0 -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve $Hp=-g$
it=1 : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve $Hp=-g$
...
it=last : linesearch u -> J -> g -> Done.

it: Newton iteration number
nCG: number of CG iterations in Newton iteration
nJ: number of cost function evaluations in Newton iteration
nG: number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp: number of Hessian-vector products in Newton iteration
GN: True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used

```

BP:      True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise
cost:    cost, J = Jd + Jr
misfit:  misfit cost, Jd
reg:     regularization cost, Jr
(g,p):   inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
||g||L2: l2 norm of gradient
alpha:   step size
tolcg:  relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrease)

it nCG nJ nG nHp GN BP          cost  misfit    reg    (g,p) ||g||L2  alpha  t
olcg
  0   1   1   1   T   F 2.086848e+08 2.1e+08 0.0e+00 -3.2e+08 1.9e+07  ---- 5.0
e-01
  1   2   1   1   2   T   F 4.510106e+07 4.5e+07 2.3e+05 -7.1e+07 5.8e+06 1.0e+00 5.0
e-01

converged : False
reason   : unknown reason
cumulative CG iterations : 3
cumulative cost evaluations : 2
cumulative gradient evaluations : 2
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 3
===== End Newton CG convergence information =====
=====

using Gauss-Newton Hessian
it= 2 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=
True
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 2.355e+06
||M r0|| = 2.355e+06
(M r0, r0) = 2.355e+06
Iteration : 0 (r, r) = 5546249383769.889
Iteration : 1 (r, r) = 1749923816325.211
Iteration : 2 (r, r) = 1287697895220.8992
Iteration : 3 (r, r) = 754532763084.305
Iteration : 4 (r, r) = 374622366860.8285
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 4 iterations with final norm 612064.021864403

===== Begin Newton CG convergence information =====
=====
Preconditioned inexact Newton-CG with line search
Hp=-g
u <- u + alpha * p
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0   : u=u0      -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1   : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
...
it=last : linesearch u -> J -> g -> Done.

it:      Newton iteration number
nCG:    number of CG iterations in Newton iteration
nJ:     number of cost function evaluations in Newton iteration
nG:     number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp:    number of Hessian-vector products in Newton iteration

```

GN: True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
 BP: True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
 cost: cost, $J = J_d + J_r$
 misfit: misfit cost, J_d
 reg: regularization cost, J_r
 (g,p): inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
 $\|g\|_{L2}$: l2 norm of gradient
 alpha: step size
 tolcg: relative tolerance for $H_p = -g$ CG solve (unpreconditioned residual decrease)

it	nCG	nJ	nG	nHp	GN	BP	cost	misfit	reg	(g,p)	$\ g\ _{L2}$	alpha	t
0	1	1	1	1	T	F	2.086848e+08	2.1e+08	0.0e+00	-3.2e+08	1.9e+07	----	5.0
e-01	1	2	1	2	T	F	4.510106e+07	4.5e+07	2.3e+05	-7.1e+07	5.8e+06	1.0e+00	5.0
e-01	2	4	1	4	T	F	9.748476e+06	9.4e+06	3.6e+05	-1.5e+07	2.4e+06	1.0e+00	3.5
e-01													

converged : False
 reason : unknown reason
 cumulative CG iterations : 7
 cumulative cost evaluations : 3
 cumulative gradient evaluations : 3
 cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 7
 ===== End Newton CG convergence information ======

using Gauss-Newton Hessian
 it= 3 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=True
 building preconditioner
 building PCH preconditioner
 Computing impulse response moments
 getting spatially varying volume
 getting spatially varying mean
 getting spatially varying covariance
 Preparing sample point batch stuff
 Preparing c++ object
 Building initial sample point batches

Making row and column cluster treesUsing ProductConvolutionKernelRBFColsOnly!

Making block cluster trees
 Building A kernel hmatrix
 Making input and output mass matrix hmatrices— building H-matrix (tol =
 Computing A_hmatrix = M_out_hmatrix * A_kernel_hmatrix * M_in_hmatrix
 making hmatrix spd
 symmetrizing
 $1e-06$)
 getting smallest eigenvalue with Lanczos9 s (5.97 GB)
 done in 11.36s
 size of H-matrix = 4.42 MB
 lambda_min= -34617.2416808737
 scaling_at_lambda_min= 0.9878048780487805
 scaling_at_zero= 0.5
 Setting up operator $T = (2*A - (b+a)*I) / (b-a)$
 computing $T^{(2^k)}$
 computing $T^{(2^1)} = T^{(2^0)} * T^{(2^0)}$

```

computing T^(2^2) = T^(2^1) * T^(2^1)
— H-matrix multiplication C=A*B
  done in 27.99s
  size of C = 5.30 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
  done in 29.52s
  size of C = 7.75 MB
computing negative spectral projector Pi_minus = I / (I + T^(2^k))
— H-matrix inverse ( rtol = 1e-07 , atol = 1e-12 , overwrite= False )
  done in 21.9474937915802
  size of inverse = 17634161 bytes
computing absolute value projector Pi = I - 2*Pi_minus
computing A_plus = Pi * A

— H-matrix multiplication C=A*B
  done in 34.64s
  size of C = 20.47 MB
Building Regularization H-Matrix
  matrix has dimension 1416 x 1416
    no of non-zeroes = 9746
    matrix is       real valued
    format          = non symmetric
  size of sparse matrix = 163.52 kB
  |S|_F           = 1.17463e+06
    sparsity constant = 20
  size of H-matrix = 4.06 MB
  |A|_F           = 1.17463e+06
|S-A|_2 = 5.03893e-09
  matrix has dimension 1416 x 1416
    no of non-zeroes = 9746
    matrix is       real valued
    format          = symmetric
  size of sparse matrix = 163.52 kB
  |S|_F           = — H-matrix inverse ( rtol = 5.18561e+06
    sparsity constant = 20
  size of H-matrix = 2.29 MB
  |A|_F           = 5.18561e+06
|S-A|_2 = 4.66653e-09
1e-06 , atol = 1e-14 , overwrite= False )
[===== done in 12.812686920166016
  size of inverse = 3361874 bytes

— H-matrix multiplication C=A*B
  done in 21.39s
  size of C = 3.88 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
  done in 29.34s
  size of C = 8.54 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 5.789e+05
||M r0|| = 2.200e+01
(M r0, r0) = 1.989e+03
Iteration : 0 (r, r) = 335091840852.2207
[===== ] 37% ETA 17 s Iteration : 1 (r, r)
= 24938055596.1164

```

```

        done in 28.54s
        size of LU factor = 21.95 MB
Iteration : 2 (r, r) = 2836422076.4449687
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 2 iterations with final norm 53258.0705287468

===== Begin Newton CG convergence information =====
=====
Preconditioned inexact Newton-CG with line search
Hp=-g
u <- u + alpha * p
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0      : u=u0          -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1      : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
...
it=last   : linesearch u -> J -> g -> Done.

it:      Newton iteration number
nCG:    number of CG iterations in Newton iteration
nJ:     number of cost function evaluations in Newton iteration
nG:     number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp:    number of Hessian-vector products in Newton iteration
GN:     True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
BP:     True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
cost:   cost, J = Jd + Jr
misfit: misfit cost, Jd
reg:    regularization cost, Jr
(g,p): inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
||g||L2: l2 norm of gradient
alpha:  step size
tolcg:  relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrease)

it nCG nJ nG nHp GN BP          cost  misfit    reg    (g,p) ||g||L2  alpha  t
olcg
  0   1   1   1   1   T   F 2.086848e+08 2.1e+08 0.0e+00 -3.2e+08 1.9e+07    ---- 5.0
e-01
  1   2   1   1   2   T   F 4.510106e+07 4.5e+07 2.3e+05 -7.1e+07 5.8e+06 1.0e+00 5.0
e-01
  2   4   1   1   4   T   F 9.748476e+06 9.4e+06 3.6e+05 -1.5e+07 2.4e+06 1.0e+00 3.5
e-01
  3   2   1   1   2   T   T 2.362446e+06 1.9e+06 4.2e+05 -3.1e+06 5.8e+05 1.0e+00 1.7
e-01

converged : False
reason    : unknown reason
cumulative CG iterations : 9
cumulative cost evaluations : 4
cumulative gradient evaluations : 4
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 9
===== End Newton CG convergence information =====
=====

using Gauss-Newton Hessian
it= 4 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=True
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1

```

```

||r0|| = 5.615e+04
||M r0|| = 4.030e+00
(M r0, r0) = 2.901e+02
Iteration : 0 (r, r) = 3152701332.7385793
Iteration : 1 (r, r) = 926255299.9682261
Iteration : 2 (r, r) = 264288057.3774432
Iteration : 3 (r, r) = 74739577.73096718
Iteration : 4 (r, r) = 27600873.92062474
Iteration : 5 (r, r) = 8586981.021476232
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 5 iterations with final norm 2930.3551016005263

===== Begin Newton CG convergence information =====
=====
Preconditioned inexact Newton-CG with line search
Hp=-g
u <- u + alpha * p
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0      : u=u0      -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1      : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
...
it=last   : linesearch u -> J -> g -> Done.

it:        Newton iteration number
nCG:       number of CG iterations in Newton iteration
nJ:        number of cost function evaluations in Newton iteration
nG:        number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp:       number of Hessian-vector products in Newton iteration
GN:        True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
BP:        True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
cost:      cost, J = Jd + Jr
misfit:    misfit cost, Jd
reg:       regularization cost, Jr
(g,p):    inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
||g||L2:   l2 norm of gradient
alpha:     step size
tolcg:    relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrease)

it nCG nJ nG nHp GN BP          cost  misfit      reg    (g,p) ||g||L2  alpha   t
olcg
  0   1   1   1   1   T   F 2.086848e+08 2.1e+08 0.0e+00 -3.2e+08 1.9e+07   ---- 5.0
e-01
  1   2   1   1   2   T   F 4.510106e+07 4.5e+07 2.3e+05 -7.1e+07 5.8e+06 1.0e+00 5.0
e-01
  2   4   1   1   4   T   F 9.748476e+06 9.4e+06 3.6e+05 -1.5e+07 2.4e+06 1.0e+00 3.5
e-01
  3   2   1   1   2   T   T 2.362446e+06 1.9e+06 4.2e+05 -3.1e+06 5.8e+05 1.0e+00 1.7
e-01
  4   5   1   1   5   T   F 8.281335e+05 3.9e+05 4.4e+05 -5.5e+04 5.6e+04 1.0e+00 5.4
e-02

converged : False
reason    : unknown reason
cumulative CG iterations : 14
cumulative cost evaluations : 5
cumulative gradient evaluations : 5
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 14

```

```
===== End Newton CG convergence information =====
```

```
using Hessian
it= 5 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=
False
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 3.447e+03
||M r0|| = 1.716e-01
(M r0, r0) = 1.291e+01
Iteration : 0 (r, r) = 11878434.113574648
Iteration : 1 (r, r) = 4474880.982629124
Iteration : 2 (r, r) = 1872726.960222972
Iteration : 3 (r, r) = 809375.4932472149
Iteration : 4 (r, r) = 272196.92355099245
Iteration : 5 (r, r) = 104684.54787575048
Iteration : 6 (r, r) = 34588.14858958904
Iteration : 7 (r, r) = 15821.076784170593
Iteration : 8 (r, r) = 7131.601675672953
Iteration : 9 (r, r) = 2807.591657953455
Iteration : 10 (r, r) = 687.1484048159077
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 10 iterations with final norm 26.213515689733565
```

```
===== Begin Newton CG convergence information =====
```

```
=====
Preconditioned inexact Newton-CG with line search
Hp=-g
u <- u + alpha * p
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction
```

```
it=0 : u=u0      -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1 : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
...
it=last : linesearch u -> J -> g -> Done.
```

```
it:      Newton iteration number
nCG:    number of CG iterations in Newton iteration
nJ:      number of cost function evaluations in Newton iteration
nG:      number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp:    number of Hessian-vector products in Newton iteration
GN:      True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
BP:      True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
cost:    cost, J = Jd + Jr
misfit:  misfit cost, Jd
reg:     regularization cost, Jr
(g,p):   inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
||g||L2: l2 norm of gradient
alpha:   step size
tolcg:  relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrease)
```

it nCG nJ nG nHp GN BP	cost	misfit	reg	(g,p)	g L2	alpha	t
0 1 1 1 1 T F	2.086848e+08	2.1e+08	0.0e+00	-3.2e+08	1.9e+07	----	5.0
e-01							
1 2 1 1 2 T F	4.510106e+07	4.5e+07	2.3e+05	-7.1e+07	5.8e+06	1.0e+00	5.0
e-01							

```

2 4 1 1 4 T F 9.748476e+06 9.4e+06 3.6e+05 -1.5e+07 2.4e+06 1.0e+00 3.5
e-01
3 2 1 1 2 T T 2.362446e+06 1.9e+06 4.2e+05 -3.1e+06 5.8e+05 1.0e+00 1.7
e-01
4 5 1 1 5 T F 8.281335e+05 3.9e+05 4.4e+05 -5.5e+04 5.6e+04 1.0e+00 5.4
e-02
5 10 1 1 10 F F 8.007117e+05 3.8e+05 4.3e+05 -1.7e+02 3.4e+03 1.0e+00 1.3
e-02

```

```

converged : False
reason    : unknown reason
cumulative CG iterations : 24
cumulative cost evaluations : 6
cumulative gradient evaluations : 6
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 24
===== End Newton CG convergence information =====
=====
```

```

using Hessian
it= 6 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=
False
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 2.656e+01
||M r0|| = 1.407e-03
(M r0, r0) = 1.034e-01
Iteration : 0 (r, r) = 705.2997644684344
Iteration : 1 (r, r) = 262.88101670715537
Iteration : 2 (r, r) = 109.52955377191033
Iteration : 3 (r, r) = 56.45719229296313
Iteration : 4 (r, r) = 20.197572963239836
Iteration : 5 (r, r) = 8.042919585011
Iteration : 6 (r, r) = 2.646900805773341
Iteration : 7 (r, r) = 0.9085108703594851
Iteration : 8 (r, r) = 0.35523972640181894
Iteration : 9 (r, r) = 0.16889116391474573
Iteration : 10 (r, r) = 0.07045043150262141
Iteration : 11 (r, r) = 0.015175237123563756
Iteration : 12 (r, r) = 0.005606354420032645
Iteration : 13 (r, r) = 0.0011599884776373607
Iteration : 14 (r, r) = 0.00033122157551053184
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 14 iterations with final norm 0.018199493825668114

```

```

===== Begin Newton CG convergence information =====
=====
```

```

Preconditioned inexact Newton-CG with line search
Hp=-g
u <- u + alpha * p
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

```

```

it=0      : u=u0      -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1      : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
...
it=last : linesearch u -> J -> g -> Done.

```

```

it:      Newton iteration number
nCG:    number of CG iterations in Newton iteration
nJ:     number of cost function evaluations in Newton iteration
nG:     number of gradient evaluations in Newton iteration

```

nHp: number of Hessian-vector products in Newton iteration
 GN: True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
 BP: True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
 cost: cost, $J = Jd + Jr$
 misfit: misfit cost, Jd
 reg: regularization cost, Jr
 (g,p): inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
 $\|g\|L2$: l2 norm of gradient
 alpha: step size
 tolcg: relative tolerance for $Hp=-g$ CG solve (unpreconditioned residual decrease)

it	nCG	nJ	nG	nHp	GN	BP	cost	misfit	reg	(g,p)	$\ g\ L2$	alpha	t
0	1	1	1	1	T	F	2.086848e+08	2.1e+08	0.0e+00	-3.2e+08	1.9e+07	-----	5.0
e-01													
1	2	1	1	2	T	F	4.510106e+07	4.5e+07	2.3e+05	-7.1e+07	5.8e+06	1.0e+00	5.0
e-01													
2	4	1	1	4	T	F	9.748476e+06	9.4e+06	3.6e+05	-1.5e+07	2.4e+06	1.0e+00	3.5
e-01													
3	2	1	1	2	T	T	2.362446e+06	1.9e+06	4.2e+05	-3.1e+06	5.8e+05	1.0e+00	1.7
e-01													
4	5	1	1	5	T	F	8.281335e+05	3.9e+05	4.4e+05	-5.5e+04	5.6e+04	1.0e+00	5.4
e-02													
5	10	1	1	10	F	F	8.007117e+05	3.8e+05	4.3e+05	-1.7e+02	3.4e+03	1.0e+00	1.3
e-02													
6	14	1	1	14	F	F	8.006273e+05	3.8e+05	4.3e+05	-1.1e-02	2.7e+01	1.0e+00	1.2
e-03													

converged : False
 reason : unknown reason
 cumulative CG iterations : 38
 cumulative cost evaluations : 7
 cumulative gradient evaluations : 7
 cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 38
 ===== End Newton CG convergence information =====
 ====

using Hessian
 it= 7 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=False

===== Begin Newton CG convergence information =====

=====

Preconditioned inexact Newton-CG with line search

Hp=-g

u <- u + alpha * p

u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0 : u=u0 -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
 it=1 : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g

...

it=last : linesearch u -> J -> g -> Done.

it: Newton iteration number

nCG: number of CG iterations in Newton iteration

nJ: number of cost function evaluations in Newton iteration

nG: number of gradient evaluations in Newton iteration

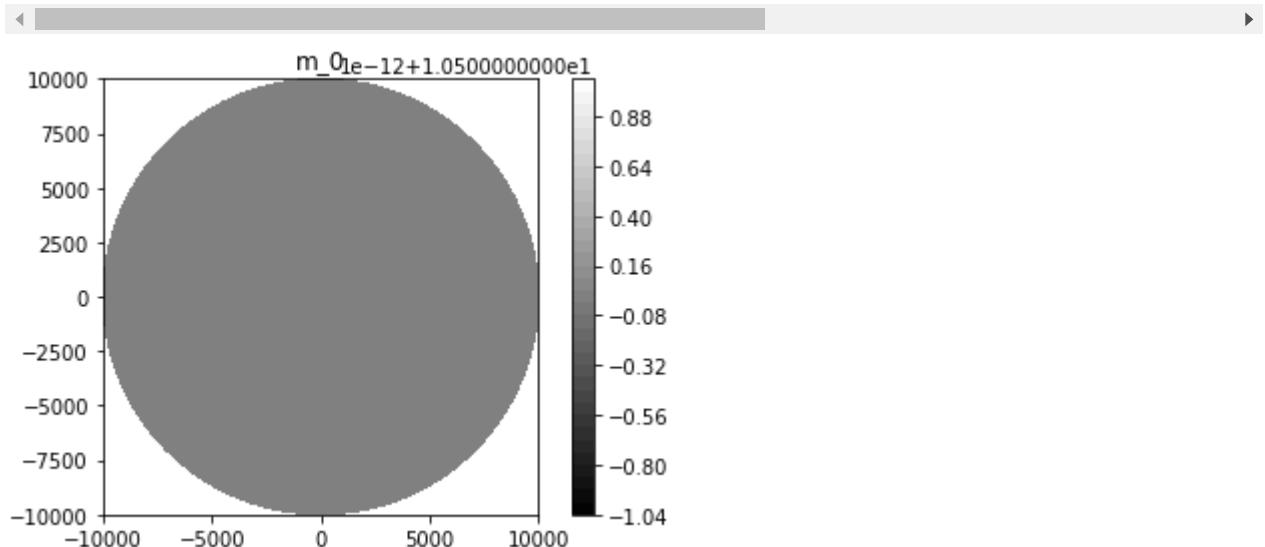
nHp: number of Hessian-vector products in Newton iteration

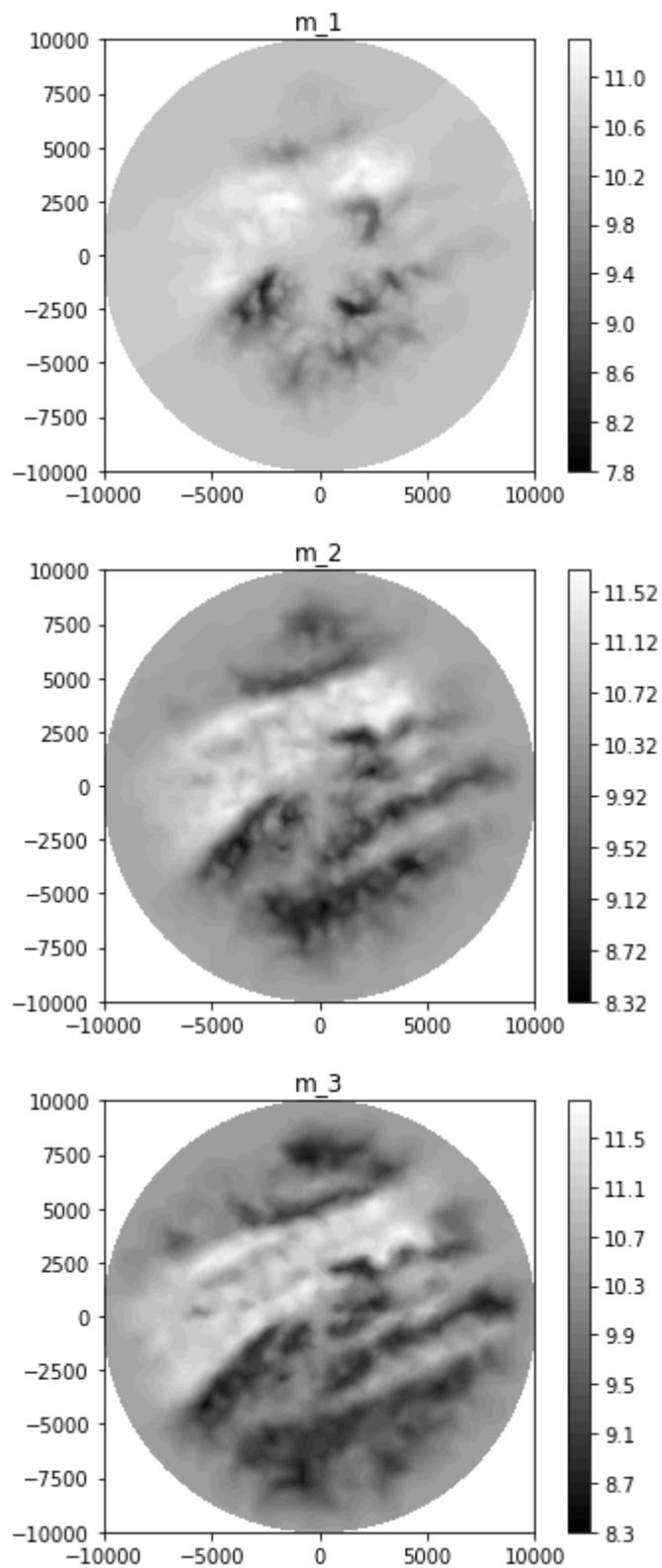
GN: True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
 BP: True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
 cost: cost, $J = Jd + Jr$
 misfit: misfit cost, Jd
 reg: regularization cost, Jr
 (g,p): inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
 $\|g\|L2$: l2 norm of gradient
 alpha: step size
 tolcg: relative tolerance for $Hp = -g$ CG solve (unpreconditioned residual decrease)

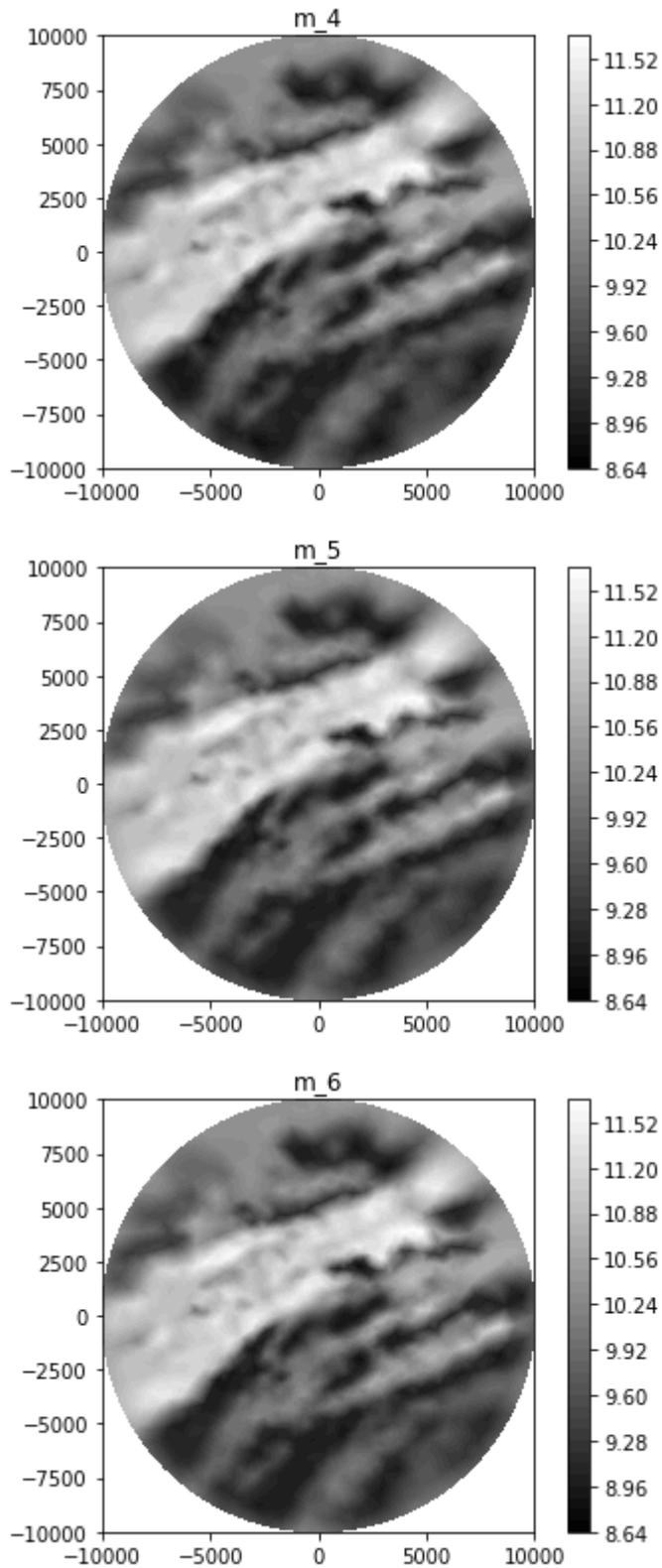
it	nCG	nJ	nG	nHp	GN	BP	cost	misfit	reg	(g,p)	$\ g\ L2$	alpha	t
0	1	1	1	1	T	F	2.086848e+08	2.1e+08	0.0e+00	-3.2e+08	1.9e+07	----	5.0
e-01	1	2	1	2	T	F	4.510106e+07	4.5e+07	2.3e+05	-7.1e+07	5.8e+06	1.0e+00	5.0
e-01	2	4	1	4	T	F	9.748476e+06	9.4e+06	3.6e+05	-1.5e+07	2.4e+06	1.0e+00	3.5
e-01	3	2	1	2	T	T	2.362446e+06	1.9e+06	4.2e+05	-3.1e+06	5.8e+05	1.0e+00	1.7
e-02	4	5	1	5	T	F	8.281335e+05	3.9e+05	4.4e+05	-5.5e+04	5.6e+04	1.0e+00	5.4
e-02	5	10	1	10	F	F	8.007117e+05	3.8e+05	4.3e+05	-1.7e+02	3.4e+03	1.0e+00	1.3
e-03	6	14	1	14	F	F	8.006273e+05	3.8e+05	4.3e+05	-1.1e-02	2.7e+01	1.0e+00	1.2
	7	0	1	0	F	F	8.006273e+05	3.8e+05	4.3e+05	-----	4.1e-02	1.0e+00	

converged : True
 reason : Norm of the gradient less than tolerance
 cumulative CG iterations : 38
 cumulative cost evaluations : 8
 cumulative gradient evaluations : 8
 cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 38
 ===== End Newton CG convergence information =====

gamma= 7285.488266896614 , noise_datanorm= 866.2663059032905 , misfit_datanorm= 866.2663070330523







In [116]:

```
misfit_datanorm = np.sqrt(2.0 * SDAP.misfit())
print('noise_datanorm=', noise_datanorm, ', misfit_datanorm=', misfit_datanorm)
```

```
noise_datanorm= 866.2663059032905 , misfit_datanorm= 866.2663070330523
```

Newton solve with regularization preconditioning

In [117]:

```

update_m(m0_constant_value * np.ones(Vh2.dim())))
REG.update_gamma(gamma_morozov)

iter_REG = list()
m_iter_REG = list()
def REG_callback(it, m_Vh2_numpy):
    iter_REG.append(it)
    m_iter_REG.append(m_Vh2_numpy)
    m_Vh2 = dl.Function(Vh2)
    m_Vh2.vector()[:] = m_Vh2_numpy
    plt.figure()
    cm = dl.plot(m_Vh2, cmap='gray')
    plt.colorbar(cm)
    plt.title('m_'+str(it))

REG_convergence_info = newtoncg_ls(get_optimization_variable,
                                    set_optimization_variable,
                                    cost_triple,
                                    gradient,
                                    apply_hessian,
                                    apply_gauss_newton_hessian,
                                    build_nothing,
                                    update_nothing,
                                    REG.solve_hessian_numpy,
                                    callback=REG_callback,
                                    rtol=newton_rtol,
                                    num_gn_iter=num_gn_iter,
                                    forcing_sequence_power=forcing_sequence_power)

misfit_datanorm = morozov_helper()

using Gauss-Newton Hessian
it= 0 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=True
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 1.947e+07
||M r0|| = 1.188e+05
(M r0, r0) = 1.395e+06
Iteration : 0 (r, r) = 379080272233562.7
Iteration : 1 (r, r) = 60675735182973.14
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 1 iterations with final norm 7789463.08695106

===== Begin Newton CG convergence information =====
=====
Preconditioned inexact Newton-CG with line search
Hp=-g
u <- u + alpha * p
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0 : u=u0      -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1 : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
...
it=last : linesearch u -> J -> g -> Done.

it:      Newton iteration number
nCG:     number of CG iterations in Newton iteration

```

nJ: number of cost function evaluations in Newton iteration
nG: number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp: number of Hessian-vector products in Newton iteration
GN: True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
BP: True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
cost: cost, $J = J_d + J_r$
misfit: misfit cost, J_d
reg: regularization cost, J_r
(g,p): inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
||g||L2: l2 norm of gradient
alpha: step size
tolcg: relative tolerance for $H_p = -g$ CG solve (unpreconditioned residual decrease)

it nCG nJ nG nHp GN BP	cost	misfit	reg	(g,p)	g L2	alpha	t
0 1 1 1 1 T F	2.086848e+08	2.1e+08	0.0e+00	-2.9e+08	1.9e+07	-----	5.0e-01

converged : False
reason : unknown reason
cumulative CG iterations : 1
cumulative cost evaluations : 1
cumulative gradient evaluations : 1
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 1
===== End Newton CG convergence information =====
=====

using Gauss-Newton Hessian
it= 1 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=True
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 7.902e+06
||M r0|| = 2.549e+04
(M r0, r0) = 4.012e+05
Iteration : 0 (r, r) = 62443359311125.61
Iteration : 1 (r, r) = 25918369449639.85
Iteration : 2 (r, r) = 15279737773614.691
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 2 iterations with final norm 3908930.5153218945

===== Begin Newton CG convergence information =====
=====
Preconditioned inexact Newton-CG with line search
 $H_p = -g$
 $u \leftarrow u + \alpha * p$
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0 : u=u0 -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve $H_p = -g$
it=1 : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve $H_p = -g$
...
it=last : linesearch u -> J -> g -> Done.

it: Newton iteration number
nCG: number of CG iterations in Newton iteration
nJ: number of cost function evaluations in Newton iteration
nG: number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp: number of Hessian-vector products in Newton iteration

GN: True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
 BP: True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
 cost: cost, $J = J_d + J_r$
 misfit: misfit cost, J_d
 reg: regularization cost, J_r
 (g,p): inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
 $\|g\|_{L2}$: l2 norm of gradient
 alpha: step size
 tolcg: relative tolerance for $H_p = -g$ CG solve (unpreconditioned residual decrease)

it	nCG	nJ	nG	nHp	GN	BP	cost	misfit	reg	(g,p)	$\ g\ _{L2}$	alpha	t
0	1	1	1	1	T	F	2.086848e+08	2.1e+08	0.0e+00	-2.9e+08	1.9e+07	----	5.0
e-01	1	2	1	2	T	F	6.073043e+07	6.1e+07	2.2e+04	-7.7e+07	7.9e+06	1.0e+00	5.0
e-01													

converged : False
 reason : unknown reason
 cumulative CG iterations : 3
 cumulative cost evaluations : 2
 cumulative gradient evaluations : 2
 cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 3
 ===== End Newton CG convergence information =====
 =====

using Gauss-Newton Hessian
 it= 2 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=True
 Residual: r=b-Ax
 Preconditioner: M =approx= A^-1
 $\|r_0\| = 3.874e+06$
 $\|M r_0\| = 1.067e+04$
 $(M r_0, r_0) = 1.640e+05$
 Iteration : 0 (r, r) = 15009781392811.04
 Iteration : 1 (r, r) = 9788362612496.102
 Iteration : 2 (r, r) = 7680398450331.973
 Iteration : 3 (r, r) = 4568956512222.459
 Iteration : 4 (r, r) = 3469164339488.006
 Iteration : 5 (r, r) = 2777073966158.4746
 Relative/Absolute residual less than tol
 Converged in 5 iterations with final norm 1666455.5098047096

===== Begin Newton CG convergence information =====
 =====
 Preconditioned inexact Newton-CG with line search
 $H_p = -g$
 $u \leftarrow u + \alpha * p$
 u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0 : u=u0 -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve $H_p = -g$
 it=1 : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve $H_p = -g$
 ...
 it=last : linesearch u -> J -> g -> Done.

it: Newton iteration number
 nCG: number of CG iterations in Newton iteration
 nJ: number of cost function evaluations in Newton iteration

nG: number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp: number of Hessian-vector products in Newton iteration
GN: True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
BP: True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
cost: cost, $J = J_d + J_r$
misfit: misfit cost, J_d
reg: regularization cost, J_r
(g,p): inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
||g||L2: l2 norm of gradient
alpha: step size
tolcg: relative tolerance for $H_p = -g$ CG solve (unpreconditioned residual decrease)

it	nCG	nJ	nG	nHp	GN	BP	cost	misfit	reg	(g,p)	g L2	alpha	t
0						T	2.086848e+08	2.1e+08	0.0e+00	-2.9e+08	1.9e+07	-----	5.0
e-01													
1						T	F 6.073043e+07	6.1e+07	2.2e+04	-7.7e+07	7.9e+06	1.0e+00	5.0
e-01													
2						T	F 2.171375e+07	2.2e+07	5.6e+04	-3.1e+07	3.9e+06	1.0e+00	4.5
e-01													

converged : False
reason : unknown reason
cumulative CG iterations : 8
cumulative cost evaluations : 3
cumulative gradient evaluations : 3
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 8
===== End Newton CG convergence information =====
=====

using Gauss-Newton Hessian
it= 3 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=True
building preconditioner
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 1.623e+06
||M r0|| = 3.840e+03
(M r0, r0) = 6.234e+04
Iteration : 0 (r, r) = 2633025847451.4775
Iteration : 1 (r, r) = 1797019841686.5862
Iteration : 2 (r, r) = 1654930364616.6685
Iteration : 3 (r, r) = 1284991412017.538
Iteration : 4 (r, r) = 1070093526219.2854
Iteration : 5 (r, r) = 1087166230882.9601
Iteration : 6 (r, r) = 857833142063.1481
Iteration : 7 (r, r) = 619592499838.4985
Iteration : 8 (r, r) = 432727547047.0398
Iteration : 9 (r, r) = 379074117869.2333
Iteration : 10 (r, r) = 333526936858.27734
Iteration : 11 (r, r) = 291119180511.2052
Iteration : 12 (r, r) = 276643288370.1329
Iteration : 13 (r, r) = 217646415645.57758
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 13 iterations with final norm 466525.90029448265

===== Begin Newton CG convergence information =====
=====
Preconditioned inexact Newton-CG with line search

```

Hp=-g
u <- u + alpha * p
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0      : u=u0      -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1      : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
...
it=last   : linesearch u -> J -> g -> Done.

it:      Newton iteration number
nCG:     number of CG iterations in Newton iteration
nJ:      number of cost function evaluations in Newton iteration
nG:      number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp:     number of Hessian-vector products in Newton iteration
GN:      True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
BP:      True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
cost:    cost, J = Jd + Jr
misfit: misfit cost, Jd
reg:     regularization cost, Jr
(g,p):   inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
||g||L2: l2 norm of gradient
alpha:   step size
tolcg:  relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrease)

it nCG nJ nG nHp GN BP          cost  misfit      reg    (g,p) ||g||L2  alpha   t
olcg
  0   1   1   1   1   T   F 2.086848e+08 2.1e+08 0.0e+00 -2.9e+08 1.9e+07      ---- 5.0
e-01
  1   2   1   1   2   T   F 6.073043e+07 6.1e+07 2.2e+04 -7.7e+07 7.9e+06 1.0e+00 5.0
e-01
  2   5   1   1   5   T   F 2.171375e+07 2.2e+07 5.6e+04 -3.1e+07 3.9e+06 1.0e+00 4.5
e-01
  3  13   1   1  13   T   T 6.203943e+06 6.1e+06 1.3e+05 -9.1e+06 1.6e+06 1.0e+00 2.9
e-01

converged : False
reason     : unknown reason
cumulative CG iterations : 21
cumulative cost evaluations : 4
cumulative gradient evaluations : 4
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 21
===== End Newton CG convergence information =====
=====

using Gauss-Newton Hessian
it= 4 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=True
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 4.777e+05
||M r0|| = 1.024e+03
(M r0, r0) = 1.638e+04
Iteration : 0 (r, r) = 228191019738.32993
Iteration : 1 (r, r) = 180951663042.56674
Iteration : 2 (r, r) = 160057076789.6305
Iteration : 3 (r, r) = 145615663334.65796
Iteration : 4 (r, r) = 139513533724.4741
Iteration : 5 (r, r) = 134378052641.08775

```

```

Iteration : 6 (r, r) = 130933093684.52377
Iteration : 7 (r, r) = 129393801989.94313
Iteration : 8 (r, r) = 130944968466.86563
Iteration : 9 (r, r) = 117809634086.29166
Iteration : 10 (r, r) = 105226159576.71451
Iteration : 11 (r, r) = 97647725059.27007
Iteration : 12 (r, r) = 84154081915.09993
Iteration : 13 (r, r) = 88581140609.496
Iteration : 14 (r, r) = 80975972416.5255
Iteration : 15 (r, r) = 74587351567.33011
Iteration : 16 (r, r) = 52679619495.54462
Iteration : 17 (r, r) = 39394993090.026566
Iteration : 18 (r, r) = 34638751962.550865
Iteration : 19 (r, r) = 30674060400.584553
Iteration : 20 (r, r) = 26306183590.112343
Iteration : 21 (r, r) = 23163372487.44149
Iteration : 22 (r, r) = 23716896508.667393
Iteration : 23 (r, r) = 22740671418.99488
Iteration : 24 (r, r) = 20501008690.132263
Iteration : 25 (r, r) = 21356901238.053448
Iteration : 26 (r, r) = 20930125756.071556
Iteration : 27 (r, r) = 16800103208.734917
Iteration : 28 (r, r) = 15211809600.931633
Iteration : 29 (r, r) = 14885645451.58239
Iteration : 30 (r, r) = 14120069082.267845
Iteration : 31 (r, r) = 11993063211.190022
Iteration : 32 (r, r) = 11410476857.746344
Iteration : 33 (r, r) = 10774223476.855045
Iteration : 34 (r, r) = 9355822999.993622
Iteration : 35 (r, r) = 9015706630.25476
Iteration : 36 (r, r) = 7867256172.831059
Iteration : 37 (r, r) = 7067888853.588985
Iteration : 38 (r, r) = 6770810738.543308
Iteration : 39 (r, r) = 6350877404.428491
Iteration : 40 (r, r) = 5767284297.7338505
Iteration : 41 (r, r) = 5710351094.739035
Iteration : 42 (r, r) = 5424673710.76037

```

Relative/Absolute residual less than tol

Converged in 42 iterations with final norm 73652.38428428757

===== Begin Newton CG convergence information =====

====

Preconditioned inexact Newton-CG with line search

Hp=-g

u <- u + alpha * p

u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0 : u=u0 -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
 it=1 : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g

...

it=last : linesearch u -> J -> g -> Done.

it: Newton iteration number

nCG: number of CG iterations in Newton iteration

nJ: number of cost function evaluations in Newton iteration

nG: number of gradient evaluations in Newton iteration

nHp: number of Hessian-vector products in Newton iteration

GN: True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used

BP: True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.

```

cost:    cost, J = Jd + Jr
misfit: misfit cost, Jd
reg:    regularization cost, Jr
(g,p): inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
||g||L2: l2 norm of gradient
alpha:   step size
tolcg:  relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrease)

it nCG nJ nG nHp GN BP          cost  misfit      reg    (g,p) ||g||L2  alpha   t
olcg
  0   1   1   1   1   T   F 2.086848e+08 2.1e+08 0.0e+00 -2.9e+08 1.9e+07   ---- 5.0
e-01
  1   2   1   1   2   T   F 6.073043e+07 6.1e+07 2.2e+04 -7.7e+07 7.9e+06 1.0e+00 5.0
e-01
  2   5   1   1   5   T   F 2.171375e+07 2.2e+07 5.6e+04 -3.1e+07 3.9e+06 1.0e+00 4.5
e-01
  3  13   1   1  13   T   T 6.203943e+06 6.1e+06 1.3e+05 -9.1e+06 1.6e+06 1.0e+00 2.9
e-01
  4  42   1   1  42   T   F 1.667335e+06 1.4e+06 2.5e+05 -1.7e+06 4.8e+05 1.0e+00 1.6
e-01

converged : False
reason     : unknown reason
cumulative CG iterations : 63
cumulative cost evaluations : 5
cumulative gradient evaluations : 5
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 63
===== End Newton CG convergence information =====
=====

using Hessian
it= 5 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=
False
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 7.722e+04
||M r0|| = 1.584e+02
(M r0, r0) = 2.574e+03
Iteration : 0 (r, r) = 5962305503.981529
Iteration : 1 (r, r) = 4771334600.889629
Iteration : 2 (r, r) = 4038312571.643759
Iteration : 3 (r, r) = 3747157519.0135975
Iteration : 4 (r, r) = 3518858707.295541
Iteration : 5 (r, r) = 3432822023.4406013
Iteration : 6 (r, r) = 2941675058.7920227
Iteration : 7 (r, r) = 2764744346.7644844
Iteration : 8 (r, r) = 2817579556.61301
Iteration : 9 (r, r) = 2894044987.858572
Iteration : 10 (r, r) = 2680857821.5861096
Iteration : 11 (r, r) = 2569530987.399884
Iteration : 12 (r, r) = 2470790833.42319
Iteration : 13 (r, r) = 2352961704.3680487
Iteration : 14 (r, r) = 2343484002.7947693
Iteration : 15 (r, r) = 2342783943.433696
Iteration : 16 (r, r) = 2241568817.939387
Iteration : 17 (r, r) = 2178903845.896933
Iteration : 18 (r, r) = 1997620685.276153
Iteration : 19 (r, r) = 1952868958.3470469
Iteration : 20 (r, r) = 1763080018.7344499
Iteration : 21 (r, r) = 1666424641.2689579

```

Iteration : 22 (r, r) = 1474788928.0886257
Iteration : 23 (r, r) = 1464361308.247098
Iteration : 24 (r, r) = 1516958368.9737885
Iteration : 25 (r, r) = 1358850419.8665376
Iteration : 26 (r, r) = 1314158376.2063127
Iteration : 27 (r, r) = 1322796000.2630615
Iteration : 28 (r, r) = 1249788539.9594564
Iteration : 29 (r, r) = 1446680652.8586142
Iteration : 30 (r, r) = 1412997240.8383088
Iteration : 31 (r, r) = 1209333414.8873582
Iteration : 32 (r, r) = 973432959.6186743
Iteration : 33 (r, r) = 906929664.6899337
Iteration : 34 (r, r) = 792391315.0725394
Iteration : 35 (r, r) = 747153450.187403
Iteration : 36 (r, r) = 751362794.471996
Iteration : 37 (r, r) = 627313907.4198542
Iteration : 38 (r, r) = 554051238.2808619
Iteration : 39 (r, r) = 529588106.32459617
Iteration : 40 (r, r) = 512712315.03693557
Iteration : 41 (r, r) = 523251032.95316917
Iteration : 42 (r, r) = 497000920.45771277
Iteration : 43 (r, r) = 512954075.6750002
Iteration : 44 (r, r) = 429730380.82433605
Iteration : 45 (r, r) = 465449454.43115354
Iteration : 46 (r, r) = 397628769.90353024
Iteration : 47 (r, r) = 289769393.0036576
Iteration : 48 (r, r) = 223771943.1246069
Iteration : 49 (r, r) = 209106061.35742486
Iteration : 50 (r, r) = 182116264.30229694
Iteration : 51 (r, r) = 159062274.0753759
Iteration : 52 (r, r) = 170367415.46880853
Iteration : 53 (r, r) = 134790961.3922534
Iteration : 54 (r, r) = 128156298.0755637
Iteration : 55 (r, r) = 123344773.71394537
Iteration : 56 (r, r) = 111981080.2296518
Iteration : 57 (r, r) = 109096095.29264891
Iteration : 58 (r, r) = 98846132.94671997
Iteration : 59 (r, r) = 93910594.18099451
Iteration : 60 (r, r) = 87900590.06831637
Iteration : 61 (r, r) = 86995509.7825737
Iteration : 62 (r, r) = 91716298.40658481
Iteration : 63 (r, r) = 82616046.39767866
Iteration : 64 (r, r) = 84152879.91556047
Iteration : 65 (r, r) = 70538539.66523056
Iteration : 66 (r, r) = 67881800.43684587
Iteration : 67 (r, r) = 58308816.72114985
Iteration : 68 (r, r) = 59814731.91440722
Iteration : 69 (r, r) = 62407003.15056436
Iteration : 70 (r, r) = 56167751.23734875
Iteration : 71 (r, r) = 55636272.53803825
Iteration : 72 (r, r) = 56517813.228692695
Iteration : 73 (r, r) = 53433634.67439769
Iteration : 74 (r, r) = 54166653.34888886
Iteration : 75 (r, r) = 43313755.298435874
Iteration : 76 (r, r) = 40084701.230424665
Iteration : 77 (r, r) = 35341372.04972626
Iteration : 78 (r, r) = 36517983.611909166
Iteration : 79 (r, r) = 31150474.241120614
Iteration : 80 (r, r) = 33346875.902317323
Iteration : 81 (r, r) = 28922381.53134571
Iteration : 82 (r, r) = 24623933.87344162

```

Iteration : 83 (r, r) = 23775353.77607508
Iteration : 84 (r, r) = 21758765.286283165
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 84 iterations with final norm 4664.629169214115

```

```
===== Begin Newton CG convergence information =====
```

```
=====
```

```
Preconditioned inexact Newton-CG with line search
```

```
Hp=-g
```

```
u <- u + alpha * p
```

```
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction
```

```
it=0 : u=u0 -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1 : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
```

```
...
```

```
it=last : linesearch u -> J -> g -> Done.
```

```
it: Newton iteration number
```

```
nCG: number of CG iterations in Newton iteration
```

```
nJ: number of cost function evaluations in Newton iteration
```

```
nG: number of gradient evaluations in Newton iteration
```

```
nHp: number of Hessian-vector products in Newton iteration
```

```
GN: True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
```

```
BP: True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
```

```
cost: cost, J = Jd + Jr
```

```
misfit: misfit cost, Jd
```

```
reg: regularization cost, Jr
```

```
(g,p): inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
```

```
||g||L2: l2 norm of gradient
```

```
alpha: step size
```

```
tolcg: relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrease)
```

it	nCG	nJ	nG	nHp	GN	BP	cost	misfit	reg	(g,p)	g L2	alpha	t
0	1	1	1	1	T	F	2.086848e+08	2.1e+08	0.0e+00	-2.9e+08	1.9e+07	----	5.0
e-01													
1	2	1	1	2	T	F	6.073043e+07	6.1e+07	2.2e+04	-7.7e+07	7.9e+06	1.0e+00	5.0
e-01													
2	5	1	1	5	T	F	2.171375e+07	2.2e+07	5.6e+04	-3.1e+07	3.9e+06	1.0e+00	4.5
e-01													
3	13	1	1	13	T	T	6.203943e+06	6.1e+06	1.3e+05	-9.1e+06	1.6e+06	1.0e+00	2.9
e-01													
4	42	1	1	42	T	F	1.667335e+06	1.4e+06	2.5e+05	-1.7e+06	4.8e+05	1.0e+00	1.6
e-01													
5	84	1	1	84	F	F	8.289546e+05	4.4e+05	3.9e+05	-5.6e+04	7.7e+04	1.0e+00	6.3
e-02													

```
converged : False
```

```
reason : unknown reason
```

```
cumulative CG iterations : 147
```

```
cumulative cost evaluations : 6
```

```
cumulative gradient evaluations : 6
```

```
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 147
```

```
===== End Newton CG convergence information =====
```

```
=====
```

```
using Hessian
```

```
it = 6 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=
```

```
False
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 5.037e+03
||M r0|| = 1.716e+01
(M r0, r0) = 2.040e+02
Iteration : 0 (r, r) = 25374942.719406504
Iteration : 1 (r, r) = 19385768.20533614
Iteration : 2 (r, r) = 17010965.19082872
Iteration : 3 (r, r) = 16167720.235327708
Iteration : 4 (r, r) = 16373508.567002943
Iteration : 5 (r, r) = 14965888.026516248
Iteration : 6 (r, r) = 14236669.70002864
Iteration : 7 (r, r) = 13937337.053166816
Iteration : 8 (r, r) = 12944311.282653783
Iteration : 9 (r, r) = 12385435.14236273
Iteration : 10 (r, r) = 12488416.158799194
Iteration : 11 (r, r) = 12264817.556353115
Iteration : 12 (r, r) = 11548484.972026208
Iteration : 13 (r, r) = 11820978.45259991
Iteration : 14 (r, r) = 11256163.289854124
Iteration : 15 (r, r) = 10173992.773079533
Iteration : 16 (r, r) = 9410114.2518358
Iteration : 17 (r, r) = 8365906.021139942
Iteration : 18 (r, r) = 8288433.814410094
Iteration : 19 (r, r) = 7445337.665581566
Iteration : 20 (r, r) = 7104741.628538744
Iteration : 21 (r, r) = 6762460.92647236
Iteration : 22 (r, r) = 6756739.709593618
Iteration : 23 (r, r) = 6308504.864281118
Iteration : 24 (r, r) = 6044093.633058157
Iteration : 25 (r, r) = 6454938.723303448
Iteration : 26 (r, r) = 5744719.164036324
Iteration : 27 (r, r) = 5348359.634926217
Iteration : 28 (r, r) = 5327637.132693194
Iteration : 29 (r, r) = 5155732.906946128
Iteration : 30 (r, r) = 4963385.578781195
Iteration : 31 (r, r) = 4863509.039972774
Iteration : 32 (r, r) = 4945659.595934563
Iteration : 33 (r, r) = 4392039.207119095
Iteration : 34 (r, r) = 4478717.838909166
Iteration : 35 (r, r) = 4471829.260975999
Iteration : 36 (r, r) = 3946745.718074041
Iteration : 37 (r, r) = 3981489.346651016
Iteration : 38 (r, r) = 3610671.348396617
Iteration : 39 (r, r) = 3577237.749507404
Iteration : 40 (r, r) = 3544271.2842225805
Iteration : 41 (r, r) = 3381747.317294523
Iteration : 42 (r, r) = 3339135.2023878023
Iteration : 43 (r, r) = 3061135.077256793
Iteration : 44 (r, r) = 2808768.801832797
Iteration : 45 (r, r) = 2737296.2774703503
Iteration : 46 (r, r) = 2650230.899476195
Iteration : 47 (r, r) = 2314777.7866956634
Iteration : 48 (r, r) = 2195641.383650908
Iteration : 49 (r, r) = 1798411.7355298619
Iteration : 50 (r, r) = 1518986.3870307948
Iteration : 51 (r, r) = 1570332.3972113424
Iteration : 52 (r, r) = 1368004.824857062
Iteration : 53 (r, r) = 1408769.9895155537
Iteration : 54 (r, r) = 1321574.2398791213
```

Iteration : 55 (r, r) = 1152567.3404858718
Iteration : 56 (r, r) = 1229171.6825115932
Iteration : 57 (r, r) = 1135858.2490982797
Iteration : 58 (r, r) = 1008911.3605947106
Iteration : 59 (r, r) = 946201.3710268644
Iteration : 60 (r, r) = 842929.5612618801
Iteration : 61 (r, r) = 708169.395062467
Iteration : 62 (r, r) = 667286.0814066358
Iteration : 63 (r, r) = 586326.7254234436
Iteration : 64 (r, r) = 584155.8746898309
Iteration : 65 (r, r) = 565816.9851011094
Iteration : 66 (r, r) = 537190.8295443843
Iteration : 67 (r, r) = 500783.68487318663
Iteration : 68 (r, r) = 424133.71081539826
Iteration : 69 (r, r) = 424977.29238451377
Iteration : 70 (r, r) = 374259.6954071494
Iteration : 71 (r, r) = 368524.0047882524
Iteration : 72 (r, r) = 344353.1316735374
Iteration : 73 (r, r) = 314172.16512567893
Iteration : 74 (r, r) = 259916.61767619126
Iteration : 75 (r, r) = 290226.75062304974
Iteration : 76 (r, r) = 239224.08804365972
Iteration : 77 (r, r) = 233130.6288799034
Iteration : 78 (r, r) = 230110.2409576276
Iteration : 79 (r, r) = 235869.38488291373
Iteration : 80 (r, r) = 212442.73551205802
Iteration : 81 (r, r) = 211759.09649996358
Iteration : 82 (r, r) = 199674.90143892635
Iteration : 83 (r, r) = 207717.64425539225
Iteration : 84 (r, r) = 183800.43337717853
Iteration : 85 (r, r) = 218134.69699699408
Iteration : 86 (r, r) = 192091.71199896693
Iteration : 87 (r, r) = 191322.00084180807
Iteration : 88 (r, r) = 153161.4859031036
Iteration : 89 (r, r) = 140206.73616887344
Iteration : 90 (r, r) = 129178.24287898774
Iteration : 91 (r, r) = 122286.47521534166
Iteration : 92 (r, r) = 132134.95837134594
Iteration : 93 (r, r) = 94921.10240090429
Iteration : 94 (r, r) = 89652.78365450652
Iteration : 95 (r, r) = 83165.21544917277
Iteration : 96 (r, r) = 71613.15874726321
Iteration : 97 (r, r) = 53358.47553167765
Iteration : 98 (r, r) = 54823.97999780846
Iteration : 99 (r, r) = 47448.774593142036
Iteration : 100 (r, r) = 40034.13558628145
Iteration : 101 (r, r) = 37507.91722167285
Iteration : 102 (r, r) = 30922.47329334062
Iteration : 103 (r, r) = 31246.32367517754
Iteration : 104 (r, r) = 31721.151815560934
Iteration : 105 (r, r) = 26687.518976191437
Iteration : 106 (r, r) = 25153.223893083683
Iteration : 107 (r, r) = 23778.461019773225
Iteration : 108 (r, r) = 23839.061885078183
Iteration : 109 (r, r) = 19315.371929393445
Iteration : 110 (r, r) = 20750.298187976383
Iteration : 111 (r, r) = 15811.919081022668
Iteration : 112 (r, r) = 14519.650975705736
Iteration : 113 (r, r) = 13824.79067796101
Iteration : 114 (r, r) = 12797.049015428755
Iteration : 115 (r, r) = 11448.625310983656

```

Iteration : 116 (r, r) = 10684.000428569469
Iteration : 117 (r, r) = 11222.380858944249
Iteration : 118 (r, r) = 10932.13903804234
Iteration : 119 (r, r) = 8190.337640631886
Iteration : 120 (r, r) = 7744.741912211784
Iteration : 121 (r, r) = 7885.099832996716
Iteration : 122 (r, r) = 6953.965117032138
Iteration : 123 (r, r) = 6636.980952927988
Iteration : 124 (r, r) = 6819.651003821874
Iteration : 125 (r, r) = 6276.818612755485

```

Relative/Absolute residual less than tol

Converged in 125 iterations with final norm 79.22637573911535

===== Begin Newton CG convergence information =====

=====

Preconditioned inexact Newton-CG with line search

Hp=-g

u <- u + alpha * p

u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0 : u=u0 -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
 it=1 : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g

...

it=last : linesearch u -> J -> g -> Done.

it: Newton iteration number

nCG: number of CG iterations in Newton iteration

nJ: number of cost function evaluations in Newton iteration

nG: number of gradient evaluations in Newton iteration

nHp: number of Hessian-vector products in Newton iteration

GN: True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used

BP: True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.

cost: cost, J = Jd + Jr

misfit: misfit cost, Jd

reg: regularization cost, Jr

(g,p): inner product between gradient, g, and Newton search direction, p

||g||L2: l2 norm of gradient

alpha: step size

tolcg: relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrease)

it	nCG	nJ	nG	nHp	GN	BP	cost	misfit	reg	(g,p)	g L2	alpha	t
0	1	1	1	1	T	F	2.086848e+08	2.1e+08	0.0e+00	-2.9e+08	1.9e+07	----	5.0
e-01													
1	2	1	1	2	T	F	6.073043e+07	6.1e+07	2.2e+04	-7.7e+07	7.9e+06	1.0e+00	5.0
e-01													
2	5	1	1	5	T	F	2.171375e+07	2.2e+07	5.6e+04	-3.1e+07	3.9e+06	1.0e+00	4.5
e-01													
3	13	1	1	13	T	T	6.203943e+06	6.1e+06	1.3e+05	-9.1e+06	1.6e+06	1.0e+00	2.9
e-01													
4	42	1	1	42	T	F	1.667335e+06	1.4e+06	2.5e+05	-1.7e+06	4.8e+05	1.0e+00	1.6
e-01													
5	84	1	1	84	F	F	8.289546e+05	4.4e+05	3.9e+05	-5.6e+04	7.7e+04	1.0e+00	6.3
e-02													
6	125	1	1	125	F	F	8.007508e+05	3.8e+05	4.3e+05	-2.5e+02	5.0e+03	1.0e+00	1.6
e-02													

converged : False

```
reason      : unknown reason
cumulative CG iterations : 272
cumulative cost evaluations : 7
cumulative gradient evaluations : 7
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 272
===== End Newton CG convergence information =====
=====

using Hessian
it= 7 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=
False
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 7.913e+01
||M r0|| = 1.345e-01
(M r0, r0) = 2.261e+00
Iteration : 0 (r, r) = 6261.005863687995
Iteration : 1 (r, r) = 5010.8021241021415
Iteration : 2 (r, r) = 4924.022825193913
Iteration : 3 (r, r) = 4071.494439215553
Iteration : 4 (r, r) = 4163.853747485647
Iteration : 5 (r, r) = 4078.2688483654138
Iteration : 6 (r, r) = 3955.439522335808
Iteration : 7 (r, r) = 3871.1540094562915
Iteration : 8 (r, r) = 4033.029911729275
Iteration : 9 (r, r) = 3615.4034265368077
Iteration : 10 (r, r) = 3651.3641993365063
Iteration : 11 (r, r) = 3753.7694080802567
Iteration : 12 (r, r) = 3328.997461165363
Iteration : 13 (r, r) = 3394.5736838145745
Iteration : 14 (r, r) = 3315.7537601695167
Iteration : 15 (r, r) = 3090.954002940795
Iteration : 16 (r, r) = 3103.646277341826
Iteration : 17 (r, r) = 3234.3812937787075
Iteration : 18 (r, r) = 2799.316566072225
Iteration : 19 (r, r) = 2717.0612831834687
Iteration : 20 (r, r) = 2757.7304998437494
Iteration : 21 (r, r) = 2708.940966627013
Iteration : 22 (r, r) = 2405.007185839956
Iteration : 23 (r, r) = 2360.6156129285064
Iteration : 24 (r, r) = 2305.437859455855
Iteration : 25 (r, r) = 2333.0489861791966
Iteration : 26 (r, r) = 2144.2135339073325
Iteration : 27 (r, r) = 2126.8887658145086
Iteration : 28 (r, r) = 2028.7764200790373
Iteration : 29 (r, r) = 2145.1830231300623
Iteration : 30 (r, r) = 1974.3138478555388
Iteration : 31 (r, r) = 1906.3985715326671
Iteration : 32 (r, r) = 1892.414433790224
Iteration : 33 (r, r) = 1780.0857226527453
Iteration : 34 (r, r) = 1879.6686677806854
Iteration : 35 (r, r) = 1551.6320664014006
Iteration : 36 (r, r) = 1509.1157312709252
Iteration : 37 (r, r) = 1340.005790178676
Iteration : 38 (r, r) = 1249.9624296063062
Iteration : 39 (r, r) = 1157.2424682024985
Iteration : 40 (r, r) = 1099.8170819436643
Iteration : 41 (r, r) = 976.4190291227292
Iteration : 42 (r, r) = 855.1385654918845
Iteration : 43 (r, r) = 838.6070954286072
Iteration : 44 (r, r) = 800.5359898349272
```

Iteration : 45 (r, r) = 669.2343513168707
Iteration : 46 (r, r) = 705.3503636504491
Iteration : 47 (r, r) = 585.5640287252911
Iteration : 48 (r, r) = 537.8281540557207
Iteration : 49 (r, r) = 505.43685151084776
Iteration : 50 (r, r) = 510.73033931241923
Iteration : 51 (r, r) = 456.76583547356756
Iteration : 52 (r, r) = 479.05267546092523
Iteration : 53 (r, r) = 420.5873301543288
Iteration : 54 (r, r) = 450.97043800634015
Iteration : 55 (r, r) = 390.51807572278915
Iteration : 56 (r, r) = 386.5708189124547
Iteration : 57 (r, r) = 368.8197097368474
Iteration : 58 (r, r) = 345.4352879718964
Iteration : 59 (r, r) = 313.8401337916906
Iteration : 60 (r, r) = 321.0026252859201
Iteration : 61 (r, r) = 275.0655296548476
Iteration : 62 (r, r) = 251.09897040605705
Iteration : 63 (r, r) = 240.43864622683907
Iteration : 64 (r, r) = 208.94603975524836
Iteration : 65 (r, r) = 209.87854370558023
Iteration : 66 (r, r) = 187.7207683056617
Iteration : 67 (r, r) = 186.74428995523095
Iteration : 68 (r, r) = 171.24324210357858
Iteration : 69 (r, r) = 147.826566861806
Iteration : 70 (r, r) = 145.55453127094574
Iteration : 71 (r, r) = 156.19510266391245
Iteration : 72 (r, r) = 136.6523583089195
Iteration : 73 (r, r) = 133.09568089622297
Iteration : 74 (r, r) = 108.85760606076157
Iteration : 75 (r, r) = 111.82312403291078
Iteration : 76 (r, r) = 96.55085848123639
Iteration : 77 (r, r) = 91.02635266608547
Iteration : 78 (r, r) = 91.4361168058099
Iteration : 79 (r, r) = 78.71411092601855
Iteration : 80 (r, r) = 65.58622475409965
Iteration : 81 (r, r) = 60.78721070666992
Iteration : 82 (r, r) = 64.00791546495934
Iteration : 83 (r, r) = 53.78624967139031
Iteration : 84 (r, r) = 48.37337581561937
Iteration : 85 (r, r) = 47.02213792174719
Iteration : 86 (r, r) = 46.01850027639212
Iteration : 87 (r, r) = 41.20269178415772
Iteration : 88 (r, r) = 40.966204098592186
Iteration : 89 (r, r) = 35.585126926489124
Iteration : 90 (r, r) = 29.86239278253795
Iteration : 91 (r, r) = 29.64486693724094
Iteration : 92 (r, r) = 28.88776670771004
Iteration : 93 (r, r) = 26.762788722594156
Iteration : 94 (r, r) = 24.1572389109816
Iteration : 95 (r, r) = 25.955181525327127
Iteration : 96 (r, r) = 26.00099858961596
Iteration : 97 (r, r) = 21.39323798644984
Iteration : 98 (r, r) = 23.309642304847006
Iteration : 99 (r, r) = 18.817069475328253
Iteration : 100 (r, r) = 16.079153919543522
Iteration : 101 (r, r) = 16.33534799923568
Iteration : 102 (r, r) = 15.85494513463952
Iteration : 103 (r, r) = 14.41841110382131
Iteration : 104 (r, r) = 12.730849414224128
Iteration : 105 (r, r) = 11.84636336105575

Iteration : 106 (r, r) = 13.151074503983855
Iteration : 107 (r, r) = 10.098284762567001
Iteration : 108 (r, r) = 10.404200364455171
Iteration : 109 (r, r) = 9.581236930366995
Iteration : 110 (r, r) = 9.871793584102765
Iteration : 111 (r, r) = 7.936885627290527
Iteration : 112 (r, r) = 8.36023880709805
Iteration : 113 (r, r) = 8.40788806008494
Iteration : 114 (r, r) = 6.958014769079291
Iteration : 115 (r, r) = 7.351596838258807
Iteration : 116 (r, r) = 5.97986250922461
Iteration : 117 (r, r) = 6.157566042544039
Iteration : 118 (r, r) = 5.897782551673358
Iteration : 119 (r, r) = 5.2243741177517125
Iteration : 120 (r, r) = 5.113370561687472
Iteration : 121 (r, r) = 5.275312653544157
Iteration : 122 (r, r) = 4.334236314400004
Iteration : 123 (r, r) = 4.589076980358733
Iteration : 124 (r, r) = 4.077265570250519
Iteration : 125 (r, r) = 4.645165594396849
Iteration : 126 (r, r) = 4.141211732783078
Iteration : 127 (r, r) = 3.688116629703075
Iteration : 128 (r, r) = 3.5178823147875455
Iteration : 129 (r, r) = 2.957049970694025
Iteration : 130 (r, r) = 2.5499331484316903
Iteration : 131 (r, r) = 2.4492961715643427
Iteration : 132 (r, r) = 2.497415593776382
Iteration : 133 (r, r) = 1.8242694618877429
Iteration : 134 (r, r) = 1.7615824541087355
Iteration : 135 (r, r) = 1.4468172483982857
Iteration : 136 (r, r) = 1.30303016795511
Iteration : 137 (r, r) = 1.2046492670279023
Iteration : 138 (r, r) = 1.2577537040495428
Iteration : 139 (r, r) = 1.2208771378337524
Iteration : 140 (r, r) = 1.053945387554107
Iteration : 141 (r, r) = 1.3483039591079171
Iteration : 142 (r, r) = 1.00572632222886
Iteration : 143 (r, r) = 0.9507205136150819
Iteration : 144 (r, r) = 1.0789049110994835
Iteration : 145 (r, r) = 0.8223391141922204
Iteration : 146 (r, r) = 0.8618386839959029
Iteration : 147 (r, r) = 0.7453377339659197
Iteration : 148 (r, r) = 0.7387877980369346
Iteration : 149 (r, r) = 0.5943859473194105
Iteration : 150 (r, r) = 0.6364617144161206
Iteration : 151 (r, r) = 0.6200513577108886
Iteration : 152 (r, r) = 0.5515981154073627
Iteration : 153 (r, r) = 0.5681339121169897
Iteration : 154 (r, r) = 0.4378957521711257
Iteration : 155 (r, r) = 0.4141659668547385
Iteration : 156 (r, r) = 0.44901237882269385
Iteration : 157 (r, r) = 0.38710762703274393
Iteration : 158 (r, r) = 0.3799342277562069
Iteration : 159 (r, r) = 0.42022894159750634
Iteration : 160 (r, r) = 0.36869556500582035
Iteration : 161 (r, r) = 0.3373619302063656
Iteration : 162 (r, r) = 0.3230639617165024
Iteration : 163 (r, r) = 0.3679003149209505
Iteration : 164 (r, r) = 0.31780171402577817
Iteration : 165 (r, r) = 0.25493117028754064
Iteration : 166 (r, r) = 0.2705380496504062

```

Iteration : 167 (r, r) = 0.1989518629091349
Iteration : 168 (r, r) = 0.16726984558762814
Iteration : 169 (r, r) = 0.12564784716450222
Iteration : 170 (r, r) = 0.12354978799609126
Iteration : 171 (r, r) = 0.09952205199609697
Iteration : 172 (r, r) = 0.08985871554929742
Iteration : 173 (r, r) = 0.07690199809795574
Iteration : 174 (r, r) = 0.07027407279745422
Iteration : 175 (r, r) = 0.06378601888728165
Iteration : 176 (r, r) = 0.06776401940246649
Iteration : 177 (r, r) = 0.06838960181264084
Iteration : 178 (r, r) = 0.06817500543234666
Iteration : 179 (r, r) = 0.06322223362950345
Iteration : 180 (r, r) = 0.05828877347815838
Iteration : 181 (r, r) = 0.058549245215104864
Iteration : 182 (r, r) = 0.05177280948744327
Iteration : 183 (r, r) = 0.0495985877417039
Iteration : 184 (r, r) = 0.05073892569124311
Iteration : 185 (r, r) = 0.045181206758335264
Iteration : 186 (r, r) = 0.04202364060621848
Iteration : 187 (r, r) = 0.04093563263949387
Iteration : 188 (r, r) = 0.036183786248985085
Iteration : 189 (r, r) = 0.03543746076622166
Iteration : 190 (r, r) = 0.034481305320902184
Iteration : 191 (r, r) = 0.030162680353610333
Iteration : 192 (r, r) = 0.02701695375215029
Iteration : 193 (r, r) = 0.028406435233200376
Iteration : 194 (r, r) = 0.024495272186425242

```

Relative/Absolute residual less than tol

Converged in 194 iterations with final norm 0.1565096552498447

===== Begin Newton CG convergence information =====

====

Preconditioned inexact Newton-CG with line search

Hp=-g

u <- u + alpha * p

u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0 : u=u0 -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
 it=1 : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g

...

it=last : linesearch u -> J -> g -> Done.

it: Newton iteration number

nCG: number of CG iterations in Newton iteration

nJ: number of cost function evaluations in Newton iteration

nG: number of gradient evaluations in Newton iteration

nHp: number of Hessian-vector products in Newton iteration

GN: True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used

BP: True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.

cost: cost, J = Jd + Jr

misfit: misfit cost, Jd

reg: regularization cost, Jr

(g,p): inner product between gradient, g, and Newton search direction, p

||g||L2: l2 norm of gradient

alpha: step size

tolcg: relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrease)

```

stokes_dev3

it nCG nJ nG nHp GN BP          cost  misfit    reg   (g,p) ||g||L2 alpha   t
olcg
  0   1   1   1   1   T   F 2.086848e+08 2.1e+08 0.0e+00 -2.9e+08 1.9e+07 ---- 5.0
e-01
  1   2   1   1   2   T   F 6.073043e+07 6.1e+07 2.2e+04 -7.7e+07 7.9e+06 1.0e+00 5.0
e-01
  2   5   1   1   5   T   F 2.171375e+07 2.2e+07 5.6e+04 -3.1e+07 3.9e+06 1.0e+00 4.5
e-01
  3   13  1   1   13  T   T 6.203943e+06 6.1e+06 1.3e+05 -9.1e+06 1.6e+06 1.0e+00 2.9
e-01
  4   42  1   1   42  T   F 1.667335e+06 1.4e+06 2.5e+05 -1.7e+06 4.8e+05 1.0e+00 1.6
e-01
  5   84  1   1   84  F   F 8.289546e+05 4.4e+05 3.9e+05 -5.6e+04 7.7e+04 1.0e+00 6.3
e-02
  6   125 1   1  125  F   F 8.007508e+05 3.8e+05 4.3e+05 -2.5e+02 5.0e+03 1.0e+00 1.6
e-02
  7   194 1   1  194  F   F 8.006273e+05 3.8e+05 4.3e+05 -8.0e-02 7.9e+01 1.0e+00 2.0
e-03

converged : False
reason      : unknown reason
cumulative CG iterations : 466
cumulative cost evaluations : 8
cumulative gradient evaluations : 8
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 466
===== End Newton CG convergence information =====
=====

using Hessian
it= 8 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=
False

===== Begin Newton CG convergence information =====
=====
Preconditioned inexact Newton-CG with line search
Hp=-g
u <- u + alpha * p
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0      : u=u0      -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1      : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
...
it=last   : linesearch u -> J -> g -> Done.

it:      Newton iteration number
nCG:     number of CG iterations in Newton iteration
nJ:      number of cost function evaluations in Newton iteration
nG:      number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp:     number of Hessian-vector products in Newton iteration
GN:      True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
BP:      True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
cost:    cost, J = Jd + Jr
misfit:  misfit cost, Jd
reg:     regularization cost, Jr
(g,p):   inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
||g||L2: l2 norm of gradient
alpha:   step size
tolcg:   relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrease)
```

it	nCG	nJ	nG	nHp	GN	BP	cost	misfit	reg	(g,p)	$\ g\ _{L2}$	alpha	t
olcg													
0	1	1	1	1	T	F	2.086848e+08	2.1e+08	0.0e+00	-2.9e+08	1.9e+07	----	5.0
e-01													
1	2	1	1	2	T	F	6.073043e+07	6.1e+07	2.2e+04	-7.7e+07	7.9e+06	1.0e+00	5.0
e-01													
2	5	1	1	5	T	F	2.171375e+07	2.2e+07	5.6e+04	-3.1e+07	3.9e+06	1.0e+00	4.5
e-01													
3	13	1	1	13	T	T	6.203943e+06	6.1e+06	1.3e+05	-9.1e+06	1.6e+06	1.0e+00	2.9
e-01													
4	42	1	1	42	T	F	1.667335e+06	1.4e+06	2.5e+05	-1.7e+06	4.8e+05	1.0e+00	1.6
e-01													
5	84	1	1	84	F	F	8.289546e+05	4.4e+05	3.9e+05	-5.6e+04	7.7e+04	1.0e+00	6.3
e-02													
6	125	1	1	125	F	F	8.007508e+05	3.8e+05	4.3e+05	-2.5e+02	5.0e+03	1.0e+00	1.6
e-02													
7	194	1	1	194	F	F	8.006273e+05	3.8e+05	4.3e+05	-8.0e-02	7.9e+01	1.0e+00	2.0
e-03													
8	0	1	1	0	F	F	8.006273e+05	3.8e+05	4.3e+05	-----	1.6e-01	1.0e+00	

converged : True

reason : Norm of the gradient less than tolerance

cumulative CG iterations : 466

cumulative cost evaluations : 9

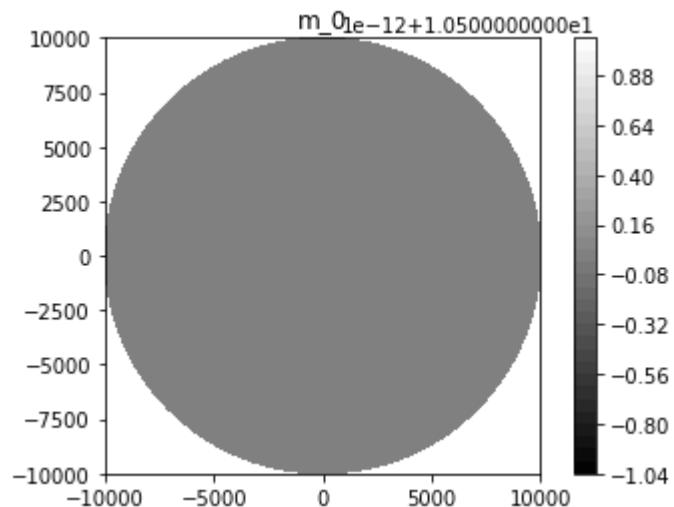
cumulative gradient evaluations : 9

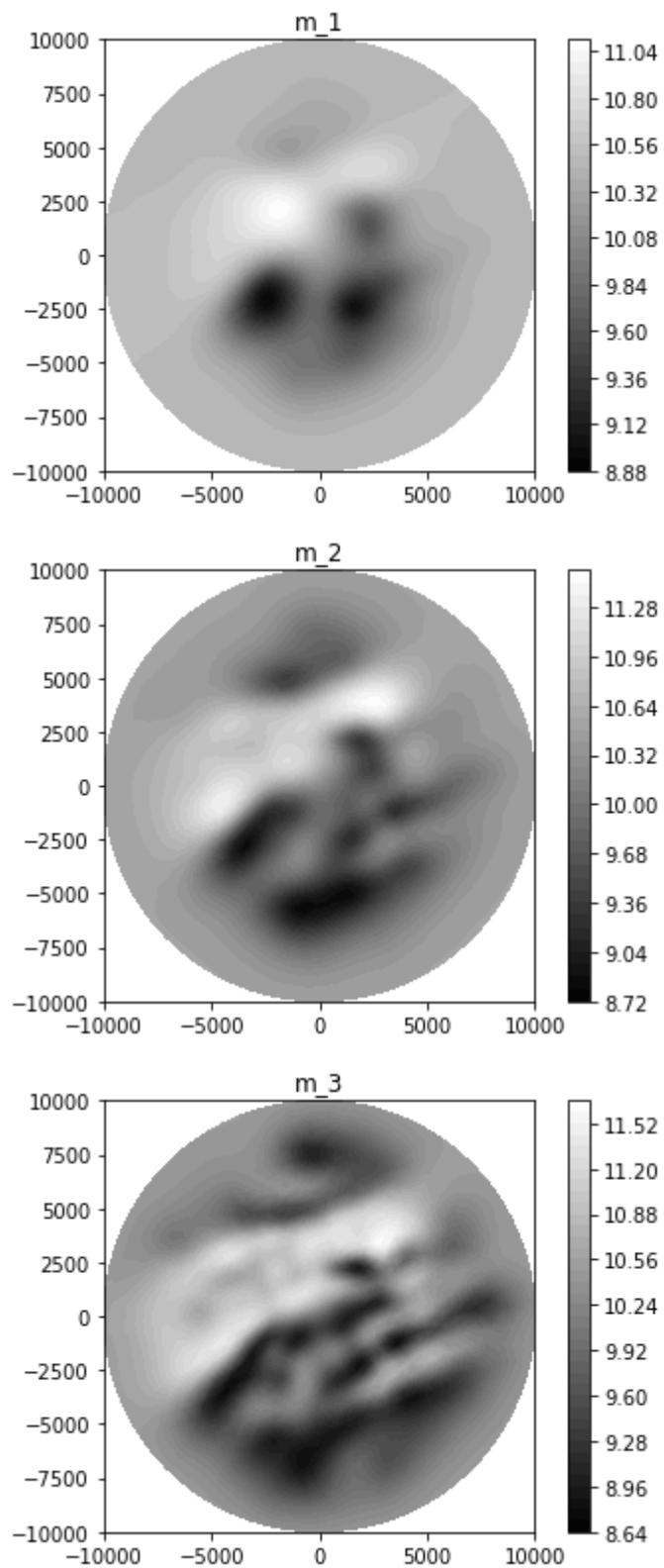
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 466

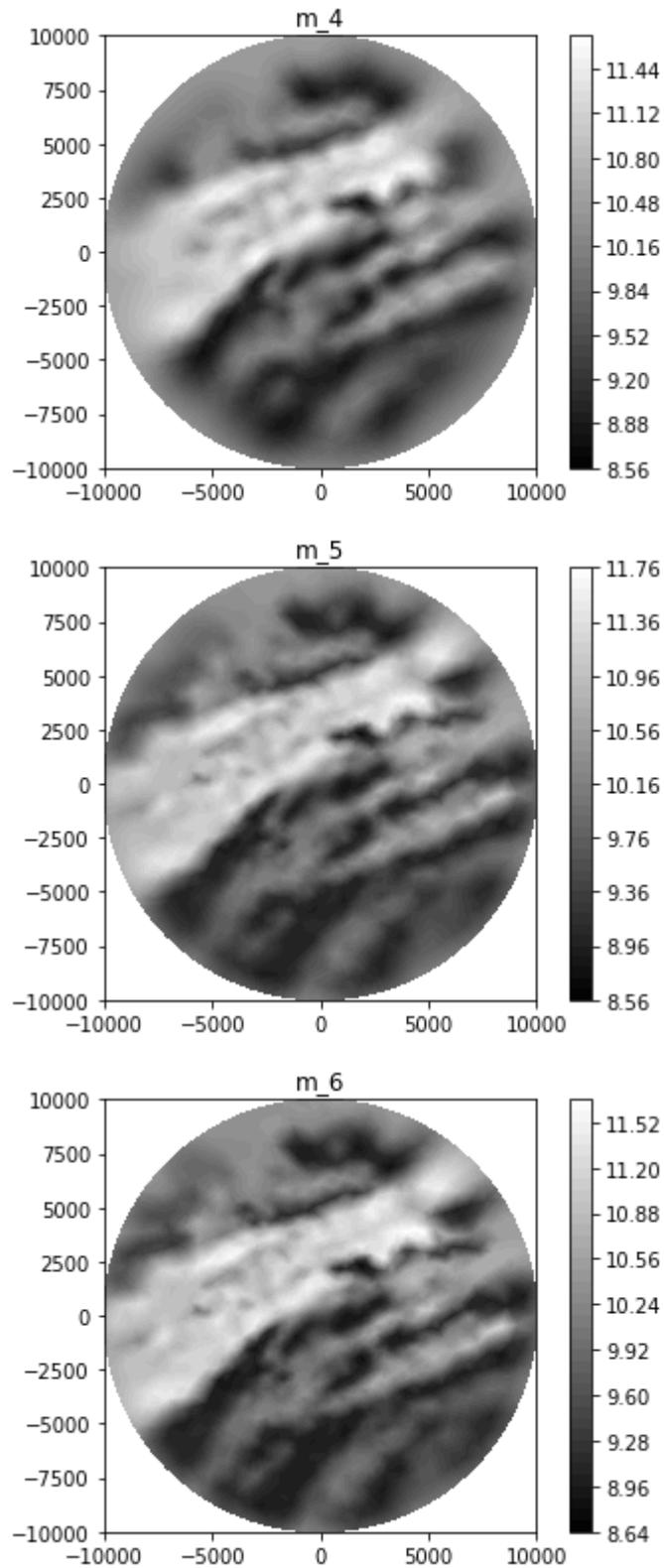
===== End Newton CG convergence information =====

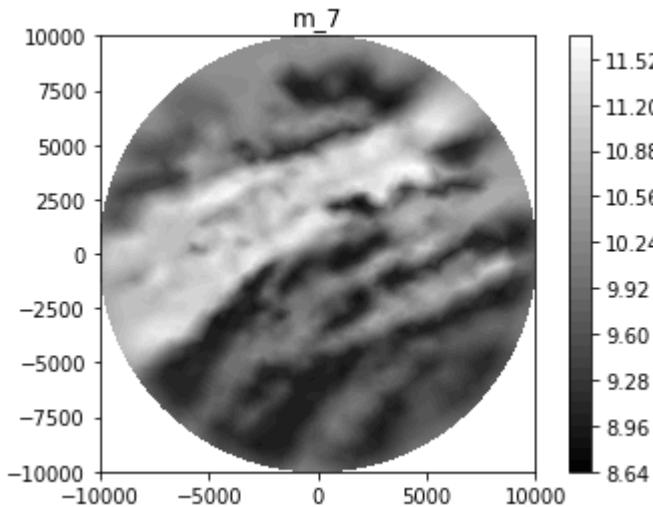
=====

gamma= 7285.488266896614 , noise_datanorm= 866.2663059032905 , misfit_datanorm= 866.2663602953917









```
In [118... misfit_datanorm = morozov_helper()

gamma= 7285.488266896614 , noise_datanorm= 866.2663059032905 , misfit_datanorm=
866.2663602953917
```

Newton CG solve with no preconditioning

```
In [119... update_m(m0_constant_value * np.ones(Vh2.dim()))
REG.update_gamma(gamma_morozov)

iter_NONE = list()
m_iter_NONE = list()
def NONE_callback(it, m_Vh2_numpy):
    iter_NONE.append(it)
    m_iter_NONE.append(m_Vh2_numpy)
    m_Vh2 = dl.Function(Vh2)
    m_Vh2.vector()[:] = m_Vh2_numpy
    plt.figure()
    cm = dl.plot(m_Vh2, cmap='gray')
    plt.colorbar(cm)
    plt.title('m_'+str(it))

identity_operator = lambda x: x

NONE_convergence_info = newtoncg_ls(get_optimization_variable,
                                      set_optimization_variable,
                                      cost_triple,
                                      gradient,
                                      apply_hessian,
                                      apply_gauss_newton_hessian,
                                      build_nothing,
                                      update_nothing,
                                      identity_operator, # no preconditioning
                                      callback=NONE_callback,
                                      rtol=newton_rtol,
                                      num_gn_iter=num_gn_iter,
                                      forcing_sequence_power=forcing_sequence_power)

misfit_datanorm = morozov_helper()
```

```

using Gauss-Newton Hessian
it= 0 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=
True
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 1.947e+07
||M r0|| = 1.947e+07
(M r0, r0) = 1.947e+07
Iteration : 0 (r, r) = 379080272233562.7
Iteration : 1 (r, r) = 42697972707314.5
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 1 iterations with final norm 6534368.57755319

===== Begin Newton CG convergence information =====
=====
Preconditioned inexact Newton-CG with line search
Hp=-g
u <- u + alpha * p
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direct
ion

it=0      : u=u0      -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1      : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
...
it=last : linesearch u -> J -> g -> Done.

it:      Newton iteration number
nCG:     number of CG iterations in Newton iteration
nJ:      number of cost function evaluations in Newton iteration
nG:      number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp:     number of Hessian-vector products in Newton iteration
GN:      True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
BP:      True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwis
e.
cost:    cost, J = Jd + Jr
misfit:  misfit cost, Jd
reg:     regularization cost, Jr
(g,p):   inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
||g||L2: l2 norm of gradient
alpha:   step size
tolcg:   relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrea
se)

it nCG nJ nG nHp GN BP          cost  misfit    reg    (g,p) ||g||L2  alpha  t
olcg
 0   1   1   1   1   T   F 2.086848e+08 2.1e+08 0.0e+00 -3.2e+08 1.9e+07    ---- 5.0
e-01

converged : False
reason    : unknown reason
cumulative CG iterations : 1
cumulative cost evaluations : 1
cumulative gradient evaluations : 1
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 1
===== End Newton CG convergence information =====
=====

using Gauss-Newton Hessian
it= 1 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=
True
Residual: r=b-Ax

```

```

Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 5.759e+06
||M r0|| = 5.759e+06
(M r0, r0) = 5.759e+06
Iteration : 0 (r, r) = 33166444994024.17
Iteration : 1 (r, r) = 10778455539875.082
Iteration : 2 (r, r) = 3559104459029.746
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 2 iterations with final norm 1886558.8936022501

===== Begin Newton CG convergence information =====
=====
Preconditioned inexact Newton-CG with line search
Hp=-g
u <- u + alpha * p
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0      : u=u0          -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1      : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
...
it=last   : linesearch u -> J -> g -> Done.

it:      Newton iteration number
nCG:    number of CG iterations in Newton iteration
nJ:     number of cost function evaluations in Newton iteration
nG:     number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp:    number of Hessian-vector products in Newton iteration
GN:     True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
BP:     True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
cost:   cost, J = Jd + Jr
misfit: misfit cost, Jd
reg:    regularization cost, Jr
(g,p): inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
||g||L2: l2 norm of gradient
alpha:  step size
tolcg: relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrease)

it nCG nJ nG nHp GN BP          cost  misfit    reg    (g,p) ||g||L2  alpha  t
olcg
  0   1   1   1   1   T   F 2.086848e+08 2.1e+08 0.0e+00 -3.2e+08 1.9e+07  ---- 5.0
e-01
  1   2   1   1   2   T   F 4.510106e+07 4.5e+07 2.3e+05 -7.1e+07 5.8e+06 1.0e+00 5.0
e-01

converged : False
reason    : unknown reason
cumulative CG iterations : 3
cumulative cost evaluations : 2
cumulative gradient evaluations : 2
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 3
===== End Newton CG convergence information =====
=====

using Gauss-Newton Hessian
it= 2 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=True
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1

```

```

||r0|| = 2.355e+06
||M r0|| = 2.355e+06
(M r0, r0) = 2.355e+06
Iteration : 0 (r, r) = 5546249383769.889
Iteration : 1 (r, r) = 1749923816325.211
Iteration : 2 (r, r) = 1287697895220.8992
Iteration : 3 (r, r) = 754532763084.305
Iteration : 4 (r, r) = 374622366860.8285
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 4 iterations with final norm 612064.021864403

===== Begin Newton CG convergence information =====
=====
Preconditioned inexact Newton-CG with line search
Hp=-g
u <- u + alpha * p
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0      : u=u0      -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1      : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
...
it=last   : linesearch u -> J -> g -> Done.

it:      Newton iteration number
nCG:     number of CG iterations in Newton iteration
nJ:      number of cost function evaluations in Newton iteration
nG:      number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp:     number of Hessian-vector products in Newton iteration
GN:      True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
BP:      True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
cost:    cost, J = Jd + Jr
misfit:  misfit cost, Jd
reg:     regularization cost, Jr
(g,p):   inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
||g||L2: l2 norm of gradient
alpha:   step size
tolcg:   relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrease)

it nCG nJ nG nHp GN BP          cost  misfit    reg    (g,p) ||g||L2  alpha   t
olcg
  0   1   1   1   1   T   F 2.086848e+08 2.1e+08 0.0e+00 -3.2e+08 1.9e+07    ---- 5.0
e-01
  1   2   1   1   2   T   F 4.510106e+07 4.5e+07 2.3e+05 -7.1e+07 5.8e+06 1.0e+00 5.0
e-01
  2   4   1   1   4   T   F 9.748476e+06 9.4e+06 3.6e+05 -1.5e+07 2.4e+06 1.0e+00 3.5
e-01

converged : False
reason     : unknown reason
cumulative CG iterations : 7
cumulative cost evaluations : 3
cumulative gradient evaluations : 3
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 7
===== End Newton CG convergence information =====
=====

using Gauss-Newton Hessian
it= 3 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=

```

```

True
building preconditioner
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 5.789e+05
||M r0|| = 5.789e+05
(M r0, r0) = 5.789e+05
  Iteration : 0 (r, r) = 335091840852.2207
  Iteration : 1 (r, r) = 230429032912.82394
  Iteration : 2 (r, r) = 231748180006.5479
  Iteration : 3 (r, r) = 147634125518.2476
  Iteration : 4 (r, r) = 128830113592.0217
  Iteration : 5 (r, r) = 82100624579.24158
  Iteration : 6 (r, r) = 41794067211.74344
  Iteration : 7 (r, r) = 25358781050.21408
  Iteration : 8 (r, r) = 25442798581.30677
  Iteration : 9 (r, r) = 28677372087.43466
  Iteration : 10 (r, r) = 16148669810.541443
  Iteration : 11 (r, r) = 15741938476.663586
  Iteration : 12 (r, r) = 12158524134.55995
  Iteration : 13 (r, r) = 7918886222.274076
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 13 iterations with final norm 88988.12405188727

===== Begin Newton CG convergence information =====
=====
Preconditioned inexact Newton-CG with line search
Hp=-g
u <- u + alpha * p
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0      : u=u0          -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1      : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
...
it=last   : linesearch u -> J -> g -> Done.

it:      Newton iteration number
nCG:     number of CG iterations in Newton iteration
nJ:      number of cost function evaluations in Newton iteration
nG:      number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp:     number of Hessian-vector products in Newton iteration
GN:      True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
BP:      True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
cost:    cost, J = Jd + Jr
misfit:  misfit cost, Jd
reg:     regularization cost, Jr
(g,p):   inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
||g||L2: l2 norm of gradient
alpha:   step size
tolcg:  relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrease)

it nCG nJ nG nHp GN BP          cost  misfit      reg    (g,p) ||g||L2  alpha   t
olcg
  0   1   1   1   1   T   F  2.086848e+08 2.1e+08 0.0e+00 -3.2e+08 1.9e+07   ---- 5.0
e-01
  1   2   1   1   2   T   F  4.510106e+07 4.5e+07 2.3e+05 -7.1e+07 5.8e+06 1.0e+00 5.0
e-01
  2   4   1   1   4   T   F  9.748476e+06 9.4e+06 3.6e+05 -1.5e+07 2.4e+06 1.0e+00 3.5

```

```

e-01
 3 13 1 1 13 T T 2.362446e+06 1.9e+06 4.2e+05 -2.9e+06 5.8e+05 1.0e+00 1.7
e-01

converged : False
reason    : unknown reason
cumulative CG iterations : 20
cumulative cost evaluations : 4
cumulative gradient evaluations : 4
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 20
===== End Newton CG convergence information =====
=====

using Gauss-Newton Hessian
it= 4 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=
True
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 9.054e+04
||M r0|| = 9.054e+04
(M r0, r0) = 9.054e+04
  Iteration : 0 (r, r) = 8197723953.237471
  Iteration : 1 (r, r) = 5124155214.415149
  Iteration : 2 (r, r) = 6214719717.241926
  Iteration : 3 (r, r) = 5009890101.838192
  Iteration : 4 (r, r) = 6557977163.770697
  Iteration : 5 (r, r) = 4987977231.413413
  Iteration : 6 (r, r) = 3677210009.51042
  Iteration : 7 (r, r) = 3574639790.2634892
  Iteration : 8 (r, r) = 3930255966.4353337
  Iteration : 9 (r, r) = 4848267198.811773
  Iteration : 10 (r, r) = 3358975271.289107
  Iteration : 11 (r, r) = 2246442060.8080997
  Iteration : 12 (r, r) = 1768780494.3712907
  Iteration : 13 (r, r) = 1770164811.4179175
  Iteration : 14 (r, r) = 1708467211.7186837
  Iteration : 15 (r, r) = 1314685526.1416306
  Iteration : 16 (r, r) = 848539750.7693489
  Iteration : 17 (r, r) = 456324691.79558754
  Iteration : 18 (r, r) = 506168731.21800244
  Iteration : 19 (r, r) = 389923581.5305945
  Iteration : 20 (r, r) = 378658617.6159039
  Iteration : 21 (r, r) = 343251341.43425333
  Iteration : 22 (r, r) = 254958935.65741754
  Iteration : 23 (r, r) = 330353676.7409642
  Iteration : 24 (r, r) = 281937833.7644607
  Iteration : 25 (r, r) = 221967135.3041106
  Iteration : 26 (r, r) = 195624907.83714408
  Iteration : 27 (r, r) = 237911149.99931347
  Iteration : 28 (r, r) = 151607331.8380038
  Iteration : 29 (r, r) = 97351241.60921937
  Iteration : 30 (r, r) = 82290655.63437042
  Iteration : 31 (r, r) = 67505115.39095974
  Iteration : 32 (r, r) = 58526170.26067354
  Iteration : 33 (r, r) = 35236647.47064139
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 33 iterations with final norm 5936.046451186294
=====
Begin Newton CG convergence information =====
=====
Preconditioned inexact Newton-CG with line search

```

```

Hp=-g
u <- u + alpha * p
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0    : u=u0      -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1    : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
...
it=last : linesearch u -> J -> g -> Done.

it:      Newton iteration number
nCG:     number of CG iterations in Newton iteration
nJ:      number of cost function evaluations in Newton iteration
nG:      number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp:     number of Hessian-vector products in Newton iteration
GN:      True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
BP:      True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
cost:    cost, J = Jd + Jr
misfit: misfit cost, Jd
reg:     regularization cost, Jr
(g,p):   inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
||g||L2: l2 norm of gradient
alpha:   step size
tolcg:  relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrease)

it nCG nJ nG nHp GN BP          cost  misfit      reg    (g,p) ||g||L2  alpha   t
olcg
  0   1   1   1   1   T   F 2.086848e+08 2.1e+08 0.0e+00 -3.2e+08 1.9e+07      ---- 5.0
e-01
  1   2   1   1   2   T   F 4.510106e+07 4.5e+07 2.3e+05 -7.1e+07 5.8e+06 1.0e+00 5.0
e-01
  2   4   1   1   4   T   F 9.748476e+06 9.4e+06 3.6e+05 -1.5e+07 2.4e+06 1.0e+00 3.5
e-01
  3  13   1   1  13   T   T 2.362446e+06 1.9e+06 4.2e+05 -2.9e+06 5.8e+05 1.0e+00 1.7
e-01
  4  33   1   1  33   T   F 8.892453e+05 4.6e+05 4.3e+05 -1.8e+05 9.1e+04 1.0e+00 6.8
e-02

converged : False
reason     : unknown reason
cumulative CG iterations : 53
cumulative cost evaluations : 5
cumulative gradient evaluations : 5
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 53
===== End Newton CG convergence information =====
=====

using Hessian
it= 5 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=
False
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 6.206e+03
||M r0|| = 6.206e+03
(M r0, r0) = 6.206e+03
Iteration : 0 (r, r) = 38517663.950942665
Iteration : 1 (r, r) = 27985664.397676446
Iteration : 2 (r, r) = 30985668.525449745
Iteration : 3 (r, r) = 33791771.892907165

```

```

Iteration : 4 (r, r) = 34147167.99197434
Iteration : 5 (r, r) = 25032035.97037315
Iteration : 6 (r, r) = 26911536.445410956
Iteration : 7 (r, r) = 23377806.559326895
Iteration : 8 (r, r) = 18587105.223247416
Iteration : 9 (r, r) = 20996263.707213238
Iteration : 10 (r, r) = 19358235.59352937
Iteration : 11 (r, r) = 13667416.573596442
Iteration : 12 (r, r) = 10438490.45094953
Iteration : 13 (r, r) = 10748235.923991987
Iteration : 14 (r, r) = 8041706.756975525
Iteration : 15 (r, r) = 6150602.893387714
Iteration : 16 (r, r) = 5069268.90928346
Iteration : 17 (r, r) = 4122832.314433043
Iteration : 18 (r, r) = 4816224.188109537
Iteration : 19 (r, r) = 4248534.313951185
Iteration : 20 (r, r) = 3225075.40458952
Iteration : 21 (r, r) = 2860136.5595244365
Iteration : 22 (r, r) = 2271737.724323251
Iteration : 23 (r, r) = 2310417.6400488457
Iteration : 24 (r, r) = 2049135.9590364918
Iteration : 25 (r, r) = 1899701.4641271513
Iteration : 26 (r, r) = 1311240.5227633133
Iteration : 27 (r, r) = 886643.3386076421
Iteration : 28 (r, r) = 760749.3959061732
Iteration : 29 (r, r) = 579996.6268953127
Iteration : 30 (r, r) = 644664.6597528247
Iteration : 31 (r, r) = 612082.9738898049
Iteration : 32 (r, r) = 476847.00074080925
Iteration : 33 (r, r) = 426080.23272166576
Iteration : 34 (r, r) = 449014.2072485867
Iteration : 35 (r, r) = 392371.74616337067
Iteration : 36 (r, r) = 320487.0962496778
Iteration : 37 (r, r) = 274503.95062512124
Iteration : 38 (r, r) = 207435.68065170088
Iteration : 39 (r, r) = 167311.4276103062
Iteration : 40 (r, r) = 143649.82997692196
Iteration : 41 (r, r) = 158474.019663947
Iteration : 42 (r, r) = 142140.23036311578
Iteration : 43 (r, r) = 87275.8904548746
Iteration : 44 (r, r) = 71011.07195394719
Iteration : 45 (r, r) = 53784.94384176434
Iteration : 46 (r, r) = 39163.668687958925
Iteration : 47 (r, r) = 42520.27035229096
Iteration : 48 (r, r) = 43040.93376581894
Iteration : 49 (r, r) = 31089.641048938614
Iteration : 50 (r, r) = 28274.677064281772
Iteration : 51 (r, r) = 20283.690960555243
Iteration : 52 (r, r) = 14717.65982886119
Iteration : 53 (r, r) = 17458.222234869398
Iteration : 54 (r, r) = 20320.78019947081
Iteration : 55 (r, r) = 17489.161098024608
Iteration : 56 (r, r) = 12643.372100585855
Iteration : 57 (r, r) = 10709.662981502333
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 57 iterations with final norm 103.48750157145709

```

===== Begin Newton CG convergence information =====

====

Preconditioned inexact Newton-CG with line search

Hp=-g

```

u <- u + alpha * p
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0      : u=u0          -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1      : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
...
it=last   : linesearch u -> J -> g -> Done.

it:      Newton iteration number
nCG:    number of CG iterations in Newton iteration
nJ:     number of cost function evaluations in Newton iteration
nG:     number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp:    number of Hessian-vector products in Newton iteration
GN:     True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
BP:     True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
cost:   cost, J = Jd + Jr
misfit: misfit cost, Jd
reg:    regularization cost, Jr
(g,p): inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
||g||L2: l2 norm of gradient
alpha:  step size
tolcg: relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrease)

it nCG nJ nG nHp GN BP          cost  misfit      reg    (g,p) ||g||L2  alpha   t
olcg
  0   1   1   1   1   T   F 2.086848e+08 2.1e+08 0.0e+00 -3.2e+08 1.9e+07   ---- 5.0
e-01
  1   2   1   1   2   T   F 4.510106e+07 4.5e+07 2.3e+05 -7.1e+07 5.8e+06 1.0e+00 5.0
e-01
  2   4   1   1   4   T   F 9.748476e+06 9.4e+06 3.6e+05 -1.5e+07 2.4e+06 1.0e+00 3.5
e-01
  3  13   1   1  13   T   T 2.362446e+06 1.9e+06 4.2e+05 -2.9e+06 5.8e+05 1.0e+00 1.7
e-01
  4  33   1   1  33   T   F 8.892453e+05 4.6e+05 4.3e+05 -1.8e+05 9.1e+04 1.0e+00 6.8
e-02
  5  57   1   1  57   F   F 8.011379e+05 3.8e+05 4.2e+05 -1.0e+03 6.2e+03 1.0e+00 1.8
e-02

converged : False
reason      : unknown reason
cumulative CG iterations : 110
cumulative cost evaluations : 6
cumulative gradient evaluations : 6
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 110
===== End Newton CG convergence information =====
=====

using Hessian
it= 6 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=
False
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 1.051e+02
||M r0|| = 1.051e+02
(M r0, r0) = 1.051e+02
Iteration : 0 (r, r) = 11041.252076852004
Iteration : 1 (r, r) = 6480.79361838349
Iteration : 2 (r, r) = 8598.955268388943

```

Iteration : 3 (r, r) = 8356.733984475246
Iteration : 4 (r, r) = 9269.412469415205
Iteration : 5 (r, r) = 8084.5435307727785
Iteration : 6 (r, r) = 6312.287046270902
Iteration : 7 (r, r) = 7130.969979357743
Iteration : 8 (r, r) = 6583.640149113111
Iteration : 9 (r, r) = 6898.276884606657
Iteration : 10 (r, r) = 6600.892913309053
Iteration : 11 (r, r) = 5319.870236457955
Iteration : 12 (r, r) = 4759.78882071909
Iteration : 13 (r, r) = 5863.891537923383
Iteration : 14 (r, r) = 4491.0572872929015
Iteration : 15 (r, r) = 3523.316100099816
Iteration : 16 (r, r) = 3600.9574149501886
Iteration : 17 (r, r) = 3615.31604656166
Iteration : 18 (r, r) = 3169.7688399178223
Iteration : 19 (r, r) = 2504.1353480270554
Iteration : 20 (r, r) = 2068.338452301357
Iteration : 21 (r, r) = 2006.3200557360965
Iteration : 22 (r, r) = 1412.208488122206
Iteration : 23 (r, r) = 1172.435461233607
Iteration : 24 (r, r) = 953.055090757706
Iteration : 25 (r, r) = 694.9523761399565
Iteration : 26 (r, r) = 518.4353864259037
Iteration : 27 (r, r) = 470.3070274045539
Iteration : 28 (r, r) = 404.35762157146024
Iteration : 29 (r, r) = 536.0521374151215
Iteration : 30 (r, r) = 525.012808652886
Iteration : 31 (r, r) = 369.75401188227363
Iteration : 32 (r, r) = 302.2018129799891
Iteration : 33 (r, r) = 334.97432434630605
Iteration : 34 (r, r) = 209.9261563051893
Iteration : 35 (r, r) = 168.90726500789225
Iteration : 36 (r, r) = 124.13299124828319
Iteration : 37 (r, r) = 112.56376323387911
Iteration : 38 (r, r) = 88.86968811957898
Iteration : 39 (r, r) = 92.43400035060625
Iteration : 40 (r, r) = 82.27127348263852
Iteration : 41 (r, r) = 74.63785920608622
Iteration : 42 (r, r) = 55.18476961069929
Iteration : 43 (r, r) = 43.71300218491774
Iteration : 44 (r, r) = 34.67946514017821
Iteration : 45 (r, r) = 33.95554962631195
Iteration : 46 (r, r) = 28.52066837195862
Iteration : 47 (r, r) = 24.29760523690956
Iteration : 48 (r, r) = 24.67825394979203
Iteration : 49 (r, r) = 17.968974718044443
Iteration : 50 (r, r) = 20.215956285598832
Iteration : 51 (r, r) = 13.549500765926396
Iteration : 52 (r, r) = 11.894024862470676
Iteration : 53 (r, r) = 16.07153680882405
Iteration : 54 (r, r) = 11.849272108631794
Iteration : 55 (r, r) = 8.701706791975827
Iteration : 56 (r, r) = 6.928082478685912
Iteration : 57 (r, r) = 6.3909879192945604
Iteration : 58 (r, r) = 7.272413460828608
Iteration : 59 (r, r) = 5.739905820681564
Iteration : 60 (r, r) = 5.230975930459746
Iteration : 61 (r, r) = 3.7055151397631905
Iteration : 62 (r, r) = 2.6626500136229687
Iteration : 63 (r, r) = 1.6005809879849013

```

Iteration : 64 (r, r) = 1.590649313157801
Iteration : 65 (r, r) = 0.921205446099331
Iteration : 66 (r, r) = 0.6729567504648459
Iteration : 67 (r, r) = 0.4841641503216457
Iteration : 68 (r, r) = 0.5611971682634721
Iteration : 69 (r, r) = 0.4418066907746524
Iteration : 70 (r, r) = 0.2528990762676985
Iteration : 71 (r, r) = 0.16826903207307622
Iteration : 72 (r, r) = 0.12852923810875283
Iteration : 73 (r, r) = 0.16965781372588357
Iteration : 74 (r, r) = 0.15313432650493675
Iteration : 75 (r, r) = 0.08495923849368153
Iteration : 76 (r, r) = 0.0529536305441755
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 76 iterations with final norm 0.23011655860492852

===== Begin Newton CG convergence information =====
=====
Preconditioned inexact Newton-CG with line search
Hp=-g
u <- u + alpha * p
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction

it=0      : u=u0      -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1      : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
...
it=last   : linesearch u -> J -> g -> Done.

it:      Newton iteration number
nCG:     number of CG iterations in Newton iteration
nJ:      number of cost function evaluations in Newton iteration
nG:      number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp:     number of Hessian-vector products in Newton iteration
GN:      True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
BP:      True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise
cost:    cost, J = Jd + Jr
misfit:  misfit cost, Jd
reg:     regularization cost, Jr
(g,p):   inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
||g||L2: l2 norm of gradient
alpha:   step size
tolcg:   relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrease)

it nCG nJ nG nHp GN BP          cost  misfit      reg    (g,p) ||g||L2  alpha   t
olcg
 0  1  1  1   1  T  F 2.086848e+08 2.1e+08 0.0e+00 -3.2e+08 1.9e+07  ---- 5.0
e-01
 1  2  1  1   2  T  F 4.510106e+07 4.5e+07 2.3e+05 -7.1e+07 5.8e+06 1.0e+00 5.0
e-01
 2  4  1  1   4  T  F 9.748476e+06 9.4e+06 3.6e+05 -1.5e+07 2.4e+06 1.0e+00 3.5
e-01
 3 13  1  1  13  T  T 2.362446e+06 1.9e+06 4.2e+05 -2.9e+06 5.8e+05 1.0e+00 1.7
e-01
 4 33  1  1  33  T  F 8.892453e+05 4.6e+05 4.3e+05 -1.8e+05 9.1e+04 1.0e+00 6.8
e-02
 5 57  1  1  57  F  F 8.011379e+05 3.8e+05 4.2e+05 -1.0e+03 6.2e+03 1.0e+00 1.8
e-02
 6 76  1  1  76  F  F 8.006274e+05 3.8e+05 4.3e+05 -3.7e-01 1.1e+02 1.0e+00 2.3

```

e-03

```
converged : False
reason    : unknown reason
cumulative CG iterations : 186
cumulative cost evaluations : 7
cumulative gradient evaluations : 7
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 186
===== End Newton CG convergence information =====
=====

using Hessian
it= 7 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=
False
Residual: r=b-Ax
Preconditioner: M =approx= A^-1
||r0|| = 2.286e-01
||M r0|| = 2.286e-01
(M r0, r0) = 2.286e-01
Iteration : 0 (r, r) = 0.05223741053786899
Iteration : 1 (r, r) = 0.03868324295352217
Iteration : 2 (r, r) = 0.054794284445581994
Iteration : 3 (r, r) = 0.05063175961889178
Iteration : 4 (r, r) = 0.0477544715503066
Iteration : 5 (r, r) = 0.057541310452614125
Iteration : 6 (r, r) = 0.04782486649033518
Iteration : 7 (r, r) = 0.052380874700466915
Iteration : 8 (r, r) = 0.052373658627084055
Iteration : 9 (r, r) = 0.040552795462741355
Iteration : 10 (r, r) = 0.036033583611987115
Iteration : 11 (r, r) = 0.029997378937107064
Iteration : 12 (r, r) = 0.021815830285127527
Iteration : 13 (r, r) = 0.02538309180582923
Iteration : 14 (r, r) = 0.020356215644961217
Iteration : 15 (r, r) = 0.015645309479564475
Iteration : 16 (r, r) = 0.016077941355434888
Iteration : 17 (r, r) = 0.0133747504574778
Iteration : 18 (r, r) = 0.009895536942635348
Iteration : 19 (r, r) = 0.009850556484637283
Iteration : 20 (r, r) = 0.006275107947874691
Iteration : 21 (r, r) = 0.004689467559619333
Iteration : 22 (r, r) = 0.004029723197986788
Iteration : 23 (r, r) = 0.003498443945893702
Iteration : 24 (r, r) = 0.0031085008617019886
Iteration : 25 (r, r) = 0.0027509931995832087
Iteration : 26 (r, r) = 0.002084988261214462
Iteration : 27 (r, r) = 0.0019160491900750295
Iteration : 28 (r, r) = 0.0017013775312648754
Iteration : 29 (r, r) = 0.0016077498707710715
Iteration : 30 (r, r) = 0.001316991151408176
Iteration : 31 (r, r) = 0.0015300666760530368
Iteration : 32 (r, r) = 0.0013606215763218514
Iteration : 33 (r, r) = 0.0009955751011483595
Iteration : 34 (r, r) = 0.0007822262654400501
Iteration : 35 (r, r) = 0.0005361853875385336
Iteration : 36 (r, r) = 0.0005143986927349548
Iteration : 37 (r, r) = 0.0005073655958946139
Iteration : 38 (r, r) = 0.0003762155665893137
Iteration : 39 (r, r) = 0.0003342143776602996
Iteration : 40 (r, r) = 0.00030704261177248103
Iteration : 41 (r, r) = 0.00032815559321419446
```

Iteration : 42 (r, r) = 0.00026293964347553816
Iteration : 43 (r, r) = 0.00022414180582658576
Iteration : 44 (r, r) = 0.0001711181297379431
Iteration : 45 (r, r) = 0.00016704686171320205
Iteration : 46 (r, r) = 0.00011488024987754515
Iteration : 47 (r, r) = 0.0001466994173783066
Iteration : 48 (r, r) = 8.607554517707154e-05
Iteration : 49 (r, r) = 6.509096570403759e-05
Iteration : 50 (r, r) = 6.605433945827647e-05
Iteration : 51 (r, r) = 5.4909077765343765e-05
Iteration : 52 (r, r) = 5.2877743880663924e-05
Iteration : 53 (r, r) = 4.574608614517801e-05
Iteration : 54 (r, r) = 3.855969298186111e-05
Iteration : 55 (r, r) = 4.278925552114153e-05
Iteration : 56 (r, r) = 3.883617772042056e-05
Iteration : 57 (r, r) = 3.225789439654046e-05
Iteration : 58 (r, r) = 2.2584499654601662e-05
Iteration : 59 (r, r) = 2.1496332953055465e-05
Iteration : 60 (r, r) = 1.5000862550427258e-05
Iteration : 61 (r, r) = 1.191403083742988e-05
Iteration : 62 (r, r) = 1.1757877478748641e-05
Iteration : 63 (r, r) = 8.596875845648578e-06
Iteration : 64 (r, r) = 7.779510752432567e-06
Iteration : 65 (r, r) = 7.703113100365545e-06
Iteration : 66 (r, r) = 6.898996028907916e-06
Iteration : 67 (r, r) = 5.206592315387605e-06
Iteration : 68 (r, r) = 4.7753104624490595e-06
Iteration : 69 (r, r) = 4.066178083197532e-06
Iteration : 70 (r, r) = 3.1471577585570254e-06
Iteration : 71 (r, r) = 2.976661023471282e-06
Iteration : 72 (r, r) = 2.8150592273866595e-06
Iteration : 73 (r, r) = 2.892613902768146e-06
Iteration : 74 (r, r) = 3.188234837200399e-06
Iteration : 75 (r, r) = 2.3929280715442537e-06
Iteration : 76 (r, r) = 1.806035244791188e-06
Iteration : 77 (r, r) = 2.6099709054017166e-06
Iteration : 78 (r, r) = 2.4314702760515416e-06
Iteration : 79 (r, r) = 1.4636987349178495e-06
Iteration : 80 (r, r) = 9.719282656667425e-07
Iteration : 81 (r, r) = 1.0348398531126796e-06
Iteration : 82 (r, r) = 5.720881048070729e-07
Iteration : 83 (r, r) = 3.3650858744578857e-07
Iteration : 84 (r, r) = 2.5417010638593735e-07
Iteration : 85 (r, r) = 2.1128350976387426e-07
Iteration : 86 (r, r) = 1.3333880821928375e-07
Iteration : 87 (r, r) = 1.1863989092486281e-07
Iteration : 88 (r, r) = 1.1621495838664e-07
Iteration : 89 (r, r) = 8.936937467837031e-08
Iteration : 90 (r, r) = 7.927076384674928e-08
Iteration : 91 (r, r) = 6.535626520180457e-08
Iteration : 92 (r, r) = 4.74893763744618e-08
Iteration : 93 (r, r) = 4.109045419449519e-08
Iteration : 94 (r, r) = 4.01954947160658e-08
Iteration : 95 (r, r) = 3.832708181201385e-08
Iteration : 96 (r, r) = 2.7975590307877087e-08
Iteration : 97 (r, r) = 3.000059090953985e-08
Iteration : 98 (r, r) = 2.2855191141253663e-08
Iteration : 99 (r, r) = 2.013142379370433e-08
Iteration : 100 (r, r) = 9.050924127004502e-09
Iteration : 101 (r, r) = 8.275270304424685e-09
Iteration : 102 (r, r) = 5.5658629257174904e-09

```

Iteration : 103 (r, r) = 3.548835894171156e-09
Iteration : 104 (r, r) = 5.7793693340136455e-09
Iteration : 105 (r, r) = 3.0981676066109283e-09
Iteration : 106 (r, r) = 2.0880105823884946e-09
Iteration : 107 (r, r) = 2.853714168064571e-09
Iteration : 108 (r, r) = 1.837380481233972e-09
Iteration : 109 (r, r) = 1.6606535387683956e-09
Iteration : 110 (r, r) = 1.821207163014185e-09
Iteration : 111 (r, r) = 1.4114294547411335e-09
Iteration : 112 (r, r) = 1.2304358017071983e-09
Iteration : 113 (r, r) = 1.1290518760312375e-09
Iteration : 114 (r, r) = 7.705264448834527e-10
Iteration : 115 (r, r) = 7.410054592867134e-10
Iteration : 116 (r, r) = 7.191902949739777e-10
Iteration : 117 (r, r) = 3.786602314230547e-10
Relative/Absolute residual less than tol
Converged in 117 iterations with final norm 1.9459194007539334e-05

```

```
===== Begin Newton CG convergence information =====
=====
```

```
Preconditioned inexact Newton-CG with line search
```

```
Hp=-g
```

```
u <- u + alpha * p
```

```
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direction
```

```

it=0      : u=u0          -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1      : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
...
it=last   : linesearch u -> J -> g -> Done.
```

```
it:      Newton iteration number
```

```
nCG:     number of CG iterations in Newton iteration
```

```
nJ:     number of cost function evaluations in Newton iteration
```

```
nG:     number of gradient evaluations in Newton iteration
```

```
nHp:    number of Hessian-vector products in Newton iteration
```

```
GN:     True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
```

```
BP:     True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwise.
```

```
cost:    cost, J = Jd + Jr
```

```
misfit:  misfit cost, Jd
```

```
reg:     regularization cost, Jr
```

```
(g,p):  inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
```

```
||g||L2: l2 norm of gradient
```

```
alpha:   step size
```

```
tolcg:  relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrease)
```

it	nCG	nJ	nG	nHp	GN	BP	cost	misfit	reg	(g,p)	g L2	alpha	t
0	1	1	1	1	T	F	2.086848e+08	2.1e+08	0.0e+00	-3.2e+08	1.9e+07	----	5.0
													e-01
1	2	1	1	2	T	F	4.510106e+07	4.5e+07	2.3e+05	-7.1e+07	5.8e+06	1.0e+00	5.0
													e-01
2	4	1	1	4	T	F	9.748476e+06	9.4e+06	3.6e+05	-1.5e+07	2.4e+06	1.0e+00	3.5
													e-01
3	13	1	1	13	T	T	2.362446e+06	1.9e+06	4.2e+05	-2.9e+06	5.8e+05	1.0e+00	1.7
													e-01
4	33	1	1	33	T	F	8.892453e+05	4.6e+05	4.3e+05	-1.8e+05	9.1e+04	1.0e+00	6.8
													e-02
5	57	1	1	57	F	F	8.011379e+05	3.8e+05	4.2e+05	-1.0e+03	6.2e+03	1.0e+00	1.8

```

e-02
 6 76 1 1 76 F F 8.006274e+05 3.8e+05 4.3e+05 -3.7e-01 1.1e+02 1.0e+00 2.3
e-03
 7 117 1 1 117 F F 8.006273e+05 3.8e+05 4.3e+05 -2.0e-06 2.3e-01 1.0e+00 1.1
e-04

converged : False
reason      : unknown reason
cumulative CG iterations : 303
cumulative cost evaluations : 8
cumulative gradient evaluations : 8
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 303
===== End Newton CG convergence information =====
=====

using Hessian
it= 8 , preconditioner_build_iters= (3,) , num_gn_iter= 5 , using_gauss_newton=
False

===== Begin Newton CG convergence information =====
=====
Preconditioned inexact Newton-CG with line search
Hp=-g
u <- u + alpha * p
u: parameter, J: cost, g: gradient, H: Hessian, alpha=step size, p=search direct
ion

it=0      : u=u0          -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
it=1      : linesearch u -> J -> g -> build precond (optional) -> cgssolve Hp=-g
...
it=last   : linesearch u -> J -> g -> Done.

it:        Newton iteration number
nCG:       number of CG iterations in Newton iteration
nJ:        number of cost function evaluations in Newton iteration
nG:        number of gradient evaluations in Newton iteration
nHp:       number of Hessian-vector products in Newton iteration
GN:        True (T) if Gauss-Newton Hessian is used, False (F) if Hessian is used
BP:        True (T) if we built or rebuilt the preconditioner, False (F) otherwis
e.
cost:      cost, J = Jd + Jr
misfit:    misfit cost, Jd
reg:       regularization cost, Jr
(g,p):    inner product between gradient, g, and Newton search direction, p
||g||L2:   l2 norm of gradient
alpha:     step size
tolcg:    relative tolerance for Hp=-g CG solve (unpreconditioned residual decrea
se)

it nCG nJ nG nHp GN BP          cost  misfit      reg    (g,p) ||g||L2  alpha   t
olcg
 0 1 1 1 1 T F 2.086848e+08 2.1e+08 0.0e+00 -3.2e+08 1.9e+07    ---- 5.0
e-01
 1 2 1 1 2 T F 4.510106e+07 4.5e+07 2.3e+05 -7.1e+07 5.8e+06 1.0e+00 5.0
e-01
 2 4 1 1 4 T F 9.748476e+06 9.4e+06 3.6e+05 -1.5e+07 2.4e+06 1.0e+00 3.5
e-01
 3 13 1 1 13 T T 2.362446e+06 1.9e+06 4.2e+05 -2.9e+06 5.8e+05 1.0e+00 1.7
e-01
 4 33 1 1 33 T F 8.892453e+05 4.6e+05 4.3e+05 -1.8e+05 9.1e+04 1.0e+00 6.8
e-02

```

```

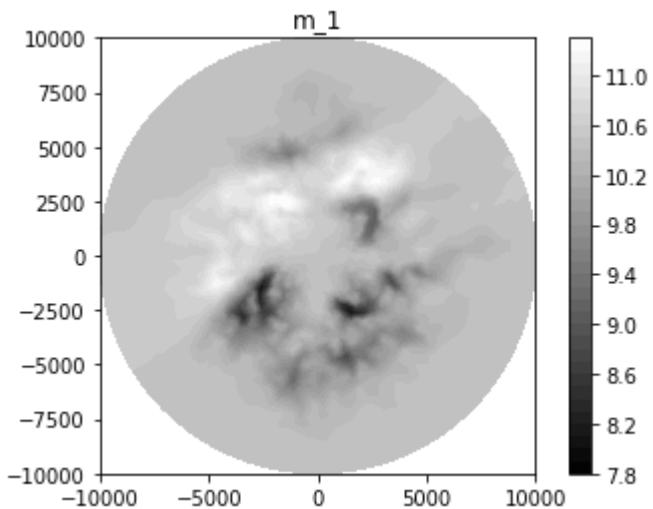
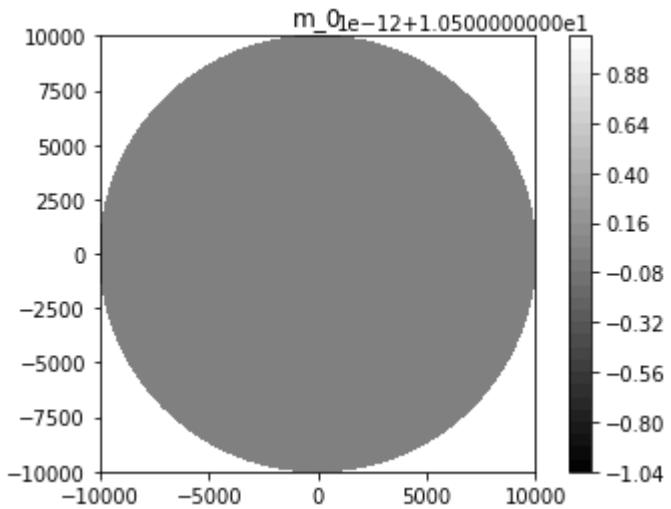
 5 57 1 1 57 F F 8.011379e+05 3.8e+05 4.2e+05 -1.0e+03 6.2e+03 1.0e+00 1.8
e-02
 6 76 1 1 76 F F 8.006274e+05 3.8e+05 4.3e+05 -3.7e-01 1.1e+02 1.0e+00 2.3
e-03
 7 117 1 1 117 F F 8.006273e+05 3.8e+05 4.3e+05 -2.0e-06 2.3e-01 1.0e+00 1.1
e-04
 8 0 1 1 0 F F 8.006273e+05 3.8e+05 4.3e+05 ----- 4.1e-02 1.0e+00
-----

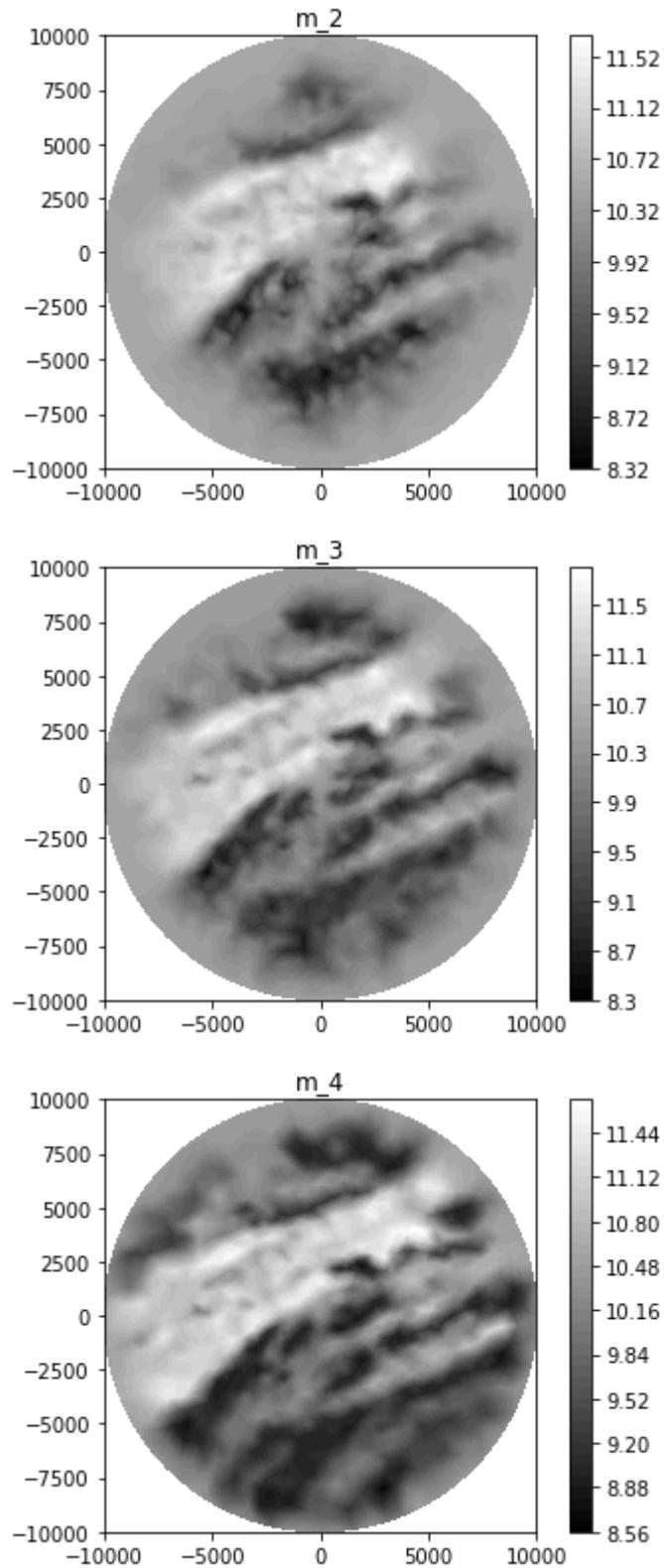
```

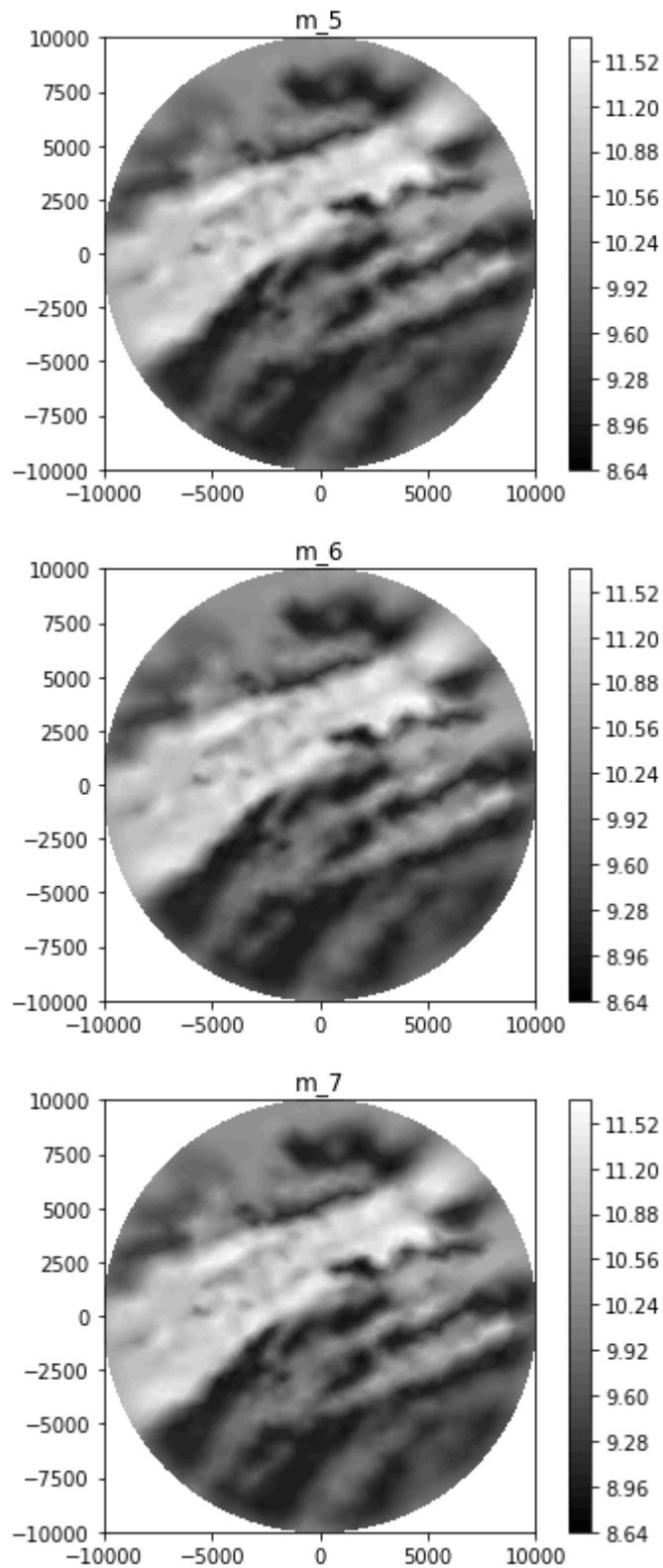
```

converged : True
reason    : Norm of the gradient less than tolerance
cumulative CG iterations : 303
cumulative cost evaluations : 9
cumulative gradient evaluations : 9
cumulative Hessian vector products (excluding preconditioner builds) : 303
===== End Newton CG convergence information =====
=====
```

gamma= 7285.488266896614 , noise_datanorm= 866.2663059032905 , misfit_datanorm= 866.2663067292851







Plots to make (4):

- Newton CG iterations and gradient table (psf and reg)
- Newton iterates (reg and psf)
- u recovered (with arrows)

In [122...]

localhost:8888/nbconvert/html/stokes_dev3.ipynb?download=false

70/267

```

norm_grad_newton_pch = np.array(PCH_convergence_info.gradnorm)
norm_grad_newton_reg = np.array(REG_convergence_info.gradnorm)
norm_grad_newton_none = np.array(NONE_convergence_info.gradnorm)

print('norm_grad_newton_pch=', norm_grad_newton_pch)
print('norm_grad_newton_reg=', norm_grad_newton_reg)
print('norm_grad_newton_none=', norm_grad_newton_none)
print('norm_grad_newton_pch/norm_grad_newton_pch[0] = ', norm_grad_newton_pch/norm_grad_newton_pch[0])
print('norm_grad_newton_reg/norm_grad_newton_reg[0] = ', norm_grad_newton_reg/norm_grad_newton_reg[0])
print('norm_grad_newton_none/norm_grad_newton_none[0] = ', norm_grad_newton_none/norm_grad_newton_none[0])

```

```

norm_grad_newton_pch= [1.94699839e+07 5.75903160e+06 2.35504764e+06 5.78871178e+05
5.61489210e+04 3.44651043e+03 2.65574804e+01 4.08506507e-02]
norm_grad_newton_reg= [1.94699839e+07 7.90211107e+06 3.87424591e+06 1.62266011e+06
4.77693437e+05 7.72159666e+04 5.03735473e+03 7.91265181e+01
1.60215850e-01]
norm_grad_newton_none= [1.94699839e+07 5.75903160e+06 2.35504764e+06 5.78871178e+05
9.05412831e+04 6.20626006e+03 1.05077362e+02 2.28555049e-01
4.07589220e-02]
norm_grad_newton_pch/norm_grad_newton_pch[0]= [1.00000000e+00 2.95790260e-01 1.20957863e-01 2.97314667e-02
2.88387096e-03 1.77016604e-04 1.36402169e-06 2.09813480e-09]
norm_grad_newton_reg/norm_grad_newton_reg[0]= [1.00000000e+00 4.05861202e-01 1.98985574e-01 8.33416260e-02
2.45348656e-02 3.96589782e-03 2.58724135e-04 4.06402587e-06
8.22886404e-09]
norm_grad_newton_reg/norm_grad_newton_none[0]= [1.00000000e+00 2.95790260e-01 1.20957863e-01 2.97314667e-02
4.65030088e-03 3.18760411e-04 5.39689005e-06 1.17388412e-08
2.09342351e-09]

```

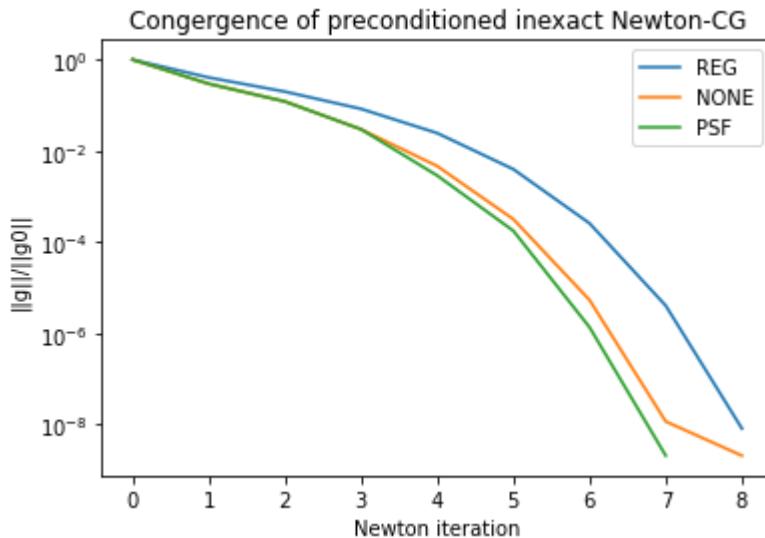
In [124...]

```

plt.figure()
plt.semilogy(norm_grad_newton_reg/norm_grad_newton_reg[0])
plt.semilogy(norm_grad_newton_none/norm_grad_newton_none[0])
plt.semilogy(norm_grad_newton_pch/norm_grad_newton_pch[0])
plt.legend(['REG', 'NONE', 'PSF'])
plt.xlabel('Newton iteration')
plt.ylabel('||g||/||g0||')
plt.title('Congergence of preconditioned inexact Newton-CG')

```

Out[124...]: Text(0.5, 1.0, 'Congergence of preconditioned inexact Newton-CG')



In [126...]

```
cumulative_cg_pch = np.concatenate([np.array([0.0]), np.cumsum(PCH_convergence_i)]
cumulative_cg_reg = np.concatenate([np.array([0.0]), np.cumsum(REG_convergence_i)]
cumulative_cg_none = np.concatenate([np.array([0.0]), np.cumsum(NONE_convergence_i)

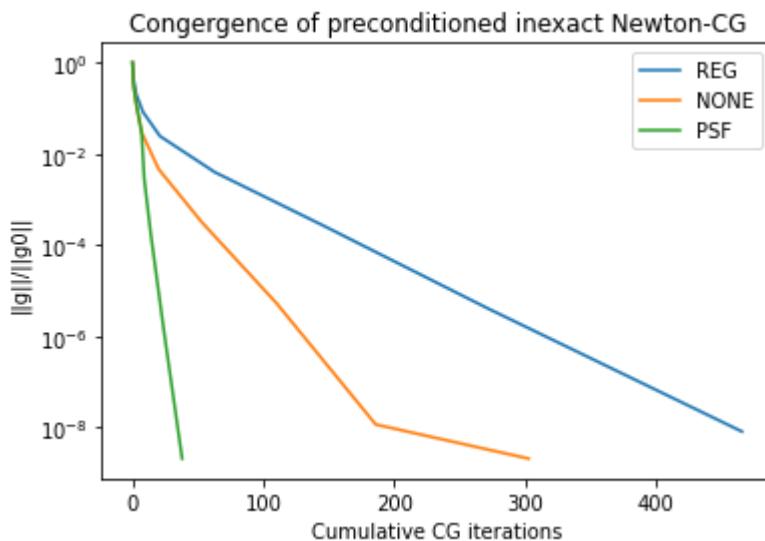
print('cumulative_cg_pch=', cumulative_cg_pch)
print('cumulative_cg_reg=', cumulative_cg_reg)
print('cumulative_cg_none=', cumulative_cg_none)

plt.figure()

plt.semilogy(cumulative_cg_reg, norm_grad_newton_reg/norm_grad_newton_reg[0])
plt.semilogy(cumulative_cg_none, norm_grad_newton_none/norm_grad_newton_none[0])
plt.semilogy(cumulative_cg_pch, norm_grad_newton_pch/norm_grad_newton_pch[0])
plt.legend(['REG', 'NONE', 'PSF'])
plt.xlabel('Cumulative CG iterations')
plt.ylabel('||g||/||g0||')
plt.title('Congergence of preconditioned inexact Newton-CG')
```

```
cumulative_cg_pch= [ 0.  1.  3.  7.  9. 14. 24. 38.]
cumulative_cg_reg= [ 0.   1.   3.   8.  21.  63. 147. 272. 466.]
cumulative_cg_none= [ 0.   1.   3.   7.  20.  53. 110. 186. 303.]
Text(0.5, 1.0, 'Congergence of preconditioned inexact Newton-CG')
```

Out[126...]



```
In [127...]: print(PCH_convergence_info.hess_matvecs)
print(PCH_convergence_info.cg_iter)
```

```
[1, 2, 4, 2, 5, 10, 14, 0]
[1, 2, 4, 2, 5, 10, 14, 0]
```

```
In [128...]: spatialdim = 2
num_moment_matvecs = 1 + spatialdim + spatialdim * (spatialdim + 1) / 2.0
num_preconditioner_build_matvecs = num_moment_matvecs + num_batches

print('num_moment_matvecs=', num_moment_matvecs)
print('num_preconditioner_build_matvecs=', num_preconditioner_build_matvecs)

num_moment_matvecs= 6.0
num_preconditioner_build_matvecs= 11.0
```

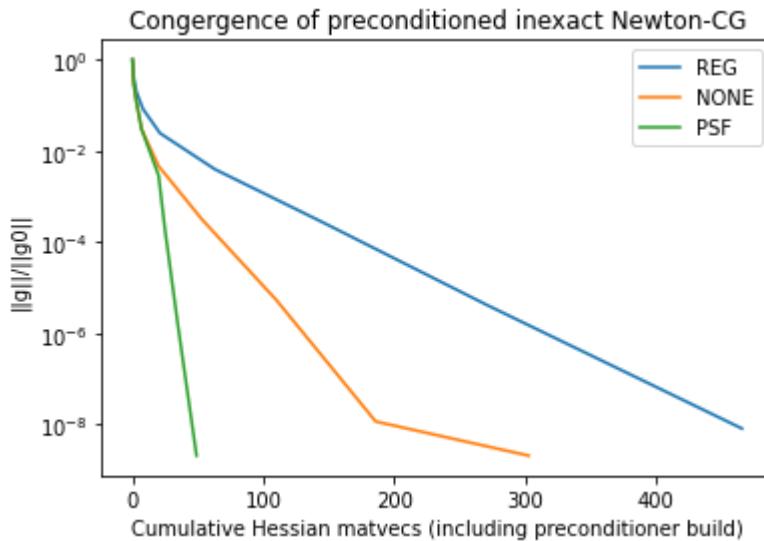
```
In [130...]: cumulative_hessian_matvecs_psf = [0.0]
for nh, build in zip(PCH_convergence_info.hess_matvecs[:-1], PCH_convergence_info.cg_iter):
    prev_matvecs = cumulative_hessian_matvecs_psf[-1]
    if build:
        new_matvecs = nh + num_preconditioner_build_matvecs
    else:
        new_matvecs = nh
    cumulative_hessian_matvecs_psf.append(prev_matvecs + new_matvecs)

cumulative_hessian_matvecs_reg = cumulative_cg_reg
cumulative_hessian_matvecs_none = cumulative_cg_none
cumulative_hessian_matvecs_psf = np.array(cumulative_hessian_matvecs_psf)
print('cumulative_hessian_matvecs_psf=', cumulative_hessian_matvecs_psf)
print('cumulative_hessian_matvecs_reg=', cumulative_hessian_matvecs_reg)
print('cumulative_hessian_matvecs_none=', cumulative_hessian_matvecs_none)

plt.figure()
plt.semilogy(cumulative_hessian_matvecs_reg, norm_grad_newton_reg/norm_grad_newton)
plt.semilogy(cumulative_hessian_matvecs_none, norm_grad_newton_none/norm_grad_newton)
plt.semilogy(cumulative_hessian_matvecs_psf, norm_grad_newton_pch/norm_grad_newton)
plt.legend(['REG', 'NONE', 'PSF'])
plt.xlabel('Cumulative Hessian matvecs (including preconditioner build)')
plt.ylabel('||g||/||g0||')
plt.title('Congergence of preconditioned inexact Newton-CG')
```

```
cumulative_hessian_matvecs_psf= [ 0.  1.  3.  7. 20. 25. 35. 49.]
cumulative_hessian_matvecs_reg= [ 0.  1.  3.  8. 21. 63. 147. 272. 466.]
cumulative_hessian_matvecs_none= [ 0.  1.  3.  7. 20. 53. 110. 186. 303.]
Text(0.5, 1.0, 'Congergence of preconditioned inexact Newton-CG')
```

Out[130...]



In [132]:

```

cumulative_stokes_psf = [PCH_convergence_info.cost_calls[0] + PCH_convergence_info.grad_calls[0]]
for k in range(1,len(PCH_convergence_info.newton_iter)):
    cs = cumulative_stokes_psf[-1]
    cs += PCH_convergence_info.cost_calls[k]
    cs += PCH_convergence_info.grad_calls[k]
    cs += 2*PCH_convergence_info.hess_matvecs[k-1] # incremental forward and inverse
    if PCH_convergence_info.build_precond[k-1]:
        cs += 2*num_preconditioner_build_matvecs
    cumulative_stokes_psf.append(cs)

cumulative_stokes_psf = np.array(cumulative_stokes_psf, dtype=int)
print('cumulative_stokes_psf=', cumulative_stokes_psf)

cumulative_stokes_reg = [REG_convergence_info.cost_calls[0] + REG_convergence_info.grad_calls[0]]
for k in range(1,len(REG_convergence_info.newton_iter)):
    cs = cumulative_stokes_reg[-1]
    cs += REG_convergence_info.cost_calls[k]
    cs += REG_convergence_info.grad_calls[k]
    cs += 2*REG_convergence_info.hess_matvecs[k-1] # incremental forward and inverse
    cumulative_stokes_reg.append(cs)

cumulative_stokes_reg = np.array(cumulative_stokes_reg)
print('cumulative_stokes_reg=', cumulative_stokes_reg)

cumulative_stokes_none = [NONE_convergence_info.cost_calls[0] + NONE_convergence_info.grad_calls[0]]
for k in range(1,len(NONE_convergence_info.newton_iter)):
    cs = cumulative_stokes_none[-1]
    cs += NONE_convergence_info.cost_calls[k]
    cs += NONE_convergence_info.grad_calls[k]
    cs += 2*NONE_convergence_info.hess_matvecs[k-1] # incremental forward and inverse
    cumulative_stokes_none.append(cs)

relative_grad_psf = norm_grad_newton_pch/norm_grad_newton_pch[0]
relative_grad_reg = norm_grad_newton_reg/norm_grad_newton_reg[0]
relative_grad_none = norm_grad_newton_none/norm_grad_newton_none[0]

print('relative_grad_psf=', relative_grad_psf)
print('relative_grad_reg=', relative_grad_reg)
print('relative_grad_none=', relative_grad_none)

plt.figure()
plt.semilogy(cumulative_stokes_reg, relative_grad_reg)

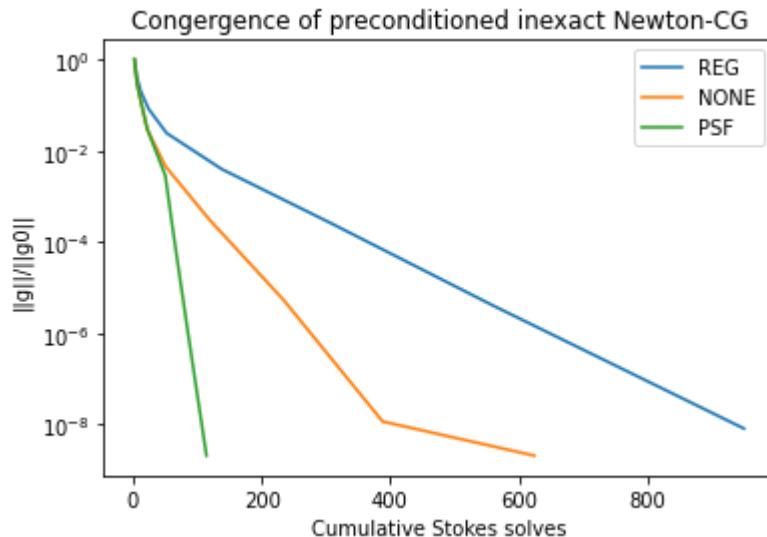
```

```
plt.semilogy(cumulative_stokes_none, relative_grad_none)
plt.semilogy(cumulative_stokes_psf, relative_grad_psf)
plt.legend(['REG', 'NONE', 'PSF'])
plt.xlabel('Cumulative Stokes solves')
plt.ylabel('||g||/||g0||')
plt.title('Congergence of preconditioned inexact Newton-CG')
```

```
cumulative_stokes_psf= [ 2   6   12  22  50  62  84 114]
cumulative_stokes_reg= [ 2   6   12  24  52 138 308 560 950]
relative_grad_psf= [1.0000000e+00 2.95790260e-01 1.20957863e-01 2.97314667e-02
2.88387096e-03 1.77016604e-04 1.36402169e-06 2.09813480e-09]
relative_grad_reg= [1.0000000e+00 4.05861202e-01 1.98985574e-01 8.33416260e-02
2.45348656e-02 3.96589782e-03 2.58724135e-04 4.06402587e-06
8.22886404e-09]
relative_grad_none= [1.0000000e+00 2.95790260e-01 1.20957863e-01 2.97314667e-02
4.65030088e-03 3.18760411e-04 5.39689005e-06 1.17388412e-08
2.09342351e-09]
```

```
Text(0.5, 1.0, 'Congergence of preconditioned inexact Newton-CG')
```

Out[132...]



In [133...]

```
np.savetxt(save_dir_str + '/cumulative_cg_pch.txt', cumulative_cg_pch)
np.savetxt(save_dir_str + '/cumulative_cg_reg.txt', cumulative_cg_reg)
np.savetxt(save_dir_str + '/cumulative_cg_none.txt', cumulative_cg_none)
np.savetxt(save_dir_str + '/cumulative_hessian_matvecs_psf.txt', cumulative_hess
np.savetxt(save_dir_str + '/cumulative_hessian_matvecs_reg.txt', cumulative_hess
np.savetxt(save_dir_str + '/cumulative_hessian_matvecs_none.txt', cumulative_hes
np.savetxt(save_dir_str + '/cumulative_stokes_psf.txt', cumulative_stokes_psf)
np.savetxt(save_dir_str + '/cumulative_stokes_reg.txt', cumulative_stokes_reg)
np.savetxt(save_dir_str + '/cumulative_stokes_none.txt', cumulative_stokes_none)
np.savetxt(save_dir_str + '/relative_grad_psf.txt', relative_grad_psf)
np.savetxt(save_dir_str + '/relative_grad_reg.txt', relative_grad_reg)
np.savetxt(save_dir_str + '/relative_grad_none.txt', relative_grad_none)
```

In [134...]

```
dl.File(save_dir_str + "/recovered_pressure" + str(outflow_constant)+".pvf") <<
dl.File(save_dir_str + "/recovered_velocity" + str(outflow_constant)+".pvf") <<
```

In [135...]

```
num_cg_newton_none = np.array(NONE_convergence_info.hess_matvecs)
num_stokes_newton_none = (np.array(NONE_convergence_info.cost_calls) +
np.array(NONE_convergence_info.grad_calls) +
2*np.array(NONE_convergence_info.hess_matvecs))
```

```

num_cg_newton_reg = np.array(REG_convergence_info.hess_matvecs)
num_stokes_newton_reg = (np.array(REG_convergence_info.cost_calls) +
                         np.array(REG_convergence_info.grad_calls) +
                         2*np.array(REG_convergence_info.hess_matvecs))

num_cg_newton_psf = np.array(PCH_convergence_info.hess_matvecs)
num_stokes_newton_psf = (np.array(PCH_convergence_info.cost_calls) +
                         np.array(PCH_convergence_info.grad_calls) +
                         2*np.array(PCH_convergence_info.hess_matvecs))

num_stokes_build_preconditioner = 2*num_preconditioner_build_matvecs*np.array(PC
num_stokes_build_preconditioner = np.array(num_stokes_build_preconditioner, dtype=)

np.savetxt(save_dir_str + '/norm_grad_newton_reg.txt', norm_grad_newton_reg)
np.savetxt(save_dir_str + '/norm_grad_newton_psf.txt', norm_grad_newton_pch)
np.savetxt(save_dir_str + '/norm_grad_newton_none.txt', norm_grad_newton_none)
np.savetxt(save_dir_str + '/num_cg_newton_reg.txt', num_cg_newton_reg)
np.savetxt(save_dir_str + '/num_cg_newton_psf.txt', num_cg_newton_psf)
np.savetxt(save_dir_str + '/num_cg_newton_none.txt', num_cg_newton_none)
np.savetxt(save_dir_str + '/num_stokes_newton_reg.txt', num_stokes_newton_reg)
np.savetxt(save_dir_str + '/num_stokes_newton_psf.txt', num_stokes_newton_psf)
np.savetxt(save_dir_str + '/num_stokes_newton_none.txt', num_stokes_newton_none)
np.savetxt(save_dir_str + '/num_stokes_build_preconditioner.txt', num_stokes_bui

```

In [143]:

```

ps = " "*5 + " | " + " "*10 + "PSF" + " "*11 + " | " + " "*10 + "REG" + " "*11 + " | "
ps += "-"*5 + " | " + "-"*24 + " | " + "-"*24 + " | " + "-"*24 + "\n"
ps += "{0:>4} | {1:<3} {2:<7} {3:>9} | {4:<3} {5:<7} {6:>9} | {7:<3} {8:<7} |
      "Iter", "#CG", "#Stokes", "||g||", "#CG", "#Stokes", "||g||", "#CG",
for k in range(len(norm_grad_newton_reg)):
    ps += "{:>4}".format(k)
    ps += " | "
    if k < len(num_cg_newton_psf):
        ps += "{:<3d}".format(num_cg_newton_psf[k])
        ps += " "
        if nbuild > 0:
            ps += "{:<7}".format(str(num_stokes_newton_psf[k]) + " + " + str(int(
        else:
            ps += "{:<7d}".format(num_stokes_newton_psf[k])
            ps += " "
            ps += "{:>9}".format(np.format_float_scientific(norm_grad_newton_pch[k],
    else:
        ps += "{:<3d}".format('---')
        ps += " "
        ps += "{:<7d}".format('---')
        ps += " "
        ps += "{:>9d}".format('---')

    ps += " | "
    ps += "{:<3d}".format(num_cg_newton_reg[k])
    ps += " "
    ps += "{:<7d}".format(num_stokes_newton_reg[k])
    ps += " "
    ps += "{:>9d}".format(np.format_float_scientific(norm_grad_newton_reg[k], pre
    ps += " | "
    ps += "{:<3d}".format(num_cg_newton_none[k])
    ps += " "
    ps += "{:<7d}".format(num_stokes_newton_none[k])

```

```

ps += " "
ps += "{:>9}".format(np.format_float_scientific(norm_grad_newton_none[k], pr
ps += "\n"

print(ps)

num_cg_total_psf = np.sum(num_cg_newton_psf)
print('num_cg_total_psf=' , num_cg_total_psf)

num_cg_total_reg = np.sum(num_cg_newton_reg)
print('num_cg_total_reg=' , num_cg_total_reg)

num_cg_total_none = np.sum(num_cg_newton_none)
print('num_cg_total_none=' , num_cg_total_none)

num_stokes_total_psf = np.sum(num_stokes_newton_psf)
print('num_stokes_total_psf=' , num_stokes_total_psf)

num_stokes_total_reg = np.sum(num_stokes_newton_reg)
print('num_stokes_total_reg=' , num_stokes_total_reg)

num_stokes_total_none = np.sum(num_stokes_newton_none)
print('num_stokes_total_none=' , num_stokes_total_none)

# Iter | #CG (PSF) | #Stokes (PSF) | ||g|| (PSF) | #CG (REG) | #Stokes (REG)
# 1   | 1           | 1234          | 1.95e+07    | 1           | 2345
# 2   | 2           | 1234          | 7.88e+06    | 2           | 2345
# 3   | 5           | 1234          | 3.86e+06    | 5           | 2345
# 4   | 2           | 1234 + 24    | 1.62e+06    | 14          | 2345
# ... | ...          | ...           | ...          | ...          | ...
# 8   | 15          | 1234          | 3.74e+01    | 210         | 2345
# 9   | ---          | 2             | 1.26e-01    | ---          | 2

```

	PSF			REG			NONE		
Iter	#CG	#Stokes	g	#CG	#Stokes	g	#CG	#Stokes	g
0	1	4	1.95e+07	1	4	1.95e+07	1	4	1.95e+07
1	2	6	5.76e+06	2	6	7.90e+06	2	6	5.76e+06
2	4	10	2.36e+06	5	12	3.87e+06	4	10	2.36e+06
3	2	6	5.79e+05	13	28	1.62e+06	13	28	5.79e+05
4	5	12	5.61e+04	42	86	4.78e+05	33	68	9.05e+04
5	10	22	3.45e+03	84	170	7.72e+04	57	116	6.21e+03
6	14	30	2.66e+01	125	252	5.04e+03	76	154	1.05e+02
7	0	2	4.09e-02	194	390	7.91e+01	117	236	2.29e-01
8	---	---	---	0	2	1.60e-01	0	2	4.08e-02

```

num_cg_total_psf= 38
num_cg_total_reg= 466
num_cg_total_none= 303
num_stokes_total_psf= 92
num_stokes_total_reg= 950
num_stokes_total_none= 624

```

In [144...]

```

for k in range(len(m_iter_PCH)):
    mk_pch = dl.Function(Vh2)
    mk_pch.vector()[:] = m_iter_PCH[k]
    dl.File(save_dir_str + "/m" + str(k) + "_psf.pvd") << mk_pch

for k in range(len(m_iter_REG)):

```

```

mk_reg = dl.Function(Vh2)
mk_reg.vector()[:] = m_iter_REG[k]
dl.File(save_dir_str + "/m" + str(k) + "_reg.pvd") << mk_reg

for k in range(len(m_iter_NONE)):
    mk_none = dl.Function(Vh2)
    mk_none.vector()[:] = m_iter_NONE[k]
    dl.File(save_dir_str + "/m" + str(k) + "_none.pvd") << mk_none

```

CG solve comparing PCH to REG to None preconditioning

In [46]:

```

all_PCK = list()
all_Hd_pch = list()
for nb in all_num_batches:
    print('building PCH' + str(nb) + ' preconditioner')
    PCKx = ProductConvolutionKernel(Vh2, Vh2,
                                      apply_misfit_gauss_newton_hessian_petsc,
                                      apply_misfit_gauss_newton_hessian_petsc,
                                      nb, nb,
                                      tau_rows=tau, tau_cols=tau,
                                      num_neighbors_rows=num_neighbors,
                                      num_neighbors_cols=num_neighbors)
    Hd_pch_nonsymx, extrasx = make_hmatrix_from_kernel(PCKx, hmatrix_tol=hmatrix_tol)
    # ----- build spd approximation of Hd
    Hd_pchx = Hd_pch_nonsymx.spd()
    all_PCK.append(PCKx)
    all_Hd_pch.append(Hd_pchx)

```

```

building PCH1 preconditioner
Computing impulse response moments
getting spatially varying volume
getting spatially varying mean
getting spatially varying covariance
Preparing sample point batch stuff
Preparing c++ object
Building initial sample point batches

Making row and column cluster treesUsing ProductConvolutionKernelRBFColsOnly!
Making block cluster trees
Building A kernel hmatrix

Making input and output mass matrix hmatrices— building H-matrix ( tol = 1e-06 )
)
[==-
Computing A_hmatrix = M_out_hmatrix * A_kernel_hmatrix * M_in_hmatrix
making hmatrix spd
                                symmetrizing
=====] 22% ETA 7 s (5.31 GB)
done in 8.81s
size of H-matrix = 4.42 MB
lambda_min= -18258.49758721875
scaling_at_lambda_min= 0.9878048780487805
scaling_at_zero= 0.5
Setting up operator T = (2*A - (b+a) I) / (b-a)
computing T^(2^k)

```

```

computing T^(2^1) = T^(2^0) * T^(2^0)

computing T^(2^2) = T^(2^1) * T^(2^1)
— H-matrix multiplication C=A*B
[=====] jector Pi_minu
s = I / (I + T^(2^k))
done in 24.63s
size of C = 5.38 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
[=====] — H-matrix inverse ( rtol =
1e-07 , atol = 1e-12 , overwrite= False )
[=====] 109% ETA 0 s (5.31 19.70352554321289
size of inverse = 19350177 bytes
computing absolute value projector Pi = I - 2*Pi_minus
done in 27.10s
size of C = 8.03 MB
[=====] computing A_plus = Pi * A

— H-matrix multiplication C=A*B
[=====] building PCH5 preconditioner===
] 77% ETA 6 s (5.34 GB)
done in 31.62s
size of C = 21.67 MB
Computing impulse response moments
getting spatially varying volume
getting spatially varying mean
getting spatially varying covariance
Preparing sample point batch stuff
Preparing c++ object
Building initial sample point batches

```

Making row and column cluster treesUsing ProductConvolutionKernelRBFColsOnly!

```

Making block cluster trees
Building A kernel hmatrix
Making input and output mass matrix hmatrices— building H-matrix ( tol =
Computing A_hmatrix = M_out_hmatrix * A_kernel_hmatrix * M_in_hmatrix
making hmatrix spd
symmetrizing
1e-06 )
[=====
done in 9.40s
size of H-matrix = 4.42 MB
lambda_min= -18113.97578005232
scaling_at_lambda_min= 0.9878048780487805
scaling_at_zero= 0.5
Setting up operator T = (2*A - (b+a) I) / (b-a)
computing T^(2^k)
computing T^(2^1) = T^(2^0) * T^(2^0)

computing T^(2^2) = T^(2^1) * T^(2^1)
computing negative spectral projector Pi_minus = I / (I + T^(2^k))— H-matrix mu
ltiplication C=A*B
[==]
[=====] — H-matrix inverse ( rtol = 1e-07 , atol =
= 1e-12 , overwrite= False )
[=====] 20.542642831802368% ETA 15 s (5.35 GB) done in
] 22% ETA 16 s (5.35 GB)
size of inverse = 19335033 bytes

```

```

computing absolute value projector Pi = I - 2*Pi_minus
done in 25.52s
size of C = 5.29 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
done in 27.59s
size of C = 7.70 MB
computing A_plus = Pi * A

building PCH25 preconditioner
— H-matrix multiplication C=A*B
done in 32.55s
size of C = 21.71 MB
Computing impulse response moments
getting spatially varying volume
getting spatially varying mean
getting spatially varying covariance
Preparing sample point batch stuff
Preparing c++ object
Building initial sample point batches

```

Making row and column cluster treesUsing ProductConvolutionKernelRBFColsOnly!

```

Making block cluster trees
Building A kernel hmatrix
— building H-matrix ( tol = 1e-06 )
[=====
Computing A_hmatrix = M_out_hmatrix *
A_kernel_hmatrix * M_in_hmatrix
making hmatrix spd
symmetrizing
getting smallest eigenvalue with Lanczos
done in 9.85s
size of H-matrix = 4.42 MB
lambda_min= -17967.321497959856
scaling_at_lambda_min= 0.9878048780487805
scaling_at_zero= 0.5
Setting up operator T = (2*A - (b+a) I) / (b-a)
computing T^(2^k)
computing T^(2^1) = T^(2^0) * T^(2^0)

computing T^(2^2) = T^(2^1) * T^(2^1)— H-matrix multiplication C=A*B
[===
done in 26.28s
s = I / (I + T^(2^k))                                jector Pi_minu
size of C = 5.11 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
[=====] 10
done in 28.06s
size of C = 7.44 MB
— H-matrix inverse ( rtol = 1e-07 , atol = 1e-12 , overwrite= False )
done in 21.39041256904602
size of inverse = 19109457 bytes

computing A_plus = Pi * A

— H-matrix multiplication C=A*B
done in 32.95s

```

size of C = 21.51 MB

In [47]:

```
REG.update_gamma(gamma_morozov)

# Rebuild reg hmatrix with same block cluster tree as PCH data misfit hmatrix
print('Building Regularization H-Matrix')
R_hmatrix = REG.make_R_hmatrix(all_Hd_pch[0].bct, rtol=1e-6)

all_H_pch = [Hd + R_hmatrix for Hd in all_Hd_pch]
all_preconditioners = [H.factorized_inverse() for H in all_H_pch]
```

```
/home/nick/anaconda3/envs/fenics4/lib/python3.9/site-packages/scipy/sparse/linalg/dsolve/linsolve.py:318: SparseEfficiencyWarning: splu requires CSC matrix form
at
    warn('splu requires CSC matrix format', SparseEfficiencyWarning)
Building Regularization H-Matrix
    matrix has dimension 1416 x 1416
        no of non-zeroes      = 9746
        matrix is            real valued
        format              = non symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
    |S|_F                = 1.17463e+06
    sparsity constant = 20
    size of H-matrix   = 4.06 MB
    |A|_F                = 1.17463e+06
|S-A|_2 = 5.03893e-09
    matrix has dimension — H-matrix inverse ( rtol = 1e-06 , atol = 1e-14 , ove
rwrite= False )
        done in 10.949486494064331
        size of inverse = 3361874 bytes
1416 x 1416
        no of non-zeroes      = 9746
        matrix is            real valued
        format              = symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
    |S|_F                = 5.18561e+06
    sparsity constant = 20
    size of H-matrix   = 2.29 MB
    |A|_F                = 5.18561e+06
|S-A|_2 = 4.66653e-09
=====
=====

===== ] 45% ETA 7 s (5.40 GB)
— H-matrix multiplication C=A*B
    done in 19.54s
    size of C = 3.88 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
    done in 26.86s
    size of C = 8.54 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
    done in 25.99s
TA 25 s (5.43 GB)
    size of LU factor = 23.57 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
[===== ] 7% E
```

In [48]:

```

def cg_wrapper(A_linop, b, M_linop, tol=1e-10, x_true=None):
    if x_true is None:
        x_true = np.nan * np.zeros(b.shape)
    all_relres = list()
    all_err = list()

    ii_list = [0]
    def callback(xk):
        relres = np.linalg.norm(b - A_linop.matvec(xk)) / np.linalg.norm(b)
        all_relres.append(relres)
        err = np.linalg.norm(xk - x_true) / np.linalg.norm(x_true)
        all_err.append(err)
        print('ii=', ii_list[0], ', relres=', relres, ', err=', err)
        ii_list[0] += 1

    x, info = spla.cg(A_linop, b, M=M_linop, tol=tol, callback=callback, maxiter=100)
    all_relres = np.array(all_relres)
    all_err = np.array(all_err)
    return x, info, all_relres, all_err

```

done in 26.47s
size of LU factor = 23.77 MB

— LU factorisation (rtol = 1e-07)
[=====] 64% ETA 9 s (5.47 G

In [49]:

```

H_linop = spla.LinearOperator((Vh2.dim(), Vh2.dim()), matvec=apply_hessian)
Hgn_linop = spla.LinearOperator((Vh2.dim(), Vh2.dim()), matvec=apply_gauss_newton)
ireg_linop = spla.LinearOperator((Vh2.dim(), Vh2.dim()), matvec=REG.solve_hessian)
all_p_linop = [spla.LinearOperator((Vh2.dim(), Vh2.dim()), matvec=p.matvec) for p in psf]

b = np.random.randn(Vh2.dim())

print('GN: get truth:')
x_true_gn, _, _, _ = cg_wrapper(Hgn_linop, b, all_p_linop[-1])

all_relres_gn = list()
all_errs_gn = list()
for nb, p_linop in zip(all_num_batches, all_p_linop):
    print('GN: psf'+str(nb))
    _, _, relres_gn, errs_gn = cg_wrapper(Hgn_linop, b, p_linop, x_true=x_true_gn)
    all_relres_gn.append(relres_gn)
    all_errs_gn.append(errs_gn)

print('GN: reg')
_, _, relres_gn_reg, errs_gn_reg = cg_wrapper(Hgn_linop, b, ireg_linop, x_true=x_true_gn)

print('GN: none')
_, _, relres_gn_none, errs_gn_none = cg_wrapper(Hgn_linop, b, None, x_true=x_true_gn)

plt.semilogy(errs_gn_none[:-1])
plt.semilogy(errs_gn_reg[:-1])
for errs_gn in all_errs_gn:
    plt.semilogy(errs_gn[:-1])
plt.title('Error vs. Krylov iteration: Gauss-Newton')
plt.xlabel('Iteration k')
plt.ylabel('relative error')
plt.legend(['None', 'REG'] + ['PSF'+str(nb) for nb in all_num_batches])

plt.figure()

```

```

plt.semilogy(relres_gn_none)
plt.semilogy(relres_gn_reg)
for relres_gn in all_relres_gn:
    plt.semilogy(relres_gn)
plt.title('Residual vs. Krylov iteration: Gauss-Newton')
plt.xlabel('Iteration k')
plt.ylabel('relative residual')
plt.legend(['None', 'REG'] + ['PSF'+str(nb) for nb in all_num_batches])

```

```

done in 26.06s
size of LU factor = 23.48 MB
GN: get truth:
ii= 0 , relres= 0.27601718308658496 , err= nan
ii= 1 , relres= 0.09813931551343728 , err= nan
ii= 2 , relres= 0.06541915358772958 , err= nan
ii= 3 , relres= 0.03277815146500743 , err= nan
ii= 4 , relres= 0.013858388676872571 , err= nan
ii= 5 , relres= 0.008356861333440008 , err= nan
ii= 6 , relres= 0.005509456953260937 , err= nan
ii= 7 , relres= 0.0029237274611475885 , err= nan
ii= 8 , relres= 0.0013427580506960727 , err= nan
ii= 9 , relres= 0.0005697863814164986 , err= nan
ii= 10 , relres= 0.00024750702116254855 , err= nan
ii= 11 , relres= 9.422633661451903e-05 , err= nan
ii= 12 , relres= 3.94891994467393e-05 , err= nan
ii= 13 , relres= 1.7686266467685407e-05 , err= nan
ii= 14 , relres= 8.08120525077261e-06 , err= nan
ii= 15 , relres= 3.0467651942569076e-06 , err= nan
ii= 16 , relres= 9.604742888292093e-07 , err= nan
ii= 17 , relres= 4.360445030059662e-07 , err= nan
ii= 18 , relres= 1.8525295592336308e-07 , err= nan
ii= 19 , relres= 8.955566263306183e-08 , err= nan
ii= 20 , relres= 4.2785056803872966e-08 , err= nan
ii= 21 , relres= 1.6861718533806796e-08 , err= nan
ii= 22 , relres= 6.3176309247221295e-09 , err= nan
ii= 23 , relres= 2.3815341175019107e-09 , err= nan
ii= 24 , relres= 9.125171913310231e-10 , err= nan
ii= 25 , relres= 3.266836379862665e-10 , err= nan
ii= 26 , relres= 1.3799009155180028e-10 , err= nan
ii= 27 , relres= 5.683462753166873e-11 , err= nan
GN: psf1
ii= 0 , relres= 0.40000779612912857 , err= 0.23049713260414476
ii= 1 , relres= 0.2114184203808486 , err= 0.0923636572385066
ii= 2 , relres= 0.12505339476806918 , err= 0.06287993249998798
ii= 3 , relres= 0.08033018187326725 , err= 0.038419943635133104
ii= 4 , relres= 0.05089385249473697 , err= 0.02440536083452644
ii= 5 , relres= 0.03380389174006925 , err= 0.015790404916206858
ii= 6 , relres= 0.02164397792533497 , err= 0.010619196291203472
ii= 7 , relres= 0.014214670375859368 , err= 0.006565050254566695
ii= 8 , relres= 0.00931378476418512 , err= 0.0038446238813083693
ii= 9 , relres= 0.005453044020880415 , err= 0.0022671306974740586
ii= 10 , relres= 0.003130924628272195 , err= 0.001201367643139828
ii= 11 , relres= 0.0018098988479521932 , err= 0.000712434044351666
ii= 12 , relres= 0.0011177065737042453 , err= 0.00039681250777291835
ii= 13 , relres= 0.0006505773592383506 , err= 0.000237156527134199
ii= 14 , relres= 0.000383299389770131 , err= 0.00013039930586322823
ii= 15 , relres= 0.0002441630180370083 , err= 7.70528451548086e-05
ii= 16 , relres= 0.00014835623487942658 , err= 4.5905146657015804e-05
ii= 17 , relres= 9.235620327420177e-05 , err= 2.92718047179187e-05
ii= 18 , relres= 5.383314185755283e-05 , err= 1.6607841342217058e-05
ii= 19 , relres= 3.1109403574575515e-05 , err= 9.986574733237219e-06

```

```

ii= 20 , relres= 1.753578090543845e-05 , err= 5.291730833807734e-06
ii= 21 , relres= 9.468097550638147e-06 , err= 3.345378476243044e-06
ii= 22 , relres= 5.4874418475081216e-06 , err= 1.7786918478034287e-06
ii= 23 , relres= 3.3310014454513614e-06 , err= 1.0840024304012753e-06
ii= 24 , relres= 1.8539072282080153e-06 , err= 6.407951960925037e-07
ii= 25 , relres= 1.1223909781282943e-06 , err= 3.5122069578135806e-07
ii= 26 , relres= 6.721014545343653e-07 , err= 2.2040038700347145e-07
ii= 27 , relres= 3.9973923284077896e-07 , err= 1.204836580134924e-07
ii= 28 , relres= 2.3713470051064984e-07 , err= 7.057518875902542e-08
ii= 29 , relres= 1.3742476164678605e-07 , err= 4.33061541224891e-08
ii= 30 , relres= 8.372461034625998e-08 , err= 2.6338020712809205e-08
ii= 31 , relres= 5.089224508218438e-08 , err= 1.6374494879676373e-08
ii= 32 , relres= 2.804008485741589e-08 , err= 9.310625896344144e-09
ii= 33 , relres= 1.649256632143783e-08 , err= 5.074415234432548e-09
ii= 34 , relres= 9.329554150183274e-09 , err= 3.0924150698651056e-09
ii= 35 , relres= 5.598383121193081e-09 , err= 1.7526219749098935e-09
ii= 36 , relres= 3.6636424297537155e-09 , err= 1.1231318343977668e-09
ii= 37 , relres= 2.2882958717343236e-09 , err= 7.299135838146877e-10
ii= 38 , relres= 1.2735758934768303e-09 , err= 4.4996747209001745e-10
ii= 39 , relres= 7.004795884987072e-10 , err= 2.432122055459827e-10
ii= 40 , relres= 4.1185189546840223e-10 , err= 1.3556447054987915e-10
ii= 41 , relres= 2.517108883690974e-10 , err= 8.327116291778411e-11
ii= 42 , relres= 1.409316212759882e-10 , err= 5.152553261853824e-11
ii= 43 , relres= 8.081674352894405e-11 , err= 3.107081689695288e-11
GN: psf5
ii= 0 , relres= 0.34295550456773566 , err= 0.21645833926175884
ii= 1 , relres= 0.1589389544926231 , err= 0.06241101281564578
ii= 2 , relres= 0.103856440739217 , err= 0.02956410328313435
ii= 3 , relres= 0.05984899278488014 , err= 0.02013092238889523
ii= 4 , relres= 0.032647200014238535 , err= 0.010036579573268884
ii= 5 , relres= 0.01806253135287527 , err= 0.005988727857701753
ii= 6 , relres= 0.009610422189925598 , err= 0.0033087124858171895
ii= 7 , relres= 0.005695147393041977 , err= 0.001705945899106338
ii= 8 , relres= 0.0031928518216093466 , err= 0.0009181987379122958
ii= 9 , relres= 0.0017461583229993645 , err= 0.0005447657123846243
ii= 10 , relres= 0.0010422181393410547 , err= 0.00030963276706876496
ii= 11 , relres= 0.0006484262871925408 , err= 0.00018675707399635048
ii= 12 , relres= 0.0003728178625517162 , err= 0.00011170480496100852
ii= 13 , relres= 0.00019454864911819987 , err= 6.486431889306608e-05
ii= 14 , relres= 0.00010218568951805451 , err= 3.522392807833572e-05
ii= 15 , relres= 5.4112662050149836e-05 , err= 1.7055855985794963e-05
ii= 16 , relres= 2.9235894921708845e-05 , err= 9.227539275220303e-06
ii= 17 , relres= 1.5758321201677764e-05 , err= 4.885747738430102e-06
ii= 18 , relres= 7.833811640048035e-06 , err= 2.7254190549789165e-06
ii= 19 , relres= 4.019575778202555e-06 , err= 1.3997156684357042e-06
ii= 20 , relres= 2.104917067898419e-06 , err= 6.797392976845537e-07
ii= 21 , relres= 1.1603982723863394e-06 , err= 3.331230527194836e-07
ii= 22 , relres= 6.093278062369633e-07 , err= 1.8750817526023686e-07
ii= 23 , relres= 2.770338371745564e-07 , err= 9.811894597939134e-08
ii= 24 , relres= 1.2806711717136586e-07 , err= 3.9011484081378703e-08
ii= 25 , relres= 6.050105689089952e-08 , err= 2.0856657761016704e-08
ii= 26 , relres= 3.2943853827696876e-08 , err= 1.02950694052896e-08
ii= 27 , relres= 1.6592786900107757e-08 , err= 5.6812488164352595e-09
ii= 28 , relres= 8.871736119996592e-09 , err= 2.87158436522795e-09
ii= 29 , relres= 4.335998350651422e-09 , err= 1.3431992449800715e-09
ii= 30 , relres= 2.6657601134336958e-09 , err= 7.017316580900273e-10
ii= 31 , relres= 1.7501182302871685e-09 , err= 4.248995707884866e-10
ii= 32 , relres= 8.596758873024662e-10 , err= 2.539627208694487e-10
ii= 33 , relres= 4.5468493852623444e-10 , err= 1.3346623941355012e-10
ii= 34 , relres= 2.516296830035471e-10 , err= 7.247096264208499e-11
ii= 35 , relres= 1.3389035388354708e-10 , err= 4.621664733041308e-11

```

```

ii= 36 , relres= 7.503361297806103e-11 , err= 3.057933663042712e-11
GN: psf25
ii= 0 , relres= 0.27601718308658496 , err= 0.21083658913555337
ii= 1 , relres= 0.09813931551343728 , err= 0.05747608878787546
ii= 2 , relres= 0.06541915358772958 , err= 0.031404239804743106
ii= 3 , relres= 0.03277815146500743 , err= 0.021996755152021156
ii= 4 , relres= 0.013858388676872571 , err= 0.0134925024872319
ii= 5 , relres= 0.008356861333440008 , err= 0.007139981632125748
ii= 6 , relres= 0.005509456953260937 , err= 0.002798867416631977
ii= 7 , relres= 0.0029237274611475885 , err= 0.0011741785570412984
ii= 8 , relres= 0.0013427580506960727 , err= 0.0005204966805522535
ii= 9 , relres= 0.0005697863814164986 , err= 0.00018688376816414977
ii= 10 , relres= 0.00024750702116254855 , err= 8.655358731256613e-05
ii= 11 , relres= 9.422633661451903e-05 , err= 3.945776144739041e-05
ii= 12 , relres= 3.94891994467393e-05 , err= 1.6247134719470546e-05
ii= 13 , relres= 1.7686266467685407e-05 , err= 5.621485920260696e-06
ii= 14 , relres= 8.08120525077261e-06 , err= 2.309208871154676e-06
ii= 15 , relres= 3.0467651942569076e-06 , err= 1.0638702556995851e-06
ii= 16 , relres= 9.604742888292093e-07 , err= 3.853090521664641e-07
ii= 17 , relres= 4.360445030059662e-07 , err= 1.4336445386802765e-07
ii= 18 , relres= 1.8525295592336308e-07 , err= 5.8356432248492125e-08
ii= 19 , relres= 8.955566263306183e-08 , err= 2.749471454167753e-08
ii= 20 , relres= 4.2785056803872966e-08 , err= 1.3551504025043353e-08
ii= 21 , relres= 1.6861718533806796e-08 , err= 6.164691933606336e-09
ii= 22 , relres= 6.3176309247221295e-09 , err= 2.387715114715222e-09
ii= 23 , relres= 2.3815341175019107e-09 , err= 9.88188903321504e-10
ii= 24 , relres= 9.125171913310231e-10 , err= 3.9502614568344317e-10
ii= 25 , relres= 3.266836379862665e-10 , err= 1.4095122099711297e-10
ii= 26 , relres= 1.3799009155180028e-10 , err= 5.703493318988062e-11
ii= 27 , relres= 5.683462753166873e-11 , err= 0.0
GN: reg
ii= 0 , relres= 1.0597820456483673 , err= 0.9979792995277864
ii= 1 , relres= 1.0927419351621757 , err= 0.9926389926378255
ii= 2 , relres= 1.092910761796001 , err= 0.9855575747229944
ii= 3 , relres= 1.123743029407103 , err= 0.9763144348173889
ii= 4 , relres= 1.1328075503517547 , err= 0.964541190083685
ii= 5 , relres= 1.1312915155978884 , err= 0.9526685979727622
ii= 6 , relres= 1.1689153587160503 , err= 0.9414181847901906
ii= 7 , relres= 1.1940720787370556 , err= 0.9257997077388109
ii= 8 , relres= 1.1123858666113988 , err= 0.9094820765296601
ii= 9 , relres= 1.1475348503906904 , err= 0.8879739664204985
ii= 10 , relres= 1.161361171642766 , err= 0.865443563920737
ii= 11 , relres= 1.2054208105405737 , err= 0.8509380864585205
ii= 12 , relres= 1.1523193851965359 , err= 0.825671877604483
ii= 13 , relres= 1.1991518248802513 , err= 0.7918674673522781
ii= 14 , relres= 1.1608658460627137 , err= 0.7647867872707071
ii= 15 , relres= 1.122185700445077 , err= 0.740197093808245
ii= 16 , relres= 1.1961660735807502 , err= 0.7115493529482861
ii= 17 , relres= 1.1641790079420615 , err= 0.6818522121446204
ii= 18 , relres= 1.1458114220844713 , err= 0.6533573583282956
ii= 19 , relres= 1.1116687160063632 , err= 0.6286926045100473
ii= 20 , relres= 1.1168017316033392 , err= 0.5931544656427515
ii= 21 , relres= 1.0497092776342953 , err= 0.5669494913885454
ii= 22 , relres= 1.024914610975441 , err= 0.546072580501591
ii= 23 , relres= 0.9802549910275458 , err= 0.5202620996712413
ii= 24 , relres= 1.0052083796813631 , err= 0.5093326023518749
ii= 25 , relres= 0.9455485923847552 , err= 0.49281459736966543
ii= 26 , relres= 0.9325722519524228 , err= 0.4732785184669985
ii= 27 , relres= 0.9152600656988358 , err= 0.45105942329435833
ii= 28 , relres= 0.8932996770191876 , err= 0.43332666197655695
ii= 29 , relres= 0.8929791063428842 , err= 0.4247396872330199

```

```

ii= 30 , relres= 0.8191273806438609 , err= 0.4094663552310699
ii= 31 , relres= 0.8086403858650831 , err= 0.3968001398540455
ii= 32 , relres= 0.7840452309317834 , err= 0.3892797940473411
ii= 33 , relres= 0.7982501966728441 , err= 0.3718914094030514
ii= 34 , relres= 0.7999190870776248 , err= 0.3634962820540948
ii= 35 , relres= 0.7792866351014842 , err= 0.3525463481287889
ii= 36 , relres= 0.7111313551804597 , err= 0.33739762756680997
ii= 37 , relres= 0.6819467960522538 , err= 0.32707666988342876
ii= 38 , relres= 0.6559716826727591 , err= 0.31712860885811206
ii= 39 , relres= 0.6440005007603432 , err= 0.30425023159645503
ii= 40 , relres= 0.6245971294694849 , err= 0.2919441006765247
ii= 41 , relres= 0.63240217499075 , err= 0.2817778151948917
ii= 42 , relres= 0.634237074102476 , err= 0.2742773436769018
ii= 43 , relres= 0.5912280742643996 , err= 0.2646133642173712
ii= 44 , relres= 0.6241213717639545 , err= 0.25825816416970443
ii= 45 , relres= 0.5318272157887927 , err= 0.2494027238436164
ii= 46 , relres= 0.5386975836890587 , err= 0.23928073320165705
ii= 47 , relres= 0.5105598900361537 , err= 0.22575464376520837
ii= 48 , relres= 0.519617350742145 , err= 0.21528194570586573
ii= 49 , relres= 0.5380327108392824 , err= 0.20834510486549457
ii= 50 , relres= 0.49620121383653 , err= 0.2016445892257809
ii= 51 , relres= 0.4654248076365365 , err= 0.19797839750834553
ii= 52 , relres= 0.4331345458865962 , err= 0.18793968735873548
ii= 53 , relres= 0.4371205756555313 , err= 0.18222204611350304
ii= 54 , relres= 0.39923993440390493 , err= 0.17832008477661607
ii= 55 , relres= 0.40876860862398834 , err= 0.1724248090759217
ii= 56 , relres= 0.3838213171627805 , err= 0.16946569787262056
ii= 57 , relres= 0.3822068328406887 , err= 0.16349784998736067
ii= 58 , relres= 0.37059073489970157 , err= 0.15915465766964537
ii= 59 , relres= 0.33742119060223524 , err= 0.15150791545138215
ii= 60 , relres= 0.3285312637679261 , err= 0.1434614883095621
ii= 61 , relres= 0.3333074208656747 , err= 0.1384215884720854
ii= 62 , relres= 0.31571524732618095 , err= 0.13429533335308744
ii= 63 , relres= 0.31451994354419227 , err= 0.1323177431143903
ii= 64 , relres= 0.2977204587773566 , err= 0.12571317503133653
ii= 65 , relres= 0.28519404508727386 , err= 0.11948182934078767
ii= 66 , relres= 0.27579109706829813 , err= 0.11655177073153451
ii= 67 , relres= 0.25838973680733873 , err= 0.11138352319592361
ii= 68 , relres= 0.2496158672146918 , err= 0.10611725785222832
ii= 69 , relres= 0.2470632900112457 , err= 0.10407257219605749
ii= 70 , relres= 0.22663822442945886 , err= 0.0992598567107338
ii= 71 , relres= 0.22636982607033407 , err= 0.09628231146890512
ii= 72 , relres= 0.21272759233835636 , err= 0.09327846848065338
ii= 73 , relres= 0.2158013733636309 , err= 0.09188132609881393
ii= 74 , relres= 0.20538277883355582 , err= 0.08800264556246404
ii= 75 , relres= 0.20892072973453185 , err= 0.08545293100198388
ii= 76 , relres= 0.1958976555971994 , err= 0.08333112363966359
ii= 77 , relres= 0.19236071875613903 , err= 0.08147627377702561
ii= 78 , relres= 0.20090026941117972 , err= 0.07933611963687483
ii= 79 , relres= 0.18045544513825523 , err= 0.07628768921108424
ii= 80 , relres= 0.16951154276790703 , err= 0.07119802559437456
ii= 81 , relres= 0.17484980319298518 , err= 0.06866087111352087
ii= 82 , relres= 0.17141370146512586 , err= 0.06577857214855592
ii= 83 , relres= 0.16566036853949317 , err= 0.06468553590035106
ii= 84 , relres= 0.15978088769148438 , err= 0.06205623504001585
ii= 85 , relres= 0.15809020947572028 , err= 0.06031027548067206
ii= 86 , relres= 0.15093178061667764 , err= 0.05802093788743866
ii= 87 , relres= 0.13820503966194478 , err= 0.055900590322735706
ii= 88 , relres= 0.13560663820543897 , err= 0.05311251570999454
ii= 89 , relres= 0.13504850397500345 , err= 0.049890864627782756
ii= 90 , relres= 0.12761688523357412 , err= 0.04818286694934315

```

```

ii= 91 , relres= 0.12293677078809617 , err= 0.0456564881801633
ii= 92 , relres= 0.12240120224371455 , err= 0.04421566232449678
ii= 93 , relres= 0.10770171334031901 , err= 0.041589936749577436
ii= 94 , relres= 0.11304763217094095 , err= 0.04082270838937661
ii= 95 , relres= 0.10543442097639914 , err= 0.03872392463677639
ii= 96 , relres= 0.10474179874981707 , err= 0.03799914392756586
ii= 97 , relres= 0.1040670268675045 , err= 0.0364642869071833
ii= 98 , relres= 0.09922422697274964 , err= 0.03558754165864356
ii= 99 , relres= 0.09760833307782725 , err= 0.034604043478030914
ii= 100 , relres= 0.09899994626774263 , err= 0.03364301433658141
ii= 101 , relres= 0.08546596327560323 , err= 0.03227178595201621
ii= 102 , relres= 0.08747242315714601 , err= 0.03160045243243194
ii= 103 , relres= 0.07996087981231835 , err= 0.029989253734730454
ii= 104 , relres= 0.0830075568113071 , err= 0.029355060461521046
ii= 105 , relres= 0.07808075553008001 , err= 0.028643380649551128
ii= 106 , relres= 0.07078491521311868 , err= 0.027645720718189642
ii= 107 , relres= 0.06761711649063816 , err= 0.02613633737970335
ii= 108 , relres= 0.06966934640477922 , err= 0.024980249948899674
ii= 109 , relres= 0.06439872565007365 , err= 0.023924699673292346
ii= 110 , relres= 0.06366750073145547 , err= 0.023279457383027096
ii= 111 , relres= 0.0560108123072338 , err= 0.022208544583096027
ii= 112 , relres= 0.05902057641133107 , err= 0.02162825124518602
ii= 113 , relres= 0.05523990051859582 , err= 0.020704937319270936
ii= 114 , relres= 0.052814168597349595 , err= 0.020163820294627415
ii= 115 , relres= 0.05644781429620291 , err= 0.019565962548213515
ii= 116 , relres= 0.05069521526110576 , err= 0.01867757038163952
ii= 117 , relres= 0.047809533126464014 , err= 0.018493310778024918
ii= 118 , relres= 0.04601301429102918 , err= 0.017452252384114332
ii= 119 , relres= 0.04638944753822308 , err= 0.017272277535928814
ii= 120 , relres= 0.043498104578078726 , err= 0.01641588093154916
ii= 121 , relres= 0.04249113269183356 , err= 0.016253980755307786
ii= 122 , relres= 0.04078210695022554 , err= 0.015117135155343006
ii= 123 , relres= 0.04104436897868264 , err= 0.014946145697720011
ii= 124 , relres= 0.040323387702956376 , err= 0.014436104616260121
ii= 125 , relres= 0.03758159860993337 , err= 0.014017077418924101
ii= 126 , relres= 0.038501295800612144 , err= 0.013559003371883442
ii= 127 , relres= 0.03882844911853987 , err= 0.013096581970267158
ii= 128 , relres= 0.033712897104939674 , err= 0.012560358346199764
ii= 129 , relres= 0.03351481755537215 , err= 0.01178095499522938
ii= 130 , relres= 0.031719338834503445 , err= 0.011438147888693635
ii= 131 , relres= 0.032231701377756966 , err= 0.011080294676537702
ii= 132 , relres= 0.029059102790253165 , err= 0.01046549142517503
ii= 133 , relres= 0.028361308911792938 , err= 0.009721686537845197
ii= 134 , relres= 0.028245727911283353 , err= 0.009444949218473189
ii= 135 , relres= 0.028042330060502448 , err= 0.008954678819091946
ii= 136 , relres= 0.026652914361273112 , err= 0.008763113926747133
ii= 137 , relres= 0.024562614785343148 , err= 0.008539200580400056
ii= 138 , relres= 0.02646756325101997 , err= 0.008220447887703295
ii= 139 , relres= 0.026741595443567922 , err= 0.007948026827925947
ii= 140 , relres= 0.023243196694675065 , err= 0.007695218204764059
ii= 141 , relres= 0.024514940797342143 , err= 0.007482181286643637
ii= 142 , relres= 0.022360965042411675 , err= 0.007169300191499988
ii= 143 , relres= 0.021455713798320702 , err= 0.007051953520280965
ii= 144 , relres= 0.022438677619931565 , err= 0.006874568083499835
ii= 145 , relres= 0.020446990377062185 , err= 0.006617445633168256
ii= 146 , relres= 0.01860577945328272 , err= 0.0063902859792523145
ii= 147 , relres= 0.018574843080253468 , err= 0.006268835970239315
ii= 148 , relres= 0.016044589479303827 , err= 0.0059685970601583305
ii= 149 , relres= 0.015779316140716388 , err= 0.005688126295167925
ii= 150 , relres= 0.01540608280622815 , err= 0.005522114781343581
ii= 151 , relres= 0.015225892272812977 , err= 0.005393216318686625

```

```
ii= 152 , relres= 0.016131310367411562 , err= 0.005200146470543188
ii= 153 , relres= 0.014393875568953952 , err= 0.005045770143108564
ii= 154 , relres= 0.013486117071419583 , err= 0.004746476323834132
ii= 155 , relres= 0.012828759574689461 , err= 0.004675181644117407
ii= 156 , relres= 0.012903733921426736 , err= 0.0044796051123693805
ii= 157 , relres= 0.012427210041668486 , err= 0.004305268966014123
ii= 158 , relres= 0.011756259420589832 , err= 0.00425323244525085
ii= 159 , relres= 0.011755441488552253 , err= 0.004171226527608022
ii= 160 , relres= 0.011093992579642444 , err= 0.003985902314644981
ii= 161 , relres= 0.010344730732827885 , err= 0.003944484692045178
ii= 162 , relres= 0.010579224723172926 , err= 0.0038393179930152847
ii= 163 , relres= 0.010668885750620354 , err= 0.0036748296893706132
ii= 164 , relres= 0.0101890122519639 , err= 0.003617249433214562
ii= 165 , relres= 0.009844389330410623 , err= 0.0035086045680622073
ii= 166 , relres= 0.010339359152784276 , err= 0.003419773148080622
ii= 167 , relres= 0.009133760191314044 , err= 0.003254143298454883
ii= 168 , relres= 0.009463876733537184 , err= 0.00308215405147401
ii= 169 , relres= 0.008392802605114517 , err= 0.0029736725354213697
ii= 170 , relres= 0.00824023124601887 , err= 0.00282216831356602
ii= 171 , relres= 0.007798293700846703 , err= 0.0027056955405419403
ii= 172 , relres= 0.0078112138947811285 , err= 0.002625113813589093
ii= 173 , relres= 0.007987871428462698 , err= 0.0025322064027412197
ii= 174 , relres= 0.00698179695904187 , err= 0.0024379260734741955
ii= 175 , relres= 0.006875261923299737 , err= 0.002315095530749464
ii= 176 , relres= 0.006817360132524403 , err= 0.002260886206774339
ii= 177 , relres= 0.006483959288539618 , err= 0.0022195436833242275
ii= 178 , relres= 0.006386444317154352 , err= 0.0021649971980130522
ii= 179 , relres= 0.0065323444735839505 , err= 0.00209931554902121
ii= 180 , relres= 0.005941822551746266 , err= 0.0020303567778915755
ii= 181 , relres= 0.005802459840592124 , err= 0.0019888286265086095
ii= 182 , relres= 0.00573899203399375 , err= 0.0019581532238788775
ii= 183 , relres= 0.005328864081145765 , err= 0.00184836502450481
ii= 184 , relres= 0.00590445743585044 , err= 0.001804423250140069
ii= 185 , relres= 0.00527794857348552 , err= 0.0017450811975446038
ii= 186 , relres= 0.004830218145455023 , err= 0.0016462973575127754
ii= 187 , relres= 0.00481808707894097 , err= 0.0016184870021233846
ii= 188 , relres= 0.005009612127267147 , err= 0.0015699684149857957
ii= 189 , relres= 0.004292218072852597 , err= 0.0015048060315852713
ii= 190 , relres= 0.004325734145302655 , err= 0.0014840702308475018
ii= 191 , relres= 0.004226764164551378 , err= 0.0014030403917719232
ii= 192 , relres= 0.003826241979544946 , err= 0.0013402482606549723
ii= 193 , relres= 0.003819959209529992 , err= 0.0013011432289411584
ii= 194 , relres= 0.003736600668833273 , err= 0.001242027327553649
ii= 195 , relres= 0.003682374754633209 , err= 0.001211333396211288
ii= 196 , relres= 0.003724726859568719 , err= 0.0011926281968787761
ii= 197 , relres= 0.0035611312147619755 , err= 0.00114678204712708
ii= 198 , relres= 0.0034523567723351366 , err= 0.0011133757195493955
ii= 199 , relres= 0.0032327553810347406 , err= 0.0010766693019058121
ii= 200 , relres= 0.003252516545919708 , err= 0.0010475231091237292
ii= 201 , relres= 0.0029918475542859415 , err= 0.0010013622467037724
ii= 202 , relres= 0.0029588623480130967 , err= 0.0009928960274514756
ii= 203 , relres= 0.0028799723703555576 , err= 0.000931245617813549
ii= 204 , relres= 0.0027837516489385376 , err= 0.0009117856077813568
ii= 205 , relres= 0.0027568087928243 , err= 0.0008913091414828059
ii= 206 , relres= 0.0025343753985296535 , err= 0.0008684750857677624
ii= 207 , relres= 0.0024057349954779298 , err= 0.0008242815197448776
ii= 208 , relres= 0.002332782880972995 , err= 0.000814210252054048
ii= 209 , relres= 0.0022839645591261237 , err= 0.0007667386737859613
ii= 210 , relres= 0.002195280314409414 , err= 0.0007550158833846742
ii= 211 , relres= 0.002124126722213841 , err= 0.0007380585355874909
ii= 212 , relres= 0.0020812373427438803 , err= 0.0007260302115708857
```

```

ii= 213 , relres= 0.0020655586184216354 , err= 0.0006740468532408677
ii= 214 , relres= 0.0019368148358139424 , err= 0.000652911691011793
ii= 215 , relres= 0.0018890033606394868 , err= 0.0006340963856040941
ii= 216 , relres= 0.0019389733586633237 , err= 0.0006215200053162768
ii= 217 , relres= 0.0018348169624174484 , err= 0.0006020362785495119
ii= 218 , relres= 0.0016506560968133827 , err= 0.0005735113293254778
ii= 219 , relres= 0.0015004965906788273 , err= 0.0005293823782386906
ii= 220 , relres= 0.0015240682141204017 , err= 0.0004951188590159975
ii= 221 , relres= 0.0015128199175965331 , err= 0.00047561348355607246
ii= 222 , relres= 0.001401297546130468 , err= 0.0004678545680541375
ii= 223 , relres= 0.0013624525819301743 , err= 0.0004446511015706985
ii= 224 , relres= 0.001482222116312367 , err= 0.0004302964776027417
ii= 225 , relres= 0.0012916869568951094 , err= 0.0004160248103321958
ii= 226 , relres= 0.0013197106861565836 , err= 0.0004058672940763552
ii= 227 , relres= 0.0012851297070895949 , err= 0.00037629812779390914
ii= 228 , relres= 0.0010967006021435706 , err= 0.0003627359564767718
ii= 229 , relres= 0.0010762598077738747 , err= 0.00035627370538177604
ii= 230 , relres= 0.0011297746031202604 , err= 0.0003442144258574316
ii= 231 , relres= 0.0010456290369860119 , err= 0.0003336409966807094
ii= 232 , relres= 0.0009570173423463904 , err= 0.0003236290567711742
ii= 233 , relres= 0.0010205500018535254 , err= 0.00031433921690378314
ii= 234 , relres= 0.0009578279187516086 , err= 0.00030610160859746797
ii= 235 , relres= 0.000992594555548904 , err= 0.0002988460205624351
ii= 236 , relres= 0.0008566333974069226 , err= 0.0002874408333206823
ii= 237 , relres= 0.0008959437977180241 , err= 0.00027805613110745627
ii= 238 , relres= 0.0007970151168510491 , err= 0.0002636487231886162
ii= 239 , relres= 0.0007814293129126209 , err= 0.0002601890951590531
ii= 240 , relres= 0.0008148498570523861 , err= 0.000244993114147774
ii= 241 , relres= 0.0007374101219214811 , err= 0.0002371991971009571
ii= 242 , relres= 0.0007208236693684593 , err= 0.00023061305944921336
ii= 243 , relres= 0.0006933386112326419 , err= 0.0002234363751590843
ii= 244 , relres= 0.0007380880286402977 , err= 0.00021795757268615201
ii= 245 , relres= 0.0006756481019509488 , err= 0.00020948990681592228
ii= 246 , relres= 0.0006093413017912769 , err= 0.0002041762883880892
ii= 247 , relres= 0.0006421789529669244 , err= 0.00019832140645682054
ii= 248 , relres= 0.0006393285154333586 , err= 0.00019409799237860313
ii= 249 , relres= 0.0005480495659870829 , err= 0.00018476072099327137
ii= 250 , relres= 0.0005454343982931454 , err= 0.00018157674209361984
ii= 251 , relres= 0.0005086742942887944 , err= 0.00016868066665643098
ii= 252 , relres= 0.0005129662148342407 , err= 0.0001643812858848555
ii= 253 , relres= 0.0005145226953151725 , err= 0.00016146071775340339
ii= 254 , relres= 0.00048627128444326417 , err= 0.00015527826874371322
ii= 255 , relres= 0.0004615077953389036 , err= 0.00014840611441323641
ii= 256 , relres= 0.000435580404592296 , err= 0.00014599555894146256
ii= 257 , relres= 0.00043413224700178995 , err= 0.00014349661926133165
ii= 258 , relres= 0.0004508669897524048 , err= 0.00013447590649394767
ii= 259 , relres= 0.00039425696975633757 , err= 0.00012941067399773563
ii= 260 , relres= 0.0003901877803965387 , err= 0.00012051173005504705
ii= 261 , relres= 0.0003652568310430454 , err= 0.00011543145098196024
ii= 262 , relres= 0.0003673423125533405 , err= 0.00011298659721107178
ii= 263 , relres= 0.0003407279924038716 , err= 0.00010765253245820328
ii= 264 , relres= 0.000313600960012768 , err= 0.00010247788085976627
ii= 265 , relres= 0.0003010230937540027 , err= 0.00010161299202671009
ii= 266 , relres= 0.0003074136147958228 , err= 9.401417432720102e-05
ii= 267 , relres= 0.00030518246833549374 , err= 9.178243930119276e-05
ii= 268 , relres= 0.00028686150576017936 , err= 8.992614288990472e-05
ii= 269 , relres= 0.00030149592617438955 , err= 8.756300128655386e-05
ii= 270 , relres= 0.000273411960985644 , err= 8.373552017800632e-05
ii= 271 , relres= 0.0002621793237285266 , err= 8.171739506792384e-05
ii= 272 , relres= 0.0002513537352379161 , err= 8.044899809709683e-05
ii= 273 , relres= 0.0002448297118492398 , err= 7.892834588289925e-05

```

```

ii= 274 , relres= 0.0002547337846750058 , err= 7.634315600534194e-05
ii= 275 , relres= 0.00022906742507615083 , err= 7.266250757536347e-05
ii= 276 , relres= 0.00020844412299429865 , err= 7.100329140648214e-05
ii= 277 , relres= 0.0002106614379805118 , err= 6.561061765817704e-05
ii= 278 , relres= 0.0002140352281319233 , err= 6.393114874166401e-05
ii= 279 , relres= 0.0001922399918599667 , err= 6.196981907718875e-05
ii= 280 , relres= 0.0001794196437851794 , err= 5.985612982305221e-05
ii= 281 , relres= 0.00018487792356647038 , err= 5.7187292544504246e-05
ii= 282 , relres= 0.00015714960394804808 , err= 5.535844543635349e-05
ii= 283 , relres= 0.00017059121453445007 , err= 5.3703739870928233e-05
ii= 284 , relres= 0.00015005780442953602 , err= 5.061921609698601e-05
ii= 285 , relres= 0.00014857424345151375 , err= 5.020742563971765e-05
ii= 286 , relres= 0.0001511482918053632 , err= 4.714483144361538e-05
ii= 287 , relres= 0.00014648815783708751 , err= 4.4793860244285226e-05
ii= 288 , relres= 0.0001337443920792442 , err= 4.413953709681882e-05
ii= 289 , relres= 0.00013915804079637817 , err= 4.2438181226300936e-05
ii= 290 , relres= 0.00012737524467707826 , err= 4.1306341053202295e-05
ii= 291 , relres= 0.00013693462597692732 , err= 3.9765821472884436e-05
ii= 292 , relres= 0.00012558363594173308 , err= 3.851787909324537e-05
ii= 293 , relres= 0.00011504514628271098 , err= 3.768952945528596e-05
ii= 294 , relres= 0.00011580935176617308 , err= 3.6717613764398206e-05
ii= 295 , relres= 0.00010445508992025524 , err= 3.441237282281163e-05
ii= 296 , relres= 0.0001023888223022219 , err= 3.369108849213686e-05
ii= 297 , relres= 9.899163296289075e-05 , err= 3.21049062796392e-05
ii= 298 , relres= 0.0001038632213195771 , err= 3.103969634997724e-05
ii= 299 , relres= 9.4094395258454e-05 , err= 2.981817309107606e-05
ii= 300 , relres= 9.275400987184508e-05 , err= 2.9327242565609243e-05
ii= 301 , relres= 9.606560034886843e-05 , err= 2.7995567179208692e-05
ii= 302 , relres= 8.455187292545344e-05 , err= 2.7217771657436094e-05
ii= 303 , relres= 7.716015513405973e-05 , err= 2.6530606499396185e-05
ii= 304 , relres= 7.651508973526414e-05 , err= 2.608730664710428e-05
ii= 305 , relres= 9.07693785513564e-05 , err= 2.4912109357709836e-05
ii= 306 , relres= 7.18325980840719e-05 , err= 2.3885068993246963e-05
ii= 307 , relres= 7.172951562161605e-05 , err= 2.3259134732089057e-05
ii= 308 , relres= 6.962153503632686e-05 , err= 2.297171023003796e-05
ii= 309 , relres= 7.027600561791099e-05 , err= 2.217017400217161e-05
ii= 310 , relres= 6.519218981087514e-05 , err= 2.11660569225207e-05
ii= 311 , relres= 6.358348460734349e-05 , err= 2.0521353242079625e-05
ii= 312 , relres= 5.977555029828576e-05 , err= 2.0000152836424067e-05
ii= 313 , relres= 6.113728605018375e-05 , err= 1.97791586555710008e-05
ii= 314 , relres= 6.158238364328562e-05 , err= 1.8988863686029317e-05
ii= 315 , relres= 5.7906549903072714e-05 , err= 1.8360831672599746e-05
ii= 316 , relres= 5.361050046408393e-05 , err= 1.7964332080790552e-05
ii= 317 , relres= 5.452031078266666e-05 , err= 1.7177149794467542e-05
ii= 318 , relres= 5.255074761928228e-05 , err= 1.6450167542042834e-05
ii= 319 , relres= 5.055747550793824e-05 , err= 1.5900231485186817e-05
ii= 320 , relres= 4.422308010376255e-05 , err= 1.5467441377778144e-05
ii= 321 , relres= 4.422379496299844e-05 , err= 1.486983036299103e-05
ii= 322 , relres= 4.4374330516369596e-05 , err= 1.4083014592212623e-05
ii= 323 , relres= 3.9437044614054864e-05 , err= 1.388210893447328e-05
ii= 324 , relres= 4.053965285352624e-05 , err= 1.344549315328697e-05
ii= 325 , relres= 4.0268822399214004e-05 , err= 1.3168697644728062e-05
ii= 326 , relres= 3.748995553589875e-05 , err= 1.2557312696414999e-05
ii= 327 , relres= 3.680309307811541e-05 , err= 1.226924000981593e-05
ii= 328 , relres= 3.5527747152321085e-05 , err= 1.1910386644984932e-05
ii= 329 , relres= 3.635880852397635e-05 , err= 1.1716723807036316e-05
ii= 330 , relres= 3.4848340598416206e-05 , err= 1.1336392403204197e-05
ii= 331 , relres= 3.276949500901902e-05 , err= 1.0950724363573164e-05
ii= 332 , relres= 3.110504419997316e-05 , err= 1.0528830148203226e-05
ii= 333 , relres= 3.018595942777784e-05 , err= 1.0332007588536032e-05
ii= 334 , relres= 3.0353369850492635e-05 , err= 1.0080268335734231e-05

```

```

ii= 335 , relres= 2.8546700989987547e-05 , err= 9.651663740793616e-06
ii= 336 , relres= 2.6736729329015288e-05 , err= 9.564219861186493e-06
ii= 337 , relres= 2.8939162668868303e-05 , err= 9.15649093418521e-06
ii= 338 , relres= 2.815154208409551e-05 , err= 8.835559380858429e-06
ii= 339 , relres= 2.4399362301234245e-05 , err= 8.30369912384217e-06
ii= 340 , relres= 2.440715403536292e-05 , err= 8.034486853639356e-06
ii= 341 , relres= 2.2844675392242665e-05 , err= 7.822199627223152e-06
ii= 342 , relres= 2.4501076546013534e-05 , err= 7.700066407039704e-06
ii= 343 , relres= 2.078005244046198e-05 , err= 7.27452889640002e-06
ii= 344 , relres= 2.043166651939274e-05 , err= 7.059488058735086e-06
ii= 345 , relres= 1.9212837568303825e-05 , err= 6.5762057077439925e-06
ii= 346 , relres= 1.804367288833285e-05 , err= 6.408593328090599e-06
ii= 347 , relres= 1.794965499419685e-05 , err= 6.33476243103219e-06
ii= 348 , relres= 1.9443318580213425e-05 , err= 6.087486758447304e-06
ii= 349 , relres= 1.6796552138619442e-05 , err= 5.917754030098666e-06
ii= 350 , relres= 1.7980885929084397e-05 , err= 5.77623202087109e-06
ii= 351 , relres= 1.607835956724795e-05 , err= 5.526246837426597e-06
ii= 352 , relres= 1.5731699102154668e-05 , err= 5.39465506519909e-06
ii= 353 , relres= 1.704232987461149e-05 , err= 5.086385401427523e-06
ii= 354 , relres= 1.4791384424015115e-05 , err= 4.850260186221313e-06
ii= 355 , relres= 1.5118047164818849e-05 , err= 4.750851819095773e-06
ii= 356 , relres= 1.5760702152432122e-05 , err= 4.604330130872835e-06
ii= 357 , relres= 1.3673715528570379e-05 , err= 4.406569471845387e-06
ii= 358 , relres= 1.4002700843724349e-05 , err= 4.270227458744472e-06
ii= 359 , relres= 1.2300737243986416e-05 , err= 4.080612876969717e-06
ii= 360 , relres= 1.2883767557120898e-05 , err= 4.032169270088251e-06
ii= 361 , relres= 1.1413857667523516e-05 , err= 3.7083396506960093e-06
ii= 362 , relres= 1.1549579597655263e-05 , err= 3.613116584971242e-06
ii= 363 , relres= 1.1168981086007192e-05 , err= 3.5240661601868554e-06
ii= 364 , relres= 1.0995897430568414e-05 , err= 3.3476321230890343e-06
ii= 365 , relres= 1.0333534852372204e-05 , err= 3.170271270220133e-06
ii= 366 , relres= 9.547858141343389e-06 , err= 3.0813019130323453e-06
ii= 367 , relres= 9.201947957468501e-06 , err= 2.9132839381193e-06
ii= 368 , relres= 9.299010944786385e-06 , err= 2.8661733286845123e-06
ii= 369 , relres= 9.343857306986125e-06 , err= 2.781551327590541e-06
ii= 370 , relres= 8.120008563595529e-06 , err= 2.6854274023851643e-06
ii= 371 , relres= 9.014311345359535e-06 , err= 2.566429624202434e-06
ii= 372 , relres= 7.970701913320922e-06 , err= 2.4750454262532034e-06
ii= 373 , relres= 7.771326964511353e-06 , err= 2.4214235045394113e-06
ii= 374 , relres= 7.119790870715199e-06 , err= 2.3335179598622497e-06
ii= 375 , relres= 7.0609872499996645e-06 , err= 2.287188051124791e-06
ii= 376 , relres= 7.670939416987511e-06 , err= 2.246249027655314e-06
ii= 377 , relres= 7.1714741812139005e-06 , err= 2.145551286781285e-06
ii= 378 , relres= 6.523640733492308e-06 , err= 2.086645449996618e-06
ii= 379 , relres= 6.0765926857024605e-06 , err= 2.0517133771603864e-06
ii= 380 , relres= 5.989348331739207e-06 , err= 2.031535127379952e-06
ii= 381 , relres= 6.267466054372906e-06 , err= 1.969039612491793e-06
ii= 382 , relres= 5.716340258120536e-06 , err= 1.8926251641725179e-06
ii= 383 , relres= 5.334578944819909e-06 , err= 1.8019417348675634e-06
ii= 384 , relres= 5.245253285827273e-06 , err= 1.722833379081663e-06
ii= 385 , relres= 5.209153051170091e-06 , err= 1.6663379126888319e-06
ii= 386 , relres= 5.058171916015658e-06 , err= 1.5945711894006668e-06
ii= 387 , relres= 4.538342494598351e-06 , err= 1.543946310607988e-06
ii= 388 , relres= 4.730184466533568e-06 , err= 1.4887321443261254e-06
ii= 389 , relres= 4.932313855255424e-06 , err= 1.4310549052666724e-06
ii= 390 , relres= 4.3943839003810296e-06 , err= 1.3899869488025448e-06
ii= 391 , relres= 4.024272729945827e-06 , err= 1.3541089140976888e-06
ii= 392 , relres= 4.043867600730072e-06 , err= 1.3149139650862117e-06
ii= 393 , relres= 3.922547656435959e-06 , err= 1.2697193770554082e-06
ii= 394 , relres= 3.8098458804502437e-06 , err= 1.2523266271171868e-06
ii= 395 , relres= 3.8879974186594825e-06 , err= 1.20897886868226e-06

```

```

ii= 396 , relres= 3.3278115556746133e-06 , err= 1.1795575386637992e-06
ii= 397 , relres= 3.488271979926312e-06 , err= 1.138656813342553e-06
ii= 398 , relres= 3.4926586212875336e-06 , err= 1.1164840744298202e-06
ii= 399 , relres= 3.290904240876281e-06 , err= 1.043764163859488e-06
ii= 400 , relres= 2.9739433186890183e-06 , err= 1.0236275134059177e-06
ii= 401 , relres= 2.8905231205778066e-06 , err= 1.0139983211087043e-06
ii= 402 , relres= 3.075688973224537e-06 , err= 9.820712163003054e-07
ii= 403 , relres= 2.856059947481383e-06 , err= 9.129024119373544e-07
ii= 404 , relres= 2.6414426863477514e-06 , err= 8.748394435555491e-07
ii= 405 , relres= 2.49230191472309e-06 , err= 8.322487271557061e-07
ii= 406 , relres= 2.7530399618407426e-06 , err= 8.062167773375345e-07
ii= 407 , relres= 2.2981835552332035e-06 , err= 7.658509361518172e-07
ii= 408 , relres= 2.267136920496489e-06 , err= 7.49342320055954e-07
ii= 409 , relres= 2.1576474522465426e-06 , err= 7.269486937504126e-07
ii= 410 , relres= 2.3439501081958905e-06 , err= 7.115997551729242e-07
ii= 411 , relres= 2.1281696280323183e-06 , err= 6.756482973094463e-07
ii= 412 , relres= 2.0298359409494553e-06 , err= 6.618315349726451e-07
ii= 413 , relres= 2.023453656646955e-06 , err= 6.542614686609082e-07
ii= 414 , relres= 2.0111433434090626e-06 , err= 6.254605183482687e-07
ii= 415 , relres= 1.811091732333752e-06 , err= 5.958785864751448e-07
ii= 416 , relres= 1.6868101829270119e-06 , err= 5.667898949115512e-07
ii= 417 , relres= 1.6523922730033685e-06 , err= 5.583653243945491e-07
ii= 418 , relres= 1.6922389563964196e-06 , err= 5.38022812109464e-07
ii= 419 , relres= 1.7429325532756602e-06 , err= 5.292837724167248e-07
ii= 420 , relres= 1.5773071153352652e-06 , err= 5.060942170057224e-07
ii= 421 , relres= 1.5128274751181115e-06 , err= 4.956051165765051e-07
ii= 422 , relres= 1.4347871387835459e-06 , err= 4.86583029185862e-07
ii= 423 , relres= 1.4353777370738158e-06 , err= 4.785346251379598e-07
ii= 424 , relres= 1.280549142704973e-06 , err= 4.5506626987049134e-07
ii= 425 , relres= 1.2067587345333473e-06 , err= 4.3486641198982384e-07
ii= 426 , relres= 1.1896328296770211e-06 , err= 4.288302698258585e-07
ii= 427 , relres= 1.3157432947600491e-06 , err= 4.060990944908227e-07
ii= 428 , relres= 1.1332116685004078e-06 , err= 3.93539289098274e-07
ii= 429 , relres= 1.1225855200410197e-06 , err= 3.8855356516215216e-07
ii= 430 , relres= 1.1080744237680358e-06 , err= 3.802362906617138e-07
ii= 431 , relres= 1.1550259788461037e-06 , err= 3.544218047333747e-07
ii= 432 , relres= 1.036916167463186e-06 , err= 3.418762945858279e-07
ii= 433 , relres= 9.835140227872193e-07 , err= 3.380544655228107e-07
ii= 434 , relres= 8.989336241722825e-07 , err= 3.242231984080958e-07
ii= 435 , relres= 9.496952919942471e-07 , err= 3.1483035659932053e-07
ii= 436 , relres= 9.175318615761527e-07 , err= 3.061758609400454e-07
ii= 437 , relres= 9.193164762382699e-07 , err= 2.8595550495042374e-07
ii= 438 , relres= 7.758614651038322e-07 , err= 2.7647177313854236e-07
ii= 439 , relres= 7.651965788658745e-07 , err= 2.7246877917561176e-07
ii= 440 , relres= 8.44423565667874e-07 , err= 2.6699850928298586e-07
ii= 441 , relres= 8.433532755278721e-07 , err= 2.5759309941306185e-07
ii= 442 , relres= 7.262616462774503e-07 , err= 2.4508937950936634e-07
ii= 443 , relres= 7.099199613871213e-07 , err= 2.3930132964448723e-07
ii= 444 , relres= 6.544015571745802e-07 , err= 2.32522610566307e-07
ii= 445 , relres= 6.752011415464447e-07 , err= 2.2615034611368123e-07
ii= 446 , relres= 6.528906873080039e-07 , err= 2.2124672819277053e-07
ii= 447 , relres= 6.642311851888067e-07 , err= 2.1192101783885473e-07
ii= 448 , relres= 6.468437610091471e-07 , err= 2.0589331359813772e-07
ii= 449 , relres= 5.743119274087669e-07 , err= 2.0077346889833762e-07
ii= 450 , relres= 5.680355963573654e-07 , err= 1.9688876155621852e-07
ii= 451 , relres= 5.404723712702158e-07 , err= 1.7970019747612138e-07
ii= 452 , relres= 5.07205279899567e-07 , err= 1.7114284587874491e-07
ii= 453 , relres= 4.995132533404023e-07 , err= 1.6906293569565515e-07
ii= 454 , relres= 4.6646684037060486e-07 , err= 1.6236538174828975e-07
ii= 455 , relres= 4.6560013136288325e-07 , err= 1.4643377275701962e-07
ii= 456 , relres= 4.208102566410479e-07 , err= 1.4286913209532626e-07

```

```

ii= 457 , relres= 4.070635704664234e-07 , err= 1.4062788222543872e-07
ii= 458 , relres= 4.28560716974911e-07 , err= 1.3576428659865991e-07
ii= 459 , relres= 4.054137350097565e-07 , err= 1.2674175620365967e-07
ii= 460 , relres= 3.642106493994255e-07 , err= 1.249387657181707e-07
ii= 461 , relres= 3.753831055468569e-07 , err= 1.2255441546739365e-07
ii= 462 , relres= 3.5953954569873536e-07 , err= 1.1729377952742783e-07
ii= 463 , relres= 3.3505572051060927e-07 , err= 1.1502892583602837e-07
ii= 464 , relres= 3.460528185676119e-07 , err= 1.1154810522848522e-07
ii= 465 , relres= 3.4123029770293217e-07 , err= 1.0833248563611766e-07
ii= 466 , relres= 2.9867711261203396e-07 , err= 1.0552503520516464e-07
ii= 467 , relres= 2.8547378434453334e-07 , err= 1.0272387192489884e-07
ii= 468 , relres= 2.906143313686738e-07 , err= 1.0056286908223863e-07
ii= 469 , relres= 2.9720936751475307e-07 , err= 9.511244169057208e-08
ii= 470 , relres= 2.6212606960522374e-07 , err= 9.143056012239729e-08
ii= 471 , relres= 2.5227126926228864e-07 , err= 9.021144886784089e-08
ii= 472 , relres= 2.5344979692879056e-07 , err= 8.823234266785161e-08
ii= 473 , relres= 2.443091897361591e-07 , err= 8.457278174277956e-08
ii= 474 , relres= 2.524690987144156e-07 , err= 8.131141234080846e-08
ii= 475 , relres= 2.3649999308923654e-07 , err= 7.955517836941542e-08
ii= 476 , relres= 2.227404428333733e-07 , err= 7.613743148779928e-08
ii= 477 , relres= 2.1430305785522506e-07 , err= 7.217230361882603e-08
ii= 478 , relres= 2.230398781986484e-07 , err= 6.911703573210892e-08
ii= 479 , relres= 1.9985129270750736e-07 , err= 6.308256682104596e-08
ii= 480 , relres= 1.8545343336122463e-07 , err= 6.185616022444506e-08
ii= 481 , relres= 1.8125060671755635e-07 , err= 6.117193202249032e-08
ii= 482 , relres= 1.7830984649314336e-07 , err= 5.980524417439229e-08
ii= 483 , relres= 2.0382686693870018e-07 , err= 5.668538771089659e-08
ii= 484 , relres= 1.821056237880069e-07 , err= 5.419362302940745e-08
ii= 485 , relres= 1.6450575392753335e-07 , err= 5.297077217034777e-08
ii= 486 , relres= 1.4119498324243227e-07 , err= 4.962726342107838e-08
ii= 487 , relres= 1.4332500262161308e-07 , err= 4.634754877873267e-08
ii= 488 , relres= 1.4058250653493708e-07 , err= 4.5014650765804086e-08
ii= 489 , relres= 1.259545376296815e-07 , err= 4.3952636338116335e-08
ii= 490 , relres= 1.2244772167083244e-07 , err= 4.259478618259028e-08
ii= 491 , relres= 1.3311085496519095e-07 , err= 4.1321023774770833e-08
ii= 492 , relres= 1.3595826045204925e-07 , err= 3.9545503525716404e-08
ii= 493 , relres= 1.145421624115531e-07 , err= 3.83223559872762e-08
ii= 494 , relres= 1.224530586127716e-07 , err= 3.7280397634373525e-08
ii= 495 , relres= 1.1591422702226166e-07 , err= 3.571593729480743e-08
ii= 496 , relres= 1.064387741049323e-07 , err= 3.497745357109942e-08
ii= 497 , relres= 1.0562032317699368e-07 , err= 3.433456975130538e-08
ii= 498 , relres= 9.735884554376983e-08 , err= 3.242263760144124e-08
ii= 499 , relres= 9.746171655240844e-08 , err= 3.160966681692297e-08
ii= 500 , relres= 9.165111448177129e-08 , err= 3.123453875357654e-08
ii= 501 , relres= 9.556110550458646e-08 , err= 2.9865838107313475e-08
ii= 502 , relres= 8.693219235264763e-08 , err= 2.8846986955491465e-08
ii= 503 , relres= 7.753945663123262e-08 , err= 2.7718209040574017e-08
ii= 504 , relres= 7.647106956181048e-08 , err= 2.7550139950425544e-08
ii= 505 , relres= 8.318994261318385e-08 , err= 2.6785514665539366e-08
ii= 506 , relres= 7.683808740791941e-08 , err= 2.4751414996927396e-08
ii= 507 , relres= 7.622199446071368e-08 , err= 2.414581767178511e-08
ii= 508 , relres= 6.697718931910127e-08 , err= 2.2998819672773142e-08
ii= 509 , relres= 6.242284252514642e-08 , err= 2.2514680012103754e-08
ii= 510 , relres= 6.629747066413811e-08 , err= 2.206493823136652e-08
ii= 511 , relres= 5.952610610261314e-08 , err= 2.0577540699484797e-08
ii= 512 , relres= 5.5988087687409935e-08 , err= 2.0189691136854357e-08
ii= 513 , relres= 5.380782580935381e-08 , err= 2.0022495265841867e-08
ii= 514 , relres= 5.3648245448392263e-08 , err= 1.9125117353769327e-08
ii= 515 , relres= 5.658007162008345e-08 , err= 1.86483282810488e-08
ii= 516 , relres= 5.5786986878696704e-08 , err= 1.786170763141427e-08
ii= 517 , relres= 5.2980815399536726e-08 , err= 1.747772336018302e-08

```

```

ii= 518 , relres= 4.9860132002477294e-08 , err= 1.6983686888887635e-08
ii= 519 , relres= 4.4449344889894866e-08 , err= 1.6356041130233533e-08
ii= 520 , relres= 4.5693378198771765e-08 , err= 1.6010237946369387e-08
ii= 521 , relres= 4.918084330550104e-08 , err= 1.5485743769312425e-08
ii= 522 , relres= 4.458550910065544e-08 , err= 1.4660741741301932e-08
ii= 523 , relres= 3.966937191284292e-08 , err= 1.4213733818650547e-08
ii= 524 , relres= 4.41957922347859e-08 , err= 1.3678205532467484e-08
ii= 525 , relres= 3.927519405255227e-08 , err= 1.3327905538801997e-08
ii= 526 , relres= 3.9472405893201865e-08 , err= 1.3039100833165508e-08
ii= 527 , relres= 3.4064028181484156e-08 , err= 1.2300603005188975e-08
ii= 528 , relres= 3.566201260994651e-08 , err= 1.172066664229756e-08
ii= 529 , relres= 3.2986893865695087e-08 , err= 1.1223918138415302e-08
ii= 530 , relres= 3.421497155362827e-08 , err= 1.0448878883117642e-08
ii= 531 , relres= 3.038479770225744e-08 , err= 1.0152404966918442e-08
ii= 532 , relres= 2.9200110187346068e-08 , err= 9.851280555896981e-09
ii= 533 , relres= 2.944872059778515e-08 , err= 9.697582938550585e-09
ii= 534 , relres= 2.9205369731126313e-08 , err= 9.466543940527539e-09
ii= 535 , relres= 3.166101919307413e-08 , err= 9.025468117092685e-09
ii= 536 , relres= 2.9406780022027127e-08 , err= 8.629254579616679e-09
ii= 537 , relres= 2.537094851949209e-08 , err= 8.30460257829336e-09
ii= 538 , relres= 2.4225676364055168e-08 , err= 7.982790710948368e-09
ii= 539 , relres= 2.3980033973001415e-08 , err= 7.734075163964096e-09
ii= 540 , relres= 2.193141454520945e-08 , err= 7.259282146657872e-09
ii= 541 , relres= 2.2822536625582145e-08 , err= 6.984737194927328e-09
ii= 542 , relres= 2.1004847686009042e-08 , err= 6.766130814498181e-09
ii= 543 , relres= 2.0238941389248787e-08 , err= 6.614778648841904e-09
ii= 544 , relres= 1.9763278023765944e-08 , err= 6.4910461863254206e-09
ii= 545 , relres= 2.059971773291077e-08 , err= 6.347577081432039e-09
ii= 546 , relres= 2.1371976373413476e-08 , err= 6.0521070514484474e-09
ii= 547 , relres= 1.848385992483408e-08 , err= 5.708048576236991e-09
ii= 548 , relres= 1.5932958230397436e-08 , err= 5.4924094484925315e-09
ii= 549 , relres= 1.6669358885737565e-08 , err= 5.2687366591280476e-09
ii= 550 , relres= 1.6325435588070155e-08 , err= 5.102453383004681e-09
ii= 551 , relres= 1.4838214777471909e-08 , err= 4.846415889015254e-09
ii= 552 , relres= 1.4891802526512739e-08 , err= 4.787454388675584e-09
ii= 553 , relres= 1.3581996068535177e-08 , err= 4.598927462622932e-09
ii= 554 , relres= 1.3156388250627863e-08 , err= 4.5267924272863e-09
ii= 555 , relres= 1.2957568750260262e-08 , err= 4.311845504939372e-09
ii= 556 , relres= 1.3254268532793389e-08 , err= 4.264565860665013e-09
ii= 557 , relres= 1.2659542696303226e-08 , err= 3.99690745795894e-09
ii= 558 , relres= 1.1269370842384237e-08 , err= 3.864553753724377e-09
ii= 559 , relres= 1.1613177200489747e-08 , err= 3.741727242294535e-09
ii= 560 , relres= 1.1258570714246168e-08 , err= 3.5539552475272967e-09
ii= 561 , relres= 1.0580284632218391e-08 , err= 3.4267575696295455e-09
ii= 562 , relres= 9.788452340446063e-09 , err= 3.3424416657634676e-09
ii= 563 , relres= 9.924360660988757e-09 , err= 3.2906412328104926e-09
ii= 564 , relres= 9.740915986108229e-09 , err= 3.2217772958432747e-09
ii= 565 , relres= 9.25826294177824e-09 , err= 3.1631364614747884e-09
ii= 566 , relres= 9.302323892052624e-09 , err= 2.975114456667735e-09
ii= 567 , relres= 9.281639056871475e-09 , err= 2.9006701406605268e-09
ii= 568 , relres= 8.769020162151427e-09 , err= 2.7512345477506838e-09
ii= 569 , relres= 8.009190038426345e-09 , err= 2.699583545866849e-09
ii= 570 , relres= 8.634799532210914e-09 , err= 2.6206542065343903e-09
ii= 571 , relres= 8.629053279005143e-09 , err= 2.5434565909681547e-09
ii= 572 , relres= 7.879858045930938e-09 , err= 2.4358674291533365e-09
ii= 573 , relres= 7.891228301981992e-09 , err= 2.3344535132674607e-09
ii= 574 , relres= 6.999835576060085e-09 , err= 2.2803947859374495e-09
ii= 575 , relres= 6.974825074186237e-09 , err= 2.2007893320191073e-09
ii= 576 , relres= 6.7728801035757904e-09 , err= 2.1323779913894694e-09
ii= 577 , relres= 6.958595727510302e-09 , err= 2.0249871848456206e-09
ii= 578 , relres= 6.694702189203418e-09 , err= 1.9796427802679655e-09

```

```

ii= 579 , relres= 6.307966301105188e-09 , err= 1.9232208569207974e-09
ii= 580 , relres= 5.957039247598619e-09 , err= 1.8462297864607082e-09
ii= 581 , relres= 5.562271550229656e-09 , err= 1.7721005723289681e-09
ii= 582 , relres= 5.520541172612769e-09 , err= 1.6891076959369458e-09
ii= 583 , relres= 5.1045553191735906e-09 , err= 1.5690430162299465e-09
ii= 584 , relres= 4.929225180742263e-09 , err= 1.5538790972472886e-09
ii= 585 , relres= 4.605762995966792e-09 , err= 1.503073483829095e-09
ii= 586 , relres= 4.8734442329582565e-09 , err= 1.4562036903798094e-09
ii= 587 , relres= 4.814476131945871e-09 , err= 1.4143683299741082e-09
ii= 588 , relres= 4.469781598142759e-09 , err= 1.3809645293765894e-09
ii= 589 , relres= 4.185726529280756e-09 , err= 1.3018576904284222e-09
ii= 590 , relres= 3.990727373654011e-09 , err= 1.2590296952283458e-09
ii= 591 , relres= 3.556035103121418e-09 , err= 1.2350947554993424e-09
ii= 592 , relres= 3.509283238141786e-09 , err= 1.223850915793918e-09
ii= 593 , relres= 3.6933219435160856e-09 , err= 1.1619275772376782e-09
ii= 594 , relres= 3.646485131226257e-09 , err= 1.1266891793370994e-09
ii= 595 , relres= 3.3775248223866672e-09 , err= 1.0838004686649102e-09
ii= 596 , relres= 3.310302040901299e-09 , err= 1.0523903259084203e-09
ii= 597 , relres= 3.163741145252938e-09 , err= 1.0333012720956697e-09
ii= 598 , relres= 3.4916011199925196e-09 , err= 1.0051888151642904e-09
ii= 599 , relres= 3.3390341123734137e-09 , err= 9.632673109705057e-10
ii= 600 , relres= 3.0097888386953703e-09 , err= 9.321492770016537e-10
ii= 601 , relres= 2.910780932351324e-09 , err= 9.131719533136223e-10
ii= 602 , relres= 2.8646798135224195e-09 , err= 8.85679798535991e-10
ii= 603 , relres= 2.541472552664069e-09 , err= 8.588513838096568e-10
ii= 604 , relres= 2.6145616108070384e-09 , err= 8.300084817935031e-10
ii= 605 , relres= 2.7056411270317915e-09 , err= 8.173182543068364e-10
ii= 606 , relres= 2.3458934790077078e-09 , err= 7.596377660314669e-10
ii= 607 , relres= 2.1659645643585113e-09 , err= 7.413003883251177e-10
ii= 608 , relres= 2.244970591061353e-09 , err= 7.329076191879633e-10
ii= 609 , relres= 2.064565975265357e-09 , err= 6.97844863052088e-10
ii= 610 , relres= 2.1398332309156506e-09 , err= 6.804955420983153e-10
ii= 611 , relres= 1.982962297584604e-09 , err= 6.529606322606265e-10
ii= 612 , relres= 1.8376523607276736e-09 , err= 6.297892255222216e-10
ii= 613 , relres= 1.7745766833229169e-09 , err= 6.083629049915191e-10
ii= 614 , relres= 1.8083719209542297e-09 , err= 5.955086871930899e-10
ii= 615 , relres= 1.7322172089280718e-09 , err= 5.832575407692492e-10
ii= 616 , relres= 1.7841590562695367e-09 , err= 5.504030934376728e-10
ii= 617 , relres= 1.5626517179591055e-09 , err= 5.208391752466881e-10
ii= 618 , relres= 1.5379049066633815e-09 , err= 5.100809024370274e-10
ii= 619 , relres= 1.5250814455194142e-09 , err= 5.031438838357173e-10
ii= 620 , relres= 1.5470153499968233e-09 , err= 4.896335966729812e-10
ii= 621 , relres= 1.5174799937968463e-09 , err= 4.6143098795388143e-10
ii= 622 , relres= 1.4779080086595738e-09 , err= 4.4960453369080053e-10
ii= 623 , relres= 1.3259476802371814e-09 , err= 4.3961686987999216e-10
ii= 624 , relres= 1.3353294494205064e-09 , err= 4.2550836116727344e-10
ii= 625 , relres= 1.3156936357141193e-09 , err= 4.1206553022414237e-10
ii= 626 , relres= 1.2384097735894132e-09 , err= 4.0211276496091337e-10
ii= 627 , relres= 1.2313705610608392e-09 , err= 3.8507563785117977e-10
ii= 628 , relres= 1.2410218241983748e-09 , err= 3.631755098762802e-10
ii= 629 , relres= 1.1343586431704914e-09 , err= 3.5618843691258457e-10
ii= 630 , relres= 1.1143463775410261e-09 , err= 3.4546647346675767e-10
ii= 631 , relres= 1.0267185383000614e-09 , err= 3.296283845405441e-10
ii= 632 , relres= 9.92527956287866e-10 , err= 3.2537144264028316e-10
ii= 633 , relres= 1.0996945723489173e-09 , err= 3.1169142070224026e-10
ii= 634 , relres= 8.573864232403823e-10 , err= 2.915586473990414e-10
ii= 635 , relres= 8.456912115503262e-10 , err= 2.8311396030743323e-10
ii= 636 , relres= 8.552581412784829e-10 , err= 2.710281372861376e-10
ii= 637 , relres= 8.387977734339717e-10 , err= 2.649560597478213e-10
ii= 638 , relres= 8.623439255673293e-10 , err= 2.577123407548277e-10
ii= 639 , relres= 7.051993949746016e-10 , err= 2.430660489842319e-10

```

```

ii= 640 , relres= 6.732295671042274e-10 , err= 2.414995068152686e-10
ii= 641 , relres= 6.880918954283508e-10 , err= 2.332171835536239e-10
ii= 642 , relres= 6.455942647094674e-10 , err= 2.2719967730048477e-10
ii= 643 , relres= 6.859833211505666e-10 , err= 2.2410433661540826e-10
ii= 644 , relres= 6.328128429723333e-10 , err= 2.1156334541403727e-10
ii= 645 , relres= 5.817770392873358e-10 , err= 2.0626824579996282e-10
ii= 646 , relres= 5.905082859323602e-10 , err= 2.005161754534485e-10
ii= 647 , relres= 5.686887563573136e-10 , err= 1.9570130718676432e-10
ii= 648 , relres= 6.504285606715267e-10 , err= 1.866954816002464e-10
ii= 649 , relres= 6.248309145644654e-10 , err= 1.7576122268419618e-10
ii= 650 , relres= 4.780287637316434e-10 , err= 1.7086562701270665e-10
ii= 651 , relres= 5.1394014514988e-10 , err= 1.669974994815811e-10
ii= 652 , relres= 5.157030623998767e-10 , err= 1.6058433767441107e-10
ii= 653 , relres= 4.864864666412891e-10 , err= 1.5318879691372234e-10
ii= 654 , relres= 4.816724747703938e-10 , err= 1.4855201294221046e-10
ii= 655 , relres= 4.327249839070182e-10 , err= 1.4238649411710217e-10
ii= 656 , relres= 3.951527802996953e-10 , err= 1.4060013972788515e-10
ii= 657 , relres= 4.347840699764962e-10 , err= 1.359306264208986e-10
ii= 658 , relres= 3.7049755299551853e-10 , err= 1.329170355001273e-10
ii= 659 , relres= 3.5180434399686125e-10 , err= 1.218680221808076e-10
ii= 660 , relres= 3.2719282616840477e-10 , err= 1.1609983201054271e-10
ii= 661 , relres= 3.174115794666755e-10 , err= 1.152433923137093e-10
ii= 662 , relres= 3.299114848759252e-10 , err= 1.0972828782314423e-10
ii= 663 , relres= 3.1839282527224344e-10 , err= 1.0804103804272615e-10
ii= 664 , relres= 3.3332693459172156e-10 , err= 1.0291425506969792e-10
ii= 665 , relres= 3.0490556095878123e-10 , err= 1.0063856679276235e-10
ii= 666 , relres= 2.998959377616388e-10 , err= 9.605364071577807e-11
ii= 667 , relres= 2.748156749527829e-10 , err= 9.234238595383784e-11
ii= 668 , relres= 2.682260382736099e-10 , err= 9.066529670604408e-11
ii= 669 , relres= 2.63415182925035e-10 , err= 8.962742663510071e-11
ii= 670 , relres= 2.7619017534903445e-10 , err= 8.358291797387778e-11
ii= 671 , relres= 2.510112695554753e-10 , err= 8.118202725298678e-11
ii= 672 , relres= 2.4077570961512236e-10 , err= 7.788582589942445e-11
ii= 673 , relres= 2.376506378648749e-10 , err= 7.638945132954567e-11
ii= 674 , relres= 2.412453481944202e-10 , err= 7.480603222227004e-11
ii= 675 , relres= 2.2442252689444863e-10 , err= 7.205198385876648e-11
ii= 676 , relres= 2.2358440698851399e-10 , err= 6.817275359093983e-11
ii= 677 , relres= 2.0483844096978652e-10 , err= 6.585067538661633e-11
ii= 678 , relres= 1.963654042151263e-10 , err= 6.30073880998789e-11
ii= 679 , relres= 1.96227013746915e-10 , err= 6.194643951628794e-11
ii= 680 , relres= 1.9311272242168784e-10 , err= 6.047553159991454e-11
ii= 681 , relres= 1.9723477859694405e-10 , err= 5.946143677117942e-11
ii= 682 , relres= 2.005255530200938e-10 , err= 5.574098005946008e-11
ii= 683 , relres= 1.7669299106005873e-10 , err= 5.392494996830129e-11
ii= 684 , relres= 1.5997333387570742e-10 , err= 5.296003896472404e-11
ii= 685 , relres= 1.6947533792159525e-10 , err= 5.166243366642101e-11
ii= 686 , relres= 1.6638067505111307e-10 , err= 5.041321628763697e-11
ii= 687 , relres= 1.5751597256705533e-10 , err= 4.881424067207085e-11
ii= 688 , relres= 1.569254551019982e-10 , err= 4.7741117612141377e-11
ii= 689 , relres= 1.5996549611449054e-10 , err= 4.618384619271667e-11
ii= 690 , relres= 1.4777699987344292e-10 , err= 4.514190845159239e-11
ii= 691 , relres= 1.4077010255770186e-10 , err= 4.3871589865804e-11
ii= 692 , relres= 1.3820408448774049e-10 , err= 4.3054913388999146e-11
ii= 693 , relres= 1.4023512034691404e-10 , err= 4.2625802777313466e-11
ii= 694 , relres= 1.393205313490563e-10 , err= 4.198011484086713e-11
ii= 695 , relres= 1.3195013303864044e-10 , err= 3.987121810537687e-11
ii= 696 , relres= 1.276366486260404e-10 , err= 3.911782338669063e-11
ii= 697 , relres= 1.2544049685562873e-10 , err= 3.877636140559748e-11
ii= 698 , relres= 1.2813851181586784e-10 , err= 3.8211195371481076e-11
ii= 699 , relres= 1.2442422364391302e-10 , err= 3.751483853179442e-11
ii= 700 , relres= 1.2546076979099267e-10 , err= 3.696298895767198e-11

```

```

ii= 701 , relres= 1.1945779548282415e-10 , err= 3.6340610293964e-11
ii= 702 , relres= 1.193823971529734e-10 , err= 3.573232914467054e-11
ii= 703 , relres= 1.1710400684998052e-10 , err= 3.532363281810669e-11
ii= 704 , relres= 1.1678447311614673e-10 , err= 3.486391750540468e-11
ii= 705 , relres= 1.0873497188915659e-10 , err= 3.438095613192242e-11
ii= 706 , relres= 1.0834723598400982e-10 , err= 3.4070674545469424e-11
ii= 707 , relres= 1.079913207120281e-10 , err= 3.3718187060863653e-11
ii= 708 , relres= 1.0573308043551739e-10 , err= 3.332095240471294e-11
ii= 709 , relres= 1.0550181593265375e-10 , err= 3.2935658295147755e-11
ii= 710 , relres= 1.0528087440631556e-10 , err= 3.254166750603091e-11
ii= 711 , relres= 1.0781381021057917e-10 , err= 3.2147177913446076e-11
ii= 712 , relres= 1.0527807621895823e-10 , err= 3.179231311095901e-11
ii= 713 , relres= 9.955827971375901e-11 , err= 3.1380413968104994e-11
GN: none
ii= 0 , relres= 1.5723762265828813 , err= 0.9413100182322085
ii= 1 , relres= 1.4276321717628766 , err= 0.9018713062388705
ii= 2 , relres= 1.2967314226199262 , err= 0.8640858231017992
ii= 3 , relres= 1.0355692385903477 , err= 0.8300247633337678
ii= 4 , relres= 1.0002573862064221 , err= 0.7855074289407601
ii= 5 , relres= 0.9815232648203925 , err= 0.7459197081265568
ii= 6 , relres= 0.8568601879009778 , err= 0.6981193636912204
ii= 7 , relres= 0.7999414683448317 , err= 0.6588811911116395
ii= 8 , relres= 0.7213308188095783 , err= 0.6238058835213194
ii= 9 , relres= 0.7109956553113762 , err= 0.5850499449499349
ii= 10 , relres= 0.605316967836353 , err= 0.542425316761491
ii= 11 , relres= 0.6405253997179531 , err= 0.5046782901841684
ii= 12 , relres= 0.5614551919236895 , err= 0.47203791041476995
ii= 13 , relres= 0.5067016087109157 , err= 0.43614511016286744
ii= 14 , relres= 0.503235339152959 , err= 0.4047759000305859
ii= 15 , relres= 0.41682998863026155 , err= 0.36864835363384274
ii= 16 , relres= 0.4027578465628967 , err= 0.33518958320056486
ii= 17 , relres= 0.3603386053251265 , err= 0.3143527206805181
ii= 18 , relres= 0.3566374088479323 , err= 0.29029164206048147
ii= 19 , relres= 0.3122529591714397 , err= 0.2668992226979305
ii= 20 , relres= 0.28186437870953657 , err= 0.24347175577395314
ii= 21 , relres= 0.26280091716236564 , err= 0.2242972664502714
ii= 22 , relres= 0.23472476532984146 , err= 0.20706581630446824
ii= 23 , relres= 0.20331679899972266 , err= 0.19177321421369248
ii= 24 , relres= 0.19076423529778674 , err= 0.17737609083605113
ii= 25 , relres= 0.1639659064636251 , err= 0.16411880090928133
ii= 26 , relres= 0.170437017659883 , err= 0.15261932374962583
ii= 27 , relres= 0.15639653930998712 , err= 0.14261825282628207
ii= 28 , relres= 0.17295640373171187 , err= 0.13477230391470857
ii= 29 , relres= 0.1328197469935502 , err= 0.12632774146829032
ii= 30 , relres= 0.12467087384423498 , err= 0.11733369838611563
ii= 31 , relres= 0.10792972806739916 , err= 0.10929438511958456
ii= 32 , relres= 0.10240286524334613 , err= 0.10038983033575334
ii= 33 , relres= 0.09734988067501123 , err= 0.09338968112220476
ii= 34 , relres= 0.08937789839110202 , err= 0.08658751369592986
ii= 35 , relres= 0.07351061530239143 , err= 0.07964602916067103
ii= 36 , relres= 0.07583189439380822 , err= 0.07371244393233117
ii= 37 , relres= 0.0685857238272009 , err= 0.0684616897311607
ii= 38 , relres= 0.06492883474402683 , err= 0.06357821035549699
ii= 39 , relres= 0.056010126258488065 , err= 0.05855006471641432
ii= 40 , relres= 0.05363671240943552 , err= 0.05388668903534815
ii= 41 , relres= 0.060625544933986954 , err= 0.05071205551427017
ii= 42 , relres= 0.04964798960399952 , err= 0.047024143929999304
ii= 43 , relres= 0.04539082910967975 , err= 0.04408810862392005
ii= 44 , relres= 0.039490712652431724 , err= 0.040983166203740186
ii= 45 , relres= 0.03821300223924364 , err= 0.038186066162620845
ii= 46 , relres= 0.037641356276581044 , err= 0.036108791839156544

```

```
ii= 47 , relres= 0.03228533276276094 , err= 0.03403938594022893
ii= 48 , relres= 0.028298031241798798 , err= 0.03186647171320971
ii= 49 , relres= 0.026945963134133527 , err= 0.029397826648739606
ii= 50 , relres= 0.02545817406092179 , err= 0.02749862408865218
ii= 51 , relres= 0.028580036946668462 , err= 0.025924868230687143
ii= 52 , relres= 0.023895477288483544 , err= 0.0246311299089973
ii= 53 , relres= 0.02197450354445812 , err= 0.023144928112061057
ii= 54 , relres= 0.01965334514634708 , err= 0.021543748558090645
ii= 55 , relres= 0.017447212934368097 , err= 0.020026532130030736
ii= 56 , relres= 0.01590976604874264 , err= 0.018599771268600615
ii= 57 , relres= 0.015674656983922588 , err= 0.01729661322227322
ii= 58 , relres= 0.014399714705593652 , err= 0.016159668191902763
ii= 59 , relres= 0.013584697269376486 , err= 0.015120148766407297
ii= 60 , relres= 0.013389196954348762 , err= 0.014323417330321683
ii= 61 , relres= 0.011267338291518417 , err= 0.013277507050091826
ii= 62 , relres= 0.011261952581372345 , err= 0.012287670861728151
ii= 63 , relres= 0.010220904352291015 , err= 0.01131489714939913
ii= 64 , relres= 0.008903206703381458 , err= 0.010587175442810093
ii= 65 , relres= 0.008161414949809183 , err= 0.009636658539956341
ii= 66 , relres= 0.009376583979738604 , err= 0.008981807449053834
ii= 67 , relres= 0.007984292193652693 , err= 0.008396603917179793
ii= 68 , relres= 0.0068085042942567795 , err= 0.007765149109028823
ii= 69 , relres= 0.005980746638544282 , err= 0.007143645548766135
ii= 70 , relres= 0.005631831404735452 , err= 0.006512989660551203
ii= 71 , relres= 0.006061187325942685 , err= 0.006116357239495621
ii= 72 , relres= 0.006266849480575169 , err= 0.005819196620463713
ii= 73 , relres= 0.005010967616594858 , err= 0.005396583505431455
ii= 74 , relres= 0.004448744925874315 , err= 0.005003557078641025
ii= 75 , relres= 0.004191477794016674 , err= 0.004617903060207875
ii= 76 , relres= 0.004778149861657183 , err= 0.004329015349376328
ii= 77 , relres= 0.003605660208233557 , err= 0.004088344452619944
ii= 78 , relres= 0.0029921501474963245 , err= 0.0037405076840394164
ii= 79 , relres= 0.002925415187635535 , err= 0.0034198709869988743
ii= 80 , relres= 0.0032845199340624178 , err= 0.003199988479313419
ii= 81 , relres= 0.0026022181169055377 , err= 0.003041011341098441
ii= 82 , relres= 0.002485265695595112 , err= 0.002807225651275215
ii= 83 , relres= 0.002208468215250729 , err= 0.002583214047577182
ii= 84 , relres= 0.001953551837298436 , err= 0.0023529343088352864
ii= 85 , relres= 0.0018144319898594694 , err= 0.0021412129339610205
ii= 86 , relres= 0.0017494108140170281 , err= 0.0019615561706350366
ii= 87 , relres= 0.001923938231013832 , err= 0.0017904400832893044
ii= 88 , relres= 0.0015334276233002952 , err= 0.0016708774336418194
ii= 89 , relres= 0.0013651857661231789 , err= 0.0015125811867513492
ii= 90 , relres= 0.0012897664846806007 , err= 0.0013601477485789867
ii= 91 , relres= 0.0011811114621780926 , err= 0.001252699265980218
ii= 92 , relres= 0.0014326362485233138 , err= 0.0011780901735640862
ii= 93 , relres= 0.0011717748479666583 , err= 0.0010949171566373298
ii= 94 , relres= 0.001189832507774847 , err= 0.0010194739381726475
ii= 95 , relres= 0.0009531405369689297 , err= 0.0009513929440119043
ii= 96 , relres= 0.00082319755363258 , err= 0.0008611485776604464
ii= 97 , relres= 0.0008204183217804491 , err= 0.0007859349464010933
ii= 98 , relres= 0.0008550968657885337 , err= 0.0007294878532631966
ii= 99 , relres= 0.0006232643928151899 , err= 0.0006595001523816358
ii= 100 , relres= 0.000585964139839587 , err= 0.0005952334829200036
ii= 101 , relres= 0.0006253288245366143 , err= 0.000553980481796825
ii= 102 , relres= 0.0004709424701521908 , err= 0.0005157385579665928
ii= 103 , relres= 0.00044207965196800623 , err= 0.0004706190364975705
ii= 104 , relres= 0.0005142872481974283 , err= 0.00044275062964118186
ii= 105 , relres= 0.0004004875310523719 , err= 0.00041424994656736393
ii= 106 , relres= 0.0004488452570052589 , err= 0.00038189598175677
ii= 107 , relres= 0.00036147994177395537 , err= 0.00035793535954175567
```

```

ii= 108 , relres= 0.0003591294259473696 , err= 0.00032662663713725176
ii= 109 , relres= 0.0003149035759810385 , err= 0.00030557704543579024
ii= 110 , relres= 0.0002722882130267665 , err= 0.00027895953401981335
ii= 111 , relres= 0.00023683259485156582 , err= 0.0002489178391842201
ii= 112 , relres= 0.00028188803869948946 , err= 0.00022297839250929843
ii= 113 , relres= 0.0002403727779730375 , err= 0.00020907104377033056
ii= 114 , relres= 0.00022477735735680477 , err= 0.00018868844619911466
ii= 115 , relres= 0.00020217561761892933 , err= 0.00017506608720091859
ii= 116 , relres= 0.00017377286114613396 , err= 0.0001592055963122541
ii= 117 , relres= 0.0001870009861977842 , err= 0.00014522324907481954
ii= 118 , relres= 0.00017099956231285136 , err= 0.0001378269586175819
ii= 119 , relres= 0.00014076034510714287 , err= 0.00012555802896255697
ii= 120 , relres= 0.00013283490740830938 , err= 0.00011730762708671869
ii= 121 , relres= 0.00010574149559344419 , err= 0.00010697285955364293
ii= 122 , relres= 0.00011872309860827821 , err= 9.718135686023562e-05
ii= 123 , relres= 9.713083570844751e-05 , err= 8.930227897529274e-05
ii= 124 , relres= 8.36555598769769e-05 , err= 8.066695354864718e-05
ii= 125 , relres= 9.158887311459392e-05 , err= 7.31806784622787e-05
ii= 126 , relres= 7.419970808979208e-05 , err= 6.69030559862882e-05
ii= 127 , relres= 6.613964421405356e-05 , err= 5.98344127813281e-05
ii= 128 , relres= 7.337017670308658e-05 , err= 5.4435539767135925e-05
ii= 129 , relres= 5.6896157136539e-05 , err= 4.8449387862449294e-05
ii= 130 , relres= 5.526171928635681e-05 , err= 4.305197118314353e-05
ii= 131 , relres= 5.521744802085336e-05 , err= 3.9250208428626184e-05
ii= 132 , relres= 4.188984545557424e-05 , err= 3.5092193117338576e-05
ii= 133 , relres= 4.31433703098381e-05 , err= 3.105306739913883e-05
ii= 134 , relres= 4.199637198857127e-05 , err= 2.879910672915922e-05
ii= 135 , relres= 3.470657129070027e-05 , err= 2.5619706046477116e-05
ii= 136 , relres= 3.543255500900378e-05 , err= 2.360570627004686e-05
ii= 137 , relres= 2.5193979474260566e-05 , err= 2.1233221416265427e-05
ii= 138 , relres= 3.201829533411695e-05 , err= 1.959227284499056e-05
ii= 139 , relres= 2.206034737957893e-05 , err= 1.8433946541521037e-05
ii= 140 , relres= 2.488900338055364e-05 , err= 1.6918339718258627e-05
ii= 141 , relres= 2.107092125506089e-05 , err= 1.598358073021071e-05
ii= 142 , relres= 1.7553334507186175e-05 , err= 1.463827902865852e-05
ii= 143 , relres= 1.620272333427825e-05 , err= 1.3535357572199983e-05
ii= 144 , relres= 1.3187968546876404e-05 , err= 1.2234081370417732e-05
ii= 145 , relres= 1.3357974055125155e-05 , err= 1.086881030224722e-05
ii= 146 , relres= 1.6075089457282342e-05 , err= 1.0076073918359125e-05
ii= 147 , relres= 1.0369168014444749e-05 , err= 9.145095261742608e-06
ii= 148 , relres= 1.003404132772937e-05 , err= 8.102587197491636e-06
ii= 149 , relres= 9.765090323753189e-06 , err= 7.471735315379805e-06
ii= 150 , relres= 8.15665297032355e-06 , err= 6.74771509406348e-06
ii= 151 , relres= 9.223462312227615e-06 , err= 6.200680667143302e-06
ii= 152 , relres= 6.882661118564224e-06 , err= 5.730890105450978e-06
ii= 153 , relres= 6.3420390857573625e-06 , err= 5.175999951781772e-06
ii= 154 , relres= 5.628397592942472e-06 , err= 4.7370898208824455e-06
ii= 155 , relres= 5.053095138305851e-06 , err= 4.318911407291285e-06
ii= 156 , relres= 4.480973879323842e-06 , err= 3.9095930054055904e-06
ii= 157 , relres= 4.5829228005503735e-06 , err= 3.5898822649708448e-06
ii= 158 , relres= 3.5713119239022715e-06 , err= 3.2609895266645826e-06
ii= 159 , relres= 3.1151133762538154e-06 , err= 2.988224470911007e-06
ii= 160 , relres= 3.67592531673203e-06 , err= 2.7798461016710884e-06
ii= 161 , relres= 2.8807440721977487e-06 , err= 2.5766225048018924e-06
ii= 162 , relres= 3.57807693932883e-06 , err= 2.40489534663711e-06
ii= 163 , relres= 2.4016549458891535e-06 , err= 2.26971920530271e-06
ii= 164 , relres= 2.1081593875246375e-06 , err= 2.063323134209513e-06
ii= 165 , relres= 2.015767429361529e-06 , err= 1.9196507168796716e-06
ii= 166 , relres= 1.7824438736407435e-06 , err= 1.756537675858311e-06
ii= 167 , relres= 2.0091469468384667e-06 , err= 1.6415313590578464e-06
ii= 168 , relres= 1.549431851472016e-06 , err= 1.5572875516569295e-06

```

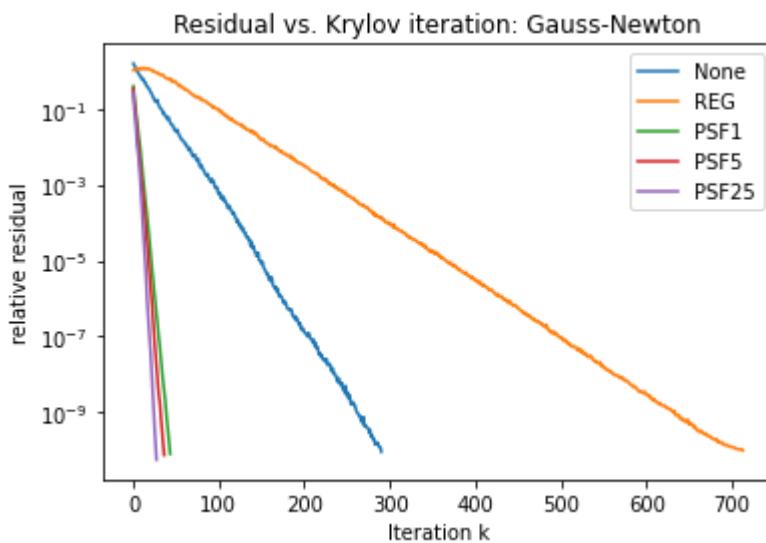
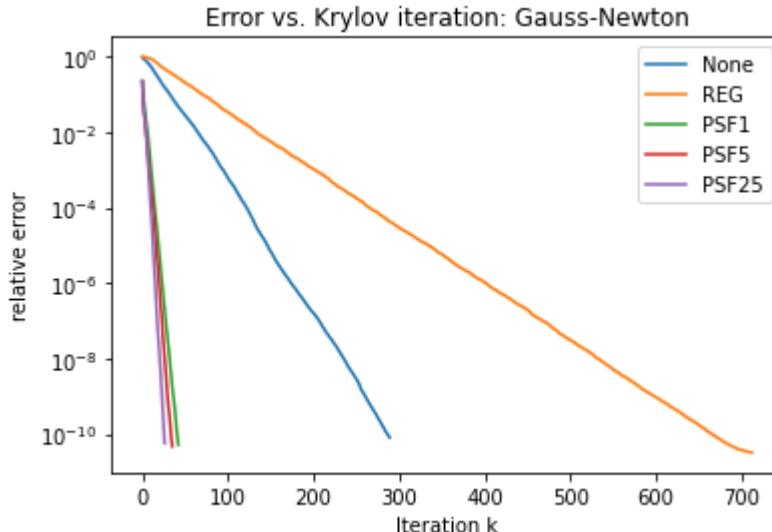
```
ii= 169 , relres= 1.7291035975415265e-06 , err= 1.4382742217482192e-06
ii= 170 , relres= 1.2963342602608846e-06 , err= 1.3560427205713089e-06
ii= 171 , relres= 1.124341433304445e-06 , err= 1.2333713450309921e-06
ii= 172 , relres= 1.184809844310443e-06 , err= 1.12175110193331e-06
ii= 173 , relres= 1.1431073524246463e-06 , err= 1.0644611581612396e-06
ii= 174 , relres= 1.0300603183721953e-06 , err= 9.770923919492132e-07
ii= 175 , relres= 8.956452415503111e-07 , err= 9.185189954706882e-07
ii= 176 , relres= 7.630285728630106e-07 , err= 8.398604143129478e-07
ii= 177 , relres= 8.643986483760934e-07 , err= 7.864728320841938e-07
ii= 178 , relres= 7.443138302419859e-07 , err= 7.451738440011562e-07
ii= 179 , relres= 6.74543597535625e-07 , err= 6.909229063620348e-07
ii= 180 , relres= 5.587046439024261e-07 , err= 6.362466014541223e-07
ii= 181 , relres= 5.33604605967835e-07 , err= 5.846361055797189e-07
ii= 182 , relres= 5.30718052244968e-07 , err= 5.47103888681435e-07
ii= 183 , relres= 4.891811792794526e-07 , err= 5.127006192267204e-07
ii= 184 , relres= 5.22638401728728e-07 , err= 4.785159072544708e-07
ii= 185 , relres= 5.048135269776422e-07 , err= 4.552379769709003e-07
ii= 186 , relres= 3.720236842666058e-07 , err= 4.1758776884589456e-07
ii= 187 , relres= 3.433513001399197e-07 , err= 3.8770477425296704e-07
ii= 188 , relres= 3.1933566040554686e-07 , err= 3.5928874505832863e-07
ii= 189 , relres= 3.4249206888096607e-07 , err= 3.368504733256337e-07
ii= 190 , relres= 2.7027467527768076e-07 , err= 3.1123368451479823e-07
ii= 191 , relres= 3.081057517984341e-07 , err= 2.8954053219101975e-07
ii= 192 , relres= 2.6039774367898076e-07 , err= 2.7146994602560893e-07
ii= 193 , relres= 2.3470620636309117e-07 , err= 2.521918453681721e-07
ii= 194 , relres= 2.0202395743295794e-07 , err= 2.338653289495765e-07
ii= 195 , relres= 2.2251599065435886e-07 , err= 2.1693028338703645e-07
ii= 196 , relres= 1.6828794658046733e-07 , err= 2.0438962255129224e-07
ii= 197 , relres= 1.5035868708524596e-07 , err= 1.8840522789315125e-07
ii= 198 , relres= 1.6604746526215826e-07 , err= 1.7564278081605338e-07
ii= 199 , relres= 1.481536689256704e-07 , err= 1.6838167403699804e-07
ii= 200 , relres= 1.2894699681546502e-07 , err= 1.5853128232596485e-07
ii= 201 , relres= 1.2499731962054993e-07 , err= 1.4924408588225763e-07
ii= 202 , relres= 1.1508618497623797e-07 , err= 1.399989225896084e-07
ii= 203 , relres= 1.0458916055011857e-07 , err= 1.2933957814499036e-07
ii= 204 , relres= 9.987518874263548e-08 , err= 1.1864628726980557e-07
ii= 205 , relres= 1.2443272432427298e-07 , err= 1.125795929872246e-07
ii= 206 , relres= 9.685402757211597e-08 , err= 1.0444329792589665e-07
ii= 207 , relres= 9.302718922671373e-08 , err= 9.663735816412891e-08
ii= 208 , relres= 8.460299799843799e-08 , err= 8.821292058126658e-08
ii= 209 , relres= 7.931354827923949e-08 , err= 8.077278241590871e-08
ii= 210 , relres= 6.979277020561698e-08 , err= 7.269574759738951e-08
ii= 211 , relres= 8.247414819999157e-08 , err= 6.800400002420248e-08
ii= 212 , relres= 5.9002352896291865e-08 , err= 6.220340205364733e-08
ii= 213 , relres= 6.722642869960567e-08 , err= 5.685423566842501e-08
ii= 214 , relres= 4.94560909457663e-08 , err= 5.266717560184314e-08
ii= 215 , relres= 5.362994161908269e-08 , err= 4.816823378135009e-08
ii= 216 , relres= 4.4487638396516244e-08 , err= 4.5723475060489714e-08
ii= 217 , relres= 3.414884481474042e-08 , err= 4.1763681459873275e-08
ii= 218 , relres= 3.622883123746996e-08 , err= 3.8546554282941024e-08
ii= 219 , relres= 3.067573552004942e-08 , err= 3.630897769100692e-08
ii= 220 , relres= 3.299880956194038e-08 , err= 3.400570229670062e-08
ii= 221 , relres= 2.6075957675556812e-08 , err= 3.1678617520225324e-08
ii= 222 , relres= 2.6582996900541586e-08 , err= 2.915428153770152e-08
ii= 223 , relres= 2.411300217458132e-08 , err= 2.7286133164583954e-08
ii= 224 , relres= 2.2086815094858398e-08 , err= 2.4863530448269654e-08
ii= 225 , relres= 2.5006981566754338e-08 , err= 2.3216203094617706e-08
ii= 226 , relres= 2.570575267106012e-08 , err= 2.185552550092679e-08
ii= 227 , relres= 1.7771168747824393e-08 , err= 2.007546676071132e-08
ii= 228 , relres= 1.8158575834933125e-08 , err= 1.8225599423667446e-08
ii= 229 , relres= 1.805677449893167e-08 , err= 1.6864130130849785e-08
```

```

ii= 230 , relres= 1.8739726139703344e-08 , err= 1.5613046993541546e-08
ii= 231 , relres= 1.4678643159461187e-08 , err= 1.4541757045303364e-08
ii= 232 , relres= 1.2408991519036483e-08 , err= 1.2970906752461592e-08
ii= 233 , relres= 1.4523492190461655e-08 , err= 1.1953844056791705e-08
ii= 234 , relres= 1.0621273732249813e-08 , err= 1.1079087630075716e-08
ii= 235 , relres= 1.1062018891859143e-08 , err= 1.0022783159148996e-08
ii= 236 , relres= 9.90221556617076e-09 , err= 9.451182210601431e-09
ii= 237 , relres= 8.769932344488354e-09 , err= 8.67053518487357e-09
ii= 238 , relres= 7.633753513738856e-09 , err= 7.853067484429719e-09
ii= 239 , relres= 6.41442917504012e-09 , err= 6.968167857522708e-09
ii= 240 , relres= 8.094795656194704e-09 , err= 6.3511739819558955e-09
ii= 241 , relres= 5.8566357950034185e-09 , err= 5.880895379549724e-09
ii= 242 , relres= 6.1728072859757035e-09 , err= 5.359160698599263e-09
ii= 243 , relres= 5.237481835696061e-09 , err= 5.022537114927771e-09
ii= 244 , relres= 5.938451926963992e-09 , err= 4.676179059486973e-09
ii= 245 , relres= 4.165809303119184e-09 , err= 4.3338617192085085e-09
ii= 246 , relres= 3.977870119564041e-09 , err= 3.983960726064067e-09
ii= 247 , relres= 3.4934300371497835e-09 , err= 3.6452975389921644e-09
ii= 248 , relres= 5.030250890581217e-09 , err= 3.387958752915058e-09
ii= 249 , relres= 2.930509991350758e-09 , err= 3.1529444652874664e-09
ii= 250 , relres= 3.475337943727479e-09 , err= 2.8735238359620008e-09
ii= 251 , relres= 2.4608886610188077e-09 , err= 2.646247282044847e-09
ii= 252 , relres= 2.4886206700703864e-09 , err= 2.32323484337468e-09
ii= 253 , relres= 2.8535835285090936e-09 , err= 2.1825027601627095e-09
ii= 254 , relres= 1.8469192681949586e-09 , err= 1.9304754952853835e-09
ii= 255 , relres= 1.6144786664830887e-09 , err= 1.6629452370074132e-09
ii= 256 , relres= 1.7880818317896059e-09 , err= 1.4485925686199332e-09
ii= 257 , relres= 1.8652679588587816e-09 , err= 1.3507986865557044e-09
ii= 258 , relres= 1.5731298533028005e-09 , err= 1.2368463619742661e-09
ii= 259 , relres= 1.5589946136708756e-09 , err= 1.1320096741868095e-09
ii= 260 , relres= 1.2976070320051673e-09 , err= 1.0244193584394153e-09
ii= 261 , relres= 1.0486610468794151e-09 , err= 9.375786909626731e-10
ii= 262 , relres= 9.863417350193036e-10 , err= 8.508886403530601e-10
ii= 263 , relres= 8.874574300421997e-10 , err= 7.830182530039129e-10
ii= 264 , relres= 8.19206449663181e-10 , err= 7.070271301998163e-10
ii= 265 , relres= 8.160128632707338e-10 , err= 6.614558713641223e-10
ii= 266 , relres= 6.443635996563556e-10 , err= 5.913034192711521e-10
ii= 267 , relres= 7.239203614120389e-10 , err= 5.42148794660578e-10
ii= 268 , relres= 5.269501208888706e-10 , err= 4.964630842980294e-10
ii= 269 , relres= 7.57446926239057e-10 , err= 4.632815297082062e-10
ii= 270 , relres= 4.4636116547957954e-10 , err= 4.2809143172524396e-10
ii= 271 , relres= 4.74278417377674e-10 , err= 3.905638335402641e-10
ii= 272 , relres= 4.310850263770238e-10 , err= 3.5825019350534716e-10
ii= 273 , relres= 3.9969413663482834e-10 , err= 3.31452142253756e-10
ii= 274 , relres= 3.9091931360582666e-10 , err= 2.961062592043945e-10
ii= 275 , relres= 3.663360782880489e-10 , err= 2.783921447646374e-10
ii= 276 , relres= 2.917604344320622e-10 , err= 2.462740891587286e-10
ii= 277 , relres= 3.421591068715353e-10 , err= 2.2989609324319776e-10
ii= 278 , relres= 2.362259781190063e-10 , err= 2.0754504756457567e-10
ii= 279 , relres= 2.454294335636054e-10 , err= 1.8855354986660925e-10
ii= 280 , relres= 2.0054535256891919e-10 , err= 1.7370698431583392e-10
ii= 281 , relres= 2.0836599650183193e-10 , err= 1.573184302873143e-10
ii= 282 , relres= 1.7338076360756174e-10 , err= 1.4725923867726478e-10
ii= 283 , relres= 1.4251343199690658e-10 , err= 1.30176903517444e-10
ii= 284 , relres= 1.609488512993421e-10 , err= 1.16308844260997e-10
ii= 285 , relres= 1.4694811512811962e-10 , err= 1.0996854957519027e-10
ii= 286 , relres= 1.579107176289631e-10 , err= 1.0181986723527733e-10
ii= 287 , relres= 1.3128679265373508e-10 , err= 9.5033934650033e-11
ii= 288 , relres= 1.2078743146447057e-10 , err= 8.785010424915446e-11
ii= 289 , relres= 1.19685954731753e-10 , err= 8.018440922104579e-11
ii= 290 , relres= 9.220335922499948e-11 , err= 7.516189259963758e-11

```

Out[49]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7fa4010d5700>



In [50]:

```

print('FULL: get truth')
x_true, _, _, _ = cg_wrapper(H_linop, b, all_p_linop[-1])

all_relres = list()
all_errs = list()
for nb, p_linop in zip(all_num_batches, all_p_linop):
    print('FULL: psf'+str(nb))
    _, _, relres, errs = cg_wrapper(H_linop, b, p_linop, x_true=x_true)
    all_relres.append(relres)
    all_errs.append(errs)

print('FULL: reg')
_, _, all_relres_reg, all_err_reg = cg_wrapper(H_linop, b, ireg_linop, x_true=x_true)

print('FULL: none')
_, _, all_relres_none, all_err_none = cg_wrapper(H_linop, b, None, x_true=x_true)

plt.semilogy(all_err_none[:-1])
plt.semilogy(all_err_reg[:-1])
for errs in all_errs:
    plt.semilogy(errs[:-1])
plt.title('Error vs. Krylov iteration: Full Hessian')

```

```

plt.xlabel('Iteration k')
plt.ylabel('relative error')
plt.legend(['None', 'REG'] + ['PSF'+str(nb) for nb in all_num_batches])

plt.figure()
plt.semilogy(all_relres_none[:-1])
plt.semilogy(all_relres_reg[:-1])
for relres in all_relres:
    plt.semilogy(relres)
plt.title('Residual vs. Krylov iteration: Full Hessian')
plt.xlabel('Iteration k')
plt.ylabel('relative residual')
plt.legend(['None', 'REG'] + ['PSF'+str(nb) for nb in all_num_batches])

```

FULL: get truth:

```

ii= 0 , relres= 0.27748694259626777 , err= nan
ii= 1 , relres= 0.0986974188371117 , err= nan
ii= 2 , relres= 0.06180643286417644 , err= nan
ii= 3 , relres= 0.03447270977268124 , err= nan
ii= 4 , relres= 0.014202932749323284 , err= nan
ii= 5 , relres= 0.007730697336086705 , err= nan
ii= 6 , relres= 0.004868426151325458 , err= nan
ii= 7 , relres= 0.0027902417871429577 , err= nan
ii= 8 , relres= 0.001404540508743247 , err= nan
ii= 9 , relres= 0.0005351344245887282 , err= nan
ii= 10 , relres= 0.00022542563845710136 , err= nan
ii= 11 , relres= 8.984838418564862e-05 , err= nan
ii= 12 , relres= 3.955038219427387e-05 , err= nan
ii= 13 , relres= 1.6228488220487497e-05 , err= nan
ii= 14 , relres= 7.004956266701144e-06 , err= nan
ii= 15 , relres= 3.126974894854351e-06 , err= nan
ii= 16 , relres= 1.0416026834268995e-06 , err= nan
ii= 17 , relres= 4.2794712086817113e-07 , err= nan
ii= 18 , relres= 1.7604980302577017e-07 , err= nan
ii= 19 , relres= 8.461047672945042e-08 , err= nan
ii= 20 , relres= 4.147844237395628e-08 , err= nan
ii= 21 , relres= 1.741119990478758e-08 , err= nan
ii= 22 , relres= 6.6073492507802825e-09 , err= nan
ii= 23 , relres= 2.379928376053447e-09 , err= nan
ii= 24 , relres= 9.044015543290005e-10 , err= nan
ii= 25 , relres= 3.4343421976602576e-10 , err= nan
ii= 26 , relres= 1.553949622999789e-10 , err= nan
ii= 27 , relres= 6.738780522967071e-11 , err= nan

```

FULL: psf1

```

ii= 0 , relres= 0.3999535838106116 , err= 0.23626575663952898
ii= 1 , relres= 0.21017757758007077 , err= 0.0930070425791989
ii= 2 , relres= 0.12498859036334048 , err= 0.0635015098976465
ii= 3 , relres= 0.0792848580671784 , err= 0.03857491543659879
ii= 4 , relres= 0.050586290172216254 , err= 0.024047152717996907
ii= 5 , relres= 0.03302804176307242 , err= 0.015335456917474087
ii= 6 , relres= 0.0214330910056934 , err= 0.010296035099697873
ii= 7 , relres= 0.013866817933007236 , err= 0.006405055325175852
ii= 8 , relres= 0.009063847895575287 , err= 0.0037899791863749794
ii= 9 , relres= 0.005314370531961023 , err= 0.0021788845174505757
ii= 10 , relres= 0.003027419073203349 , err= 0.0012008626359481052
ii= 11 , relres= 0.001743950756538055 , err= 0.0006690629535215223
ii= 12 , relres= 0.0010601682886390562 , err= 0.00040239182702085706
ii= 13 , relres= 0.0006173199074257501 , err= 0.00021585268529761636
ii= 14 , relres= 0.00036247650443932736 , err= 0.00013178457509147406
ii= 15 , relres= 0.00022882077595757613 , err= 6.862735881149238e-05
ii= 16 , relres= 0.00013999071514506997 , err= 4.469551206284488e-05

```

```

ii= 17 , relres= 8.673815663361292e-05 , err= 2.6137793203960526e-05
ii= 18 , relres= 5.2430007198411244e-05 , err= 1.6523925168796087e-05
ii= 19 , relres= 2.980324156526243e-05 , err= 9.218963963936541e-06
ii= 20 , relres= 1.7343119477161566e-05 , err= 5.201386662691697e-06
ii= 21 , relres= 9.383163152431584e-06 , err= 3.182711937692387e-06
ii= 22 , relres= 5.45306197743029e-06 , err= 1.7736110887518659e-06
ii= 23 , relres= 3.3553018521599527e-06 , err= 1.0673002085847721e-06
ii= 24 , relres= 1.8818500823600863e-06 , err= 6.531627317867516e-07
ii= 25 , relres= 1.1581231544575485e-06 , err= 3.659162586663584e-07
ii= 26 , relres= 6.935748413826325e-07 , err= 2.2661075857688006e-07
ii= 27 , relres= 4.0931696688300053e-07 , err= 1.3008842617357783e-07
ii= 28 , relres= 2.4135205989194065e-07 , err= 7.225278028321837e-08
ii= 29 , relres= 1.3886965152202847e-07 , err= 4.620322768798428e-08
ii= 30 , relres= 8.231983632664736e-08 , err= 2.617329719153058e-08
ii= 31 , relres= 4.97792453845217e-08 , err= 1.663911415852799e-08
ii= 32 , relres= 2.6579866882473902e-08 , err= 8.868734409581322e-09
ii= 33 , relres= 1.5493988231056138e-08 , err= 4.934816321059721e-09
ii= 34 , relres= 8.561454337775698e-09 , err= 2.9056868797304974e-09
ii= 35 , relres= 5.125656148548571e-09 , err= 1.6556301578352527e-09
ii= 36 , relres= 3.2966329208625767e-09 , err= 1.0489947849912946e-09
ii= 37 , relres= 2.064391601566132e-09 , err= 6.762554301092324e-10
ii= 38 , relres= 1.1411153079500567e-09 , err= 4.2616729117192805e-10
ii= 39 , relres= 6.242238878788426e-10 , err= 2.1266389448773622e-10
ii= 40 , relres= 3.646009667616847e-10 , err= 1.2870062834571717e-10
ii= 41 , relres= 2.1749980292602223e-10 , err= 7.26554336598832e-11
ii= 42 , relres= 1.2356294471636912e-10 , err= 4.9270434600518326e-11
ii= 43 , relres= 6.860404409318989e-11 , err= 2.9607809722992526e-11
FULL: psf5
ii= 0 , relres= 0.34320587761205323 , err= 0.22303078337409935
ii= 1 , relres= 0.15843357903161046 , err= 0.06752847064457354
ii= 2 , relres= 0.10217007688419803 , err= 0.030074760173255
ii= 3 , relres= 0.0607273532244482 , err= 0.021044840145891357
ii= 4 , relres= 0.032057038572678075 , err= 0.010145178700826298
ii= 5 , relres= 0.01832412909219101 , err= 0.006087596422933305
ii= 6 , relres= 0.009492767090541804 , err= 0.003482279195510166
ii= 7 , relres= 0.005587653916042973 , err= 0.0017093391208853265
ii= 8 , relres= 0.003194334383834932 , err= 0.0009367764614493354
ii= 9 , relres= 0.0017366625070164773 , err= 0.0005531890680253444
ii= 10 , relres= 0.0010294773143152552 , err= 0.00031809921680106204
ii= 11 , relres= 0.0006414297102938292 , err= 0.0001833213584033677
ii= 12 , relres= 0.0003666332279641409 , err= 0.00011610502670419371
ii= 13 , relres= 0.0001935168772213098 , err= 6.355675440216602e-05
ii= 14 , relres= 0.00010286942483117635 , err= 3.465238799776834e-05
ii= 15 , relres= 5.284962953285595e-05 , err= 1.7955977437525534e-05
ii= 16 , relres= 2.8525534796806116e-05 , err= 9.226401010806107e-06
ii= 17 , relres= 1.5942901250851005e-05 , err= 4.71205970577897e-06
ii= 18 , relres= 7.84997448975411e-06 , err= 2.9167699583200262e-06
ii= 19 , relres= 3.941589702975058e-06 , err= 1.4248616095445194e-06
ii= 20 , relres= 2.077647591016539e-06 , err= 6.418102695801272e-07
ii= 21 , relres= 1.1610434611769075e-06 , err= 3.5757856886976757e-07
ii= 22 , relres= 5.946474209057757e-07 , err= 1.835153378181468e-07
ii= 23 , relres= 2.749629125701555e-07 , err= 9.341403191208598e-08
ii= 24 , relres= 1.2539642893770236e-07 , err= 4.0360302422435834e-08
ii= 25 , relres= 5.7874514958175056e-08 , err= 2.1176043137520316e-08
ii= 26 , relres= 3.0823849564475104e-08 , err= 9.870121285118317e-09
ii= 27 , relres= 1.600448693826309e-08 , err= 5.057302058764169e-09
ii= 28 , relres= 8.862013964661792e-09 , err= 2.8052678190600093e-09
ii= 29 , relres= 4.612046155689448e-09 , err= 1.3717557560582387e-09
ii= 30 , relres= 3.043963984241689e-09 , err= 8.006883663151327e-10
ii= 31 , relres= 1.8004179449330456e-09 , err= 4.864613487310114e-10
ii= 32 , relres= 9.104406292121015e-10 , err= 2.5596209818466137e-10

```

```

ii= 33 , relres= 4.85304356730978e-10 , err= 1.4268130510225828e-10
ii= 34 , relres= 2.73382389979319e-10 , err= 7.965454868457023e-11
ii= 35 , relres= 1.5588495108807667e-10 , err= 4.8549889511738165e-11
ii= 36 , relres= 8.459731682433198e-11 , err= 3.220426891602243e-11
FULL: psf25
ii= 0 , relres= 0.27748694259626777 , err= 0.217283180749779
ii= 1 , relres= 0.0986974188371117 , err= 0.06151449197988498
ii= 2 , relres= 0.06180643286417644 , err= 0.032496192318973514
ii= 3 , relres= 0.03447270977268124 , err= 0.021184741965902937
ii= 4 , relres= 0.014202932749323284 , err= 0.01372026433732308
ii= 5 , relres= 0.007730697336086705 , err= 0.007584489729927777
ii= 6 , relres= 0.004868426151325458 , err= 0.0030017817495004363
ii= 7 , relres= 0.0027902417871429577 , err= 0.0010810936060751046
ii= 8 , relres= 0.001404540508743247 , err= 0.0004878846195062166
ii= 9 , relres= 0.0005351344245887282 , err= 0.00020083522409125807
ii= 10 , relres= 0.00022542563845710136 , err= 8.558560156403914e-05
ii= 11 , relres= 8.984838418564862e-05 , err= 3.455678249793922e-05
ii= 12 , relres= 3.955038219427387e-05 , err= 1.440025453079468e-05
ii= 13 , relres= 1.6228488220487497e-05 , err= 6.210867215304832e-06
ii= 14 , relres= 7.004956266701144e-06 , err= 2.379290613238591e-06
ii= 15 , relres= 3.126974894854351e-06 , err= 9.307672176431533e-07
ii= 16 , relres= 1.041602683426895e-06 , err= 4.041603816342283e-07
ii= 17 , relres= 4.2794712086817113e-07 , err= 1.6092779816522932e-07
ii= 18 , relres= 1.7604980302577017e-07 , err= 6.451838478858786e-08
ii= 19 , relres= 8.461047672945042e-08 , err= 2.86382291501006e-08
ii= 20 , relres= 4.147844237395628e-08 , err= 1.2366506140732088e-08
ii= 21 , relres= 1.741119990478758e-08 , err= 5.4310456819979985e-09
ii= 22 , relres= 6.6073492507802825e-09 , err= 2.44619439195804e-09
ii= 23 , relres= 2.379928376053447e-09 , err= 1.004430783589502e-09
ii= 24 , relres= 9.044015543290005e-10 , err= 3.694672724035349e-10
ii= 25 , relres= 3.4343421976602576e-10 , err= 1.3861381691359339e-10
ii= 26 , relres= 1.553949622999789e-10 , err= 5.300756535852121e-11
ii= 27 , relres= 6.738780522967071e-11 , err= 0.0
FULL: reg
ii= 0 , relres= 1.0597265881590914 , err= 0.9979666609945363
ii= 1 , relres= 1.092608244922056 , err= 0.9925971457437103
ii= 2 , relres= 1.0926325580380152 , err= 0.9854805023158194
ii= 3 , relres= 1.1233970391000407 , err= 0.9761929688578079
ii= 4 , relres= 1.132320282513923 , err= 0.9643683782249776
ii= 5 , relres= 1.1307456908832139 , err= 0.952445436502996
ii= 6 , relres= 1.168503580276918 , err= 0.9411470659465903
ii= 7 , relres= 1.1933765770675104 , err= 0.9254849458223839
ii= 8 , relres= 1.1115577974678919 , err= 0.909157644220176
ii= 9 , relres= 1.1465644815781553 , err= 0.887591200336221
ii= 10 , relres= 1.1593457453958618 , err= 0.8648886969664084
ii= 11 , relres= 1.205835678482463 , err= 0.8503299298852528
ii= 12 , relres= 1.1512864849949203 , err= 0.8252015183334704
ii= 13 , relres= 1.1985290917510683 , err= 0.7914431693748651
ii= 14 , relres= 1.1598109805610337 , err= 0.7644363267839003
ii= 15 , relres= 1.1199588515223111 , err= 0.7398007958792563
ii= 16 , relres= 1.1936175980683588 , err= 0.7111409574189808
ii= 17 , relres= 1.1616639778178663 , err= 0.6814711629678306
ii= 18 , relres= 1.1427650057204601 , err= 0.6530006363615231
ii= 19 , relres= 1.1093995682637547 , err= 0.6284288325686284
ii= 20 , relres= 1.113840748272126 , err= 0.5930221773187481
ii= 21 , relres= 1.0466443727747003 , err= 0.566934210713934
ii= 22 , relres= 1.0221974065282493 , err= 0.5462312021391743
ii= 23 , relres= 0.9758648676134216 , err= 0.5204587820147117
ii= 24 , relres= 1.0045160901966903 , err= 0.5088763416279015
ii= 25 , relres= 0.9437339954187943 , err= 0.49315808384054066
ii= 26 , relres= 0.9299756418137157 , err= 0.47365946955989496

```

```
ii= 27 , relres= 0.9127142729266845 , err= 0.4516197729339471
ii= 28 , relres= 0.8935266593239363 , err= 0.4341165015897984
ii= 29 , relres= 0.8888564006562101 , err= 0.42579721922664837
ii= 30 , relres= 0.8161957065243397 , err= 0.4101910650002226
ii= 31 , relres= 0.8037117024211332 , err= 0.3974182822031536
ii= 32 , relres= 0.7829008739629233 , err= 0.3900997045677127
ii= 33 , relres= 0.7941173877460886 , err= 0.37267104444872273
ii= 34 , relres= 0.797828419361616 , err= 0.36385177374180994
ii= 35 , relres= 0.7783402540036346 , err= 0.35341373998640563
ii= 36 , relres= 0.7084516702824718 , err= 0.3384734007826152
ii= 37 , relres= 0.6796891010766472 , err= 0.32815583543663074
ii= 38 , relres= 0.654583308906947 , err= 0.31821240352236885
ii= 39 , relres= 0.6415521646217264 , err= 0.30537115711920926
ii= 40 , relres= 0.6287954032159776 , err= 0.29351834861254544
ii= 41 , relres= 0.6376411691291715 , err= 0.28671834749717223
ii= 42 , relres= 0.6206709828412189 , err= 0.2763376660565562
ii= 43 , relres= 0.5888219977521142 , err= 0.26559377486354585
ii= 44 , relres= 0.6259324809693732 , err= 0.25842022258180364
ii= 45 , relres= 0.5307652582941484 , err= 0.2503404464544838
ii= 46 , relres= 0.5380464765699189 , err= 0.24014058235833097
ii= 47 , relres= 0.5102381622157054 , err= 0.22642201067040887
ii= 48 , relres= 0.5226705336826557 , err= 0.21550985808394513
ii= 49 , relres= 0.5318124058477016 , err= 0.20749210162113252
ii= 50 , relres= 0.46869727165927055 , err= 0.20137976009608846
ii= 51 , relres= 0.48847475480989255 , err= 0.19614958072390562
ii= 52 , relres= 0.4315726224010694 , err= 0.18805588849997362
ii= 53 , relres= 0.42668640178404244 , err= 0.1816010269904047
ii= 54 , relres= 0.3988774449509586 , err= 0.1782326747482478
ii= 55 , relres= 0.40172887761358944 , err= 0.17175114131152236
ii= 56 , relres= 0.38529836943984525 , err= 0.16925992823427957
ii= 57 , relres= 0.3799659171632556 , err= 0.16318747203607467
ii= 58 , relres= 0.37079032576558846 , err= 0.15892212228661215
ii= 59 , relres= 0.3367080086561686 , err= 0.15123631782655073
ii= 60 , relres= 0.3271075892659773 , err= 0.14303511616962244
ii= 61 , relres= 0.32953897455731107 , err= 0.13721594300938386
ii= 62 , relres= 0.31207276836177406 , err= 0.1336165626825639
ii= 63 , relres= 0.3188297650268178 , err= 0.13132376534023696
ii= 64 , relres= 0.2968812784410063 , err= 0.12518340605267939
ii= 65 , relres= 0.2861670214807753 , err= 0.11907229566076084
ii= 66 , relres= 0.27405268791863946 , err= 0.11617914526804184
ii= 67 , relres= 0.2581237691984413 , err= 0.11079939443786321
ii= 68 , relres= 0.24587029679555894 , err= 0.10527091124105553
ii= 69 , relres= 0.2450762055263478 , err= 0.10307366466896223
ii= 70 , relres= 0.23566020664353665 , err= 0.09909723956319692
ii= 71 , relres= 0.22737763643358852 , err= 0.09775663714132937
ii= 72 , relres= 0.22041962647189492 , err= 0.094467396970666
ii= 73 , relres= 0.20765530930343665 , err= 0.0917476448004496
ii= 74 , relres= 0.20449833006176155 , err= 0.08750949368770576
ii= 75 , relres= 0.2045479647103175 , err= 0.08441440420389586
ii= 76 , relres= 0.19559042727895193 , err= 0.08267677733005914
ii= 77 , relres= 0.19100675079592377 , err= 0.08088145910449669
ii= 78 , relres= 0.19628543074568866 , err= 0.07767653716748074
ii= 79 , relres= 0.18031629548916858 , err= 0.07575724217195055
ii= 80 , relres= 0.16955861870355907 , err= 0.07077142192803552
ii= 81 , relres= 0.17366958377323818 , err= 0.06846237864199493
ii= 82 , relres= 0.16369050836662644 , err= 0.06499900204550367
ii= 83 , relres= 0.16718404748430665 , err= 0.06279829199731989
ii= 84 , relres= 0.15867886591148292 , err= 0.061257410429334955
ii= 85 , relres= 0.1556885264301897 , err= 0.05927871530609909
ii= 86 , relres= 0.1425053818774437 , err= 0.056505044277601085
ii= 87 , relres= 0.14067460400405116 , err= 0.05536461944453799
```

```
ii= 88 , relres= 0.13488692901922086 , err= 0.05273432898293071
ii= 89 , relres= 0.13313907938072297 , err= 0.04940186635296552
ii= 90 , relres= 0.12901972302647852 , err= 0.047758676460224574
ii= 91 , relres= 0.1319174576402209 , err= 0.046132991454730515
ii= 92 , relres= 0.12112728596685071 , err= 0.04475249061964559
ii= 93 , relres= 0.11887776171120362 , err= 0.04261719918074686
ii= 94 , relres= 0.10589289246708627 , err= 0.04101055568810287
ii= 95 , relres= 0.10318552462681489 , err= 0.03837659225837003
ii= 96 , relres= 0.10711205564439727 , err= 0.03752030012495333
ii= 97 , relres= 0.10202159460014257 , err= 0.03616669056367699
ii= 98 , relres= 0.09872210440383113 , err= 0.035139111849355684
ii= 99 , relres= 0.09596471031257903 , err= 0.034202606183364334
ii= 100 , relres= 0.09466048199896518 , err= 0.03275326045578704
ii= 101 , relres= 0.08449538132865746 , err= 0.031992020658512456
ii= 102 , relres= 0.08867250685878048 , err= 0.031272724080105646
ii= 103 , relres= 0.08267739630904156 , err= 0.029899685263204606
ii= 104 , relres= 0.08026222743403495 , err= 0.02949435125213853
ii= 105 , relres= 0.07777114058609863 , err= 0.028637949771421322
ii= 106 , relres= 0.07024492198358612 , err= 0.027496958786346292
ii= 107 , relres= 0.06725288797544363 , err= 0.02596969380937645
ii= 108 , relres= 0.06883953796689865 , err= 0.024650047109608584
ii= 109 , relres= 0.06452776248075537 , err= 0.02375653511356545
ii= 110 , relres= 0.0634760358294229 , err= 0.023025445174827536
ii= 111 , relres= 0.05895497913413928 , err= 0.02216273812717053
ii= 112 , relres= 0.05584339962592005 , err= 0.021925672665292772
ii= 113 , relres= 0.05655947418767235 , err= 0.02092991514094785
ii= 114 , relres= 0.05360009862810934 , err= 0.020319658718819935
ii= 115 , relres= 0.053552169640502224 , err= 0.019688493313838026
ii= 116 , relres= 0.04799974691484383 , err= 0.01856820809091405
ii= 117 , relres= 0.05179845076354959 , err= 0.017982298854793532
ii= 118 , relres= 0.04694363961367923 , err= 0.01742703354342236
ii= 119 , relres= 0.04591633751023228 , err= 0.017219653036263258
ii= 120 , relres= 0.042047719965575645 , err= 0.016306237264358328
ii= 121 , relres= 0.0445186236138439 , err= 0.016127799577921556
ii= 122 , relres= 0.04270728023399345 , err= 0.015143081381655087
ii= 123 , relres= 0.04021938118852225 , err= 0.014851888095102848
ii= 124 , relres= 0.03979910857834069 , err= 0.014551150188437273
ii= 125 , relres= 0.03909627821252636 , err= 0.014062246373709295
ii= 126 , relres= 0.03698939736468008 , err= 0.013599947602837224
ii= 127 , relres= 0.034038577511963035 , err= 0.012623720763793474
ii= 128 , relres= 0.03498206400371976 , err= 0.012207593069822388
ii= 129 , relres= 0.034030379144178904 , err= 0.011806176454557319
ii= 130 , relres= 0.031565652089982146 , err= 0.011409876526162708
ii= 131 , relres= 0.031687157452353676 , err= 0.011181843774019758
ii= 132 , relres= 0.03307009779320815 , err= 0.010888549760895854
ii= 133 , relres= 0.028703229807666212 , err= 0.010396863956736536
ii= 134 , relres= 0.029359940170343858 , err= 0.009748587323767271
ii= 135 , relres= 0.027873405493359944 , err= 0.009464321002722334
ii= 136 , relres= 0.027266433446920795 , err= 0.009032481294981612
ii= 137 , relres= 0.024513591030878586 , err= 0.008570162337443704
ii= 138 , relres= 0.025730032505399094 , err= 0.008429679643114802
ii= 139 , relres= 0.02658517581648909 , err= 0.008118489651463138
ii= 140 , relres= 0.02403358551967125 , err= 0.007743465145316437
ii= 141 , relres= 0.023054563329080978 , err= 0.007644470434929263
ii= 142 , relres= 0.02213567270136496 , err= 0.007202130078230062
ii= 143 , relres= 0.021572628100498058 , err= 0.007033719383363631
ii= 144 , relres= 0.020870345531516853 , err= 0.006755137886336648
ii= 145 , relres= 0.019072961079140784 , err= 0.006460382895774743
ii= 146 , relres= 0.017992462958198764 , err= 0.006381643418234951
ii= 147 , relres= 0.01628104373153985 , err= 0.0060473597328129505
ii= 148 , relres= 0.0170982472962834 , err= 0.005889976353098727
```

```

ii= 149 , relres= 0.015807369911419077 , err= 0.005721713595836119
ii= 150 , relres= 0.015120109533651534 , err= 0.0055396247810242565
ii= 151 , relres= 0.015840393819433456 , err= 0.005464687887344595
ii= 152 , relres= 0.015619547119158934 , err= 0.005296806170812875
ii= 153 , relres= 0.014353921940649866 , err= 0.005089737566051663
ii= 154 , relres= 0.014106688372927813 , err= 0.004825535038227426
ii= 155 , relres= 0.01283329700100799 , err= 0.004724686078673366
ii= 156 , relres= 0.01296486063055679 , err= 0.004569381499027752
ii= 157 , relres= 0.012837351106433753 , err= 0.004401001934293445
ii= 158 , relres= 0.01197636845538418 , err= 0.004317823463627614
ii= 159 , relres= 0.011982608452109194 , err= 0.004248954646641686
ii= 160 , relres= 0.0114910092479307 , err= 0.004153830172041431
ii= 161 , relres= 0.010145616496736553 , err= 0.003961912975397466
ii= 162 , relres= 0.010845458390501198 , err= 0.003902138287580791
ii= 163 , relres= 0.010947199623414193 , err= 0.0037721556098811236
ii= 164 , relres= 0.01006075866455713 , err= 0.003650804667423564
ii= 165 , relres= 0.00980285535776884 , err= 0.0035339391235167765
ii= 166 , relres= 0.00970191325644097 , err= 0.003333650788953326
ii= 167 , relres= 0.00921560047575392 , err= 0.0032298002098506205
ii= 168 , relres= 0.009543618569587435 , err= 0.0030658544361054207
ii= 169 , relres= 0.00839409256184575 , err= 0.0029972810663884226
ii= 170 , relres= 0.008281658208310373 , err= 0.0028512098240141893
ii= 171 , relres= 0.00852299585746949 , err= 0.0027779004454541647
ii= 172 , relres= 0.0077445432655304 , err= 0.002707092722980025
ii= 173 , relres= 0.007713738468712661 , err= 0.0026068370670149265
ii= 174 , relres= 0.007291717023696645 , err= 0.002472624260235771
ii= 175 , relres= 0.007021452387054226 , err= 0.002417766341008952
ii= 176 , relres= 0.006658042901574298 , err= 0.0022842246488819625
ii= 177 , relres= 0.006621248618724886 , err= 0.002257799283727119
ii= 178 , relres= 0.00633719150909447 , err= 0.002187216599049541
ii= 179 , relres= 0.006196880682941512 , err= 0.002095433961022282
ii= 180 , relres= 0.005924960697087428 , err= 0.0020186370700573278
ii= 181 , relres= 0.005672518242577783 , err= 0.0019822180854538137
ii= 182 , relres= 0.005800207704831484 , err= 0.0018797951849670992
ii= 183 , relres= 0.00531407906800498 , err= 0.0018505096201106316
ii= 184 , relres= 0.005657821653708812 , err= 0.0017775544084488184
ii= 185 , relres= 0.005261168376908489 , err= 0.0017346640788855928
ii= 186 , relres= 0.004939743589182476 , err= 0.0016508504181996695
ii= 187 , relres= 0.004691575057418034 , err= 0.0016169252322051995
ii= 188 , relres= 0.0042860101320681965 , err= 0.0015119870088288875
ii= 189 , relres= 0.004285634625768121 , err= 0.0014922797469603794
ii= 190 , relres= 0.004881329462396882 , err= 0.0014427147235856576
ii= 191 , relres= 0.004272365908569687 , err= 0.0013915093593095322
ii= 192 , relres= 0.003994240138870874 , err= 0.0013604052512981417
ii= 193 , relres= 0.003894977965945482 , err= 0.0013344480206806527
ii= 194 , relres= 0.0037658409796549673 , err= 0.0013073758281612914
ii= 195 , relres= 0.0037313240931631333 , err= 0.0012367874073820144
ii= 196 , relres= 0.003646164280062837 , err= 0.0012025492978841139
ii= 197 , relres= 0.003745722721370366 , err= 0.001178900539709254
ii= 198 , relres= 0.003499575478068908 , err= 0.0011342766551074865
ii= 199 , relres= 0.0032977951906543916 , err= 0.0010998573715062705
ii= 200 , relres= 0.003283669949354875 , err= 0.001060879533337264
ii= 201 , relres= 0.003116028435986221 , err= 0.001030296660315979
ii= 202 , relres= 0.002880908633130554 , err= 0.0009933751352197082
ii= 203 , relres= 0.0026723931381931127 , err= 0.0009210940712333093
ii= 204 , relres= 0.0028518507750809703 , err= 0.000897654217220057
ii= 205 , relres= 0.002621015509877488 , err= 0.0008742017685070327
ii= 206 , relres= 0.0026072975194413274 , err= 0.0008457838509337402
ii= 207 , relres= 0.002297796537654605 , err= 0.0008201999829889836
ii= 208 , relres= 0.0022760895735292027 , err= 0.0007694795695328339
ii= 209 , relres= 0.002177641097614633 , err= 0.0007538142487338287

```

```
ii= 210 , relres= 0.002148967793454039 , err= 0.0007431148186483241
ii= 211 , relres= 0.0021234629948332214 , err= 0.0007274139967917697
ii= 212 , relres= 0.002149916761192791 , err= 0.0007037950320340851
ii= 213 , relres= 0.0020685130353739253 , err= 0.0006726885338752327
ii= 214 , relres= 0.00195156354553358 , err= 0.0006498421630333244
ii= 215 , relres= 0.0018982500875760326 , err= 0.0006401015704604199
ii= 216 , relres= 0.0018462103519520305 , err= 0.0006075152791225467
ii= 217 , relres= 0.00184114837012127 , err= 0.0005974809472456843
ii= 218 , relres= 0.001810559210948259 , err= 0.0005813471857015253
ii= 219 , relres= 0.0016632015901391173 , err= 0.0005661248883753555
ii= 220 , relres= 0.0014995050025180569 , err= 0.0005251700911966831
ii= 221 , relres= 0.0015822691405689405 , err= 0.0005021904479540799
ii= 222 , relres= 0.0014113488108027977 , err= 0.00047125174967568444
ii= 223 , relres= 0.0013840634731169868 , err= 0.0004573247356784772
ii= 224 , relres= 0.0013266590582461022 , err= 0.0004290043063806333
ii= 225 , relres= 0.0013341367988014636 , err= 0.000417763256975947
ii= 226 , relres= 0.0013503214942060724 , err= 0.00040380153803144407
ii= 227 , relres= 0.0013068275194146942 , err= 0.00039449922217173346
ii= 228 , relres= 0.0010783321058157093 , err= 0.0003622256123732662
ii= 229 , relres= 0.0010948389546185005 , err= 0.0003560505514191075
ii= 230 , relres= 0.0010967404851486239 , err= 0.00035024931430557523
ii= 231 , relres= 0.0010324968430838934 , err= 0.0003315294855873838
ii= 232 , relres= 0.0009712093720408861 , err= 0.0003237549463342726
ii= 233 , relres= 0.0009590910196634134 , err= 0.0003166108362007229
ii= 234 , relres= 0.0009710098208494299 , err= 0.00030074664248041675
ii= 235 , relres= 0.0009051194351395389 , err= 0.0002960613538458629
ii= 236 , relres= 0.0009174379401470397 , err= 0.0002881294762709681
ii= 237 , relres= 0.0008400820111300946 , err= 0.00028240406164010626
ii= 238 , relres= 0.0008476979637567567 , err= 0.00026622971770247535
ii= 239 , relres= 0.0007680940252667557 , err= 0.0002614861588700921
ii= 240 , relres= 0.0008192359964129941 , err= 0.00025509066295107324
ii= 241 , relres= 0.0007581725396600222 , err= 0.00024062483617531328
ii= 242 , relres= 0.0007243450390478594 , err= 0.00023146712852372607
ii= 243 , relres= 0.0006931677784011005 , err= 0.0002263009034848702
ii= 244 , relres= 0.0006969051319055064 , err= 0.00021899925890978724
ii= 245 , relres= 0.0006420811046389391 , err= 0.0002074042331735196
ii= 246 , relres= 0.0005999582887319005 , err= 0.0002024015152431793
ii= 247 , relres= 0.0006346340830784129 , err= 0.00019534083969235404
ii= 248 , relres= 0.0006327598037746177 , err= 0.00018868196422748993
ii= 249 , relres= 0.0005455849793876707 , err= 0.00018376969911363644
ii= 250 , relres= 0.0005484233920897775 , err= 0.00018086119478492255
ii= 251 , relres= 0.0005412180100916316 , err= 0.00016906015518855928
ii= 252 , relres= 0.0004977367231217517 , err= 0.00016648133406777695
ii= 253 , relres= 0.0005146172062513713 , err= 0.00016157402314563696
ii= 254 , relres= 0.0004839467673834003 , err= 0.00015440437061900274
ii= 255 , relres= 0.00047929042352089305 , err= 0.00015023190099142838
ii= 256 , relres= 0.0004515010910062983 , err= 0.00014755033039742517
ii= 257 , relres= 0.0004284149319085245 , err= 0.00014391419503649485
ii= 258 , relres= 0.0004414287049020886 , err= 0.00013483411072667066
ii= 259 , relres= 0.000396904440239583 , err= 0.00012956353211872898
ii= 260 , relres= 0.0004215776689304125 , err= 0.00012486593579376845
ii= 261 , relres= 0.0003918558637327862 , err= 0.00012106290558353482
ii= 262 , relres= 0.0003572502783368752 , err= 0.00011489485915872371
ii= 263 , relres= 0.00034159601333055205 , err= 0.00010968674238848948
ii= 264 , relres= 0.00031368753700199473 , err= 0.00010347550918273854
ii= 265 , relres= 0.00030240835486199276 , err= 0.00010227260014314976
ii= 266 , relres= 0.00032265585385466116 , err= 9.738416456604403e-05
ii= 267 , relres= 0.00029573350126201585 , err= 9.343874746381851e-05
ii= 268 , relres= 0.00030342183844791207 , err= 9.156970767700034e-05
ii= 269 , relres= 0.00028628163452978895 , err= 8.956903045786753e-05
ii= 270 , relres= 0.00026434618032165257 , err= 8.424000772589091e-05
```

```

ii= 271 , relres= 0.0002537538280925341 , err= 8.098400815318861e-05
ii= 272 , relres= 0.00024117223051751537 , err= 8.025704303249383e-05
ii= 273 , relres= 0.000255424592065365 , err= 7.737992407294903e-05
ii= 274 , relres= 0.00026077993688185925 , err= 7.533072220149769e-05
ii= 275 , relres= 0.00021423206135028606 , err= 7.239872215072428e-05
ii= 276 , relres= 0.00021695702145547644 , err= 7.129911857965843e-05
ii= 277 , relres= 0.0002224175697627211 , err= 6.787850644604111e-05
ii= 278 , relres= 0.00021176797586543107 , err= 6.460796685871296e-05
ii= 279 , relres= 0.00019338959282468892 , err= 6.299958747012299e-05
ii= 280 , relres= 0.000181905177905158 , err= 6.060604146538787e-05
ii= 281 , relres= 0.00019113270429445929 , err= 5.924065308171085e-05
ii= 282 , relres= 0.00016752662401694942 , err= 5.6441772873762125e-05
ii= 283 , relres= 0.0001590898682123725 , err= 5.575650959893676e-05
ii= 284 , relres= 0.00016351821005041714 , err= 5.3010600767485986e-05
ii= 285 , relres= 0.0001575761599382883 , err= 5.121608532443233e-05
ii= 286 , relres= 0.00014722567693541984 , err= 4.9912414519464244e-05
ii= 287 , relres= 0.00016129064625169278 , err= 4.796945703886733e-05
ii= 288 , relres= 0.00016228546510499352 , err= 4.622709826282444e-05
ii= 289 , relres= 0.0001290618266341116 , err= 4.4148492569160134e-05
ii= 290 , relres= 0.00013234510514893879 , err= 4.125568596140599e-05
ii= 291 , relres= 0.00012783801192363132 , err= 4.0257177462121323e-05
ii= 292 , relres= 0.0001262241838020085 , err= 3.94793987671246e-05
ii= 293 , relres= 0.00012116398169685231 , err= 3.821376626064646e-05
ii= 294 , relres= 0.0001174017479982394 , err= 3.735073480007857e-05
ii= 295 , relres= 0.00011338416550715033 , err= 3.639388690590033e-05
ii= 296 , relres= 0.00011842516217025954 , err= 3.4844304156882115e-05
ii= 297 , relres= 0.00010120658352813124 , err= 3.405016002751341e-05
ii= 298 , relres= 9.986005034176699e-05 , err= 3.359557452102291e-05
ii= 299 , relres= 9.762696277441429e-05 , err= 3.1143525377530444e-05
ii= 300 , relres= 9.411896695367292e-05 , err= 3.046954657769871e-05
ii= 301 , relres= 9.101191756640076e-05 , err= 2.8686029435473996e-05
ii= 302 , relres= 8.243293144492603e-05 , err= 2.7363577482482347e-05
ii= 303 , relres= 7.857252334366302e-05 , err= 2.685581911801105e-05
ii= 304 , relres= 7.714390431121066e-05 , err= 2.604961879844057e-05
ii= 305 , relres= 8.666226653723337e-05 , err= 2.509519443335533e-05
ii= 306 , relres= 7.0960690639593e-05 , err= 2.3914638031128322e-05
ii= 307 , relres= 7.25100429514069e-05 , err= 2.363525175149629e-05
ii= 308 , relres= 7.131717166678659e-05 , err= 2.31478275077276e-05
ii= 309 , relres= 6.853024524900356e-05 , err= 2.228389719686496e-05
ii= 310 , relres= 6.823166066340635e-05 , err= 2.1235513748900225e-05
ii= 311 , relres= 6.326635730742457e-05 , err= 2.0935658461772217e-05
ii= 312 , relres= 6.0068978177604855e-05 , err= 2.025418154540594e-05
ii= 313 , relres= 6.036235320114936e-05 , err= 1.9530389783798097e-05
ii= 314 , relres= 5.6199659427878535e-05 , err= 1.8389492628606202e-05
ii= 315 , relres= 5.473669852731792e-05 , err= 1.8138859283718122e-05
ii= 316 , relres= 5.578581205825899e-05 , err= 1.7838571709128912e-05
ii= 317 , relres= 5.603988219321679e-05 , err= 1.7371680845896605e-05
ii= 318 , relres= 5.2741723910568875e-05 , err= 1.651247029997252e-05
ii= 319 , relres= 5.0763877999990917e-05 , err= 1.6055494675791213e-05
ii= 320 , relres= 4.4953866023361836e-05 , err= 1.5604069640058994e-05
ii= 321 , relres= 4.496451598566059e-05 , err= 1.5231818814800218e-05
ii= 322 , relres= 4.3813447806230806e-05 , err= 1.4835675501164522e-05
ii= 323 , relres= 4.167731154888845e-05 , err= 1.4050676906706095e-05
ii= 324 , relres= 3.910653098190174e-05 , err= 1.3712415942508323e-05
ii= 325 , relres= 4.10794362034276e-05 , err= 1.3267111777487569e-05
ii= 326 , relres= 4.097242916089089e-05 , err= 1.280891434789573e-05
ii= 327 , relres= 3.753076506930546e-05 , err= 1.2533822087592599e-05
ii= 328 , relres= 3.657196526383762e-05 , err= 1.215368324980816e-05
ii= 329 , relres= 3.578373494801608e-05 , err= 1.189391364083183e-05
ii= 330 , relres= 3.5238886443203106e-05 , err= 1.1672444938130018e-05
ii= 331 , relres= 3.440498891019327e-05 , err= 1.138909531066507e-05

```

```

ii= 332 , relres= 3.085557876013385e-05 , err= 1.072572528208731e-05
ii= 333 , relres= 3.091156923122684e-05 , err= 1.0414279989212036e-05
ii= 334 , relres= 2.9357378315484046e-05 , err= 1.0276974238046447e-05
ii= 335 , relres= 2.9729223430324968e-05 , err= 9.798373541418502e-06
ii= 336 , relres= 2.667431850117381e-05 , err= 9.583845734583724e-06
ii= 337 , relres= 2.814653269761386e-05 , err= 8.972496754577573e-06
ii= 338 , relres= 2.710914918313567e-05 , err= 8.55529676829073e-06
ii= 339 , relres= 2.4555362459333853e-05 , err= 8.32966190057969e-06
ii= 340 , relres= 2.4380102076403496e-05 , err= 8.215557731674778e-06
ii= 341 , relres= 2.258254105764781e-05 , err= 7.931840678452117e-06
ii= 342 , relres= 2.0915462076246693e-05 , err= 7.397465350104687e-06
ii= 343 , relres= 2.133465759565981e-05 , err= 7.268747732999817e-06
ii= 344 , relres= 2.1120985220461814e-05 , err= 7.086921665940558e-06
ii= 345 , relres= 2.225313992432559e-05 , err= 6.805992577145096e-06
ii= 346 , relres= 1.9864312166964873e-05 , err= 6.641194315023322e-06
ii= 347 , relres= 1.8111137652287884e-05 , err= 6.518778312582919e-06
ii= 348 , relres= 1.857741309267344e-05 , err= 6.365291436410691e-06
ii= 349 , relres= 1.8164207281862848e-05 , err= 6.26766422338602e-06
ii= 350 , relres= 1.725147260160113e-05 , err= 5.9796641598424655e-06
ii= 351 , relres= 1.6122731314203394e-05 , err= 5.6675673811410665e-06
ii= 352 , relres= 1.601198628205065e-05 , err= 5.537466091074507e-06
ii= 353 , relres= 1.7274571278590583e-05 , err= 5.333009094291199e-06
ii= 354 , relres= 1.569274896237774e-05 , err= 5.082373214601123e-06
ii= 355 , relres= 1.5028034155785182e-05 , err= 4.7396180177756255e-06
ii= 356 , relres= 1.4315713362381577e-05 , err= 4.6310054481500625e-06
ii= 357 , relres= 1.4484870455119942e-05 , err= 4.549483943554744e-06
ii= 358 , relres= 1.4122951020283345e-05 , err= 4.340383129807773e-06
ii= 359 , relres= 1.2231100017208271e-05 , err= 4.192610305313098e-06
ii= 360 , relres= 1.2418131477283676e-05 , err= 3.890740720685515e-06
ii= 361 , relres= 1.2143106807393859e-05 , err= 3.824036374191485e-06
ii= 362 , relres= 1.1920911259640689e-05 , err= 3.7383935190009736e-06
ii= 363 , relres= 1.1244264092823386e-05 , err= 3.5849304107808887e-06
ii= 364 , relres= 1.1077682786060891e-05 , err= 3.5294336506070816e-06
ii= 365 , relres= 1.1284347561568834e-05 , err= 3.452189168590542e-06
ii= 366 , relres= 1.0886539427327703e-05 , err= 3.2635920943620794e-06
ii= 367 , relres= 9.77742677193425e-06 , err= 3.1423892330327573e-06
ii= 368 , relres= 9.610654927717543e-06 , err= 3.1136092408404208e-06
ii= 369 , relres= 9.449242968749506e-06 , err= 2.9798946741255544e-06
ii= 370 , relres= 9.122834198372424e-06 , err= 2.8667720851443557e-06
ii= 371 , relres= 8.83867006524245e-06 , err= 2.772268415303708e-06
ii= 372 , relres= 8.179416968386179e-06 , err= 2.7141518257331738e-06
ii= 373 , relres= 8.806691956628664e-06 , err= 2.6271152372488324e-06
ii= 374 , relres= 7.665516276303906e-06 , err= 2.4835588466818635e-06
ii= 375 , relres= 7.345207656543544e-06 , err= 2.390114311156237e-06
ii= 376 , relres= 6.805440699676752e-06 , err= 2.3162211761093135e-06
ii= 377 , relres= 6.719624744479966e-06 , err= 2.1553153731378738e-06
ii= 378 , relres= 6.1088343350589565e-06 , err= 2.095374832381461e-06
ii= 379 , relres= 5.936396594856053e-06 , err= 2.062632599783442e-06
ii= 380 , relres= 6.414161991352239e-06 , err= 2.0165072523996807e-06
ii= 381 , relres= 5.818030929934281e-06 , err= 1.92614968857701e-06
ii= 382 , relres= 5.684899657707746e-06 , err= 1.8982559491619674e-06
ii= 383 , relres= 5.645791512261531e-06 , err= 1.8475831147599961e-06
ii= 384 , relres= 5.271056889486025e-06 , err= 1.7906940196244465e-06
ii= 385 , relres= 5.749672627182701e-06 , err= 1.75689694676751e-06
ii= 386 , relres= 5.211504583358748e-06 , err= 1.6890086731962534e-06
ii= 387 , relres= 5.329854251159178e-06 , err= 1.638955154700533e-06
ii= 388 , relres= 5.009580932774647e-06 , err= 1.589062730075369e-06
ii= 389 , relres= 4.7346744859162206e-06 , err= 1.5661441135922066e-06
ii= 390 , relres= 4.610387962819245e-06 , err= 1.5307069369234645e-06
ii= 391 , relres= 4.716531082478014e-06 , err= 1.4450060492270617e-06
ii= 392 , relres= 4.027175323863161e-06 , err= 1.3755543455275792e-06

```

```

ii= 393 , relres= 4.028185009091297e-06 , err= 1.3178254290589604e-06
ii= 394 , relres= 3.7617615185990544e-06 , err= 1.2868742107888707e-06
ii= 395 , relres= 3.531958441411326e-06 , err= 1.2103400238850392e-06
ii= 396 , relres= 3.4492224299152804e-06 , err= 1.192637191984682e-06
ii= 397 , relres= 3.451779796610694e-06 , err= 1.1730177441218656e-06
ii= 398 , relres= 3.5454910766264702e-06 , err= 1.1052988433462946e-06
ii= 399 , relres= 3.2938707410733064e-06 , err= 1.0568023468800169e-06
ii= 400 , relres= 3.035142338681706e-06 , err= 1.0381983820923604e-06
ii= 401 , relres= 2.88511941916219e-06 , err= 1.0224626990113122e-06
ii= 402 , relres= 3.0277238434618765e-06 , err= 9.712486704404756e-07
ii= 403 , relres= 2.9488831331249106e-06 , err= 9.036760683669619e-07
ii= 404 , relres= 2.614684917593676e-06 , err= 8.902835012071909e-07
ii= 405 , relres= 2.5101071054073197e-06 , err= 8.314352447202696e-07
ii= 406 , relres= 2.5599892795247672e-06 , err= 8.192448701835737e-07
ii= 407 , relres= 2.442459467487334e-06 , err= 7.868646215247347e-07
ii= 408 , relres= 2.300483499669936e-06 , err= 7.626494825902593e-07
ii= 409 , relres= 2.1919523576201935e-06 , err= 7.542021279996677e-07
ii= 410 , relres= 2.233720874580764e-06 , err= 7.431411801358689e-07
ii= 411 , relres= 2.085802691632696e-06 , err= 6.883878330756906e-07
ii= 412 , relres= 2.0968326536019285e-06 , err= 6.747254447873032e-07
ii= 413 , relres= 1.952186770495335e-06 , err= 6.417608895291452e-07
ii= 414 , relres= 1.9757032680647057e-06 , err= 6.200808972250279e-07
ii= 415 , relres= 1.8309271699282597e-06 , err= 5.949874566109076e-07
ii= 416 , relres= 1.7256547304831361e-06 , err= 5.792871596159586e-07
ii= 417 , relres= 1.722089083510672e-06 , err= 5.674069958585666e-07
ii= 418 , relres= 1.7193491904684977e-06 , err= 5.581162197725668e-07
ii= 419 , relres= 1.7280244705876626e-06 , err= 5.442364396608148e-07
ii= 420 , relres= 1.6706044202154156e-06 , err= 5.257832542619412e-07
ii= 421 , relres= 1.474488977596221e-06 , err= 5.059926780970376e-07
ii= 422 , relres= 1.4856699729415747e-06 , err= 4.865744994751305e-07
ii= 423 , relres= 1.4410731213763074e-06 , err= 4.7643534524774395e-07
ii= 424 , relres= 1.3595220306178184e-06 , err= 4.680996985879466e-07
ii= 425 , relres= 1.3834470995417985e-06 , err= 4.5372238511608866e-07
ii= 426 , relres= 1.1874250790825153e-06 , err= 4.4239973285798654e-07
ii= 427 , relres= 1.173336223929486e-06 , err= 4.0752718137122e-07
ii= 428 , relres= 1.156050103242693e-06 , err= 3.975823900463604e-07
ii= 429 , relres= 1.1378814200563545e-06 , err= 3.8915377052891636e-07
ii= 430 , relres= 1.1792272764718286e-06 , err= 3.813964768295322e-07
ii= 431 , relres= 1.1229693601732577e-06 , err= 3.6070572317893306e-07
ii= 432 , relres= 1.1120814851502888e-06 , err= 3.543368197007448e-07
ii= 433 , relres= 9.949885410474565e-07 , err= 3.396273335332625e-07
ii= 434 , relres= 9.292117401086622e-07 , err= 3.313046038871486e-07
ii= 435 , relres= 8.857794862106595e-07 , err= 3.190406995302255e-07
ii= 436 , relres= 1.0396619708846322e-06 , err= 3.00364997348443e-07
ii= 437 , relres= 9.13335640753346e-07 , err= 2.8833395913162823e-07
ii= 438 , relres= 7.840332828732994e-07 , err= 2.8138813415613624e-07
ii= 439 , relres= 7.886921144759245e-07 , err= 2.750432690079198e-07
ii= 440 , relres= 7.952569281689576e-07 , err= 2.603366025592479e-07
ii= 441 , relres= 7.522589173560319e-07 , err= 2.480893267210689e-07
ii= 442 , relres= 7.372808813185451e-07 , err= 2.4462222314623044e-07
ii= 443 , relres= 6.77828332132029e-07 , err= 2.3660507657140263e-07
ii= 444 , relres= 6.636086146620804e-07 , err= 2.2993296081183993e-07
ii= 445 , relres= 6.606035879838634e-07 , err= 2.2407281399124688e-07
ii= 446 , relres= 6.636800928071453e-07 , err= 2.1062265264996483e-07
ii= 447 , relres= 6.044891506128813e-07 , err= 2.0537113335005455e-07
ii= 448 , relres= 5.649542777961373e-07 , err= 1.9901609962084715e-07
ii= 449 , relres= 5.826295164044618e-07 , err= 1.9581388263928473e-07
ii= 450 , relres= 5.638897208696867e-07 , err= 1.8169551109881993e-07
ii= 451 , relres= 5.665060139028266e-07 , err= 1.7755291248227385e-07
ii= 452 , relres= 5.049059961267596e-07 , err= 1.7193476610967262e-07
ii= 453 , relres= 4.912276592481658e-07 , err= 1.669353349378966e-07

```

```

ii= 454 , relres= 4.938690325510056e-07 , err= 1.635790634702213e-07
ii= 455 , relres= 4.920701830259479e-07 , err= 1.5901460238340865e-07
ii= 456 , relres= 5.083737638840134e-07 , err= 1.5554706904807631e-07
ii= 457 , relres= 5.020569499034158e-07 , err= 1.4860847633469285e-07
ii= 458 , relres= 4.0612694321468047e-07 , err= 1.4153442434691063e-07
ii= 459 , relres= 4.0277245804400635e-07 , err= 1.3930616456065468e-07
ii= 460 , relres= 4.4271656666771964e-07 , err= 1.335550341707916e-07
ii= 461 , relres= 3.674548881720943e-07 , err= 1.2557057530671995e-07
ii= 462 , relres= 3.853589145061115e-07 , err= 1.21087449649809e-07
ii= 463 , relres= 3.5215489612004856e-07 , err= 1.1857965044269861e-07
ii= 464 , relres= 3.458131435682891e-07 , err= 1.1623544848930923e-07
ii= 465 , relres= 3.264302062966229e-07 , err= 1.1193005318947611e-07
ii= 466 , relres= 2.859595066936832e-07 , err= 1.04049062402496e-07
ii= 467 , relres= 2.8620024642110407e-07 , err= 1.0150187314321594e-07
ii= 468 , relres= 2.9273915998417137e-07 , err= 9.653675509202823e-08
ii= 469 , relres= 2.6594979738730113e-07 , err= 9.152228949049511e-08
ii= 470 , relres= 2.564533343434976e-07 , err= 8.975997425367742e-08
ii= 471 , relres= 2.6233534675530866e-07 , err= 8.851715174039288e-08
ii= 472 , relres= 2.422267089170842e-07 , err= 8.53902549553181e-08
ii= 473 , relres= 2.5867425007122026e-07 , err= 8.325869728664012e-08
ii= 474 , relres= 2.4709302133869123e-07 , err= 8.07689434938171e-08
ii= 475 , relres= 2.3307888087589333e-07 , err= 7.834164761167206e-08
ii= 476 , relres= 2.3438555959193771e-07 , err= 7.587424635829827e-08
ii= 477 , relres= 2.251011485427181e-07 , err= 7.354945763102653e-08
ii= 478 , relres= 2.1632132609438786e-07 , err= 7.139734784910781e-08
ii= 479 , relres= 2.1637406965248278e-07 , err= 6.981532713000544e-08
ii= 480 , relres= 2.252198405099129e-07 , err= 6.782738099210222e-08
ii= 481 , relres= 1.7522526631767046e-07 , err= 6.174254287335147e-08
ii= 482 , relres= 1.9052155486295157e-07 , err= 6.045016187214028e-08
ii= 483 , relres= 1.8513766704584045e-07 , err= 5.9064392252006177e-08
ii= 484 , relres= 2.0440116080922773e-07 , err= 5.612806201843489e-08
ii= 485 , relres= 1.6055329698933799e-07 , err= 5.292085506167504e-08
ii= 486 , relres= 1.4059514932059838e-07 , err= 4.9778553702474154e-08
ii= 487 , relres= 1.4974721020522146e-07 , err= 4.833993908676584e-08
ii= 488 , relres= 1.343816354764604e-07 , err= 4.553021006440688e-08
ii= 489 , relres= 1.271306688437924e-07 , err= 4.436090926574669e-08
ii= 490 , relres= 1.2266852789378083e-07 , err= 4.4009529247331953e-08
ii= 491 , relres= 1.252275295070901e-07 , err= 4.1424496538550457e-08
ii= 492 , relres= 1.2906273391754747e-07 , err= 3.9651895389275795e-08
ii= 493 , relres= 1.1548241389697354e-07 , err= 3.8310720103906334e-08
ii= 494 , relres= 1.1794349704270313e-07 , err= 3.7811802197221515e-08
ii= 495 , relres= 1.1200418355052385e-07 , err= 3.610678879983234e-08
ii= 496 , relres= 1.0612093267263431e-07 , err= 3.479650187662737e-08
ii= 497 , relres= 1.0425499326775343e-07 , err= 3.4093067799526606e-08
ii= 498 , relres= 1.0111792103802035e-07 , err= 3.26138858899686e-08
ii= 499 , relres= 9.384726263879572e-08 , err= 3.202699777255721e-08
ii= 500 , relres= 9.339392512034769e-08 , err= 3.1609755491898735e-08
ii= 501 , relres= 9.784077996928471e-08 , err= 3.077879527253487e-08
ii= 502 , relres= 9.610137088573321e-08 , err= 2.9937914181679924e-08
ii= 503 , relres= 8.337276712191193e-08 , err= 2.855091016220792e-08
ii= 504 , relres= 8.044645241198263e-08 , err= 2.815452284821819e-08
ii= 505 , relres= 7.786161441844374e-08 , err= 2.7648494918916576e-08
ii= 506 , relres= 7.949542087776302e-08 , err= 2.6779175153547916e-08
ii= 507 , relres= 8.531449783129135e-08 , err= 2.4903252353735447e-08
ii= 508 , relres= 6.992640200773638e-08 , err= 2.380113187367006e-08
ii= 509 , relres= 7.554942633363648e-08 , err= 2.334734696831506e-08
ii= 510 , relres= 6.305157389636505e-08 , err= 2.260471540903896e-08
ii= 511 , relres= 6.271039271630564e-08 , err= 2.197248867060438e-08
ii= 512 , relres= 5.832426347242404e-08 , err= 2.043992619460735e-08
ii= 513 , relres= 5.563417619158189e-08 , err= 2.0078996203587995e-08
ii= 514 , relres= 5.3139642377050274e-08 , err= 1.9799327465846306e-08

```

```

ii= 515 , relres= 5.6439500001240454e-08 , err= 1.908126188618209e-08
ii= 516 , relres= 5.541767942356319e-08 , err= 1.8410504481658972e-08
ii= 517 , relres= 5.8105492696099744e-08 , err= 1.7762576499132487e-08
ii= 518 , relres= 4.8842228961345286e-08 , err= 1.6987881664410098e-08
ii= 519 , relres= 4.6856160117733024e-08 , err= 1.6549135261342088e-08
ii= 520 , relres= 4.690410832938656e-08 , err= 1.6309249087970255e-08
ii= 521 , relres= 4.444085557836535e-08 , err= 1.5868537680081082e-08
ii= 522 , relres= 4.660840673947593e-08 , err= 1.5447861380413077e-08
ii= 523 , relres= 4.32219401567739e-08 , err= 1.4394482526325825e-08
ii= 524 , relres= 4.350444087487299e-08 , err= 1.4014736496103292e-08
ii= 525 , relres= 3.903622497310577e-08 , err= 1.3600107365883239e-08
ii= 526 , relres= 3.612845724813646e-08 , err= 1.3288494901497657e-08
ii= 527 , relres= 4.3797668968516775e-08 , err= 1.2499265412007025e-08
ii= 528 , relres= 3.521670495535999e-08 , err= 1.1932992360289384e-08
ii= 529 , relres= 3.450644323459875e-08 , err= 1.1693806841328675e-08
ii= 530 , relres= 3.493870719587583e-08 , err= 1.1064766517341453e-08
ii= 531 , relres= 3.1364462898143673e-08 , err= 1.0825333234600768e-08
ii= 532 , relres= 3.082027555417165e-08 , err= 1.0094547604362872e-08
ii= 533 , relres= 3.11862736870804e-08 , err= 9.673300544257334e-09
ii= 534 , relres= 2.7424025263452723e-08 , err= 9.276612024905384e-09
ii= 535 , relres= 2.928404010191188e-08 , err= 8.69345915134639e-09
ii= 536 , relres= 2.996432976027858e-08 , err= 8.365714273036372e-09
ii= 537 , relres= 2.598122141947974e-08 , err= 8.114017816070031e-09
ii= 538 , relres= 2.3010426020423406e-08 , err= 7.779412950501678e-09
ii= 539 , relres= 2.482117003088963e-08 , err= 7.5932235663176e-09
ii= 540 , relres= 2.3369242793621925e-08 , err= 7.351917483414634e-09
ii= 541 , relres= 2.212888962336426e-08 , err= 7.159184761072928e-09
ii= 542 , relres= 2.1913782344405985e-08 , err= 6.961717272343908e-09
ii= 543 , relres= 1.9682009846009417e-08 , err= 6.468647886603495e-09
ii= 544 , relres= 1.9670657682457765e-08 , err= 6.386017225503359e-09
ii= 545 , relres= 1.9904071142046224e-08 , err= 6.226913353994555e-09
ii= 546 , relres= 2.0051753829141425e-08 , err= 6.038104984819556e-09
ii= 547 , relres= 1.931118046796491e-08 , err= 5.7647513639306306e-09
ii= 548 , relres= 1.813101138459312e-08 , err= 5.615016465043599e-09
ii= 549 , relres= 1.6259571174165886e-08 , err= 5.382273608285322e-09
ii= 550 , relres= 1.5755682744586387e-08 , err= 5.30018655929804e-09
ii= 551 , relres= 1.6756857556960175e-08 , err= 4.984467766646257e-09
ii= 552 , relres= 1.4335176760296817e-08 , err= 4.8083066700841455e-09
ii= 553 , relres= 1.3717147671498083e-08 , err= 4.612699430755495e-09
ii= 554 , relres= 1.2990390936284827e-08 , err= 4.438279343041828e-09
ii= 555 , relres= 1.2894111466623943e-08 , err= 4.36821626060262e-09
ii= 556 , relres= 1.3646814279055704e-08 , err= 4.259339561983359e-09
ii= 557 , relres= 1.3574717836536803e-08 , err= 4.102065865621643e-09
ii= 558 , relres= 1.2231128061723248e-08 , err= 3.989426627156859e-09
ii= 559 , relres= 1.145043077638957e-08 , err= 3.801771539751039e-09
ii= 560 , relres= 1.0787529953842413e-08 , err= 3.730650689720351e-09
ii= 561 , relres= 1.1718008078772635e-08 , err= 3.5170513180082778e-09
ii= 562 , relres= 1.0273538683341931e-08 , err= 3.444892806528531e-09
ii= 563 , relres= 9.983186455936826e-09 , err= 3.3274190799764925e-09
ii= 564 , relres= 9.474663266413392e-09 , err= 3.294692002303194e-09
ii= 565 , relres= 9.550340383542903e-09 , err= 3.205014375243352e-09
ii= 566 , relres= 9.10601283147358e-09 , err= 3.1166082847684595e-09
ii= 567 , relres= 9.455852889580085e-09 , err= 2.9274615329388905e-09
ii= 568 , relres= 8.891567513260993e-09 , err= 2.7869205809409145e-09
ii= 569 , relres= 8.406184348438923e-09 , err= 2.738345505256304e-09
ii= 570 , relres= 8.189930566243949e-09 , err= 2.66356437903012e-09
ii= 571 , relres= 7.980836131173282e-09 , err= 2.542915912328169e-09
ii= 572 , relres= 8.19622785432557e-09 , err= 2.4600238446451007e-09
ii= 573 , relres= 7.23844410900721e-09 , err= 2.335698624934808e-09
ii= 574 , relres= 6.6753254565416435e-09 , err= 2.235518138348075e-09
ii= 575 , relres= 7.574945172468932e-09 , err= 2.1799069637978537e-09

```

```

ii= 576 , relres= 6.619808645318347e-09 , err= 2.070497752992563e-09
ii= 577 , relres= 6.217736374557616e-09 , err= 1.9842167464141437e-09
ii= 578 , relres= 6.601017704824743e-09 , err= 1.9085185907253804e-09
ii= 579 , relres= 5.958199402989076e-09 , err= 1.8465842471180665e-09
ii= 580 , relres= 5.652180576088245e-09 , err= 1.8207921159148453e-09
ii= 581 , relres= 5.721264135527816e-09 , err= 1.798209437715584e-09
ii= 582 , relres= 5.647244680507534e-09 , err= 1.6759635650801548e-09
ii= 583 , relres= 5.296598008448628e-09 , err= 1.6419056649857158e-09
ii= 584 , relres= 5.160103790425114e-09 , err= 1.6076124155309934e-09
ii= 585 , relres= 4.838980505691789e-09 , err= 1.5780775363860938e-09
ii= 586 , relres= 4.780226697600601e-09 , err= 1.5243853218493695e-09
ii= 587 , relres= 4.648709844601468e-09 , err= 1.4831284143908374e-09
ii= 588 , relres= 4.549334090799644e-09 , err= 1.4420798218206203e-09
ii= 589 , relres= 4.442912741650395e-09 , err= 1.3613401723195266e-09
ii= 590 , relres= 3.918477711484883e-09 , err= 1.3197589196390245e-09
ii= 591 , relres= 3.802972347307416e-09 , err= 1.302094257709474e-09
ii= 592 , relres= 3.6882310158921704e-09 , err= 1.2742232890622586e-09
ii= 593 , relres= 3.5350293820484024e-09 , err= 1.2476302851422245e-09
ii= 594 , relres= 3.814314231136737e-09 , err= 1.191615058678316e-09
ii= 595 , relres= 3.4949366794187547e-09 , err= 1.1432547631533164e-09
ii= 596 , relres= 3.4026751530346095e-09 , err= 1.1156369728860667e-09
ii= 597 , relres= 3.280528077626988e-09 , err= 1.1045204677339415e-09
ii= 598 , relres= 3.3966129886961224e-09 , err= 1.0604015244606096e-09
ii= 599 , relres= 3.112679929443533e-09 , err= 1.001857820595298e-09
ii= 600 , relres= 3.0385718687425387e-09 , err= 9.920847956239282e-10
ii= 601 , relres= 2.8811920671035915e-09 , err= 9.376554221632486e-10
ii= 602 , relres= 2.5935388647883587e-09 , err= 9.058438277743469e-10
ii= 603 , relres= 2.7046660907390185e-09 , err= 8.89121684888838e-10
ii= 604 , relres= 2.6104228387533937e-09 , err= 8.35755217078526e-10
ii= 605 , relres= 2.683282559552078e-09 , err= 8.18917692704592e-10
ii= 606 , relres= 2.2117256378658784e-09 , err= 7.866067053048956e-10
ii= 607 , relres= 2.3345641684276682e-09 , err= 7.63033944002468e-10
ii= 608 , relres= 2.268717196462146e-09 , err= 7.432246376037391e-10
ii= 609 , relres= 2.0650422954152498e-09 , err= 7.159273086441403e-10
ii= 610 , relres= 2.139679828113687e-09 , err= 6.929991409926802e-10
ii= 611 , relres= 1.932170433446607e-09 , err= 6.65514513149647e-10
ii= 612 , relres= 1.9421471227800857e-09 , err= 6.492718462217922e-10
ii= 613 , relres= 1.8066833370187794e-09 , err= 6.353603772288802e-10
ii= 614 , relres= 1.8324567823265175e-09 , err= 6.163807021750217e-10
ii= 615 , relres= 1.955878805687895e-09 , err= 5.954488082414656e-10
ii= 616 , relres= 1.8044447515312874e-09 , err= 5.738873897536202e-10
ii= 617 , relres= 1.6501064060023274e-09 , err= 5.460337256746203e-10
ii= 618 , relres= 1.62698229189479e-09 , err= 5.38474212024677e-10
ii= 619 , relres= 1.5178813627136353e-09 , err= 5.247642608008186e-10
ii= 620 , relres= 1.556609434839103e-09 , err= 5.12151950649723e-10
ii= 621 , relres= 1.398078915442325e-09 , err= 4.699107581542211e-10
ii= 622 , relres= 1.3936738297252198e-09 , err= 4.58131756822339e-10
ii= 623 , relres= 1.356047200114985e-09 , err= 4.3979542223054106e-10
ii= 624 , relres= 1.2776483060523868e-09 , err= 4.291430594664459e-10
ii= 625 , relres= 1.292826896873749e-09 , err= 4.135070923514762e-10
ii= 626 , relres= 1.2999372882067009e-09 , err= 4.0236652967682987e-10
ii= 627 , relres= 1.2653654140545405e-09 , err= 3.921227377134848e-10
ii= 628 , relres= 1.2449681555318238e-09 , err= 3.6965620329822457e-10
ii= 629 , relres= 1.1220131095531441e-09 , err= 3.496572733556463e-10
ii= 630 , relres= 1.0562951027275497e-09 , err= 3.423198787472551e-10
ii= 631 , relres= 1.0326739869415114e-09 , err= 3.3413181250751237e-10
ii= 632 , relres= 1.0043503652478723e-09 , err= 3.148441217594139e-10
ii= 633 , relres= 1.0438012651371292e-09 , err= 3.0411114316451526e-10
ii= 634 , relres= 8.622990166711327e-10 , err= 2.948447549564981e-10
ii= 635 , relres= 8.650070029608708e-10 , err= 2.913068741869353e-10
ii= 636 , relres= 8.709087391992766e-10 , err= 2.8394985920159657e-10

```

```

ii= 637 , relres= 8.938062724832996e-10 , err= 2.7821697020012864e-10
ii= 638 , relres= 9.340346225297167e-10 , err= 2.659703339198854e-10
ii= 639 , relres= 7.873717182530412e-10 , err= 2.568169534126748e-10
ii= 640 , relres= 7.790697409006177e-10 , err= 2.521465049505543e-10
ii= 641 , relres= 6.749216526342304e-10 , err= 2.430921873344924e-10
ii= 642 , relres= 6.705098672492611e-10 , err= 2.3955558055245445e-10
ii= 643 , relres= 6.337010851501608e-10 , err= 2.256222854352901e-10
ii= 644 , relres= 5.828112423694798e-10 , err= 2.0939443599716328e-10
ii= 645 , relres= 5.947385164400849e-10 , err= 2.0486499531006586e-10
ii= 646 , relres= 5.951326835562009e-10 , err= 1.9841320626555744e-10
ii= 647 , relres= 5.943857497878143e-10 , err= 1.9587469320656787e-10
ii= 648 , relres= 6.441344135186564e-10 , err= 1.8442144877073885e-10
ii= 649 , relres= 5.008542975668231e-10 , err= 1.7412994314718839e-10
ii= 650 , relres= 4.988418885471741e-10 , err= 1.7081983296716603e-10
ii= 651 , relres= 6.009051450234148e-10 , err= 1.6341288859377247e-10
ii= 652 , relres= 4.5610523614814144e-10 , err= 1.5550639540485045e-10
ii= 653 , relres= 4.803231333420151e-10 , err= 1.5182318509369586e-10
ii= 654 , relres= 4.599852418279566e-10 , err= 1.433895283682385e-10
ii= 655 , relres= 4.027823171494775e-10 , err= 1.4171210019345182e-10
ii= 656 , relres= 4.170887931189684e-10 , err= 1.3909093205841844e-10
ii= 657 , relres= 3.9245069096728717e-10 , err= 1.351240296838949e-10
ii= 658 , relres= 3.914910105387622e-10 , err= 1.3264580090094629e-10
ii= 659 , relres= 4.05664431521644e-10 , err= 1.2917837111848125e-10
ii= 660 , relres= 3.792656408350358e-10 , err= 1.2300824691679212e-10
ii= 661 , relres= 3.502052953293563e-10 , err= 1.2034810341877999e-10
ii= 662 , relres= 3.338645510206217e-10 , err= 1.1571724895069582e-10
ii= 663 , relres= 3.6340758830836747e-10 , err= 1.1292741359342456e-10
ii= 664 , relres= 3.110266165159286e-10 , err= 1.0688439887491015e-10
ii= 665 , relres= 3.2413664308367995e-10 , err= 1.0144287824411592e-10
ii= 666 , relres= 2.922875792808349e-10 , err= 9.644513822827593e-11
ii= 667 , relres= 2.9471994627604754e-10 , err= 9.41560624541496e-11
ii= 668 , relres= 2.8015380687841954e-10 , err= 9.270785771128627e-11
ii= 669 , relres= 2.796605926026692e-10 , err= 9.108207469625641e-11
ii= 670 , relres= 2.860082015156283e-10 , err= 8.725381298373717e-11
ii= 671 , relres= 2.912372767348148e-10 , err= 8.556152957287573e-11
ii= 672 , relres= 2.5814775790432503e-10 , err= 8.210992461094341e-11
ii= 673 , relres= 2.4397762041661915e-10 , err= 7.896441030297605e-11
ii= 674 , relres= 2.414621826527861e-10 , err= 7.775511963427867e-11
ii= 675 , relres= 2.5613120182882597e-10 , err= 7.640982605270111e-11
ii= 676 , relres= 2.4191440355325767e-10 , err= 7.194914166538855e-11
ii= 677 , relres= 2.3140446246368405e-10 , err= 6.964893392770163e-11
ii= 678 , relres= 2.261084143371667e-10 , err= 6.768378513757177e-11
ii= 679 , relres= 2.1664239056139498e-10 , err= 6.52085617507794e-11
ii= 680 , relres= 2.04742968058094e-10 , err= 6.433109629225807e-11
ii= 681 , relres= 2.0605812921034974e-10 , err= 6.33888079920102e-11
ii= 682 , relres= 2.017670711620486e-10 , err= 6.117844595600444e-11
ii= 683 , relres= 1.9869634552684446e-10 , err= 5.862471775435703e-11
ii= 684 , relres= 1.8972004704935937e-10 , err= 5.5320965831633905e-11
ii= 685 , relres= 1.717001497175631e-10 , err= 5.43197722338791e-11
ii= 686 , relres= 1.7158022553187345e-10 , err= 5.209670459581108e-11
ii= 687 , relres= 1.7839950509790904e-10 , err= 5.1137337069488695e-11
ii= 688 , relres= 1.6488197651382821e-10 , err= 4.9401155621401696e-11
ii= 689 , relres= 1.6282145857716679e-10 , err= 4.894272833042587e-11
ii= 690 , relres= 1.749343434981697e-10 , err= 4.737687768397224e-11
ii= 691 , relres= 1.5866461355458212e-10 , err= 4.5957980172278385e-11
ii= 692 , relres= 1.5445841704048595e-10 , err= 4.5279557238330264e-11
ii= 693 , relres= 1.5215166754563377e-10 , err= 4.491990621397105e-11
ii= 694 , relres= 1.5946882982601163e-10 , err= 4.3708670406282707e-11
ii= 695 , relres= 1.617540396233116e-10 , err= 4.257789994975851e-11
ii= 696 , relres= 1.493487059887839e-10 , err= 4.165180071152832e-11
ii= 697 , relres= 1.3106146049498793e-10 , err= 4.081058083990154e-11

```

```

ii= 698 , relres= 1.3083622546012428e-10 , err= 4.047766354098258e-11
ii= 699 , relres= 1.3248481188440317e-10 , err= 3.99566079669764e-11
ii= 700 , relres= 1.3366377921256954e-10 , err= 3.933331313409997e-11
ii= 701 , relres= 1.316702638247923e-10 , err= 3.865038211849418e-11
ii= 702 , relres= 1.2257573231597878e-10 , err= 3.7981524112128715e-11
ii= 703 , relres= 1.242022446945363e-10 , err= 3.750536728159621e-11
ii= 704 , relres= 1.2353655112587014e-10 , err= 3.699745462204767e-11
ii= 705 , relres= 1.2277323981275641e-10 , err= 3.6406708922609926e-11
ii= 706 , relres= 1.1950401647594266e-10 , err= 3.5868951922361e-11
ii= 707 , relres= 1.1132235046310801e-10 , err= 3.5368012834266377e-11
ii= 708 , relres= 1.1511011154641943e-10 , err= 3.494179777678581e-11
ii= 709 , relres= 1.1349347112543039e-10 , err= 3.4461311465147734e-11
ii= 710 , relres= 1.1063529050974764e-10 , err= 3.400350532406038e-11
ii= 711 , relres= 1.139390578209278e-10 , err= 3.3548386233128695e-11
ii= 712 , relres= 1.1356894154970646e-10 , err= 3.2935196202532566e-11
ii= 713 , relres= 1.076757754304433e-10 , err= 3.247027526092389e-11
ii= 714 , relres= 1.0703597968799434e-10 , err= 3.1942850031922876e-11
ii= 715 , relres= 1.0350172580985473e-10 , err= 3.1547191085427915e-11
ii= 716 , relres= 9.581845246080368e-11 , err= 3.121919498560772e-11
FULL: none
ii= 0 , relres= 1.5716567492061533 , err= 0.9407802253239325
ii= 1 , relres= 1.4266261702073126 , err= 0.9010255154819136
ii= 2 , relres= 1.295356775069299 , err= 0.8629463859695059
ii= 3 , relres= 1.0341510780529184 , err= 0.828637380288847
ii= 4 , relres= 0.9989474391894206 , err= 0.7837807716917106
ii= 5 , relres= 0.9797294098409576 , err= 0.7438930416566424
ii= 6 , relres= 0.8547857580567096 , err= 0.6958655917636394
ii= 7 , relres= 0.7977830433134245 , err= 0.6564011803243123
ii= 8 , relres= 0.7196491548328643 , err= 0.6211610815777434
ii= 9 , relres= 0.7082642236855325 , err= 0.5822935587729063
ii= 10 , relres= 0.6023227847265122 , err= 0.5395724669653795
ii= 11 , relres= 0.6374662672928189 , err= 0.5017474144634031
ii= 12 , relres= 0.5587404097047445 , err= 0.4690703038523222
ii= 13 , relres= 0.5036171581444335 , err= 0.43306481826388094
ii= 14 , relres= 0.5009851535190231 , err= 0.40159767601224466
ii= 15 , relres= 0.41430883967357457 , err= 0.36553580032135524
ii= 16 , relres= 0.39951449763151453 , err= 0.33215698712620767
ii= 17 , relres= 0.35775378563911125 , err= 0.31137567819181233
ii= 18 , relres= 0.35373159423555994 , err= 0.28722463964511946
ii= 19 , relres= 0.3094526790149566 , err= 0.26379184210381723
ii= 20 , relres= 0.2793389799352668 , err= 0.2403092720920831
ii= 21 , relres= 0.26040323287011247 , err= 0.2210534002421286
ii= 22 , relres= 0.23299303803083599 , err= 0.20377421479208613
ii= 23 , relres= 0.2017013951750743 , err= 0.18841632540487757
ii= 24 , relres= 0.18940140862295515 , err= 0.17394502290257366
ii= 25 , relres= 0.16297337574078274 , err= 0.1605877862995666
ii= 26 , relres= 0.1695514730373857 , err= 0.14900251101009337
ii= 27 , relres= 0.15599640820584804 , err= 0.13895986826446458
ii= 28 , relres= 0.17117200414647762 , err= 0.1311262499144779
ii= 29 , relres= 0.13128367950851572 , err= 0.1225287458626754
ii= 30 , relres= 0.1234451858285198 , err= 0.11346043494856398
ii= 31 , relres= 0.10686456346431672 , err= 0.10536935849302036
ii= 32 , relres= 0.10117805470178085 , err= 0.09643932773608818
ii= 33 , relres= 0.09609503114515167 , err= 0.0894354376428027
ii= 34 , relres= 0.08794848839516456 , err= 0.08266888830443951
ii= 35 , relres= 0.07219478999843558 , err= 0.07579346693718778
ii= 36 , relres= 0.07439970950206853 , err= 0.06991360387374479
ii= 37 , relres= 0.06704635593950839 , err= 0.06474375861184933
ii= 38 , relres= 0.06343449446413138 , err= 0.05992258676917237
ii= 39 , relres= 0.05449780741931061 , err= 0.05496582511135151
ii= 40 , relres= 0.04956483715439613 , err= 0.050262026864696205

```

```
ii= 41 , relres= 0.05546155356984195 , err= 0.04640364531670435
ii= 42 , relres= 0.04681819479970585 , err= 0.042970879138075575
ii= 43 , relres= 0.04637750850220602 , err= 0.0402787153431095
ii= 44 , relres= 0.03866485937772334 , err= 0.037584546268018194
ii= 45 , relres= 0.03440462946004122 , err= 0.03480547616910448
ii= 46 , relres= 0.0330555785486466 , err= 0.032406787205740986
ii= 47 , relres= 0.033750617172449635 , err= 0.030531209130470045
ii= 48 , relres= 0.028568841355031373 , err= 0.028864814990844336
ii= 49 , relres= 0.025878068799003992 , err= 0.026601472674614667
ii= 50 , relres= 0.024446938504470897 , err= 0.024818421231836384
ii= 51 , relres= 0.027272651340922507 , err= 0.02336495034871044
ii= 52 , relres= 0.022506173920686767 , err= 0.02211716248376559
ii= 53 , relres= 0.020684082494738337 , err= 0.02070413314911244
ii= 54 , relres= 0.018495487972918327 , err= 0.019196496355008426
ii= 55 , relres= 0.016340423754129918 , err= 0.017779053392414278
ii= 56 , relres= 0.014881365462064184 , err= 0.016445823876570523
ii= 57 , relres= 0.014584409791953771 , err= 0.015233164098060819
ii= 58 , relres= 0.013227807145035114 , err= 0.014160365229096713
ii= 59 , relres= 0.012088431059739292 , err= 0.013154765730618108
ii= 60 , relres= 0.012875776155299522 , err= 0.012394761569109791
ii= 61 , relres= 0.010582241928466341 , err= 0.011501131081319326
ii= 62 , relres= 0.010415129039579356 , err= 0.010607891039778038
ii= 63 , relres= 0.009363447735220708 , err= 0.009726043563388702
ii= 64 , relres= 0.008151471493710179 , err= 0.009063721994199855
ii= 65 , relres= 0.00743519663573281 , err= 0.008211364087095665
ii= 66 , relres= 0.008448410040353595 , err= 0.007623129374273432
ii= 67 , relres= 0.007240955589925748 , err= 0.007105941137479384
ii= 68 , relres= 0.006125122679006509 , err= 0.006552807528618879
ii= 69 , relres= 0.005352695572602452 , err= 0.0060044626634548695
ii= 70 , relres= 0.005075543015648194 , err= 0.005458027368849047
ii= 71 , relres= 0.0054288950806808435 , err= 0.005117964414484901
ii= 72 , relres= 0.005502323101341572 , err= 0.004861416303926097
ii= 73 , relres= 0.004418411724138536 , err= 0.004491710465456409
ii= 74 , relres= 0.003878173677934433 , err= 0.004152302909547419
ii= 75 , relres= 0.0034872600909737045 , err= 0.003814016000023358
ii= 76 , relres= 0.0034697766922543944 , err= 0.0035054384646812813
ii= 77 , relres= 0.003648314574079774 , err= 0.0033279771321589914
ii= 78 , relres= 0.0026217927494341276 , err= 0.003077223956501879
ii= 79 , relres= 0.002711992533935242 , err= 0.002817063630130262
ii= 80 , relres= 0.0029036270753286316 , err= 0.002673925545094698
ii= 81 , relres= 0.0020917396292530776 , err= 0.0025028390047357714
ii= 82 , relres= 0.002094531891625567 , err= 0.0023007774638600354
ii= 83 , relres= 0.0018809958218380645 , err= 0.00211536929059258
ii= 84 , relres= 0.0016515352304636779 , err= 0.0019267816769519151
ii= 85 , relres= 0.00152982002165781 , err= 0.0017543655928305094
ii= 86 , relres= 0.0014508411440109462 , err= 0.0016061664224994003
ii= 87 , relres= 0.0015806141920336446 , err= 0.0014621332609433507
ii= 88 , relres= 0.0012998830172459323 , err= 0.0013682254488957314
ii= 89 , relres= 0.0011295362653423405 , err= 0.001239561941500647
ii= 90 , relres= 0.001054887004622068 , err= 0.0011117002396338548
ii= 91 , relres= 0.0009838553336862174 , err= 0.0010238769980320474
ii= 92 , relres= 0.0012024963524370669 , err= 0.0009636384121890246
ii= 93 , relres= 0.0009596391775880661 , err= 0.0008953631176734668
ii= 94 , relres= 0.0009571626689725479 , err= 0.0008323651882913077
ii= 95 , relres= 0.0008052018551396275 , err= 0.0007785180811253195
ii= 96 , relres= 0.0006827122617366217 , err= 0.0007075506252118891
ii= 97 , relres= 0.0006656255666483365 , err= 0.0006468018118985182
ii= 98 , relres= 0.0007135829053376593 , err= 0.0005994700665407697
ii= 99 , relres= 0.0005157428458623705 , err= 0.0005447166406729429
ii= 100 , relres= 0.00048234501654002815 , err= 0.000492404494622812
ii= 101 , relres= 0.0005145481466134443 , err= 0.00045830162917635727
```

```

ii= 102 , relres= 0.00038725691411741706 , err= 0.0004274548635554486
ii= 103 , relres= 0.00034945301401478223 , err= 0.00038980776812811677
ii= 104 , relres= 0.0004059545963304675 , err= 0.00036293928715056326
ii= 105 , relres= 0.0003389934540278839 , err= 0.0003432217868110754
ii= 106 , relres= 0.00033863488445592016 , err= 0.0003153582896863594
ii= 107 , relres= 0.0002996230452438608 , err= 0.0002958733074491423
ii= 108 , relres= 0.00027696806336048065 , err= 0.0002700253324330183
ii= 109 , relres= 0.00028881478174225814 , err= 0.00025518677595876195
ii= 110 , relres= 0.00022823118188337012 , err= 0.0002356770279183587
ii= 111 , relres= 0.0002127601265670015 , err= 0.0002118498082111529
ii= 112 , relres= 0.000248864650160241 , err= 0.00019734945407171885
ii= 113 , relres= 0.00017762929438426857 , err= 0.00017903386794294453
ii= 114 , relres= 0.000191309338106974 , err= 0.00016133494989618405
ii= 115 , relres= 0.00016167160095468394 , err= 0.00014977764122507857
ii= 116 , relres= 0.00014139899431391242 , err= 0.0001358705438567585
ii= 117 , relres= 0.00013851005311365396 , err= 0.00012336952265020246
ii= 118 , relres= 0.00015378418878240257 , err= 0.00011629038979495924
ii= 119 , relres= 0.00012605379600087453 , err= 0.00010762243348096641
ii= 120 , relres= 0.00010843345617556604 , err= 0.00010092976143451607
ii= 121 , relres= 8.770842520726162e-05 , err= 9.174081519424829e-05
ii= 122 , relres= 9.853857717806478e-05 , err= 8.324799442233198e-05
ii= 123 , relres= 8.138805350872195e-05 , err= 7.658784838570258e-05
ii= 124 , relres= 7.066303566550493e-05 , err= 6.937339649266163e-05
ii= 125 , relres= 7.676456838584443e-05 , err= 6.314083173124095e-05
ii= 126 , relres= 6.191391481084153e-05 , err= 5.773944013586036e-05
ii= 127 , relres= 5.492432972889215e-05 , err= 5.169350183292593e-05
ii= 128 , relres= 6.17177538684025e-05 , err= 4.6956300879582285e-05
ii= 129 , relres= 4.787134764063247e-05 , err= 4.204543381844626e-05
ii= 130 , relres= 4.553366139066931e-05 , err= 3.7391941334669015e-05
ii= 131 , relres= 4.716231415354071e-05 , err= 3.4027669705333213e-05
ii= 132 , relres= 3.549987815191707e-05 , err= 3.068406189830574e-05
ii= 133 , relres= 3.618246923478319e-05 , err= 2.7253878357277416e-05
ii= 134 , relres= 3.542945865482367e-05 , err= 2.5302127916545628e-05
ii= 135 , relres= 2.9748389332410285e-05 , err= 2.2647255967486947e-05
ii= 136 , relres= 3.0028233000942597e-05 , err= 2.099197006421081e-05
ii= 137 , relres= 2.1966379575897236e-05 , err= 1.897638962992736e-05
ii= 138 , relres= 2.7300999542514573e-05 , err= 1.7768143404113898e-05
ii= 139 , relres= 1.8488514269781494e-05 , err= 1.6565834302941848e-05
ii= 140 , relres= 2.306403762669925e-05 , err= 1.5401557851003567e-05
ii= 141 , relres= 1.688533507336195e-05 , err= 1.4488321021382897e-05
ii= 142 , relres= 1.5180708532498362e-05 , err= 1.32149479409644e-05
ii= 143 , relres= 1.5733010794468716e-05 , err= 1.2360000621860014e-05
ii= 144 , relres= 1.4590552092685492e-05 , err= 1.1463973865521354e-05
ii= 145 , relres= 1.2241406217232796e-05 , err= 1.0650946761360575e-05
ii= 146 , relres= 1.039550722584363e-05 , err= 9.461112559218502e-06
ii= 147 , relres= 8.864780185115206e-06 , err= 8.318097881886162e-06
ii= 148 , relres= 9.071888820357773e-06 , err= 7.3776848748981045e-06
ii= 149 , relres= 8.389073037818786e-06 , err= 6.813860499982605e-06
ii= 150 , relres= 6.688599618692133e-06 , err= 6.098653225074043e-06
ii= 151 , relres= 6.36528934309555e-06 , err= 5.416950924587615e-06
ii= 152 , relres= 6.953863809755452e-06 , err= 4.995920652442883e-06
ii= 153 , relres= 5.867684283728978e-06 , err= 4.586592689309877e-06
ii= 154 , relres= 5.200572178819361e-06 , err= 4.2318120640081455e-06
ii= 155 , relres= 4.478400269152606e-06 , err= 3.846677462745617e-06
ii= 156 , relres= 4.074299951838013e-06 , err= 3.4742481830168035e-06
ii= 157 , relres= 4.01947577815236e-06 , err= 3.1796177965062667e-06
ii= 158 , relres= 3.174809894669979e-06 , err= 2.8647790049739136e-06
ii= 159 , relres= 3.2616726376642807e-06 , err= 2.6402479951098054e-06
ii= 160 , relres= 3.1664176308662056e-06 , err= 2.480351871035556e-06
ii= 161 , relres= 3.4231321850545664e-06 , err= 2.2989205578345926e-06
ii= 162 , relres= 2.496578214618973e-06 , err= 2.1527772439208198e-06

```

```

ii= 163 , relres= 2.077527163069643e-06 , err= 1.948862547356743e-06
ii= 164 , relres= 1.8912718073831699e-06 , err= 1.755864389190799e-06
ii= 165 , relres= 1.7996579912167166e-06 , err= 1.6200322246303555e-06
ii= 166 , relres= 1.5819045821678448e-06 , err= 1.4683025565274465e-06
ii= 167 , relres= 1.6866931664782279e-06 , err= 1.3539373050410961e-06
ii= 168 , relres= 1.4334467028241695e-06 , err= 1.2797022426571223e-06
ii= 169 , relres= 1.5152417158278018e-06 , err= 1.1668566632629032e-06
ii= 170 , relres= 1.1938272521716301e-06 , err= 1.0972837827237372e-06
ii= 171 , relres= 1.0930492793868517e-06 , err= 9.90807222636285e-07
ii= 172 , relres= 1.3068246561958815e-06 , err= 9.265210893908691e-07
ii= 173 , relres= 8.670788356808357e-07 , err= 8.502134151057579e-07
ii= 174 , relres= 9.74013871653758e-07 , err= 7.704472601956607e-07
ii= 175 , relres= 7.626042009297521e-07 , err= 7.14230750621046e-07
ii= 176 , relres= 8.619767895845944e-07 , err= 6.578659833164282e-07
ii= 177 , relres= 6.318880711755015e-07 , err= 6.165707404178423e-07
ii= 178 , relres= 5.694145183322698e-07 , err= 5.61369377284481e-07
ii= 179 , relres= 5.648274632179816e-07 , err= 5.119102823010128e-07
ii= 180 , relres= 4.646037998340849e-07 , err= 4.660074123910974e-07
ii= 181 , relres= 4.932005037695962e-07 , err= 4.260527355958512e-07
ii= 182 , relres= 4.3159209949659e-07 , err= 3.990085125577213e-07
ii= 183 , relres= 4.860982797396603e-07 , err= 3.7077218643417667e-07
ii= 184 , relres= 3.95163771569924e-07 , err= 3.5050483938854264e-07
ii= 185 , relres= 3.7279862090770817e-07 , err= 3.2158816007084886e-07
ii= 186 , relres= 2.8527451496883727e-07 , err= 2.8935053157256553e-07
ii= 187 , relres= 2.7235737907085304e-07 , err= 2.6272395250990595e-07
ii= 188 , relres= 2.776413354067424e-07 , err= 2.441173091908746e-07
ii= 189 , relres= 2.444523438378248e-07 , err= 2.251846231545676e-07
ii= 190 , relres= 2.086695608986648e-07 , err= 2.04491540169487e-07
ii= 191 , relres= 2.1091255311916213e-07 , err= 1.859485870223074e-07
ii= 192 , relres= 2.002802354568979e-07 , err= 1.715081471150327e-07
ii= 193 , relres= 1.736352126733507e-07 , err= 1.5777540819807783e-07
ii= 194 , relres= 1.6271173611421766e-07 , err= 1.4550281864694828e-07
ii= 195 , relres= 1.7055419227255468e-07 , err= 1.3452273176531637e-07
ii= 196 , relres= 1.2711346958251876e-07 , err= 1.257392359316668e-07
ii= 197 , relres= 1.1704238511172943e-07 , err= 1.1502846816730715e-07
ii= 198 , relres= 1.3235119012334382e-07 , err= 1.0748690020678588e-07
ii= 199 , relres= 1.0221702798211241e-07 , err= 1.0178854983717946e-07
ii= 200 , relres= 9.275722159667156e-08 , err= 9.508592090298724e-08
ii= 201 , relres= 8.825558118600735e-08 , err= 8.913105942022867e-08
ii= 202 , relres= 7.62845894077776e-08 , err= 8.320008617370274e-08
ii= 203 , relres= 6.934355099331412e-08 , err= 7.605842727837569e-08
ii= 204 , relres= 7.561262163606555e-08 , err= 6.975035784565198e-08
ii= 205 , relres= 7.256875518356836e-08 , err= 6.662100026729502e-08
ii= 206 , relres= 6.749249615239689e-08 , err= 6.097414498208517e-08
ii= 207 , relres= 6.085074303661104e-08 , err= 5.681044112752352e-08
ii= 208 , relres= 6.070878908035425e-08 , err= 5.167261544299323e-08
ii= 209 , relres= 5.611674429019652e-08 , err= 4.8324325523732195e-08
ii= 210 , relres= 4.7385449920777665e-08 , err= 4.3475957253119704e-08
ii= 211 , relres= 4.3059669820504617e-08 , err= 3.9761958456798835e-08
ii= 212 , relres= 3.817447946468792e-08 , err= 3.5636814140009646e-08
ii= 213 , relres= 4.1815355320414874e-08 , err= 3.263359273675188e-08
ii= 214 , relres= 3.081583127923721e-08 , err= 2.9821000176569894e-08
ii= 215 , relres= 3.4297760682340186e-08 , err= 2.713081081820331e-08
ii= 216 , relres= 2.7806285236784235e-08 , err= 2.56114948334531e-08
ii= 217 , relres= 2.314142407607556e-08 , err= 2.3278115491201042e-08
ii= 218 , relres= 2.524493882656119e-08 , err= 2.190760671941572e-08
ii= 219 , relres= 1.809169132874249e-08 , err= 2.033003336644751e-08
ii= 220 , relres= 1.824166994145771e-08 , err= 1.8922426795215243e-08
ii= 221 , relres= 1.5135192908243152e-08 , err= 1.746712367826893e-08
ii= 222 , relres= 1.5509804484173577e-08 , err= 1.609470203571522e-08
ii= 223 , relres= 1.3893033647243082e-08 , err= 1.5096880690794326e-08

```

```

ii= 224 , relres= 1.2135466104014751e-08 , err= 1.378148922066585e-08
ii= 225 , relres= 1.3212105568327246e-08 , err= 1.2780458665426684e-08
ii= 226 , relres= 1.3857431661551636e-08 , err= 1.1829707730874591e-08
ii= 227 , relres= 1.1614645627351218e-08 , err= 1.1234140944094993e-08
ii= 228 , relres= 1.0890747680230005e-08 , err= 1.036445741429609e-08
ii= 229 , relres= 1.1182261818136174e-08 , err= 9.789170039744477e-09
ii= 230 , relres= 9.52462608883957e-09 , err= 9.079958139512117e-09
ii= 231 , relres= 8.273252824326977e-09 , err= 8.430706423945906e-09
ii= 232 , relres= 7.3381729170400585e-09 , err= 7.629718445658847e-09
ii= 233 , relres= 7.914400284170912e-09 , err= 7.1611993241196505e-09
ii= 234 , relres= 5.65573105418541e-09 , err= 6.602951955542516e-09
ii= 235 , relres= 5.158516588902138e-09 , err= 5.980716700642484e-09
ii= 236 , relres= 4.985549192948242e-09 , err= 5.547289985235002e-09
ii= 237 , relres= 5.099021512799619e-09 , err= 5.099474224634727e-09
ii= 238 , relres= 5.220659708639282e-09 , err= 4.828685058581828e-09
ii= 239 , relres= 4.116895415928129e-09 , err= 4.421020308650787e-09
ii= 240 , relres= 4.5124893382785966e-09 , err= 4.2017888762652136e-09
ii= 241 , relres= 3.2287696538524792e-09 , err= 3.837770876279223e-09
ii= 242 , relres= 3.986862596821859e-09 , err= 3.5931945581090487e-09
ii= 243 , relres= 2.838208999216693e-09 , err= 3.3841646452419056e-09
ii= 244 , relres= 3.011977283223997e-09 , err= 3.1630122176994757e-09
ii= 245 , relres= 2.410839156933403e-09 , err= 2.953953357573248e-09
ii= 246 , relres= 2.315290581987507e-09 , err= 2.761220054809398e-09
ii= 247 , relres= 1.976558808174858e-09 , err= 2.565588523060545e-09
ii= 248 , relres= 2.3615020539733708e-09 , err= 2.359695706883433e-09
ii= 249 , relres= 2.076334934418944e-09 , err= 2.2541710870183133e-09
ii= 250 , relres= 2.105778323021072e-09 , err= 2.13493200239837e-09
ii= 251 , relres= 1.439078582586534e-09 , err= 1.9553400092651003e-09
ii= 252 , relres= 1.5600244427933605e-09 , err= 1.7461381593557996e-09
ii= 253 , relres= 1.7374455478859715e-09 , err= 1.6554440719730733e-09
ii= 254 , relres= 1.1722527820303346e-09 , err= 1.4804517672341107e-09
ii= 255 , relres= 1.079800347184723e-09 , err= 1.2956062421568563e-09
ii= 256 , relres= 1.6185378469771673e-09 , err= 1.196102791730606e-09
ii= 257 , relres= 1.0485217134955019e-09 , err= 1.0976558801036922e-09
ii= 258 , relres= 1.0510088811888745e-09 , err= 9.99513177902788e-10
ii= 259 , relres= 1.0291304599875837e-09 , err= 9.168086758658877e-10
ii= 260 , relres= 9.009936584260713e-10 , err= 8.295144595949153e-10
ii= 261 , relres= 7.507847020659684e-10 , err= 7.583343850198051e-10
ii= 262 , relres= 7.481537659433259e-10 , err= 6.962129795817312e-10
ii= 263 , relres= 6.050410810167353e-10 , err= 6.38145432331398e-10
ii= 264 , relres= 5.939983677160721e-10 , err= 5.74785756673335e-10
ii= 265 , relres= 5.77356830866135e-10 , err= 5.334334484622691e-10
ii= 266 , relres= 5.356139917525185e-10 , err= 4.807528799286353e-10
ii= 267 , relres= 5.036844594007477e-10 , err= 4.4959408220119464e-10
ii= 268 , relres= 4.666627795442897e-10 , err= 4.067476227713856e-10
ii= 269 , relres= 4.302996639082374e-10 , err= 3.8633137837272015e-10
ii= 270 , relres= 3.33739073621876e-10 , err= 3.4581027591623105e-10
ii= 271 , relres= 4.1129204930863367e-10 , err= 3.190004942637536e-10
ii= 272 , relres= 3.734585045094727e-10 , err= 3.0100923990303303e-10
ii= 273 , relres= 2.843421022186879e-10 , err= 2.750288725634081e-10
ii= 274 , relres= 3.377304717818805e-10 , err= 2.485686213731251e-10
ii= 275 , relres= 2.418967953091265e-10 , err= 2.2752042841083587e-10
ii= 276 , relres= 1.9953221832507496e-10 , err= 1.9874896973887898e-10
ii= 277 , relres= 2.2907987191215091e-10 , err= 1.7643361389112655e-10
ii= 278 , relres= 1.961046421105994e-10 , err= 1.644898023067291e-10
ii= 279 , relres= 1.6929645361454558e-10 , err= 1.4804198936481994e-10
ii= 280 , relres= 1.892213754170063e-10 , err= 1.3818052024340242e-10
ii= 281 , relres= 1.6361088143678344e-10 , err= 1.2677291556162705e-10
ii= 282 , relres= 1.4470114799326607e-10 , err= 1.1757969498856455e-10
ii= 283 , relres= 1.4667267437684387e-10 , err= 1.0564049569116569e-10
ii= 284 , relres= 1.4007191393867184e-10 , err= 9.857070397733164e-11

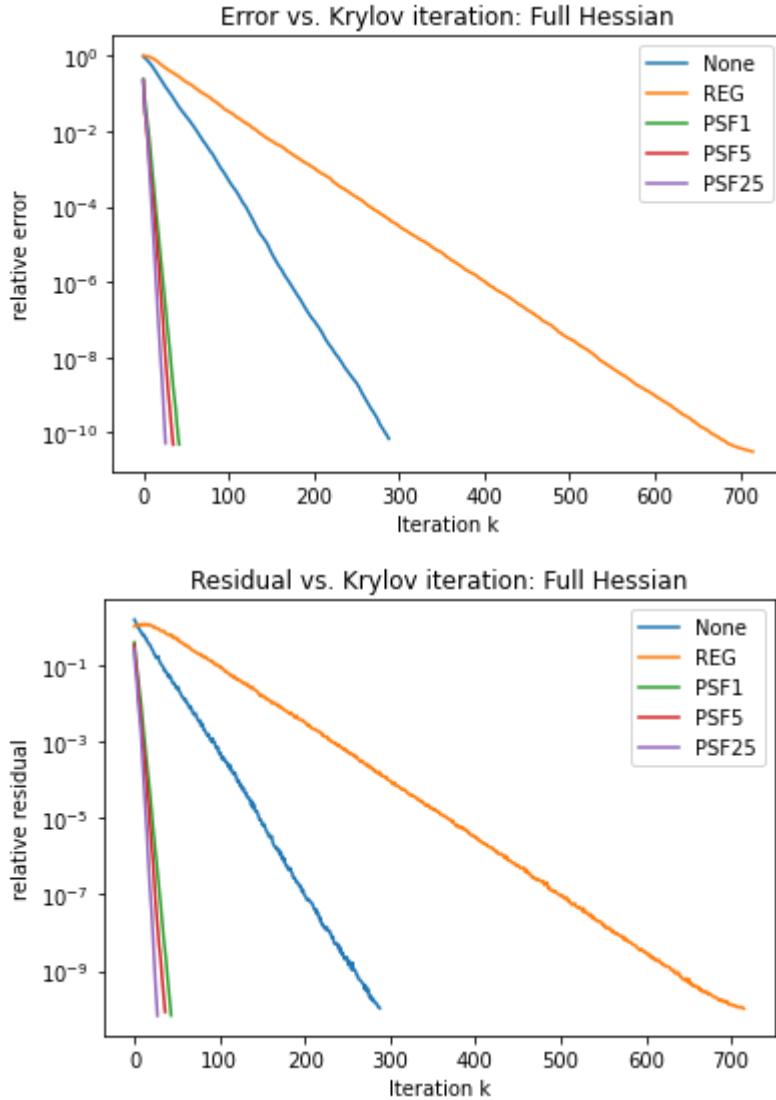
```

```

ii= 285 , relres= 1.3277964120174948e-10 , err= 9.15312700771442e-11
ii= 286 , relres= 1.1204661740740317e-10 , err= 8.406107960466391e-11
ii= 287 , relres= 1.101953244078161e-10 , err= 7.629102197458313e-11
ii= 288 , relres= 1.0584222159907255e-10 , err= 6.97818370969066e-11
ii= 289 , relres= 8.505759382805776e-11 , err= 6.524470403821388e-11
<matplotlib.legend.Legend at 0x7fa4116fcf40>

```

Out[50]:



Plots to make (5):

- CG convergence (Full Newton, full page width, residual)

In [51]:

```

np.savetxt(save_dir_str + '/cg_relres_none.txt', all_relres_none)
np.savetxt(save_dir_str + '/cg_relres_reg.txt', all_relres_reg)
for nb, relres in zip(all_num_batches, all_relres):
    np.savetxt(save_dir_str + '/cg_relres_p' + str(nb) + '.txt', relres)

np.savetxt(save_dir_str + '/cg_relres_none_gn.txt', relres_gn_none)
np.savetxt(save_dir_str + '/cg_relres_reg_gn.txt', relres_gn_reg)
for nb, relres_gn in zip(all_num_batches, all_relres_gn):
    np.savetxt(save_dir_str + '/cg_relres_p' + str(nb) + '_gn.txt', relres_gn)

print('all_relres_none=', all_relres_none)

```

```
print('all_relres_reg=' , all_relres_reg)
print('all_relres=' , all_relres)

print('relres_gn_none=' , relres_gn_none)
print('relres_gn_reg=' , relres_gn_reg)
print('all_relres_gn=' , all_relres_gn)
```

```
all_relres_none= [1.57165675e+00 1.42662617e+00 1.29535678e+00 1.03415108e+00
9.98947439e-01 9.79729410e-01 8.54785758e-01 7.97783043e-01
7.19649155e-01 7.08264224e-01 6.02322785e-01 6.37466267e-01
5.58740410e-01 5.03617158e-01 5.00985154e-01 4.14308840e-01
3.99514498e-01 3.57753786e-01 3.53731594e-01 3.09452679e-01
2.79338980e-01 2.60403233e-01 2.32993038e-01 2.01701395e-01
1.89401409e-01 1.62973376e-01 1.69551473e-01 1.55996408e-01
1.71172004e-01 1.31283680e-01 1.23445186e-01 1.06864563e-01
1.01178055e-01 9.60950311e-02 8.79484884e-02 7.21947900e-02
7.43997095e-02 6.70463559e-02 6.34344945e-02 5.44978074e-02
4.95648372e-02 5.54615536e-02 4.68181948e-02 4.63775085e-02
3.86648594e-02 3.44046295e-02 3.30555785e-02 3.37506172e-02
2.85688414e-02 2.58780688e-02 2.44469385e-02 2.72726513e-02
2.25061739e-02 2.06840825e-02 1.84954880e-02 1.63404238e-02
1.48813655e-02 1.45844098e-02 1.32278071e-02 1.20884311e-02
1.28757762e-02 1.05822419e-02 1.04151290e-02 9.36344774e-03
8.15147149e-03 7.43519664e-03 8.44841004e-03 7.24095559e-03
6.12512268e-03 5.35269557e-03 5.07554302e-03 5.42889508e-03
5.50232310e-03 4.41841172e-03 3.87817368e-03 3.48726009e-03
3.46977669e-03 3.64831457e-03 2.62179275e-03 2.71199253e-03
2.90362708e-03 2.09173963e-03 2.09453189e-03 1.88099582e-03
1.65153523e-03 1.52982002e-03 1.45084114e-03 1.58061419e-03
1.29988302e-03 1.12953627e-03 1.05488700e-03 9.83855334e-04
1.20249635e-03 9.59639178e-04 9.57162669e-04 8.05201855e-04
6.82712262e-04 6.65625567e-04 7.13582905e-04 5.15742846e-04
4.82345017e-04 5.14548147e-04 3.87256914e-04 3.49453014e-04
4.05954596e-04 3.38993454e-04 3.38634884e-04 2.99623045e-04
2.76968063e-04 2.88814782e-04 2.28231182e-04 2.12760127e-04
2.48864650e-04 1.77629294e-04 1.91309338e-04 1.61671601e-04
1.41398994e-04 1.38510053e-04 1.53784189e-04 1.26053796e-04
1.08433456e-04 8.77084252e-05 9.85385772e-05 8.13880535e-05
7.06630357e-05 7.67645684e-05 6.19139148e-05 5.49243297e-05
6.17177539e-05 4.78713476e-05 4.55336614e-05 4.71623142e-05
3.54998782e-05 3.61824692e-05 3.54294587e-05 2.97483893e-05
3.00282330e-05 2.19663796e-05 2.73009995e-05 1.84885143e-05
2.30640376e-05 1.68853351e-05 1.51807085e-05 1.57330108e-05
1.45905521e-05 1.22414062e-05 1.03955072e-05 8.86478019e-06
9.07188882e-06 8.38907304e-06 6.68859962e-06 6.36528934e-06
6.95386381e-06 5.86768428e-06 5.20057218e-06 4.47840027e-06
4.07429995e-06 4.01947578e-06 3.17480989e-06 3.26167264e-06
3.16641763e-06 3.42313219e-06 2.49657821e-06 2.07752716e-06
1.89127181e-06 1.79965799e-06 1.58190458e-06 1.68669317e-06
1.43344670e-06 1.51524172e-06 1.19382725e-06 1.09304928e-06
1.30682466e-06 8.67078836e-07 9.74013872e-07 7.62604201e-07
8.61976790e-07 6.31888071e-07 5.69414518e-07 5.64827463e-07
4.64603800e-07 4.93200504e-07 4.31592099e-07 4.86098280e-07
3.95163772e-07 3.72798621e-07 2.85274515e-07 2.72357379e-07
2.77641335e-07 2.44452344e-07 2.08669561e-07 2.10912553e-07
2.00280235e-07 1.73635213e-07 1.62711736e-07 1.70554192e-07
1.27113470e-07 1.17042385e-07 1.32351190e-07 1.02217028e-07
9.27572216e-08 8.82555812e-08 7.62845894e-08 6.93435510e-08
7.56126216e-08 7.25687552e-08 6.74924962e-08 6.08507430e-08
6.07087891e-08 5.61167443e-08 4.73854499e-08 4.30596698e-08
3.81744795e-08 4.18153553e-08 3.08158313e-08 3.42977607e-08
```

```

2.78062852e-08 2.31414241e-08 2.52449388e-08 1.80916913e-08
1.82416699e-08 1.51351929e-08 1.55098045e-08 1.38930336e-08
1.21354661e-08 1.32121056e-08 1.38574317e-08 1.16146456e-08
1.08907477e-08 1.11822618e-08 9.52462609e-09 8.27325282e-09
7.33817292e-09 7.91440028e-09 5.65573105e-09 5.15851659e-09
4.98554919e-09 5.09902151e-09 5.22065971e-09 4.11689542e-09
4.51248934e-09 3.22876965e-09 3.98686260e-09 2.83820900e-09
3.01197728e-09 2.41083916e-09 2.31529058e-09 1.97655881e-09
2.36150205e-09 2.07633493e-09 2.10577832e-09 1.43907858e-09
1.56002444e-09 1.73744555e-09 1.17225278e-09 1.07980035e-09
1.61853785e-09 1.04852171e-09 1.05100888e-09 1.02913046e-09
9.00993658e-10 7.50784702e-10 7.48153766e-10 6.05041081e-10
5.93998368e-10 5.77356831e-10 5.35613992e-10 5.03684459e-10
4.66662780e-10 4.30299664e-10 3.33739074e-10 4.11292049e-10
3.73458505e-10 2.84342102e-10 3.37730472e-10 2.41896795e-10
1.99532218e-10 2.29079872e-10 1.96104642e-10 1.69296454e-10
1.89221375e-10 1.63610881e-10 1.44701148e-10 1.46672674e-10
1.40071914e-10 1.32779641e-10 1.12046617e-10 1.10195324e-10
1.05842222e-10 8.50575938e-11]
all_relres_reg= [1.05972659e+00 1.09260824e+00 1.09263256e+00 1.12339704e+00
1.13232028e+00 1.13074569e+00 1.16850358e+00 1.19337658e+00
1.11155780e+00 1.14656448e+00 1.15934575e+00 1.20583568e+00
1.15128648e+00 1.19852909e+00 1.15981098e+00 1.11995885e+00
1.19361760e+00 1.16166398e+00 1.14276501e+00 1.10939957e+00
1.11384075e+00 1.04664437e+00 1.02219741e+00 9.75864868e-01
1.00451609e+00 9.43733995e-01 9.29975642e-01 9.12714273e-01
8.93526659e-01 8.88856401e-01 8.16195707e-01 8.03711702e-01
7.82900874e-01 7.94117388e-01 7.97828419e-01 7.78340254e-01
7.08451670e-01 6.79689101e-01 6.54583309e-01 6.41552165e-01
6.28795403e-01 6.37641169e-01 6.20670983e-01 5.88821998e-01
6.25932481e-01 5.30765258e-01 5.38046477e-01 5.10238162e-01
5.22670534e-01 5.31812406e-01 4.68697272e-01 4.88474755e-01
4.31572622e-01 4.26686402e-01 3.98877445e-01 4.01728878e-01
3.85298369e-01 3.79965917e-01 3.70790326e-01 3.36708009e-01
3.27107589e-01 3.29538975e-01 3.12072768e-01 3.18829765e-01
2.96881278e-01 2.86167021e-01 2.74052688e-01 2.58123769e-01
2.45870297e-01 2.45076206e-01 2.35660207e-01 2.27377636e-01
2.20419626e-01 2.07655309e-01 2.04498330e-01 2.04547965e-01
1.95590427e-01 1.91006751e-01 1.96285431e-01 1.80316295e-01
1.69558619e-01 1.73669584e-01 1.63690508e-01 1.67184047e-01
1.58678866e-01 1.55688526e-01 1.42505382e-01 1.40674604e-01
1.34886929e-01 1.33139079e-01 1.29019723e-01 1.31917458e-01
1.21127286e-01 1.18877762e-01 1.05892892e-01 1.03185525e-01
1.07112056e-01 1.02021595e-01 9.87221044e-02 9.59647103e-02
9.46604820e-02 8.44953813e-02 8.86725069e-02 8.26773963e-02
8.02622274e-02 7.77711406e-02 7.02449220e-02 6.72528880e-02
6.88395380e-02 6.45277625e-02 6.34760358e-02 5.89549791e-02
5.58433996e-02 5.65594742e-02 5.36000986e-02 5.35521696e-02
4.79997469e-02 5.17984508e-02 4.69436396e-02 4.59163375e-02
4.20477200e-02 4.45186236e-02 4.27072802e-02 4.02193812e-02
3.97991086e-02 3.90962782e-02 3.69893974e-02 3.40385775e-02
3.49820640e-02 3.40303791e-02 3.15656521e-02 3.16871575e-02
3.30700978e-02 2.87032298e-02 2.93599402e-02 2.78734055e-02
2.72664334e-02 2.45135910e-02 2.57300325e-02 2.65851758e-02
2.40335855e-02 2.30545633e-02 2.21356727e-02 2.15726281e-02
2.08703455e-02 1.90729611e-02 1.79924630e-02 1.62810437e-02
1.70982473e-02 1.58073699e-02 1.51201095e-02 1.58403938e-02
1.56195471e-02 1.43539219e-02 1.41066884e-02 1.28332970e-02
1.29648606e-02 1.28373511e-02 1.19763685e-02 1.19826085e-02
1.14910092e-02 1.01456165e-02 1.08454584e-02 1.09471996e-02
1.00607587e-02 9.80285536e-03 9.70191326e-03 9.21560048e-03

```

9.54361857e-03 8.39409256e-03 8.28165821e-03 8.52299586e-03
7.74454327e-03 7.71373847e-03 7.29171702e-03 7.02145239e-03
6.65804290e-03 6.62124862e-03 6.33719151e-03 6.19688068e-03
5.92496070e-03 5.67251824e-03 5.80020770e-03 5.31407907e-03
5.65782165e-03 5.26116838e-03 4.93974359e-03 4.69157506e-03
4.28601013e-03 4.28563463e-03 4.88132946e-03 4.27236591e-03
3.99424014e-03 3.89497797e-03 3.76584098e-03 3.73132409e-03
3.64616428e-03 3.74572272e-03 3.49957548e-03 3.29779519e-03
3.28366995e-03 3.11602844e-03 2.88090863e-03 2.67239314e-03
2.85185078e-03 2.62101551e-03 2.60729752e-03 2.29779654e-03
2.27608957e-03 2.17764110e-03 2.14896779e-03 2.12346299e-03
2.14991676e-03 2.06851304e-03 1.95156355e-03 1.89825009e-03
1.84621035e-03 1.84114837e-03 1.81055921e-03 1.66320159e-03
1.49950500e-03 1.58226914e-03 1.41134881e-03 1.38406347e-03
1.32665906e-03 1.33413680e-03 1.35032149e-03 1.30682752e-03
1.07833211e-03 1.09483895e-03 1.09674049e-03 1.03249684e-03
9.71209372e-04 9.59091020e-04 9.71009821e-04 9.05119435e-04
9.17437940e-04 8.40082011e-04 8.47697964e-04 7.68094025e-04
8.19235996e-04 7.58172540e-04 7.24345039e-04 6.93167778e-04
6.96905132e-04 6.42081105e-04 5.99958289e-04 6.34634083e-04
6.32759804e-04 5.45584979e-04 5.48423392e-04 5.41218010e-04
4.97736723e-04 5.14617206e-04 4.83946767e-04 4.79290424e-04
4.51501091e-04 4.28414932e-04 4.41428705e-04 3.96904440e-04
4.21577669e-04 3.91855864e-04 3.57250278e-04 3.41596013e-04
3.13687537e-04 3.02408355e-04 3.22655854e-04 2.95733501e-04
3.03421838e-04 2.86281635e-04 2.64346180e-04 2.53753828e-04
2.41172231e-04 2.55424592e-04 2.60779937e-04 2.14232061e-04
2.16957021e-04 2.22417570e-04 2.11767976e-04 1.93389593e-04
1.81905178e-04 1.91132704e-04 1.67526624e-04 1.59089868e-04
1.63518210e-04 1.57576160e-04 1.47225677e-04 1.61290646e-04
1.62285465e-04 1.29061827e-04 1.32345105e-04 1.27838012e-04
1.26224184e-04 1.21163982e-04 1.17401748e-04 1.13384166e-04
1.18425162e-04 1.01206584e-04 9.98600503e-05 9.76269628e-05
9.41189670e-05 9.10119176e-05 8.24329314e-05 7.85725233e-05
7.71439043e-05 8.66622665e-05 7.09606906e-05 7.25100430e-05
7.13171717e-05 6.85302452e-05 6.82316607e-05 6.32663573e-05
6.00689782e-05 6.03623532e-05 5.61996594e-05 5.47366985e-05
5.57858121e-05 5.60398822e-05 5.27417239e-05 5.07638780e-05
4.49538660e-05 4.49645160e-05 4.38134478e-05 4.16773115e-05
3.91065310e-05 4.10794362e-05 4.09724292e-05 3.75307651e-05
3.65719653e-05 3.57837349e-05 3.52388864e-05 3.44049889e-05
3.08555788e-05 3.09115692e-05 2.93573783e-05 2.97292234e-05
2.66743185e-05 2.81465327e-05 2.71091492e-05 2.45553625e-05
2.43801021e-05 2.25825411e-05 2.09154621e-05 2.13346576e-05
2.11209852e-05 2.22531399e-05 1.98643122e-05 1.81111377e-05
1.85774131e-05 1.81642073e-05 1.72514726e-05 1.61227313e-05
1.60119863e-05 1.72745713e-05 1.56927490e-05 1.50280342e-05
1.43157134e-05 1.44848705e-05 1.41229510e-05 1.22311000e-05
1.24181315e-05 1.21431068e-05 1.19209113e-05 1.12442641e-05
1.10776828e-05 1.12843476e-05 1.08865394e-05 9.77742677e-06
9.61065493e-06 9.44924297e-06 9.12283420e-06 8.83867007e-06
8.17941697e-06 8.80669196e-06 7.66551628e-06 7.34520766e-06
6.80544070e-06 6.71962474e-06 6.10883434e-06 5.93639659e-06
6.41416199e-06 5.81803093e-06 5.68489966e-06 5.64579151e-06
5.27105689e-06 5.74967263e-06 5.21150458e-06 5.32985425e-06
5.00958093e-06 4.73467449e-06 4.61038796e-06 4.71653108e-06
4.02717532e-06 4.02818501e-06 3.76176152e-06 3.53195844e-06
3.44922243e-06 3.45177980e-06 3.54549108e-06 3.29387074e-06
3.03514234e-06 2.88511942e-06 3.02772384e-06 2.94888313e-06
2.61468492e-06 2.51010711e-06 2.55998928e-06 2.44245947e-06
2.30048350e-06 2.19195236e-06 2.23372087e-06 2.08580269e-06

2.09683265e-06 1.95218677e-06 1.97570327e-06 1.83092717e-06
1.72565473e-06 1.72208908e-06 1.71934919e-06 1.72802447e-06
1.67060442e-06 1.47448898e-06 1.48566997e-06 1.44107312e-06
1.35952203e-06 1.38344710e-06 1.18742508e-06 1.17333622e-06
1.15605010e-06 1.13788142e-06 1.17922728e-06 1.12296936e-06
1.11208149e-06 9.94988541e-07 9.29211740e-07 8.85779486e-07
1.03966197e-06 9.13335641e-07 7.84033283e-07 7.88692114e-07
7.95256928e-07 7.52258917e-07 7.37280881e-07 6.77828332e-07
6.63608615e-07 6.60603588e-07 6.63680093e-07 6.04489151e-07
5.64954278e-07 5.82629516e-07 5.63889721e-07 5.66506014e-07
5.04905996e-07 4.91227659e-07 4.93869033e-07 4.92070183e-07
5.08373764e-07 5.02056950e-07 4.06126943e-07 4.02772458e-07
4.42716567e-07 3.67454888e-07 3.85358915e-07 3.52154896e-07
3.45813144e-07 3.26430206e-07 2.85959507e-07 2.86200246e-07
2.92739160e-07 2.65949797e-07 2.56453334e-07 2.62335347e-07
2.42226709e-07 2.58674250e-07 2.47093021e-07 2.33078881e-07
2.34385596e-07 2.25101149e-07 2.16321326e-07 2.16374070e-07
2.25219841e-07 1.75225266e-07 1.90521555e-07 1.85137667e-07
2.04401161e-07 1.60553297e-07 1.40595149e-07 1.49747210e-07
1.34381635e-07 1.27130669e-07 1.22668528e-07 1.25227530e-07
1.29062734e-07 1.15482414e-07 1.17943497e-07 1.12004184e-07
1.06120933e-07 1.04254993e-07 1.01117921e-07 9.38472626e-08
9.33939251e-08 9.78407800e-08 9.61013709e-08 8.33727671e-08
8.04464524e-08 7.78616144e-08 7.94954209e-08 8.53144978e-08
6.99264020e-08 7.55494263e-08 6.30515739e-08 6.27103927e-08
5.83242635e-08 5.56341762e-08 5.31396424e-08 5.64395000e-08
5.54176794e-08 5.81054927e-08 4.88422290e-08 4.68561601e-08
4.69041083e-08 4.44408556e-08 4.66084067e-08 4.32219402e-08
4.35044409e-08 3.90362250e-08 3.61284572e-08 4.37976690e-08
3.52167050e-08 3.45064432e-08 3.49387072e-08 3.13644629e-08
3.08202756e-08 3.11862737e-08 2.74240253e-08 2.92840401e-08
2.99643298e-08 2.59812214e-08 2.30104260e-08 2.48211700e-08
2.33692428e-08 2.21288896e-08 2.19137823e-08 1.96820098e-08
1.96706577e-08 1.99040711e-08 2.00517538e-08 1.93111805e-08
1.81310114e-08 1.62595712e-08 1.57556827e-08 1.67568576e-08
1.43351768e-08 1.37171477e-08 1.29903909e-08 1.28941115e-08
1.36468143e-08 1.35747178e-08 1.22311281e-08 1.14504308e-08
1.07875300e-08 1.17180081e-08 1.02735387e-08 9.98318646e-09
9.47466327e-09 9.55034038e-09 9.10601283e-09 9.45585289e-09
8.89156751e-09 8.40618435e-09 8.18993057e-09 7.98083613e-09
8.19622785e-09 7.23844411e-09 6.67532546e-09 7.57494517e-09
6.61980865e-09 6.21773637e-09 6.60101770e-09 5.95819940e-09
5.65218058e-09 5.72126414e-09 5.64724468e-09 5.29659801e-09
5.16010379e-09 4.83898051e-09 4.78022670e-09 4.64870984e-09
4.54933409e-09 4.44291274e-09 3.91847771e-09 3.80297235e-09
3.68823102e-09 3.53502938e-09 3.81431423e-09 3.49493668e-09
3.40267515e-09 3.28052808e-09 3.39661299e-09 3.11267993e-09
3.03857187e-09 2.88119207e-09 2.59353886e-09 2.70466609e-09
2.61042284e-09 2.68328256e-09 2.21172564e-09 2.33456417e-09
2.26871720e-09 2.06504230e-09 2.13967983e-09 1.93217043e-09
1.94214712e-09 1.80668334e-09 1.83245678e-09 1.95587881e-09
1.80444475e-09 1.65010641e-09 1.62698229e-09 1.51788136e-09
1.55660943e-09 1.39807892e-09 1.39367383e-09 1.35604720e-09
1.27764831e-09 1.29282690e-09 1.29993729e-09 1.26536541e-09
1.24496816e-09 1.12201311e-09 1.05629510e-09 1.03267399e-09
1.00435037e-09 1.04380127e-09 8.62299017e-10 8.65007003e-10
8.70908739e-10 8.93806272e-10 9.34034623e-10 7.87371718e-10
7.79069741e-10 6.74921653e-10 6.70509867e-10 6.33701085e-10
5.82811242e-10 5.94738516e-10 5.95132684e-10 5.94385750e-10
6.44134414e-10 5.00854298e-10 4.98841889e-10 6.00905145e-10
4.56105236e-10 4.80323133e-10 4.59985242e-10 4.02782317e-10

```

4.17088793e-10 3.92450691e-10 3.91491011e-10 4.05664432e-10
3.79265641e-10 3.50205295e-10 3.33864551e-10 3.63407588e-10
3.11026617e-10 3.24136643e-10 2.92287579e-10 2.94719946e-10
2.80153807e-10 2.79660593e-10 2.86008202e-10 2.91237277e-10
2.58147758e-10 2.43977620e-10 2.41462183e-10 2.56131202e-10
2.41914404e-10 2.31404462e-10 2.26108414e-10 2.16642391e-10
2.04742968e-10 2.06058129e-10 2.01767071e-10 1.98696346e-10
1.89720047e-10 1.71700150e-10 1.71580226e-10 1.78399505e-10
1.64881977e-10 1.62821459e-10 1.74934343e-10 1.58664614e-10
1.54458417e-10 1.52151668e-10 1.59468830e-10 1.61754040e-10
1.49348706e-10 1.31061460e-10 1.30836225e-10 1.32484812e-10
1.33663779e-10 1.31670264e-10 1.22575732e-10 1.24202245e-10
1.23536551e-10 1.22773240e-10 1.19504016e-10 1.11322350e-10
1.15110112e-10 1.13493471e-10 1.10635291e-10 1.13939058e-10
1.13568942e-10 1.07675775e-10 1.07035980e-10 1.03501726e-10
9.58184525e-11]
all_relres= [array([3.99953584e-01, 2.10177578e-01, 1.24988590e-01, 7.92848581e-02,
5.05862902e-02, 3.30280418e-02, 2.14330910e-02, 1.38668179e-02,
9.06384790e-03, 5.31437053e-03, 3.02741907e-03, 1.74395076e-03,
1.06016829e-03, 6.17319907e-04, 3.62476504e-04, 2.28820776e-04,
1.39990715e-04, 8.67381566e-05, 5.24300072e-05, 2.98032416e-05,
1.73431195e-05, 9.38316315e-06, 5.45306198e-06, 3.35530185e-06,
1.88185008e-06, 1.15812315e-06, 6.93574841e-07, 4.09316967e-07,
2.41352060e-07, 1.38869652e-07, 8.23198363e-08, 4.97792454e-08,
2.65798669e-08, 1.54939882e-08, 8.56145434e-09, 5.12565615e-09,
3.29663292e-09, 2.06439160e-09, 1.14111531e-09, 6.24223888e-10,
3.64600967e-10, 2.17499803e-10, 1.23562945e-10, 6.86040441e-11]), array
([3.43205878e-01, 1.58433579e-01, 1.02170077e-01, 6.07273553e-02,
3.20570386e-02, 1.83241291e-02, 9.49276709e-03, 5.58765392e-03,
3.19433438e-03, 1.73666251e-03, 1.02947731e-03, 6.41429710e-04,
3.66633228e-04, 1.93516877e-04, 1.02869425e-04, 5.28496295e-05,
2.85255348e-05, 1.59429013e-05, 7.84997449e-06, 3.94158970e-06,
2.07764759e-06, 1.16104346e-06, 5.94647421e-07, 2.74962913e-07,
1.25396429e-07, 5.78745150e-08, 3.08238496e-08, 1.60044869e-08,
8.86201396e-09, 4.61204616e-09, 3.04396398e-09, 1.80041794e-09,
9.10440629e-10, 4.85304357e-10, 2.73382389e-10, 1.55884951e-10,
8.45973168e-11]), array([2.77486943e-01, 9.86974188e-02, 6.18064329e-02,
3.44727098e-02,
1.42029327e-02, 7.73069734e-03, 4.86842615e-03, 2.79024179e-03,
1.40454051e-03, 5.35134425e-04, 2.25425638e-04, 8.98483842e-05,
3.95503822e-05, 1.62284882e-05, 7.00495627e-06, 3.12697489e-06,
1.04160268e-06, 4.27947121e-07, 1.76049803e-07, 8.46104767e-08,
4.14784424e-08, 1.74111999e-08, 6.60734925e-09, 2.37992838e-09,
9.04401554e-10, 3.43434220e-10, 1.55394962e-10, 6.73878052e-11])]

relres_gn_none= [1.57237623e+00 1.42763217e+00 1.29673142e+00 1.03556924e+00
1.00025739e+00 9.81523265e-01 8.56860188e-01 7.99941468e-01
7.21330819e-01 7.10995655e-01 6.05316968e-01 6.40525400e-01
5.61455192e-01 5.06701609e-01 5.03235339e-01 4.16829989e-01
4.02757847e-01 3.60338605e-01 3.56637409e-01 3.12252959e-01
2.81864379e-01 2.62800917e-01 2.34724765e-01 2.03316799e-01
1.90764235e-01 1.63965906e-01 1.70437018e-01 1.56396539e-01
1.72956404e-01 1.32819747e-01 1.24670874e-01 1.07929728e-01
1.02402865e-01 9.73498807e-02 8.93778984e-02 7.35106153e-02
7.58318944e-02 6.85857238e-02 6.49288347e-02 5.60101263e-02
5.36367124e-02 6.06255449e-02 4.96479896e-02 4.53908291e-02
3.94907127e-02 3.82130022e-02 3.76413563e-02 3.22853328e-02
2.82980312e-02 2.69459631e-02 2.54581741e-02 2.85800369e-02
2.38954773e-02 2.19745035e-02 1.96533451e-02 1.74472129e-02
1.59097660e-02 1.56746570e-02 1.43997147e-02 1.35846973e-02
1.33891970e-02 1.12673383e-02 1.12619526e-02 1.02209044e-02]

```

```

8.90320670e-03 8.16141495e-03 9.37658398e-03 7.98429219e-03
6.80850429e-03 5.98074664e-03 5.63183140e-03 6.06118733e-03
6.26684948e-03 5.01096762e-03 4.44874493e-03 4.19147779e-03
4.77814986e-03 3.60566021e-03 2.99215015e-03 2.92541519e-03
3.28451993e-03 2.60221812e-03 2.48526570e-03 2.20846822e-03
1.95355184e-03 1.81443199e-03 1.74941081e-03 1.92393823e-03
1.53342762e-03 1.36518577e-03 1.28976648e-03 1.18111146e-03
1.43263625e-03 1.17177485e-03 1.18983251e-03 9.53140537e-04
8.23197554e-04 8.20418322e-04 8.55096866e-04 6.23264393e-04
5.85964140e-04 6.25328825e-04 4.70942470e-04 4.42079652e-04
5.14287248e-04 4.00487531e-04 4.48845257e-04 3.61479942e-04
3.59129426e-04 3.14903576e-04 2.72288213e-04 2.36832595e-04
2.81888039e-04 2.40372778e-04 2.24777357e-04 2.02175618e-04
1.73772861e-04 1.87000986e-04 1.70999562e-04 1.40760345e-04
1.32834907e-04 1.05741496e-04 1.18723099e-04 9.71308357e-05
8.36555599e-05 9.15888731e-05 7.41997081e-05 6.61396442e-05
7.33701767e-05 5.68961571e-05 5.52617193e-05 5.52174480e-05
4.18898455e-05 4.31433703e-05 4.19963720e-05 3.47065713e-05
3.54325550e-05 2.51939795e-05 3.20182953e-05 2.20603474e-05
2.48890034e-05 2.10709213e-05 1.75533345e-05 1.62027233e-05
1.31879685e-05 1.33579741e-05 1.60750895e-05 1.03691680e-05
1.00340413e-05 9.76509032e-06 8.15665297e-06 9.22346231e-06
6.88266112e-06 6.34203909e-06 5.62839759e-06 5.05309514e-06
4.48097388e-06 4.58292280e-06 3.57131192e-06 3.11511338e-06
3.67592532e-06 2.88074407e-06 3.57807694e-06 2.40165495e-06
2.10815939e-06 2.01576743e-06 1.78244387e-06 2.00914695e-06
1.54943185e-06 1.72910360e-06 1.29633426e-06 1.12434143e-06
1.18480984e-06 1.14310735e-06 1.03006032e-06 8.95645242e-07
7.63028573e-07 8.64398648e-07 7.44313830e-07 6.74543598e-07
5.58704644e-07 5.33604606e-07 5.30718052e-07 4.89181179e-07
5.22638402e-07 5.04813527e-07 3.72023684e-07 3.43351300e-07
3.19335660e-07 3.42492069e-07 2.70274675e-07 3.08105752e-07
2.60397744e-07 2.34706206e-07 2.02023957e-07 2.22515991e-07
1.68287947e-07 1.50358687e-07 1.66047465e-07 1.48153669e-07
1.28946997e-07 1.24997320e-07 1.15086185e-07 1.04589161e-07
9.98751887e-08 1.24432724e-07 9.68540276e-08 9.30271892e-08
8.46029980e-08 7.93135483e-08 6.97927702e-08 8.24741482e-08
5.90023529e-08 6.72264287e-08 4.94560909e-08 5.36299416e-08
4.44876384e-08 3.41488448e-08 3.62288312e-08 3.06757355e-08
3.29988096e-08 2.60759577e-08 2.65829969e-08 2.41130022e-08
2.20868151e-08 2.50069816e-08 2.57057527e-08 1.77711687e-08
1.81585758e-08 1.80567745e-08 1.87397261e-08 1.46786432e-08
1.24089915e-08 1.45234922e-08 1.06212737e-08 1.10620189e-08
9.90221557e-09 8.76993234e-09 7.63375351e-09 6.41442918e-09
8.09479566e-09 5.85663580e-09 6.17280729e-09 5.23748184e-09
5.93845193e-09 4.16580930e-09 3.97787012e-09 3.49343004e-09
5.03025089e-09 2.93050999e-09 3.47533794e-09 2.46088866e-09
2.48862067e-09 2.85358353e-09 1.84691927e-09 1.61447867e-09
1.78808183e-09 1.86526796e-09 1.57312985e-09 1.55899461e-09
1.29760703e-09 1.04866105e-09 9.86341735e-10 8.87457430e-10
8.19206450e-10 8.16012863e-10 6.44363600e-10 7.23920361e-10
5.26950121e-10 7.57446926e-10 4.46361165e-10 4.74278417e-10
4.31085026e-10 3.99694137e-10 3.90919314e-10 3.66336078e-10
2.91760434e-10 3.42159107e-10 2.36225978e-10 2.45429434e-10
2.00545353e-10 2.08365997e-10 1.73380764e-10 1.42513432e-10
1.60948851e-10 1.46948115e-10 1.57910718e-10 1.31286793e-10
1.20787431e-10 1.19685955e-10 9.22033592e-11]
relres_gn_reg= [1.05978205e+00 1.09274194e+00 1.09291076e+00 1.12374303e+00
1.13280755e+00 1.13129152e+00 1.16891536e+00 1.19407208e+00
1.11238587e+00 1.14753485e+00 1.16136117e+00 1.20542081e+00
1.15231939e+00 1.19915182e+00 1.16086585e+00 1.12218570e+00

```

1.19616607e+00 1.16417901e+00 1.14581142e+00 1.11166872e+00
 1.11680173e+00 1.04970928e+00 1.02491461e+00 9.80254991e-01
 1.00520838e+00 9.45548592e-01 9.32572252e-01 9.15260066e-01
 8.93299677e-01 8.92979106e-01 8.19127381e-01 8.08640386e-01
 7.84045231e-01 7.98250197e-01 7.99919087e-01 7.79286635e-01
 7.11131355e-01 6.81946796e-01 6.55971683e-01 6.44000501e-01
 6.24597129e-01 6.32402175e-01 6.34237074e-01 5.91228074e-01
 6.24121372e-01 5.31827216e-01 5.38697584e-01 5.10559890e-01
 5.19617351e-01 5.38032711e-01 4.96201214e-01 4.65424808e-01
 4.33134546e-01 4.37120576e-01 3.99239934e-01 4.08768609e-01
 3.83821317e-01 3.82206833e-01 3.70590735e-01 3.37421191e-01
 3.28531264e-01 3.33307421e-01 3.15715247e-01 3.14519944e-01
 2.97720459e-01 2.85194045e-01 2.75791097e-01 2.58389737e-01
 2.49615867e-01 2.47063290e-01 2.26638224e-01 2.26369826e-01
 2.12727592e-01 2.15801373e-01 2.05382779e-01 2.08920730e-01
 1.95897656e-01 1.92360719e-01 2.00900269e-01 1.80455445e-01
 1.69511543e-01 1.74849803e-01 1.71413701e-01 1.65660369e-01
 1.59780888e-01 1.58090209e-01 1.50931781e-01 1.38205040e-01
 1.35606638e-01 1.35048504e-01 1.27616885e-01 1.22936771e-01
 1.22401202e-01 1.07701713e-01 1.13047632e-01 1.05434421e-01
 1.04741799e-01 1.04067027e-01 9.92242270e-02 9.76083331e-02
 9.89999463e-02 8.54659633e-02 8.74724232e-02 7.99608798e-02
 8.30075568e-02 7.80807555e-02 7.07849152e-02 6.76171165e-02
 6.96693464e-02 6.43987257e-02 6.36675007e-02 5.60108123e-02
 5.90205764e-02 5.52399005e-02 5.28141686e-02 5.64478143e-02
 5.06952153e-02 4.78095331e-02 4.60130143e-02 4.63894475e-02
 4.34981046e-02 4.24911327e-02 4.07821070e-02 4.10443690e-02
 4.03233877e-02 3.75815986e-02 3.85012958e-02 3.88284491e-02
 3.37128971e-02 3.35148176e-02 3.17193388e-02 3.22317014e-02
 2.90591028e-02 2.83613089e-02 2.82457279e-02 2.80423301e-02
 2.66529144e-02 2.45626148e-02 2.64675633e-02 2.67415954e-02
 2.32431967e-02 2.45149408e-02 2.23609650e-02 2.14557138e-02
 2.24386776e-02 2.04469904e-02 1.86057795e-02 1.85748431e-02
 1.60445895e-02 1.57793161e-02 1.54060828e-02 1.52258923e-02
 1.61313104e-02 1.43938756e-02 1.34861171e-02 1.28287596e-02
 1.29037339e-02 1.24272100e-02 1.17562594e-02 1.17554415e-02
 1.10939926e-02 1.03447307e-02 1.05792247e-02 1.06688858e-02
 1.01890123e-02 9.84438933e-03 1.03393592e-02 9.13376019e-03
 9.46387673e-03 8.39280261e-03 8.24023125e-03 7.79829370e-03
 7.81121389e-03 7.98787143e-03 6.98179696e-03 6.87526192e-03
 6.81736013e-03 6.48395929e-03 6.38644432e-03 6.53234447e-03
 5.94182255e-03 5.80245984e-03 5.73899203e-03 5.32886408e-03
 5.90445744e-03 5.27794857e-03 4.83021815e-03 4.81808708e-03
 5.00961213e-03 4.29221807e-03 4.32573415e-03 4.22676416e-03
 3.82624198e-03 3.81995921e-03 3.73660067e-03 3.68237475e-03
 3.72472686e-03 3.56113121e-03 3.45235677e-03 3.23275538e-03
 3.25251655e-03 2.99184755e-03 2.95886235e-03 2.87997237e-03
 2.78375165e-03 2.75680879e-03 2.53437540e-03 2.40573500e-03
 2.33278288e-03 2.28396456e-03 2.19528031e-03 2.12412672e-03
 2.08123734e-03 2.06555862e-03 1.93681484e-03 1.88900336e-03
 1.93897336e-03 1.83481696e-03 1.65065610e-03 1.50049659e-03
 1.52406821e-03 1.51281992e-03 1.40129755e-03 1.36245258e-03
 1.48222221e-03 1.29168696e-03 1.31971069e-03 1.28512971e-03
 1.09670060e-03 1.07625981e-03 1.12977460e-03 1.04562904e-03
 9.57017342e-04 1.02055000e-03 9.57827919e-04 9.92594556e-04
 8.56633397e-04 8.95943798e-04 7.97015117e-04 7.81429313e-04
 8.14849857e-04 7.37410122e-04 7.20823669e-04 6.93338611e-04
 7.38088029e-04 6.75648102e-04 6.09341302e-04 6.42178953e-04
 6.39328515e-04 5.48049566e-04 5.45434398e-04 5.08674294e-04
 5.12966215e-04 5.14522695e-04 4.86271284e-04 4.61507795e-04
 4.35580405e-04 4.34132247e-04 4.50866990e-04 3.94256970e-04

3.90187780e-04 3.65256831e-04 3.67342313e-04 3.40727992e-04
 3.13600960e-04 3.01023094e-04 3.07413615e-04 3.05182468e-04
 2.86861506e-04 3.01495926e-04 2.73411961e-04 2.62179324e-04
 2.51353735e-04 2.44829712e-04 2.54733785e-04 2.29067425e-04
 2.08444123e-04 2.10661438e-04 2.14035228e-04 1.92239992e-04
 1.79419644e-04 1.84877924e-04 1.57149604e-04 1.70591215e-04
 1.50057804e-04 1.48574243e-04 1.51148292e-04 1.46488158e-04
 1.33744392e-04 1.39158041e-04 1.27375245e-04 1.36934626e-04
 1.25583636e-04 1.15045146e-04 1.15809352e-04 1.04455090e-04
 1.02388822e-04 9.89916330e-05 1.03863221e-04 9.40943953e-05
 9.27540099e-05 9.60656003e-05 8.45518729e-05 7.71601551e-05
 7.65150897e-05 9.07693786e-05 7.18325981e-05 7.17295156e-05
 6.96215350e-05 7.02760056e-05 6.51921898e-05 6.35834846e-05
 5.97755503e-05 6.11372861e-05 6.15823836e-05 5.79065499e-05
 5.36105005e-05 5.45203108e-05 5.25507476e-05 5.05574755e-05
 4.42230801e-05 4.42237950e-05 4.43743305e-05 3.94370446e-05
 4.05396529e-05 4.02688224e-05 3.74899555e-05 3.68030931e-05
 3.55277472e-05 3.63588085e-05 3.48483406e-05 3.27694950e-05
 3.11050442e-05 3.01859594e-05 3.03533699e-05 2.85467010e-05
 2.67367293e-05 2.89391627e-05 2.81515421e-05 2.43993623e-05
 2.44071540e-05 2.28446754e-05 2.45010765e-05 2.07800524e-05
 2.04316665e-05 1.92128376e-05 1.80436729e-05 1.79496550e-05
 1.94433186e-05 1.67965521e-05 1.79808859e-05 1.60783596e-05
 1.57316991e-05 1.70423299e-05 1.47913844e-05 1.51180472e-05
 1.57607022e-05 1.36737155e-05 1.40027008e-05 1.23007372e-05
 1.28837676e-05 1.14138577e-05 1.15495796e-05 1.11689811e-05
 1.09958974e-05 1.03335349e-05 9.54785814e-06 9.20194796e-06
 9.29901094e-06 9.34385731e-06 8.12000856e-06 9.01431135e-06
 7.97070191e-06 7.77132696e-06 7.11979087e-06 7.06098725e-06
 7.67093942e-06 7.17147418e-06 6.52364073e-06 6.07659269e-06
 5.98934833e-06 6.26746605e-06 5.71634026e-06 5.33457894e-06
 5.24525329e-06 5.20915305e-06 5.05817192e-06 4.53834249e-06
 4.73018447e-06 4.93231386e-06 4.39438390e-06 4.02427273e-06
 4.04386760e-06 3.92254766e-06 3.80984588e-06 3.88799742e-06
 3.32781156e-06 3.48827198e-06 3.49265862e-06 3.29090424e-06
 2.97394332e-06 2.89052312e-06 3.07568897e-06 2.85605995e-06
 2.64144269e-06 2.49230191e-06 2.75303996e-06 2.29818356e-06
 2.26713692e-06 2.15764745e-06 2.34395011e-06 2.12816963e-06
 2.02983594e-06 2.02345366e-06 2.01114334e-06 1.81109173e-06
 1.68681018e-06 1.65239227e-06 1.69223896e-06 1.74293255e-06
 1.57730712e-06 1.51282748e-06 1.43478714e-06 1.43537774e-06
 1.28054914e-06 1.20675873e-06 1.18963283e-06 1.31574329e-06
 1.13321167e-06 1.12258552e-06 1.10807442e-06 1.15502598e-06
 1.03691617e-06 9.83514023e-07 8.98933624e-07 9.49695292e-07
 9.17531862e-07 9.19316476e-07 7.75861465e-07 7.65196579e-07
 8.44423566e-07 8.43353276e-07 7.26261646e-07 7.09919961e-07
 6.54401557e-07 6.75201142e-07 6.52890687e-07 6.64231185e-07
 6.46843761e-07 5.74311927e-07 5.68035596e-07 5.40472371e-07
 5.07205280e-07 4.99513253e-07 4.66466840e-07 4.65600131e-07
 4.20810257e-07 4.07063570e-07 4.28560717e-07 4.05413735e-07
 3.64210649e-07 3.75383106e-07 3.59539546e-07 3.35055721e-07
 3.46052819e-07 3.41230298e-07 2.98677113e-07 2.85473784e-07
 2.90614331e-07 2.97209368e-07 2.62126070e-07 2.52271269e-07
 2.53449797e-07 2.44309190e-07 2.52469099e-07 2.36499993e-07
 2.22740443e-07 2.14303058e-07 2.23039878e-07 1.99851293e-07
 1.85453433e-07 1.81250607e-07 1.78309846e-07 2.03826867e-07
 1.82105624e-07 1.64505754e-07 1.41194983e-07 1.43325003e-07
 1.40582507e-07 1.25954538e-07 1.22447722e-07 1.33110855e-07
 1.35958260e-07 1.14542162e-07 1.22453059e-07 1.15914227e-07
 1.06438774e-07 1.05620323e-07 9.73588455e-08 9.74617166e-08
 9.16511145e-08 9.55611055e-08 8.69321924e-08 7.75394566e-08

7.64710696e-08 8.31899426e-08 7.68380874e-08 7.62219945e-08
 6.69771893e-08 6.24228425e-08 6.62974707e-08 5.95261061e-08
 5.59880877e-08 5.38078258e-08 5.36482454e-08 5.65800716e-08
 5.57869869e-08 5.29808154e-08 4.98601320e-08 4.44493449e-08
 4.56933782e-08 4.91808433e-08 4.45855091e-08 3.96693719e-08
 4.41957922e-08 3.92751941e-08 3.94724059e-08 3.40640282e-08
 3.56620126e-08 3.29868939e-08 3.42149716e-08 3.03847977e-08
 2.92001102e-08 2.94487206e-08 2.92053697e-08 3.16610192e-08
 2.94067800e-08 2.53709485e-08 2.42256764e-08 2.39800340e-08
 2.19314145e-08 2.28225366e-08 2.10048477e-08 2.02389414e-08
 1.97632780e-08 2.05997177e-08 2.13719764e-08 1.84838599e-08
 1.59329582e-08 1.66693589e-08 1.63254356e-08 1.48382148e-08
 1.48918025e-08 1.35819961e-08 1.31563883e-08 1.29575688e-08
 1.32542685e-08 1.26595427e-08 1.12693708e-08 1.16131772e-08
 1.12585707e-08 1.05802846e-08 9.78845234e-09 9.92436066e-09
 9.74091599e-09 9.25826294e-09 9.30232389e-09 9.28163906e-09
 8.76902016e-09 8.00919004e-09 8.63479953e-09 8.62905328e-09
 7.87985805e-09 7.89122830e-09 6.99983558e-09 6.97482507e-09
 6.77288010e-09 6.95859573e-09 6.69470219e-09 6.30796630e-09
 5.95703925e-09 5.56227155e-09 5.52054117e-09 5.10455532e-09
 4.92922518e-09 4.60576300e-09 4.87344423e-09 4.81447613e-09
 4.46978160e-09 4.18572653e-09 3.99072737e-09 3.55603510e-09
 3.50928324e-09 3.69332194e-09 3.64648513e-09 3.37752482e-09
 3.31030204e-09 3.16374115e-09 3.49160112e-09 3.33903411e-09
 3.00978884e-09 2.91078093e-09 2.86467981e-09 2.54147255e-09
 2.61456161e-09 2.70564113e-09 2.34589348e-09 2.16596456e-09
 2.24497059e-09 2.06456598e-09 2.13983323e-09 1.98296230e-09
 1.83765236e-09 1.77457668e-09 1.80837192e-09 1.73221721e-09
 1.78415906e-09 1.56265172e-09 1.53790491e-09 1.52508145e-09
 1.54701535e-09 1.51747999e-09 1.47790801e-09 1.32594768e-09
 1.33532945e-09 1.31569364e-09 1.23840977e-09 1.23137056e-09
 1.24102182e-09 1.13435864e-09 1.11434638e-09 1.02671854e-09
 9.92527956e-10 1.09969457e-09 8.57386423e-10 8.45691212e-10
 8.55258141e-10 8.38797773e-10 8.62343926e-10 7.05199395e-10
 6.73229567e-10 6.88091895e-10 6.45594265e-10 6.85983321e-10
 6.32812843e-10 5.81777039e-10 5.90508286e-10 5.68688756e-10
 6.50428561e-10 6.24830915e-10 4.78028764e-10 5.13940145e-10
 5.15703062e-10 4.86486467e-10 4.81672475e-10 4.32724984e-10
 3.95152780e-10 4.34784070e-10 3.70497553e-10 3.51804344e-10
 3.27192826e-10 3.17411579e-10 3.29911485e-10 3.18392825e-10
 3.33326935e-10 3.04905561e-10 2.99895938e-10 2.74815675e-10
 2.68226038e-10 2.63415183e-10 2.76190175e-10 2.51011270e-10
 2.40775710e-10 2.37650638e-10 2.41245348e-10 2.24422527e-10
 2.23584407e-10 2.04838441e-10 1.96365404e-10 1.96227014e-10
 1.93112722e-10 1.97234779e-10 2.00525555e-10 1.76692991e-10
 1.59973334e-10 1.69475338e-10 1.66380675e-10 1.57515973e-10
 1.56925455e-10 1.59965496e-10 1.47777000e-10 1.40770103e-10
 1.38204084e-10 1.40235120e-10 1.39320531e-10 1.31950133e-10
 1.27636649e-10 1.25440497e-10 1.28138512e-10 1.24424224e-10
 1.25460770e-10 1.19457795e-10 1.19382397e-10 1.17104007e-10
 1.16784473e-10 1.08734972e-10 1.08347236e-10 1.07991321e-10
 1.05733080e-10 1.05501816e-10 1.05280874e-10 1.07813810e-10
 1.05278076e-10 9.95582797e-11]
 all_relres_gn= [array([4.00007796e-01, 2.11418420e-01, 1.25053395e-01, 8.0330181
 9e-02,
 5.08938525e-02, 3.38038917e-02, 2.16439779e-02, 1.42146704e-02,
 9.31378476e-03, 5.45304402e-03, 3.13092463e-03, 1.80989885e-03,
 1.11770657e-03, 6.50577359e-04, 3.83299390e-04, 2.44163018e-04,
 1.48356235e-04, 9.23562033e-05, 5.38331419e-05, 3.11094036e-05,
 1.75357809e-05, 9.46809755e-06, 5.48744185e-06, 3.33100145e-06,
 1.85390723e-06, 1.12239098e-06, 6.72101455e-07, 3.99739233e-07,

```

2.37134701e-07, 1.37424762e-07, 8.37246103e-08, 5.08922451e-08,
2.80400849e-08, 1.64925663e-08, 9.32955415e-09, 5.59838312e-09,
3.66364243e-09, 2.28829587e-09, 1.27357589e-09, 7.00479588e-10,
4.11851895e-10, 2.51710888e-10, 1.40931621e-10, 8.08167435e-11]), array
([3.42955505e-01, 1.58938954e-01, 1.03856441e-01, 5.98489928e-02,
3.26472000e-02, 1.80625314e-02, 9.61042219e-03, 5.69514739e-03,
3.19285182e-03, 1.74615832e-03, 1.04221814e-03, 6.48426287e-04,
3.72817863e-04, 1.94548649e-04, 1.02185690e-04, 5.41126621e-05,
2.92358949e-05, 1.57583212e-05, 7.83381164e-06, 4.01957578e-06,
2.10491707e-06, 1.16039827e-06, 6.09327806e-07, 2.77033837e-07,
1.28067117e-07, 6.05010569e-08, 3.29438538e-08, 1.65927869e-08,
8.87173612e-09, 4.33599835e-09, 2.66576011e-09, 1.75011823e-09,
8.59675887e-10, 4.54684939e-10, 2.51629683e-10, 1.33890354e-10,
7.50336130e-11]), array([2.76017183e-01, 9.81393155e-02, 6.54191536e-02,
3.27781515e-02,
1.38583887e-02, 8.35686133e-03, 5.50945695e-03, 2.92372746e-03,
1.34275805e-03, 5.69786381e-04, 2.47507021e-04, 9.42263366e-05,
3.94891994e-05, 1.76862665e-05, 8.08120525e-06, 3.04676519e-06,
9.60474289e-07, 4.36044503e-07, 1.85252956e-07, 8.95556626e-08,
4.27850568e-08, 1.68617185e-08, 6.31763092e-09, 2.38153412e-09,
9.12517191e-10, 3.26683638e-10, 1.37990092e-10, 5.68346275e-11])]
```

Preconditioned spectrum plots

In [52]:

```

all_H_pch_dense = list()
for nb, H in zip(all_num_batches, all_H_pch):
    print('building p' + str(nb) + '_dense')
    all_H_pch_dense.append(build_dense_matrix_from_matvecs(H.matvec, Vh2.dim()))

```

building p1_dense
building p5_dense
building p25_dense

In [53]:

```

print('building reg_dense')
reg_dense = build_dense_matrix_from_matvecs(REG.apply_R_numpy, Vh2.dim())

```

building reg_dense

In [54]:

```

print('building H_dense')
H_dense = build_dense_matrix_from_matvecs(H_linop.matvec, Vh2.dim())

print('building Hgn_dense')
Hgn_dense = build_dense_matrix_from_matvecs(Hgn_linop.matvec, Vh2.dim())

```

building H_dense
building Hgn_dense

In [55]:

```

all_ee_gn = list()
all_P_gn = list()
for nb, Hpch_dense in zip(all_num_batches, all_H_pch_dense):
    print('computing ee' + str(nb) + '_gn')
    ee_gn, P_gn = sla.eigh(Hgn_dense, Hpch_dense)

```

```

all_ee_gn.append(ee_gn)
all_P_gn.append(P_gn)

print('computing eeR_gn')
eeR_gn, PR_gn = sla.eigh(Hgn_dense, reg_dense)
print('computing ee_none_gn')
ee_none_gn, P_none_gn = sla.eigh(Hgn_dense)

all_cond_gn = list()
for ee_gn in all_ee_gn:
    all_cond_gn.append(np.max(ee_gn) / np.min(ee_gn))
condR_gn = np.max(eeR_gn) / np.min(eeR_gn)
cond_none_gn = np.max(ee_none_gn) / np.min(ee_none_gn)

for nb, cond_gn in zip(all_num_batches, all_cond_gn):
    print('cond' + str(nb) + '_gn=' , cond_gn)

print('condR_gn=' , condR_gn)
print('cond_none_gn=' , cond_none_gn)

```

```

computing ee1_gn
computing ee5_gn
computing ee25_gn
computing eeR_gn
computing ee_none_gn
cond1_gn= 17.591900591356705
cond5_gn= 13.864832451629688
cond25_gn= 10.574543556195529
condR_gn= 7015.897704373023
cond_none_gn= 921.647665509053

```

In [56]:

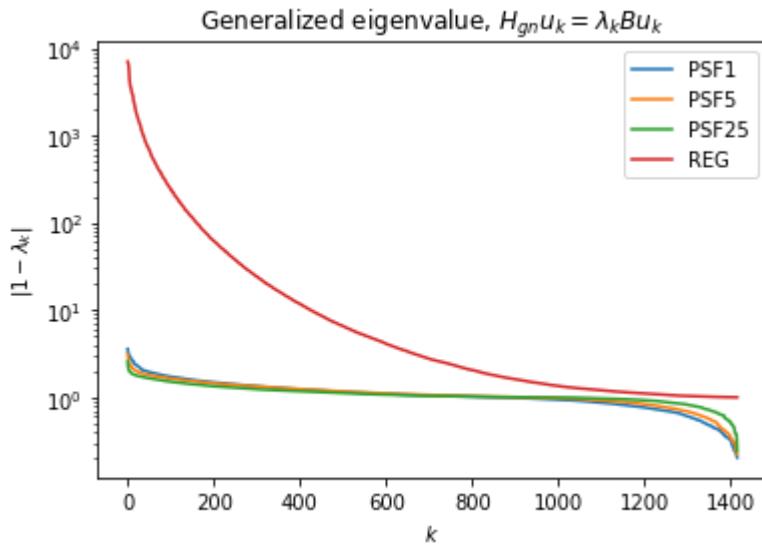
```

plt.figure()
for ee_gn in all_ee_gn:
#     plt.semilogy(np.sort(np.abs(1.0 - ee_gn))[:-1])
    plt.semilogy(np.sort(ee_gn)[:-1])

# plt.semilogy(np.sort(np.abs(1.0 - eeR_gn))[:-1])
plt.semilogy(np.sort(eeR_gn)[:-1])
plt.legend(['PSF' + str(nb) for nb in all_num_batches] + ['REG', 'None'])
plt.xlabel(r'$k$')
plt.ylabel(r'$|1 - \lambda_k|$')
plt.title(r'Generalized eigenvalue, $H_{gn} u_k = \lambda_k B u_k$')

```

Out[56]:



In [57]:

```

all_ee = list()
all_P = list()
for nb, Hpch_dense in zip(all_num_batches, all_H_pch_dense):
    print('computing ee' + str(nb))
    ee, P = sla.eigh(H_dense, Hpch_dense)
    all_ee.append(ee)
    all_P.append(P)

print('computing eeR')
eeR, PR = sla.eigh(H_dense, reg_dense)
print('computing ee_none')
ee_none, P_none = sla.eigh(H_dense)

all_cond = list()
for ee in all_ee:
    all_cond.append(np.max(ee) / np.min(ee))
condR = np.max(eeR) / np.min(eeR)
cond_none = np.max(ee_none) / np.min(ee_none)

for nb, cond in zip(all_num_batches, all_cond):
    print('cond' + str(nb) + '=', cond)

print('condR=', condR)
print('cond_none=', cond_none)

```

```

computing ee1
computing ee5
computing ee25
computing eeR
computing ee_none
cond1= 17.525665851322636
cond5= 13.86107916473564
cond25= 10.34842046586369
condR= 7016.760785605505
cond_none= 871.177098437612

```

In [58]:

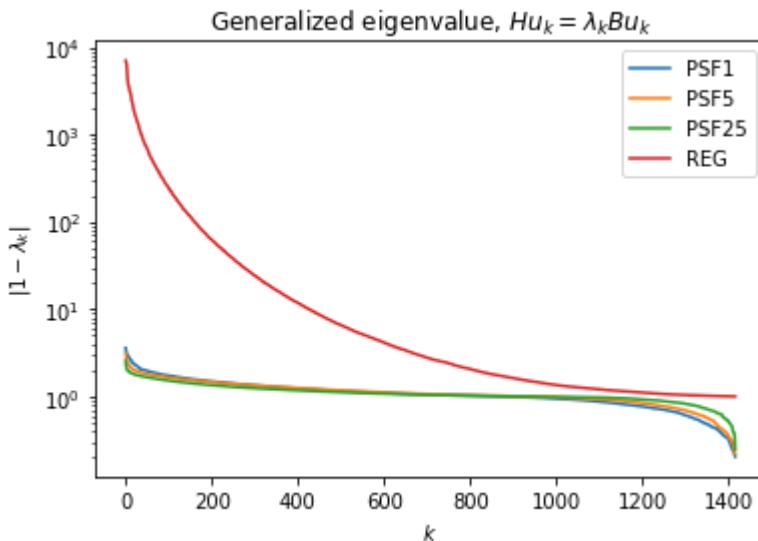
```

plt.figure()
for ee in all_ee:
#    plt.semilogy(np.sort(np.abs(1.0 - ee))[:-1])
    plt.semilogy(np.sort(ee)[:-1])

```

```
# plt.semilogy(np.sort(np.abs(1.0 - eeR))[:-1])
plt.semilogy(np.sort(eeR)[:-1])
plt.legend(['PSF' + str(nb) for nb in all_num_batches] + ['REG', 'None'])
plt.xlabel(r'$k$')
plt.ylabel(r'$|1 - \lambda_k|$')
plt.title(r'Generalized eigenvalue, $H u_k = \lambda_k B u_k$')
```

Out[58]: Text(0.5, 1.0, 'Generalized eigenvalue, \$H u_k = \lambda_k B u_k\$')



Plots to make (6)

- Preconditioned spectrum (Full newton)
- Condition number table (Gauss-Newton and full Newton)

In [59]:

```
for nb, ee in zip(all_num_batches, all_ee):
    np.savetxt(save_dir_str + '/generalized_eigenvalues_psf' + str(nb) + '.txt',
    np.savetxt(save_dir_str + '/generalized_eigenvalues_reg.txt', eeR)

for nb, ee_gn in zip(all_num_batches, all_ee_gn):
    np.savetxt(save_dir_str + '/generalized_eigenvalues_psf' + str(nb) + '_gn.txt',
    np.savetxt(save_dir_str + '/generalized_eigenvalues_reg_gn.txt', eeR_gn)

np.savetxt(save_dir_str + '/all_num_batches.txt', all_num_batches)
np.savetxt(save_dir_str + '/cond_psf.txt', all_cond)
np.savetxt(save_dir_str + '/condR.txt', np.array([condR]))
np.savetxt(save_dir_str + '/cond_none.txt', np.array([cond_none]))

np.savetxt(save_dir_str + '/cond_psf_gn.txt', all_cond_gn)
np.savetxt(save_dir_str + '/condR_gn.txt', np.array([condR_gn]))
np.savetxt(save_dir_str + '/cond_none_gn.txt', np.array([cond_none_gn]))

ps = " *14 + " + "{:>8}".format("None") + " " + "{:>8}".format("REG") + " "
for nb in all_num_batches:
    ps += "{:>8}".format("PSF" + str(nb)) + " "
ps += "\n"
ps += "-"*(34 + 9*len(all_num_batches)) + "\n"
ps += "cond(P^-1 H) | "
ps += "{:>8}".format(np.format_float_scientific(cond_none, precision=2, trim='k'))
ps += "{:>8}".format(np.format_float_scientific(condR, precision=2, trim='k', ur
```

```

for c in all_cond:
    ps += "{:>8}".format(np.format_float_scientific(c, precision=2, trim='k', ur
ps += "\n"
ps += "cond(P^-1 Hgn) | "
ps += "{:>8}".format(np.format_float_scientific(cond_none_gn, precision=2, trim=
ps += "{:>8}".format(np.format_float_scientific(condR_gn, precision=2, trim='k',
for c_gn in all_cond_gn:
    ps += "{:>8}".format(np.format_float_scientific(c_gn, precision=2, trim='k',
ps += "\n"

print(ps)

#     ps += "{:>9}".format(np.format_float_scientific(g_psf, precision=2, trim='k'
#     ps += " | "
#     ps += "{:<3d}".format(ncg_reg)

#           | None   Reg   PSF3   PSF6   PSF9
#-----#
# P^-1 H   | 923.5  7762  15.59  14.16  13.96
# P^-1 Hgn | 978.0  7760  15.57  14.12  13.98

          | None   REG   PSF1   PSF5   PSF25
-----#
cond(P^-1 H) | 8.71e+02 7.02e+03 1.75e+01 1.39e+01 1.03e+01
cond(P^-1 Hgn) | 9.22e+02 7.02e+03 1.76e+01 1.39e+01 1.06e+01

```

In [60]:

```

print('all_ee=', all_ee)
print('eeR', eeR)

print('all_ee_gn=', all_ee_gn)
print('eeR_gn', eeR_gn)

print('all_num_batches=', all_num_batches)

all_ee= [array([0.20479807, 0.21566055, 0.2244167 , ..., 3.19263348, 3.22725555,
            3.58922253]), array([0.22440423, 0.22527475, 0.23023981, ..., 2.55203292,
2.83170155,
            3.11048486]), array([0.24872499, 0.34108694, 0.38266717, ..., 2.16165625,
2.18867903,
            2.57391076])]
eeR [1.00048710e+00 1.00060306e+00 1.00082011e+00 ... 6.45111156e+03
6.66462254e+03 7.02017867e+03]
all_ee_gn= [array([0.20389256, 0.21162739, 0.22384947, ..., 3.17981707, 3.225801
76,
            3.58685758]), array([0.22367382, 0.22422584, 0.2298343 , ..., 2.55348454,
2.82985104,
            3.10119999]), array([0.24327598, 0.33851536, 0.38180181, ..., 2.15063821,
2.18520331,
            2.57253249])]
eeR_gn [1.00031942e+00 1.00053392e+00 1.00057603e+00 ... 6.44960234e+03
6.66202687e+03 7.01813869e+03]
all_num_batches= [1, 5, 25]

```

Regularization robustness plot

In [62]:

```
all_gammas = np.logspace(np.log10(5e3), np.log10(5e5), 7)[::-1]
```

```
b = np.random.randn(Vh2.dim())
sweep_tol = 1e-6
def first_good_iter(rr): # 1-based indexing
    return np.argwhere(rr < sweep_tol).reshape(-1)[0]+1
```

In [63]:

```
all_num_iter_sweep_gn = list()
num_iter_sweep_reg_gn = list()
num_iter_sweep_none_gn = list()
for gamma in all_gammas:
    print('--- GAMMA ---:', gamma)
    REG.update_gamma(gamma)

# Rebuild reg hmatrix with same block cluster tree as PCH data misfit hmatrix
print('Building Regularization H-Matrix')
R_hmatrix = REG.make_R_hmatrix(all_Hd_pch[0].bct, rtol=1e-6)

all_H_pch = [Hd + R_hmatrix for Hd in all_Hd_pch]
all_preconditioners = [H.factorized_inverse() for H in all_H_pch]

ireg_linop = spla.LinearOperator((Vh2.dim(), Vh2.dim()), matvec=REG.solve_h)
all_p_linop = [spla.LinearOperator((Vh2.dim(), Vh2.dim()), matvec=p.matvec)

print('GN: get truth:')
x_true_gn_sweep, _, _, _ = cg_wrapper(Hgn_linop, b, all_p_linop[-1], tol=1e-7)

all_relres_gn_sweep = list()
all_errs_gn_sweep = list()
for nb, p_linop in zip(all_num_batches, all_p_linop):
    print('GN: psf'+str(nb))
    _, _, relres_gn_sweep, errs_gn_sweep = cg_wrapper(Hgn_linop, b, p_linop,
                                                       x_true=x_true_gn_sweep,
                                                       tol=1e-7)
    all_relres_gn_sweep.append(relres_gn_sweep)
    all_errs_gn_sweep.append(errs_gn_sweep)

print('GN: reg')
_, _, relres_gn_reg_sweep, errs_gn_reg_sweep = cg_wrapper(Hgn_linop, b, ireg_linop,
                                                            x_true=x_true_gn_sweep,
                                                            tol=1e-7)

print('GN: none')
_, _, relres_gn_none_sweep, errs_gn_none_sweep = cg_wrapper(Hgn_linop, b, None,
                                                               x_true=x_true_gn_sweep,
                                                               tol=1e-7)

print('gamma=', gamma)
all_num_iter_sweep_gn.append([])
for k, relres_gn_sweep in enumerate(all_relres_gn_sweep):
    nb = all_num_batches[k]
    good_iter_psf = first_good_iter(relres_gn_sweep)
    all_num_iter_sweep_gn[-1].append(good_iter_psf)
    print('nb=', nb, ', good_iter_psf=', good_iter_psf)

good_iter_reg = first_good_iter(relres_gn_reg_sweep)
num_iter_sweep_reg_gn.append(good_iter_reg)
print('good_iter_reg=', good_iter_reg)

good_iter_none = first_good_iter(relres_gn_none_sweep)
```

```

    num_iter_sweep_none_gn.append(good_iter_none)
    print('good_iter_none=', good_iter_none)

--- GAMMA ---: 499999.9999999994
Building Regularization H-Matrix
  matrix has dimension 1416 x 1416
    no of non-zeroes      = 9746
    matrix is            real valued
    format                = non symmetric
  size of sparse matrix = 163.52 kB
  |S|_F                 = 8.06144e+07
    sparsity constant = 20
    size of H-matrix   = 4.06 MB
  |A|_F                 = 8.06144e+07
|S-A|_2 = 2.38579e-09
  matrix has dimension — H-matrix inverse ( rtol = 1416 x 1416
    no of non-zeroes      = 9746
    matrix is            real valued
    format                = symmetric
  size of sparse matrix = 163.52 kB
  |S|_F                 = 5.18561e+06
    sparsity constant = 20
    size of H-matrix   = 2.29 MB
  |A|_F                 = 5.18561e+06
|S-A|_2 = 4.66653e-09
1e-06 , atol = 1e-14 , overwrite= False )

```

/home/nick/anaconda3/envs/fenics4/lib/python3.9/site-packages/scipy/sparse/linalg/dsolve/linsolve.py:318: SparseEfficiencyWarning: splu requires CSC matrix format

```

  warn('splu requires CSC matrix format', SparseEfficiencyWarning)
    done in 11.692014932632446
    size of inverse = 3361874 bytes

```

— H-matrix multiplication C=A*B
done in 20.56s
size of C = 4.02 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
done in 27.93s
size of C = 8.67 MB

— LU factorisation (rtol = 1e-07)
 GN: get truth:====] 74% ETA 6 s (5.76 GB)
 done in 27.02s] ======
] 82% ETA 4 s (5.76 GB)
 size of LU factor = 19.83 MB

— LU factorisation (rtol = 1e-07)
 done in 26.71s
] 32% ETA 17 s (5.76 GB)
 size of LU factor = 19.59 MB

— LU factorisation (rtol = 1e-07)
 ii= 0 , relres= 1.063279189915153 , err= nan
 done in 26.36s
 size of LU factor = 19.59 MB
 ii= 1 , relres= 0.48673074050585924 , err= nan
 ii= 2 , relres= 0.1675900832539407 , err= nan
 ii= 3 , relres= 0.07296680058786709 , err= nan

```

ii= 4 , relres= 0.040761038029730856 , err= nan
ii= 5 , relres= 0.009261440948402842 , err= nan
ii= 6 , relres= 0.0039854825800466655 , err= nan
ii= 7 , relres= 0.0009990096631616442 , err= nan
ii= 8 , relres= 0.0002817100096737747 , err= nan
ii= 9 , relres= 0.0001122801906646861 , err= nan
ii= 10 , relres= 6.554675914963893e-05 , err= nan
ii= 11 , relres= 2.0164917813249516e-05 , err= nan
ii= 12 , relres= 5.524346869226268e-06 , err= nan
ii= 13 , relres= 1.7962439132529162e-06 , err= nan
ii= 14 , relres= 4.0392633214919736e-07 , err= nan
ii= 15 , relres= 1.057077767291357e-07 , err= nan
ii= 16 , relres= 2.1673613977214485e-08 , err= nan
ii= 17 , relres= 5.967992144153341e-09 , err= nan
ii= 18 , relres= 2.5419048155919877e-09 , err= nan
ii= 19 , relres= 1.1655819386625083e-09 , err= nan
ii= 20 , relres= 1.10484960580222e-09 , err= nan
ii= 21 , relres= 2.7892581939975254e-10 , err= nan
ii= 22 , relres= 8.270521116751847e-11 , err= nan
GN: psf1
ii= 0 , relres= 1.077130528741256 , err= 0.649630466644083
ii= 1 , relres= 0.4923749308249023 , err= 0.14265797640003583
ii= 2 , relres= 0.16699880185193328 , err= 0.11084014390561855
ii= 3 , relres= 0.07370716741891828 , err= 0.060484145915836486
ii= 4 , relres= 0.040764910180429444 , err= 0.014959569957795344
ii= 5 , relres= 0.00917505374035568 , err= 0.007131684001606017
ii= 6 , relres= 0.004085554356513737 , err= 0.0019077760856844362
ii= 7 , relres= 0.0010347641667225824 , err= 0.0004892356418052126
ii= 8 , relres= 0.0002898685109442035 , err= 0.00017018902349016614
ii= 9 , relres= 0.00011514903240378048 , err= 3.9303161683417813e-05
ii= 10 , relres= 3.9085787388573175e-05 , err= 2.7584706528491988e-05
ii= 11 , relres= 2.3309336724011446e-05 , err= 1.1301305482788632e-05
ii= 12 , relres= 5.651557193255193e-06 , err= 3.451709654168366e-06
ii= 13 , relres= 1.9779777306673216e-06 , err= 8.235460523524096e-07
ii= 14 , relres= 4.279304793507761e-07 , err= 2.3441052690546935e-07
ii= 15 , relres= 1.1271291069839346e-07 , err= 4.4610560790092355e-08
ii= 16 , relres= 2.3958970984695766e-08 , err= 1.0604569782873829e-08
GN: psf5
ii= 0 , relres= 1.0664003024055295 , err= 0.632707834627483
ii= 1 , relres= 0.48826371453516837 , err= 0.14138414271101954
ii= 2 , relres= 0.16877866569957437 , err= 0.11085701489120328
ii= 3 , relres= 0.07319426080523314 , err= 0.06071749422288376
ii= 4 , relres= 0.04077642089607935 , err= 0.01496924246955277
ii= 5 , relres= 0.009296720196125699 , err= 0.007041095838476593
ii= 6 , relres= 0.003995864224077308 , err= 0.001876816843378945
ii= 7 , relres= 0.0010040089739360286 , err= 0.0004874090550990526
ii= 8 , relres= 0.0002822739736173991 , err= 0.0001588551528253861
ii= 9 , relres= 0.00011308698207284173 , err= 3.499029938552161e-05
ii= 10 , relres= 7.409059889993777e-05 , err= 3.7366147119817916e-05
ii= 11 , relres= 2.045946873086546e-05 , err= 1.1366230385690301e-05
ii= 12 , relres= 5.499112716418087e-06 , err= 3.076302239448373e-06
ii= 13 , relres= 1.8026845480174933e-06 , err= 7.923529425035185e-07
ii= 14 , relres= 4.0574641999764337e-07 , err= 2.2166888229014676e-07
ii= 15 , relres= 1.0655174607590492e-07 , err= 4.116870891429529e-08
ii= 16 , relres= 2.2035357253055986e-08 , err= 1.0013705859139379e-08
GN: psf25
ii= 0 , relres= 1.063279189915153 , err= 0.6282415241518731
ii= 1 , relres= 0.48673074050585924 , err= 0.14082743163002956
ii= 2 , relres= 0.1675900832539407 , err= 0.11064857175615864
ii= 3 , relres= 0.07296680058786709 , err= 0.06058120801987308
ii= 4 , relres= 0.040761038029730856 , err= 0.014996713981851244

```

```

ii= 5 , relres= 0.009261440948402842 , err= 0.0070024398682488045
ii= 6 , relres= 0.0039854825800466655 , err= 0.0018675666256991737
ii= 7 , relres= 0.0009990096631616442 , err= 0.00048721960075988184
ii= 8 , relres= 0.0002817100096737747 , err= 0.00015815692667436006
ii= 9 , relres= 0.0001122801906646861 , err= 3.5090832871067704e-05
ii= 10 , relres= 6.554675914963893e-05 , err= 3.627227943042848e-05
ii= 11 , relres= 2.0164917813249516e-05 , err= 1.1253272577574392e-05
ii= 12 , relres= 5.524346869226268e-06 , err= 3.0600015080200348e-06
ii= 13 , relres= 1.7962439132529162e-06 , err= 7.878270846991166e-07
ii= 14 , relres= 4.0392633214919736e-07 , err= 2.1976168147523923e-07
ii= 15 , relres= 1.057077767291357e-07 , err= 4.064290247046692e-08
ii= 16 , relres= 2.1673613977214485e-08 , err= 1.0236970807799329e-08
GN: reg
ii= 0 , relres= 0.153730471107496 , err= 0.2004154044230917
ii= 1 , relres= 0.03283709103675601 , err= 0.050806795107733366
ii= 2 , relres= 0.006920474504587341 , err= 0.01051169328559732
ii= 3 , relres= 0.0012324060106256368 , err= 0.0019541492358007228
ii= 4 , relres= 0.0002949319619363773 , err= 0.0005183814810386349
ii= 5 , relres= 6.941022777095549e-05 , err= 0.00010105888349250261
ii= 6 , relres= 1.471338483263153e-05 , err= 2.0890411848107387e-05
ii= 7 , relres= 3.3100494653262994e-06 , err= 5.590329257624206e-06
ii= 8 , relres= 6.650748644097365e-07 , err= 1.0078724957038441e-06
ii= 9 , relres= 1.3232036559626438e-07 , err= 2.2038560913893266e-07
ii= 10 , relres= 3.370833370122833e-08 , err= 4.541444535043103e-08
GN: none
ii= 0 , relres= 1.2040564875067676 , err= 0.9675110632026849
ii= 1 , relres= 1.1326468970657555 , err= 0.9373191562187113
ii= 2 , relres= 1.075662904854587 , err= 0.9007330502415712
ii= 3 , relres= 1.025119895658502 , err= 0.8625913087236808
ii= 4 , relres= 0.9298399708633437 , err= 0.8175639125415045
ii= 5 , relres= 0.8669780047977627 , err= 0.7764243755338092
ii= 6 , relres= 0.8171548322779739 , err= 0.7343527801824982
ii= 7 , relres= 0.7384568158012951 , err= 0.6965737700803013
ii= 8 , relres= 0.6906708554067031 , err= 0.6537154736233322
ii= 9 , relres= 0.6291203032990245 , err= 0.6174700726114527
ii= 10 , relres= 0.5727413542772941 , err= 0.5849411288976244
ii= 11 , relres= 0.5495547909232693 , err= 0.5531831383310308
ii= 12 , relres= 0.4714584065634697 , err= 0.5271597840534139
ii= 13 , relres= 0.43318969231677235 , err= 0.5015593876830405
ii= 14 , relres= 0.4104215985129966 , err= 0.4790739641150984
ii= 15 , relres= 0.3702271153727576 , err= 0.4571577434834061
ii= 16 , relres= 0.3424148769805686 , err= 0.4384142287531629
ii= 17 , relres= 0.3293167594212701 , err= 0.42058720579663655
ii= 18 , relres= 0.27776054924043864 , err= 0.4047723298482057
ii= 19 , relres= 0.2657851676188094 , err= 0.3902902141758047
ii= 20 , relres= 0.2380390853519925 , err= 0.3765776901579651
ii= 21 , relres= 0.21857603062438988 , err= 0.3634986055981094
ii= 22 , relres= 0.19972742969770316 , err= 0.3508275627981775
ii= 23 , relres= 0.19026995457057172 , err= 0.3405370455417298
ii= 24 , relres= 0.17395984238564258 , err= 0.33057471567216257
ii= 25 , relres= 0.1702960131610739 , err= 0.31918969443749334
ii= 26 , relres= 0.1543124057601984 , err= 0.3075316368888576
ii= 27 , relres= 0.14489807788111767 , err= 0.29614330084277646
ii= 28 , relres= 0.13302572375767696 , err= 0.2854168512856406
ii= 29 , relres= 0.12959966093844918 , err= 0.2757037042539086
ii= 30 , relres= 0.12602746232037504 , err= 0.2649822482390415
ii= 31 , relres= 0.12204735881807566 , err= 0.2541533184110022
ii= 32 , relres= 0.11531419148151213 , err= 0.24321368785929953
ii= 33 , relres= 0.11491214604670795 , err= 0.23152152610816232
ii= 34 , relres= 0.11440433887238159 , err= 0.22075918262355534
ii= 35 , relres= 0.10570464163820907 , err= 0.21046463175109378

```

```
ii= 36 , relres= 0.09843952890186454 , err= 0.19967813934127795
ii= 37 , relres= 0.0950487945712745 , err= 0.18911899792120598
ii= 38 , relres= 0.0955722046657739 , err= 0.17900585250648152
ii= 39 , relres= 0.08925825122318064 , err= 0.16697138437126466
ii= 40 , relres= 0.08576213031462668 , err= 0.15532785996026435
ii= 41 , relres= 0.07794348081220334 , err= 0.14500402533218218
ii= 42 , relres= 0.07630671145079287 , err= 0.1352147856857762
ii= 43 , relres= 0.07402422108087685 , err= 0.1266254434958574
ii= 44 , relres= 0.07337029513746106 , err= 0.11769918342001814
ii= 45 , relres= 0.08171236044472334 , err= 0.10994237623052094
ii= 46 , relres= 0.07183100769604946 , err= 0.10322383800223449
ii= 47 , relres= 0.06243993061800838 , err= 0.09547086437362937
ii= 48 , relres= 0.06234463614582815 , err= 0.08790791518430392
ii= 49 , relres= 0.05649023444157471 , err= 0.08116147875669337
ii= 50 , relres= 0.051868103500238814 , err= 0.07508601162569883
ii= 51 , relres= 0.049433795794445234 , err= 0.06959580012153027
ii= 52 , relres= 0.041823287821560834 , err= 0.06436622066095081
ii= 53 , relres= 0.03775204887854097 , err= 0.059951002070953566
ii= 54 , relres= 0.035513992904156855 , err= 0.05608452114414469
ii= 55 , relres= 0.03239929229404864 , err= 0.05229778172898975
ii= 56 , relres= 0.0328982734568715 , err= 0.04874803755252288
ii= 57 , relres= 0.02908362423754112 , err= 0.04555229319273546
ii= 58 , relres= 0.028523814667163427 , err= 0.042750143076190635
ii= 59 , relres= 0.028495645959830448 , err= 0.040319892456501125
ii= 60 , relres= 0.026784517983650134 , err= 0.03835344408349984
ii= 61 , relres= 0.024953911937947534 , err= 0.036264522902894794
ii= 62 , relres= 0.021897912359106923 , err= 0.03423360592621093
ii= 63 , relres= 0.01930931140478202 , err= 0.032086970457102154
ii= 64 , relres= 0.01873515575374482 , err= 0.03012374660129479
ii= 65 , relres= 0.017303192250473543 , err= 0.028090894937959125
ii= 66 , relres= 0.018500626457805962 , err= 0.02623485995808781
ii= 67 , relres= 0.01807630371596946 , err= 0.024716298001965984
ii= 68 , relres= 0.015775844173464212 , err= 0.023458568930954056
ii= 69 , relres= 0.014060032000816836 , err= 0.021951615531934157
ii= 70 , relres= 0.012858936079331883 , err= 0.020295134657289597
ii= 71 , relres= 0.012356626374683861 , err= 0.018751869407947205
ii= 72 , relres= 0.011799318664041394 , err= 0.017503221723402507
ii= 73 , relres= 0.011804337283210906 , err= 0.016366493006287966
ii= 74 , relres= 0.011799308365475991 , err= 0.015434779001065834
ii= 75 , relres= 0.009963258455494445 , err= 0.014484639466329758
ii= 76 , relres= 0.009010860114762608 , err= 0.013374654316134509
ii= 77 , relres= 0.009017459985911016 , err= 0.012334183979951008
ii= 78 , relres= 0.010444287078685346 , err= 0.011569566759853326
ii= 79 , relres= 0.008086002555366434 , err= 0.010825546381666364
ii= 80 , relres= 0.007704681563194356 , err= 0.010051494729862371
ii= 81 , relres= 0.007937354268887937 , err= 0.009472328103467199
ii= 82 , relres= 0.006501175719302803 , err= 0.008807328835557656
ii= 83 , relres= 0.00614025570139524 , err= 0.008100531663995464
ii= 84 , relres= 0.005837814975658819 , err= 0.007403554287425149
ii= 85 , relres= 0.005425618112599267 , err= 0.006688829250304277
ii= 86 , relres= 0.0049427141368539405 , err= 0.0060917406632731465
ii= 87 , relres= 0.005169021679944405 , err= 0.005656234298908123
ii= 88 , relres= 0.004419027426009608 , err= 0.005266135475283889
ii= 89 , relres= 0.003956045611893278 , err= 0.004807037275754023
ii= 90 , relres= 0.003634852526884349 , err= 0.004349559733616992
ii= 91 , relres= 0.0032536143908353044 , err= 0.003920184653622459
ii= 92 , relres= 0.0034171953619959055 , err= 0.0036399650316495972
ii= 93 , relres= 0.0033489681621242293 , err= 0.003368685079265552
ii= 94 , relres= 0.002756253527020701 , err= 0.003083175527974522
ii= 95 , relres= 0.0026234347723037652 , err= 0.0028033394466687833
ii= 96 , relres= 0.002337702924558185 , err= 0.0025657502200158453
```

```
ii= 97 , relres= 0.0023609452222784636 , err= 0.0023768978591819957
ii= 98 , relres= 0.0020380636563778905 , err= 0.002207303007220669
ii= 99 , relres= 0.0017995960561136078 , err= 0.00200506768201434
ii= 100 , relres= 0.0016310313029557354 , err= 0.001821594929403345
ii= 101 , relres= 0.0015248360876799118 , err= 0.0016556381825026665
ii= 102 , relres= 0.0015280572976717176 , err= 0.0015255679919635183
ii= 103 , relres= 0.0014425740913124093 , err= 0.0014070162830731915
ii= 104 , relres= 0.001284174067348849 , err= 0.001277060261448724
ii= 105 , relres= 0.0012367649811374992 , err= 0.0011355290857882135
ii= 106 , relres= 0.0012468551605582588 , err= 0.0010418577324564219
ii= 107 , relres= 0.001099770916508114 , err= 0.0009632136755482187
ii= 108 , relres= 0.0009173246910729514 , err= 0.0008622608406099731
ii= 109 , relres= 0.0007932151692224131 , err= 0.0007791558365344666
ii= 110 , relres= 0.0007429898601621752 , err= 0.0006959090134071508
ii= 111 , relres= 0.0008254889245468454 , err= 0.0006391536238645493
ii= 112 , relres= 0.000703309702195182 , err= 0.0005952779780218282
ii= 113 , relres= 0.0006288091314426794 , err= 0.0005356749139367414
ii= 114 , relres= 0.0005822193878896614 , err= 0.0004814123721917743
ii= 115 , relres= 0.0005319394764427813 , err= 0.00043895437300750685
ii= 116 , relres= 0.0005053803840097201 , err= 0.000392165967301254
ii= 117 , relres= 0.0004441446090651874 , err= 0.00034474574160082327
ii= 118 , relres= 0.00045537054894127625 , err= 0.0003104823999403962
ii= 119 , relres= 0.0003833719617317126 , err= 0.00028697364398886933
ii= 120 , relres= 0.0003236021479194054 , err= 0.000259322840687969
ii= 121 , relres= 0.00027214630573399093 , err= 0.0002348137261407795
ii= 122 , relres= 0.00024337884593439375 , err= 0.00021416342633616092
ii= 123 , relres= 0.0002316018140056093 , err= 0.0001992134248763591
ii= 124 , relres= 0.0001995074714570116 , err= 0.00018501833345041304
ii= 125 , relres= 0.0001783009168973781 , err= 0.00017189365668016804
ii= 126 , relres= 0.00016565148457179694 , err= 0.00015785784458103035
ii= 127 , relres= 0.0001639302356367904 , err= 0.0001473732752614004
ii= 128 , relres= 0.00015508989601270491 , err= 0.00013856231453635432
ii= 129 , relres= 0.00012652876770418857 , err= 0.0001277201480431249
ii= 130 , relres= 0.00011736597230871581 , err= 0.00011720113547205621
ii= 131 , relres= 0.00011299168901929647 , err= 0.00010709876617029712
ii= 132 , relres= 0.00010985076095263848 , err= 9.829839484957106e-05
ii= 133 , relres= 9.630717639808028e-05 , err= 9.052660938596752e-05
ii= 134 , relres= 8.069212172010869e-05 , err= 8.347659904729548e-05
ii= 135 , relres= 7.996861843276963e-05 , err= 7.650516168383006e-05
ii= 136 , relres= 8.11542546859359e-05 , err= 7.125282634926437e-05
ii= 137 , relres= 6.86824874648943e-05 , err= 6.649201121751575e-05
ii= 138 , relres= 6.12253244967205e-05 , err= 6.102854654755235e-05
ii= 139 , relres= 5.693769642059228e-05 , err= 5.6718214573364625e-05
ii= 140 , relres= 4.983779351496969e-05 , err= 5.272166706898197e-05
ii= 141 , relres= 4.446689515363949e-05 , err= 4.8722812399005014e-05
ii= 142 , relres= 4.11733144358838e-05 , err= 4.491446749219289e-05
ii= 143 , relres= 3.8270284117414e-05 , err= 4.1008324970793084e-05
ii= 144 , relres= 4.4536322971505905e-05 , err= 3.7767654966219646e-05
ii= 145 , relres= 3.661028588826797e-05 , err= 3.539633325792127e-05
ii= 146 , relres= 3.5411565229224716e-05 , err= 3.2745542734906664e-05
ii= 147 , relres= 2.8920843068584902e-05 , err= 3.0148097319795086e-05
ii= 148 , relres= 2.6320440880152717e-05 , err= 2.7404992611083616e-05
ii= 149 , relres= 2.4073543107472045e-05 , err= 2.4828458432055467e-05
ii= 150 , relres= 2.2589082135653734e-05 , err= 2.247797683266937e-05
ii= 151 , relres= 2.2745971937688166e-05 , err= 2.0308214818457723e-05
ii= 152 , relres= 2.0876450797635726e-05 , err= 1.8728112588817065e-05
ii= 153 , relres= 1.9417333562719825e-05 , err= 1.6980871833291626e-05
ii= 154 , relres= 1.727368061744425e-05 , err= 1.5203726370127978e-05
ii= 155 , relres= 1.6450346054765935e-05 , err= 1.3662668366956419e-05
ii= 156 , relres= 1.5273278960560375e-05 , err= 1.2297504423132468e-05
ii= 157 , relres= 1.5243287870804622e-05 , err= 1.107633788893781e-05
```

```

ii= 158 , relres= 1.3372486295347535e-05 , err= 1.0169701752966308e-05
ii= 159 , relres= 1.113815932448434e-05 , err= 9.086898476388911e-06
ii= 160 , relres= 1.0411469476977172e-05 , err= 8.14678293138286e-06
ii= 161 , relres= 1.035294841285762e-05 , err= 7.460113517658547e-06
ii= 162 , relres= 8.217667517548041e-06 , err= 6.803613676230534e-06
ii= 163 , relres= 7.366731980176824e-06 , err= 5.997342949502732e-06
ii= 164 , relres= 6.47088623957384e-06 , err= 5.277373586416645e-06
ii= 165 , relres= 6.087221483524775e-06 , err= 4.719262130707141e-06
ii= 166 , relres= 5.760927236583221e-06 , err= 4.2981557874364596e-06
ii= 167 , relres= 4.881098432485414e-06 , err= 3.926209991242957e-06
ii= 168 , relres= 4.5675957155567055e-06 , err= 3.591314555731583e-06
ii= 169 , relres= 4.557888032441633e-06 , err= 3.3435107405317087e-06
ii= 170 , relres= 3.681333112112283e-06 , err= 3.055654040049796e-06
ii= 171 , relres= 3.60689218148118e-06 , err= 2.7848546696707527e-06
ii= 172 , relres= 3.459661070758252e-06 , err= 2.566225202282386e-06
ii= 173 , relres= 2.679084796394559e-06 , err= 2.325953158825687e-06
ii= 174 , relres= 2.468902243800966e-06 , err= 2.1078506022865876e-06
ii= 175 , relres= 2.262660748862534e-06 , err= 1.9088921279257583e-06
ii= 176 , relres= 2.114938933703586e-06 , err= 1.7453282137765386e-06
ii= 177 , relres= 1.8168778464322905e-06 , err= 1.589246094593221e-06
ii= 178 , relres= 1.8602709559973351e-06 , err= 1.4555646248175626e-06
ii= 179 , relres= 1.7420809139868448e-06 , err= 1.3723604692925968e-06
ii= 180 , relres= 1.4278943214001678e-06 , err= 1.2631733446594178e-06
ii= 181 , relres= 1.4895507103858434e-06 , err= 1.1697489051450962e-06
ii= 182 , relres= 1.2055457494421815e-06 , err= 1.0822076657019196e-06
ii= 183 , relres= 1.1767418267081327e-06 , err= 9.739197811734804e-07
ii= 184 , relres= 1.1980267683148313e-06 , err= 9.049464656383831e-07
ii= 185 , relres= 8.742494521451526e-07 , err= 8.407410211772802e-07
ii= 186 , relres= 7.780272386235132e-07 , err= 7.656344285264911e-07
ii= 187 , relres= 7.216231734480307e-07 , err= 6.994937249321805e-07
ii= 188 , relres= 6.03764965854827e-07 , err= 6.340237529362387e-07
ii= 189 , relres= 5.66330655389273e-07 , err= 5.818271913319773e-07
ii= 190 , relres= 5.453621464488995e-07 , err= 5.387571214302261e-07
ii= 191 , relres= 5.447537387784813e-07 , err= 5.12974883182967e-07
ii= 192 , relres= 4.3962528181166615e-07 , err= 4.758597737234768e-07
ii= 193 , relres= 3.8683592350656426e-07 , err= 4.415323569999973e-07
ii= 194 , relres= 3.769909710107463e-07 , err= 4.1208617473277013e-07
ii= 195 , relres= 3.227750683819742e-07 , err= 3.8594349960491855e-07
ii= 196 , relres= 2.8675594859951676e-07 , err= 3.5943969955485477e-07
ii= 197 , relres= 2.6580672289267907e-07 , err= 3.313720007701773e-07
ii= 198 , relres= 2.7020740620899484e-07 , err= 3.039331965811861e-07
ii= 199 , relres= 2.855114741295731e-07 , err= 2.866813788732527e-07
ii= 200 , relres= 2.285904278326335e-07 , err= 2.6829335847148817e-07
ii= 201 , relres= 2.3888850877237274e-07 , err= 2.532095602365519e-07
ii= 202 , relres= 1.8271048326534033e-07 , err= 2.3826047510582392e-07
ii= 203 , relres= 1.7649367041584483e-07 , err= 2.205240990078312e-07
ii= 204 , relres= 1.6444237151523556e-07 , err= 2.0313635116609295e-07
ii= 205 , relres= 1.62220812169326e-07 , err= 1.86473521010247e-07
ii= 206 , relres= 1.4211586933099692e-07 , err= 1.7332897809830553e-07
ii= 207 , relres= 1.2395383574139593e-07 , err= 1.5829273020093196e-07
ii= 208 , relres= 1.1882185360025493e-07 , err= 1.446861358221635e-07
ii= 209 , relres= 1.225615207712606e-07 , err= 1.3342279559270303e-07
ii= 210 , relres= 1.161673328706314e-07 , err= 1.247820715658192e-07
ii= 211 , relres= 1.0184845442700686e-07 , err= 1.1415423774359481e-07
ii= 212 , relres= 1.1418599598584215e-07 , err= 1.0553841875907393e-07
ii= 213 , relres= 9.737284522632649e-08 , err= 9.706521355695992e-08
gamma= 499999.9999999994
nb= 1 , good_iter_psf= 15
nb= 5 , good_iter_psf= 15
nb= 25 , good_iter_psf= 15
good_iter_reg= 9

```

```

good_iter_none= 186
--- GAMMA ---: 232079.44168063859
Building Regularization H-Matrix
  matrix has dimension 1416 x 1416
    no of non-zeroes      = 9746
    matrix is            real valued
    format                = non symmetric
  size of sparse matrix = 163.52 kB
|S|_F                  = 3.74179e+07
  sparsity constant = 20
  size of H-matrix   = 4.06 MB
|A|_F                  = 3.74179e+07
|S-A|_2 = 8.63985e-09
  matrix has dimension — H-matrix inverse ( rtol = 1416 x 1416
    no of non-zeroes      = 9746
    matrix is            real valued
    format                = symmetric
  size of sparse matrix = 163.52 kB
|S|_F                  = 5.18561e+06
  sparsity constant = 20
  size of H-matrix   = 2.29 MB
|A|_F                  = 5.18561e+06
|S-A|_2 = 4.66653e-09
1e-06 , atol = 1e-14 , overwrite= False )
done in 11.912899494171143
size of inverse = 3361874 bytes

```

— H-matrix multiplication C=A*B
done in 20.16s
size of C = 3.99 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
done in 28.27s
size of C = 8.66 MB

— LU factorisation (rtol = 1e-07)
[====GN: get truth:
done in 26.98s
=====] 67% ETA 8 s (5.77 GB)
size of LU factor = 21.34 MB

— LU factorisation (rtol = 1e-07)
done in 26.75s
size of LU factor = 21.14 MB

— LU factorisation (rtol = 1e-07)
[==== , relres= 0.4662499572289614 , err= nan
] 12% ETA 23 s (5.78 GB)
done in 26.83s
size of LU factor = 21.11 MB
ii= 1 , relres= 0.2204308264837486 , err= nan
ii= 2 , relres= 0.05612359040303857 , err= nan
ii= 3 , relres= 0.028172526718256815 , err= nan
ii= 4 , relres= 0.014265331994199456 , err= nan
ii= 5 , relres= 0.003698488460525549 , err= nan
ii= 6 , relres= 0.0011541355317014198 , err= nan
ii= 7 , relres= 0.0002527471187870579 , err= nan
ii= 8 , relres= 6.07327752594554e-05 , err= nan
ii= 9 , relres= 1.9783204677417657e-05 , err= nan
ii= 10 , relres= 3.2779001488653163e-06 , err= nan
ii= 11 , relres= 7.718640367778765e-07 , err= nan

B)

```

ii= 12 , relres= 1.7635741643613988e-07 , err= nan
ii= 13 , relres= 3.50125974949366e-08 , err= nan
ii= 14 , relres= 8.549260988609336e-09 , err= nan
ii= 15 , relres= 3.215444422091726e-09 , err= nan
ii= 16 , relres= 1.1917370983104492e-09 , err= nan
ii= 17 , relres= 2.957717088995973e-10 , err= nan
ii= 18 , relres= 5.4330466523643726e-11 , err= nan
GN: psf1
ii= 0 , relres= 0.4795998414287796 , err= 0.2057089856482019
ii= 1 , relres= 0.23481662497643555 , err= 0.08406984517756096
ii= 2 , relres= 0.05813916883192597 , err= 0.05978628247017987
ii= 3 , relres= 0.028666933946221707 , err= 0.01585241686689925
ii= 4 , relres= 0.014455618237305732 , err= 0.007590307556812779
ii= 5 , relres= 0.003834157318262686 , err= 0.002845143188317463
ii= 6 , relres= 0.001229350683037296 , err= 0.000640114334795671
ii= 7 , relres= 0.0002573373769558904 , err= 0.0001417551400063734
ii= 8 , relres= 6.079066572172485e-05 , err= 3.622523566882258e-05
ii= 9 , relres= 1.8140225910168497e-05 , err= 7.350015021375764e-06
ii= 10 , relres= 3.071723451693676e-06 , err= 2.0870179523486087e-06
ii= 11 , relres= 7.759744543838923e-07 , err= 4.221752499091043e-07
ii= 12 , relres= 1.9177227585522198e-07 , err= 9.446449331357638e-08
ii= 13 , relres= 3.577967114145811e-08 , err= 2.1282304944262118e-08
GN: psf5
ii= 0 , relres= 0.46977525530308434 , err= 0.1944902286622361
ii= 1 , relres= 0.22396538477453387 , err= 0.08294693114287648
ii= 2 , relres= 0.056731366726406655 , err= 0.05885207670863469
ii= 3 , relres= 0.02825118954412645 , err= 0.01590307809028221
ii= 4 , relres= 0.01458555782803941 , err= 0.007331352413958272
ii= 5 , relres= 0.0037371617772297455 , err= 0.0027304559967110936
ii= 6 , relres= 0.0011762116831918765 , err= 0.0006099057859811401
ii= 7 , relres= 0.00025362153055087926 , err= 0.0001395037220806042
ii= 8 , relres= 6.1061147759406e-05 , err= 3.806621818275145e-05
ii= 9 , relres= 2.0068269071443113e-05 , err= 7.965826360704715e-06
ii= 10 , relres= 3.3058667197644803e-06 , err= 2.0360580323881034e-06
ii= 11 , relres= 7.691876708393042e-07 , err= 4.1425560481973963e-07
ii= 12 , relres= 1.7754433924748058e-07 , err= 8.908780593688008e-08
ii= 13 , relres= 3.415656817817812e-08 , err= 1.9662526288826046e-08
GN: psf25
ii= 0 , relres= 0.4662499572289614 , err= 0.19105715565983988
ii= 1 , relres= 0.2204308264837486 , err= 0.08251349219623018
ii= 2 , relres= 0.05612359040303857 , err= 0.05843553727999585
ii= 3 , relres= 0.028172526718256815 , err= 0.015616830810544683
ii= 4 , relres= 0.014265331994199456 , err= 0.007317986281429374
ii= 5 , relres= 0.003698488460525549 , err= 0.0026838831009831044
ii= 6 , relres= 0.0011541355317014198 , err= 0.0005990080641846309
ii= 7 , relres= 0.0002527471187870579 , err= 0.00013837070015723746
ii= 8 , relres= 6.07327752594554e-05 , err= 3.791782711962095e-05
ii= 9 , relres= 1.9783204677417657e-05 , err= 7.885998999852292e-06
ii= 10 , relres= 3.2779001488653163e-06 , err= 2.0012053398707876e-06
ii= 11 , relres= 7.718640367778765e-07 , err= 4.113779864453576e-07
ii= 12 , relres= 1.7635741643613988e-07 , err= 8.888025248803065e-08
ii= 13 , relres= 3.501259749493666e-08 , err= 1.956711134568294e-08
GN: reg
ii= 0 , relres= 0.46454052984251465 , err= 0.42337688997244133
ii= 1 , relres= 0.21828871843085096 , err= 0.21603014358017256
ii= 2 , relres= 0.09184784741976863 , err= 0.1032115499178567
ii= 3 , relres= 0.03752656179597604 , err= 0.041404281209896206
ii= 4 , relres= 0.018650101270140804 , err= 0.021256210619334595
ii= 5 , relres= 0.008838926220305906 , err= 0.009112412655027956
ii= 6 , relres= 0.004030167681298443 , err= 0.004216706174769654
ii= 7 , relres= 0.002000621392480033 , err= 0.0021965470774574485

```

```

ii= 8 , relres= 0.0008460935570737242 , err= 0.0009531980464308472
ii= 9 , relres= 0.00038425333325053224 , err= 0.00040563649855576684
ii= 10 , relres= 0.00018587189505344311 , err= 0.0001926286697552473
ii= 11 , relres= 7.872258724289919e-05 , err= 8.359091546395e-05
ii= 12 , relres= 3.258446108240888e-05 , err= 4.110833526992527e-05
ii= 13 , relres= 1.2708659908637733e-05 , err= 1.3756560021391296e-05
ii= 14 , relres= 5.497178190959811e-06 , err= 5.868442160949795e-06
ii= 15 , relres= 1.9891406004089827e-06 , err= 2.3349223862268278e-06
ii= 16 , relres= 6.665194857472776e-07 , err= 6.981162770288109e-07
ii= 17 , relres= 2.4611826140308744e-07 , err= 2.483502097652384e-07
ii= 18 , relres= 9.998196372526986e-08 , err= 1.0119656657640931e-07
GN: none
ii= 0 , relres= 1.1958207614844747 , err= 0.9505407585703037
ii= 1 , relres= 1.1124761497247517 , err= 0.9062996579254985
ii= 2 , relres= 1.0395040860924893 , err= 0.8547636794451212
ii= 3 , relres= 0.9717499200947244 , err= 0.8033487402571831
ii= 4 , relres= 0.860659349735071 , err= 0.7455527119113008
ii= 5 , relres= 0.7822024881191066 , err= 0.6954825258235369
ii= 6 , relres= 0.7172543801933248 , err= 0.6468939875672437
ii= 7 , relres= 0.6296781961943737 , err= 0.6054525281708105
ii= 8 , relres= 0.5709226038526839 , err= 0.5608243764194802
ii= 9 , relres= 0.5049611174749293 , err= 0.5248944529477159
ii= 10 , relres= 0.446982020160666957 , err= 0.493877745776982
ii= 11 , relres= 0.418585569546756 , err= 0.4645015329784336
ii= 12 , relres= 0.3508414019819272 , err= 0.4409122377570326
ii= 13 , relres= 0.3157925042352414 , err= 0.41799786053708804
ii= 14 , relres= 0.29442443477674207 , err= 0.3979152212485524
ii= 15 , relres= 0.2630467457542293 , err= 0.3781753441185966
ii= 16 , relres= 0.24187478446841174 , err= 0.3610104242394673
ii= 17 , relres= 0.23252218579140999 , err= 0.34431901758828193
ii= 18 , relres= 0.19616296787290444 , err= 0.3291445036294517
ii= 19 , relres= 0.18776903520073443 , err= 0.3149907261360268
ii= 20 , relres= 0.16869887418170534 , err= 0.3013285633375326
ii= 21 , relres= 0.15575179787412174 , err= 0.28804985317958415
ii= 22 , relres= 0.14323890652028645 , err= 0.2749705012173737
ii= 23 , relres= 0.1365745630456385 , err= 0.26427176001525887
ii= 24 , relres= 0.12440941365052241 , err= 0.2539463835274855
ii= 25 , relres= 0.1210811983102206 , err= 0.24229786342218465
ii= 26 , relres= 0.10873194528192973 , err= 0.23056692722066915
ii= 27 , relres= 0.1012571019754886 , err= 0.2193369619805608
ii= 28 , relres= 0.09236356277757474 , err= 0.20890063825444527
ii= 29 , relres= 0.08946105203633584 , err= 0.19955195422640917
ii= 30 , relres= 0.08655676007104221 , err= 0.18930597548569508
ii= 31 , relres= 0.08295138034375231 , err= 0.17910034328284374
ii= 32 , relres= 0.07723604217999215 , err= 0.1690211197618071
ii= 33 , relres= 0.07597361147160853 , err= 0.15851963113947792
ii= 34 , relres= 0.07483558186230527 , err= 0.14902525214337445
ii= 35 , relres= 0.06862823034013595 , err= 0.1400296819952916
ii= 36 , relres= 0.06376115192069172 , err= 0.1306246979030554
ii= 37 , relres= 0.061401620913662476 , err= 0.12140378177941522
ii= 38 , relres= 0.06122628891509049 , err= 0.11261939653216267
ii= 39 , relres= 0.056483840942773436 , err= 0.10233940218035749
ii= 40 , relres= 0.05342232529441847 , err= 0.09265766233777452
ii= 41 , relres= 0.047815752497417596 , err= 0.08432325678019692
ii= 42 , relres= 0.0465354409630666 , err= 0.07665129915178745
ii= 43 , relres= 0.04606142734732597 , err= 0.07031403030846363
ii= 44 , relres= 0.04822276105451581 , err= 0.06471512386960046
ii= 45 , relres= 0.04338264819386176 , err= 0.05956969280861591
ii= 46 , relres= 0.037845180839607744 , err= 0.05340991102984752
ii= 47 , relres= 0.033905105494069526 , err= 0.047833661793477165
ii= 48 , relres= 0.0331073418050457 , err= 0.04294429264552005

```

```
ii= 49 , relres= 0.029120876376064284 , err= 0.03881146764592535
ii= 50 , relres= 0.025982411043451902 , err= 0.035259697055733286
ii= 51 , relres= 0.02420166723795664 , err= 0.03215146275951231
ii= 52 , relres= 0.02009154881899208 , err= 0.02924279787288575
ii= 53 , relres= 0.017874673114590154 , err= 0.026807199382649957
ii= 54 , relres= 0.01665986878977444 , err= 0.024660742279039315
ii= 55 , relres= 0.015020046928017417 , err= 0.02254766658871962
ii= 56 , relres= 0.015130091300785466 , err= 0.02061777362637429
ii= 57 , relres= 0.014029472487419226 , err= 0.019009187548346622
ii= 58 , relres= 0.013879065146266049 , err= 0.017869503066066297
ii= 59 , relres= 0.01166236375659842 , err= 0.016661703947145383
ii= 60 , relres= 0.010186283255784351 , err= 0.015448322673855774
ii= 61 , relres= 0.009739942130042409 , err= 0.014339172794127854
ii= 62 , relres= 0.008601825168805855 , err= 0.013350097465357135
ii= 63 , relres= 0.00753907819439375 , err= 0.012334051626651802
ii= 64 , relres= 0.00723994323285326 , err= 0.01140081727737628
ii= 65 , relres= 0.006713880302418648 , err= 0.010433125974385879
ii= 66 , relres= 0.00742678751227646 , err= 0.009615920223230882
ii= 67 , relres= 0.006674480417753652 , err= 0.008919500638647831
ii= 68 , relres= 0.005623200176134213 , err= 0.008227593092745594
ii= 69 , relres= 0.005151353188914713 , err= 0.007464527570147104
ii= 70 , relres= 0.004767423371894164 , err= 0.006644284071769006
ii= 71 , relres= 0.004909397889369841 , err= 0.005903102061554592
ii= 72 , relres= 0.004833593781893239 , err= 0.005387583172586079
ii= 73 , relres= 0.004220621260506332 , err= 0.004858815483693961
ii= 74 , relres= 0.0037998430701549615 , err= 0.0043027382538583635
ii= 75 , relres= 0.0033842832508773255 , err= 0.0037797678517966452
ii= 76 , relres= 0.003325108606117841 , err= 0.003307440373089678
ii= 77 , relres= 0.003290395424563216 , err= 0.0029867841350444254
ii= 78 , relres= 0.0026924506734757655 , err= 0.0026380739478227113
ii= 79 , relres= 0.00258135550721236 , err= 0.0022784952218536467
ii= 80 , relres= 0.002591453070513434 , err= 0.002071625740224236
ii= 81 , relres= 0.0019963534205005543 , err= 0.0018332404999733772
ii= 82 , relres= 0.0017381219455815428 , err= 0.0015684400545443301
ii= 83 , relres= 0.0015992337037637745 , err= 0.0013450512027714853
ii= 84 , relres= 0.0014455417473438514 , err= 0.0011492407352478437
ii= 85 , relres= 0.0013537912500994715 , err= 0.0009772089804113262
ii= 86 , relres= 0.0012387204948374184 , err= 0.0008636837588679039
ii= 87 , relres= 0.0009625168087322577 , err= 0.0007676160936052202
ii= 88 , relres= 0.000807513893529114 , err= 0.000668754009291929
ii= 89 , relres= 0.0007438069234207606 , err= 0.000581826199389011
ii= 90 , relres= 0.0007529491345890748 , err= 0.000514303180734715
ii= 91 , relres= 0.0006332946490258369 , err= 0.00045961833874844896
ii= 92 , relres= 0.00046568696327256066 , err= 0.00040049716797243467
ii= 93 , relres= 0.00045922696478798797 , err= 0.0003465885702112843
ii= 94 , relres= 0.0003956798507669352 , err= 0.00029883308514562094
ii= 95 , relres= 0.0003869641633252168 , err= 0.00026235956831610955
ii= 96 , relres= 0.00032678842491467317 , err= 0.00023333117593206802
ii= 97 , relres= 0.0002718528839823295 , err= 0.00020831838106532072
ii= 98 , relres= 0.00022503680751106522 , err= 0.00018382529514453672
ii= 99 , relres= 0.000198142901055368 , err= 0.00016016471613248588
ii= 100 , relres= 0.00017320084884638945 , err= 0.0001404475366858807
ii= 101 , relres= 0.0001612325615884176 , err= 0.0001244814419920158
ii= 102 , relres= 0.00014533337110873032 , err= 0.00011329116615935048
ii= 103 , relres= 0.00012324034467123493 , err= 0.00010194874084907946
ii= 104 , relres= 0.00011114818754883086 , err= 9.085360891077023e-05
ii= 105 , relres= 0.0001203566796356512 , err= 8.196582429664778e-05
ii= 106 , relres= 8.91136334328169e-05 , err= 7.443702973084873e-05
ii= 107 , relres= 7.624452752060681e-05 , err= 6.676536637856959e-05
ii= 108 , relres= 6.665123069245877e-05 , err= 5.887881392569898e-05
ii= 109 , relres= 5.571316963817435e-05 , err= 5.2766672154677724e-05
```

```
ii= 110 , relres= 5.346571072481677e-05 , err= 4.691188014154891e-05
ii= 111 , relres= 5.6656702126565494e-05 , err= 4.346801055236944e-05
ii= 112 , relres= 4.303067771631146e-05 , err= 3.995895072518612e-05
ii= 113 , relres= 3.912582537864942e-05 , err= 3.5809726795198984e-05
ii= 114 , relres= 3.591573042678472e-05 , err= 3.2204416143960015e-05
ii= 115 , relres= 3.187676080377588e-05 , err= 2.9569471569103185e-05
ii= 116 , relres= 3.0563053518839465e-05 , err= 2.6908011706205802e-05
ii= 117 , relres= 2.9715731075317498e-05 , err= 2.4377022624017816e-05
ii= 118 , relres= 2.422295335052642e-05 , err= 2.2239078356380024e-05
ii= 119 , relres= 1.959601166600179e-05 , err= 1.9998749546756152e-05
ii= 120 , relres= 1.7798920704330906e-05 , err= 1.7996075674910316e-05
ii= 121 , relres= 1.5181900832190614e-05 , err= 1.621724863267148e-05
ii= 122 , relres= 1.3425635726420243e-05 , err= 1.4634101289474911e-05
ii= 123 , relres= 1.3108861111420932e-05 , err= 1.3418338281177768e-05
ii= 124 , relres= 1.238536179656549e-05 , err= 1.239427036834902e-05
ii= 125 , relres= 1.0811091476177306e-05 , err= 1.1506034574468322e-05
ii= 126 , relres= 1.0360039726378776e-05 , err= 1.0554453972945084e-05
ii= 127 , relres= 8.711191747426258e-06 , err= 9.712557983501781e-06
ii= 128 , relres= 7.922735247425331e-06 , err= 8.893866819885928e-06
ii= 129 , relres= 6.971568767571419e-06 , err= 8.016088085758455e-06
ii= 130 , relres= 6.5886848143469586e-06 , err= 7.264554649076435e-06
ii= 131 , relres= 6.769500779490917e-06 , err= 6.661861547419784e-06
ii= 132 , relres= 5.842102366820904e-06 , err= 6.147786431837728e-06
ii= 133 , relres= 4.977656107002954e-06 , err= 5.582294627555052e-06
ii= 134 , relres= 4.29993650143939e-06 , err= 5.1118339055615155e-06
ii= 135 , relres= 4.0561161946423e-06 , err= 4.743425322276861e-06
ii= 136 , relres= 3.502963010198834e-06 , err= 4.34977955477818e-06
ii= 137 , relres= 3.1890497551243796e-06 , err= 3.963249317576e-06
ii= 138 , relres= 3.067041619123622e-06 , err= 3.5800426989572753e-06
ii= 139 , relres= 2.8825613007991696e-06 , err= 3.284473413804572e-06
ii= 140 , relres= 2.4857335608510936e-06 , err= 3.0104086278676274e-06
ii= 141 , relres= 2.1808538744251922e-06 , err= 2.741703414948267e-06
ii= 142 , relres= 1.9914276368313603e-06 , err= 2.5008629085668973e-06
ii= 143 , relres= 1.9248345515615107e-06 , err= 2.2693517756567554e-06
ii= 144 , relres= 1.9740212008082273e-06 , err= 2.0900278421941453e-06
ii= 145 , relres= 1.6434322300342075e-06 , err= 1.90002376310641e-06
ii= 146 , relres= 1.723942349030285e-06 , err= 1.7477332979556e-06
ii= 147 , relres= 1.4921949285994462e-06 , err= 1.602234254501574e-06
ii= 148 , relres= 1.4069232266365535e-06 , err= 1.4808547709988104e-06
ii= 149 , relres= 1.1574366552214763e-06 , err= 1.3381566049399724e-06
ii= 150 , relres= 1.0288979728303873e-06 , err= 1.1930418548972148e-06
ii= 151 , relres= 9.897406173694977e-07 , err= 1.064500990700659e-06
ii= 152 , relres= 1.0103403502304139e-06 , err= 9.641329594797678e-07
ii= 153 , relres= 8.34048774663663e-07 , err= 8.899002137249079e-07
ii= 154 , relres= 7.675280793835467e-07 , err= 7.953216363303253e-07
ii= 155 , relres= 6.913926894604999e-07 , err= 7.121060867693406e-07
ii= 156 , relres= 6.313411245957051e-07 , err= 6.331626498080393e-07
ii= 157 , relres= 5.717566656720924e-07 , err= 5.566336921459726e-07
ii= 158 , relres= 4.998465808516815e-07 , err= 4.820750973681269e-07
ii= 159 , relres= 4.7340160721115133e-07 , err= 4.164914437633127e-07
ii= 160 , relres= 4.66224000540598e-07 , err= 3.6942848463122446e-07
ii= 161 , relres= 3.892271765303509e-07 , err= 3.3078314104456295e-07
ii= 162 , relres= 3.081259556123156e-07 , err= 2.914838644067909e-07
ii= 163 , relres= 2.8245535673350877e-07 , err= 2.546214262561375e-07
ii= 164 , relres= 2.7381344751145813e-07 , err= 2.27213295592874e-07
ii= 165 , relres= 2.2788924811261897e-07 , err= 2.0708818342578523e-07
ii= 166 , relres= 2.0019265794605194e-07 , err= 1.8609619336843777e-07
ii= 167 , relres= 1.9255364057325155e-07 , err= 1.6938577041163153e-07
ii= 168 , relres= 1.569342429003227e-07 , err= 1.5485630821921242e-07
ii= 169 , relres= 1.3422530907801595e-07 , err= 1.4000111893640415e-07
ii= 170 , relres= 1.2076095258538036e-07 , err= 1.253308987895143e-07
```

```

ii= 171 , relres= 1.253611340523443e-07 , err= 1.145466275161239e-07
ii= 172 , relres= 1.1105868529045838e-07 , err= 1.0668912851022644e-07
ii= 173 , relres= 8.611877882112125e-08 , err= 9.687361929533062e-08
gamma= 232079.44168063859
nb= 1 , good_iter_psf= 12
nb= 5 , good_iter_psf= 12
nb= 25 , good_iter_psf= 12
good_iter_reg= 17
good_iter_none= 152
--- GAMMA ---: 107721.7345015941
Building Regularization H-Matrix
    matrix has dimension 1416 x 1416
        no of non-zeroes      = 9746
        matrix is            real valued
        format                = non symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
    |S|_F                 = 1.73678e+07
    sparsity constant = 20
    size of H-matrix   = 4.06 MB
    |A|_F                 = 1.73678e+07
|S-A|_2 = 2.14155e-09
    matrix has dimension — H-matrix inverse ( rtol = 1e-06 , atol = 1e-14 , ove
rwrite= False )
1416 x 1416
    no of non-zeroes      = 9746
    matrix is            real valued
    format                = symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
    |S|_F                 = 5.18561e+06
    sparsity constant = 20
    size of H-matrix   = 2.29 MB
    |A|_F                 = 5.18561e+06
|S-A|_2 = 4.66653e-09
    12.257225513458252 ] 7% ETA 10 s (5.78 GB)
    size of inverse = 3361874 bytes

— H-matrix multiplication C=A*B
    done in 20.35s
    size of C = 3.97 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
    done in 28.60s
    size of C = 8.65 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
    done in 26.84s
    size of LU factor = 22.52 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
    done in 27.00s
    size of LU factor = 22.45 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
    done in 27.01s
    size of LU factor = 22.34 MB
GN: get truth:
ii= 0 , relres= 0.24687527927918707 , err= nan
ii= 1 , relres= 0.04658865550873907 , err= nan
ii= 2 , relres= 0.01626163291140586 , err= nan
ii= 3 , relres= 0.006549805929303358 , err= nan
ii= 4 , relres= 0.0015375856544489652 , err= nan

```

```

ii= 5 , relres= 0.0003213562328596892 , err= nan
ii= 6 , relres= 9.525664387260222e-05 , err= nan
ii= 7 , relres= 2.173159003410076e-05 , err= nan
ii= 8 , relres= 8.036288856093628e-06 , err= nan
ii= 9 , relres= 1.6315275177891015e-06 , err= nan
ii= 10 , relres= 2.625830819528505e-07 , err= nan
ii= 11 , relres= 7.280497135444582e-08 , err= nan
ii= 12 , relres= 1.2627335027888555e-08 , err= nan
ii= 13 , relres= 1.8544631737829582e-09 , err= nan
ii= 14 , relres= 2.6188622118067116e-10 , err= nan
ii= 15 , relres= 3.953964565533973e-11 , err= nan
GN: psf1
ii= 0 , relres= 0.2596736604390033 , err= 0.1251929044962036
ii= 1 , relres= 0.05244478325840443 , err= 0.048060819044855395
ii= 2 , relres= 0.01601132243024856 , err= 0.013798320721887747
ii= 3 , relres= 0.007871966662816325 , err= 0.003486573615441959
ii= 4 , relres= 0.0018222276664988208 , err= 0.0015209687223218555
ii= 5 , relres= 0.000400575491505673 , err= 0.00027025368188894703
ii= 6 , relres= 0.00010266837223521607 , err= 6.009479542100779e-05
ii= 7 , relres= 2.1660056527931258e-05 , err= 2.477781400652793e-05
ii= 8 , relres= 1.0350720792500328e-05 , err= 4.657292770051128e-06
ii= 9 , relres= 1.7714616889167726e-06 , err= 1.1896492652183946e-06
ii= 10 , relres= 3.1528226331611995e-07 , err= 3.0497662569837206e-07
ii= 11 , relres= 8.487023435731295e-08 , err= 4.5113740191491775e-08
GN: psf5
ii= 0 , relres= 0.2515142205875523 , err= 0.11210469254124109
ii= 1 , relres= 0.0474023841232139 , err= 0.04690743874918409
ii= 2 , relres= 0.016080439009037915 , err= 0.012395612579045352
ii= 3 , relres= 0.006995653113640851 , err= 0.002868063595832434
ii= 4 , relres= 0.0016057327706954063 , err= 0.0013982474051258376
ii= 5 , relres= 0.0003461876672965754 , err= 0.0002363771785928738
ii= 6 , relres= 0.00010383077128549745 , err= 5.385697291006882e-05
ii= 7 , relres= 2.280046695445789e-05 , err= 2.3734197920058584e-05
ii= 8 , relres= 8.660792292616729e-06 , err= 4.349376129121343e-06
ii= 9 , relres= 1.7201154642940848e-06 , err= 1.0435510708102313e-06
ii= 10 , relres= 2.6705703552651166e-07 , err= 2.4748077707112774e-07
ii= 11 , relres= 7.415547524776601e-08 , err= 3.523028661619396e-08
GN: psf25
ii= 0 , relres= 0.24687527927918707 , err= 0.10878180205360133
ii= 1 , relres= 0.04658865550873907 , err= 0.04683363730867513
ii= 2 , relres= 0.01626163291140586 , err= 0.012187811410013481
ii= 3 , relres= 0.006549805929303358 , err= 0.0027464127349944726
ii= 4 , relres= 0.0015375856544489652 , err= 0.0013506691090195587
ii= 5 , relres= 0.0003213562328596892 , err= 0.00021908527993379492
ii= 6 , relres= 9.525664387260222e-05 , err= 4.9208245078695084e-05
ii= 7 , relres= 2.173159003410076e-05 , err= 2.1820545548979155e-05
ii= 8 , relres= 8.036288856093628e-06 , err= 4.07286754723512e-06
ii= 9 , relres= 1.6315275177891015e-06 , err= 9.924209984184696e-07
ii= 10 , relres= 2.625830819528505e-07 , err= 2.3857355430565065e-07
ii= 11 , relres= 7.280497135444582e-08 , err= 3.432370042880053e-08
GN: reg
ii= 0 , relres= 0.8230412652251599 , err= 0.7002280906729471
ii= 1 , relres= 0.6392060739431206 , err= 0.4910139890416296
ii= 2 , relres= 0.4211262808171024 , err= 0.33368732011719077
ii= 3 , relres= 0.2744347998968571 , err= 0.2115136568955493
ii= 4 , relres= 0.19684137226414825 , err= 0.15130228977705093
ii= 5 , relres= 0.1344917637482613 , err= 0.10130396883588141
ii= 6 , relres= 0.09028049984858731 , err= 0.0715296296540623
ii= 7 , relres= 0.0668323447871575 , err= 0.05171738609665879
ii= 8 , relres= 0.043254440107608455 , err= 0.03447804886221267
ii= 9 , relres= 0.030323107511101118 , err= 0.022283219915775487

```

```

ii= 10 , relres= 0.020260655222595875 , err= 0.01605532879093789
ii= 11 , relres= 0.01357961227495843 , err= 0.010846551271214712
ii= 12 , relres= 0.008847462526754184 , err= 0.007624575460355794
ii= 13 , relres= 0.0056597393832378134 , err= 0.0043781221049108915
ii= 14 , relres= 0.003721827466674291 , err= 0.002978098502173681
ii= 15 , relres= 0.0023372111757228578 , err= 0.0019064034847339861
ii= 16 , relres= 0.0013562838769311028 , err= 0.001041893366915014
ii= 17 , relres= 0.0008346645810282821 , err= 0.0006377175382694173
ii= 18 , relres= 0.000560347918481798 , err= 0.0004200160752047915
ii= 19 , relres= 0.00032150547218638773 , err= 0.00023325703932222035
ii= 20 , relres= 0.00020258051895204817 , err= 0.000148841310716463
ii= 21 , relres= 0.00011368572787498928 , err= 8.173807481765408e-05
ii= 22 , relres= 6.75446575806435e-05 , err= 4.809346420606895e-05
ii= 23 , relres= 4.138246017568872e-05 , err= 2.931709300387215e-05
ii= 24 , relres= 2.662283768544482e-05 , err= 1.8988585909901273e-05
ii= 25 , relres= 1.9168657165303468e-05 , err= 1.3568656493482582e-05
ii= 26 , relres= 1.4661401144344588e-05 , err= 1.0558625462001994e-05
ii= 27 , relres= 7.531625346517945e-06 , err= 5.769964808605274e-06
ii= 28 , relres= 4.9249306453212535e-06 , err= 3.6745107528024385e-06
ii= 29 , relres= 3.6227157634692823e-06 , err= 2.5132759403456277e-06
ii= 30 , relres= 2.430380601988641e-06 , err= 1.7690995450436792e-06
ii= 31 , relres= 1.385047721391317e-06 , err= 9.921406768635356e-07
ii= 32 , relres= 9.151169704947646e-07 , err= 5.832269243167387e-07
ii= 33 , relres= 7.125786100524434e-07 , err= 4.7116695916563966e-07
ii= 34 , relres= 4.3560772594120377e-07 , err= 3.0902925445113817e-07
ii= 35 , relres= 2.859631086628406e-07 , err= 1.9489835419580973e-07
ii= 36 , relres= 2.0503310748696964e-07 , err= 1.3467094972598673e-07
ii= 37 , relres= 1.2901042673889453e-07 , err= 8.873384188749256e-08
ii= 38 , relres= 6.972918908264578e-08 , err= 5.0628261838426526e-08
GN: none
ii= 0 , relres= 1.1594872356118942 , err= 0.923764826369947
ii= 1 , relres= 1.0323873411042208 , err= 0.8624081585214005
ii= 2 , relres= 0.9142926275183445 , err= 0.7977889816031731
ii= 3 , relres= 0.8129595645764912 , err= 0.7387408418412341
ii= 4 , relres= 0.688157702521022 , err= 0.6765399876246805
ii= 5 , relres= 0.6048908909247228 , err= 0.6245717289893038
ii= 6 , relres= 0.5420015097304652 , err= 0.5745276858615421
ii= 7 , relres= 0.46781698792645127 , err= 0.5314315556432742
ii= 8 , relres= 0.4197080486362415 , err= 0.48409231768852345
ii= 9 , relres= 0.37020909788855316 , err= 0.44483088857520986
ii= 10 , relres= 0.32848162281983245 , err= 0.40959603668651773
ii= 11 , relres= 0.3086286711709211 , err= 0.37505314261931294
ii= 12 , relres= 0.25830995032826687 , err= 0.3467155920566533
ii= 13 , relres= 0.2316587701944814 , err= 0.31897030977158825
ii= 14 , relres= 0.21458113278235838 , err= 0.29465630208146215
ii= 15 , relres= 0.1910530824145581 , err= 0.270864082888384
ii= 16 , relres= 0.176094975261759 , err= 0.25012701578378255
ii= 17 , relres= 0.1689671068944414 , err= 0.22999114693065742
ii= 18 , relres= 0.14119578195834076 , err= 0.21213228345766014
ii= 19 , relres= 0.13251847608951145 , err= 0.1962264948109036
ii= 20 , relres= 0.11598739134781298 , err= 0.18181353096366482
ii= 21 , relres= 0.10385965704004595 , err= 0.16873229156688727
ii= 22 , relres= 0.09198161110032538 , err= 0.15683769028276853
ii= 23 , relres= 0.08433832885863644 , err= 0.1478291222405162
ii= 24 , relres= 0.07360589575605836 , err= 0.1397036421450711
ii= 25 , relres= 0.06862800350551433 , err= 0.13110966911530256
ii= 26 , relres= 0.05947055199846188 , err= 0.12290741599454534
ii= 27 , relres= 0.05460611178565056 , err= 0.11517842378543422
ii= 28 , relres= 0.04957864123195792 , err= 0.10786607698602374
ii= 29 , relres= 0.04762883746639946 , err= 0.10121396716992279
ii= 30 , relres= 0.04507167014101512 , err= 0.09398689828903792

```

```

ii= 31 , relres= 0.04169100152255309 , err= 0.08710266567238348
ii= 32 , relres= 0.037782798140144444 , err= 0.08059111315487223
ii= 33 , relres= 0.03691502899629329 , err= 0.07386709084186176
ii= 34 , relres= 0.03634666443575202 , err= 0.06768400200942509
ii= 35 , relres= 0.03331833647425938 , err= 0.061724206204429456
ii= 36 , relres= 0.03085530850400398 , err= 0.05543858083711454
ii= 37 , relres= 0.028903218004225427 , err= 0.04945061784719468
ii= 38 , relres= 0.02717620046683571 , err= 0.044206530116219174
ii= 39 , relres= 0.023312987996448032 , err= 0.03882651005795569
ii= 40 , relres= 0.021128454315345536 , err= 0.03420961780115992
ii= 41 , relres= 0.01884336263088503 , err= 0.030301560386195872
ii= 42 , relres= 0.018701189503684802 , err= 0.02657274435987306
ii= 43 , relres= 0.018639763842617826 , err= 0.023661526481143162
ii= 44 , relres= 0.017533695995464785 , err= 0.02120419534951744
ii= 45 , relres= 0.014844883730454853 , err= 0.018674454116223708
ii= 46 , relres= 0.012728944610577596 , err= 0.01604502255410552
ii= 47 , relres= 0.011018568350941513 , err= 0.013863787871645184
ii= 48 , relres= 0.010441087586593121 , err= 0.011997731635047904
ii= 49 , relres= 0.008995915575744312 , err= 0.010434024707256679
ii= 50 , relres= 0.00794261134952962 , err= 0.009068149781686246
ii= 51 , relres= 0.007273577435012484 , err= 0.007850027869618838
ii= 52 , relres= 0.005824223272415458 , err= 0.006743222878413462
ii= 53 , relres= 0.004985371265677493 , err= 0.005857626681227706
ii= 54 , relres= 0.00443649027036078 , err= 0.005114239057028075
ii= 55 , relres= 0.0037488795416768463 , err= 0.004439588263636964
ii= 56 , relres= 0.003699826651696782 , err= 0.003893577029240485
ii= 57 , relres= 0.0034627286246121606 , err= 0.0034963142646538986
ii= 58 , relres= 0.0029194896099045513 , err= 0.003162259053858022
ii= 59 , relres= 0.0024913183865395315 , err= 0.0027669671601936938
ii= 60 , relres= 0.002104859206458037 , err= 0.0024238205222799165
ii= 61 , relres= 0.0019121481637218523 , err= 0.002141583491522219
ii= 62 , relres= 0.0016655632838809364 , err= 0.0019074748421620447
ii= 63 , relres= 0.0014288899189736563 , err= 0.0016718081453034376
ii= 64 , relres= 0.0013979339328820668 , err= 0.0014704258239294195
ii= 65 , relres= 0.0013764717407890809 , err= 0.0013076559592112384
ii= 66 , relres= 0.0010926113849986329 , err= 0.0011620415902803222
ii= 67 , relres= 0.0009259211515805757 , err= 0.000995451749100338
ii= 68 , relres= 0.000792397085593711 , err= 0.0008706934573419275
ii= 69 , relres= 0.0007068214308326217 , err= 0.0007574637131768764
ii= 70 , relres= 0.0007167016106284009 , err= 0.0006662168510199587
ii= 71 , relres= 0.0005925566564519265 , err= 0.0005993699134482448
ii= 72 , relres= 0.00047603548391372374 , err= 0.0005144753480381659
ii= 73 , relres= 0.0004328694294243438 , err= 0.0004417215887624076
ii= 74 , relres= 0.0003831870068793776 , err= 0.0003799352844862794
ii= 75 , relres= 0.0003232938324943008 , err= 0.0003281165894137856
ii= 76 , relres= 0.00030494807327569024 , err= 0.00028789639791115194
ii= 77 , relres= 0.00026489830007944514 , err= 0.00026214653971591643
ii= 78 , relres= 0.00021324728034063128 , err= 0.00023342512683303154
ii= 79 , relres= 0.00022293297045802496 , err= 0.00020696763784606518
ii= 80 , relres= 0.00018751241273995867 , err= 0.00018974489442230206
ii= 81 , relres= 0.00014939397509683097 , err= 0.00016652995128246833
ii= 82 , relres= 0.00012939433484902016 , err= 0.0001437495674296809
ii= 83 , relres= 0.0001201573628529174 , err= 0.0001245421657110053
ii= 84 , relres= 0.00011141329634344425 , err= 0.00010866802661818469
ii= 85 , relres= 0.0001022228169318219 , err= 9.622083408108352e-05
ii= 86 , relres= 7.969076200583384e-05 , err= 8.462459282691035e-05
ii= 87 , relres= 6.546729481361848e-05 , err= 7.399502292583965e-05
ii= 88 , relres= 5.753039922193145e-05 , err= 6.380446168634528e-05
ii= 89 , relres= 5.298856899044713e-05 , err= 5.468404061371292e-05
ii= 90 , relres= 5.311781404398049e-05 , err= 4.7566848965383235e-05
ii= 91 , relres= 4.517682867004224e-05 , err= 4.197206932999208e-05

```

```

ii= 92 , relres= 3.3347030901611474e-05 , err= 3.5810371508364434e-05
ii= 93 , relres= 3.352431670715897e-05 , err= 3.0212429681580695e-05
ii= 94 , relres= 3.0113479441321355e-05 , err= 2.5897138465807687e-05
ii= 95 , relres= 2.564153662262953e-05 , err= 2.2752533489944744e-05
ii= 96 , relres= 2.0645075531763715e-05 , err= 1.941537529100474e-05
ii= 97 , relres= 1.7706237592907245e-05 , err= 1.668959911036731e-05
ii= 98 , relres= 1.4701529789035718e-05 , err= 1.4187711284325533e-05
ii= 99 , relres= 1.3069436992225886e-05 , err= 1.1902721750905834e-05
ii= 100 , relres= 1.2723285417172193e-05 , err= 1.0179787974819495e-05
ii= 101 , relres= 1.1300949332938019e-05 , err= 9.08639924715425e-06
ii= 102 , relres= 8.654616584757791e-06 , err= 7.845811600743173e-06
ii= 103 , relres= 8.241099962848056e-06 , err= 6.745397699495893e-06
ii= 104 , relres= 7.2146950925181725e-06 , err= 5.876950233764311e-06
ii= 105 , relres= 5.920508778218277e-06 , err= 5.05842721833315e-06
ii= 106 , relres= 4.663865931166245e-06 , err= 4.250794224184091e-06
ii= 107 , relres= 4.0523562323480314e-06 , err= 3.660904420293052e-06
ii= 108 , relres= 3.6572044328355903e-06 , err= 3.133832350108751e-06
ii= 109 , relres= 3.559679690035112e-06 , err= 2.8380234083419353e-06
ii= 110 , relres= 2.772243181318046e-06 , err= 2.553875524757436e-06
ii= 111 , relres= 2.2306330553332897e-06 , err= 2.176129465070345e-06
ii= 112 , relres= 2.0117713831522267e-06 , err= 1.8702385529179383e-06
ii= 113 , relres= 2.037683282870047e-06 , err= 1.6484466466019124e-06
ii= 114 , relres= 1.6791934327611866e-06 , err= 1.468367395838374e-06
ii= 115 , relres= 1.3312115135153774e-06 , err= 1.2906299448540186e-06
ii= 116 , relres= 1.230525570897635e-06 , err= 1.1497119812139852e-06
ii= 117 , relres= 1.0500344953587364e-06 , err= 1.018308273462065e-06
ii= 118 , relres= 8.361503428112656e-07 , err= 8.994538594586275e-07
ii= 119 , relres= 7.050135709749749e-07 , err= 7.891023486773377e-07
ii= 120 , relres= 6.588413995213257e-07 , err= 6.89911022474198e-07
ii= 121 , relres= 6.101145066980919e-07 , err= 6.055595517852812e-07
ii= 122 , relres= 5.658276084439746e-07 , err= 5.46133545015545e-07
ii= 123 , relres= 4.505819661025932e-07 , err= 4.872676077125468e-07
ii= 124 , relres= 4.375783008707455e-07 , err= 4.327525708368611e-07
ii= 125 , relres= 3.530315765492796e-07 , err= 3.837229889058849e-07
ii= 126 , relres= 3.1664643003788565e-07 , err= 3.341130893852341e-07
ii= 127 , relres= 2.658684464739635e-07 , err= 2.8570836835603404e-07
ii= 128 , relres= 2.452027038958448e-07 , err= 2.454879396315545e-07
ii= 129 , relres= 2.1136480148772645e-07 , err= 2.0936756718612457e-07
ii= 130 , relres= 1.9022442463068366e-07 , err= 1.8485356044674997e-07
ii= 131 , relres= 1.6486328947705616e-07 , err= 1.6507978474396058e-07
ii= 132 , relres= 1.4846037376019364e-07 , err= 1.4662878686338608e-07
ii= 133 , relres= 1.3633035251044533e-07 , err= 1.3053140511642527e-07
ii= 134 , relres= 1.0997363102154197e-07 , err= 1.1487382517605203e-07
ii= 135 , relres= 9.465927001247785e-08 , err= 1.002395844915784e-07
gamma= 107721.7345015941
nb= 1 , good_iter_psf= 11
nb= 5 , good_iter_psf= 11
nb= 25 , good_iter_psf= 11
good_iter_reg= 33
good_iter_none= 119
--- GAMMA ---: 49999.9999999999
Building Regularization H-Matrix
    matrix has dimension 1416 x 1416
        no of non-zeroes      = 9746
        matrix is            real valued
        format              = non symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
    |S|_F                = 8.06144e+06
    sparsity constant   = 20
    size of H-matrix    = 4.06 MB
    |A|_F                = 8.06144e+06

```

```

|S-A|_2 = 2.29781e-09
matrix has dimension — H-matrix inverse ( rtol = 1416 x 1416
    no of non-zeroes      = 9746
    matrix is            real valued
    format              = symmetric
size of sparse matrix = 163.52 kB
|S|_F                 = 5.18561e+06
    sparsity constant = 20
    size of H-matrix  = 2.29 MB
    |A|_F               = 5.18561e+06
|S-A|_2 = 4.66653e-09
1e-06 , atol = 1e-14 , overwrite= False )
    done in 11.980979204177856
    size of inverse = 3361874 bytes

— H-matrix multiplication C=A*B
    done in 21.00s
    size of C = 3.95 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
    done in 28.69s
    size of C = 8.64 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
[=====] 80% ETA 5 s (5.80 GN: get truth:
    done in 27.28s
    size of LU factor = 23.20 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
    done in 26.71s
    size of LU factor = 23.28 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
[=====] 85% ETA 4 s (5.80 ii= 0 , relres= 0.
13834816022510613 , err= nan
    done in 27.30s
    size of LU factor = 23.11 MB
ii= 1 , relres= 0.023325596419854593 , err= nan
ii= 2 , relres= 0.00760060744243326 , err= nan
ii= 3 , relres= 0.001386542004910362 , err= nan
ii= 4 , relres= 0.00024874251451650496 , err= nan
ii= 5 , relres= 4.43174568388678e-05 , err= nan
ii= 6 , relres= 9.923572578946783e-06 , err= nan
ii= 7 , relres= 1.5226632082615026e-06 , err= nan
ii= 8 , relres= 2.639975897250285e-07 , err= nan
ii= 9 , relres= 3.630581602213918e-08 , err= nan
ii= 10 , relres= 6.831832700914098e-09 , err= nan
ii= 11 , relres= 1.551519239552267e-09 , err= nan
ii= 12 , relres= 2.0362288501757996e-10 , err= nan
ii= 13 , relres= 3.0213561020607666e-11 , err= nan
GN: psf1
ii= 0 , relres= 0.16639484504785582 , err= 0.11829777274116667
ii= 1 , relres= 0.0344527732929645 , err= 0.034142593109606344
ii= 2 , relres= 0.009878804564566893 , err= 0.00631252130223104
ii= 3 , relres= 0.001930014630320502 , err= 0.00141581741791181
ii= 4 , relres= 0.00039558008317391207 , err= 0.0002644472955794114
ii= 5 , relres= 8.45963700811131e-05 , err= 6.253533873952665e-05
ii= 6 , relres= 2.001458286820073e-05 , err= 1.096340209722565e-05
ii= 7 , relres= 3.848100714050901e-06 , err= 2.20408393959915e-06
ii= 8 , relres= 7.46462544334231e-07 , err= 4.615467457714352e-07
ii= 9 , relres= 1.370748939181392e-07 , err= 9.402601661203155e-08

```

```

ii= 10 , relres= 3.3335069248620766e-08 , err= 1.9391442803347967e-08
GN: psf5
ii= 0 , relres= 0.15092533225737775 , err= 0.09634411408495999
ii= 1 , relres= 0.026691295517271986 , err= 0.027100634044484238
ii= 2 , relres= 0.008293413733210263 , err= 0.004460170571275831
ii= 3 , relres= 0.0014985505039296855 , err= 0.0012124915577154099
ii= 4 , relres= 0.0002904898387777863 , err= 0.00019508881859055098
ii= 5 , relres= 5.4762370741999256e-05 , err= 3.937881488041805e-05
ii= 6 , relres= 1.0855274563364564e-05 , err= 7.593779501263738e-06
ii= 7 , relres= 1.7787981755792861e-06 , err= 1.2248072631664664e-06
ii= 8 , relres= 2.6724624978403277e-07 , err= 1.7342332286264705e-07
ii= 9 , relres= 4.0955032925595864e-08 , err= 2.6145501165311484e-08
GN: psf25
ii= 0 , relres= 0.13834816022510613 , err= 0.09112225561933372
ii= 1 , relres= 0.023325596419854593 , err= 0.025127738841966157
ii= 2 , relres= 0.007600607442433326 , err= 0.004109279531344651
ii= 3 , relres= 0.001386542004910362 , err= 0.00122130147483403
ii= 4 , relres= 0.00024874251451650496 , err= 0.00017579763562225939
ii= 5 , relres= 4.43174568388678e-05 , err= 3.644130661843629e-05
ii= 6 , relres= 9.923572578946783e-06 , err= 7.003301003953407e-06
ii= 7 , relres= 1.5226632082615026e-06 , err= 1.2736720220394871e-06
ii= 8 , relres= 2.639975897250285e-07 , err= 1.7700177610329002e-07
ii= 9 , relres= 3.630581602213918e-08 , err= 2.9024792628565257e-08
GN: reg
ii= 0 , relres= 0.9871732185023153 , err= 0.9024386224231601
ii= 1 , relres= 0.9678425015473947 , err= 0.7910213960172487
ii= 2 , relres= 0.8474884721692619 , err= 0.6545620358430817
ii= 3 , relres= 0.743463519402762 , err= 0.5192195579467432
ii= 4 , relres= 0.660459373563188 , err= 0.4316638182537352
ii= 5 , relres= 0.5573017407952763 , err= 0.35185447611940335
ii= 6 , relres= 0.45627211894683806 , err= 0.2930222262996587
ii= 7 , relres= 0.4070288919352536 , err= 0.24771202004109713
ii= 8 , relres= 0.3306078999952777 , err= 0.19961836877355993
ii= 9 , relres= 0.28775024647404496 , err= 0.1610429975420519
ii= 10 , relres= 0.22646209835398598 , err= 0.13747776151638366
ii= 11 , relres= 0.186617461814789 , err= 0.11440496253792326
ii= 12 , relres= 0.15011612016673348 , err= 0.09572450933075342
ii= 13 , relres= 0.12294978226990162 , err= 0.07440421472475417
ii= 14 , relres= 0.09812196810844334 , err= 0.06204617806177226
ii= 15 , relres= 0.08007316144691817 , err= 0.049836696309697955
ii= 16 , relres= 0.06205673079463176 , err= 0.03742940554021559
ii= 17 , relres= 0.04846987858773677 , err= 0.030007915279725562
ii= 18 , relres= 0.04089507020160541 , err= 0.02467677913253859
ii= 19 , relres= 0.03221025829684233 , err= 0.018417263695102232
ii= 20 , relres= 0.02593143010036704 , err= 0.014576327817578564
ii= 21 , relres= 0.019570723984167336 , err= 0.010819438605236811
ii= 22 , relres= 0.015411007777165454 , err= 0.008310182668071429
ii= 23 , relres= 0.012248389805292139 , err= 0.006554540203016339
ii= 24 , relres= 0.009840918380286136 , err= 0.005344271252382428
ii= 25 , relres= 0.008140320783550137 , err= 0.004507454173024591
ii= 26 , relres= 0.007556665101235657 , err= 0.004100429867410453
ii= 27 , relres= 0.005503011602347074 , err= 0.003074836247057013
ii= 28 , relres= 0.004554227626312314 , err= 0.0024934422861101133
ii= 29 , relres= 0.004254202010531072 , err= 0.002142718454005543
ii= 30 , relres= 0.0032524534908765614 , err= 0.0017533093767903248
ii= 31 , relres= 0.0024489723316591253 , err= 0.001336487214222715
ii= 32 , relres= 0.0020659336082905684 , err= 0.0010650725480215082
ii= 33 , relres= 0.0018696694223356775 , err= 0.0009563866379329602
ii= 34 , relres= 0.0014886529136725064 , err= 0.0007787567258662587
ii= 35 , relres= 0.0013006972963433313 , err= 0.0006574986090543951
ii= 36 , relres= 0.0010793105864779513 , err= 0.0005433023401613252

```

```

ii= 37 , relres= 0.0008365668313983264 , err= 0.00043883563984017276
ii= 38 , relres= 0.0006344204443092591 , err= 0.00033073682082809504
ii= 39 , relres= 0.000436653585341778 , err= 0.0002387995750584087
ii= 40 , relres= 0.0003424783264495587 , err= 0.00018724779827877005
ii= 41 , relres= 0.0002829779150610633 , err= 0.00014895191800318595
ii= 42 , relres= 0.000248801708158052 , err= 0.0001299636395370798
ii= 43 , relres= 0.00019448517047888445 , err= 9.476788492515062e-05
ii= 44 , relres= 0.00013540447617278422 , err= 7.089347133881618e-05
ii= 45 , relres= 0.0001208685471335516 , err= 5.899731699258637e-05
ii= 46 , relres= 9.933351296750248e-05 , err= 4.705383952004229e-05
ii= 47 , relres= 8.67169518976156e-05 , err= 4.216969591032477e-05
ii= 48 , relres= 6.509900176300728e-05 , err= 3.2229045215314084e-05
ii= 49 , relres= 4.74163090309181e-05 , err= 2.3706847496236332e-05
ii= 50 , relres= 3.313080444152709e-05 , err= 1.6439922347466056e-05
ii= 51 , relres= 2.79836233585246e-05 , err= 1.2879606150381148e-05
ii= 52 , relres= 2.426753862709362e-05 , err= 1.1682297660242465e-05
ii= 53 , relres= 1.731240624296613e-05 , err= 8.407167827775436e-06
ii= 54 , relres= 1.5897402672314984e-05 , err= 6.984075623051761e-06
ii= 55 , relres= 1.093783631520373e-05 , err= 5.592475974376073e-06
ii= 56 , relres= 9.083660390723222e-06 , err= 4.441689075093784e-06
ii= 57 , relres= 7.673908821691634e-06 , err= 3.7796213900461066e-06
ii= 58 , relres= 6.66384947454014e-06 , err= 3.08051358654379e-06
ii= 59 , relres= 5.229508178861906e-06 , err= 2.5240915944377952e-06
ii= 60 , relres= 3.717392793274164e-06 , err= 1.8345225365318937e-06
ii= 61 , relres= 2.7814858099818455e-06 , err= 1.3326770275286142e-06
ii= 62 , relres= 2.3507557673910105e-06 , err= 1.1375970025736152e-06
ii= 63 , relres= 1.7234075205644819e-06 , err= 8.719678214338589e-07
ii= 64 , relres= 1.678192101464099e-06 , err= 7.228679154008298e-07
ii= 65 , relres= 1.1462488660987195e-06 , err= 5.525058493418858e-07
ii= 66 , relres= 9.915396359449034e-07 , err= 4.5444222416523284e-07
ii= 67 , relres= 7.165805638161871e-07 , err= 3.453376538493554e-07
ii= 68 , relres= 6.01288234472614e-07 , err= 2.8387150573063386e-07
ii= 69 , relres= 4.815874648457836e-07 , err= 2.437064009830972e-07
ii= 70 , relres= 4.11520769863689e-07 , err= 2.0143219263900696e-07
ii= 71 , relres= 3.0289105070271826e-07 , err= 1.5403046274053374e-07
ii= 72 , relres= 2.0444291790206046e-07 , err= 9.91554304937784e-08
ii= 73 , relres= 1.8746210687890418e-07 , err= 9.027509364295149e-08
ii= 74 , relres= 1.421507529058904e-07 , err= 6.996953354503255e-08
ii= 75 , relres= 1.2976768322616774e-07 , err= 5.7476273374682254e-08
ii= 76 , relres= 9.429011992580194e-08 , err= 4.49701687013219e-08
GN: none
ii= 0 , relres= 1.02769913693925 , err= 0.9001102366835446
ii= 1 , relres= 0.8412183810366748 , err= 0.8340878408710674
ii= 2 , relres= 0.7106849640303644 , err= 0.7679660754057681
ii= 3 , relres= 0.6267349202086135 , err= 0.705742085954889
ii= 4 , relres= 0.5396090257286565 , err= 0.6355101765711494
ii= 5 , relres= 0.48048521236458125 , err= 0.5723671027185135
ii= 6 , relres= 0.41893192193504836 , err= 0.5119957065885337
ii= 7 , relres= 0.3528841816042526 , err= 0.4622230485819135
ii= 8 , relres= 0.31217032816547424 , err= 0.40797548534764067
ii= 9 , relres= 0.27960165723497815 , err= 0.36149918758143096
ii= 10 , relres= 0.251571709065308 , err= 0.31729249528547526
ii= 11 , relres= 0.23244143881710963 , err= 0.2739100668949
ii= 12 , relres= 0.19195241797942114 , err= 0.23973084777987183
ii= 13 , relres= 0.16934638204458216 , err= 0.20700131724207388
ii= 14 , relres= 0.1526417034893243 , err= 0.17963181635824566
ii= 15 , relres= 0.13143116169211347 , err= 0.15464280832217428
ii= 16 , relres= 0.11445941498923003 , err= 0.13458233550500384
ii= 17 , relres= 0.1000182215360251 , err= 0.1178792406271502
ii= 18 , relres= 0.08050499859455178 , err= 0.10464812454051789
ii= 19 , relres= 0.07289153820711738 , err= 0.09278620641402953

```

```
ii= 20 , relres= 0.06121407799405284 , err= 0.08257557741533722
ii= 21 , relres= 0.05336906603303025 , err= 0.0733691803381267
ii= 22 , relres= 0.04601423039890002 , err= 0.06521269421804557
ii= 23 , relres= 0.041851263523399976 , err= 0.05898001012662216
ii= 24 , relres= 0.03574186694873987 , err= 0.053406212837656654
ii= 25 , relres= 0.0314857070203234 , err= 0.047824091472649724
ii= 26 , relres= 0.02589603649509808 , err= 0.043091975251304204
ii= 27 , relres= 0.02347067796854149 , err= 0.0386955823039669
ii= 28 , relres= 0.020259363949199177 , err= 0.03468697566082498
ii= 29 , relres= 0.018508653692882824 , err= 0.03133899173146313
ii= 30 , relres= 0.01673239893112451 , err= 0.027936843790364135
ii= 31 , relres= 0.014974033997075368 , err= 0.02485069800774139
ii= 32 , relres= 0.01320043488785209 , err= 0.02199703568155137
ii= 33 , relres= 0.012150425379869143 , err= 0.019231979442508065
ii= 34 , relres= 0.011320576926035185 , err= 0.016925429642276703
ii= 35 , relres= 0.00992398200721545 , err= 0.014816910247182694
ii= 36 , relres= 0.008767673115898295 , err= 0.012701018333865988
ii= 37 , relres= 0.007784297130093657 , err= 0.01083598436119825
ii= 38 , relres= 0.006838588835895874 , err= 0.009331838140210956
ii= 39 , relres= 0.005696161858805353 , err= 0.00793181231205197
ii= 40 , relres= 0.00498854470860957 , err= 0.006694810432019931
ii= 41 , relres= 0.004490239921840589 , err= 0.005784682544682573
ii= 42 , relres= 0.004550583038334926 , err= 0.005123304989533869
ii= 43 , relres= 0.0033928227309962524 , err= 0.004546203241599264
ii= 44 , relres= 0.0029981094896022135 , err= 0.0039646723807308685
ii= 45 , relres= 0.0025666630597947397 , err= 0.0034355428136422853
ii= 46 , relres= 0.0021005672763460227 , err= 0.002978824915780082
ii= 47 , relres= 0.001827230894110164 , err= 0.002594998071844081
ii= 48 , relres= 0.0016312990429534252 , err= 0.002265389524748973
ii= 49 , relres= 0.0013666368203670827 , err= 0.002001704496842416
ii= 50 , relres= 0.0011752297862600801 , err= 0.0017653012943391977
ii= 51 , relres= 0.0010712875070086605 , err= 0.0015417630414373362
ii= 52 , relres= 0.0008970330808972191 , err= 0.0013255619864583931
ii= 53 , relres= 0.0008034320690272172 , err= 0.0011159202648698555
ii= 54 , relres= 0.0007187694068749649 , err= 0.0009386110513113319
ii= 55 , relres= 0.0006811866878460377 , err= 0.0008049966836008261
ii= 56 , relres= 0.0005943273857104624 , err= 0.0007172944799463905
ii= 57 , relres= 0.0004610333611377987 , err= 0.0006076455710626326
ii= 58 , relres= 0.0004191756331121988 , err= 0.0005105883958379544
ii= 59 , relres= 0.0003391462867916909 , err= 0.000424570514452968
ii= 60 , relres= 0.00028644002179184535 , err= 0.0003533678622200498
ii= 61 , relres= 0.00024361050541410172 , err= 0.00029367140993476356
ii= 62 , relres= 0.00022103167073013658 , err= 0.000244329213038553
ii= 63 , relres= 0.00020118419742945763 , err= 0.00020973460220477866
ii= 64 , relres= 0.00017067238352633447 , err= 0.00018502305148569275
ii= 65 , relres= 0.00013244963731405323 , err= 0.00016061979468240547
ii= 66 , relres= 0.00011625026258885246 , err= 0.00013995667421193777
ii= 67 , relres= 9.655255965054598e-05 , err= 0.00012108891407496801
ii= 68 , relres= 8.935032228318815e-05 , err= 0.00010613128517274644
ii= 69 , relres= 7.740861930005322e-05 , err= 9.367733355719126e-05
ii= 70 , relres= 6.917194966715194e-05 , err= 8.294151986779882e-05
ii= 71 , relres= 5.582760119135228e-05 , err= 7.145818882165225e-05
ii= 72 , relres= 4.5827577527768345e-05 , err= 5.9735713357887114e-05
ii= 73 , relres= 4.634313790835331e-05 , err= 5.1206031363100936e-05
ii= 74 , relres= 4.2689399260925866e-05 , err= 4.5520601137102544e-05
ii= 75 , relres= 3.3057311379971793e-05 , err= 3.935715326119347e-05
ii= 76 , relres= 2.8815368386981193e-05 , err= 3.4049274734671975e-05
ii= 77 , relres= 2.683074989804974e-05 , err= 2.981256148817879e-05
ii= 78 , relres= 2.183514052197325e-05 , err= 2.6166484611432035e-05
ii= 79 , relres= 1.7443030437585038e-05 , err= 2.2133548489418187e-05
ii= 80 , relres= 1.4585521178364529e-05 , err= 1.8597839050390393e-05
```

```

ii= 81 , relres= 1.2381861901960155e-05 , err= 1.5443881276492602e-05
ii= 82 , relres= 1.080940326147489e-05 , err= 1.2871908823362511e-05
ii= 83 , relres= 1.040851457321193e-05 , err= 1.0835068298783464e-05
ii= 84 , relres= 8.919421770479667e-06 , err= 9.329191141815868e-06
ii= 85 , relres= 7.3460276985757545e-06 , err= 7.881790766008173e-06
ii= 86 , relres= 5.7406942759761864e-06 , err= 6.56718906731555e-06
ii= 87 , relres= 4.914135542485876e-06 , err= 5.463872942693005e-06
ii= 88 , relres= 4.254645831051866e-06 , err= 4.596725370368183e-06
ii= 89 , relres= 3.9011324607527635e-06 , err= 4.0428668126355815e-06
ii= 90 , relres= 2.9338724931435094e-06 , err= 3.481658535517728e-06
ii= 91 , relres= 2.4774253587989084e-06 , err= 2.9385654498939243e-06
ii= 92 , relres= 2.027626095097025e-06 , err= 2.449801965822282e-06
ii= 93 , relres= 2.009225750911747e-06 , err= 2.0673910460541184e-06
ii= 94 , relres= 1.6005145493157842e-06 , err= 1.8069133989763528e-06
ii= 95 , relres= 1.3325899221679296e-06 , err= 1.5144775091995911e-06
ii= 96 , relres= 1.096275025385902e-06 , err= 1.2675815354020586e-06
ii= 97 , relres= 1.0664018772416483e-06 , err= 1.0565785007306425e-06
ii= 98 , relres= 9.820735175334163e-07 , err= 9.016199744657292e-07
ii= 99 , relres= 8.007235025906932e-07 , err= 7.605265562084354e-07
ii= 100 , relres= 6.624460750019777e-07 , err= 6.195013105747002e-07
ii= 101 , relres= 5.84259577842397e-07 , err= 5.273692089269768e-07
ii= 102 , relres= 4.4791049501137543e-07 , err= 4.435040041335503e-07
ii= 103 , relres= 3.6221607701302804e-07 , err= 3.635189907423198e-07
ii= 104 , relres= 3.02811809435203e-07 , err= 2.98399898527692e-07
ii= 105 , relres= 3.147125313191647e-07 , err= 2.6354949336164947e-07
ii= 106 , relres= 2.2427206285156057e-07 , err= 2.3040599016758102e-07
ii= 107 , relres= 1.6898039175074204e-07 , err= 1.9674898262529012e-07
ii= 108 , relres= 1.4050999062140295e-07 , err= 1.6661981841593033e-07
ii= 109 , relres= 1.1876800517080332e-07 , err= 1.4394095844179307e-07
ii= 110 , relres= 1.0688558531567924e-07 , err= 1.2339870652905855e-07
ii= 111 , relres= 9.1724131964509e-08 , err= 1.0724345990064452e-07
gamma= 49999.99999999999
nb= 1 , good_iter_psf= 9
nb= 5 , good_iter_psf= 9
nb= 25 , good_iter_psf= 9
good_iter_reg= 67
good_iter_none= 99
--- GAMMA ---: 23207.944168063907
Building Regularization H-Matrix
    matrix has dimension 1416 x 1416
        no of non-zeroes      = 9746
        matrix is              real valued
        format                 = non symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
    |S|_F                  = 3.74179e+06
        sparsity constant = 20
        size of H-matrix  = 4.06 MB
    |A|_F                  = 3.74179e+06
    |S-A|_2 = 5.56695e-09
    matrix has dimension — H-matrix inverse ( rtol = 1416 x 1416
        no of non-zeroes      = 9746
        matrix is              real valued
        format                 = symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
    |S|_F                  = 5.18561e+06
        sparsity constant = 20
        size of H-matrix  = 2.29 MB
    |A|_F                  = 5.18561e+06
    |S-A|_2 = 4.66653e-09
1e-06 , atol = 1e-14 , overwrite= False )
    done in 11.980233192443848 ] 22% ETA 12 s (5.81 GB)

```

```

size of inverse = 3361874 bytes

— H-matrix multiplication C=A*B
  done in 20.48s
  size of C = 3.92 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
  done in 28.85s
  size of C = 8.61 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
    GN: get truth:===== ] 74% ETA 7 s (5.81 GB)
    done in 27.31s =====-
] 82% ETA 4 s (5.81 GB)
  size of LU factor = 23.54 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
  done in 27.07s
  size of LU factor = 23.62 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
    0 , relres= 0.11471156082306067 , err= nan 5 s (5.81 GB) ii=
    done in 27.30s
    size of LU factor = 23.42 MB
ii= 1 , relres= 0.021471190344716343 , err= nan
ii= 2 , relres= 0.005360369265130924 , err= nan
ii= 3 , relres= 0.0012657941420018434 , err= nan
ii= 4 , relres= 0.0003580079550105341 , err= nan
ii= 5 , relres= 8.468217589847278e-05 , err= nan
ii= 6 , relres= 1.621953324681998e-05 , err= nan
ii= 7 , relres= 3.7315978608025606e-06 , err= nan
ii= 8 , relres= 1.0435313654769907e-06 , err= nan
ii= 9 , relres= 2.5478013626238103e-07 , err= nan
ii= 10 , relres= 5.2549402203206756e-08 , err= nan
ii= 11 , relres= 1.0733221619506016e-08 , err= nan
ii= 12 , relres= 1.7660218549630781e-09 , err= nan
ii= 13 , relres= 2.900554315838599e-10 , err= nan
ii= 14 , relres= 4.934470456685624e-11 , err= nan
GN: psf1
ii= 0 , relres= 0.17800422919366526 , err= 0.11985572544985738
ii= 1 , relres= 0.05530204395978857 , err= 0.03986027203079753
ii= 2 , relres= 0.020855540599827645 , err= 0.012094633833782703
ii= 3 , relres= 0.0072415647475518995 , err= 0.0038787701417566794
ii= 4 , relres= 0.002518531557930893 , err= 0.0009987781141879396
ii= 5 , relres= 0.0008889935544994853 , err= 0.0003033681584424076
ii= 6 , relres= 0.00029726385188384973 , err= 0.00010754802176729553
ii= 7 , relres= 8.71103675004386e-05 , err= 3.6132791436952526e-05
ii= 8 , relres= 2.7625587841666685e-05 , err= 1.035026146064316e-05
ii= 9 , relres= 1.023033618776402e-05 , err= 3.294626470463326e-06
ii= 10 , relres= 3.265926083027674e-06 , err= 1.1233650174884237e-06
ii= 11 , relres= 9.078049439649854e-07 , err= 3.713706040047165e-07
ii= 12 , relres= 2.555235592095855e-07 , err= 1.0457503195234103e-07
ii= 13 , relres= 7.468353086018479e-08 , err= 3.178000396241971e-08
GN: psf5
ii= 0 , relres= 0.15168549101093873 , err= 0.09142635233087755
ii= 1 , relres= 0.0397657173357458 , err= 0.02285194539502097
ii= 2 , relres= 0.012633942151728734 , err= 0.006490589647367577
ii= 3 , relres= 0.004147016539026041 , err= 0.0019926258337816553
ii= 4 , relres= 0.0013638071793832588 , err= 0.0007160265568656823
ii= 5 , relres= 0.0003522433730429786 , err= 0.0001750588962646581
ii= 6 , relres= 9.353975495909651e-05 , err= 4.168291185095905e-05

```

```

ii= 7 , relres= 2.4034017593633457e-05 , err= 9.673311141954881e-06
ii= 8 , relres= 6.588991486123768e-06 , err= 2.2361907116308982e-06
ii= 9 , relres= 1.8165838531574186e-06 , err= 6.631573086790465e-07
ii= 10 , relres= 5.06625081657002e-07 , err= 1.8039807756595903e-07
ii= 11 , relres= 1.51701204679673e-07 , err= 5.888464795529402e-08
ii= 12 , relres= 5.075595299113391e-08 , err= 1.9296989578516274e-08
GN: psf25
ii= 0 , relres= 0.11471156082306067 , err= 0.08506621114828167
ii= 1 , relres= 0.021471190344716343 , err= 0.017182221287979204
ii= 2 , relres= 0.005360369265130924 , err= 0.0025788687954615467
ii= 3 , relres= 0.0012657941420018434 , err= 0.0007574355560386227
ii= 4 , relres= 0.0003580079550105341 , err= 0.00024066845469419715
ii= 5 , relres= 8.468217589847278e-05 , err= 4.1853895500291624e-05
ii= 6 , relres= 1.621953324681998e-05 , err= 1.007016054553673e-05
ii= 7 , relres= 3.7315978608025606e-06 , err= 1.8819329688154228e-06
ii= 8 , relres= 1.0435313654769907e-06 , err= 4.618353977990011e-07
ii= 9 , relres= 2.5478013626238103e-07 , err= 1.1676723369746799e-07
ii= 10 , relres= 5.2549402203206756e-08 , err= 2.514517194484457e-08
GN: reg
ii= 0 , relres= 1.0314901781433214 , err= 0.973754758534172
ii= 1 , relres= 1.0819128178073258 , err= 0.9373959391942127
ii= 2 , relres= 1.0534664069159538 , err= 0.8815593149908729
ii= 3 , relres= 1.0603411400643945 , err= 0.8107718166814526
ii= 4 , relres= 1.0553026455550507 , err= 0.7521841230250026
ii= 5 , relres= 1.0086641132299239 , err= 0.6877161147376437
ii= 6 , relres= 0.929324619008368 , err= 0.6287708397100789
ii= 7 , relres= 0.9196438312503612 , err= 0.5789572012065781
ii= 8 , relres= 0.8564291096040547 , err= 0.515144513440562
ii= 9 , relres= 0.8477982881264173 , err= 0.45799796111309227
ii= 10 , relres= 0.7383662879251572 , err= 0.41596017479166253
ii= 11 , relres= 0.6797255913228317 , err= 0.37464667308464183
ii= 12 , relres= 0.6089902898098438 , err= 0.3385031693202196
ii= 13 , relres= 0.5669110418248586 , err= 0.29753134468409853
ii= 14 , relres= 0.49787755140075635 , err= 0.27059645028331947
ii= 15 , relres= 0.45924979242346803 , err= 0.2414645888127784
ii= 16 , relres= 0.4115622962756525 , err= 0.20925752132826214
ii= 17 , relres= 0.35977592493523924 , err= 0.18791821731557262
ii= 18 , relres= 0.33583875410910335 , err= 0.17118423874679697
ii= 19 , relres= 0.30662752666921067 , err= 0.1490001226943524
ii= 20 , relres= 0.2781447794795408 , err= 0.13285513142911237
ii= 21 , relres= 0.24282043920725874 , err= 0.11513596077322863
ii= 22 , relres= 0.2182683976449878 , err= 0.1013986749502743
ii= 23 , relres= 0.1964354526449606 , err= 0.0903806532499841
ii= 24 , relres= 0.17647237592631176 , err= 0.08183337621998069
ii= 25 , relres= 0.1614181846119586 , err= 0.07568470461988099
ii= 26 , relres= 0.15620517376193443 , err= 0.0722449021838373
ii= 27 , relres= 0.134576149422243 , err= 0.06284179571855154
ii= 28 , relres= 0.12396322986510315 , err= 0.05697187507404656
ii= 29 , relres= 0.12532082688485552 , err= 0.053070297284178
ii= 30 , relres= 0.10641679485737592 , err= 0.04858175230253044
ii= 31 , relres= 0.0920624645666205 , err= 0.04309372100099069
ii= 32 , relres= 0.0910321083919053 , err= 0.04022035973103411
ii= 33 , relres= 0.08286954946781144 , err= 0.03760049390535848
ii= 34 , relres= 0.07435794610665208 , err= 0.03387608451060857
ii= 35 , relres= 0.07061121484444206 , err= 0.0312913905650577
ii= 36 , relres= 0.06556547238512299 , err= 0.028686180236717918
ii= 37 , relres= 0.057313898303725186 , err= 0.02586554326738542
ii= 38 , relres= 0.051102959850289724 , err= 0.022514528862659818
ii= 39 , relres= 0.041755595462438906 , err= 0.01916941405806789
ii= 40 , relres= 0.03697062180140281 , err= 0.017082779949250556
ii= 41 , relres= 0.03354430941668026 , err= 0.015297000767811377

```

```
ii= 42 , relres= 0.032535023772417584 , err= 0.014300485467090245
ii= 43 , relres= 0.02972654895182718 , err= 0.012413272960274769
ii= 44 , relres= 0.024301902291513095 , err= 0.010681138911539781
ii= 45 , relres= 0.02351869195661066 , err= 0.009808054179467996
ii= 46 , relres= 0.021048166867313554 , err= 0.008742364500912347
ii= 47 , relres= 0.01996515272946192 , err= 0.008338540999756573
ii= 48 , relres= 0.01716793335884443 , err= 0.00737240780731239
ii= 49 , relres= 0.014659746095772424 , err= 0.006383727494955775
ii= 50 , relres= 0.013183787326657532 , err= 0.005417651205285819
ii= 51 , relres= 0.012210341734687139 , err= 0.005219357803223981
ii= 52 , relres= 0.010846785811286043 , err= 0.004596612022506529
ii= 53 , relres= 0.009328883657853138 , err= 0.003918715290742483
ii= 54 , relres= 0.009436233830258699 , err= 0.003666499936441445
ii= 55 , relres= 0.007308708935947943 , err= 0.003221511216800398
ii= 56 , relres= 0.0070306060235144794 , err= 0.00292484672579567
ii= 57 , relres= 0.00630714854336422 , err= 0.0026903877867232146
ii= 58 , relres= 0.006106491697843917 , err= 0.00246652409172937
ii= 59 , relres= 0.005295914186996996 , err= 0.0022353718882792907
ii= 60 , relres= 0.0044720764870654316 , err= 0.0019161155196493534
ii= 61 , relres= 0.004003475676635653 , err= 0.0016619394532536205
ii= 62 , relres= 0.0036484831827040152 , err= 0.0015462108121389445
ii= 63 , relres= 0.00312046242351259 , err= 0.001353169414511393
ii= 64 , relres= 0.0030885361075793827 , err= 0.00115604690060305
ii= 65 , relres= 0.002697323357791252 , err= 0.001079932127444151
ii= 66 , relres= 0.0025749071009714126 , err= 0.000997148325438144
ii= 67 , relres= 0.0021498966174008493 , err= 0.0008633407407761992
ii= 68 , relres= 0.0019568560716965388 , err= 0.0007748400132334517
ii= 69 , relres= 0.0017657486531981262 , err= 0.0007153720261239752
ii= 70 , relres= 0.0016879279059518536 , err= 0.0006458804005618051
ii= 71 , relres= 0.001444354916010553 , err= 0.0005812951799417822
ii= 72 , relres= 0.0014776989792762815 , err= 0.0005475000278652488
ii= 73 , relres= 0.0011196248943860065 , err= 0.0004548885242797845
ii= 74 , relres= 0.0009899391619605884 , err= 0.0003996405760424274
ii= 75 , relres= 0.0009868632731780383 , err= 0.0003664841935464916
ii= 76 , relres= 0.0008028628718351103 , err= 0.0003258739774346748
ii= 77 , relres= 0.0008043335594122623 , err= 0.0002984629490922245
ii= 78 , relres= 0.000657911584644785 , err= 0.00027307736834598326
ii= 79 , relres= 0.0006444648295593832 , err= 0.00024980903738458526
ii= 80 , relres= 0.0005554584343060179 , err= 0.00021728707770938695
ii= 81 , relres= 0.0005479200488187947 , err= 0.00020062454557696948
ii= 82 , relres= 0.0004806133457092349 , err= 0.0001792912155825245
ii= 83 , relres= 0.00043833680975805455 , err= 0.00016207804452700973
ii= 84 , relres= 0.0003725366206744046 , err= 0.00013860169266767674
ii= 85 , relres= 0.00032733259831754677 , err= 0.00012132408637778529
ii= 86 , relres= 0.0003143040633154607 , err= 0.00011560180202555954
ii= 87 , relres= 0.00028853923868947745 , err= 0.0001085147850564103
ii= 88 , relres= 0.0002464595468773743 , err= 9.420795855735471e-05
ii= 89 , relres= 0.00020716661314536727 , err= 7.961561750340215e-05
ii= 90 , relres= 0.00019203125749784602 , err= 7.342349536503402e-05
ii= 91 , relres= 0.00016300510787898483 , err= 5.866492976866489e-05
ii= 92 , relres= 0.00016020207141738773 , err= 5.5791838826021286e-05
ii= 93 , relres= 0.00013169266372930062 , err= 4.9505363621348826e-05
ii= 94 , relres= 0.00012218177678393065 , err= 4.615741278781656e-05
ii= 95 , relres= 0.00010346148653902278 , err= 3.7993748756254014e-05
ii= 96 , relres= 9.936893047882503e-05 , err= 3.1997020565149287e-05
ii= 97 , relres= 8.601545832017924e-05 , err= 2.9192688575402603e-05
ii= 98 , relres= 7.94158211130003e-05 , err= 2.742482287012601e-05
ii= 99 , relres= 7.6000206046715e-05 , err= 2.5768770001855616e-05
ii= 100 , relres= 6.516970773657483e-05 , err= 2.186717690303702e-05
ii= 101 , relres= 5.869886429463679e-05 , err= 2.054309914856311e-05
ii= 102 , relres= 4.825192485099273e-05 , err= 1.7877712664671588e-05
```

```

ii= 103 , relres= 4.7508355321384925e-05 , err= 1.683588234021835e-05
ii= 104 , relres= 4.324192330235839e-05 , err= 1.5578281288183757e-05
ii= 105 , relres= 3.799689578203494e-05 , err= 1.4228054405158005e-05
ii= 106 , relres= 3.807557597842962e-05 , err= 1.3523038463217734e-05
ii= 107 , relres= 3.317884769750924e-05 , err= 1.20918337986948e-05
ii= 108 , relres= 3.0334315259646643e-05 , err= 1.1476490039091625e-05
ii= 109 , relres= 2.83693161430469e-05 , err= 9.996077826454366e-06
ii= 110 , relres= 2.4466912973855217e-05 , err= 8.772833009097934e-06
ii= 111 , relres= 2.3229993640279107e-05 , err= 7.866813721306517e-06
ii= 112 , relres= 1.87802646973135e-05 , err= 6.763050160473842e-06
ii= 113 , relres= 1.7691514402902338e-05 , err= 6.046957157793671e-06
ii= 114 , relres= 1.5875843651520896e-05 , err= 5.4006162067339e-06
ii= 115 , relres= 1.4378855782220137e-05 , err= 5.00294792207583e-06
ii= 116 , relres= 1.3313281521049388e-05 , err= 4.702727893849183e-06
ii= 117 , relres= 1.097476927864544e-05 , err= 4.056130184321038e-06
ii= 118 , relres= 9.68942122714328e-06 , err= 3.317988068792962e-06
ii= 119 , relres= 8.766282467679362e-06 , err= 2.9608397642849113e-06
ii= 120 , relres= 8.343327618656938e-06 , err= 2.734762202471228e-06
ii= 121 , relres= 7.124604536366171e-06 , err= 2.5097861835216915e-06
ii= 122 , relres= 6.919468111449373e-06 , err= 2.3170665528991073e-06
ii= 123 , relres= 5.334132385628382e-06 , err= 1.9164464398404028e-06
ii= 124 , relres= 5.6635943586589615e-06 , err= 1.7998777571579827e-06
ii= 125 , relres= 4.421894030418814e-06 , err= 1.502576787557052e-06
ii= 126 , relres= 4.137383616428166e-06 , err= 1.2965779937055315e-06
ii= 127 , relres= 3.5006267729945138e-06 , err= 1.2189965436613607e-06
ii= 128 , relres= 3.2946089607061088e-06 , err= 1.1298920856849394e-06
ii= 129 , relres= 3.0378519012237807e-06 , err= 1.0696699857647346e-06
ii= 130 , relres= 2.4951585515162555e-06 , err= 9.314294837941807e-07
ii= 131 , relres= 2.2449685964001774e-06 , err= 7.808724699174355e-07
ii= 132 , relres= 2.033103835676056e-06 , err= 7.279139426467696e-07
ii= 133 , relres= 1.7991705300099748e-06 , err= 6.04852391608014e-07
ii= 134 , relres= 1.6341765889358045e-06 , err= 5.418363120474702e-07
ii= 135 , relres= 1.4840792781399948e-06 , err= 5.189611860063168e-07
ii= 136 , relres= 1.362969937966014e-06 , err= 4.4153868815537573e-07
ii= 137 , relres= 1.1367321376588132e-06 , err= 4.1196237695473047e-07
ii= 138 , relres= 1.0612705401008892e-06 , err= 3.620869242504947e-07
ii= 139 , relres= 9.087438199718741e-07 , err= 3.2724984271243023e-07
ii= 140 , relres= 8.644179407631511e-07 , err= 2.8699618267539494e-07
ii= 141 , relres= 8.028002095673485e-07 , err= 2.708786245154234e-07
ii= 142 , relres= 6.591289526986135e-07 , err= 2.4152986928012996e-07
ii= 143 , relres= 6.910668259599678e-07 , err= 2.2848289319545905e-07
ii= 144 , relres= 5.940484041682594e-07 , err= 1.989218351264601e-07
ii= 145 , relres= 5.136843591932603e-07 , err= 1.8377755083062034e-07
ii= 146 , relres= 5.091894688963774e-07 , err= 1.656885111889757e-07
ii= 147 , relres= 4.093094150237531e-07 , err= 1.4821698011889112e-07
ii= 148 , relres= 3.5215493824230585e-07 , err= 1.3495187630183906e-07
ii= 149 , relres= 2.9222624147173503e-07 , err= 1.1489203523248334e-07
ii= 150 , relres= 2.8856612489674644e-07 , err= 1.1140911374969329e-07
ii= 151 , relres= 2.7731436355954254e-07 , err= 9.257611448127676e-08
ii= 152 , relres= 2.2631866744239222e-07 , err= 8.271818895971327e-08
ii= 153 , relres= 2.0877483321197973e-07 , err= 7.345191973349836e-08
ii= 154 , relres= 1.7393656608557914e-07 , err= 6.355391611152764e-08
ii= 155 , relres= 1.650591874507188e-07 , err= 5.788388814189931e-08
ii= 156 , relres= 1.5688740778016842e-07 , err= 5.5276633718053697e-08
ii= 157 , relres= 1.4631853922506464e-07 , err= 4.802073696689479e-08
ii= 158 , relres= 1.2008480132964227e-07 , err= 4.381375309600888e-08
ii= 159 , relres= 1.1620697653338914e-07 , err= 4.103651026090096e-08
ii= 160 , relres= 1.0074622732391049e-07 , err= 3.488361134741868e-08
ii= 161 , relres= 9.154128757150989e-08 , err= 3.1691522647498345e-08
GN: none
ii= 0 , relres= 0.9019623304130091 , err= 0.8963183127584964

```

```

ii= 1 , relres= 0.7082962513239297 , err= 0.8244029306096475
ii= 2 , relres= 0.6273173286094885 , err= 0.7469322882434084
ii= 3 , relres= 0.5454426724426025 , err= 0.6775295937216277
ii= 4 , relres= 0.4832568819448381 , err= 0.5995135483068988
ii= 5 , relres= 0.4232502779722525 , err= 0.5387452845276645
ii= 6 , relres= 0.36376047614208057 , err= 0.4808530127820678
ii= 7 , relres= 0.3144124913676509 , err= 0.420385642494849
ii= 8 , relres= 0.26900780561528553 , err= 0.3659258645479797
ii= 9 , relres= 0.23138252761635922 , err= 0.3133943751512427
ii= 10 , relres= 0.1931439860902177 , err= 0.2695495912800333
ii= 11 , relres= 0.1643992306527102 , err= 0.22899875303187384
ii= 12 , relres= 0.14258459358984193 , err= 0.19483555271709668
ii= 13 , relres= 0.11947347045141102 , err= 0.16590961765200712
ii= 14 , relres= 0.10560879804084773 , err= 0.14094510049106354
ii= 15 , relres= 0.09382416023673158 , err= 0.12074719758378581
ii= 16 , relres= 0.07989929608381686 , err= 0.10422751181201428
ii= 17 , relres= 0.06914701356336087 , err= 0.08947904239920215
ii= 18 , relres= 0.057434528437683464 , err= 0.07687319635483653
ii= 19 , relres= 0.04861198972050924 , err= 0.06631646122539467
ii= 20 , relres= 0.042109984354076604 , err= 0.05724807626089412
ii= 21 , relres= 0.034638425451336455 , err= 0.050284690263096496
ii= 22 , relres= 0.028184289120827755 , err= 0.04404454842335487
ii= 23 , relres= 0.023649762399973573 , err= 0.03881480547963122
ii= 24 , relres= 0.020421211999354972 , err= 0.034149296405415
ii= 25 , relres= 0.01799696565726243 , err= 0.029799029401808518
ii= 26 , relres= 0.016027636156797424 , err= 0.025614676750622192
ii= 27 , relres= 0.014477794772463439 , err= 0.021569177137802778
ii= 28 , relres= 0.01304737641666856 , err= 0.01802848094699803
ii= 29 , relres= 0.012159805301459943 , err= 0.015018073912574934
ii= 30 , relres= 0.009936412469802487 , err= 0.012244238208920417
ii= 31 , relres= 0.008218804071279395 , err= 0.009891200350213365
ii= 32 , relres= 0.007038720149609428 , err= 0.008086304608762156
ii= 33 , relres= 0.0069546514821375565 , err= 0.006944131292871612
ii= 34 , relres= 0.005330549329770972 , err= 0.005996360291067017
ii= 35 , relres= 0.004078988925668421 , err= 0.005159768564886006
ii= 36 , relres= 0.0033009853310617164 , err= 0.004437922849797962
ii= 37 , relres= 0.0028001624293282302 , err= 0.0037744944780180793
ii= 38 , relres= 0.0024374382897345646 , err= 0.0032087069187674098
ii= 39 , relres= 0.002024085078863884 , err= 0.002700512692073606
ii= 40 , relres= 0.0017330442072572918 , err= 0.0022799147187885695
ii= 41 , relres= 0.0014163850579376285 , err= 0.0019456121020348693
ii= 42 , relres= 0.0011920469277023709 , err= 0.0016376212598855303
ii= 43 , relres= 0.001073868510447394 , err= 0.001381190537061586
ii= 44 , relres= 0.0008928876384734587 , err= 0.001183434238034042
ii= 45 , relres= 0.0008585264588799233 , err= 0.0010117211750977993
ii= 46 , relres= 0.0006836118587060541 , err= 0.000882683153426912
ii= 47 , relres= 0.0005660871958800693 , err= 0.0007423499469236117
ii= 48 , relres= 0.0004777669859854413 , err= 0.0006206251780678992
ii= 49 , relres= 0.00039544272165767093 , err= 0.000510274094201558
ii= 50 , relres= 0.00034304417685830104 , err= 0.0004154699156204244
ii= 51 , relres= 0.00029326302517744253 , err= 0.00034324076626559267
ii= 52 , relres= 0.0002307828747495436 , err= 0.00028393749408495763
ii= 53 , relres= 0.00019519070396790324 , err= 0.00023538284063441396
ii= 54 , relres= 0.00016415811437657863 , err= 0.00019499605215680846
ii= 55 , relres= 0.00015238378134361236 , err= 0.0001640749660536065
ii= 56 , relres= 0.00014353757606158155 , err= 0.0001423474862214826
ii= 57 , relres= 0.00010228537163561918 , err= 0.00012265274328271926
ii= 58 , relres= 8.346476275045284e-05 , err= 0.00010100526016797207
ii= 59 , relres= 7.024734457546544e-05 , err= 8.491838751669579e-05
ii= 60 , relres= 5.875382182993282e-05 , err= 7.141735830149302e-05
ii= 61 , relres= 4.7923994541283314e-05 , err= 5.968927705552545e-05

```

```

ii= 62 , relres= 3.98290998081093e-05 , err= 5.0379244115607564e-05
ii= 63 , relres= 3.496565323646833e-05 , err= 4.185856811077321e-05
ii= 64 , relres= 3.2472352606774864e-05 , err= 3.57971439614861e-05
ii= 65 , relres= 2.6448941010007642e-05 , err= 3.055470628898793e-05
ii= 66 , relres= 2.06462639265974e-05 , err= 2.6031857199283288e-05
ii= 67 , relres= 1.723746354718159e-05 , err= 2.1933891556445307e-05
ii= 68 , relres= 1.4572477090076096e-05 , err= 1.8679671342671777e-05
ii= 69 , relres= 1.1752166105569177e-05 , err= 1.5824128152106893e-05
ii= 70 , relres= 1.000496004442261e-05 , err= 1.3391224532789176e-05
ii= 71 , relres= 8.184325749731527e-06 , err= 1.145812747490466e-05
ii= 72 , relres= 6.935979015125535e-06 , err= 9.848026448813562e-06
ii= 73 , relres= 5.7177269695885196e-06 , err= 8.43800024565579e-06
ii= 74 , relres= 5.014250544003772e-06 , err= 7.338084203450367e-06
ii= 75 , relres= 4.721747257263577e-06 , err= 6.253051194761715e-06
ii= 76 , relres= 4.082987200641486e-06 , err= 5.399917495011751e-06
ii= 77 , relres= 3.231232753535314e-06 , err= 4.567794227336045e-06
ii= 78 , relres= 3.122341845250122e-06 , err= 3.908961091006113e-06
ii= 79 , relres= 2.695323470181711e-06 , err= 3.471383749835957e-06
ii= 80 , relres= 2.206462052444565e-06 , err= 3.095789757077662e-06
ii= 81 , relres= 1.8292431848104478e-06 , err= 2.671659120189702e-06
ii= 82 , relres= 1.8226601356189783e-06 , err= 2.2975199885512636e-06
ii= 83 , relres= 1.497993744097831e-06 , err= 2.0036437749132226e-06
ii= 84 , relres= 1.198015498593602e-06 , err= 1.7117922629041795e-06
ii= 85 , relres= 1.1105493989322993e-06 , err= 1.4306710726775559e-06
ii= 86 , relres= 9.287108189949656e-07 , err= 1.2122262351939752e-06
ii= 87 , relres= 8.111163001966302e-07 , err= 1.02345754449857e-06
ii= 88 , relres= 6.828343279464545e-07 , err= 8.600989252585632e-07
ii= 89 , relres= 5.670362123652374e-07 , err= 7.193079242336238e-07
ii= 90 , relres= 4.742202955328531e-07 , err= 5.851571495179223e-07
ii= 91 , relres= 4.020618776367501e-07 , err= 4.812628835954814e-07
ii= 92 , relres= 3.061114309207169e-07 , err= 3.995194578004891e-07
ii= 93 , relres= 2.6583658019072025e-07 , err= 3.325654595327871e-07
ii= 94 , relres= 2.432977787267444e-07 , err= 2.877042494258308e-07
ii= 95 , relres= 1.8977571282314734e-07 , err= 2.4932775285318735e-07
ii= 96 , relres= 1.5753670843147283e-07 , err= 2.1303514096257958e-07
ii= 97 , relres= 1.295695145523667e-07 , err= 1.8510878783053572e-07
ii= 98 , relres= 1.0626564494641181e-07 , err= 1.5953156250578468e-07
ii= 99 , relres= 8.559758089465696e-08 , err= 1.378294499322041e-07
gamma= 23207.944168063907
nb= 1 , good_iter_psf= 12
nb= 5 , good_iter_psf= 11
nb= 25 , good_iter_psf= 10
good_iter_reg= 140
good_iter_none= 87
--- GAMMA ---: 10772.17345015941
Building Regularization H-Matrix
    matrix has dimension 1416 x 1416
        no of non-zeroes      = 9746
        matrix is              real valued
        format                 = non symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
|S|_F                  = 1.73678e+06
    sparsity constant = 20
    size of H-matrix  = 4.06 MB
|A|_F                  = 1.73678e+06
|S-A|_2 = 3.96925e-09
    matrix has dimension — H-matrix inverse ( rtol = 1416 x 1416
        no of non-zeroes      = 9746
        matrix is              real valued
        format                 = symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB

```

```

|S|_F = 5.18561e+06
sparsity constant = 20
size of H-matrix = 2.29 MB
|A|_F = 5.18561e+06
|S-A|_2 = 4.66653e-09
1e-06 , atol = 1e-14 , overwrite= False )
[===== 12.384166717529297
    size of inverse = 3361874 bytes

— H-matrix multiplication C=A*B
done in 20.88s
size of C = 3.90 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
done in 28.45s
size of C = 8.57 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
done in 27.04s
size of LU factor = 23.61 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
] 9% ETA 23 s (5.82 GB)19 s (5.82 GB)
done in 27.16s
size of LU factor = 23.76 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
0 , relres= 0.20704818428342847 , err= nan ETA 17 s (5.82 GB)GB)
] 12% ETA 22 s (5.82 GB)
done in 27.35s =====
===== ] 87% ETA 3 s (5.82 GB)
size of LU factor = 23.50 MB
ii= 1 , relres= 0.06640815929717776 , err= nan
ii= 2 , relres= 0.03501427314072797 , err= nan
ii= 3 , relres= 0.011397850777935556 , err= nan
ii= 4 , relres= 0.004336613155175277 , err= nan
ii= 5 , relres= 0.002124732184392992 , err= nan
ii= 6 , relres= 0.0009213590972246631 , err= nan
ii= 7 , relres= 0.00037108758938686227 , err= nan
ii= 8 , relres= 0.00013282504172942972 , err= nan
ii= 9 , relres= 4.733101787549631e-05 , err= nan
ii= 10 , relres= 2.047812890378889e-05 , err= nan
ii= 11 , relres= 8.46612500827734e-06 , err= nan
ii= 12 , relres= 3.0596642562355582e-06 , err= nan
ii= 13 , relres= 1.1209970990933556e-06 , err= nan
ii= 14 , relres= 3.641897899770058e-07 , err= nan
ii= 15 , relres= 1.1569271863347648e-07 , err= nan
ii= 16 , relres= 3.50693639650021e-08 , err= nan
ii= 17 , relres= 1.1631379786490367e-08 , err= nan
ii= 18 , relres= 4.417554575239714e-09 , err= nan
ii= 19 , relres= 1.41140362817738e-09 , err= nan
ii= 20 , relres= 4.2054289181695503e-10 , err= nan
ii= 21 , relres= 1.2035249554220624e-10 , err= nan
ii= 22 , relres= 3.5195634166310277e-11 , err= nan
GN: psf1
ii= 0 , relres= 0.30076061171953566 , err= 0.18628295587931382
ii= 1 , relres= 0.1336643311857839 , err= 0.0720040932246791
ii= 2 , relres= 0.07029372698092953 , err= 0.0330463326625334
ii= 3 , relres= 0.035481789655289295 , err= 0.015724330425911048
ii= 4 , relres= 0.019390424340241574 , err= 0.007610293234142537
ii= 5 , relres= 0.01021111439592979 , err= 0.003953785432063441

```

```

ii= 6 , relres= 0.0057150609516621815 , err= 0.0018803337340176705
ii= 7 , relres= 0.0029141057847575634 , err= 0.0010999232435832415
ii= 8 , relres= 0.001452114846794174 , err= 0.0004848075749404379
ii= 9 , relres= 0.0007061569698434831 , err= 0.0002492609028437767
ii= 10 , relres= 0.00035512023389478977 , err= 0.00011396426684026056
ii= 11 , relres= 0.000179421653277245 , err= 5.7226552250339816e-05
ii= 12 , relres= 8.794810270807199e-05 , err= 2.7985352894988555e-05
ii= 13 , relres= 4.555495520637464e-05 , err= 1.53607785134132e-05
ii= 14 , relres= 2.439797433453143e-05 , err= 8.10505394126689e-06
ii= 15 , relres= 1.2911237678381673e-05 , err= 4.267322098127603e-06
ii= 16 , relres= 6.434324248711483e-06 , err= 2.2184909002339946e-06
ii= 17 , relres= 3.349791895654326e-06 , err= 1.1640873627669749e-06
ii= 18 , relres= 1.5902417939856005e-06 , err= 5.448376538319205e-07
ii= 19 , relres= 7.138553886703746e-07 , err= 2.7062063328210987e-07
ii= 20 , relres= 3.255327384836359e-07 , err= 1.1397198658752041e-07
ii= 21 , relres= 1.5029970735964827e-07 , err= 5.0945773399083625e-08
ii= 22 , relres= 7.593808706864993e-08 , err= 2.5127399299349436e-08
GN: psf5
ii= 0 , relres= 0.2579716004436666 , err= 0.1581182128379752
ii= 1 , relres= 0.09959597271515497 , err= 0.03478360247315159
ii= 2 , relres= 0.052798024040737496 , err= 0.01565361457004261
ii= 3 , relres= 0.025670542665017518 , err= 0.008427215362866322
ii= 4 , relres= 0.011820572752262158 , err= 0.0036788240294390396
ii= 5 , relres= 0.00591703565062983 , err= 0.001717155774592888
ii= 6 , relres= 0.002849000009794595 , err= 0.000925443997773487
ii= 7 , relres= 0.0013760076679216644 , err= 0.0004571796933393216
ii= 8 , relres= 0.000640405387179903 , err= 0.00019455851077272127
ii= 9 , relres= 0.000281801010173703 , err= 8.455585263732758e-05
ii= 10 , relres= 0.00012694989713398275 , err= 3.780109427329113e-05
ii= 11 , relres= 5.47215510189671e-05 , err= 1.675232525445565e-05
ii= 12 , relres= 2.3201948235895596e-05 , err= 7.216465139523389e-06
ii= 13 , relres= 1.0300487340434827e-05 , err= 3.26111428154014e-06
ii= 14 , relres= 4.6327322543912445e-06 , err= 1.4298604736025025e-06
ii= 15 , relres= 2.2084413839851004e-06 , err= 6.334478155442664e-07
ii= 16 , relres= 9.54132985084046e-07 , err= 3.0192372118539893e-07
ii= 17 , relres= 3.966594437842877e-07 , err= 1.1672514837473842e-07
ii= 18 , relres= 1.6454504724204287e-07 , err= 5.255596344823952e-08
ii= 19 , relres= 6.896028109775518e-08 , err= 2.3376546600309643e-08
GN: psf25
ii= 0 , relres= 0.20704818428342847 , err= 0.15484873268444924
ii= 1 , relres= 0.06640815929717776 , err= 0.02790854940631053
ii= 2 , relres= 0.03501427314072797 , err= 0.011346360477705495
ii= 3 , relres= 0.011397850777935556 , err= 0.006428819024567632
ii= 4 , relres= 0.004336613155175277 , err= 0.0029050997641426883
ii= 5 , relres= 0.002124732184392992 , err= 0.001127711524781464
ii= 6 , relres= 0.0009213590972246631 , err= 0.0004589019113344118
ii= 7 , relres= 0.00037108758938686227 , err= 0.00019299529245873356
ii= 8 , relres= 0.00013282504172942972 , err= 6.78409820463969e-05
ii= 9 , relres= 4.733101787549631e-05 , err= 2.114285673036032e-05
ii= 10 , relres= 2.047812890378889e-05 , err= 6.879342250782472e-06
ii= 11 , relres= 8.46612500827734e-06 , err= 2.96841788524639e-06
ii= 12 , relres= 3.0596642562355582e-06 , err= 1.2053265363418248e-06
ii= 13 , relres= 1.1209970990933556e-06 , err= 4.2416169361619514e-07
ii= 14 , relres= 3.641897899770058e-07 , err= 1.3706155208367444e-07
ii= 15 , relres= 1.1569271863347648e-07 , err= 4.495316614731986e-08
ii= 16 , relres= 3.50693639650021e-08 , err= 1.435656851893322e-08
GN: reg
ii= 0 , relres= 1.0415640379648488 , err= 0.9928130539620972
ii= 1 , relres= 1.1097857203522405 , err= 0.9820295640602403
ii= 2 , relres= 1.1101862713158748 , err= 0.9641512030111172
ii= 3 , relres= 1.1620521960852972 , err= 0.9391622379638481

```

```
ii= 4 , relres= 1.1991286907768737 , err= 0.916459849448799
ii= 5 , relres= 1.1979624803066902 , err= 0.8890971769771361
ii= 6 , relres= 1.1554863352829148 , err= 0.8613180760911286
ii= 7 , relres= 1.192952593112649 , err= 0.8360043127859229
ii= 8 , relres= 1.1815035670244711 , err= 0.7996236942822884
ii= 9 , relres= 1.2455418339342663 , err= 0.7629316318302343
ii= 10 , relres= 1.1451738374742717 , err= 0.731744706322417
ii= 11 , relres= 1.1185741109677791 , err= 0.6984111392394582
ii= 12 , relres= 1.0623098302763423 , err= 0.6663790305480626
ii= 13 , relres= 1.06209305986871 , err= 0.6274874175522599
ii= 14 , relres= 0.9840284561939826 , err= 0.5992685389390047
ii= 15 , relres= 0.9694714285621711 , err= 0.5663694703066009
ii= 16 , relres= 0.9420460941442929 , err= 0.5269282369288978
ii= 17 , relres= 0.8756860579365526 , err= 0.49858678092140457
ii= 18 , relres= 0.8610810766870409 , err= 0.4758397416379286
ii= 19 , relres= 0.847773316602134 , err= 0.44448728882878563
ii= 20 , relres= 0.8186434838870474 , err= 0.41967728265925286
ii= 21 , relres= 0.7717683509237935 , err= 0.3906766926944583
ii= 22 , relres= 0.7427265799275288 , err= 0.36653026614584966
ii= 23 , relres= 0.7134017080362376 , err= 0.3454835774110947
ii= 24 , relres= 0.6833177077921223 , err= 0.32830506566500567
ii= 25 , relres= 0.6612707239279839 , err= 0.3173962991810295
ii= 26 , relres= 0.6381036507459297 , err= 0.30752470038822105
ii= 27 , relres= 0.6034158142979509 , err= 0.28559674899056536
ii= 28 , relres= 0.5872929125677396 , err= 0.27122193290787167
ii= 29 , relres= 0.6122828150626161 , err= 0.25987149848880126
ii= 30 , relres= 0.5567645234902883 , err= 0.2505353988380991
ii= 31 , relres= 0.5116635586170356 , err= 0.23606436158763108
ii= 32 , relres= 0.522941227570204 , err= 0.22793743769561464
ii= 33 , relres= 0.4996681954884844 , err= 0.2207763791409696
ii= 34 , relres= 0.47932263560430416 , err= 0.21029989154907827
ii= 35 , relres= 0.4701987962251402 , err= 0.20385411993856603
ii= 36 , relres= 0.45810883119802637 , err= 0.19410613946391375
ii= 37 , relres= 0.42632434624508264 , err= 0.18411025828546085
ii= 38 , relres= 0.41082888227299763 , err= 0.17208874636766
ii= 39 , relres= 0.3667193582782572 , err= 0.15896777646314034
ii= 40 , relres= 0.3450907248014239 , err= 0.15048461080691228
ii= 41 , relres= 0.33474876530262127 , err= 0.14339570915337174
ii= 42 , relres= 0.32821383882783745 , err= 0.1393841258108152
ii= 43 , relres= 0.3255658039219871 , err= 0.13030661720477654
ii= 44 , relres= 0.288750224729159 , err= 0.1215233068438
ii= 45 , relres= 0.29208292808812003 , err= 0.11765981080583453
ii= 46 , relres= 0.2869006640739363 , err= 0.11300839711993624
ii= 47 , relres= 0.26389008701517475 , err= 0.10922198027078817
ii= 48 , relres= 0.2444310801819586 , err= 0.1028958145627795
ii= 49 , relres= 0.22485039162437917 , err= 0.09645941167773045
ii= 50 , relres= 0.21592691034800018 , err= 0.08957318215453343
ii= 51 , relres= 0.20902075944325987 , err= 0.08806493455919824
ii= 52 , relres= 0.19678748455579795 , err= 0.08340062262487545
ii= 53 , relres= 0.18949658667619323 , err= 0.07795458565308662
ii= 54 , relres= 0.18446568492386486 , err= 0.07647486027690374
ii= 55 , relres= 0.16013514742408314 , err= 0.07104280018540353
ii= 56 , relres= 0.1587844821045276 , err= 0.06766842286854816
ii= 57 , relres= 0.15285080820862315 , err= 0.06544276803064678
ii= 58 , relres= 0.15182888050085533 , err= 0.06279325082935999
ii= 59 , relres= 0.13968896324361993 , err= 0.060449844776816725
ii= 60 , relres= 0.12783216690897195 , err= 0.056417758168911994
ii= 61 , relres= 0.12245583393615134 , err= 0.052820450119122994
ii= 62 , relres= 0.1175367801428256 , err= 0.05110211056244787
ii= 63 , relres= 0.11172726151223103 , err= 0.04829275949557969
ii= 64 , relres= 0.1094198739363628 , err= 0.04760796748611231
```

```
ii= 65 , relres= 0.1039680364118674 , err= 0.043432932085995114
ii= 66 , relres= 0.1047400562469004 , err= 0.04136278655837944
ii= 67 , relres= 0.09486696952975678 , err= 0.03887573551180477
ii= 68 , relres= 0.09288875935779875 , err= 0.03707475972784638
ii= 69 , relres= 0.08637194821280239 , err= 0.035562146611641955
ii= 70 , relres= 0.08594394283618614 , err= 0.034052362731874876
ii= 71 , relres= 0.07786010368163702 , err= 0.03204458141283806
ii= 72 , relres= 0.0870338370573968 , err= 0.030306673893620382
ii= 73 , relres= 0.069202570982931 , err= 0.02854341830666892
ii= 74 , relres= 0.06555845644813986 , err= 0.026854534896782894
ii= 75 , relres= 0.06732816927094852 , err= 0.026006449936396808
ii= 76 , relres= 0.06238827129589027 , err= 0.024537416511902773
ii= 77 , relres= 0.058155085874448426 , err= 0.024073462261590864
ii= 78 , relres= 0.05468220417884811 , err= 0.0226232060636081
ii= 79 , relres= 0.05280682746466269 , err= 0.021778090863151713
ii= 80 , relres= 0.05024099690123037 , err= 0.020310833038491898
ii= 81 , relres= 0.05033932785007153 , err= 0.01945089862109232
ii= 82 , relres= 0.049885866160928626 , err= 0.018643324069209797
ii= 83 , relres= 0.045445120911234975 , err= 0.017803343118377838
ii= 84 , relres= 0.0474011172517606 , err= 0.01723051642256652
ii= 85 , relres= 0.04168154324547848 , err= 0.01613281027158713
ii= 86 , relres= 0.03894995923869197 , err= 0.014971311072872463
ii= 87 , relres= 0.03722616261171953 , err= 0.014413872984481496
ii= 88 , relres= 0.03468264899848912 , err= 0.013384188550337862
ii= 89 , relres= 0.03205345761958899 , err= 0.01228117790322199
ii= 90 , relres= 0.031092653217791248 , err= 0.011786250808306038
ii= 91 , relres= 0.029325036228228928 , err= 0.010552647141044159
ii= 92 , relres= 0.02883190459653873 , err= 0.010210073273222778
ii= 93 , relres= 0.026389911346741547 , err= 0.009728070956409951
ii= 94 , relres= 0.025018079418930302 , err= 0.009379441794650594
ii= 95 , relres= 0.024123371678111787 , err= 0.008577363919159751
ii= 96 , relres= 0.023564958881033955 , err= 0.008350382189459356
ii= 97 , relres= 0.024766208390142572 , err= 0.007776100118974154
ii= 98 , relres= 0.021277755119821076 , err= 0.007414903556218456
ii= 99 , relres= 0.02036625852152105 , err= 0.007103901519338188
ii= 100 , relres= 0.01925893965136269 , err= 0.006499867890182931
ii= 101 , relres= 0.018543342965084877 , err= 0.006378372875628041
ii= 102 , relres= 0.017999388090295082 , err= 0.0061215306112899215
ii= 103 , relres= 0.01566763155623759 , err= 0.00582332744359557
ii= 104 , relres= 0.014943981461618329 , err= 0.005472217184051171
ii= 105 , relres= 0.014716445428510791 , err= 0.00530943265685888
ii= 106 , relres= 0.014176606576089552 , err= 0.0050644338764665835
ii= 107 , relres= 0.0137620652157535 , err= 0.004881730685485162
ii= 108 , relres= 0.01263253536153794 , err= 0.00472843436126088
ii= 109 , relres= 0.012601412268611802 , err= 0.0043819300696199374
ii= 110 , relres= 0.011841959451413506 , err= 0.0041250071144064695
ii= 111 , relres= 0.011825582208200621 , err= 0.003867564646368247
ii= 112 , relres= 0.010405377051464491 , err= 0.0036398138148888157
ii= 113 , relres= 0.010227279523377346 , err= 0.003422658685380372
ii= 114 , relres= 0.009078106750649064 , err= 0.0031978223081127865
ii= 115 , relres= 0.009413288474289986 , err= 0.002997712409443865
ii= 116 , relres= 0.008248346135334737 , err= 0.0029127101650020916
ii= 117 , relres= 0.008037474873146665 , err= 0.0028383202678487394
ii= 118 , relres= 0.007953602845702781 , err= 0.0026462805061730384
ii= 119 , relres= 0.008047304420736 , err= 0.0025613624948730516
ii= 120 , relres= 0.0072315194384628325 , err= 0.002468109599011229
ii= 121 , relres= 0.006739242195967413 , err= 0.0023152139214493257
ii= 122 , relres= 0.006583225279946289 , err= 0.002267294303656469
ii= 123 , relres= 0.0066820869273176405 , err= 0.002177337314931953
ii= 124 , relres= 0.005622897636486062 , err= 0.00200352507043805
ii= 125 , relres= 0.005371985826590564 , err= 0.0018059990919696868
```

```

ii= 126 , relres= 0.00553695100376046 , err= 0.001753731316329238
ii= 127 , relres= 0.004712527138650035 , err= 0.0016270937687405524
ii= 128 , relres= 0.004536201760644565 , err= 0.0015537962685949604
ii= 129 , relres= 0.004563657429197302 , err= 0.001513219546199832
ii= 130 , relres= 0.003980449263066482 , err= 0.0014261925599188211
ii= 131 , relres= 0.004022875160567659 , err= 0.0013241762910177856
ii= 132 , relres= 0.0036767565375978783 , err= 0.0012756893937008378
ii= 133 , relres= 0.00358191480426615 , err= 0.001160454778559529
ii= 134 , relres= 0.003427240762438687 , err= 0.001119611381033479
ii= 135 , relres= 0.003257887308742225 , err= 0.0010752945670359675
ii= 136 , relres= 0.003384571429815496 , err= 0.0010394434453534682
ii= 137 , relres= 0.0028777758242872447 , err= 0.0009867720832635039
ii= 138 , relres= 0.0027551219880280423 , err= 0.0009475230160435703
ii= 139 , relres= 0.002921501960021493 , err= 0.0009090673533087673
ii= 140 , relres= 0.0024484653562819206 , err= 0.0008714282972587892
ii= 141 , relres= 0.002364393177040676 , err= 0.0008089774077865415
ii= 142 , relres= 0.002302273525220686 , err= 0.0007796919560259187
ii= 143 , relres= 0.002160610768881943 , err= 0.000761811311420814
ii= 144 , relres= 0.002184552587426036 , err= 0.0007329973041192103
ii= 145 , relres= 0.001987585056742511 , err= 0.0006841279541645285
ii= 146 , relres= 0.001898856496061453 , err= 0.0006663167687159148
ii= 147 , relres= 0.001739418062347117 , err= 0.0006106490754327237
ii= 148 , relres= 0.001589630891279646 , err= 0.0005816709604804643
ii= 149 , relres= 0.0014389195836740625 , err= 0.0005390059551039387
ii= 150 , relres= 0.0015107505599279577 , err= 0.0005201488549059462
ii= 151 , relres= 0.0014947386090023074 , err= 0.00048116089120216844
ii= 152 , relres= 0.0013321796614082612 , err= 0.00046548961129927517
ii= 153 , relres= 0.0012953074721973924 , err= 0.000444689709866538
ii= 154 , relres= 0.0012219762070814386 , err= 0.0004160795894897416
ii= 155 , relres= 0.00115943128250603 , err= 0.00039914882068026696
ii= 156 , relres= 0.0011591148488355023 , err= 0.0003892401074996099
ii= 157 , relres= 0.0011760273999133002 , err= 0.0003761691116409459
ii= 158 , relres= 0.001088387975646393 , err= 0.00035473845486055293
ii= 159 , relres= 0.0009561208951215999 , err= 0.00033823500155126784
ii= 160 , relres= 0.0009353914904759294 , err= 0.0003106367712620422
ii= 161 , relres= 0.0009234676802357032 , err= 0.00030171998834370705
ii= 162 , relres= 0.0008921086731741419 , err= 0.00029173606098124405
ii= 163 , relres= 0.0008439442540907015 , err= 0.00028082138184890644
ii= 164 , relres= 0.0007532265547480524 , err= 0.0002545080800326941
ii= 165 , relres= 0.000742138335737853 , err= 0.00025124887586062435
ii= 166 , relres= 0.0006475939180574964 , err= 0.00022660835008992474
ii= 167 , relres= 0.0006626143040257544 , err= 0.00021644142608284348
ii= 168 , relres= 0.0005844305716238353 , err= 0.00020007094667253626
ii= 169 , relres= 0.0005823661191298664 , err= 0.00019043232278625552
ii= 170 , relres= 0.0005446764815845872 , err= 0.00018172592266939392
ii= 171 , relres= 0.000523728050636459 , err= 0.00017247505328724864
ii= 172 , relres= 0.0004891193544013705 , err= 0.00016743712573886156
ii= 173 , relres= 0.00044427934289382114 , err= 0.00015138676379726604
ii= 174 , relres= 0.00045925534735845607 , err= 0.00014655671759569242
ii= 175 , relres= 0.000447607853964187 , err= 0.0001424788227077779
ii= 176 , relres= 0.00042453750998936086 , err= 0.00013325252043882525
ii= 177 , relres= 0.00041505597897732336 , err= 0.00012812738387674006
ii= 178 , relres= 0.00035024568831592683 , err= 0.00012184062129022795
ii= 179 , relres= 0.0003243688541308356 , err= 0.00011182283961945607
ii= 180 , relres= 0.0003103239368767581 , err= 0.00010768561784961488
ii= 181 , relres= 0.0003388283690234894 , err= 0.0001043522600311119
ii= 182 , relres= 0.00030985383770133285 , err= 9.836877779170785e-05
ii= 183 , relres= 0.00028403890383733486 , err= 9.451158571978136e-05
ii= 184 , relres= 0.00026548279353375047 , err= 9.010011649069755e-05
ii= 185 , relres= 0.0002594690708651105 , err= 8.410003042174807e-05
ii= 186 , relres= 0.0002478774839051484 , err= 8.235565053616608e-05

```

```

ii= 187 , relres= 0.0002603441232934893 , err= 7.887191441254258e-05
ii= 188 , relres= 0.00023081993378748419 , err= 7.513533090918252e-05
ii= 189 , relres= 0.00021941429919496633 , err= 7.256713457493084e-05
ii= 190 , relres= 0.0002165006653581613 , err= 6.891053463710607e-05
ii= 191 , relres= 0.00019686112676336814 , err= 6.369116704946985e-05
ii= 192 , relres= 0.0001811790688712463 , err= 6.061281830921909e-05
ii= 193 , relres= 0.00018656516085662967 , err= 5.676971512687911e-05
ii= 194 , relres= 0.00017735404012989434 , err= 5.46555002317568e-05
ii= 195 , relres= 0.00015605887023779607 , err= 5.273309892501327e-05
ii= 196 , relres= 0.00016248670412400283 , err= 4.9238639130995414e-05
ii= 197 , relres= 0.00014734673328643135 , err= 4.65577517224174e-05
ii= 198 , relres= 0.00013076603314022794 , err= 4.4030649848740266e-05
ii= 199 , relres= 0.00013995842523160723 , err= 4.194338685518923e-05
ii= 200 , relres= 0.00013019946008111609 , err= 3.9687720732607576e-05
ii= 201 , relres= 0.00011837622042739104 , err= 3.811684140876354e-05
ii= 202 , relres= 0.0001165095330322252 , err= 3.6453432050191825e-05
ii= 203 , relres= 0.00011299278173738654 , err= 3.4304231290660393e-05
ii= 204 , relres= 0.00010255956637296359 , err= 3.3322551437728146e-05
ii= 205 , relres= 0.0001019874065518064 , err= 3.264345386549957e-05
ii= 206 , relres= 9.862756159240457e-05 , err= 2.953074254642008e-05
ii= 207 , relres= 8.956709060800334e-05 , err= 2.8557254901500546e-05
ii= 208 , relres= 8.52808559854253e-05 , err= 2.707944252731401e-05
ii= 209 , relres= 8.931041770706426e-05 , err= 2.626561419242001e-05
ii= 210 , relres= 7.103722460606406e-05 , err= 2.3988906146110686e-05
ii= 211 , relres= 6.882045434550493e-05 , err= 2.1293489593410885e-05
ii= 212 , relres= 6.130200567362606e-05 , err= 1.9993800172175227e-05
ii= 213 , relres= 6.380251098893535e-05 , err= 1.9474255441413173e-05
ii= 214 , relres= 6.655545706243522e-05 , err= 1.8205444360359194e-05
ii= 215 , relres= 5.7144016177986035e-05 , err= 1.729293483042977e-05
ii= 216 , relres= 5.3913375591653106e-05 , err= 1.6876578331953656e-05
ii= 217 , relres= 5.140977744928439e-05 , err= 1.560752583505839e-05
ii= 218 , relres= 4.926844217746293e-05 , err= 1.4849602425771937e-05
ii= 219 , relres= 4.7621429867977426e-05 , err= 1.4154111791362936e-05
ii= 220 , relres= 4.595148120276803e-05 , err= 1.3274374317806889e-05
ii= 221 , relres= 4.119032556576185e-05 , err= 1.2539336684959836e-05
ii= 222 , relres= 3.809997611043266e-05 , err= 1.2152900769073671e-05
ii= 223 , relres= 3.662821300117819e-05 , err= 1.1929928335114847e-05
ii= 224 , relres= 3.737274337992111e-05 , err= 1.1033529191645639e-05
ii= 225 , relres= 3.408637258513482e-05 , err= 1.0755758036032654e-05
ii= 226 , relres= 3.4151056442390894e-05 , err= 1.0473091010479214e-05
ii= 227 , relres= 3.1776198182550606e-05 , err= 9.768753463068064e-06
ii= 228 , relres= 3.0106648654094778e-05 , err= 9.1407038073393e-06
ii= 229 , relres= 2.883261764052836e-05 , err= 8.95733813933337e-06
ii= 230 , relres= 2.6880836776996967e-05 , err= 8.549760835132225e-06
ii= 231 , relres= 2.2577634745666063e-05 , err= 7.704251506446077e-06
ii= 232 , relres= 2.208177810017546e-05 , err= 7.2177791299181115e-06
ii= 233 , relres= 2.2048933422501107e-05 , err= 7.081021050433204e-06
ii= 234 , relres= 2.0907872214972463e-05 , err= 6.775317563766642e-06
ii= 235 , relres= 1.9210899584423528e-05 , err= 6.585127566251187e-06
ii= 236 , relres= 1.9675163794795764e-05 , err= 6.264630626611132e-06
ii= 237 , relres= 1.8087315642139526e-05 , err= 5.662424690555015e-06
ii= 238 , relres= 1.702901193325876e-05 , err= 5.453201665227788e-06
ii= 239 , relres= 1.6823352678320624e-05 , err= 5.1690384225844635e-06
ii= 240 , relres= 1.513771886095177e-05 , err= 4.812401833351545e-06
ii= 241 , relres= 1.4869942717930413e-05 , err= 4.6395825086689876e-06
ii= 242 , relres= 1.4350942544896986e-05 , err= 4.439987827877441e-06
ii= 243 , relres= 1.3587054232443112e-05 , err= 4.253735523063322e-06
ii= 244 , relres= 1.2755835492754392e-05 , err= 3.996560139700963e-06
ii= 245 , relres= 1.1888302092246043e-05 , err= 3.848072332481678e-06
ii= 246 , relres= 1.2226299725505184e-05 , err= 3.7704853665677973e-06
ii= 247 , relres= 1.223699533211162e-05 , err= 3.502032241102308e-06

```

```

ii= 248 , relres= 1.0579913697926015e-05 , err= 3.3392577314157573e-06
ii= 249 , relres= 1.0014743583388774e-05 , err= 3.293262460418766e-06
ii= 250 , relres= 1.0264034666446444e-05 , err= 2.9893386285334553e-06
ii= 251 , relres= 9.356931090307897e-06 , err= 2.9248334628416445e-06
ii= 252 , relres= 9.234799271346882e-06 , err= 2.8438355453576434e-06
ii= 253 , relres= 8.340374573426136e-06 , err= 2.602240206158854e-06
ii= 254 , relres= 7.853906293588603e-06 , err= 2.458439186029435e-06
ii= 255 , relres= 7.54843625746428e-06 , err= 2.421459341480286e-06
ii= 256 , relres= 7.375361119483671e-06 , err= 2.323868016458907e-06
ii= 257 , relres= 6.7077158472095786e-06 , err= 2.170185887165628e-06
ii= 258 , relres= 6.536298538372523e-06 , err= 2.0963191537610147e-06
ii= 259 , relres= 6.3969069101864976e-06 , err= 1.959512728123581e-06
ii= 260 , relres= 5.636011705318381e-06 , err= 1.8005191005927916e-06
ii= 261 , relres= 5.145113394793136e-06 , err= 1.6756559254525926e-06
ii= 262 , relres= 5.286113354169131e-06 , err= 1.590314656987733e-06
ii= 263 , relres= 4.658170148602399e-06 , err= 1.5093138334141612e-06
ii= 264 , relres= 4.443360987221799e-06 , err= 1.4574561026058569e-06
ii= 265 , relres= 4.65012528008217e-06 , err= 1.3227675082232609e-06
ii= 266 , relres= 4.1242462802531015e-06 , err= 1.2723192235614537e-06
ii= 267 , relres= 3.9808659027047175e-06 , err= 1.2393332012215133e-06
ii= 268 , relres= 3.650029929838212e-06 , err= 1.1863932680027185e-06
ii= 269 , relres= 3.7008179229257128e-06 , err= 1.1409669658299475e-06
ii= 270 , relres= 3.5435389109498517e-06 , err= 1.0917026425991887e-06
ii= 271 , relres= 3.363075887789448e-06 , err= 1.0458900348432694e-06
ii= 272 , relres= 3.117021660434023e-06 , err= 1.0009610929772303e-06
ii= 273 , relres= 3.123172993611289e-06 , err= 9.862112276666703e-07
ii= 274 , relres= 2.8467746965161977e-06 , err= 8.697247874321068e-07
ii= 275 , relres= 2.8003384975849473e-06 , err= 8.342720115853485e-07
ii= 276 , relres= 2.588540498915181e-06 , err= 8.14215107239515e-07
ii= 277 , relres= 2.7000803694632114e-06 , err= 7.793527253467715e-07
ii= 278 , relres= 2.4225851944566056e-06 , err= 7.318091470911248e-07
ii= 279 , relres= 2.155088886544315e-06 , err= 6.861603411560072e-07
ii= 280 , relres= 1.9913517326449253e-06 , err= 6.686417560556981e-07
ii= 281 , relres= 2.0397722945540333e-06 , err= 5.969389966521374e-07
ii= 282 , relres= 1.7201842716814322e-06 , err= 5.605307163509618e-07
ii= 283 , relres= 1.7558080527352748e-06 , err= 5.221455315896176e-07
ii= 284 , relres= 1.632765569212261e-06 , err= 5.011070355286633e-07
ii= 285 , relres= 1.5697400806450312e-06 , err= 4.6850579740780624e-07
ii= 286 , relres= 1.4193372064719932e-06 , err= 4.490445996351329e-07
ii= 287 , relres= 1.575064583000655e-06 , err= 4.339471951851131e-07
ii= 288 , relres= 1.2723511337662253e-06 , err= 3.994221728436699e-07
ii= 289 , relres= 1.2276280499539695e-06 , err= 3.923323947205217e-07
ii= 290 , relres= 1.353014380487706e-06 , err= 3.7691817890630516e-07
ii= 291 , relres= 1.1334450491385617e-06 , err= 3.4741149701527273e-07
ii= 292 , relres= 1.0770771760184169e-06 , err= 3.312926855456567e-07
ii= 293 , relres= 1.0315106167701753e-06 , err= 3.248463907020287e-07
ii= 294 , relres= 1.0116194730108283e-06 , err= 2.990554082436264e-07
ii= 295 , relres= 9.45374584096554e-07 , err= 2.868620257972397e-07
ii= 296 , relres= 8.032919091971854e-07 , err= 2.701797648038728e-07
ii= 297 , relres= 8.575991848102406e-07 , err= 2.6229476255873297e-07
ii= 298 , relres= 8.305321590307367e-07 , err= 2.5030574543302536e-07
ii= 299 , relres= 7.839967177113903e-07 , err= 2.3537550161352705e-07
ii= 300 , relres= 6.98033224095347e-07 , err= 2.258465735775212e-07
ii= 301 , relres= 6.634990997650757e-07 , err= 2.1824048671017957e-07
ii= 302 , relres= 6.156829422657606e-07 , err= 2.0021222048101042e-07
ii= 303 , relres= 6.109431959247855e-07 , err= 1.865728283871444e-07
ii= 304 , relres= 5.539533651839378e-07 , err= 1.8119861863556778e-07
ii= 305 , relres= 5.640570911836404e-07 , err= 1.6996597729098435e-07
ii= 306 , relres= 5.006416072422439e-07 , err= 1.6039636426469457e-07
ii= 307 , relres= 4.7617354995829826e-07 , err= 1.5528395806682503e-07
ii= 308 , relres= 4.632902215630099e-07 , err= 1.5254189111355108e-07

```

```

ii= 309 , relres= 4.4284890149803934e-07 , err= 1.474684774873397e-07
ii= 310 , relres= 4.5440407281159144e-07 , err= 1.3556820420287436e-07
ii= 311 , relres= 4.1298517736459085e-07 , err= 1.31679213440649e-07
ii= 312 , relres= 3.8677698302303674e-07 , err= 1.280823012515043e-07
ii= 313 , relres= 3.8552813466161314e-07 , err= 1.2112657291890582e-07
ii= 314 , relres= 3.51398275803028e-07 , err= 1.115778540057606e-07
ii= 315 , relres= 3.3729106307414637e-07 , err= 1.0764605199381179e-07
ii= 316 , relres= 3.376415648560859e-07 , err= 1.053437295362542e-07
ii= 317 , relres= 3.2574171507293116e-07 , err= 9.842564102824411e-08
ii= 318 , relres= 2.843819886504509e-07 , err= 9.064467004931077e-08
ii= 319 , relres= 2.9223622734289556e-07 , err= 8.724600809228628e-08
ii= 320 , relres= 2.721599368486707e-07 , err= 8.428381249341061e-08
ii= 321 , relres= 2.634159531152129e-07 , err= 8.135067591293955e-08
ii= 322 , relres= 2.2067654185678835e-07 , err= 7.340296161398965e-08
ii= 323 , relres= 2.2045831340582582e-07 , err= 6.940623835302383e-08
ii= 324 , relres= 1.9801488335199456e-07 , err= 6.466591329840817e-08
ii= 325 , relres= 2.057590114198536e-07 , err= 6.282782941870065e-08
ii= 326 , relres= 1.9061457510767145e-07 , err= 6.051854504693998e-08
ii= 327 , relres= 1.9469947599850323e-07 , err= 5.6778394971283575e-08
ii= 328 , relres= 1.8084591050408119e-07 , err= 5.41509041399369e-08
ii= 329 , relres= 1.7576262229899838e-07 , err= 5.050248115141494e-08
ii= 330 , relres= 1.6383847474876862e-07 , err= 4.8792301610339144e-08
ii= 331 , relres= 1.5078751078350085e-07 , err= 4.7433892984567055e-08
ii= 332 , relres= 1.5356837103344844e-07 , err= 4.6154580054334686e-08
ii= 333 , relres= 1.332485586246277e-07 , err= 4.1518056198277145e-08
ii= 334 , relres= 1.308752443021386e-07 , err= 4.057395187941751e-08
ii= 335 , relres= 1.2431211945309912e-07 , err= 3.826377481086092e-08
ii= 336 , relres= 1.2239253103624922e-07 , err= 3.675681975066271e-08
ii= 337 , relres= 1.1004530639001869e-07 , err= 3.4604739705671636e-08
ii= 338 , relres= 1.1022243786181258e-07 , err= 3.357478518626701e-08
ii= 339 , relres= 1.0102091061390961e-07 , err= 3.2302694538927826e-08
ii= 340 , relres= 1.1208394967942257e-07 , err= 3.065833514184699e-08
ii= 341 , relres= 1.0916941820180364e-07 , err= 2.8708936015776944e-08
ii= 342 , relres= 8.636706804885227e-08 , err= 2.6691512848495447e-08
GN: none
ii= 0 , relres= 1.3981916030069563 , err= 0.9239998664216407
ii= 1 , relres= 1.0870191076636955 , err= 0.876557775271837
ii= 2 , relres= 0.995435954336729 , err= 0.8298527949758102
ii= 3 , relres= 0.8686513548910919 , err= 0.7895008392576626
ii= 4 , relres= 0.8365506750676813 , err= 0.7357382098129452
ii= 5 , relres= 0.7597205613057906 , err= 0.6972807693480906
ii= 6 , relres= 0.6476879486176562 , err= 0.6533906370595334
ii= 7 , relres= 0.5978230125460502 , err= 0.6081432855979828
ii= 8 , relres= 0.5470362799065941 , err= 0.5618049998467948
ii= 9 , relres= 0.5098362865645016 , err= 0.51765988518475
ii= 10 , relres= 0.464287299390635 , err= 0.46953009192616774
ii= 11 , relres= 0.41990974611063614 , err= 0.42625758382690754
ii= 12 , relres= 0.37455990666455424 , err= 0.38627620629907927
ii= 13 , relres= 0.3552420143928426 , err= 0.35473449767679843
ii= 14 , relres= 0.3180883405141464 , err= 0.327143716722659
ii= 15 , relres= 0.2919619084263092 , err= 0.30227897286863936
ii= 16 , relres= 0.24634468811702384 , err= 0.2753468315581107
ii= 17 , relres= 0.2361892224913273 , err= 0.25340197380145757
ii= 18 , relres= 0.2192479830731698 , err= 0.23478622718207837
ii= 19 , relres= 0.18119677432499293 , err= 0.21440458745810145
ii= 20 , relres= 0.17891539471807666 , err= 0.19823395117801243
ii= 21 , relres= 0.14631836102229906 , err= 0.18214394038611723
ii= 22 , relres= 0.13349526606625012 , err= 0.16495360098032275
ii= 23 , relres= 0.12348479887351603 , err= 0.15238663350341697
ii= 24 , relres= 0.1074280845960927 , err= 0.1400881393217138
ii= 25 , relres= 0.09718227476670102 , err= 0.12730342725062344

```

```
ii= 26 , relres= 0.10162817327948355 , err= 0.11643550757932755
ii= 27 , relres= 0.07956178946920911 , err= 0.10692210667524248
ii= 28 , relres= 0.0748214005289711 , err= 0.09694648489870206
ii= 29 , relres= 0.07558629630729356 , err= 0.0892276838057949
ii= 30 , relres= 0.07050893574457417 , err= 0.08362730118243984
ii= 31 , relres= 0.06710501776827717 , err= 0.07899839884638156
ii= 32 , relres= 0.05204564220710859 , err= 0.07281476849460795
ii= 33 , relres= 0.04999134031273624 , err= 0.06711638733721938
ii= 34 , relres= 0.045303826658377316 , err= 0.06120819799585159
ii= 35 , relres= 0.04387799542738949 , err= 0.05624803722568107
ii= 36 , relres= 0.03744497334015271 , err= 0.05145537299442362
ii= 37 , relres= 0.035525982863864554 , err= 0.047126539713437346
ii= 38 , relres= 0.030551300709960694 , err= 0.04315583518484009
ii= 39 , relres= 0.02972173821872618 , err= 0.039742733699575955
ii= 40 , relres= 0.028161650281084562 , err= 0.03604850925296994
ii= 41 , relres= 0.02471514921111891 , err= 0.03304509416206494
ii= 42 , relres= 0.026727211774347386 , err= 0.029775082335853475
ii= 43 , relres= 0.0253326908028908 , err= 0.02743296360816899
ii= 44 , relres= 0.020445808023464882 , err= 0.024663739635398887
ii= 45 , relres= 0.018563250391086642 , err= 0.021899407587875386
ii= 46 , relres= 0.01757473412708309 , err= 0.01967170084546296
ii= 47 , relres= 0.016293798968998567 , err= 0.01769124369360132
ii= 48 , relres= 0.015377217824744743 , err= 0.015873110091370556
ii= 49 , relres= 0.014908518106703263 , err= 0.01442929218089735
ii= 50 , relres= 0.012535433356333222 , err= 0.012926788705253914
ii= 51 , relres= 0.011280217564346476 , err= 0.011376861911637635
ii= 52 , relres= 0.009832881625035097 , err= 0.010066843304985392
ii= 53 , relres= 0.009504366184216547 , err= 0.0090597648536012
ii= 54 , relres= 0.010724878175644959 , err= 0.00822887999771338
ii= 55 , relres= 0.007565163551095704 , err= 0.007481373977812716
ii= 56 , relres= 0.0064941518376950185 , err= 0.006710829075994433
ii= 57 , relres= 0.006276410618371909 , err= 0.0060641227762079815
ii= 58 , relres= 0.005059967431050377 , err= 0.005434632110615916
ii= 59 , relres= 0.004679131459493771 , err= 0.004842802233190112
ii= 60 , relres= 0.005168694068042647 , err= 0.004346310466083188
ii= 61 , relres= 0.0038680724795707158 , err= 0.00395583901343081
ii= 62 , relres= 0.0034487376732084845 , err= 0.0035257607828465065
ii= 63 , relres= 0.003008624479761021 , err= 0.0030887292548627825
ii= 64 , relres= 0.002937526566946712 , err= 0.002785258805749873
ii= 65 , relres= 0.002576686616818803 , err= 0.0024772902802605848
ii= 66 , relres= 0.0024543090418913164 , err= 0.0022914497632990217
ii= 67 , relres= 0.0019182156261861871 , err= 0.002054508450286532
ii= 68 , relres= 0.0016925556627684502 , err= 0.00183843870227061
ii= 69 , relres= 0.00154270225037277 , err= 0.0016471307034934943
ii= 70 , relres= 0.0013710154192423337 , err= 0.0014601656027113715
ii= 71 , relres= 0.0011910829686612209 , err= 0.0013096192401251838
ii= 72 , relres= 0.0012126021288903438 , err= 0.00116727442212223
ii= 73 , relres= 0.0011998163433420504 , err= 0.0010484647638670126
ii= 74 , relres= 0.0010595914350560922 , err= 0.0009759067787205912
ii= 75 , relres= 0.0008903003011073324 , err= 0.000879091084985161
ii= 76 , relres= 0.0010484484130218654 , err= 0.0007990554722518283
ii= 77 , relres= 0.0007087756789641913 , err= 0.0007202570972418341
ii= 78 , relres= 0.0006103016899792417 , err= 0.0006261423865744114
ii= 79 , relres= 0.0005406114863122315 , err= 0.0005479636993726953
ii= 80 , relres= 0.0004903207128031914 , err= 0.00048230602928053394
ii= 81 , relres= 0.00042446246187359586 , err= 0.0004214406923324219
ii= 82 , relres= 0.00043958487506744106 , err= 0.000375903322048094
ii= 83 , relres= 0.00037120025670656456 , err= 0.0003512149855361105
ii= 84 , relres= 0.0002689848464541113 , err= 0.00030976390063257547
ii= 85 , relres= 0.0002651503285200935 , err= 0.00027418747918746457
ii= 86 , relres= 0.0002601551405729587 , err= 0.0002501795797673636
```

```

ii= 87 , relres= 0.00021896612771139172 , err= 0.00022959134744896255
ii= 88 , relres= 0.00018574062217049505 , err= 0.00020648833599162884
ii= 89 , relres= 0.0001512448255694757 , err= 0.00018462393961899413
ii= 90 , relres= 0.00014554813025240273 , err= 0.00016370994622261068
ii= 91 , relres= 0.00012940560269697463 , err= 0.00014790556147611342
ii= 92 , relres= 0.00013940521904002518 , err= 0.00013250235545377072
ii= 93 , relres= 0.0001315499996579489 , err= 0.0001248064740599076
ii= 94 , relres= 9.767988965456116e-05 , err= 0.00011393836576717526
ii= 95 , relres= 0.00011018024543741718 , err= 0.00010410325588103002
ii= 96 , relres= 8.224447315481559e-05 , err= 9.631416395170486e-05
ii= 97 , relres= 7.545289841701265e-05 , err= 8.792045485428062e-05
ii= 98 , relres= 7.417622481924589e-05 , err= 8.143958840914738e-05
ii= 99 , relres= 5.616326844304118e-05 , err= 7.457171064792503e-05
ii= 100 , relres= 5.5377929835771403e-05 , err= 6.716694847786053e-05
ii= 101 , relres= 5.917165169883355e-05 , err= 6.221847042401896e-05
ii= 102 , relres= 4.5356784261090536e-05 , err= 5.690029021826441e-05
ii= 103 , relres= 4.834162287094689e-05 , err= 5.2362527025587455e-05
ii= 104 , relres= 4.121786739666288e-05 , err= 4.8087525856018745e-05
ii= 105 , relres= 3.885261672399464e-05 , err= 4.386723567055502e-05
ii= 106 , relres= 3.467922820088578e-05 , err= 4.1565726120711104e-05
ii= 107 , relres= 2.5889838155084948e-05 , err= 3.7897315553577354e-05
ii= 108 , relres= 2.655538907626424e-05 , err= 3.4492653658840326e-05
ii= 109 , relres= 2.3701868630894964e-05 , err= 3.2448736268429164e-05
ii= 110 , relres= 1.9914836469042742e-05 , err= 2.932541634773619e-05
ii= 111 , relres= 2.123486721346831e-05 , err= 2.671269223627952e-05
ii= 112 , relres= 1.875509074426323e-05 , err= 2.479588202315366e-05
ii= 113 , relres= 1.5993086353839787e-05 , err= 2.2125514448117694e-05
ii= 114 , relres= 1.62044773406987e-05 , err= 1.9975860782261656e-05
ii= 115 , relres= 1.6960308207806126e-05 , err= 1.8659228760433423e-05
ii= 116 , relres= 1.4637192489582676e-05 , err= 1.6926954686061827e-05
ii= 117 , relres= 1.4981914060061148e-05 , err= 1.575137323571354e-05
ii= 118 , relres= 1.172632975394617e-05 , err= 1.449658709781603e-05
ii= 119 , relres= 1.1850658296673883e-05 , err= 1.3499632455866584e-05
ii= 120 , relres= 8.595491674806322e-06 , err= 1.2236075407878276e-05
ii= 121 , relres= 8.235837107033409e-06 , err= 1.0873515738162059e-05
ii= 122 , relres= 8.678529325867094e-06 , err= 9.64799979442001e-06
ii= 123 , relres= 7.153889023797412e-06 , err= 8.850294359190209e-06
ii= 124 , relres= 6.288245428394408e-06 , err= 7.876788725601167e-06
ii= 125 , relres= 6.106295674943774e-06 , err= 6.94503650684779e-06
ii= 126 , relres= 5.4482598464852e-06 , err= 6.340429941266478e-06
ii= 127 , relres= 4.422348325055843e-06 , err= 5.64708388423773e-06
ii= 128 , relres= 4.384158349718334e-06 , err= 4.975168604136395e-06
ii= 129 , relres= 4.419577696518108e-06 , err= 4.533020931823142e-06
ii= 130 , relres= 3.4796982096129974e-06 , err= 4.024482950400495e-06
ii= 131 , relres= 2.902059662232558e-06 , err= 3.4625040543148777e-06
ii= 132 , relres= 3.861757193089742e-06 , err= 3.1126903492864355e-06
ii= 133 , relres= 2.5866909835732932e-06 , err= 2.832655391028e-06
ii= 134 , relres= 2.6037489433231388e-06 , err= 2.5714809535452903e-06
ii= 135 , relres= 2.1273145364909112e-06 , err= 2.335206404589079e-06
ii= 136 , relres= 1.8334881296137558e-06 , err= 2.0547827763330987e-06
ii= 137 , relres= 2.1351589013044073e-06 , err= 1.8979827101345461e-06
ii= 138 , relres= 1.9040581993932516e-06 , err= 1.7327192186030123e-06
ii= 139 , relres= 1.4760933049515037e-06 , err= 1.5869204359463665e-06
ii= 140 , relres= 1.2835920535108144e-06 , err= 1.3689404435770105e-06
ii= 141 , relres= 1.3876511636132805e-06 , err= 1.209758960439895e-06
ii= 142 , relres= 1.1788386691777889e-06 , err= 1.092182726539676e-06
ii= 143 , relres= 1.1171465139738672e-06 , err= 9.492112481563379e-07
ii= 144 , relres= 9.67607632129564e-07 , err= 8.329291429035135e-07
ii= 145 , relres= 7.524377808486867e-07 , err= 7.006434967578691e-07
ii= 146 , relres= 7.883460646943277e-07 , err= 5.924199949307094e-07
ii= 147 , relres= 6.851348353775066e-07 , err= 5.452965161150532e-07

```

```

ii= 148 , relres= 5.660812439116549e-07 , err= 4.767781875099459e-07
ii= 149 , relres= 4.847862817289456e-07 , err= 4.2434429084345735e-07
ii= 150 , relres= 3.783340820598043e-07 , err= 3.716263848284873e-07
ii= 151 , relres= 4.367888582448793e-07 , err= 3.206274547545304e-07
ii= 152 , relres= 3.411262500818105e-07 , err= 2.931310550714698e-07
ii= 153 , relres= 3.11322921271495e-07 , err= 2.625544218772578e-07
ii= 154 , relres= 2.710990233651408e-07 , err= 2.3617204315316876e-07
ii= 155 , relres= 2.020940425909112e-07 , err= 2.0746944385683657e-07
ii= 156 , relres= 2.4054323403595807e-07 , err= 1.8374773961195935e-07
ii= 157 , relres= 1.8892127607165732e-07 , err= 1.6530001900933586e-07
ii= 158 , relres= 1.8218479770573424e-07 , err= 1.4751710435406257e-07
ii= 159 , relres= 1.9483952746683913e-07 , err= 1.36723134817739e-07
ii= 160 , relres= 1.2570331994281196e-07 , err= 1.2032755576218814e-07
ii= 161 , relres= 1.2013784701189733e-07 , err= 1.0751149821089312e-07
ii= 162 , relres= 9.671156184608077e-08 , err= 9.796922460378086e-08
gamma= 10772.17345015941
nb= 1 , good_iter_psf= 20
nb= 5 , good_iter_psf= 17
nb= 25 , good_iter_psf= 15
good_iter_reg= 296
good_iter_none= 145
--- GAMMA ---: 4999.999999999999
Building Regularization H-Matrix
    matrix has dimension 1416 x 1416
        no of non-zeroes      = 9746
        matrix is            real valued
        format                = non symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
    |S|_F                  = 806144
        sparsity constant = 20
        size of H-matrix  = 4.06 MB
    |A|_F                  = 806144
|S-A|_2 = 4.35686e-09
    matrix has dimension — H-matrix inverse ( rtol = 1416 x 1416
        no of non-zeroes      = 9746
        matrix is            real valued
        format                = symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
    |S|_F                  = 5.18561e+06
        sparsity constant = 20
        size of H-matrix  = 2.29 MB
    |A|_F                  = 5.18561e+06
|S-A|_2 = 4.66653e-09
1e-06 , atol = 1e-14 , overwrite= False )
    done in 12.07237195968628
    size of inverse = 3361874 bytes

— H-matrix multiplication C=A*B
    done in 20.78s
    size of C = 3.86 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
    done in 28.02s
    size of C = 8.53 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
    done in 27.15s
    size of LU factor = 23.50 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
    GN: get truth: 9% ETA 21 s (5.82 GB)

```

```
done in 27.00s
size of LU factor = 23.71 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
done in 26.68s
size of LU factor = 23.42 MB
0 , relres= 0.3951130356068793 , err= nan
ii= 1 , relres= 0.18119268594887655 , err= nan
ii= 2 , relres= 0.1310779918776981 , err= nan
ii= 3 , relres= 0.07165449924484159 , err= nan
ii= 4 , relres= 0.03423097960757431 , err= nan
ii= 5 , relres= 0.02090160197925108 , err= nan
ii= 6 , relres= 0.015212313859316236 , err= nan
ii= 7 , relres= 0.01160780512793467 , err= nan
ii= 8 , relres= 0.007543981999314242 , err= nan
ii= 9 , relres= 0.0049492186725525154 , err= nan
ii= 10 , relres= 0.0028701218507649817 , err= nan
ii= 11 , relres= 0.0014394102903093654 , err= nan
ii= 12 , relres= 0.0007381942033129107 , err= nan
ii= 13 , relres= 0.0003758479727022376 , err= nan
ii= 14 , relres= 0.00016992748252304387 , err= nan
ii= 15 , relres= 8.811097345987317e-05 , err= nan
ii= 16 , relres= 4.620116071335566e-05 , err= nan
ii= 17 , relres= 2.2701319988347517e-05 , err= nan
ii= 18 , relres= 1.1799758593800042e-05 , err= nan
ii= 19 , relres= 6.619346915290057e-06 , err= nan
ii= 20 , relres= 3.376536375709346e-06 , err= nan
ii= 21 , relres= 1.7966742817310147e-06 , err= nan
ii= 22 , relres= 8.291082350893098e-07 , err= nan
ii= 23 , relres= 4.06875781287155e-07 , err= nan
ii= 24 , relres= 1.862645682444312e-07 , err= nan
ii= 25 , relres= 9.714200155482449e-08 , err= nan
ii= 26 , relres= 4.5365212640636685e-08 , err= nan
ii= 27 , relres= 2.1271787304695802e-08 , err= nan
ii= 28 , relres= 9.344657702444776e-09 , err= nan
ii= 29 , relres= 4.7973618762832366e-09 , err= nan
ii= 30 , relres= 2.68269613243197e-09 , err= nan
ii= 31 , relres= 1.5125425778690458e-09 , err= nan
ii= 32 , relres= 7.23242132963945e-10 , err= nan
ii= 33 , relres= 3.616053939542023e-10 , err= nan
ii= 34 , relres= 1.6754033337436416e-10 , err= nan
ii= 35 , relres= 9.051627042955266e-11 , err= nan
GN: psf1
ii= 0 , relres= 0.5266528322628968 , err= 0.32462881570039587
ii= 1 , relres= 0.32532009765350794 , err= 0.14457906689656444
ii= 2 , relres= 0.2065342811927938 , err= 0.0815601149868633
ii= 3 , relres= 0.15228385735901032 , err= 0.05121029672149354
ii= 4 , relres= 0.10501404732519931 , err= 0.039383506623071565
ii= 5 , relres= 0.07200873596137573 , err= 0.0264686362120312
ii= 6 , relres= 0.04908817722315212 , err= 0.018909408580764186
ii= 7 , relres= 0.0341291491522533 , err= 0.012474691234340538
ii= 8 , relres= 0.022790822599496705 , err= 0.00830669780997971
ii= 9 , relres= 0.014692218715602185 , err= 0.005656245515973409
ii= 10 , relres= 0.010128087396943047 , err= 0.0040578266091912014
ii= 11 , relres= 0.006986723173056405 , err= 0.0029899868990659155
ii= 12 , relres= 0.005231463867634755 , err= 0.0020524983800376123
ii= 13 , relres= 0.003809394181360359 , err= 0.00146561318473819
ii= 14 , relres= 0.002746237634898525 , err= 0.0009844618345719884
ii= 15 , relres= 0.0018775807288408822 , err= 0.0007104682049523911
ii= 16 , relres= 0.0012614334110226985 , err= 0.00047000849352110604
ii= 17 , relres= 0.0009167822904180237 , err= 0.0003223653876316271
```

```

ii= 18 , relres= 0.0006129751846232129 , err= 0.00021680109829745264
ii= 19 , relres= 0.0004260554742037281 , err= 0.00014126424737265447
ii= 20 , relres= 0.0002941797043812283 , err= 0.00010108157407014441
ii= 21 , relres= 0.00020828605359497754 , err= 6.8108424861157e-05
ii= 22 , relres= 0.00014301676404319675 , err= 4.8446996735911096e-05
ii= 23 , relres= 9.512527443620814e-05 , err= 3.365087473897566e-05
ii= 24 , relres= 6.341077349923904e-05 , err= 2.1264820749126247e-05
ii= 25 , relres= 4.403691631866541e-05 , err= 1.3495731761185768e-05
ii= 26 , relres= 2.7631994440768298e-05 , err= 8.87088166816691e-06
ii= 27 , relres= 1.7850859193792112e-05 , err= 5.551004231326549e-06
ii= 28 , relres= 1.158661407010249e-05 , err= 3.8024098801385603e-06
ii= 29 , relres= 7.809419001903843e-06 , err= 2.3443465208506772e-06
ii= 30 , relres= 5.179225582321655e-06 , err= 1.6812991653854347e-06
ii= 31 , relres= 3.994278703741977e-06 , err= 1.1107583120848712e-06
ii= 32 , relres= 2.847792453641686e-06 , err= 8.860469118591813e-07
ii= 33 , relres= 1.9117011420644346e-06 , err= 5.491265089387634e-07
ii= 34 , relres= 1.3127115357871979e-06 , err= 3.738365829094339e-07
ii= 35 , relres= 8.551852317320209e-07 , err= 2.4753337280873377e-07
ii= 36 , relres= 5.684079263304542e-07 , err= 1.6549808736624536e-07
ii= 37 , relres= 3.5001199911399104e-07 , err= 1.0224568403809411e-07
ii= 38 , relres= 2.2410088916761617e-07 , err= 6.716101980333582e-08
ii= 39 , relres= 1.5262507449368564e-07 , err= 4.265698907734336e-08
ii= 40 , relres= 1.0010354829355736e-07 , err= 3.042497126534203e-08
ii= 41 , relres= 6.588769970567409e-08 , err= 1.9835864750935265e-08
GN: psf5
ii= 0 , relres= 0.4532680669640445 , err= 0.2900352630553415
ii= 1 , relres= 0.2471760028608507 , err= 0.08542027184534999
ii= 2 , relres= 0.17843392307729447 , err= 0.05011067357421284
ii= 3 , relres= 0.11262097532323295 , err= 0.03599151867082122
ii= 4 , relres= 0.06593762832326061 , err= 0.02214030738293416
ii= 5 , relres= 0.04085153595351777 , err= 0.01364541225957226
ii= 6 , relres= 0.02482356461211371 , err= 0.008442895251115353
ii= 7 , relres= 0.016652394346176252 , err= 0.004950272623634028
ii= 8 , relres= 0.010716680747486655 , err= 0.0032081451921538782
ii= 9 , relres= 0.006915249642855349 , err= 0.0021851163695507723
ii= 10 , relres= 0.004762912606651052 , err= 0.0014079086283596137
ii= 11 , relres= 0.0032118271554990195 , err= 0.001010411915405931
ii= 12 , relres= 0.0019122050600815872 , err= 0.0006614059299001535
ii= 13 , relres= 0.0012164896392769466 , err= 0.0004134999489278407
ii= 14 , relres= 0.0008230731283511697 , err= 0.00023758181793675362
ii= 15 , relres= 0.0005037323737236493 , err= 0.00015393937912056943
ii= 16 , relres= 0.0003032223356702363 , err= 9.289728585543762e-05
ii= 17 , relres= 0.0001958467574910502 , err= 5.481451420070108e-05
ii= 18 , relres= 0.00012533792662785227 , err= 3.448070048218929e-05
ii= 19 , relres= 6.964618578062877e-05 , err= 2.150032919421699e-05
ii= 20 , relres= 4.101776073138566e-05 , err= 1.1527724103914499e-05
ii= 21 , relres= 2.4823874648587145e-05 , err= 7.72110332233411e-06
ii= 22 , relres= 1.5100140057760035e-05 , err= 4.4836047142547855e-06
ii= 23 , relres= 1.0122691594271446e-05 , err= 2.741928846851389e-06
ii= 24 , relres= 5.981482092923348e-06 , err= 1.7522930103075852e-06
ii= 25 , relres= 4.040635975789293e-06 , err= 1.047771677271271e-06
ii= 26 , relres= 2.884065395142406e-06 , err= 6.690468682943784e-07
ii= 27 , relres= 1.7667035134151864e-06 , err= 5.071220356416882e-07
ii= 28 , relres= 1.0646870518930057e-06 , err= 3.098256889783827e-07
ii= 29 , relres= 6.598001727471105e-07 , err= 1.7828977052133073e-07
ii= 30 , relres= 4.3393714255752533e-07 , err= 1.1017648567206346e-07
ii= 31 , relres= 3.0333033480188667e-07 , err= 7.927643121744973e-08
ii= 32 , relres= 1.69441471656532e-07 , err= 5.0760488185150135e-08
ii= 33 , relres= 1.0193849619780798e-07 , err= 2.941351486520283e-08
ii= 34 , relres= 6.125997788587869e-08 , err= 1.642443751834108e-08
GN: psf25

```

```

ii= 0 , relres= 0.3951130356068793 , err= 0.27775532136082154
ii= 1 , relres= 0.18119268594887655 , err= 0.08998274631518206
ii= 2 , relres= 0.1310779918776981 , err= 0.04987930980241478
ii= 3 , relres= 0.07165449924484159 , err= 0.04057972225778153
ii= 4 , relres= 0.03423097960757431 , err= 0.02875826616746826
ii= 5 , relres= 0.02090160197925108 , err= 0.019738837546369053
ii= 6 , relres= 0.015212313859316236 , err= 0.0124894667109556
ii= 7 , relres= 0.01160780512793467 , err= 0.007333348763144734
ii= 8 , relres= 0.007543981999314242 , err= 0.004375849244522488
ii= 9 , relres= 0.0049492186725525154 , err= 0.0025341695560081793
ii= 10 , relres= 0.0028701218507649817 , err= 0.001185637680753293
ii= 11 , relres= 0.0014394102903093654 , err= 0.0005269744300800436
ii= 12 , relres= 0.0007381942033129107 , err= 0.00026043990520062534
ii= 13 , relres= 0.0003758479727022376 , err= 0.00013682082195940677
ii= 14 , relres= 0.00016992748252304387 , err= 7.019788561420123e-05
ii= 15 , relres= 8.811097345987317e-05 , err= 3.1078546535984976e-05
ii= 16 , relres= 4.620116071335566e-05 , err= 1.4270321582334615e-05
ii= 17 , relres= 2.2701319988347517e-05 , err= 7.818057029869051e-06
ii= 18 , relres= 1.1799758593800042e-05 , err= 4.228405725252515e-06
ii= 19 , relres= 6.619346915290057e-06 , err= 2.0981805515308304e-06
ii= 20 , relres= 3.376536375709346e-06 , err= 9.63194941426742e-07
ii= 21 , relres= 1.7966742817310147e-06 , err= 5.362186643702507e-07
ii= 22 , relres= 8.291082350893098e-07 , err= 2.83786304049251e-07
ii= 23 , relres= 4.06875781287155e-07 , err= 1.4690745843608255e-07
ii= 24 , relres= 1.862645682444312e-07 , err= 6.956704131809402e-08
ii= 25 , relres= 9.714200155482449e-08 , err= 3.292556275785442e-08
GN: reg
ii= 0 , relres= 1.0437602024959947 , err= 0.9979672322240524
ii= 1 , relres= 1.1159650571979562 , err= 0.994791042519143
ii= 2 , relres= 1.1231449373975342 , err= 0.9893782502105989
ii= 3 , relres= 1.1863128294928929 , err= 0.9814923925561116
ii= 4 , relres= 1.2348232522083467 , err= 0.9741064891484537
ii= 5 , relres= 1.2473008440414397 , err= 0.964922722547001
ii= 6 , relres= 1.2174699542576888 , err= 0.9552637850807707
ii= 7 , relres= 1.2713243888313828 , err= 0.9462117856669371
ii= 8 , relres= 1.2811841849647647 , err= 0.9326876899736497
ii= 9 , relres= 1.3762077383468252 , err= 0.918437407104969
ii= 10 , relres= 1.287179954605157 , err= 0.9056881366890481
ii= 11 , relres= 1.2820009948736446 , err= 0.8914752945139229
ii= 12 , relres= 1.2420485594378823 , err= 0.877198452143299
ii= 13 , relres= 1.2740941008455933 , err= 0.8590424064161236
ii= 14 , relres= 1.2043529799343382 , err= 0.8451577928565481
ii= 15 , relres= 1.216885769301365 , err= 0.8282087534301246
ii= 16 , relres= 1.2217368522592886 , err= 0.8066738496230238
ii= 17 , relres= 1.1651697623615693 , err= 0.7902446333373165
ii= 18 , relres= 1.1710576944219193 , err= 0.7765922392981919
ii= 19 , relres= 1.1907913069689324 , err= 0.7569698607314908
ii= 20 , relres= 1.1822150292905906 , err= 0.7405059417841993
ii= 21 , relres= 1.1543509447547682 , err= 0.7201605098055034
ii= 22 , relres= 1.146921494033101 , err= 0.702200819828567
ii= 23 , relres= 1.1339268009902435 , err= 0.6854981835137339
ii= 24 , relres= 1.1064932297667738 , err= 0.6705644672334192
ii= 25 , relres= 1.067891614693416 , err= 0.6575477585962118
ii= 26 , relres= 1.1189178562893298 , err= 0.6514068704060473
ii= 27 , relres= 1.0679006747608324 , err= 0.631968376438163
ii= 28 , relres= 1.0715047126464066 , err= 0.6181171292806101
ii= 29 , relres= 1.1436669122131218 , err= 0.6085959940604718
ii= 30 , relres= 1.0517625913354847 , err= 0.5960990823497445
ii= 31 , relres= 1.004682003870964 , err= 0.5793722954172774
ii= 32 , relres= 1.0189927752049601 , err= 0.565527808781413
ii= 33 , relres= 1.0430871423206458 , err= 0.5563958678786529

```

```
ii= 34 , relres= 1.0014487349327377 , err= 0.5469333520203575
ii= 35 , relres= 1.0121200180012304 , err= 0.5338178669202741
ii= 36 , relres= 1.006732004463462 , err= 0.5191775420954118
ii= 37 , relres= 0.9949705650815462 , err= 0.5139249187370855
ii= 38 , relres= 0.9776573992968856 , err= 0.49877014728325875
ii= 39 , relres= 0.9169692516934955 , err= 0.47973336923210413
ii= 40 , relres= 0.8913175794262544 , err= 0.4670269425369162
ii= 41 , relres= 0.883871619408199 , err= 0.4560299742045237
ii= 42 , relres= 0.8937172910974379 , err= 0.44986850300699294
ii= 43 , relres= 0.9141613784493812 , err= 0.4363042825861244
ii= 44 , relres= 0.840160555435063 , err= 0.42168268773584616
ii= 45 , relres= 0.8709468742178916 , err= 0.41394628311849174
ii= 46 , relres= 0.8479698611389741 , err= 0.4040528715923919
ii= 47 , relres= 0.8329106619954317 , err= 0.3999012371439805
ii= 48 , relres= 0.7895621380917615 , err= 0.38910463262206874
ii= 49 , relres= 0.7547148755742962 , err= 0.37704796883879527
ii= 50 , relres= 0.8250462718484213 , err= 0.36634314073145086
ii= 51 , relres= 0.7261709253977899 , err= 0.3614009488974544
ii= 52 , relres= 0.7185840672830535 , err= 0.3515666561878933
ii= 53 , relres= 0.6947095275795073 , err= 0.3395806601734472
ii= 54 , relres= 0.6525834357175623 , err= 0.3270684813863106
ii= 55 , relres= 0.6698180600021784 , err= 0.32327984815040706
ii= 56 , relres= 0.6488136261022039 , err= 0.3171399380779042
ii= 57 , relres= 0.645728999700922 , err= 0.31197876257071167
ii= 58 , relres= 0.6189864437242066 , err= 0.3036720803783732
ii= 59 , relres= 0.6506822714347915 , err= 0.29993760195317476
ii= 60 , relres= 0.5841561995427875 , err= 0.2921430793184011
ii= 61 , relres= 0.5840029198622796 , err= 0.28356821823624495
ii= 62 , relres= 0.5644525391457609 , err= 0.27910055724568916
ii= 63 , relres= 0.5386763866778014 , err= 0.270993798085184
ii= 64 , relres= 0.5909889387681175 , err= 0.26238270226879434
ii= 65 , relres= 0.5585136171222828 , err= 0.258191022535891
ii= 66 , relres= 0.5639779789635117 , err= 0.2542221752643299
ii= 67 , relres= 0.5312364773705669 , err= 0.2455092606413212
ii= 68 , relres= 0.5321905818788756 , err= 0.2395382490327175
ii= 69 , relres= 0.5109167911753679 , err= 0.23493762655675274
ii= 70 , relres= 0.522537970625552 , err= 0.23013924668411762
ii= 71 , relres= 0.4863877900496844 , err= 0.223772580444953
ii= 72 , relres= 0.5561103419031163 , err= 0.21888116161277207
ii= 73 , relres= 0.4588250152959906 , err= 0.21168354722642765
ii= 74 , relres= 0.44678798013435006 , err= 0.205297770783859
ii= 75 , relres= 0.4769175542837554 , err= 0.20094881068017226
ii= 76 , relres= 0.4228995607274484 , err= 0.1959908260277635
ii= 77 , relres= 0.41559656532484507 , err= 0.19032339526283693
ii= 78 , relres= 0.4034196936080221 , err= 0.18680108168715287
ii= 79 , relres= 0.4279198307779138 , err= 0.18241475776015123
ii= 80 , relres= 0.3980769403783562 , err= 0.17948129525809045
ii= 81 , relres= 0.4151783289604781 , err= 0.17568987388324517
ii= 82 , relres= 0.4031580923958124 , err= 0.17255470531305708
ii= 83 , relres= 0.38742519260710717 , err= 0.1687083576362342
ii= 84 , relres= 0.3742044939815941 , err= 0.16218983832430797
ii= 85 , relres= 0.3843817710591039 , err= 0.15749331616131462
ii= 86 , relres= 0.36703543528706944 , err= 0.1543776652818281
ii= 87 , relres= 0.3483639407512033 , err= 0.15282839214947286
ii= 88 , relres= 0.3417643502235106 , err= 0.14713567763043595
ii= 89 , relres= 0.33036423468084125 , err= 0.14111911454675585
ii= 90 , relres= 0.32581204868902414 , err= 0.13829408771365406
ii= 91 , relres= 0.3309140585056637 , err= 0.1314351140172698
ii= 92 , relres= 0.32156634356965447 , err= 0.12956025110949898
ii= 93 , relres= 0.31134993981969883 , err= 0.126667180152823
ii= 94 , relres= 0.29218544282423503 , err= 0.1238628762575473
```

```
ii= 95 , relres= 0.28706188912375374 , err= 0.11819235242781878
ii= 96 , relres= 0.3133517899374739 , err= 0.11525475547528144
ii= 97 , relres= 0.2835050743677726 , err= 0.11082637056565467
ii= 98 , relres= 0.27521249182695784 , err= 0.10845037083994259
ii= 99 , relres= 0.28606623083478583 , err= 0.10448627587497226
ii= 100 , relres= 0.26312895196579156 , err= 0.10269848066247778
ii= 101 , relres= 0.26318724195446586 , err= 0.10142959026904329
ii= 102 , relres= 0.23742813141093952 , err= 0.0981914124634054
ii= 103 , relres= 0.24131014446051227 , err= 0.09649117782485621
ii= 104 , relres= 0.23608915192558455 , err= 0.09503861125620361
ii= 105 , relres= 0.22471104664065386 , err= 0.09295983880538211
ii= 106 , relres= 0.2279544765891949 , err= 0.09200338696186207
ii= 107 , relres= 0.22015999974700978 , err= 0.08929457364778329
ii= 108 , relres= 0.2137772312448965 , err= 0.08823225036412073
ii= 109 , relres= 0.21808436387490807 , err= 0.08567832722276805
ii= 110 , relres= 0.21014150468166254 , err= 0.08315439756891674
ii= 111 , relres= 0.21515826275433267 , err= 0.08116778879394053
ii= 112 , relres= 0.19770776975098955 , err= 0.07816883470593741
ii= 113 , relres= 0.20141117770932554 , err= 0.07633381891100835
ii= 114 , relres= 0.19366100422441662 , err= 0.07457892075360908
ii= 115 , relres= 0.18969118120908599 , err= 0.07331713399223838
ii= 116 , relres= 0.18378333928099597 , err= 0.07214794135781119
ii= 117 , relres= 0.16880870899427317 , err= 0.06963982980412604
ii= 118 , relres= 0.1716194018004088 , err= 0.06684701437855628
ii= 119 , relres= 0.16723980293111082 , err= 0.0651932964781353
ii= 120 , relres= 0.1580936657009086 , err= 0.06319245470753868
ii= 121 , relres= 0.15732456762204933 , err= 0.06225792975900148
ii= 122 , relres= 0.16666662232887522 , err= 0.06026749226902556
ii= 123 , relres= 0.1438302501411762 , err= 0.05913831507629871
ii= 124 , relres= 0.1548240777481713 , err= 0.05669632384891125
ii= 125 , relres= 0.14490215744248106 , err= 0.05610276226853724
ii= 126 , relres= 0.15159935132660585 , err= 0.05534786931301761
ii= 127 , relres= 0.1358006548440567 , err= 0.05346698784962444
ii= 128 , relres= 0.13363659254986734 , err= 0.0525798797868848
ii= 129 , relres= 0.1317580469890655 , err= 0.051868484690882344
ii= 130 , relres= 0.12145556135598062 , err= 0.05008281261322852
ii= 131 , relres= 0.12554708747213328 , err= 0.048249813428042125
ii= 132 , relres= 0.12011711527860609 , err= 0.04747119995150273
ii= 133 , relres= 0.12237434799738638 , err= 0.04576267860936314
ii= 134 , relres= 0.12176985097305083 , err= 0.04463505924596827
ii= 135 , relres= 0.11366485668419217 , err= 0.04415363316543543
ii= 136 , relres= 0.11710781715564778 , err= 0.04289971298671088
ii= 137 , relres= 0.10528385046684545 , err= 0.04195878514031101
ii= 138 , relres= 0.10546781383293134 , err= 0.04130359080890121
ii= 139 , relres= 0.09766435829424823 , err= 0.03991662877908037
ii= 140 , relres= 0.09958124088219232 , err= 0.038773631861632116
ii= 141 , relres= 0.09390487574485067 , err= 0.03778436913355142
ii= 142 , relres= 0.0911469043219761 , err= 0.0373201485764817
ii= 143 , relres= 0.09725332940097027 , err= 0.036928551923236165
ii= 144 , relres= 0.08935541559297133 , err= 0.035693088431694005
ii= 145 , relres= 0.0883065471695071 , err= 0.03533326315895569
ii= 146 , relres= 0.09076532551053013 , err= 0.03487255212602169
ii= 147 , relres= 0.08322674217961035 , err= 0.03365467897723171
ii= 148 , relres= 0.07829852117942279 , err= 0.032866372934443104
ii= 149 , relres= 0.07577500959717562 , err= 0.031759024293792806
ii= 150 , relres= 0.0749600997523431 , err= 0.03152680726962844
ii= 151 , relres= 0.08109185460956198 , err= 0.03096563523170165
ii= 152 , relres= 0.07485464748022058 , err= 0.02975611684369035
ii= 153 , relres= 0.07294379966055795 , err= 0.029207065310940823
ii= 154 , relres= 0.07309886311761891 , err= 0.028307049763942518
ii= 155 , relres= 0.07042848665750756 , err= 0.027725283386341698
```

```
ii= 156 , relres= 0.07031028594713393 , err= 0.02735385999312731
ii= 157 , relres= 0.07128941020126589 , err= 0.026989388291080278
ii= 158 , relres= 0.0714257638149595 , err= 0.026313801560217426
ii= 159 , relres= 0.0643097773583869 , err= 0.025617758088167252
ii= 160 , relres= 0.06363082346563184 , err= 0.025267526764624845
ii= 161 , relres= 0.061860402816216326 , err= 0.024217573875064617
ii= 162 , relres= 0.06065906807895704 , err= 0.023605034333986127
ii= 163 , relres= 0.06586524172799808 , err= 0.023225071384682126
ii= 164 , relres= 0.055691777096781726 , err= 0.02231871598578531
ii= 165 , relres= 0.05367879327080825 , err= 0.02120335278360561
ii= 166 , relres= 0.05297941189619888 , err= 0.02107286942353587
ii= 167 , relres= 0.052689430960885936 , err= 0.02028446173355912
ii= 168 , relres= 0.05099218707163296 , err= 0.019745312520367455
ii= 169 , relres= 0.05029519758758909 , err= 0.019308955348974775
ii= 170 , relres= 0.04905153395207264 , err= 0.01873781230036533
ii= 171 , relres= 0.04626593542843233 , err= 0.018393730376479955
ii= 172 , relres= 0.05003048076420919 , err= 0.018052267095368838
ii= 173 , relres= 0.046440876555623234 , err= 0.017488448927290824
ii= 174 , relres= 0.044217590770596796 , err= 0.017294055440474618
ii= 175 , relres= 0.04619289184528763 , err= 0.016840969724942565
ii= 176 , relres= 0.04424571637620645 , err= 0.016237985425483617
ii= 177 , relres= 0.04561354082747397 , err= 0.016001077958324044
ii= 178 , relres= 0.039327804018633214 , err= 0.015647502645720287
ii= 179 , relres= 0.03739421106835936 , err= 0.014965626054754629
ii= 180 , relres= 0.03715843840398558 , err= 0.014704471593607996
ii= 181 , relres= 0.039813825870748866 , err= 0.014305205290615889
ii= 182 , relres= 0.03730824761801548 , err= 0.013935706810439256
ii= 183 , relres= 0.036562566017643676 , err= 0.013709282604303232
ii= 184 , relres= 0.03570872413866982 , err= 0.01351013817467053
ii= 185 , relres= 0.0369231654456668 , err= 0.013302504229420128
ii= 186 , relres= 0.0338720012225305 , err= 0.01293086841672937
ii= 187 , relres= 0.03704519300911735 , err= 0.01269892406061757
ii= 188 , relres= 0.03285263036648426 , err= 0.012328832493122227
ii= 189 , relres= 0.03301845308562867 , err= 0.012093188815889949
ii= 190 , relres= 0.03289660652118837 , err= 0.011784371521232843
ii= 191 , relres= 0.03078910070848057 , err= 0.011299510943049101
ii= 192 , relres= 0.029788047757380528 , err= 0.01106924722365339
ii= 193 , relres= 0.030581031024736693 , err= 0.010682771363571477
ii= 194 , relres= 0.027897690819761053 , err= 0.010383842252266406
ii= 195 , relres= 0.029042693467045796 , err= 0.010205002473438722
ii= 196 , relres= 0.02926204308425739 , err= 0.00985643364998878
ii= 197 , relres= 0.02832857370850824 , err= 0.00970459164111002
ii= 198 , relres= 0.025873562185255283 , err= 0.00943925316165859
ii= 199 , relres= 0.02587047018221951 , err= 0.00934814188383113
ii= 200 , relres= 0.02813479364098078 , err= 0.00907948940131519
ii= 201 , relres= 0.02440527473078978 , err= 0.008780315132145881
ii= 202 , relres= 0.025521894493352362 , err= 0.008441485643134908
ii= 203 , relres= 0.024537818790296748 , err= 0.008336604055907285
ii= 204 , relres= 0.022767484118014828 , err= 0.008167170006363828
ii= 205 , relres= 0.02482310995585515 , err= 0.00786434398674746
ii= 206 , relres= 0.02219699488219239 , err= 0.007635782855123487
ii= 207 , relres= 0.02191261226090698 , err= 0.007479374115958172
ii= 208 , relres= 0.021742571562874173 , err= 0.007379784438868876
ii= 209 , relres= 0.023087295294369772 , err= 0.007234577810743465
ii= 210 , relres= 0.019055737846793864 , err= 0.0069423427109867805
ii= 211 , relres= 0.02039234671042081 , err= 0.006603400753268896
ii= 212 , relres= 0.019368881608785166 , err= 0.006480461555111899
ii= 213 , relres= 0.018839010423060715 , err= 0.00635979667813905
ii= 214 , relres= 0.01804072079740577 , err= 0.006259447459049034
ii= 215 , relres= 0.017084028778268836 , err= 0.005890897161876122
ii= 216 , relres= 0.01731447839708133 , err= 0.005693021396155862
```

```
ii= 217 , relres= 0.016759933508793585 , err= 0.005527226010847435
ii= 218 , relres= 0.017270281534069738 , err= 0.0054703460311912085
ii= 219 , relres= 0.016797363828572217 , err= 0.005333810520970934
ii= 220 , relres= 0.016740868691856946 , err= 0.005179834425755979
ii= 221 , relres= 0.016236560960192523 , err= 0.005088017082966417
ii= 222 , relres= 0.014393067130741765 , err= 0.004992557059827694
ii= 223 , relres= 0.01433542582662154 , err= 0.004952305832427935
ii= 224 , relres= 0.015265682669289227 , err= 0.0048717938860771675
ii= 225 , relres= 0.01368575659784788 , err= 0.004705721604209965
ii= 226 , relres= 0.014308496941039703 , err= 0.004627553456192135
ii= 227 , relres= 0.013708246035868376 , err= 0.004493654145325527
ii= 228 , relres= 0.013325338599531146 , err= 0.004359146630712163
ii= 229 , relres= 0.013249540792807527 , err= 0.004315557040582805
ii= 230 , relres= 0.012383615932587634 , err= 0.004207839231877861
ii= 231 , relres= 0.011097366117325234 , err= 0.003995187318539023
ii= 232 , relres= 0.010984151132858387 , err= 0.0038730013116778585
ii= 233 , relres= 0.010940294023299386 , err= 0.0037724257004119696
ii= 234 , relres= 0.010281631937071321 , err= 0.003718452371033867
ii= 235 , relres= 0.01044768341085193 , err= 0.0036736065464001723
ii= 236 , relres= 0.011071418008296875 , err= 0.0035255299765641003
ii= 237 , relres= 0.010407512984217585 , err= 0.0034498612866461597
ii= 238 , relres= 0.009817749907151169 , err= 0.0034006600358796246
ii= 239 , relres= 0.010305296849393582 , err= 0.0032888685778517703
ii= 240 , relres= 0.009609593723709413 , err= 0.003239178646211998
ii= 241 , relres= 0.009342446776862072 , err= 0.0031997570052622773
ii= 242 , relres= 0.009224133998748454 , err= 0.003118031176444613
ii= 243 , relres= 0.009033424413134853 , err= 0.0030897841555543575
ii= 244 , relres= 0.009113235042624113 , err= 0.002999827853926494
ii= 245 , relres= 0.008187170939639084 , err= 0.0029325212802821655
ii= 246 , relres= 0.008876784543874484 , err= 0.0028779675206415676
ii= 247 , relres= 0.008819699267399492 , err= 0.0027859958047866595
ii= 248 , relres= 0.007638703014917983 , err= 0.0027368639210315214
ii= 249 , relres= 0.00810064551435558 , err= 0.002697225494011127
ii= 250 , relres= 0.008391575439698623 , err= 0.002638223609743445
ii= 251 , relres= 0.007385584579114415 , err= 0.0025715549776565106
ii= 252 , relres= 0.0077372803983674415 , err= 0.002512773634527549
ii= 253 , relres= 0.0070701887922009375 , err= 0.002418609801911391
ii= 254 , relres= 0.006678898903080871 , err= 0.0023516817783913774
ii= 255 , relres= 0.0066131694540810205 , err= 0.002282610475593728
ii= 256 , relres= 0.006217428153179861 , err= 0.002207782741348636
ii= 257 , relres= 0.006510940230799044 , err= 0.002134423246189359
ii= 258 , relres= 0.0063328790925454926 , err= 0.0020794530573443218
ii= 259 , relres= 0.006308607585747144 , err= 0.002031902008131136
ii= 260 , relres= 0.005822067209581698 , err= 0.002009193650082698
ii= 261 , relres= 0.005670702831242562 , err= 0.001968107525395281
ii= 262 , relres= 0.005991650598330922 , err= 0.001930524534479024
ii= 263 , relres= 0.005577038670627175 , err= 0.0018931184820377006
ii= 264 , relres= 0.005324094002754629 , err= 0.0018684042787435267
ii= 265 , relres= 0.005289129892381626 , err= 0.0018380707642383107
ii= 266 , relres= 0.005741376279386089 , err= 0.0017919584100857544
ii= 267 , relres= 0.0049333820900103 , err= 0.0017260646315387926
ii= 268 , relres= 0.005073943186411175 , err= 0.0017031891491126512
ii= 269 , relres= 0.004844244192194815 , err= 0.0016791251408313549
ii= 270 , relres= 0.0048345597792093745 , err= 0.0016389528103812813
ii= 271 , relres= 0.004782093718879569 , err= 0.0016177540131743105
ii= 272 , relres= 0.00468474959008563 , err= 0.0015760144110354103
ii= 273 , relres= 0.004341763083727227 , err= 0.0015577210712149124
ii= 274 , relres= 0.004636738471222137 , err= 0.0014854501022559612
ii= 275 , relres= 0.004260549846189707 , err= 0.001452839067577758
ii= 276 , relres= 0.004051198179049166 , err= 0.0014173963066220238
ii= 277 , relres= 0.004264093021788608 , err= 0.001375816726090349
```

```
ii= 278 , relres= 0.003969255736008665 , err= 0.001338233513253591
ii= 279 , relres= 0.00351124916605272 , err= 0.001298092317586011
ii= 280 , relres= 0.0036439892239248763 , err= 0.0012905698226460469
ii= 281 , relres= 0.0033795310729166465 , err= 0.0012107523585333454
ii= 282 , relres= 0.003445880436202129 , err= 0.001182340928151345
ii= 283 , relres= 0.0036075165086068505 , err= 0.0011588274414371822
ii= 284 , relres= 0.0033905734032513854 , err= 0.0011415132769814667
ii= 285 , relres= 0.0034177531871856744 , err= 0.0011095046834182587
ii= 286 , relres= 0.0030681885416253244 , err= 0.0010847990383329865
ii= 287 , relres= 0.003349113072132341 , err= 0.0010525854522593523
ii= 288 , relres= 0.003152519285668425 , err= 0.0010230704749633348
ii= 289 , relres= 0.0028462379691468658 , err= 0.0010123142473096743
ii= 290 , relres= 0.0031121177115215055 , err= 0.000988036342332695
ii= 291 , relres= 0.002873192505972995 , err= 0.0009559503099380836
ii= 292 , relres= 0.0028412037187705475 , err= 0.0009447703836244075
ii= 293 , relres= 0.0026542733238378168 , err= 0.000923844858282133
ii= 294 , relres= 0.002935757397947013 , err= 0.0009002379380608217
ii= 295 , relres= 0.00264570810936208 , err= 0.0008816961342847005
ii= 296 , relres= 0.0023685128952016564 , err= 0.000849688659956134
ii= 297 , relres= 0.002316508153865772 , err= 0.0008405725337908997
ii= 298 , relres= 0.0024474061927628765 , err= 0.0008158183965516336
ii= 299 , relres= 0.002592066564474194 , err= 0.0008002768644067675
ii= 300 , relres= 0.0021766654970448293 , err= 0.0007788679209636163
ii= 301 , relres= 0.002178585223795571 , err= 0.0007676927433386156
ii= 302 , relres= 0.0021968676074798654 , err= 0.0007505347704127692
ii= 303 , relres= 0.0020540410920620498 , err= 0.0007355695413966988
ii= 304 , relres= 0.0019457683467617411 , err= 0.0007084197422821784
ii= 305 , relres= 0.0020597691915482264 , err= 0.0006942206327030491
ii= 306 , relres= 0.0020536582224353686 , err= 0.0006829127701554936
ii= 307 , relres= 0.0018274679192812134 , err= 0.0006654187188426897
ii= 308 , relres= 0.0017318110599223143 , err= 0.0006542665959537167
ii= 309 , relres= 0.001747864062447036 , err= 0.0006471149571247014
ii= 310 , relres= 0.001883451040448795 , err= 0.0006238639242135301
ii= 311 , relres= 0.0016997510831925123 , err= 0.000615824412729608
ii= 312 , relres= 0.0015950758862826539 , err= 0.0006050572331019703
ii= 313 , relres= 0.001584906686119807 , err= 0.0005776957968190534
ii= 314 , relres= 0.0016141110497740214 , err= 0.0005695526654015739
ii= 315 , relres= 0.0015328051900550608 , err= 0.0005605510738220977
ii= 316 , relres= 0.0015697149880879828 , err= 0.0005403679009353316
ii= 317 , relres= 0.0015777675890614234 , err= 0.0005301981473457792
ii= 318 , relres= 0.0014825607899585798 , err= 0.0005205849589090847
ii= 319 , relres= 0.0013911110561526637 , err= 0.0005071445824992863
ii= 320 , relres= 0.0014131407209148899 , err= 0.0004982727651332105
ii= 321 , relres= 0.0013460812156098798 , err= 0.0004795137280756846
ii= 322 , relres= 0.001300824559956809 , err= 0.00047177452946517635
ii= 323 , relres= 0.0012629539715351453 , err= 0.0004661531615902779
ii= 324 , relres= 0.0012263368418792883 , err= 0.0004513196052554156
ii= 325 , relres= 0.0012254150175729373 , err= 0.0004419017487774513
ii= 326 , relres= 0.0012082723144197591 , err= 0.0004330395943154159
ii= 327 , relres= 0.0012357651947027533 , err= 0.0004290497582831122
ii= 328 , relres= 0.0011985137863604687 , err= 0.00041479147744763033
ii= 329 , relres= 0.0012308664662179214 , err= 0.00040554675475945227
ii= 330 , relres= 0.0010600699246616147 , err= 0.0003914792516596789
ii= 331 , relres= 0.0011309951608320422 , err= 0.000388336906672066
ii= 332 , relres= 0.0010530091317335298 , err= 0.00037048908186001936
ii= 333 , relres= 0.0010328473242171097 , err= 0.0003646807105883229
ii= 334 , relres= 0.0010374025683932233 , err= 0.00035711214781800304
ii= 335 , relres= 0.0009807030772393866 , err= 0.0003506208766004846
ii= 336 , relres= 0.001009704357908131 , err= 0.000346207197579406
ii= 337 , relres= 0.0010090567490924477 , err= 0.0003409201246014518
ii= 338 , relres= 0.0008942185821606041 , err= 0.00033102199492187945
```

```
ii= 339 , relres= 0.0008938702247713359 , err= 0.0003288172525793573
ii= 340 , relres= 0.0009631928485693138 , err= 0.00032317277106330824
ii= 341 , relres= 0.0009955776644524513 , err= 0.0003116224987179633
ii= 342 , relres= 0.0008393928363866819 , err= 0.0003005515878071105
ii= 343 , relres= 0.0007956887008331209 , err= 0.00029426838340389824
ii= 344 , relres= 0.000779286135476482 , err= 0.0002891137004625196
ii= 345 , relres= 0.0008119773143340324 , err= 0.0002778952200315953
ii= 346 , relres= 0.0007271101019589432 , err= 0.00026996064790120255
ii= 347 , relres= 0.0007232338161041507 , err= 0.00026852835860870884
ii= 348 , relres= 0.0008276856242188764 , err= 0.00026236179966635355
ii= 349 , relres= 0.000691489736245422 , err= 0.00024825700193100656
ii= 350 , relres= 0.0007433479254918437 , err= 0.00024403490518231245
ii= 351 , relres= 0.0007103178481288208 , err= 0.00023805865196750917
ii= 352 , relres= 0.0007125551475965178 , err= 0.00023449098496789515
ii= 353 , relres= 0.0008240414392073072 , err= 0.00022544438400648028
ii= 354 , relres= 0.0006415174885867568 , err= 0.0002186293603784235
ii= 355 , relres= 0.0006247204075088954 , err= 0.00021640440952763452
ii= 356 , relres= 0.0006403860442939334 , err= 0.00021429838095555494
ii= 357 , relres= 0.0006071918430704054 , err= 0.00020622345248784985
ii= 358 , relres= 0.0005629746356122682 , err= 0.00020136301856421885
ii= 359 , relres= 0.0005771658207886699 , err= 0.0001977473657784449
ii= 360 , relres= 0.0005797452677416789 , err= 0.00019344633402808317
ii= 361 , relres= 0.0005686145014880372 , err= 0.00019075253760233985
ii= 362 , relres= 0.0005299809009063032 , err= 0.00018401928680830806
ii= 363 , relres= 0.0004932673229596493 , err= 0.00017895706497271963
ii= 364 , relres= 0.000513330042559887 , err= 0.00017082823494918138
ii= 365 , relres= 0.0004658178539152046 , err= 0.00016822428371346916
ii= 366 , relres= 0.0004586117842987244 , err= 0.00016559761188585329
ii= 367 , relres= 0.0005025327573811396 , err= 0.0001621320912252161
ii= 368 , relres= 0.00045947348898736835 , err= 0.0001598648641635995
ii= 369 , relres= 0.0004535301991832187 , err= 0.0001539933590152413
ii= 370 , relres= 0.0004334961960884299 , err= 0.00015156969304307388
ii= 371 , relres= 0.0004543813056451894 , err= 0.00014916829812883467
ii= 372 , relres= 0.0004166686224175947 , err= 0.00014710431874364734
ii= 373 , relres= 0.000423145343130848 , err= 0.0001440401169674623
ii= 374 , relres= 0.0003904937120245787 , err= 0.00013996565894119458
ii= 375 , relres= 0.00037012003731653586 , err= 0.00013807276328120006
ii= 376 , relres= 0.00039357223450074566 , err= 0.00013675669348077682
ii= 377 , relres= 0.0003974252816783861 , err= 0.00013452333876900672
ii= 378 , relres= 0.00036558969086716213 , err= 0.00012782927142603102
ii= 379 , relres= 0.00038494850413677765 , err= 0.00012483339130738778
ii= 380 , relres= 0.00034605369516929987 , err= 0.00012223209545961537
ii= 381 , relres= 0.0003696125371624287 , err= 0.0001197416837252566
ii= 382 , relres= 0.00035676780059737336 , err= 0.0001160720726743289
ii= 383 , relres= 0.00036027101204665367 , err= 0.00011448151961092054
ii= 384 , relres= 0.0003245882715752601 , err= 0.00011104043439380084
ii= 385 , relres= 0.000332873110246287 , err= 0.00010940424277905355
ii= 386 , relres= 0.0003040572926050706 , err= 0.00010469884111738788
ii= 387 , relres= 0.00029020618581551314 , err= 0.0001022281861846988
ii= 388 , relres= 0.0003053420756895251 , err= 0.0001010734840370479
ii= 389 , relres= 0.0002979731649362942 , err= 9.913385235559332e-05
ii= 390 , relres= 0.0002872851968043438 , err= 9.712812908502053e-05
ii= 391 , relres= 0.00028645780076640327 , err= 9.558030746391063e-05
ii= 392 , relres= 0.0002747571240686008 , err= 9.415154933793698e-05
ii= 393 , relres= 0.00025116350939537174 , err= 9.148973651943357e-05
ii= 394 , relres= 0.0002647068502595072 , err= 8.94490064754849e-05
ii= 395 , relres= 0.00023960932385301635 , err= 8.663033930455749e-05
ii= 396 , relres= 0.0002268308203860804 , err= 8.408829151365343e-05
ii= 397 , relres= 0.00024076879243089018 , err= 8.335049594821549e-05
ii= 398 , relres= 0.00023259062562024386 , err= 8.029984476775047e-05
ii= 399 , relres= 0.00022918761865255147 , err= 7.869830973613645e-05
```

```

ii= 400 , relres= 0.00022361832984003606 , err= 7.752991074135109e-05
ii= 401 , relres= 0.00020511825574687556 , err= 7.487979313579657e-05
ii= 402 , relres= 0.00022393527192920187 , err= 7.171135626808114e-05
ii= 403 , relres= 0.00019904826125679797 , err= 7.038847244204903e-05
ii= 404 , relres= 0.00019371413355541943 , err= 6.975429598315716e-05
ii= 405 , relres= 0.0002067397779746512 , err= 6.81965550171076e-05
ii= 406 , relres= 0.00019631769385945142 , err= 6.563432305335273e-05
ii= 407 , relres= 0.00019318578585705325 , err= 6.478123613649095e-05
ii= 408 , relres= 0.000181631756366859 , err= 6.37339718669375e-05
ii= 409 , relres= 0.0001753039613979209 , err= 6.265934980990194e-05
ii= 410 , relres= 0.00017780866268632845 , err= 6.161688436951611e-05
ii= 411 , relres= 0.000170852049460683 , err= 6.021926521795434e-05
ii= 412 , relres= 0.00018045945484640726 , err= 5.913144548309627e-05
ii= 413 , relres= 0.0001663908213362598 , err= 5.8091387148906185e-05
ii= 414 , relres= 0.00016464933373013053 , err= 5.623406728224872e-05
ii= 415 , relres= 0.0001624450298674509 , err= 5.432125835619543e-05
ii= 416 , relres= 0.00014274923289212704 , err= 5.2337782115486115e-05
ii= 417 , relres= 0.00015999981011094818 , err= 5.149547211661914e-05
ii= 418 , relres= 0.00016406110906853942 , err= 4.971227775121943e-05
ii= 419 , relres= 0.00013824846777143787 , err= 4.837234392689353e-05
ii= 420 , relres= 0.00012781894412600286 , err= 4.7530994258895606e-05
ii= 421 , relres= 0.0001333903216438662 , err= 4.621736844543533e-05
ii= 422 , relres= 0.00012850700739159188 , err= 4.5160459520717106e-05
ii= 423 , relres= 0.00012593932666777458 , err= 4.407647527641494e-05
ii= 424 , relres= 0.00012895873980114892 , err= 4.2949955596666065e-05
ii= 425 , relres= 0.0001215603967546673 , err= 4.2433589825917686e-05
ii= 426 , relres= 0.00011477049065004266 , err= 4.186504164251496e-05
ii= 427 , relres= 0.00012176337750512981 , err= 4.120882883035341e-05
ii= 428 , relres= 0.00011731033586937032 , err= 4.018188205247887e-05
ii= 429 , relres= 0.00010543343723431304 , err= 3.94785277726788e-05
ii= 430 , relres= 0.00010258320595680691 , err= 3.84746246633927e-05
ii= 431 , relres= 0.00010823132850531948 , err= 3.795018058376018e-05
ii= 432 , relres= 0.00010246491603441415 , err= 3.60055293593153e-05
ii= 433 , relres= 9.57082104364411e-05 , err= 3.5736408714394805e-05
ii= 434 , relres= 9.982747545490877e-05 , err= 3.4856123867533634e-05
ii= 435 , relres= 9.425809343245172e-05 , err= 3.437264028402628e-05
ii= 436 , relres= 8.973192467564801e-05 , err= 3.335396786973598e-05
ii= 437 , relres= 8.608053073028996e-05 , err= 3.20700426063407e-05
ii= 438 , relres= 9.009192036793559e-05 , err= 3.159615817256469e-05
ii= 439 , relres= 8.752738516906294e-05 , err= 3.104344447222168e-05
ii= 440 , relres= 8.425133042707206e-05 , err= 3.0590390827198767e-05
ii= 441 , relres= 8.589081964989515e-05 , err= 2.9928127243721397e-05
ii= 442 , relres= 8.048219555986598e-05 , err= 2.916984005467777e-05
ii= 443 , relres= 7.788358203622508e-05 , err= 2.850836618246307e-05
ii= 444 , relres= 8.051865231537388e-05 , err= 2.7961538856231712e-05
ii= 445 , relres= 8.467287667304706e-05 , err= 2.7621521325857475e-05
ii= 446 , relres= 8.006345561964939e-05 , err= 2.640053302896373e-05
ii= 447 , relres= 7.01891581913507e-05 , err= 2.540913369300555e-05
ii= 448 , relres= 6.868980215080053e-05 , err= 2.4878263816999257e-05
ii= 449 , relres= 7.47746906718277e-05 , err= 2.4471091299572554e-05
ii= 450 , relres= 6.615190965087865e-05 , err= 2.2915789215045373e-05
ii= 451 , relres= 6.34181293267657e-05 , err= 2.2649645217740062e-05
ii= 452 , relres= 6.667245589291722e-05 , err= 2.1788072126918e-05
ii= 453 , relres= 6.442237468397491e-05 , err= 2.1529133622797966e-05
ii= 454 , relres= 6.194218228343287e-05 , err= 2.0820301964587e-05
ii= 455 , relres= 5.692106474431008e-05 , err= 2.0086094865038507e-05
ii= 456 , relres= 5.4662814353347525e-05 , err= 1.9659115046187684e-05
ii= 457 , relres= 5.7637416059326976e-05 , err= 1.93227774960102e-05
ii= 458 , relres= 6.416756820078675e-05 , err= 1.8702136224412784e-05
ii= 459 , relres= 5.250316152805398e-05 , err= 1.8006472385255624e-05
ii= 460 , relres= 5.100585073702506e-05 , err= 1.7724413732816366e-05

```

```

ii= 461 , relres= 5.169174758908026e-05 , err= 1.742402652332587e-05
ii= 462 , relres= 5.417918553395955e-05 , err= 1.71235334820265e-05
ii= 463 , relres= 5.142773603008053e-05 , err= 1.6763385892941772e-05
ii= 464 , relres= 5.0221591616148235e-05 , err= 1.6336111657848204e-05
ii= 465 , relres= 4.742442385501328e-05 , err= 1.594973926712999e-05
ii= 466 , relres= 4.4777253499048144e-05 , err= 1.5731199134985908e-05
ii= 467 , relres= 4.371583345037878e-05 , err= 1.511086469017634e-05
ii= 468 , relres= 4.6627422989482544e-05 , err= 1.483485959447519e-05
ii= 469 , relres= 4.388855997397178e-05 , err= 1.4384268008898782e-05
ii= 470 , relres= 3.870730485006505e-05 , err= 1.4132686180294793e-05
ii= 471 , relres= 3.919398341376727e-05 , err= 1.4001039057844424e-05
ii= 472 , relres= 4.2415468247629235e-05 , err= 1.3534066472351326e-05
ii= 473 , relres= 3.774254421672427e-05 , err= 1.32275790414428e-05
ii= 474 , relres= 3.704643561098198e-05 , err= 1.2938192045478184e-05
ii= 475 , relres= 3.6248408926864846e-05 , err= 1.2789570269284037e-05
ii= 476 , relres= 3.745994503493507e-05 , err= 1.2654135240222229e-05
ii= 477 , relres= 3.849688135358259e-05 , err= 1.221321229569571e-05
ii= 478 , relres= 3.511458179232645e-05 , err= 1.1703011493463434e-05
ii= 479 , relres= 3.440056752530448e-05 , err= 1.1547612294652068e-05
ii= 480 , relres= 3.5867525028608894e-05 , err= 1.1277952164600987e-05
ii= 481 , relres= 3.271643652628274e-05 , err= 1.1068406612591406e-05
ii= 482 , relres= 3.2477109087529335e-05 , err= 1.0887802476304612e-05
ii= 483 , relres= 3.598110592411952e-05 , err= 1.072290331598873e-05
ii= 484 , relres= 2.942866708418097e-05 , err= 1.0202636654133916e-05
ii= 485 , relres= 2.968092348060884e-05 , err= 9.99637477749417e-06
ii= 486 , relres= 2.9399004802289464e-05 , err= 9.595814401062154e-06
ii= 487 , relres= 2.6376691519125023e-05 , err= 9.214263937058722e-06
ii= 488 , relres= 2.5702070274767084e-05 , err= 9.048734954206664e-06
ii= 489 , relres= 2.714658839099051e-05 , err= 8.80315219635188e-06
ii= 490 , relres= 2.442563775876976e-05 , err= 8.524784941815937e-06
ii= 491 , relres= 2.715931694594202e-05 , err= 8.2865381844027e-06
ii= 492 , relres= 2.316872775476349e-05 , err= 8.109447690897122e-06
ii= 493 , relres= 2.2877599518691386e-05 , err= 8.051879722018925e-06
ii= 494 , relres= 2.4308033609844734e-05 , err= 7.899943984274582e-06
ii= 495 , relres= 2.460449789894999e-05 , err= 7.760322530583968e-06
ii= 496 , relres= 2.2149451644171427e-05 , err= 7.531159634780461e-06
ii= 497 , relres= 2.1199262837006034e-05 , err= 7.442296246650414e-06
ii= 498 , relres= 2.1199098146250114e-05 , err= 7.374144563228869e-06
ii= 499 , relres= 2.0715235185347282e-05 , err= 7.278383840554912e-06
ii= 500 , relres= 2.0677856033754795e-05 , err= 7.2057639802825565e-06
ii= 501 , relres= 2.04725231972071e-05 , err= 6.838025442059818e-06
ii= 502 , relres= 2.2381761826262808e-05 , err= 6.623017747862039e-06
ii= 503 , relres= 1.8363616172338074e-05 , err= 6.4944923178265045e-06
ii= 504 , relres= 1.7714941468286726e-05 , err= 6.3806109678297205e-06
ii= 505 , relres= 1.9404271017558004e-05 , err= 6.2726477920210535e-06
ii= 506 , relres= 1.711076798704579e-05 , err= 5.93021772219802e-06
ii= 507 , relres= 1.6292515102517222e-05 , err= 5.843501880301418e-06
ii= 508 , relres= 1.634681697889679e-05 , err= 5.753053244755357e-06
ii= 509 , relres= 1.7068490261293625e-05 , err= 5.5797595784244914e-06
ii= 510 , relres= 1.5161512024835704e-05 , err= 5.434527728840825e-06
ii= 511 , relres= 1.5283804598192413e-05 , err= 5.362685259630778e-06
ii= 512 , relres= 1.4428880717300128e-05 , err= 5.186260526012486e-06
ii= 513 , relres= 1.4648957967232747e-05 , err= 5.150144365438766e-06
ii= 514 , relres= 1.4580309363673206e-05 , err= 5.0361384103800765e-06
ii= 515 , relres= 1.432577284742882e-05 , err= 4.896551274705291e-06
ii= 516 , relres= 1.3379424192192486e-05 , err= 4.808213431740772e-06
ii= 517 , relres= 1.3727694317649487e-05 , err= 4.73941199958242e-06
ii= 518 , relres= 1.3009392009390205e-05 , err= 4.6796965992106515e-06
ii= 519 , relres= 1.35825057470374e-05 , err= 4.614113832130695e-06
ii= 520 , relres= 1.49420490463642e-05 , err= 4.492840031948926e-06
ii= 521 , relres= 1.2095953403075128e-05 , err= 4.256813479694226e-06

```

```

ii= 522 , relres= 1.2070402596450707e-05 , err= 4.203038865991645e-06
ii= 523 , relres= 1.2908894073728205e-05 , err= 4.125152869951069e-06
ii= 524 , relres= 1.1854865021207145e-05 , err= 4.05938294754924e-06
ii= 525 , relres= 1.1469253451974308e-05 , err= 3.906602745106713e-06
ii= 526 , relres= 1.1877683811758978e-05 , err= 3.845731880671354e-06
ii= 527 , relres= 1.0283592276274238e-05 , err= 3.695237563839718e-06
ii= 528 , relres= 1.0489921448386676e-05 , err= 3.6412581747559704e-06
ii= 529 , relres= 1.124444676771495e-05 , err= 3.5662627814304618e-06
ii= 530 , relres= 1.064952810987626e-05 , err= 3.3903920596006652e-06
ii= 531 , relres= 9.259110480139244e-06 , err= 3.3350936299900148e-06
ii= 532 , relres= 9.848815230788942e-06 , err= 3.2502699453455612e-06
ii= 533 , relres= 9.282883801016048e-06 , err= 3.2070874636949098e-06
ii= 534 , relres= 8.83691492425394e-06 , err= 3.0627489219664585e-06
ii= 535 , relres= 8.306212686769257e-06 , err= 2.9779084114306875e-06
ii= 536 , relres= 8.464871980025555e-06 , err= 2.9065009009488094e-06
ii= 537 , relres= 8.953143313158907e-06 , err= 2.818672855150347e-06
ii= 538 , relres= 8.583774956139815e-06 , err= 2.7812022559269085e-06
ii= 539 , relres= 8.280507825674082e-06 , err= 2.694481956482679e-06
ii= 540 , relres= 7.863755759657387e-06 , err= 2.6198783502139683e-06
ii= 541 , relres= 7.715015187801122e-06 , err= 2.5931008340523187e-06
ii= 542 , relres= 7.194846226678982e-06 , err= 2.544944836725656e-06
ii= 543 , relres= 7.984834874050035e-06 , err= 2.4054463542474324e-06
ii= 544 , relres= 7.0427272623311276e-06 , err= 2.3608741144123204e-06
ii= 545 , relres= 6.768696432535972e-06 , err= 2.330509651904559e-06
ii= 546 , relres= 6.876391660307146e-06 , err= 2.297597563066551e-06
ii= 547 , relres= 6.597615469898732e-06 , err= 2.2052147384530605e-06
ii= 548 , relres= 6.4104031675539585e-06 , err= 2.1598157888650232e-06
ii= 549 , relres= 7.136031201329733e-06 , err= 2.10668652130615e-06
ii= 550 , relres= 5.870232805734672e-06 , err= 2.050953015308021e-06
ii= 551 , relres= 5.662967529098155e-06 , err= 2.028767180122717e-06
ii= 552 , relres= 5.747980042589535e-06 , err= 1.9963912208530617e-06
ii= 553 , relres= 5.672699082274516e-06 , err= 1.9678007889567363e-06
ii= 554 , relres= 6.05470000628732e-06 , err= 1.9054227068495698e-06
ii= 555 , relres= 5.523478504295273e-06 , err= 1.8433797873632093e-06
ii= 556 , relres= 5.146460519664146e-06 , err= 1.812466232376931e-06
ii= 557 , relres= 5.145471855621318e-06 , err= 1.7785468453162952e-06
ii= 558 , relres= 5.420752944203445e-06 , err= 1.7357931685858674e-06
ii= 559 , relres= 5.278058599730054e-06 , err= 1.702913794357484e-06
ii= 560 , relres= 5.293284179630543e-06 , err= 1.6715524937066808e-06
ii= 561 , relres= 4.697192313407613e-06 , err= 1.631489465198618e-06
ii= 562 , relres= 4.7236905710913135e-06 , err= 1.5919859777909981e-06
ii= 563 , relres= 4.485077486325672e-06 , err= 1.5755731648735631e-06
ii= 564 , relres= 4.370950786757706e-06 , err= 1.5536804426020518e-06
ii= 565 , relres= 4.546052615469315e-06 , err= 1.5298321360434423e-06
ii= 566 , relres= 4.493635739816514e-06 , err= 1.4607480375022852e-06
ii= 567 , relres= 3.88726064593803e-06 , err= 1.4095246012031107e-06
ii= 568 , relres= 3.822911022908644e-06 , err= 1.403344100675594e-06
ii= 569 , relres= 4.00149560660101e-06 , err= 1.3719163751957637e-06
ii= 570 , relres= 3.803590991227268e-06 , err= 1.346303983578169e-06
ii= 571 , relres= 3.842958483714742e-06 , err= 1.334367185908561e-06
ii= 572 , relres= 3.800505633491704e-06 , err= 1.2682622057288473e-06
ii= 573 , relres= 3.507821592200325e-06 , err= 1.2410174191121264e-06
ii= 574 , relres= 3.2959510284185775e-06 , err= 1.2229467728901554e-06
ii= 575 , relres= 3.5715132524160205e-06 , err= 1.176072417756709e-06
ii= 576 , relres= 3.4117279592687337e-06 , err= 1.1484393771925953e-06
ii= 577 , relres= 3.188777466136455e-06 , err= 1.1122879334909251e-06
ii= 578 , relres= 3.1693225449400693e-06 , err= 1.0746941406338072e-06
ii= 579 , relres= 3.0098572137503563e-06 , err= 1.0667065735453464e-06
ii= 580 , relres= 3.1983371553957356e-06 , err= 1.0346139947946037e-06
ii= 581 , relres= 2.9009386881438696e-06 , err= 1.0145432295034853e-06
ii= 582 , relres= 2.9300603085494327e-06 , err= 1.002901280153539e-06

```

```
ii= 583 , relres= 2.9723317748836707e-06 , err= 9.904388189776724e-07
ii= 584 , relres= 2.603516732867906e-06 , err= 9.55449491120463e-07
ii= 585 , relres= 2.572290856354925e-06 , err= 9.45105018703573e-07
ii= 586 , relres= 2.8604803608474466e-06 , err= 9.288287628274706e-07
ii= 587 , relres= 2.6955601262925225e-06 , err= 9.069856032210221e-07
ii= 588 , relres= 2.439581902479144e-06 , err= 8.725827835134194e-07
ii= 589 , relres= 2.3937647536184126e-06 , err= 8.55325468752064e-07
ii= 590 , relres= 2.357443254506913e-06 , err= 8.451060850212428e-07
ii= 591 , relres= 2.3082191627431317e-06 , err= 8.195993037072589e-07
ii= 592 , relres= 2.4571319535730994e-06 , err= 8.028654533908533e-07
ii= 593 , relres= 2.2070707747540042e-06 , err= 7.719534768242456e-07
ii= 594 , relres= 2.249882649351117e-06 , err= 7.639113625200955e-07
ii= 595 , relres= 1.9664209294916153e-06 , err= 7.329723641464696e-07
ii= 596 , relres= 2.0932438073314863e-06 , err= 7.001458898504871e-07
ii= 597 , relres= 1.970411471461293e-06 , err= 6.785889201836471e-07
ii= 598 , relres= 1.83374259065553e-06 , err= 6.674998712575047e-07
ii= 599 , relres= 1.8971747508635244e-06 , err= 6.594870607765502e-07
ii= 600 , relres= 1.8532107410212902e-06 , err= 6.509376995065789e-07
ii= 601 , relres= 2.024528345160707e-06 , err= 6.23648450546746e-07
ii= 602 , relres= 1.8418013951694578e-06 , err= 6.15331372032049e-07
ii= 603 , relres= 1.7511830493620836e-06 , err= 5.96912478264623e-07
ii= 604 , relres= 1.8178318947032915e-06 , err= 5.89236425169885e-07
ii= 605 , relres= 1.590334965568675e-06 , err= 5.76730678399738e-07
ii= 606 , relres= 1.6960203727502035e-06 , err= 5.633093939171282e-07
ii= 607 , relres= 1.7181579505544306e-06 , err= 5.499745845185313e-07
ii= 608 , relres= 1.67461743470196e-06 , err= 5.301237337441421e-07
ii= 609 , relres= 1.6189465763971988e-06 , err= 5.084237460380835e-07
ii= 610 , relres= 1.4545293774343777e-06 , err= 4.956847035849588e-07
ii= 611 , relres= 1.410906432311875e-06 , err= 4.908462607887165e-07
ii= 612 , relres= 1.5332347749254173e-06 , err= 4.794918995505661e-07
ii= 613 , relres= 1.3813291435217257e-06 , err= 4.5798703497078814e-07
ii= 614 , relres= 1.262775639016882e-06 , err= 4.414908992640856e-07
ii= 615 , relres= 1.2975112519753774e-06 , err= 4.343496914273268e-07
ii= 616 , relres= 1.3009068255711253e-06 , err= 4.272612260077292e-07
ii= 617 , relres= 1.2109605403659442e-06 , err= 4.1897433999480146e-07
ii= 618 , relres= 1.2407763085108448e-06 , err= 4.153977196708693e-07
ii= 619 , relres= 1.3130737540378986e-06 , err= 4.0334488418699e-07
ii= 620 , relres= 1.0883742518719039e-06 , err= 3.9317295270628305e-07
ii= 621 , relres= 1.1078213807529154e-06 , err= 3.873829431251706e-07
ii= 622 , relres= 1.1310594098553568e-06 , err= 3.8245544776203054e-07
ii= 623 , relres= 1.1336949616701336e-06 , err= 3.7640668645755986e-07
ii= 624 , relres= 1.1194622124336264e-06 , err= 3.661680278563318e-07
ii= 625 , relres= 1.1914678299600507e-06 , err= 3.5370175453926957e-07
ii= 626 , relres= 1.0856025854888585e-06 , err= 3.463291657596445e-07
ii= 627 , relres= 9.474370836361907e-07 , err= 3.390444212013526e-07
ii= 628 , relres= 9.660106361952508e-07 , err= 3.3429600369966396e-07
ii= 629 , relres= 9.591428481477662e-07 , err= 3.207635054207396e-07
ii= 630 , relres= 9.42036361216792e-07 , err= 3.1557347477160515e-07
ii= 631 , relres= 9.641500090176986e-07 , err= 2.9790880673002234e-07
ii= 632 , relres= 8.348339674813531e-07 , err= 2.9089006595386223e-07
ii= 633 , relres= 8.237351382402446e-07 , err= 2.878964148985867e-07
ii= 634 , relres= 7.975191922544881e-07 , err= 2.803115579391323e-07
ii= 635 , relres= 9.512577560760486e-07 , err= 2.718422987842259e-07
ii= 636 , relres= 8.524043047229101e-07 , err= 2.6258317337168e-07
ii= 637 , relres= 7.110301341742735e-07 , err= 2.5544488818733374e-07
ii= 638 , relres= 7.575645611365485e-07 , err= 2.4790856464972306e-07
ii= 639 , relres= 7.179955958111725e-07 , err= 2.4432731767859317e-07
ii= 640 , relres= 7.754461721242897e-07 , err= 2.397129282273506e-07
ii= 641 , relres= 6.956599521520358e-07 , err= 2.3209139510559363e-07
ii= 642 , relres= 7.009535063088682e-07 , err= 2.2881162010115365e-07
ii= 643 , relres= 6.7187384309319e-07 , err= 2.2499769211004322e-07
```

```
ii= 644 , relres= 6.416839228318598e-07 , err= 2.2134932579295936e-07
ii= 645 , relres= 6.355660710325704e-07 , err= 2.1666181666987773e-07
ii= 646 , relres= 6.32608157902312e-07 , err= 2.1423000205173567e-07
ii= 647 , relres= 6.431344636680129e-07 , err= 2.1090468472397278e-07
ii= 648 , relres= 6.3569085579557e-07 , err= 2.046036523451767e-07
ii= 649 , relres= 5.537355380219658e-07 , err= 1.9625088582470482e-07
ii= 650 , relres= 5.392365853367058e-07 , err= 1.9373341100174673e-07
ii= 651 , relres= 5.614417597815494e-07 , err= 1.8941382974835704e-07
ii= 652 , relres= 6.106330607835856e-07 , err= 1.8571524481383953e-07
ii= 653 , relres= 5.061222536718579e-07 , err= 1.762404828921742e-07
ii= 654 , relres= 5.049234082441762e-07 , err= 1.747300020633051e-07
ii= 655 , relres= 4.953789913699812e-07 , err= 1.72561308511746e-07
ii= 656 , relres= 4.6872452086857275e-07 , err= 1.6477110296576252e-07
ii= 657 , relres= 4.80760968743599e-07 , err= 1.6032895556012023e-07
ii= 658 , relres= 4.521147154257367e-07 , err= 1.5306095160583317e-07
ii= 659 , relres= 4.409956577911193e-07 , err= 1.5111316823597397e-07
ii= 660 , relres= 4.475317052082689e-07 , err= 1.486848184817174e-07
ii= 661 , relres= 4.1462984806132765e-07 , err= 1.465441686774812e-07
ii= 662 , relres= 4.2968698639555735e-07 , err= 1.4183259339338317e-07
ii= 663 , relres= 4.328543301448983e-07 , err= 1.3562975908752633e-07
ii= 664 , relres= 4.02263468697234e-07 , err= 1.3423510675946334e-07
ii= 665 , relres= 3.7491758365969133e-07 , err= 1.3032695457819273e-07
ii= 666 , relres= 3.644745186333385e-07 , err= 1.2937691948405488e-07
ii= 667 , relres= 3.899619415666066e-07 , err= 1.273095517695708e-07
ii= 668 , relres= 3.678287888012113e-07 , err= 1.219118991423741e-07
ii= 669 , relres= 3.604275922033075e-07 , err= 1.2054265725389982e-07
ii= 670 , relres= 3.766061625202595e-07 , err= 1.161260859527094e-07
ii= 671 , relres= 3.5314401040592337e-07 , err= 1.1357890372259624e-07
ii= 672 , relres= 3.3035749566364785e-07 , err= 1.1223859030727684e-07
ii= 673 , relres= 3.04750417321779e-07 , err= 1.1063365191895326e-07
ii= 674 , relres= 3.0246201954762945e-07 , err= 1.0923661106980355e-07
ii= 675 , relres= 3.239502379294646e-07 , err= 1.0587935403077799e-07
ii= 676 , relres= 2.9028800366436346e-07 , err= 1.0185450127219799e-07
ii= 677 , relres= 2.615594637518562e-07 , err= 1.0068636710975092e-07
ii= 678 , relres= 2.588927757679401e-07 , err= 9.828884595142709e-08
ii= 679 , relres= 2.8053213762775354e-07 , err= 9.61436461411286e-08
ii= 680 , relres= 2.5927330745436986e-07 , err= 9.418832831663556e-08
ii= 681 , relres= 2.6125893548218637e-07 , err= 9.329837450814167e-08
ii= 682 , relres= 2.7141489352187847e-07 , err= 9.122531731201194e-08
ii= 683 , relres= 2.4485709856906097e-07 , err= 8.775455232538711e-08
ii= 684 , relres= 2.3012657787577016e-07 , err= 8.597953100806656e-08
ii= 685 , relres= 2.3254257172700398e-07 , err= 8.471066752158295e-08
ii= 686 , relres= 2.5615555932356465e-07 , err= 8.349872421134502e-08
ii= 687 , relres= 2.3427740228516712e-07 , err= 8.057467185026754e-08
ii= 688 , relres= 2.3499496413765143e-07 , err= 7.917060829650162e-08
ii= 689 , relres= 2.3614772004446838e-07 , err= 7.695660290525937e-08
ii= 690 , relres= 2.113074491641809e-07 , err= 7.574088110300897e-08
ii= 691 , relres= 2.0025943369959268e-07 , err= 7.451025540129058e-08
ii= 692 , relres= 1.9840729181120198e-07 , err= 7.200459715154675e-08
ii= 693 , relres= 2.0022748317607485e-07 , err= 7.127857280343772e-08
ii= 694 , relres= 1.943839747124415e-07 , err= 6.833354853239317e-08
ii= 695 , relres= 1.8539982813839493e-07 , err= 6.483821278655664e-08
ii= 696 , relres= 1.6725010774798307e-07 , err= 6.342432342090506e-08
ii= 697 , relres= 1.7129504766192534e-07 , err= 6.262990507355188e-08
ii= 698 , relres= 1.636055816605045e-07 , err= 6.143823642812771e-08
ii= 699 , relres= 1.7186881391789278e-07 , err= 5.827425175149401e-08
ii= 700 , relres= 1.652940941556131e-07 , err= 5.706522875659967e-08
ii= 701 , relres= 1.576635684786053e-07 , err= 5.636004996150288e-08
ii= 702 , relres= 1.453650524173103e-07 , err= 5.5016083049520906e-08
ii= 703 , relres= 1.392766992200927e-07 , err= 5.434682744505231e-08
ii= 704 , relres= 1.5519333444660516e-07 , err= 5.267082544185308e-08
```

```

ii= 705 , relres= 1.531332747657527e-07 , err= 5.194036756862192e-08
ii= 706 , relres= 1.366763007338154e-07 , err= 4.9976071367452345e-08
ii= 707 , relres= 1.4055502458839709e-07 , err= 4.890513915671839e-08
ii= 708 , relres= 1.2996464163405745e-07 , err= 4.7479191295814943e-08
ii= 709 , relres= 1.2271162523536122e-07 , err= 4.6673697987862826e-08
ii= 710 , relres= 1.2326332879739352e-07 , err= 4.6405402780947635e-08
ii= 711 , relres= 1.3935719386198385e-07 , err= 4.463801301577142e-08
ii= 712 , relres= 1.239756193816084e-07 , err= 4.358847563523443e-08
ii= 713 , relres= 1.1163199710064086e-07 , err= 4.207493456581629e-08
ii= 714 , relres= 1.0980244509313297e-07 , err= 4.160460493321069e-08
ii= 715 , relres= 1.1882723977089444e-07 , err= 4.095068470161646e-08
ii= 716 , relres= 1.205003324944846e-07 , err= 3.9784524716408584e-08
ii= 717 , relres= 1.1424908103518347e-07 , err= 3.8796098137301536e-08
ii= 718 , relres= 1.0761461587711676e-07 , err= 3.7520005804852724e-08
ii= 719 , relres= 1.0314539736128094e-07 , err= 3.571073627926581e-08
ii= 720 , relres= 1.0107748929530505e-07 , err= 3.5070223736657133e-08
ii= 721 , relres= 9.657344280271703e-08 , err= 3.472683608978406e-08
GN: none
ii= 0 , relres= 1.7998822036496183 , err= 0.9607754379299388
ii= 1 , relres= 1.6320083169869368 , err= 0.9238043406215309
ii= 2 , relres= 1.5300990980764357 , err= 0.8862505957115849
ii= 3 , relres= 1.293491835637571 , err= 0.8576353348776828
ii= 4 , relres= 1.277031008233619 , err= 0.8223245828294179
ii= 5 , relres= 1.1872164822042266 , err= 0.7959416138910144
ii= 6 , relres= 1.0392485033316259 , err= 0.7649434764394949
ii= 7 , relres= 1.005293145797907 , err= 0.7320199885682038
ii= 8 , relres= 0.9703237399230883 , err= 0.6950125027314484
ii= 9 , relres= 0.8962308027838676 , err= 0.6593614065170714
ii= 10 , relres= 0.820127998344443 , err= 0.6218537625374848
ii= 11 , relres= 0.7736931150549121 , err= 0.5867875536198108
ii= 12 , relres= 0.744626639312458 , err= 0.5500549072227423
ii= 13 , relres= 0.7396155446925192 , err= 0.518287519287541
ii= 14 , relres= 0.6726320172471667 , err= 0.4886902926736375
ii= 15 , relres= 0.6423444175649285 , err= 0.461113757058992
ii= 16 , relres= 0.5925517623304644 , err= 0.4275577512223594
ii= 17 , relres= 0.5808442603080929 , err= 0.39909948041646176
ii= 18 , relres= 0.5560210444918957 , err= 0.3743225197259756
ii= 19 , relres= 0.48946330725324144 , err= 0.3441681607193099
ii= 20 , relres= 0.4846160534162878 , err= 0.320820581948159
ii= 21 , relres= 0.4055590377372133 , err= 0.2975572470450099
ii= 22 , relres= 0.39702629610838835 , err= 0.27226434791215426
ii= 23 , relres= 0.37888557644267473 , err= 0.25260970514412207
ii= 24 , relres= 0.3233820937139308 , err= 0.23414020024193324
ii= 25 , relres= 0.2880511357494344 , err= 0.21687313933861732
ii= 26 , relres= 0.30475070694603074 , err= 0.20319515132683677
ii= 27 , relres= 0.24373046567900836 , err= 0.1902559688076202
ii= 28 , relres= 0.23438122453422253 , err= 0.17718971371625328
ii= 29 , relres= 0.23257562056173522 , err= 0.16691864014608424
ii= 30 , relres= 0.21332129137797434 , err= 0.1586283951862751
ii= 31 , relres= 0.23235852918825253 , err= 0.1525477357633431
ii= 32 , relres= 0.1793717254133422 , err= 0.14477035800076812
ii= 33 , relres= 0.165076096947606 , err= 0.13726004868770136
ii= 34 , relres= 0.1460126832151594 , err= 0.12969503980447547
ii= 35 , relres= 0.13903915101278302 , err= 0.12388030108937785
ii= 36 , relres= 0.12141345959480193 , err= 0.1181732388925435
ii= 37 , relres= 0.12439821458448845 , err= 0.11261780853251106
ii= 38 , relres= 0.11093642845376667 , err= 0.10652654430775133
ii= 39 , relres= 0.10163670924764724 , err= 0.10167571489685015
ii= 40 , relres= 0.1028724330850999 , err= 0.09655769331055443
ii= 41 , relres= 0.09270806592198663 , err= 0.0926259624768303
ii= 42 , relres= 0.08987362619192603 , err= 0.0885425441941116

```

```
ii= 43 , relres= 0.0908111337072809 , err= 0.08553850729751745
ii= 44 , relres= 0.07547943102515942 , err= 0.08223943275891148
ii= 45 , relres= 0.07279541028962822 , err= 0.07813045207921596
ii= 46 , relres= 0.06966717583975932 , err= 0.074628359074738
ii= 47 , relres= 0.06664183337010995 , err= 0.07161272146581349
ii= 48 , relres= 0.06562693755343495 , err= 0.06867395456635465
ii= 49 , relres= 0.06567562878292772 , err= 0.0658551698335594
ii= 50 , relres= 0.05481571609528696 , err= 0.06293747876830894
ii= 51 , relres= 0.05279393563806782 , err= 0.059883189108035716
ii= 52 , relres= 0.05310092424278984 , err= 0.0565922013812459
ii= 53 , relres= 0.04866995519428633 , err= 0.053931392778822196
ii= 54 , relres= 0.058572663121612856 , err= 0.05172094537826442
ii= 55 , relres= 0.0473835860294403 , err= 0.04947695997748225
ii= 56 , relres= 0.043242816050624765 , err= 0.04664192412586184
ii= 57 , relres= 0.04229361831658874 , err= 0.04425452452222508
ii= 58 , relres= 0.03900717207437202 , err= 0.04154043464768598
ii= 59 , relres= 0.03811616853778166 , err= 0.03907720192855541
ii= 60 , relres= 0.038902239991518345 , err= 0.037334313758799045
ii= 61 , relres= 0.03243128242657828 , err= 0.035075447188095236
ii= 62 , relres= 0.029592351541679857 , err= 0.03310198564941822
ii= 63 , relres= 0.030232951450601876 , err= 0.030937119723596505
ii= 64 , relres= 0.027999974586435335 , err= 0.029241001274313998
ii= 65 , relres= 0.03237593811737553 , err= 0.02759688929478878
ii= 66 , relres= 0.024091947259995264 , err= 0.02595526734129203
ii= 67 , relres= 0.02304764226516344 , err= 0.024241814365403323
ii= 68 , relres= 0.023050229222934458 , err= 0.02245289054880513
ii= 69 , relres= 0.019866084609574387 , err= 0.020793710395704344
ii= 70 , relres= 0.018553945535192216 , err= 0.019265555873621467
ii= 71 , relres= 0.01704952511476476 , err= 0.017831561062531004
ii= 72 , relres= 0.018553510976381783 , err= 0.01649611201209775
ii= 73 , relres= 0.020343619750118006 , err= 0.015732904049000008
ii= 74 , relres= 0.01641063712705952 , err= 0.014885859016694635
ii= 75 , relres= 0.015456644417472144 , err= 0.014041926154186687
ii= 76 , relres= 0.01694971059062656 , err= 0.013189566782826002
ii= 77 , relres= 0.013675407007119679 , err= 0.012538937008153292
ii= 78 , relres= 0.011866857547735973 , err= 0.011642146896166638
ii= 79 , relres= 0.012073963161012773 , err= 0.010750115009488406
ii= 80 , relres= 0.012981715508631376 , err= 0.00996556970899404
ii= 81 , relres= 0.012333244569536638 , err= 0.009414548478072863
ii= 82 , relres= 0.010084476840567097 , err= 0.008684908373419465
ii= 83 , relres= 0.008323458330259713 , err= 0.007947372605270567
ii= 84 , relres= 0.007956761989200253 , err= 0.007140261183152201
ii= 85 , relres= 0.008426238518469062 , err= 0.006538109518972286
ii= 86 , relres= 0.008246160763663123 , err= 0.006097214718929779
ii= 87 , relres= 0.007018486541408407 , err= 0.005698092860573004
ii= 88 , relres= 0.006381324612372093 , err= 0.005267445396552617
ii= 89 , relres= 0.005412891749162902 , err= 0.004838874821434068
ii= 90 , relres= 0.00551984997098644 , err= 0.0044682126563740255
ii= 91 , relres= 0.004793869702288011 , err= 0.004107452006849312
ii= 92 , relres= 0.0055485049797994535 , err= 0.0038172947216834167
ii= 93 , relres= 0.005128605282981473 , err= 0.003662788109148158
ii= 94 , relres= 0.004334328827427278 , err= 0.0034098710552496496
ii= 95 , relres= 0.004698226472610968 , err= 0.0032352901024304613
ii= 96 , relres= 0.0037607287730051543 , err= 0.003013775695307419
ii= 97 , relres= 0.0036945888868563747 , err= 0.0028216062247177825
ii= 98 , relres= 0.0032589934593212893 , err= 0.002684909398646287
ii= 99 , relres= 0.002660215124689006 , err= 0.002508469359838901
ii= 100 , relres= 0.002858338526986117 , err= 0.0023580703542068716
ii= 101 , relres= 0.002541110194233283 , err= 0.002255249402000679
ii= 102 , relres= 0.0025223649685445805 , err= 0.0021160668967109704
ii= 103 , relres= 0.0025286668857467977 , err= 0.0020157555950433117
```

```

ii= 104 , relres= 0.0021279108382471217 , err= 0.0019023723320911944
ii= 105 , relres= 0.002503074097486926 , err= 0.001798373983000305
ii= 106 , relres= 0.0018887978255802578 , err= 0.001702934418906044
ii= 107 , relres= 0.0019401098346873515 , err= 0.0015765847452360625
ii= 108 , relres= 0.0018179833121349004 , err= 0.0014947227633659301
ii= 109 , relres= 0.0015163952834122345 , err= 0.0013667571359626766
ii= 110 , relres= 0.0016480600636988537 , err= 0.0012642734685951072
ii= 111 , relres= 0.001609355568986982 , err= 0.001202908346984961
ii= 112 , relres= 0.0015192145631388709 , err= 0.0011042197094428114
ii= 113 , relres= 0.0013318241664021528 , err= 0.001041055342573435
ii= 114 , relres= 0.0011289364926757716 , err= 0.0009576543323969571
ii= 115 , relres= 0.0010538593017081976 , err= 0.0008674949604827008
ii= 116 , relres= 0.0012241213370799858 , err= 0.0008157356633038615
ii= 117 , relres= 0.0010983002831557232 , err= 0.0007725597686543075
ii= 118 , relres= 0.0010810627212927816 , err= 0.0007327768301992303
ii= 119 , relres= 0.0007944338025596197 , err= 0.0006849186711827482
ii= 120 , relres= 0.0007351004087711995 , err= 0.0006295005373873454
ii= 121 , relres= 0.0007187747747896413 , err= 0.0005832972666238363
ii= 122 , relres= 0.0007063366644020955 , err= 0.0005534152945090836
ii= 123 , relres= 0.0005736891339987608 , err= 0.0005185440323151547
ii= 124 , relres= 0.0005290378184303053 , err= 0.0004806142080954676
ii= 125 , relres= 0.0005569059695027856 , err= 0.00044965139639722025
ii= 126 , relres= 0.0005098285815563602 , err= 0.0004261161158539281
ii= 127 , relres= 0.00045931174664384176 , err= 0.0003961294566168403
ii= 128 , relres= 0.0004360144262876434 , err= 0.00036999161827819005
ii= 129 , relres= 0.00040852950735735717 , err= 0.00035002096685089404
ii= 130 , relres= 0.00033793154822055687 , err= 0.0003245743671164454
ii= 131 , relres= 0.00035015470401351956 , err= 0.0002962720403178423
ii= 132 , relres= 0.00036644642679912104 , err= 0.0002801669922806529
ii= 133 , relres= 0.00033443671447346316 , err= 0.0002596181325436681
ii= 134 , relres= 0.00035372751396073153 , err= 0.00024627636262686454
ii= 135 , relres= 0.0002632775134596852 , err= 0.00023083983176239045
ii= 136 , relres= 0.00030863062596301477 , err= 0.0002140300289681786
ii= 137 , relres= 0.00027579889083388794 , err= 0.00020047289636358016
ii= 138 , relres= 0.00028553518300932266 , err= 0.00019145097004134935
ii= 139 , relres= 0.00022472290768220488 , err= 0.00017441933870166314
ii= 140 , relres= 0.0002760996779516426 , err= 0.00016133934882608998
ii= 141 , relres= 0.00018714832933862207 , err= 0.00015214930087902858
ii= 142 , relres= 0.0001676558151841214 , err= 0.00014025976477736505
ii= 143 , relres= 0.00019296930779488293 , err= 0.00013204719555565293
ii= 144 , relres= 0.0001535419739116422 , err= 0.0001248525964692545
ii= 145 , relres= 0.0001640625539754738 , err= 0.00011620916857110263
ii= 146 , relres= 0.00012850622391674484 , err= 0.00010915042936260741
ii= 147 , relres= 0.00011372834106394157 , err= 9.989633321381533e-05
ii= 148 , relres= 0.00014208817918714178 , err= 9.245519710180261e-05
ii= 149 , relres= 0.00010729059312250441 , err= 8.775424341896112e-05
ii= 150 , relres= 0.00010278742075230319 , err= 8.108554644256526e-05
ii= 151 , relres= 9.76856874052562e-05 , err= 7.572639637871231e-05
ii= 152 , relres= 8.404308919561037e-05 , err= 7.032415611124055e-05
ii= 153 , relres= 7.859198463937601e-05 , err= 6.50127085496534e-05
ii= 154 , relres= 7.240225040424014e-05 , err= 6.130155474922833e-05
ii= 155 , relres= 7.001444128902049e-05 , err= 5.649502816916725e-05
ii= 156 , relres= 7.374076196321213e-05 , err= 5.2770072606994715e-05
ii= 157 , relres= 6.205200361891063e-05 , err= 4.9658347900260986e-05
ii= 158 , relres= 5.3982640475407626e-05 , err= 4.5895358183997e-05
ii= 159 , relres= 7.047006952587945e-05 , err= 4.354682389602101e-05
ii= 160 , relres= 5.2011757675459524e-05 , err= 4.1284642797516034e-05
ii= 161 , relres= 5.071827565503435e-05 , err= 3.836947887934714e-05
ii= 162 , relres= 4.20281374325741e-05 , err= 3.576173652794167e-05
ii= 163 , relres= 3.7094248996579554e-05 , err= 3.291332040696168e-05
ii= 164 , relres= 3.7922993040088826e-05 , err= 2.9855418659631412e-05

```

```
ii= 165 , relres= 3.673546606285191e-05 , err= 2.7933781768972683e-05
ii= 166 , relres= 3.917187875440985e-05 , err= 2.6395726622048857e-05
ii= 167 , relres= 3.5763686267319444e-05 , err= 2.471886087388045e-05
ii= 168 , relres= 2.8656757716061676e-05 , err= 2.2917321746093626e-05
ii= 169 , relres= 3.2470389652877136e-05 , err= 2.1703838222107683e-05
ii= 170 , relres= 2.624104769916132e-05 , err= 2.0154106947860663e-05
ii= 171 , relres= 2.95549324209924e-05 , err= 1.9124426503479444e-05
ii= 172 , relres= 2.104834034574222e-05 , err= 1.7805841623739996e-05
ii= 173 , relres= 1.8498236596832632e-05 , err= 1.6365184564390636e-05
ii= 174 , relres= 1.970129766120212e-05 , err= 1.5263094370309763e-05
ii= 175 , relres= 1.6523076213004587e-05 , err= 1.4111441583136855e-05
ii= 176 , relres= 1.5901339353464097e-05 , err= 1.3157727059550894e-05
ii= 177 , relres= 1.630426748150259e-05 , err= 1.2370282859107395e-05
ii= 178 , relres= 1.3242490720438213e-05 , err= 1.1490517043061448e-05
ii= 179 , relres= 1.5366354245533798e-05 , err= 1.0872686554312803e-05
ii= 180 , relres= 1.4533121275944161e-05 , err= 1.0233664796388939e-05
ii= 181 , relres= 1.2022990606183033e-05 , err= 9.863622637824293e-06
ii= 182 , relres= 1.2489142956035649e-05 , err= 9.360743275806646e-06
ii= 183 , relres= 1.028728418727704e-05 , err= 8.895124269365072e-06
ii= 184 , relres= 1.0787698754291037e-05 , err= 8.463054449889403e-06
ii= 185 , relres= 7.813497095335499e-06 , err= 8.04774445730116e-06
ii= 186 , relres= 8.844192382169227e-06 , err= 7.5480284093783624e-06
ii= 187 , relres= 7.542821722452033e-06 , err= 7.208980562322894e-06
ii= 188 , relres= 7.076439558052204e-06 , err= 6.800876283726004e-06
ii= 189 , relres= 7.3981318390607335e-06 , err= 6.427883243108948e-06
ii= 190 , relres= 6.79625663971082e-06 , err= 6.152277665252982e-06
ii= 191 , relres= 5.793442373374885e-06 , err= 5.833291673414084e-06
ii= 192 , relres= 5.978654659065121e-06 , err= 5.488098724822846e-06
ii= 193 , relres= 5.5653468613754215e-06 , err= 5.140852275974662e-06
ii= 194 , relres= 5.209323376107516e-06 , err= 4.882726855359017e-06
ii= 195 , relres= 4.452877479603619e-06 , err= 4.618858405239817e-06
ii= 196 , relres= 5.348396610355536e-06 , err= 4.326028699582217e-06
ii= 197 , relres= 4.328650410150491e-06 , err= 4.159180283992954e-06
ii= 198 , relres= 4.340368153251341e-06 , err= 3.923758912069792e-06
ii= 199 , relres= 3.890041076225466e-06 , err= 3.746619467887853e-06
ii= 200 , relres= 3.247583905747307e-06 , err= 3.5196555608794846e-06
ii= 201 , relres= 3.876604597227149e-06 , err= 3.3145708398489517e-06
ii= 202 , relres= 3.3254110198043025e-06 , err= 3.184164340748421e-06
ii= 203 , relres= 3.0038446562656708e-06 , err= 2.9622974695746323e-06
ii= 204 , relres= 2.7803376527124763e-06 , err= 2.798627677234334e-06
ii= 205 , relres= 3.1867596473816264e-06 , err= 2.6464522322168713e-06
ii= 206 , relres= 2.791704582041854e-06 , err= 2.5457849529026236e-06
ii= 207 , relres= 2.976068278175901e-06 , err= 2.387576417723495e-06
ii= 208 , relres= 2.2368775663479724e-06 , err= 2.253267798586269e-06
ii= 209 , relres= 1.921049487440372e-06 , err= 2.0706310357551766e-06
ii= 210 , relres= 2.0957005083396562e-06 , err= 1.9072181525879185e-06
ii= 211 , relres= 2.020904168154632e-06 , err= 1.813425699212148e-06
ii= 212 , relres= 1.6534327771598494e-06 , err= 1.6819082744820743e-06
ii= 213 , relres= 1.7422383870603376e-06 , err= 1.559088557026683e-06
ii= 214 , relres= 1.4119429057024555e-06 , err= 1.4347742207672034e-06
ii= 215 , relres= 1.3333234689996494e-06 , err= 1.33030889941803e-06
ii= 216 , relres= 1.5431207455313665e-06 , err= 1.2540031169839586e-06
ii= 217 , relres= 1.1736886362302758e-06 , err= 1.173281104727786e-06
ii= 218 , relres= 1.2096359605868467e-06 , err= 1.1073219155642137e-06
ii= 219 , relres= 9.84457401481047e-07 , err= 1.0303283543780855e-06
ii= 220 , relres= 1.022962288543372e-06 , err= 9.522207613629605e-07
ii= 221 , relres= 1.0743873694537738e-06 , err= 9.1648272655127e-07
ii= 222 , relres= 9.730306900530276e-07 , err= 8.485462291748904e-07
ii= 223 , relres= 9.794154217615767e-07 , err= 8.109355669983255e-07
ii= 224 , relres= 9.179246221636124e-07 , err= 7.619854436449279e-07
ii= 225 , relres= 7.993199711648649e-07 , err= 7.22693718024397e-07
```

```

ii= 226 , relres= 8.166473980868235e-07 , err= 6.915568639456373e-07
ii= 227 , relres= 8.369786560247705e-07 , err= 6.549731417336008e-07
ii= 228 , relres= 6.826462227049127e-07 , err= 6.289023730909069e-07
ii= 229 , relres= 6.467164762893333e-07 , err= 5.871403646390125e-07
ii= 230 , relres= 5.60757227807877e-07 , err= 5.61202786818666e-07
ii= 231 , relres= 5.68654522091967e-07 , err= 5.21962504027041e-07
ii= 232 , relres= 6.360296781574754e-07 , err= 4.996794762901309e-07
ii= 233 , relres= 4.1985942436315196e-07 , err= 4.684695530352621e-07
ii= 234 , relres= 3.951394572231541e-07 , err= 4.3431604481887004e-07
ii= 235 , relres= 4.248212244656466e-07 , err= 4.011667232516729e-07
ii= 236 , relres= 4.266229045356905e-07 , err= 3.845489655167435e-07
ii= 237 , relres= 4.0867726633194614e-07 , err= 3.585503814905553e-07
ii= 238 , relres= 3.406922637920611e-07 , err= 3.4118365862509234e-07
ii= 239 , relres= 3.3377056700739115e-07 , err= 3.2065970458758135e-07
ii= 240 , relres= 3.355499222983446e-07 , err= 3.0259352612894736e-07
ii= 241 , relres= 3.2714787794795575e-07 , err= 2.8250105057794894e-07
ii= 242 , relres= 2.528975422737976e-07 , err= 2.6677665827328873e-07
ii= 243 , relres= 2.5282857456211175e-07 , err= 2.4424887299581256e-07
ii= 244 , relres= 2.5750261685201645e-07 , err= 2.310398794361486e-07
ii= 245 , relres= 2.069310997299773e-07 , err= 2.1368884190702314e-07
ii= 246 , relres= 2.400323071173513e-07 , err= 1.9310139433921793e-07
ii= 247 , relres= 2.197438594131103e-07 , err= 1.8688955782276292e-07
ii= 248 , relres= 1.8907961970344383e-07 , err= 1.7307032074449047e-07
ii= 249 , relres= 1.7140044602644415e-07 , err= 1.5967768058666872e-07
ii= 250 , relres= 1.5041389784629943e-07 , err= 1.4606332780907226e-07
ii= 251 , relres= 2.0348229071245957e-07 , err= 1.3741171092060066e-07
ii= 252 , relres= 1.4428984663109609e-07 , err= 1.2962413860292472e-07
ii= 253 , relres= 1.5628521833353515e-07 , err= 1.2230540479023986e-07
ii= 254 , relres= 1.1411774958166728e-07 , err= 1.1245054352752063e-07
ii= 255 , relres= 1.2633867362001394e-07 , err= 1.0251650017375549e-07
ii= 256 , relres= 1.10951033658597e-07 , err= 9.768771156508254e-08
ii= 257 , relres= 1.153042592756609e-07 , err= 9.07912854079806e-08
ii= 258 , relres= 1.10948081152564e-07 , err= 8.678036512640915e-08
ii= 259 , relres= 8.428706241926672e-08 , err= 7.960592249074216e-08
gamma= 4999.999999999999
nb= 1 , good_iter_psf= 36
nb= 5 , good_iter_psf= 30
nb= 25 , good_iter_psf= 23
good_iter_reg= 628
good_iter_none= 220

```

In [64]:

```

print('all_num_iter_sweep_gn=' , all_num_iter_sweep_gn)
print('num_iter_sweep_reg_gn=' , num_iter_sweep_reg_gn)
print('num_iter_sweep_none_gn=' , num_iter_sweep_none_gn)

```

```

all_num_iter_sweep_gn= [[15, 15, 15], [12, 12, 12], [11, 11, 11], [9, 9, 9], [1
2, 11, 10], [20, 17, 15], [36, 30, 23]]
num_iter_sweep_reg_gn= [9, 17, 33, 67, 140, 296, 628]
num_iter_sweep_none_gn= [186, 152, 119, 99, 87, 145, 220]

```

In [65]:

```

# all_num_iter_sweep= [[15, 15, 15], [12, 11, 11], [9, 9, 9], [16, 14, 11], [37,
# num_iter_sweep_reg= [9, 23, 68, 205, 627]
# num_iter_sweep_none= [187, 132, 97, 110, 220]
all_num_iter_sweep_gn = np.array(all_num_iter_sweep_gn)
num_iter_sweep_reg_gn = np.array(num_iter_sweep_reg_gn)
num_iter_sweep_none_gn = np.array(num_iter_sweep_none_gn)

print('all_gammas' , all_gammas)
print('all_num_iter_sweep_gn' , all_num_iter_sweep_gn)

```

```

print('num_iter_sweep_reg_gn=' , num_iter_sweep_reg_gn)
print('num_iter_sweep_none_gn=' , num_iter_sweep_none_gn)

np.savetxt(save_dir_str + '/all_gammas.txt' , all_gammas)
np.savetxt(save_dir_str + '/all_num_iter_sweep_gn.txt' , all_num_iter_sweep_gn)
np.savetxt(save_dir_str + '/num_iter_sweep_reg_gn.txt' , num_iter_sweep_reg_gn)
np.savetxt(save_dir_str + '/num_iter_sweep_none_gn.txt' , num_iter_sweep_none_gn)

```

all_gammas [500000. 232079.44168064 107721.73450159 50000. 23207.94416806 10772.17345016 5000.]
all_num_iter_sweep_gn [[15 15 15]
[12 12 12]
[11 11 11]
[9 9 9]
[12 11 10]
[20 17 15]
[36 30 23]]
num_iter_sweep_reg_gn= [9 17 33 67 140 296 628]
num_iter_sweep_none_gn= [186 152 119 99 87 145 220]

In [66]:

```

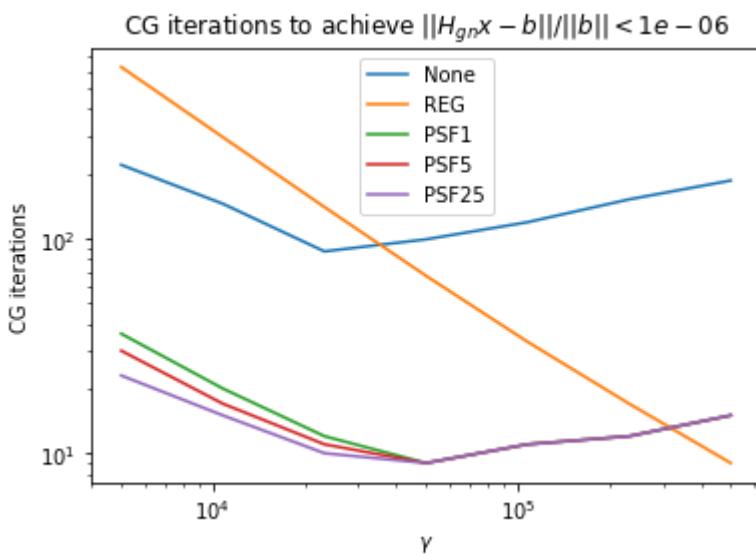
plt.loglog(all_gammas , num_iter_sweep_none_gn)
plt.loglog(all_gammas , num_iter_sweep_reg_gn)
for k in range(len(all_num_batches)):
    plt.loglog(all_gammas , all_num_iter_sweep_gn[:,k])

plt.title(r'CG iterations to achieve  $\|H_{gn}x - b\|/\|b\| < 1e-06$ ')
plt.xlabel(r'$\gamma$')
plt.ylabel('CG iterations')
plt.legend(['None', 'REG'] + ['PSF'+str(nb) for nb in all_num_batches])

```

Out[66]:

<matplotlib.legend.Legend at 0x7fa3683c2070>



In [67]:

```

all_num_iter_sweep = list()
num_iter_sweep_reg = list()
num_iter_sweep_none = list()
for gamma in all_gammas:
    print('--- GAMMA ---:', gamma)
    REG.update_gamma(gamma)

    # Rebuild reg hmatrix with same block cluster tree as PCH data misfit hmatrix

```

```

print('Building Regularization H-Matrix')
R_hmatrix = REG.make_R_hmatrix(all_Hd_pch[0].bct, rtol=1e-6)

all_H_pch = [Hd + R_hmatrix for Hd in all_Hd_pch]
all_preconditioners = [H.factorized_inverse() for H in all_H_pch]

ireg_linop = spla.LinearOperator((Vh2.dim(), Vh2.dim()), matvec=REG.solve_h)
all_p_linop = [spla.LinearOperator((Vh2.dim(), Vh2.dim()), matvec=p.matvec)

print('FULL: get truth:')
x_true_sweep, _, _, _ = cg_wrapper(H_linop, b, all_p_linop[-1], tol=1e-10)

all_relres_sweep = list()
all_errs_sweep = list()
for nb, p_linop in zip(all_num_batches, all_p_linop):
    print('FULL: psf'+str(nb))
    _, _, relres_sweep, errs_sweep = cg_wrapper(H_linop, b, p_linop,
                                                   x_true=x_true_sweep,
                                                   tol=1e-7)
    all_relres_sweep.append(relres_sweep)
    all_errs_sweep.append(errs_sweep)

print('FULL: reg')
_, _, relres_reg_sweep, errs_reg_sweep = cg_wrapper(H_linop, b, ireg_linop,
                                                       x_true=x_true_sweep,
                                                       tol=1e-7)

print('FULL: none')
_, _, relres_none_sweep, errs_none_sweep = cg_wrapper(H_linop, b, None,
                                                       x_true=x_true_sweep,
                                                       tol=1e-7)

print('gamma=', gamma)
all_num_iter_sweep.append([])
for k, relres_sweep in enumerate(all_relres_sweep):
    nb = all_num_batches[k]
    good_iter_psf = first_good_iter(relres_sweep)
    all_num_iter_sweep[-1].append(good_iter_psf)
    print('nb=', nb, ', good_iter_psf=', good_iter_psf)

good_iter_reg = first_good_iter(relres_reg_sweep)
num_iter_sweep_reg.append(good_iter_reg)
print('good_iter_reg=', good_iter_reg)

good_iter_none = first_good_iter(relres_none_sweep)
num_iter_sweep_none.append(good_iter_none)
print('good_iter_none=', good_iter_none)

```

```

--- GAMMA ---: 499999.99999999994
Building Regularization H-Matrix
matrix has dimension 1416 x 1416
no of non-zeroes      = 9746
matrix is              real valued
format                = non symmetric
size of sparse matrix = 163.52 kB
|S|_F                 = 8.06144e+07
sparsity constant     = 20
size of H-matrix       = 4.06 MB
|A|_F                  = 8.06144e+07
|S-A|_2                = 2.38579e-09

```

```

matrix has dimension — H-matrix inverse ( rtol = 1e-06 , atol = 1e-14 , ove
rwrite= False )
/home/nick/anaconda3/envs/fenics4/lib/python3.9/site-packages/scipy/sparse/linal
g/dsolve/linsolve.py:318: SparseEfficiencyWarning: splu requires CSC matrix form
at
    warn('splu requires CSC matrix format', SparseEfficiencyWarning)
        done in 1416 x 1416
        no of non-zeroes      = 9746
        matrix is            real valued
        format              = symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
|S|_F                  = 5.18561e+06
    sparsity constant = 20
    size of H-matrix  = 2.29 MB
|A|_F                  = 5.18561e+06
|S-A|_2 = 4.66653e-09
12.090587377548218
    size of inverse = 3361874 bytes

— H-matrix multiplication C=A*B
    done in 20.26s
    size of C = 4.02 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
    done in 28.70s
    size of C = 8.67 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
[===== ] 9FULL: get truth:
    done in 26.71s
    size of LU factor = 19.83 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
    done in 26.74s
    size of LU factor = 19.58 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
    done in 26.66s
===== ] 72% ETA 7 s (5.83 GB)
    size of LU factor = 19.59 MB
ii= 0 , relres= 1.0631862208327747 , err= nan
ii= 1 , relres= 0.48669970484770186 , err= nan
ii= 2 , relres= 0.16758458267436105 , err= nan
ii= 3 , relres= 0.07295584782469232 , err= nan
ii= 4 , relres= 0.04075298046865999 , err= nan
ii= 5 , relres= 0.009258887531352941 , err= nan
ii= 6 , relres= 0.0039847755821573174 , err= nan
ii= 7 , relres= 0.000998654822389509 , err= nan
ii= 8 , relres= 0.0002816085134381505 , err= nan
ii= 9 , relres= 0.00011229073144634174 , err= nan
ii= 10 , relres= 6.60396586541701e-05 , err= nan
ii= 11 , relres= 2.0156642320127955e-05 , err= nan
ii= 12 , relres= 5.522919026020172e-06 , err= nan
ii= 13 , relres= 1.7947227476516887e-06 , err= nan
ii= 14 , relres= 4.039464814832961e-07 , err= nan
ii= 15 , relres= 1.0571665433152256e-07 , err= nan
ii= 16 , relres= 2.169634115688447e-08 , err= nan
ii= 17 , relres= 5.881867141905151e-09 , err= nan
ii= 18 , relres= 2.4490618515653462e-09 , err= nan
ii= 19 , relres= 1.1675426826614737e-09 , err= nan

```

```

ii= 20 , relres= 1.1169412564168557e-09 , err= nan
ii= 21 , relres= 2.790508001965189e-10 , err= nan
ii= 22 , relres= 8.280141703886025e-11 , err= nan
FULL: psf1
ii= 0 , relres= 1.077036208739887 , err= 0.6497037663704522
ii= 1 , relres= 0.49234297633758095 , err= 0.14267738295679014
ii= 2 , relres= 0.16699305218976382 , err= 0.11083141035783727
ii= 3 , relres= 0.07369605495333705 , err= 0.06047125790144922
ii= 4 , relres= 0.04075715154687763 , err= 0.014956588034040796
ii= 5 , relres= 0.009172601797010953 , err= 0.0071313462296562465
ii= 6 , relres= 0.004084863261876854 , err= 0.0019073849501731776
ii= 7 , relres= 0.001034400706206412 , err= 0.0004891694108220318
ii= 8 , relres= 0.0002897335575187624 , err= 0.00017014176179929068
ii= 9 , relres= 0.0001154583731516208 , err= 3.909907487896454e-05
ii= 10 , relres= 4.9767385264951275e-05 , err= 3.288003159745731e-05
ii= 11 , relres= 2.320152359343856e-05 , err= 1.1394521137932815e-05
ii= 12 , relres= 5.650219827617882e-06 , err= 3.4491208648967563e-06
ii= 13 , relres= 1.9768479116655084e-06 , err= 8.231766892702143e-07
ii= 14 , relres= 4.2795447080037676e-07 , err= 2.3438107487841845e-07
ii= 15 , relres= 1.1271768256261711e-07 , err= 4.460699583711485e-08
ii= 16 , relres= 2.3975284894729755e-08 , err= 1.060771383707473e-08
FULL: psf5
ii= 0 , relres= 1.0663068785038312 , err= 0.6327827927449031
ii= 1 , relres= 0.48823243009826583 , err= 0.14140244854829329
ii= 2 , relres= 0.16877299704610751 , err= 0.11084770621186472
ii= 3 , relres= 0.07318325280246833 , err= 0.06070398622530656
ii= 4 , relres= 0.04076841153203053 , err= 0.014966166536513257
ii= 5 , relres= 0.009294157735491635 , err= 0.007040754724336861
ii= 6 , relres= 0.00399515974904645 , err= 0.001876369278820307
ii= 7 , relres= 0.001003651204641796 , err= 0.0004873788619992164
ii= 8 , relres= 0.0002822416180481917 , err= 0.00015865459939224785
ii= 9 , relres= 0.00011123525083008136 , err= 3.582114276409401e-05
ii= 10 , relres= 3.099341777344302e-05 , err= 2.343227532399948e-05
ii= 11 , relres= 2.0794056373263965e-05 , err= 1.1092891689759524e-05
ii= 12 , relres= 5.49389835411862e-06 , err= 3.076188673356929e-06
ii= 13 , relres= 1.8012148636043926e-06 , err= 7.91870193937448e-07
ii= 14 , relres= 4.0577172835238723e-07 , err= 2.2164521962179796e-07
ii= 15 , relres= 1.0660090418037872e-07 , err= 4.11580954477117e-08
ii= 16 , relres= 2.1837345748527714e-08 , err= 1.0089341928664283e-08
FULL: psf25
ii= 0 , relres= 1.0631862208327747 , err= 0.6283167837511595
ii= 1 , relres= 0.48669970484770186 , err= 0.14084444449170283
ii= 2 , relres= 0.16758458267436105 , err= 0.11063891610091962
ii= 3 , relres= 0.07295584782469232 , err= 0.06056759525680469
ii= 4 , relres= 0.04075298046865999 , err= 0.014993571588496039
ii= 5 , relres= 0.009258887531352941 , err= 0.007002068525836624
ii= 6 , relres= 0.0039847755821573174 , err= 0.0018671250984659171
ii= 7 , relres= 0.000998654822389509 , err= 0.00048716852867803094
ii= 8 , relres= 0.0002816085134381505 , err= 0.00015808990311292026
ii= 9 , relres= 0.00011229073144634174 , err= 3.5077457788318575e-05
ii= 10 , relres= 6.60396586541701e-05 , err= 3.635539214875033e-05
ii= 11 , relres= 2.0156642320127955e-05 , err= 1.1258840023464584e-05
ii= 12 , relres= 5.522919026020172e-06 , err= 3.0582067185222973e-06
ii= 13 , relres= 1.7947227476516887e-06 , err= 7.87348822823706e-07
ii= 14 , relres= 4.039464814832961e-07 , err= 2.1975230941505486e-07
ii= 15 , relres= 1.0571665433152256e-07 , err= 4.063795583187345e-08
ii= 16 , relres= 2.169634115688447e-08 , err= 1.022600546384517e-08
FULL: reg
ii= 0 , relres= 0.15381761042565667 , err= 0.2005134547603209
ii= 1 , relres= 0.03286173636996779 , err= 0.05083456308014974
ii= 2 , relres= 0.006929683490664688 , err= 0.01052243412330297

```

```

ii= 3 , relres= 0.0012339344840266674 , err= 0.0019572201528893227
ii= 4 , relres= 0.00029562306484405885 , err= 0.0005193486495344468
ii= 5 , relres= 6.955119219485794e-05 , err= 0.00010123080897304441
ii= 6 , relres= 1.4736976686310943e-05 , err= 2.0913177027080743e-05
ii= 7 , relres= 3.3157312280022536e-06 , err= 5.59801612849359e-06
ii= 8 , relres= 6.666614653692295e-07 , err= 1.0101701926564645e-06
ii= 9 , relres= 1.3278290824140165e-07 , err= 2.2107674722066524e-07
ii= 10 , relres= 3.3817737287232305e-08 , err= 4.549716380699047e-08
FULL: none
ii= 0 , relres= 1.204054586175601 , err= 0.9675033332176344
ii= 1 , relres= 1.1326423058645025 , err= 0.9373045650426772
ii= 2 , relres= 1.0756542299594452 , err= 0.9007105168641465
ii= 3 , relres= 1.0251066519112602 , err= 0.8625609431924499
ii= 4 , relres= 0.9298230648008032 , err= 0.8175248545914537
ii= 5 , relres= 0.8669569066369003 , err= 0.7763779215924683
ii= 6 , relres= 0.8171292416781352 , err= 0.734299384351108
ii= 7 , relres= 0.7384271421544542 , err= 0.6965148091050911
ii= 8 , relres= 0.6906353224146906 , err= 0.653651153595953
ii= 9 , relres= 0.6290801824154352 , err= 0.617402145115526
ii= 10 , relres= 0.5726972156502548 , err= 0.5848707987646818
ii= 11 , relres= 0.5495050076440801 , err= 0.5531113007288005
ii= 12 , relres= 0.47140899670830605 , err= 0.5270873606575907
ii= 13 , relres= 0.43313822956715653 , err= 0.50148699104626
ii= 14 , relres= 0.410367934492457 , err= 0.4790020234360798
ii= 15 , relres= 0.37017397967692056 , err= 0.4570866136918153
ii= 16 , relres= 0.34236208552263725 , err= 0.4383440913265426
ii= 17 , relres= 0.329262811541574 , err= 0.42051820583612937
ii= 18 , relres= 0.27771252535273405 , err= 0.40470449019171606
ii= 19 , relres= 0.26573649625041834 , err= 0.3902235783786771
ii= 20 , relres= 0.2379934260048273 , err= 0.37651229826172683
ii= 21 , relres= 0.21853268478367344 , err= 0.36343445202543884
ii= 22 , relres= 0.19968677662461487 , err= 0.35076462101270517
ii= 23 , relres= 0.1902299269837602 , err= 0.3404751019707004
ii= 24 , relres= 0.17392215120672294 , err= 0.3305137604084204
ii= 25 , relres= 0.17025834570338313 , err= 0.3191298915197833
ii= 26 , relres= 0.15427759980855502 , err= 0.30747300101162167
ii= 27 , relres= 0.14486513427736175 , err= 0.2960857956398895
ii= 28 , relres= 0.13299506280247472 , err= 0.2853603972431546
ii= 29 , relres= 0.1295692594372963 , err= 0.27564820169666915
ii= 30 , relres= 0.125997433810772 , err= 0.2649278282774067
ii= 31 , relres= 0.12201754139024529 , err= 0.2541000556065412
ii= 32 , relres= 0.1152852553653088 , err= 0.24316167595043298
ii= 33 , relres= 0.11488312793215659 , err= 0.23147089474976987
ii= 34 , relres= 0.11437517587396821 , err= 0.22070983595774593
ii= 35 , relres= 0.10567776474800211 , err= 0.21041638248419847
ii= 36 , relres= 0.0984148278671668 , err= 0.19963096510943726
ii= 37 , relres= 0.0950249722330875 , err= 0.1890728586405296
ii= 38 , relres= 0.09554812594246663 , err= 0.17896071320303608
ii= 39 , relres= 0.08923525328281198 , err= 0.16692751316282733
ii= 40 , relres= 0.08573936621395094 , err= 0.15528541817924654
ii= 41 , relres= 0.07792111909090008 , err= 0.14496299765436726
ii= 42 , relres= 0.0762762833323146 , err= 0.1351747873198261
ii= 43 , relres= 0.07394876601618251 , err= 0.1265824421710987
ii= 44 , relres= 0.07296212029328916 , err= 0.11762381946546407
ii= 45 , relres= 0.0811473855748144 , err= 0.10971630652642173
ii= 46 , relres= 0.07242615895070514 , err= 0.10310117013596044
ii= 47 , relres= 0.06252003711677143 , err= 0.09543054029906861
ii= 48 , relres= 0.062334450011607506 , err= 0.0878785555238727
ii= 49 , relres= 0.056470825000541895 , err= 0.08113547506878478
ii= 50 , relres= 0.05184870257242859 , err= 0.07506201762954841
ii= 51 , relres= 0.0494149997307725 , err= 0.06957345645810803

```

```
ii= 52 , relres= 0.04180757696978006 , err= 0.06434534157245513
ii= 53 , relres= 0.03773807659645907 , err= 0.05993125543496065
ii= 54 , relres= 0.03550101267151573 , err= 0.05606566296326964
ii= 55 , relres= 0.032387511970996256 , err= 0.05227970930416704
ii= 56 , relres= 0.03288471856202831 , err= 0.0487305347138302
ii= 57 , relres= 0.02905903801120856 , err= 0.04553456409071957
ii= 58 , relres= 0.028418491124697194 , err= 0.04272600358250637
ii= 59 , relres= 0.02823399429405123 , err= 0.040268376385852934
ii= 60 , relres= 0.026861247151229502 , err= 0.038294105478350306
ii= 61 , relres= 0.02506113783192977 , err= 0.03623116471437279
ii= 62 , relres= 0.021924104424463763 , err= 0.0342165504398089
ii= 63 , relres= 0.019304455445799024 , err= 0.03207329590665631
ii= 64 , relres= 0.018727233479930105 , err= 0.030110913460144932
ii= 65 , relres= 0.01729255983273092 , err= 0.028078630862888004
ii= 66 , relres= 0.0184727033577243 , err= 0.026221471123092782
ii= 67 , relres= 0.01805642114977246 , err= 0.024700564008287376
ii= 68 , relres= 0.01578587021324978 , err= 0.023446348739910007
ii= 69 , relres= 0.014055957981415622 , err= 0.021941864324766674
ii= 70 , relres= 0.012853629804763787 , err= 0.020286362802046237
ii= 71 , relres= 0.012362391224616121 , err= 0.018744543499490826
ii= 72 , relres= 0.011861529029258426 , err= 0.017501913622708885
ii= 73 , relres= 0.011989047824730927 , err= 0.01638891685501283
ii= 74 , relres= 0.011681398565874601 , err= 0.015467330106219352
ii= 75 , relres= 0.009879933217188917 , err= 0.014485788805720115
ii= 76 , relres= 0.008984949245021722 , err= 0.013368745307495628
ii= 77 , relres= 0.008832817744682841 , err= 0.0123164126991236
ii= 78 , relres= 0.010329428197903858 , err= 0.011493321055127063
ii= 79 , relres= 0.008217362223338381 , err= 0.010802285247353867
ii= 80 , relres= 0.007593580120398016 , err= 0.0100315178018641
ii= 81 , relres= 0.0080106651350568 , err= 0.009440051811696855
ii= 82 , relres= 0.006546272096319861 , err= 0.008798088503876034
ii= 83 , relres= 0.00614301193624816 , err= 0.008095798842804135
ii= 84 , relres= 0.005834487405631041 , err= 0.007399499875177608
ii= 85 , relres= 0.005414728658990759 , err= 0.006684454414142628
ii= 86 , relres= 0.0048899702540011825 , err= 0.006083752516001323
ii= 87 , relres= 0.0051346468066455885 , err= 0.005636528362927738
ii= 88 , relres= 0.004471390139186521 , err= 0.005257306391009912
ii= 89 , relres= 0.003966300366956907 , err= 0.00480443499561305
ii= 90 , relres= 0.003670184810769763 , err= 0.0043501437022969896
ii= 91 , relres= 0.003591093012030928 , err= 0.003944078249332835
ii= 92 , relres= 0.0033953376484013764 , err= 0.0037075598972873946
ii= 93 , relres= 0.003137849826438442 , err= 0.0034015921926287313
ii= 94 , relres= 0.0027091705302140176 , err= 0.0030859747219586413
ii= 95 , relres= 0.00260620342294139 , err= 0.002801591549209765
ii= 96 , relres= 0.0023006978622462063 , err= 0.002560584334453757
ii= 97 , relres= 0.0023356656571471048 , err= 0.0023650370610011208
ii= 98 , relres= 0.0020709360933426606 , err= 0.002201135060567844
ii= 99 , relres= 0.0018033848452199256 , err= 0.0020027362729428187
ii= 100 , relres= 0.0016291083849115907 , err= 0.0018197613340046415
ii= 101 , relres= 0.001515223792350727 , err= 0.0016533349154122746
ii= 102 , relres= 0.0015157397629490094 , err= 0.0015213409328003612
ii= 103 , relres= 0.0014516081790930863 , err= 0.001403197894599648
ii= 104 , relres= 0.0012875690918674786 , err= 0.0012752767136274715
ii= 105 , relres= 0.0012309940941588407 , err= 0.001133980954017618
ii= 106 , relres= 0.0012400573107854067 , err= 0.0010393194581001005
ii= 107 , relres= 0.0011055485226887387 , err= 0.000961500046164081
ii= 108 , relres= 0.0009172176678435149 , err= 0.0008612822586846825
ii= 109 , relres= 0.0007919543235176133 , err= 0.0007782896089074593
ii= 110 , relres= 0.000728405593490038 , err= 0.0006945573003411614
ii= 111 , relres= 0.0007604717163036967 , err= 0.0006318928872807753
ii= 112 , relres= 0.000749522875656701 , err= 0.0005888486393386941
```

```

ii= 113 , relres= 0.0006438974406274793 , err= 0.0005347299092729502
ii= 114 , relres= 0.0005905161485145911 , err= 0.00048233313004663247
ii= 115 , relres= 0.0005265068521588799 , err= 0.0004396924104757824
ii= 116 , relres= 0.0005012697639453573 , err= 0.00039206837510244517
ii= 117 , relres= 0.00043833242964625715 , err= 0.00034408709626662816
ii= 118 , relres= 0.0004400507885721205 , err= 0.000308377286378887
ii= 119 , relres= 0.000392727272698311 , err= 0.0002855546126677631
ii= 120 , relres= 0.0003250806245114782 , err= 0.0002589040920344928
ii= 121 , relres= 0.0002723678687619148 , err= 0.00023455571931888365
ii= 122 , relres= 0.0002447326655516128 , err= 0.00021403458229433836
ii= 123 , relres= 0.0002317551351497976 , err= 0.00019924702889872624
ii= 124 , relres= 0.0001991507359219558 , err= 0.00018493871465324185
ii= 125 , relres= 0.0001778464944139464 , err= 0.00017173154289911593
ii= 126 , relres= 0.00016673452345585403 , err= 0.00015774123938706275
ii= 127 , relres= 0.00016568103975049675 , err= 0.0001475015306426028
ii= 128 , relres= 0.0001528661754324816 , err= 0.00013861909307766025
ii= 129 , relres= 0.0001260445687625672 , err= 0.00012758073857362508
ii= 130 , relres= 0.0001172915901731862 , err= 0.00011705763920203073
ii= 131 , relres= 0.00011318462142006759 , err= 0.00010699512756230413
ii= 132 , relres= 0.00010989166618912235 , err= 9.824967371521209e-05
ii= 133 , relres= 9.592613937817415e-05 , err= 9.044566808945255e-05
ii= 134 , relres= 8.013757043415215e-05 , err= 8.334679115435077e-05
ii= 135 , relres= 7.689652421521768e-05 , err= 7.619960908860512e-05
ii= 136 , relres= 7.708356310744238e-05 , err= 7.03578931391026e-05
ii= 137 , relres= 7.20095671657919e-05 , err= 6.591308582258518e-05
ii= 138 , relres= 6.157705984927637e-05 , err= 6.0814221789042485e-05
ii= 139 , relres= 5.7001638567126895e-05 , err= 5.655818823847586e-05
ii= 140 , relres= 4.992775990941835e-05 , err= 5.261115914133239e-05
ii= 141 , relres= 4.445148576524173e-05 , err= 4.864035577442921e-05
ii= 142 , relres= 4.109842707278898e-05 , err= 4.484311710501882e-05
ii= 143 , relres= 3.772808696619905e-05 , err= 4.092379545493576e-05
ii= 144 , relres= 4.155599559294416e-05 , err= 3.742112436883262e-05
ii= 145 , relres= 3.75503619886036e-05 , err= 3.508365769475237e-05
ii= 146 , relres= 3.621143064835891e-05 , err= 3.2588235009142274e-05
ii= 147 , relres= 2.9051230503708877e-05 , err= 3.009371929341698e-05
ii= 148 , relres= 2.6295915407344017e-05 , err= 2.7365996110930587e-05
ii= 149 , relres= 2.4066320646452792e-05 , err= 2.4796104368482343e-05
ii= 150 , relres= 2.2751797354916996e-05 , err= 2.2463007913571116e-05
ii= 151 , relres= 2.34170174766566e-05 , err= 2.037295250242919e-05
ii= 152 , relres= 2.0633974779927194e-05 , err= 1.8801737730626715e-05
ii= 153 , relres= 1.94386387409991e-05 , err= 1.7022828408785956e-05
ii= 154 , relres= 1.8369004562207298e-05 , err= 1.5303351049232868e-05
ii= 155 , relres= 1.8145696809051967e-05 , err= 1.4001328365088704e-05
ii= 156 , relres= 1.580662791548832e-05 , err= 1.2711927308391028e-05
ii= 157 , relres= 1.4636269266460381e-05 , err= 1.1435919319012344e-05
ii= 158 , relres= 1.253663638324682e-05 , err= 1.0262018068648441e-05
ii= 159 , relres= 1.175768269533553e-05 , err= 9.149289403417358e-06
ii= 160 , relres= 1.1389936434234769e-05 , err= 8.33925121646152e-06
ii= 161 , relres= 9.504874057811025e-06 , err= 7.596718466758194e-06
ii= 162 , relres= 7.952345970983886e-06 , err= 6.811240639960139e-06
ii= 163 , relres= 7.346897437479756e-06 , err= 5.989906817618548e-06
ii= 164 , relres= 6.513768865453026e-06 , err= 5.2730038469865e-06
ii= 165 , relres= 6.235302401629196e-06 , err= 4.730307109760064e-06
ii= 166 , relres= 5.709485732515195e-06 , err= 4.316119865460539e-06
ii= 167 , relres= 4.782018892190175e-06 , err= 3.9233934106304695e-06
ii= 168 , relres= 4.531278946851128e-06 , err= 3.5797200009863147e-06
ii= 169 , relres= 4.600903884881056e-06 , err= 3.3363889610086783e-06
ii= 170 , relres= 3.6400354030867803e-06 , err= 3.0491520106941818e-06
ii= 171 , relres= 3.500331035078206e-06 , err= 2.7689498334712325e-06
ii= 172 , relres= 3.516807857040913e-06 , err= 2.5466812440326098e-06
ii= 173 , relres= 2.695307999870559e-06 , err= 2.3193224279595364e-06

```

```

ii= 174 , relres= 2.460464861594701e-06 , err= 2.1025364494078415e-06
ii= 175 , relres= 2.2468274554384696e-06 , err= 1.9028165020382473e-06
ii= 176 , relres= 2.1127503423395137e-06 , err= 1.7390207289761322e-06
ii= 177 , relres= 1.7986554050137166e-06 , err= 1.5841084221070712e-06
ii= 178 , relres= 1.6833763441052854e-06 , err= 1.4423300879628864e-06
ii= 179 , relres= 1.8086919381060658e-06 , err= 1.3474721780880591e-06
ii= 180 , relres= 1.4441853523746216e-06 , err= 1.2539122852442072e-06
ii= 181 , relres= 1.5010904615659414e-06 , err= 1.1599255185252008e-06
ii= 182 , relres= 1.228498534505238e-06 , err= 1.078747042924426e-06
ii= 183 , relres= 1.195715599525211e-06 , err= 9.732857266238859e-07
ii= 184 , relres= 1.1849097658722464e-06 , err= 9.055247480907143e-07
ii= 185 , relres= 8.673837674805523e-07 , err= 8.389438502222309e-07
ii= 186 , relres= 7.761561719253404e-07 , err= 7.637564727571203e-07
ii= 187 , relres= 7.200389767889982e-07 , err= 6.977491779946562e-07
ii= 188 , relres= 6.020047179019332e-07 , err= 6.324070071790854e-07
ii= 189 , relres= 5.585284569113031e-07 , err= 5.800557856108358e-07
ii= 190 , relres= 4.791044329363244e-07 , err= 5.341694873052632e-07
ii= 191 , relres= 5.46880685453561e-07 , err= 4.985698913328622e-07
ii= 192 , relres= 4.773602174431759e-07 , err= 4.711923288316751e-07
ii= 193 , relres= 3.904099209380389e-07 , err= 4.399524727434358e-07
ii= 194 , relres= 3.766509948641343e-07 , err= 4.1082746590958633e-07
ii= 195 , relres= 3.2237714527415886e-07 , err= 3.848569215178177e-07
ii= 196 , relres= 2.8625560174855393e-07 , err= 3.584647389802886e-07
ii= 197 , relres= 2.6709561299247774e-07 , err= 3.3055218873503576e-07
ii= 198 , relres= 2.961604623988004e-07 , err= 3.047269589100644e-07
ii= 199 , relres= 2.7464483733548386e-07 , err= 2.8949681150997e-07
ii= 200 , relres= 2.2498288193996524e-07 , err= 2.686760941157791e-07
ii= 201 , relres= 2.3261750155059028e-07 , err= 2.530936823304697e-07
ii= 202 , relres= 1.8144444394320654e-07 , err= 2.3760693428204044e-07
ii= 203 , relres= 1.7602583229211738e-07 , err= 2.1988879729235937e-07
ii= 204 , relres= 1.639864945783707e-07 , err= 2.0254461226137514e-07
ii= 205 , relres= 1.6177694410953937e-07 , err= 1.8591690351322618e-07
ii= 206 , relres= 1.4187195602109304e-07 , err= 1.7282060423124518e-07
ii= 207 , relres= 1.2445656295764683e-07 , err= 1.5787358641056506e-07
ii= 208 , relres= 1.2658339143145908e-07 , err= 1.448512593142196e-07
ii= 209 , relres= 1.3076614953251758e-07 , err= 1.3559753949348948e-07
ii= 210 , relres= 1.088797255947825e-07 , err= 1.258990406624145e-07
ii= 211 , relres= 1.1441966037889672e-07 , err= 1.1524343760870349e-07
ii= 212 , relres= 1.1113967865490026e-07 , err= 1.0852696046289673e-07
ii= 213 , relres= 1.0106862065025081e-07 , err= 9.89366862995953e-08
ii= 214 , relres= 9.543533954352022e-08 , err= 9.146838418831984e-08
gamma= 499999.9999999994
nb= 1 , good_iter_psf= 15
nb= 5 , good_iter_psf= 15
nb= 25 , good_iter_psf= 15
good_iter_reg= 9
good_iter_none= 186
--- GAMMA ---: 232079.44168063859
Building Regularization H-Matrix
    matrix has dimension 1416 x 1416
        no of non-zeroes      = 9746
        matrix is              real valued
        format                = non symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
    |S|_F                  = 3.74179e+07
        sparsity constant = 20
        size of H-matrix  = 4.06 MB
        |A|_F                  = 3.74179e+07
    |S-A|_2 = 8.63985e-09
    matrix has dimension — H-matrix inverse ( rtol = 1416 x 1416
        no of non-zeroes      = 9746

```

```

matrix is           real valued
format             = symmetric
size of sparse matrix = 163.52 kB
|S|_F              = 5.18561e+06
sparsity constant = 20
size of H-matrix   = 2.29 MB
|A|_F              = 5.18561e+06
|S-A|_2 = 4.66653e-09
1e-06 , atol = 1e-14 , overwrite= False )
done in 12.32930326461792] 7% ETA 11 s (5.83 GB)
size of inverse = 3361874 bytes

— H-matrix multiplication C=A*B
done in 20.15s ] 7% ETA
21 s (5.83 GB)
size of C = 3.99 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
done in 28.65s
size of C = 8.66 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
done in 26.97s
size of LU factor = 21.34 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
done in 26.94s
size of LU factor = 21.14 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
[=====
done in 26.94s =====
===== ] 47% ETA 14 s (5.83 GB)
size of LU factor = 21.11 MB
ii= 0 , relres= 0.46618371518502943 , err= nan
ii= 1 , relres= 0.22047118001999302 , err= nan
ii= 2 , relres= 0.05612526353293049 , err= nan
ii= 3 , relres= 0.028164392592042557 , err= nan
ii= 4 , relres= 0.014274789459284601 , err= nan
ii= 5 , relres= 0.0036966448722676086 , err= nan
ii= 6 , relres= 0.001154003399280648 , err= nan
ii= 7 , relres= 0.0002526194956564165 , err= nan
ii= 8 , relres= 6.0734613206594035e-05 , err= nan
ii= 9 , relres= 1.9767270912413785e-05 , err= nan
ii= 10 , relres= 3.272357339638703e-06 , err= nan
ii= 11 , relres= 7.721000749121888e-07 , err= nan
ii= 12 , relres= 1.762381679793608e-07 , err= nan
ii= 13 , relres= 3.5066066524248867e-08 , err= nan
ii= 14 , relres= 8.36456561173088e-09 , err= nan
ii= 15 , relres= 1.7633020073303955e-09 , err= nan
ii= 16 , relres= 7.475171550293906e-10 , err= nan
ii= 17 , relres= 2.9392692879660556e-10 , err= nan
ii= 18 , relres= 5.4176266746186095e-11 , err= nan
FULL: psf1
ii= 0 , relres= 0.4795310631907193 , err= 0.20587708469601887
ii= 1 , relres= 0.23484873362713413 , err= 0.08404508464958632
ii= 2 , relres= 0.05814219436766919 , err= 0.059763555871200774
ii= 3 , relres= 0.028659271565000352 , err= 0.015867670433810665
ii= 4 , relres= 0.014465653259780812 , err= 0.00758831510424132
ii= 5 , relres= 0.003832107995443376 , err= 0.00284473666233023
ii= 6 , relres= 0.0012292595149698748 , err= 0.0006398921371200027

```

```

ii= 7 , relres= 0.0002572447030067808 , err= 0.00014177022562314944
ii= 8 , relres= 6.0816582071829065e-05 , err= 3.618941217367302e-05
ii= 9 , relres= 1.8101654525587888e-05 , err= 7.351172930832281e-06
ii= 10 , relres= 3.0640193398149966e-06 , err= 2.0837345809831157e-06
ii= 11 , relres= 7.757643527638022e-07 , err= 4.2165616020230416e-07
ii= 12 , relres= 1.9162916384562387e-07 , err= 9.455829251982144e-08
ii= 13 , relres= 3.5827488965846435e-08 , err= 2.1227239384081662e-08
FULL: psf5
ii= 0 , relres= 0.469708352976905 , err= 0.1946530569853382
ii= 1 , relres= 0.22400357645992605 , err= 0.08290860770978788
ii= 2 , relres= 0.056733041602708166 , err= 0.05882811381453561
ii= 3 , relres= 0.028243137937780178 , err= 0.015918381168916272
ii= 4 , relres= 0.014594296642061652 , err= 0.007329276634263276
ii= 5 , relres= 0.003735258139284126 , err= 0.002729911901605664
ii= 6 , relres= 0.0011760910038258066 , err= 0.0006096563362111322
ii= 7 , relres= 0.0002534952196905719 , err= 0.0001395216561959574
ii= 8 , relres= 6.106948831933621e-05 , err= 3.8040452059607936e-05
ii= 9 , relres= 2.0051169285560113e-05 , err= 7.969342250917863e-06
ii= 10 , relres= 3.3002666020969846e-06 , err= 2.0349689140417144e-06
ii= 11 , relres= 7.695233601728884e-07 , err= 4.137846599575336e-07
ii= 12 , relres= 1.7731665512883246e-07 , err= 8.923142489618402e-08
ii= 13 , relres= 3.425793055667444e-08 , err= 1.9575979426672806e-08
FULL: psf25
ii= 0 , relres= 0.46618371518502943 , err= 0.19121599073291273
ii= 1 , relres= 0.22047118001999302 , err= 0.08246922146043494
ii= 2 , relres= 0.05612526353293049 , err= 0.05841133107118054
ii= 3 , relres= 0.028164392592042557 , err= 0.015631927417662516
ii= 4 , relres= 0.014274789459284601 , err= 0.007316036962565582
ii= 5 , relres= 0.0036966448722676086 , err= 0.0026832501921499395
ii= 6 , relres= 0.001154003399280648 , err= 0.0005987509018380867
ii= 7 , relres= 0.0002526194956564165 , err= 0.00013837218111931372
ii= 8 , relres= 6.0734613206594035e-05 , err= 3.789407369989203e-05
ii= 9 , relres= 1.9767270912413785e-05 , err= 7.889533247511679e-06
ii= 10 , relres= 3.272357339638703e-06 , err= 1.9998247454891765e-06
ii= 11 , relres= 7.721000749121888e-07 , err= 4.1087519938206156e-07
ii= 12 , relres= 1.762381679793608e-07 , err= 8.90068052222681e-08
ii= 13 , relres= 3.5066066524248867e-08 , err= 1.9562918852864837e-08
FULL: reg
ii= 0 , relres= 0.46469621293445396 , err= 0.4235147696168521
ii= 1 , relres= 0.21839217099733593 , err= 0.2161231142058232
ii= 2 , relres= 0.09193401406233283 , err= 0.10329396987473637
ii= 3 , relres= 0.037558570967533046 , err= 0.04144037517500297
ii= 4 , relres= 0.01867579542446585 , err= 0.021280525433093393
ii= 5 , relres= 0.008849441107089573 , err= 0.009121307291591017
ii= 6 , relres= 0.0040341189166719195 , err= 0.0042195334287978194
ii= 7 , relres= 0.0020029872426363593 , err= 0.0021981562304491525
ii= 8 , relres= 0.000847369186390523 , err= 0.0009543634613375101
ii= 9 , relres= 0.00038508613008458913 , err= 0.000406320587034777
ii= 10 , relres= 0.00018624878823557829 , err= 0.00019280993836902843
ii= 11 , relres= 7.882294239902409e-05 , err= 8.363151534487758e-05
ii= 12 , relres= 3.2632244041908374e-05 , err= 4.112918260835282e-05
ii= 13 , relres= 1.272923328680761e-05 , err= 1.375338857769051e-05
ii= 14 , relres= 5.509709095387821e-06 , err= 5.878618303400093e-06
ii= 15 , relres= 1.994246278281453e-06 , err= 2.338992867341449e-06
ii= 16 , relres= 6.682900247553208e-07 , err= 6.994331863236914e-07
ii= 17 , relres= 2.465936825671903e-07 , err= 2.48392318678819e-07
ii= 18 , relres= 1.001782360958184e-07 , err= 1.0142347245499028e-07
ii= 19 , relres= 3.128068358550679e-08 , err= 3.187538806995858e-08
FULL: none
ii= 0 , relres= 1.1958120384773223 , err= 0.9505161355605998
ii= 1 , relres= 1.1124555518178352 , err= 0.9062546162446119

```

```
ii= 2 , relres= 1.0394663319463298 , err= 0.8546967725746529
ii= 3 , relres= 0.9716943099177712 , err= 0.8032622927662344
ii= 4 , relres= 0.8605917126162708 , err= 0.745446873958966
ii= 5 , relres= 0.7821219720581783 , err= 0.695362179492877
ii= 6 , relres= 0.7171615206514744 , err= 0.6467619701833037
ii= 7 , relres= 0.6295754127485506 , err= 0.605312976074709
ii= 8 , relres= 0.5708061202323682 , err= 0.5606798414452495
ii= 9 , relres= 0.5048366533695187 , err= 0.5247484701704601
ii= 10 , relres= 0.4468530642200632 , err= 0.49373236894083705
ii= 11 , relres= 0.41844956071164324 , err= 0.46435809707868436
ii= 12 , relres= 0.3507154107754414 , err= 0.4407709926019112
ii= 13 , relres= 0.3156714925380962 , err= 0.4178589466312384
ii= 14 , relres= 0.29430878076336126 , err= 0.39777795599664195
ii= 15 , relres= 0.26294153222591976 , err= 0.37803904718216386
ii= 16 , relres= 0.24177942172681965 , err= 0.36087436997657324
ii= 17 , relres= 0.23243288294207606 , err= 0.3441823999892953
ii= 18 , relres= 0.19609054937657003 , err= 0.32900677697598973
ii= 19 , relres= 0.18770119287474551 , err= 0.3148516308014145
ii= 20 , relres= 0.16863913299946867 , err= 0.3011880433506545
ii= 21 , relres= 0.15569780148062098 , err= 0.2879079791905147
ii= 22 , relres= 0.14318904242663386 , err= 0.2748275638644139
ii= 23 , relres= 0.13652449980777953 , err= 0.2641284657412279
ii= 24 , relres= 0.1243603941946203 , err= 0.25380344538309757
ii= 25 , relres= 0.1210289039898335 , err= 0.24215633588901975
ii= 26 , relres= 0.10867961876839821 , err= 0.23042789872082708
ii= 27 , relres= 0.10120414168203706 , err= 0.2192013806152041
ii= 28 , relres= 0.09231103825976522 , err= 0.20876908383796933
ii= 29 , relres= 0.08940647224578598 , err= 0.19942455470471715
ii= 30 , relres= 0.08650076826456321 , err= 0.18918368128122723
ii= 31 , relres= 0.08289463137405279 , err= 0.17898361453636402
ii= 32 , relres= 0.07718106129606303 , err= 0.16891017690111032
ii= 33 , relres= 0.0759197257636546 , err= 0.15841458924548205
ii= 34 , relres= 0.07478258769909599 , err= 0.14892526993565863
ii= 35 , relres= 0.06858066256766028 , err= 0.1399336975826913
ii= 36 , relres= 0.06371847899326481 , err= 0.1305323539004508
ii= 37 , relres= 0.061360811201077885 , err= 0.12131480167664087
ii= 38 , relres= 0.061185028917150365 , err= 0.11253364147315258
ii= 39 , relres= 0.05644361326837725 , err= 0.1022579059105577
ii= 40 , relres= 0.053382488733609575 , err= 0.09258116784041917
ii= 41 , relres= 0.047781541668786766 , err= 0.08425206113909213
ii= 42 , relres= 0.0465395726586994 , err= 0.07658942822143465
ii= 43 , relres= 0.04619188174003165 , err= 0.07028023035563709
ii= 44 , relres= 0.048229611359487536 , err= 0.06473112896946527
ii= 45 , relres= 0.04316962209656911 , err= 0.059543781937875837
ii= 46 , relres= 0.03778781127726326 , err= 0.05336303035323911
ii= 47 , relres= 0.03387092907338863 , err= 0.047788668474962354
ii= 48 , relres= 0.033074538835690295 , err= 0.042903277049826445
ii= 49 , relres= 0.02909137815471221 , err= 0.038774103802522074
ii= 50 , relres= 0.025955701617630795 , err= 0.03522556530533099
ii= 51 , relres= 0.024176178037954858 , err= 0.032120167429824105
ii= 52 , relres= 0.020070322150461856 , err= 0.02921411599127686
ii= 53 , relres= 0.017855640217100042 , err= 0.02678064540855839
ii= 54 , relres= 0.01664163837524584 , err= 0.024635970838595304
ii= 55 , relres= 0.015000600068533558 , err= 0.02252444361345023
ii= 56 , relres= 0.01508321490755213 , err= 0.020593600975579565
ii= 57 , relres= 0.013888267246080468 , err= 0.018974704228218963
ii= 58 , relres= 0.013905691436783763 , err= 0.0178234640648922
ii= 59 , relres= 0.01169916858166511 , err= 0.01663680131400468
ii= 60 , relres= 0.01018221945802222 , err= 0.01543020438584422
ii= 61 , relres= 0.00973022425628031 , err= 0.014322638477992615
ii= 62 , relres= 0.008592363517934269 , err= 0.013334464821339294
```

```

ii= 63 , relres= 0.007530097732759929 , err= 0.012319162630292072
ii= 64 , relres= 0.007227162775403606 , err= 0.01138623113870112
ii= 65 , relres= 0.006660417273299839 , err= 0.010415717304678695
ii= 66 , relres= 0.007274886977567676 , err= 0.009572708850083541
ii= 67 , relres= 0.006734635711956056 , err= 0.008878084394633867
ii= 68 , relres= 0.005662336010448944 , err= 0.008210338106205212
ii= 69 , relres= 0.005150798011181315 , err= 0.007453294947370285
ii= 70 , relres= 0.004769466642123854 , err= 0.0066351038801968475
ii= 71 , relres= 0.004962327754481409 , err= 0.005901992315283518
ii= 72 , relres= 0.0048128055695365315 , err= 0.005394300048391358
ii= 73 , relres= 0.00418931129111477 , err= 0.004855581346206676
ii= 74 , relres= 0.003791053742097066 , err= 0.004296376486159889
ii= 75 , relres= 0.0033896179236747276 , err= 0.0037744784556513504
ii= 76 , relres= 0.0033790094452483114 , err= 0.003309790011523776
ii= 77 , relres= 0.003256449158606484 , err= 0.0029939835456731087
ii= 78 , relres= 0.0026900007887921944 , err= 0.0026369160790340514
ii= 79 , relres= 0.0027118448207056186 , err= 0.0022887599397425546
ii= 80 , relres= 0.002497275511981644 , err= 0.002087327076229286
ii= 81 , relres= 0.0019715816980394006 , err= 0.0018315692429763072
ii= 82 , relres= 0.0017337994982318395 , err= 0.0015654621934888566
ii= 83 , relres= 0.001595678386368622 , err= 0.0013423436941244972
ii= 84 , relres= 0.001440153660604811 , err= 0.0011466598471177902
ii= 85 , relres= 0.0013389928593533296 , err= 0.0009737662403375159
ii= 86 , relres= 0.0012365118867017923 , err= 0.0008595848618081337
ii= 87 , relres= 0.0009651001481515825 , err= 0.0007656004905451869
ii= 88 , relres= 0.0008058961636830139 , err= 0.0006673680366561309
ii= 89 , relres= 0.0007384955770867814 , err= 0.0005803761276241119
ii= 90 , relres= 0.0007460836583969298 , err= 0.0005119526263033051
ii= 91 , relres= 0.0006362492454443976 , err= 0.00045806288862974056
ii= 92 , relres= 0.000465118317685718 , err= 0.0003996617181117967
ii= 93 , relres= 0.0004580741497729257 , err= 0.00034590400416616726
ii= 94 , relres= 0.000393958251825234 , err= 0.0002982057484447915
ii= 95 , relres= 0.0003846079603609238 , err= 0.0002616025770641644
ii= 96 , relres= 0.0003263370531724556 , err= 0.00023269916769069721
ii= 97 , relres= 0.00027169198107694203 , err= 0.00020791010191872745
ii= 98 , relres= 0.00022458747779663241 , err= 0.00018353010374201273
ii= 99 , relres= 0.0001976410190938902 , err= 0.00015992566332360587
ii= 100 , relres= 0.00017246005728104065 , err= 0.00014022945351232265
ii= 101 , relres= 0.00015957462104410818 , err= 0.00012418403968576303
ii= 102 , relres= 0.0001452010597661464 , err= 0.00011295879390945705
ii= 103 , relres= 0.00012303664448141144 , err= 0.00010175099605897522
ii= 104 , relres= 0.00010885823094451622 , err= 9.059548707035339e-05
ii= 105 , relres= 0.0001177010514053011 , err= 8.112649760257337e-05
ii= 106 , relres= 9.081315343175919e-05 , err= 7.417326207773199e-05
ii= 107 , relres= 7.635813857056956e-05 , err= 6.669726381814675e-05
ii= 108 , relres= 6.654015503368824e-05 , err= 5.884542006018827e-05
ii= 109 , relres= 5.5637880096324075e-05 , err= 5.2748182465548723e-05
ii= 110 , relres= 5.362070247836409e-05 , err= 4.6921807946151795e-05
ii= 111 , relres= 5.6354050649985145e-05 , err= 4.350022141451117e-05
ii= 112 , relres= 4.3128453779502334e-05 , err= 3.997363532063355e-05
ii= 113 , relres= 3.981566940710408e-05 , err= 3.5908411094279693e-05
ii= 114 , relres= 3.648140289432655e-05 , err= 3.242191602410617e-05
ii= 115 , relres= 3.0760639130512075e-05 , err= 2.965945080082397e-05
ii= 116 , relres= 2.952802415590574e-05 , err= 2.6798695494297465e-05
ii= 117 , relres= 2.9832509567391587e-05 , err= 2.4192542568029555e-05
ii= 118 , relres= 2.470367179897049e-05 , err= 2.222786671466199e-05
ii= 119 , relres= 1.959322747224351e-05 , err= 2.002234440503941e-05
ii= 120 , relres= 1.7773339670972143e-05 , err= 1.8018613283074507e-05
ii= 121 , relres= 1.5147672164196658e-05 , err= 1.6236733904861256e-05
ii= 122 , relres= 1.3309053484739479e-05 , err= 1.4643453911350107e-05
ii= 123 , relres= 1.3047968788760218e-05 , err= 1.340331009392566e-05

```

```

ii= 124 , relres= 1.2733984940869783e-05 , err= 1.2413031491895263e-05
ii= 125 , relres= 1.0550249533701677e-05 , err= 1.1533727173422791e-05
ii= 126 , relres= 9.747415927237205e-06 , err= 1.0488352465848146e-05
ii= 127 , relres= 8.649854116765173e-06 , err= 9.616601877057612e-06
ii= 128 , relres= 8.233933343862282e-06 , err= 8.843417628952525e-06
ii= 129 , relres= 7.170673740211158e-06 , err= 8.023101617356573e-06
ii= 130 , relres= 7.006133569587895e-06 , err= 7.32105222476592e-06
ii= 131 , relres= 6.733853220189755e-06 , err= 6.76479358733514e-06
ii= 132 , relres= 5.658669477958965e-06 , err= 6.182559222604963e-06
ii= 133 , relres= 5.029599565069464e-06 , err= 5.600001705597168e-06
ii= 134 , relres= 4.394818345790995e-06 , err= 5.136415453624609e-06
ii= 135 , relres= 3.998726726788492e-06 , err= 4.766586898559861e-06
ii= 136 , relres= 3.4705654228004775e-06 , err= 4.356790357818339e-06
ii= 137 , relres= 3.1618135271098894e-06 , err= 3.963073164452718e-06
ii= 138 , relres= 2.9642287698698008e-06 , err= 3.5674225828579744e-06
ii= 139 , relres= 2.7979463193847917e-06 , err= 3.251562817579516e-06
ii= 140 , relres= 2.528952395648102e-06 , err= 2.985121922753076e-06
ii= 141 , relres= 2.2107013330931024e-06 , err= 2.7308676531292423e-06
ii= 142 , relres= 2.008823445882947e-06 , err= 2.4963750493349507e-06
ii= 143 , relres= 1.9257366508582246e-06 , err= 2.26736663885968e-06
ii= 144 , relres= 1.9568606661863927e-06 , err= 2.0853759942870653e-06
ii= 145 , relres= 1.6364408394333862e-06 , err= 1.8946250937717784e-06
ii= 146 , relres= 1.7133447222721235e-06 , err= 1.7411469506495665e-06
ii= 147 , relres= 1.4770590729732688e-06 , err= 1.5946167980747088e-06
ii= 148 , relres= 1.4342530593615014e-06 , err= 1.47555426800956e-06
ii= 149 , relres= 1.160829362166214e-06 , err= 1.3365462688201119e-06
ii= 150 , relres= 1.026084913695519e-06 , err= 1.1915868401623528e-06
ii= 151 , relres= 9.584353052527225e-07 , err= 1.0610544043930263e-06
ii= 152 , relres= 8.685482276352104e-07 , err= 9.460589635854689e-07
ii= 153 , relres= 8.72644326231538e-07 , err= 8.645034478741192e-07
ii= 154 , relres= 8.186213186901276e-07 , err= 7.848052864878629e-07
ii= 155 , relres= 7.106416908777002e-07 , err= 7.114193510528717e-07
ii= 156 , relres= 6.29759923447437e-07 , err= 6.338082953682384e-07
ii= 157 , relres= 5.686764721551158e-07 , err= 5.565913724773877e-07
ii= 158 , relres= 4.965942167112377e-07 , err= 4.816334909307748e-07
ii= 159 , relres= 4.570158436317482e-07 , err= 4.1479381181793734e-07
ii= 160 , relres= 4.3848343341240145e-07 , err= 3.632679979904623e-07
ii= 161 , relres= 4.060617905871997e-07 , err= 3.266397080750486e-07
ii= 162 , relres= 3.1230245169649794e-07 , err= 2.911355113314408e-07
ii= 163 , relres= 2.835207592439198e-07 , err= 2.548965317554168e-07
ii= 164 , relres= 2.753748099841584e-07 , err= 2.2791188120608823e-07
ii= 165 , relres= 2.2802277940498236e-07 , err= 2.0774192343352683e-07
ii= 166 , relres= 2.0790538865407377e-07 , err= 1.8720125889245042e-07
ii= 167 , relres= 2.0060503071481305e-07 , err= 1.719468912175358e-07
ii= 168 , relres= 1.6391752245050478e-07 , err= 1.5720291808260157e-07
ii= 169 , relres= 1.5877577521849424e-07 , err= 1.4429181553913416e-07
ii= 170 , relres= 1.3868093343690144e-07 , err= 1.3309146968181072e-07
ii= 171 , relres= 1.1123504725432441e-07 , err= 1.2015026505599159e-07
ii= 172 , relres= 9.970360569488239e-08 , err= 1.0815639877024582e-07
gamma= 232079.44168063859
nb= 1 , good_iter_psf= 12
nb= 5 , good_iter_psf= 12
nb= 25 , good_iter_psf= 12
good_iter_reg= 17
good_iter_none= 152
--- GAMMA ---: 107721.7345015941
Building Regularization H-Matrix
matrix has dimension 1416 x 1416
no of non-zeroes      = 9746
matrix is              real valued
format                = non symmetric

```

```

size of sparse matrix = 163.52 kB
|S|_F = 1.73678e+07
sparsity constant = 20
size of H-matrix = 4.06 MB
|A|_F = 1.73678e+07
|S-A|_2 = 2.14155e-09
matrix has dimension — H-matrix inverse ( rtol = 1416 x 1416
    no of non-zeroes = 9746
    matrix is real valued
    format = symmetric
size of sparse matrix = 163.52 kB
|S|_F = 5.18561e+06
sparsity constant = 20
size of H-matrix = 2.29 MB
|A|_F = 5.18561e+06
|S-A|_2 = 4.66653e-09
1e-06 , atol = 1e-14 , overwrite= False )
done in 11.265412330627441
size of inverse = 3361874 bytes

— H-matrix multiplication C=A*B
done in 19.96s
size of C = 3.97 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
done in 28.94s
size of C = 8.65 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
done in 27.00s
TA 23 s (5.83 GB)
size of LU factor = 22.52 MB ] 7% E

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
done in 27.09s
size of LU factor = 22.45 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
done in 27.06s
size of LU factor = 22.34 MB

FULL: get truth:
ii= 0 , relres= 0.24682860538615073 , err= nan
ii= 1 , relres= 0.04663394571636879 , err= nan
ii= 2 , relres= 0.01625524297973522 , err= nan
ii= 3 , relres= 0.006554866429639036 , err= nan
ii= 4 , relres= 0.001539871877859575 , err= nan
ii= 5 , relres= 0.00032134678783986894 , err= nan
ii= 6 , relres= 9.472666586291675e-05 , err= nan
ii= 7 , relres= 2.1633325644607946e-05 , err= nan
ii= 8 , relres= 8.055181624912555e-06 , err= nan
ii= 9 , relres= 1.6284025856498707e-06 , err= nan
ii= 10 , relres= 2.627556318030791e-07 , err= nan
ii= 11 , relres= 7.291604123041234e-08 , err= nan
ii= 12 , relres= 1.2676895032784443e-08 , err= nan
ii= 13 , relres= 1.8606191081892397e-09 , err= nan
ii= 14 , relres= 2.6117852405482287e-10 , err= nan
ii= 15 , relres= 3.92299525697328e-11 , err= nan
FULL: psf1
ii= 0 , relres= 0.259627811059379 , err= 0.125346833639271
ii= 1 , relres= 0.05250125298894541 , err= 0.04803496754662429
ii= 2 , relres= 0.016005839034064454 , err= 0.0138023781159319

```

```

ii= 3 , relres= 0.007881022413035068 , err= 0.003495775088802764
ii= 4 , relres= 0.0018232597988002825 , err= 0.0015209335580860235
ii= 5 , relres= 0.0004012934738527163 , err= 0.0002691154873075087
ii= 6 , relres= 0.0001009802960063558 , err= 5.9989790396408145e-05
ii= 7 , relres= 2.135994385828487e-05 , err= 2.429941301375725e-05
ii= 8 , relres= 1.0335779809152707e-05 , err= 4.617021994592018e-06
ii= 9 , relres= 1.7612789221489234e-06 , err= 1.1919823427533544e-06
ii= 10 , relres= 3.152432888022531e-07 , err= 3.0475589188150307e-07
ii= 11 , relres= 8.496230832121233e-08 , err= 4.52166191186429e-08
FULL: psf5
ii= 0 , relres= 0.25147038262030647 , err= 0.11221390739518501
ii= 1 , relres= 0.04744787696578266 , err= 0.046872188289597966
ii= 2 , relres= 0.01607335229015189 , err= 0.0123911950824395
ii= 3 , relres= 0.00700228143949532 , err= 0.0028753824511339727
ii= 4 , relres= 0.001607685545552399 , err= 0.0013967999373269984
ii= 5 , relres= 0.0003462298402674382 , err= 0.00023602426580242658
ii= 6 , relres= 0.00010312546860557662 , err= 5.3687062938457624e-05
ii= 7 , relres= 2.2700891912937206e-05 , err= 2.3724520116257655e-05
ii= 8 , relres= 8.684489811467383e-06 , err= 4.347445914811227e-06
ii= 9 , relres= 1.7162530249847152e-06 , err= 1.0440783661576171e-06
ii= 10 , relres= 2.670641241863472e-07 , err= 2.4768320033189204e-07
ii= 11 , relres= 7.425846785385571e-08 , err= 3.5314488320891396e-08
FULL: psf25
ii= 0 , relres= 0.24682860538615073 , err= 0.1088733880973857
ii= 1 , relres= 0.04663394571636879 , err= 0.04679613486062198
ii= 2 , relres= 0.01625524297973522 , err= 0.012182926701873388
ii= 3 , relres= 0.006554866429639036 , err= 0.002752798630900699
ii= 4 , relres= 0.001539871877859575 , err= 0.001348686089882056
ii= 5 , relres= 0.00032134678783986894 , err= 0.00021891904270073575
ii= 6 , relres= 9.472666586291675e-05 , err= 4.913539167658256e-05
ii= 7 , relres= 2.1633325644607946e-05 , err= 2.1787692940839223e-05
ii= 8 , relres= 8.055181624912555e-06 , err= 4.071153832201542e-06
ii= 9 , relres= 1.6284025856498707e-06 , err= 9.921931625907104e-07
ii= 10 , relres= 2.627556318030791e-07 , err= 2.3889748734843266e-07
ii= 11 , relres= 7.291604123041234e-08 , err= 3.4422469493252176e-08
FULL: reg
ii= 0 , relres= 0.8230972457450548 , err= 0.7003166175656762
ii= 1 , relres= 0.6392946597212705 , err= 0.49111405614137676
ii= 2 , relres= 0.42132565026210184 , err= 0.3338091747759864
ii= 3 , relres= 0.27456662220605293 , err= 0.21154146857625755
ii= 4 , relres= 0.19696886151776452 , err= 0.15133766786194397
ii= 5 , relres= 0.13456048813918475 , err= 0.10130293779574974
ii= 6 , relres= 0.09031809121878599 , err= 0.07151802915402737
ii= 7 , relres= 0.06687471450004914 , err= 0.05170778558206888
ii= 8 , relres= 0.04328789789480682 , err= 0.034475980039892905
ii= 9 , relres= 0.030355885097541765 , err= 0.02228460867836013
ii= 10 , relres= 0.020282575984252822 , err= 0.016050796018381348
ii= 11 , relres= 0.013590079063907037 , err= 0.010840330782252734
ii= 12 , relres= 0.008856783661941198 , err= 0.007619255711576377
ii= 13 , relres= 0.005665405208562053 , err= 0.004374421490547852
ii= 14 , relres= 0.003727465131551431 , err= 0.0029792353108986746
ii= 15 , relres= 0.002341049438437102 , err= 0.0019076938757621432
ii= 16 , relres= 0.001358546817287379 , err= 0.0010428118374886473
ii= 17 , relres= 0.0008358472073905199 , err= 0.0006378486567506125
ii= 18 , relres= 0.000561241610557135 , err= 0.0004203634625333766
ii= 19 , relres= 0.0003219704050534512 , err= 0.00023334457888831223
ii= 20 , relres= 0.0002029348754688819 , err= 0.00014901019110693636
ii= 21 , relres= 0.0001139331928412586 , err= 8.187795037936483e-05
ii= 22 , relres= 6.757418088263367e-05 , err= 4.807222209980623e-05
ii= 23 , relres= 4.1183801157799954e-05 , err= 2.9235892489071142e-05
ii= 24 , relres= 2.6082752996141726e-05 , err= 1.8687571562993128e-05

```

```

ii= 25 , relres= 1.6365568608508548e-05 , err= 1.2116216894218698e-05
ii= 26 , relres= 1.0688389962821142e-05 , err= 7.305028583213732e-06
ii= 27 , relres= 7.463784388618593e-06 , err= 5.622095842891998e-06
ii= 28 , relres= 4.870903095911606e-06 , err= 3.592917002412709e-06
ii= 29 , relres= 3.4603829640564213e-06 , err= 2.3830680473099445e-06
ii= 30 , relres= 2.421495670499898e-06 , err= 1.7803449603722078e-06
ii= 31 , relres= 1.4021376868935956e-06 , err= 1.0053619386275277e-06
ii= 32 , relres= 1.0243789271950588e-06 , err= 6.556243802743755e-07
ii= 33 , relres= 7.457919796258784e-07 , err= 4.885928484195314e-07
ii= 34 , relres= 4.386895398808754e-07 , err= 3.1106133881895785e-07
ii= 35 , relres= 2.933826880334594e-07 , err= 2.0133635258105164e-07
ii= 36 , relres= 2.0882495990444228e-07 , err= 1.3802672077030009e-07
ii= 37 , relres= 1.296883264457999e-07 , err= 8.911210782622192e-08
ii= 38 , relres= 7.002117072753469e-08 , err= 5.083624479990782e-08
FULL: none
ii= 0 , relres= 1.1594488585004896 , err= 0.9237023240385488
ii= 1 , relres= 1.0323049086622367 , err= 0.8623029513082867
ii= 2 , relres= 0.9141576998164763 , err= 0.7976467693005052
ii= 3 , relres= 0.8127825817681524 , err= 0.7385725204550209
ii= 4 , relres= 0.6879708671746202 , err= 0.6763500107196873
ii= 5 , relres= 0.6046933434991397 , err= 0.6243666854593215
ii= 6 , relres= 0.5417977043891087 , err= 0.5743105330622247
ii= 7 , relres= 0.4676110220439881 , err= 0.5312064427839803
ii= 8 , relres= 0.4194992828639821 , err= 0.4838611624746203
ii= 9 , relres= 0.37001341836727736 , err= 0.44459476527427416
ii= 10 , relres= 0.3283083849552164 , err= 0.40935332090328164
ii= 11 , relres= 0.3084732142526124 , err= 0.37480090072825845
ii= 12 , relres= 0.2581825526346714 , err= 0.3464536009153287
ii= 13 , relres= 0.23154595848518328 , err= 0.3186983787844064
ii= 14 , relres= 0.21447439641306906 , err= 0.2943763772504688
ii= 15 , relres= 0.19094057300380513 , err= 0.2705794503004622
ii= 16 , relres= 0.17597635201853332 , err= 0.24984283755422199
ii= 17 , relres= 0.16883474199680132 , err= 0.22971113222007727
ii= 18 , relres= 0.14107264547420825 , err= 0.21185939602600054
ii= 19 , relres= 0.132389778849726 , err= 0.19596240863354128
ii= 20 , relres= 0.11586503619745574 , err= 0.18155927116439446
ii= 21 , relres= 0.10374315624509968 , err= 0.16848804439120862
ii= 22 , relres= 0.09187133457346155 , err= 0.15660357180833717
ii= 23 , relres= 0.08423043524026315 , err= 0.1476033769821412
ii= 24 , relres= 0.07350881020331021 , err= 0.1394856736055588
ii= 25 , relres= 0.06853641393187039 , err= 0.13089966924218102
ii= 26 , relres= 0.05938930635060525 , err= 0.12270460931034254
ii= 27 , relres= 0.05453175379174425 , err= 0.1149822123107175
ii= 28 , relres= 0.049509693905184934 , err= 0.10767617046408676
ii= 29 , relres= 0.04756133386189759 , err= 0.10102984419758497
ii= 30 , relres= 0.04500669480680402 , err= 0.09380952891482314
ii= 31 , relres= 0.04162856927575122 , err= 0.08693239979100066
ii= 32 , relres= 0.03772363447476292 , err= 0.0804282967757618
ii= 33 , relres= 0.036855673588442904 , err= 0.07371258006929927
ii= 34 , relres= 0.03628297844801554 , err= 0.06753846075596413
ii= 35 , relres= 0.03325654928312704 , err= 0.06158739641463569
ii= 36 , relres= 0.03079722599506461 , err= 0.05531159688156112
ii= 37 , relres= 0.02884793801664126 , err= 0.04933347838887612
ii= 38 , relres= 0.027123397173450307 , err= 0.0440980835878075
ii= 39 , relres= 0.023264076437066863 , err= 0.038727758511983526
ii= 40 , relres= 0.021079329699266427 , err= 0.03412046472805305
ii= 41 , relres= 0.018778674463696934 , err= 0.03021942547045758
ii= 42 , relres= 0.01846623101713151 , err= 0.026475936757620885
ii= 43 , relres= 0.018166876025258398 , err= 0.023475079353344225
ii= 44 , relres= 0.017712811053703145 , err= 0.021002435490016035
ii= 45 , relres= 0.014972725030275823 , err= 0.018594716891641685

```

```
ii= 46 , relres= 0.012711142406067433 , err= 0.01599929934611022
ii= 47 , relres= 0.01099073714642441 , err= 0.013825501323225454
ii= 48 , relres= 0.010414184524569908 , err= 0.011963563998759707
ii= 49 , relres= 0.008972959974863894 , err= 0.010402899895871509
ii= 50 , relres= 0.00792238588792896 , err= 0.009039601274454086
ii= 51 , relres= 0.0072541335256609924 , err= 0.00782391748761556
ii= 52 , relres= 0.005808073524074209 , err= 0.006719571280357113
ii= 53 , relres= 0.004970804292689995 , err= 0.0058361984888628355
ii= 54 , relres= 0.004422640909317092 , err= 0.005094871549215054
ii= 55 , relres= 0.003737037085110385 , err= 0.004422339347301704
ii= 56 , relres= 0.0036904990274021976 , err= 0.0038785264547049228
ii= 57 , relres= 0.0034518021587717287 , err= 0.00348319180799464
ii= 58 , relres= 0.0029065814914335086 , err= 0.003149689489056546
ii= 59 , relres= 0.0024817789247917705 , err= 0.002755422679712352
ii= 60 , relres= 0.002096976175495971 , err= 0.0024133779607305554
ii= 61 , relres= 0.0019050934930255742 , err= 0.002132019859804881
ii= 62 , relres= 0.001659363493358496 , err= 0.0018986581212378578
ii= 63 , relres= 0.0014229118104866283 , err= 0.0016637436721591338
ii= 64 , relres= 0.0013898081236748412 , err= 0.0014627830581850501
ii= 65 , relres= 0.0013704995428672308 , err= 0.0013002647800205327
ii= 66 , relres= 0.0010888375614637724 , err= 0.0011560186606913287
ii= 67 , relres= 0.000921490195395501 , err= 0.0009904943864071307
ii= 68 , relres= 0.0007882581470290893 , err= 0.0008664234804599122
ii= 69 , relres= 0.0007021938025289234 , err= 0.0007537058538343082
ii= 70 , relres= 0.0007111619042558411 , err= 0.0006624946603562492
ii= 71 , relres= 0.00059106168285777 , err= 0.0005962897720011227
ii= 72 , relres= 0.00047384861912985976 , err= 0.000512015170895271
ii= 73 , relres= 0.00043068745953093687 , err= 0.00043960099201807126
ii= 74 , relres= 0.0003809400280926804 , err= 0.00037807626800921267
ii= 75 , relres= 0.00032116884478735746 , err= 0.0003264354761656777
ii= 76 , relres= 0.00031191088243545087 , err= 0.000286793320300949
ii= 77 , relres= 0.0002702264353263376 , err= 0.0002628945777766944
ii= 78 , relres= 0.00021900490757087036 , err= 0.00023453716850193907
ii= 79 , relres= 0.00022742422201997938 , err= 0.0002102978471065127
ii= 80 , relres= 0.00017679190092689432 , err= 0.00018996644441658786
ii= 81 , relres= 0.0001480349562767713 , err= 0.00016583355554923023
ii= 82 , relres= 0.00012873566665302553 , err= 0.00014309590123603462
ii= 83 , relres= 0.00011953473123083013 , err= 0.00012396091530024792
ii= 84 , relres= 0.00011079514805726954 , err= 0.00010814666949546245
ii= 85 , relres= 0.00010171072289059615 , err= 9.575535579741613e-05
ii= 86 , relres= 7.92791023327413e-05 , err= 8.422847247803821e-05
ii= 87 , relres= 6.511985672349351e-05 , err= 7.365424584477811e-05
ii= 88 , relres= 5.722696612854495e-05 , err= 6.350982535460112e-05
ii= 89 , relres= 5.266652604411782e-05 , err= 5.442232958258214e-05
ii= 90 , relres= 5.2763148576221885e-05 , err= 4.731027580468598e-05
ii= 91 , relres= 4.5019483988331336e-05 , err= 4.175027463262084e-05
ii= 92 , relres= 3.319119166136828e-05 , err= 3.562912297250428e-05
ii= 93 , relres= 3.340064194664712e-05 , err= 3.006365249333824e-05
ii= 94 , relres= 3.0019624068652426e-05 , err= 2.578251168354229e-05
ii= 95 , relres= 2.545810957832942e-05 , err= 2.264609414222437e-05
ii= 96 , relres= 2.052082726037509e-05 , err= 1.9314726818843102e-05
ii= 97 , relres= 1.7612631529745613e-05 , err= 1.6601119291935338e-05
ii= 98 , relres= 1.4649920900557743e-05 , err= 1.411350022244938e-05
ii= 99 , relres= 1.3223364679204047e-05 , err= 1.1859003479421654e-05
ii= 100 , relres= 1.3101749788599357e-05 , err= 1.0229431306514976e-05
ii= 101 , relres= 1.0920157390055384e-05 , err= 9.07901429224286e-06
ii= 102 , relres= 9.014818358526654e-06 , err= 7.83150164724659e-06
ii= 103 , relres= 8.646455083773042e-06 , err= 6.866227075870548e-06
ii= 104 , relres= 6.909853509132838e-06 , err= 5.931229519110436e-06
ii= 105 , relres= 5.777504587652351e-06 , err= 5.038125463913031e-06
ii= 106 , relres= 4.625174358339749e-06 , err= 4.219075149592303e-06
```

```

ii= 107 , relres= 4.043843523637992e-06 , err= 3.6329221592797098e-06
ii= 108 , relres= 3.832288052427998e-06 , err= 3.1240185059951068e-06
ii= 109 , relres= 3.4774879680127954e-06 , err= 2.8468943445734557e-06
ii= 110 , relres= 2.700134372355631e-06 , err= 2.5369071493802295e-06
ii= 111 , relres= 2.2154623966703065e-06 , err= 2.157085231207565e-06
ii= 112 , relres= 2.018431933959948e-06 , err= 1.855016315330426e-06
ii= 113 , relres= 2.0372578379435166e-06 , err= 1.6404946827173488e-06
ii= 114 , relres= 1.6552346196989487e-06 , err= 1.4570215469851792e-06
ii= 115 , relres= 1.333131389652596e-06 , err= 1.2797462557541287e-06
ii= 116 , relres= 1.22472217408668e-06 , err= 1.1421000268572464e-06
ii= 117 , relres= 1.0353053113966799e-06 , err= 1.0098736222389076e-06
ii= 118 , relres= 8.265720045543016e-07 , err= 8.903630488272046e-07
ii= 119 , relres= 6.984417831535578e-07 , err= 7.807219002852179e-07
ii= 120 , relres= 6.543387286661431e-07 , err= 6.826118360139085e-07
ii= 121 , relres= 6.108201679024459e-07 , err= 5.998932463573477e-07
ii= 122 , relres= 5.588707512553761e-07 , err= 5.414825344939368e-07
ii= 123 , relres= 4.457352675528163e-07 , err= 4.822887459212192e-07
ii= 124 , relres= 4.329754250782833e-07 , err= 4.2834637017916855e-07
ii= 125 , relres= 3.48661637634372e-07 , err= 3.7944621832091073e-07
ii= 126 , relres= 3.1314391060168663e-07 , err= 3.302414898301643e-07
ii= 127 , relres= 2.633835880814628e-07 , err= 2.8241041162900546e-07
ii= 128 , relres= 2.461868203296121e-07 , err= 2.430531690991412e-07
ii= 129 , relres= 2.2957317888719358e-07 , err= 2.0952032307953213e-07
ii= 130 , relres= 1.9787977682724176e-07 , err= 1.8809975141584126e-07
ii= 131 , relres= 1.5970826486996046e-07 , err= 1.6667088681029944e-07
ii= 132 , relres= 1.436382552798457e-07 , err= 1.4688306917630206e-07
ii= 133 , relres= 1.3126870752017157e-07 , err= 1.2976382255146894e-07
ii= 134 , relres= 1.0805856867730653e-07 , err= 1.137052996343953e-07
ii= 135 , relres= 9.350867608510415e-08 , err= 9.920393758355329e-08
gamma= 107721.7345015941
nb= 1 , good_iter_psf= 11
nb= 5 , good_iter_psf= 11
nb= 25 , good_iter_psf= 11
good_iter_reg= 34
good_iter_none= 119
--- GAMMA ---: 49999.99999999999
Building Regularization H-Matrix
    matrix has dimension 1416 x 1416
        no of non-zeroes      = 9746
        matrix is              real valued
        format                 = non symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
    |S|_F                  = 8.06144e+06
    sparsity constant = 20
    size of H-matrix   = 4.06 MB
    |A|_F                  = 8.06144e+06
    |S-A|_2 = 2.29781e-09
    matrix has dimension — H-matrix inverse ( rtol = 1416 x 1416
        no of non-zeroes      = 9746
        matrix is              real valued
        format                 = symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
    |S|_F                  = 5.18561e+06
    sparsity constant = 20
    size of H-matrix   = 2.29 MB
    |A|_F                  = 5.18561e+06
    |S-A|_2 = 4.66653e-09
1e-06 , atol = 1e-14 , overwrite= False )
done in 12.088249683380127
size of inverse = 3361874 bytes

```

```
— H-matrix multiplication C=A*B
    done in 20.38s
    size of C = 3.95 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
    done in 28.68s
    size of C = 8.64 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
    done in 27.18s
    size of LU factor = 23.20 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
    done in 26.52s
    size of LU factor = 23.28 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
    done in 27.03s
    size of LU factor = 23.11 MB
FULL: get truth:
ii= 0 , relres= 0.1383521164310657 , err= nan
ii= 1 , relres= 0.023384636402321708 , err= nan
ii= 2 , relres= 0.007626503253600988 , err= nan
ii= 3 , relres= 0.0013905921704479333 , err= nan
ii= 4 , relres= 0.0002492097731032591 , err= nan
ii= 5 , relres= 4.44580557489238e-05 , err= nan
ii= 6 , relres= 1.0000022650027073e-05 , err= nan
ii= 7 , relres= 1.5259872603993356e-06 , err= nan
ii= 8 , relres= 2.6446590683829846e-07 , err= nan
ii= 9 , relres= 3.622846972801345e-08 , err= nan
ii= 10 , relres= 6.851309800695503e-09 , err= nan
ii= 11 , relres= 1.5518270035024447e-09 , err= nan
ii= 12 , relres= 2.0254683761807545e-10 , err= nan
ii= 13 , relres= 3.027152807057464e-11 , err= nan
FULL: psf1
ii= 0 , relres= 0.16639579138296742 , err= 0.1184221779732479
ii= 1 , relres= 0.03453561935484839 , err= 0.03425687831536721
ii= 2 , relres= 0.009896101571534359 , err= 0.006327351641420051
ii= 3 , relres= 0.0019353405192227935 , err= 0.0014214566440953562
ii= 4 , relres= 0.000396303910147345 , err= 0.00026511512818366346
ii= 5 , relres= 8.498646809840477e-05 , err= 6.2583604773793e-05
ii= 6 , relres= 2.008828041411699e-05 , err= 1.0983434904634412e-05
ii= 7 , relres= 3.850847234749055e-06 , err= 2.2069764548610295e-06
ii= 8 , relres= 7.51082912662502e-07 , err= 4.624160938824776e-07
ii= 9 , relres= 1.4000565461814448e-07 , err= 9.751977908098073e-08
ii= 10 , relres= 3.513537174371434e-08 , err= 2.0772636207393863e-08
FULL: psf5
ii= 0 , relres= 0.1509273972238743 , err= 0.09636572798866049
ii= 1 , relres= 0.02675314673030085 , err= 0.02715124670563428
ii= 2 , relres= 0.008310890265776154 , err= 0.004477226485547006
ii= 3 , relres= 0.0015022654550653162 , err= 0.0012170116086325932
ii= 4 , relres= 0.0002906980923375265 , err= 0.00019489862877196198
ii= 5 , relres= 5.4710991942412456e-05 , err= 3.953724209274585e-05
ii= 6 , relres= 1.0891235798846396e-05 , err= 7.606448269188764e-06
ii= 7 , relres= 1.7783453611322173e-06 , err= 1.2255400779749728e-06
ii= 8 , relres= 2.662075220902205e-07 , err= 1.7360569189296356e-07
ii= 9 , relres= 4.118160252604019e-08 , err= 2.614256561409042e-08
FULL: psf25
ii= 0 , relres= 0.1383521164310657 , err= 0.09113930322375664
ii= 1 , relres= 0.023384636402321708 , err= 0.025174419528118507
ii= 2 , relres= 0.007626503253600988 , err= 0.004128706191826303
```

```

ii= 3 , relres= 0.0013905921704479333 , err= 0.0012248801437226807
ii= 4 , relres= 0.0002492097731032591 , err= 0.0001761276933845757
ii= 5 , relres= 4.44580557489238e-05 , err= 3.68194769961367e-05
ii= 6 , relres= 1.0000022650027073e-05 , err= 7.029403036243099e-06
ii= 7 , relres= 1.5259872603993356e-06 , err= 1.2798892892125797e-06
ii= 8 , relres= 2.6446590683829846e-07 , err= 1.764369898481568e-07
ii= 9 , relres= 3.622846972801345e-08 , err= 2.8702746432927745e-08
FULL: reg
ii= 0 , relres= 0.9871196845824709 , err= 0.902366945702507
ii= 1 , relres= 0.9677600643800707 , err= 0.7908653140395532
ii= 2 , relres= 0.8475247615334461 , err= 0.6543566184772507
ii= 3 , relres= 0.743524213902122 , err= 0.5188554796614739
ii= 4 , relres= 0.6605078625611822 , err= 0.43128305979457876
ii= 5 , relres= 0.5572715383602906 , err= 0.3514124951058307
ii= 6 , relres= 0.4562107245816572 , err= 0.2925794699141824
ii= 7 , relres= 0.40704186518575064 , err= 0.24730247692923923
ii= 8 , relres= 0.330625672079774 , err= 0.19927176166007024
ii= 9 , relres= 0.28779284010239253 , err= 0.1607627276491558
ii= 10 , relres= 0.2265137224606285 , err= 0.13722363106981428
ii= 11 , relres= 0.18663835972899365 , err= 0.11418185203105194
ii= 12 , relres= 0.1501847502986533 , err= 0.09553898806928801
ii= 13 , relres= 0.12299301075520769 , err= 0.07427226320183047
ii= 14 , relres= 0.0981933639083499 , err= 0.0619773228350461
ii= 15 , relres= 0.0801420592328356 , err= 0.04979917159951038
ii= 16 , relres= 0.0621101556427307 , err= 0.037414894285361065
ii= 17 , relres= 0.04851424277223617 , err= 0.029991982105509213
ii= 18 , relres= 0.040941619283434386 , err= 0.024666903894876156
ii= 19 , relres= 0.03224337373823976 , err= 0.01840531310545477
ii= 20 , relres= 0.025960744660753838 , err= 0.014571428578680252
ii= 21 , relres= 0.019593649252567125 , err= 0.010820303778077016
ii= 22 , relres= 0.015413092114658803 , err= 0.008304443845956975
ii= 23 , relres= 0.012229596177753696 , err= 0.006542664170283625
ii= 24 , relres= 0.00982602789663709 , err= 0.005339174266002905
ii= 25 , relres= 0.00808913262515879 , err= 0.004496656165046377
ii= 26 , relres= 0.0075746995527976296 , err= 0.004093244724101771
ii= 27 , relres= 0.005505884816503708 , err= 0.0030787865169938002
ii= 28 , relres= 0.0045420637410944695 , err= 0.002482348627454785
ii= 29 , relres= 0.00419997026724292 , err= 0.0021141866447836853
ii= 30 , relres= 0.003256656138906133 , err= 0.0017534636332501925
ii= 31 , relres= 0.0024607984960748628 , err= 0.0013416535564411175
ii= 32 , relres= 0.0022151265778302563 , err= 0.0011169500762338502
ii= 33 , relres= 0.001893114683045189 , err= 0.000976715031492669
ii= 34 , relres= 0.0015025771639646357 , err= 0.000788081619322271
ii= 35 , relres= 0.0013127119781120103 , err= 0.0006773699812504157
ii= 36 , relres= 0.001083847985297835 , err= 0.0005466498841660706
ii= 37 , relres= 0.0008386308498144057 , err= 0.0004400977161597044
ii= 38 , relres= 0.0006356390845696548 , err= 0.00033164423080369237
ii= 39 , relres= 0.0004373560321994073 , err= 0.0002393732831056995
ii= 40 , relres= 0.00034276722792174615 , err= 0.00018750364053551975
ii= 41 , relres= 0.00028124494914581565 , err= 0.0001485149620849597
ii= 42 , relres= 0.00024927223250367135 , err= 0.00012938939675586887
ii= 43 , relres= 0.00019491099553873033 , err= 9.492816369498916e-05
ii= 44 , relres= 0.00013574007669295244 , err= 7.111582628461683e-05
ii= 45 , relres= 0.00012059866753226479 , err= 5.8913964870418904e-05
ii= 46 , relres= 9.639465059911855e-05 , err= 4.63715308283609e-05
ii= 47 , relres= 8.686031143209621e-05 , err= 4.182199318418399e-05
ii= 48 , relres= 6.530796452782048e-05 , err= 3.2353148807166323e-05
ii= 49 , relres= 4.7582595910438493e-05 , err= 2.3803877781959527e-05
ii= 50 , relres= 3.428199796969804e-05 , err= 1.6568087674000043e-05
ii= 51 , relres= 3.158074594569844e-05 , err= 1.5097053718714101e-05
ii= 52 , relres= 2.435618401772801e-05 , err= 1.1838053551957832e-05

```

```

ii= 53 , relres= 1.9461696585976688e-05 , err= 8.733150309278558e-06
ii= 54 , relres= 1.6353736529668548e-05 , err= 7.952322368216666e-06
ii= 55 , relres= 1.0997657104074888e-05 , err= 5.614186759769576e-06
ii= 56 , relres= 9.883037337427431e-06 , err= 4.694656360935976e-06
ii= 57 , relres= 7.96886952876463e-06 , err= 4.007451189686854e-06
ii= 58 , relres= 6.793911257198492e-06 , err= 3.158381296438083e-06
ii= 59 , relres= 5.244835616775351e-06 , err= 2.5299526183534577e-06
ii= 60 , relres= 3.7331850867488983e-06 , err= 1.8413891232754654e-06
ii= 61 , relres= 2.792965641380879e-06 , err= 1.3386239668471739e-06
ii= 62 , relres= 2.361146186832759e-06 , err= 1.1434207826189237e-06
ii= 63 , relres= 1.7253962263717667e-06 , err= 8.754871339943512e-07
ii= 64 , relres= 1.407561837638491e-06 , err= 6.131020616162522e-07
ii= 65 , relres= 1.1403964008654688e-06 , err= 5.458930579718101e-07
ii= 66 , relres= 9.9791002376895e-07 , err= 4.559653358395615e-07
ii= 67 , relres= 7.151955491963296e-07 , err= 3.4575802397679296e-07
ii= 68 , relres= 5.870456779299059e-07 , err= 2.8034986248004943e-07
ii= 69 , relres= 4.790879233366262e-07 , err= 2.4179078406927934e-07
ii= 70 , relres= 4.084432369173258e-07 , err= 1.9845187940181866e-07
ii= 71 , relres= 3.0492535331815833e-07 , err= 1.54035901987949e-07
ii= 72 , relres= 2.859623714453481e-07 , err= 1.1787003550592721e-07
ii= 73 , relres= 1.8414055889289e-07 , err= 9.312349748537558e-08
ii= 74 , relres= 1.4737482928148342e-07 , err= 7.091869622785533e-08
ii= 75 , relres= 1.371072718760321e-07 , err= 6.510905584592585e-08
ii= 76 , relres= 1.0707622113386795e-07 , err= 4.8310574432067164e-08
ii= 77 , relres= 8.781074224520285e-08 , err= 4.2485754191963515e-08
FULL: none
ii= 0 , relres= 1.0275588342466317 , err= 0.8999070796525145
ii= 1 , relres= 0.8409944161836395 , err= 0.8337730709982174
ii= 2 , relres= 0.7103978404680646 , err= 0.7675531477344127
ii= 3 , relres= 0.6264276148361952 , err= 0.7052455022817598
ii= 4 , relres= 0.5393527244174584 , err= 0.6349179449251804
ii= 5 , relres= 0.4802244552836064 , err= 0.5716881240173413
ii= 6 , relres= 0.4186385526697495 , err= 0.5112478672499603
ii= 7 , relres= 0.3525544790259425 , err= 0.4614393439190886
ii= 8 , relres= 0.311825034458517 , err= 0.407171753129128
ii= 9 , relres= 0.27925774628514416 , err= 0.3606850599246935
ii= 10 , relres= 0.2512276488620324 , err= 0.3164745602616241
ii= 11 , relres= 0.23208123098972194 , err= 0.2731011820129671
ii= 12 , relres= 0.19160018205680712 , err= 0.23894408263354563
ii= 13 , relres= 0.16896856764870039 , err= 0.20625685520423617
ii= 14 , relres= 0.15223359038280004 , err= 0.1789442930932841
ii= 15 , relres= 0.13101118484296448 , err= 0.15402628755616482
ii= 16 , relres= 0.1140659331314268 , err= 0.13403157929732945
ii= 17 , relres= 0.09965106157881014 , err= 0.1173835240132899
ii= 18 , relres= 0.08020738143284263 , err= 0.10419432956575299
ii= 19 , relres= 0.07261446226241386 , err= 0.09236722694155164
ii= 20 , relres= 0.06097765483962058 , err= 0.08218593498712114
ii= 21 , relres= 0.053157838805552055 , err= 0.07300582402376941
ii= 22 , relres= 0.045817819246633806 , err= 0.06487628464085346
ii= 23 , relres= 0.04165692681283653 , err= 0.05866826214688813
ii= 24 , relres= 0.03556715713145926 , err= 0.05311895387585516
ii= 25 , relres= 0.03132479851858174 , err= 0.04756316162326242
ii= 26 , relres= 0.025757235306023873 , err= 0.042854118029102745
ii= 27 , relres= 0.02334363484384259 , err= 0.038479510038785525
ii= 28 , relres= 0.02014438827590268 , err= 0.03449179329913079
ii= 29 , relres= 0.018398344526503865 , err= 0.031162372291953615
ii= 30 , relres= 0.016630096483285683 , err= 0.027780310816241906
ii= 31 , relres= 0.014879262142536279 , err= 0.024713248530415736
ii= 32 , relres= 0.013116147252399155 , err= 0.02187722521129143
ii= 33 , relres= 0.01207301761821022 , err= 0.01912859027326075
ii= 34 , relres= 0.011245792819546727 , err= 0.016836414153813133

```

```
ii= 35 , relres= 0.009858512806919087 , err= 0.014739112807758147
ii= 36 , relres= 0.008710925709157094 , err= 0.012634222847547843
ii= 37 , relres= 0.007734165611823531 , err= 0.01077894737378523
ii= 38 , relres= 0.006793447227652659 , err= 0.009282652894558535
ii= 39 , relres= 0.0056559663937856275 , err= 0.007890606664088955
ii= 40 , relres= 0.004950657139725292 , err= 0.006660732220327522
ii= 41 , relres= 0.0044445194199973 , err= 0.005753382413158796
ii= 42 , relres= 0.0045185289710885845 , err= 0.005089834863282344
ii= 43 , relres= 0.0033803852377408345 , err= 0.004519617456399227
ii= 44 , relres= 0.0029830843373536775 , err= 0.00394033977774514
ii= 45 , relres= 0.002552947403809403 , err= 0.0034120334252224923
ii= 46 , relres= 0.0020896932430610215 , err= 0.0029559625499584385
ii= 47 , relres= 0.0018171861233867734 , err= 0.002572836133825973
ii= 48 , relres= 0.0016216268942192739 , err= 0.0022441310684042704
ii= 49 , relres= 0.001358041108143199 , err= 0.001981401056167678
ii= 50 , relres= 0.0011678471898150327 , err= 0.0017459590964452763
ii= 51 , relres= 0.0010641718807092677 , err= 0.001523369524204435
ii= 52 , relres= 0.0008904884363105808 , err= 0.001308282274146481
ii= 53 , relres= 0.0007966574453745781 , err= 0.001099995325540781
ii= 54 , relres= 0.0007093166563143213 , err= 0.0009237415112286134
ii= 55 , relres= 0.0006650924968301236 , err= 0.0007895249488313629
ii= 56 , relres= 0.0005940252143162691 , err= 0.0007032228927017939
ii= 57 , relres= 0.00045674450996971037 , err= 0.0005964936956702076
ii= 58 , relres= 0.00041428495248427 , err= 0.0005007231614743615
ii= 59 , relres= 0.00033486017074288395 , err= 0.00041577423999337694
ii= 60 , relres= 0.0002826241965181618 , err= 0.00034548994126020117
ii= 61 , relres= 0.00024012299510807502 , err= 0.00028660989610335255
ii= 62 , relres= 0.00021761565170824135 , err= 0.00023804291546774008
ii= 63 , relres= 0.00019773603789988067 , err= 0.00020405128742703336
ii= 64 , relres= 0.00016765232408583576 , err= 0.0001797959005884633
ii= 65 , relres= 0.00013002881144082127 , err= 0.0001559135622204757
ii= 66 , relres= 0.00011392138905534542 , err= 0.00013574224303455703
ii= 67 , relres= 9.448034584181745e-05 , err= 0.00011734062569548404
ii= 68 , relres= 8.729258709754064e-05 , err= 0.00010279788135611953
ii= 69 , relres= 7.555401019361147e-05 , err= 9.071457977541913e-05
ii= 70 , relres= 6.73061555890406e-05 , err= 8.030611611255924e-05
ii= 71 , relres= 5.428316314245365e-05 , err= 6.915244201128561e-05
ii= 72 , relres= 4.4549298980434834e-05 , err= 5.781330225410701e-05
ii= 73 , relres= 4.515054067857573e-05 , err= 4.961563432875597e-05
ii= 74 , relres= 4.1283535881175505e-05 , err= 4.4150177866758115e-05
ii= 75 , relres= 3.199312001807863e-05 , err= 3.817699326823251e-05
ii= 76 , relres= 2.7908157413004033e-05 , err= 3.305595371139363e-05
ii= 77 , relres= 2.5973098954411017e-05 , err= 2.8970005431123e-05
ii= 78 , relres= 2.1125811303407907e-05 , err= 2.5448887503142013e-05
ii= 79 , relres= 1.688762236043251e-05 , err= 2.1550596260672833e-05
ii= 80 , relres= 1.4128372254058512e-05 , err= 1.8127575118754172e-05
ii= 81 , relres= 1.2002717180578498e-05 , err= 1.5068589625020596e-05
ii= 82 , relres= 1.0490916169073851e-05 , err= 1.2567992305674023e-05
ii= 83 , relres= 1.0110802805309692e-05 , err= 1.0583169796696933e-05
ii= 84 , relres= 8.670860140253534e-06 , err= 9.115515294041095e-06
ii= 85 , relres= 7.142155329792205e-06 , err= 7.703486793957131e-06
ii= 86 , relres= 5.5832987225680345e-06 , err= 6.4194259180203204e-06
ii= 87 , relres= 4.766191169390009e-06 , err= 5.338684085926798e-06
ii= 88 , relres= 4.061163804463273e-06 , err= 4.479886856776087e-06
ii= 89 , relres= 3.817052124537638e-06 , err= 3.927407490892488e-06
ii= 90 , relres= 2.8775165169587386e-06 , err= 3.3988672741169967e-06
ii= 91 , relres= 2.4168541383853716e-06 , err= 2.8720374373294996e-06
ii= 92 , relres= 1.9751268989879664e-06 , err= 2.393926820840104e-06
ii= 93 , relres= 1.9551535726887454e-06 , err= 2.0181994679056094e-06
ii= 94 , relres= 1.564201710271782e-06 , err= 1.764208613939185e-06
ii= 95 , relres= 1.3001577315732329e-06 , err= 1.4788454435322886e-06
```

```

ii= 96 , relres= 1.0671232328673716e-06 , err= 1.2370025758074078e-06
ii= 97 , relres= 1.0271825301295607e-06 , err= 1.0283076746483165e-06
ii= 98 , relres= 9.543362702166738e-07 , err= 8.736827310970009e-07
ii= 99 , relres= 7.86863464602444e-07 , err= 7.389007486373e-07
ii= 100 , relres= 6.464910564741401e-07 , err= 6.029311068882006e-07
ii= 101 , relres= 5.696683426591785e-07 , err= 5.133458912290001e-07
ii= 102 , relres= 4.3643367043118686e-07 , err= 4.3155997214429734e-07
ii= 103 , relres= 3.5367318107820265e-07 , err= 3.533866599967847e-07
ii= 104 , relres= 3.031637792664314e-07 , err= 2.9014189631418164e-07
ii= 105 , relres= 3.0539217276172095e-07 , err= 2.5768623785742253e-07
ii= 106 , relres= 2.1649082076824153e-07 , err= 2.2303427115835298e-07
ii= 107 , relres= 1.6471519054204452e-07 , err= 1.8966978155427528e-07
ii= 108 , relres= 1.3688842094774462e-07 , err= 1.6010657421281481e-07
ii= 109 , relres= 1.1541640788914422e-07 , err= 1.3792615843097458e-07
ii= 110 , relres= 1.0342260117803686e-07 , err= 1.1786081694677843e-07
ii= 111 , relres= 8.87357622042885e-08 , err= 1.0213786938665213e-07
gamma= 49999.99999999999
nb= 1 , good_iter_psf= 9
nb= 5 , good_iter_psf= 9
nb= 25 , good_iter_psf= 9
good_iter_reg= 67
good_iter_none= 99
--- GAMMA ---: 23207.944168063907
Building Regularization H-Matrix
    matrix has dimension 1416 x 1416
        no of non-zeroes = 9746
        matrix is         real valued
        format           = non symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
    |S|_F             = 3.74179e+06
        sparsity constant = 20
        size of H-matrix = 4.06 MB
    |A|_F             = 3.74179e+06
|S-A|_2 = 5.56695e-09
    matrix has dimension — H-matrix inverse ( rtol = 1416 x 1416
        no of non-zeroes = 9746
        matrix is         real valued
        format           = symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
    |S|_F             = 5.18561e+06
        sparsity constant = 20
        size of H-matrix = 2.29 MB
    |A|_F             = 5.18561e+06
|S-A|_2 = 4.66653e-09
1e-06 , atol = 1e-14 , overwrite= False )
    done in 11.863934755325317
    size of inverse = 3361874 bytes

— H-matrix multiplication C=A*B
    done in 20.29s
    size of C = 3.92 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
    done in 29.31s
    size of C = 8.61 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
    done in 27.33s
    size of LU factor = 23.54 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )

```

FULL: get truth:

```

done in 27.08s
size of LU factor = 23.62 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )

0.11517711752836998 , err= nan=====
(5.83 GB)
done in 27.03s
=====

ii= 0 , relres= ] 42% ETA 15 s
ii= 1 , relres= 0.02148146582855472 , err= nan
ii= 2 , relres= 0.005408043843187221 , err= nan
ii= 3 , relres= 0.001281608831989667 , err= nan
ii= 4 , relres= 0.00036568867532388386 , err= nan
ii= 5 , relres= 8.602282042738099e-05 , err= nan
ii= 6 , relres= 1.6082968588473576e-05 , err= nan
ii= 7 , relres= 3.640701860310932e-06 , err= nan
ii= 8 , relres= 1.0153250718224576e-06 , err= nan
ii= 9 , relres= 2.5443655835976475e-07 , err= nan
ii= 10 , relres= 5.179577051049449e-08 , err= nan
ii= 11 , relres= 1.0455567008272127e-08 , err= nan
ii= 12 , relres= 1.7471353152238015e-09 , err= nan
ii= 13 , relres= 2.839873457241171e-10 , err= nan
ii= 14 , relres= 5.1358792938727015e-11 , err= nan
=====

FULL: psf1
ii= 0 , relres= 0.17816842281875817 , err= 0.12090514345696746
ii= 1 , relres= 0.05540071640759563 , err= 0.04034514548079911
ii= 2 , relres= 0.020985513926772614 , err= 0.01222033714351342
ii= 3 , relres= 0.007276864020512542 , err= 0.003917852104519294
ii= 4 , relres= 0.0025418519522746597 , err= 0.0010168289990387315
ii= 5 , relres= 0.0009030726621073669 , err= 0.0003042820409281799
ii= 6 , relres= 0.0003005226510888256 , err= 0.00011104311286829904
ii= 7 , relres= 8.723601710191875e-05 , err= 3.608331931843496e-05
ii= 8 , relres= 2.7999490096127277e-05 , err= 1.0533098175877337e-05
ii= 9 , relres= 1.0309496197709668e-05 , err= 3.341003153069435e-06
ii= 10 , relres= 3.2717122683334497e-06 , err= 1.1482689913482804e-06
ii= 11 , relres= 9.009606414234035e-07 , err= 3.73456169076871e-07
ii= 12 , relres= 2.544200154313423e-07 , err= 1.0541959792608687e-07
ii= 13 , relres= 7.433418574173573e-08 , err= 3.218595469240936e-08
=====

FULL: psf5
ii= 0 , relres= 0.15193337232749052 , err= 0.09281450003800683
ii= 1 , relres= 0.03977774003960425 , err= 0.022944485817206896
ii= 2 , relres= 0.01267859111097554 , err= 0.006670719837648804
ii= 3 , relres= 0.004154767807356125 , err= 0.002021405423415811
ii= 4 , relres= 0.00137153235654022 , err= 0.0007352955860112328
ii= 5 , relres= 0.0003557893022708744 , err= 0.00017842826375372346
ii= 6 , relres= 9.363557751180484e-05 , err= 4.12310084876987e-05
ii= 7 , relres= 2.395796330591968e-05 , err= 9.994642994492685e-06
ii= 8 , relres= 6.486809489507885e-06 , err= 2.2555603710091916e-06
ii= 9 , relres= 1.7922296960749841e-06 , err= 6.133315730933351e-07
ii= 10 , relres= 5.027155552576126e-07 , err= 1.718576274351287e-07
ii= 11 , relres= 1.4675381409357218e-07 , err= 5.5748739460774936e-08
ii= 12 , relres= 4.727231550615544e-08 , err= 1.872602552830782e-08
=====

FULL: psf25
ii= 0 , relres= 0.11517711752836998 , err= 0.08674197923655642
ii= 1 , relres= 0.02148146582855472 , err= 0.017230206063214144
ii= 2 , relres= 0.005408043843187221 , err= 0.0026841857131275192
ii= 3 , relres= 0.001281608831989667 , err= 0.0007825857537204777
ii= 4 , relres= 0.00036568867532388386 , err= 0.00024636474450711096
ii= 5 , relres= 8.602282042738099e-05 , err= 4.382124753120409e-05
=====
```

```

ii= 6 , relres= 1.6082968588473576e-05 , err= 1.0081300122433198e-05
ii= 7 , relres= 3.640701860310932e-06 , err= 1.9094290775942938e-06
ii= 8 , relres= 1.0153250718224576e-06 , err= 4.441844022281841e-07
ii= 9 , relres= 2.5443655835976475e-07 , err= 1.1473391436772851e-07
ii= 10 , relres= 5.179577051049449e-08 , err= 2.5551745313428085e-08
FULL: reg
ii= 0 , relres= 1.0314001993521142 , err= 0.9736311399981653
ii= 1 , relres= 1.0817392618053512 , err= 0.9371120312599159
ii= 2 , relres= 1.053305724669339 , err= 0.8810727277904675
ii= 3 , relres= 1.0601715461763879 , err= 0.8100019732718222
ii= 4 , relres= 1.0549899695936926 , err= 0.7512434985608044
ii= 5 , relres= 1.0081830778155887 , err= 0.6865701176840099
ii= 6 , relres= 0.9287447779602797 , err= 0.6274872328170554
ii= 7 , relres= 0.9191168012590027 , err= 0.5776155686433484
ii= 8 , relres= 0.8558044131262904 , err= 0.5137824864304318
ii= 9 , relres= 0.8470621297219276 , err= 0.45668837914857247
ii= 10 , relres= 0.7377596331032681 , err= 0.4146768206838063
ii= 11 , relres= 0.6790904425406629 , err= 0.3734199788355665
ii= 12 , relres= 0.6086061707532473 , err= 0.3373717612596997
ii= 13 , relres= 0.5664532292246415 , err= 0.2965476060351443
ii= 14 , relres= 0.49759807732248384 , err= 0.26977679476234867
ii= 15 , relres= 0.45905122155741623 , err= 0.24078178334284267
ii= 16 , relres= 0.41137604071303413 , err= 0.20872938972855354
ii= 17 , relres= 0.35969048923719404 , err= 0.1874573685223384
ii= 18 , relres= 0.33583914190774417 , err= 0.1707886121475722
ii= 19 , relres= 0.3066374377521679 , err= 0.14865699551546013
ii= 20 , relres= 0.2781694008556073 , err= 0.13258391085196855
ii= 21 , relres= 0.24281971377865558 , err= 0.1149507084727431
ii= 22 , relres= 0.21813521496459928 , err= 0.10122375937974921
ii= 23 , relres= 0.1962458829815459 , err= 0.09020333787257517
ii= 24 , relres= 0.17691248035365106 , err= 0.08181776562723873
ii= 25 , relres= 0.1636684991730219 , err= 0.07622161565682194
ii= 26 , relres= 0.15533303097069082 , err= 0.07237188670497116
ii= 27 , relres= 0.1343859137771625 , err= 0.06288949390633729
ii= 28 , relres= 0.1234184173081526 , err= 0.05682185072206828
ii= 29 , relres= 0.12267582638034645 , err= 0.05212883962581137
ii= 30 , relres= 0.10690478823839016 , err= 0.04857251542966048
ii= 31 , relres= 0.09164285994484246 , err= 0.04316916329497405
ii= 32 , relres= 0.08824355799305213 , err= 0.039449498487295516
ii= 33 , relres= 0.0832283424758685 , err= 0.03755047269510324
ii= 34 , relres= 0.07414975240979609 , err= 0.033929809271633436
ii= 35 , relres= 0.0701860862353854 , err= 0.03110380240276784
ii= 36 , relres= 0.06556554246636005 , err= 0.02868554804856923
ii= 37 , relres= 0.05731423962801023 , err= 0.025953800794536516
ii= 38 , relres= 0.05109730853454376 , err= 0.022597375641880805
ii= 39 , relres= 0.0417493433796301 , err= 0.019241677137610533
ii= 40 , relres= 0.036979197757596484 , err= 0.017153375957686078
ii= 41 , relres= 0.03401267466831979 , err= 0.015436303286552867
ii= 42 , relres= 0.032353667072194676 , err= 0.01448765208448292
ii= 43 , relres= 0.02974623050658223 , err= 0.01247472775872736
ii= 44 , relres= 0.0242456082755347 , err= 0.010724616155511844
ii= 45 , relres= 0.023713827523174424 , err= 0.00985299002274617
ii= 46 , relres= 0.021831582976942016 , err= 0.008938926835052347
ii= 47 , relres= 0.019872882272895416 , err= 0.0084395167928145
ii= 48 , relres= 0.01717987297581813 , err= 0.007411410265214843
ii= 49 , relres= 0.01467709166922793 , err= 0.006416984931899853
ii= 50 , relres= 0.01273087150899139 , err= 0.005408878329341911
ii= 51 , relres= 0.012410116440436646 , err= 0.005176637187921641
ii= 52 , relres= 0.010868370188078895 , err= 0.004616329910514714
ii= 53 , relres= 0.009511825676474468 , err= 0.0039481560953943005
ii= 54 , relres= 0.009233975771041892 , err= 0.0037720878837259877

```

```
ii= 55 , relres= 0.00732685752499731 , err= 0.003236918122176307
ii= 56 , relres= 0.0071404827643530375 , err= 0.0029663177611245688
ii= 57 , relres= 0.006304459501690799 , err= 0.0027064118227300097
ii= 58 , relres= 0.006142321259981195 , err= 0.0024936872767119247
ii= 59 , relres= 0.005304497231988018 , err= 0.0022452966167225454
ii= 60 , relres= 0.00447945897551843 , err= 0.0019244859301413566
ii= 61 , relres= 0.004008137635776966 , err= 0.0016692866656273344
ii= 62 , relres= 0.003658128860326282 , err= 0.001552930808397004
ii= 63 , relres= 0.0031516604495623684 , err= 0.0013609341656445032
ii= 64 , relres= 0.0032636215274034768 , err= 0.0012979417369122096
ii= 65 , relres= 0.0026904716964801663 , err= 0.0010896770044204014
ii= 66 , relres= 0.0025673670526994864 , err= 0.0009959151050870402
ii= 67 , relres= 0.0021514882296593558 , err= 0.000864777504158228
ii= 68 , relres= 0.001996325122824759 , err= 0.0007818185623016512
ii= 69 , relres= 0.0017812185064679062 , err= 0.0007225318086480822
ii= 70 , relres= 0.0016859495400503883 , err= 0.0006580037713083794
ii= 71 , relres= 0.0014368039776582286 , err= 0.0005805926525953248
ii= 72 , relres= 0.0015025876489915386 , err= 0.0005402811669273656
ii= 73 , relres= 0.0011156414119935986 , err= 0.0004542017784603198
ii= 74 , relres= 0.0009923392522070587 , err= 0.0003994070624338161
ii= 75 , relres= 0.000987196113098874 , err= 0.0003686580754018352
ii= 76 , relres= 0.0008501390342258118 , err= 0.00032965167620711074
ii= 77 , relres= 0.0007841056955338922 , err= 0.0003171932357663307
ii= 78 , relres= 0.0006723169556572508 , err= 0.00027492886799387374
ii= 79 , relres= 0.0006427788625650269 , err= 0.00025364498568074257
ii= 80 , relres= 0.0005620967884837165 , err= 0.00021780686484423615
ii= 81 , relres= 0.000546056771344349 , err= 0.00020610270485219479
ii= 82 , relres= 0.0004835631608036205 , err= 0.0001795131296638492
ii= 83 , relres= 0.0004389580824185116 , err= 0.00016259635798301285
ii= 84 , relres= 0.00040475861691388897 , err= 0.00014139668271588528
ii= 85 , relres= 0.00036719354598304125 , err= 0.00013522468259236754
ii= 86 , relres= 0.00032557147742807746 , err= 0.00011981910092793978
ii= 87 , relres= 0.0002868329774940355 , err= 0.0001101236273087959
ii= 88 , relres= 0.0002466674869622459 , err= 9.40622998747792e-05
ii= 89 , relres= 0.0002106387931871976 , err= 8.00051975307756e-05
ii= 90 , relres= 0.0001923205304843908 , err= 7.364555798624071e-05
ii= 91 , relres= 0.00017049769596974833 , err= 6.003823573035013e-05
ii= 92 , relres= 0.000154446918636404 , err= 5.464034551073725e-05
ii= 93 , relres= 0.00014097811268597675 , err= 5.187003205401824e-05
ii= 94 , relres= 0.00012219529228388746 , err= 4.65174790439597e-05
ii= 95 , relres= 0.00010819813548538998 , err= 3.837348218173089e-05
ii= 96 , relres= 0.00010195703949976323 , err= 3.627083084880272e-05
ii= 97 , relres= 8.618849552057708e-05 , err= 2.9325842377650535e-05
ii= 98 , relres= 8.029674777765321e-05 , err= 2.77553011251438e-05
ii= 99 , relres= 7.511027007802646e-05 , err= 2.5895969708045147e-05
ii= 100 , relres= 6.870102883472685e-05 , err= 2.2386065026606457e-05
ii= 101 , relres= 5.880749621338689e-05 , err= 2.074405692715448e-05
ii= 102 , relres= 5.3729934908954324e-05 , err= 1.8307957263523528e-05
ii= 103 , relres= 4.720813687409501e-05 , err= 1.7582238133506114e-05
ii= 104 , relres= 4.700192932408584e-05 , err= 1.6205701943753602e-05
ii= 105 , relres= 4.075815386878953e-05 , err= 1.5087351502015257e-05
ii= 106 , relres= 3.7185006246140646e-05 , err= 1.3749721165104933e-05
ii= 107 , relres= 3.475330401906126e-05 , err= 1.2325703020781267e-05
ii= 108 , relres= 3.0040656733568427e-05 , err= 1.15311501832773e-05
ii= 109 , relres= 2.7917702235339103e-05 , err= 9.817008116344842e-06
ii= 110 , relres= 2.4470264437135462e-05 , err= 8.747516214181802e-06
ii= 111 , relres= 2.3090708370651085e-05 , err= 7.74422246054125e-06
ii= 112 , relres= 1.8680068214266095e-05 , err= 6.73566319115665e-06
ii= 113 , relres= 1.7519154309451643e-05 , err= 5.960586485719063e-06
ii= 114 , relres= 1.4945555574530164e-05 , err= 5.2555167864389134e-06
ii= 115 , relres= 1.4109136997128233e-05 , err= 4.951767141532062e-06
```

```

ii= 116 , relres= 1.3449593428495162e-05 , err= 4.583928886720301e-06
ii= 117 , relres= 1.099293058956283e-05 , err= 4.049842194541941e-06
ii= 118 , relres= 9.87409773460389e-06 , err= 3.3539184750357016e-06
ii= 119 , relres= 9.090654888329939e-06 , err= 3.0042581763765164e-06
ii= 120 , relres= 8.509479630613683e-06 , err= 2.8698634476224476e-06
ii= 121 , relres= 7.0830991105822356e-06 , err= 2.5136931952182018e-06
ii= 122 , relres= 7.059457233786295e-06 , err= 2.360538660689048e-06
ii= 123 , relres= 6.90692735308404e-06 , err= 2.1625952590165206e-06
ii= 124 , relres= 5.263142549225852e-06 , err= 1.8904244620603428e-06
ii= 125 , relres= 4.4544226675709e-06 , err= 1.5104491970075801e-06
ii= 126 , relres= 4.456776260467184e-06 , err= 1.432987400927604e-06
ii= 127 , relres= 3.5388173557920887e-06 , err= 1.2354490450121035e-06
ii= 128 , relres= 3.1631183787390593e-06 , err= 1.1259735711707843e-06
ii= 129 , relres= 3.064520452704203e-06 , err= 1.021129359520497e-06
ii= 130 , relres= 2.4989136410055245e-06 , err= 9.381163312844663e-07
ii= 131 , relres= 2.2114571169458743e-06 , err= 7.832179607188864e-07
ii= 132 , relres= 2.0459297628169776e-06 , err= 7.282288481040017e-07
ii= 133 , relres= 1.8023755245629737e-06 , err= 6.096685782136523e-07
ii= 134 , relres= 1.6094663958887925e-06 , err= 5.436316346957559e-07
ii= 135 , relres= 1.500866551951219e-06 , err= 5.182771155389678e-07
ii= 136 , relres= 1.4681353808291686e-06 , err= 4.768792469511364e-07
ii= 137 , relres= 1.1555773869172256e-06 , err= 4.181384951349125e-07
ii= 138 , relres= 1.091654461430524e-06 , err= 3.8151716798747057e-07
ii= 139 , relres= 9.173759064296854e-07 , err= 3.320265729968183e-07
ii= 140 , relres= 9.285493127426328e-07 , err= 3.1335131096094233e-07
ii= 141 , relres= 8.152955999865459e-07 , err= 2.7908017380601096e-07
ii= 142 , relres= 6.92471237676042e-07 , err= 2.4764229025237485e-07
ii= 143 , relres= 6.620214404248815e-07 , err= 2.383981302391996e-07
ii= 144 , relres= 6.55987826171992e-07 , err= 2.1550121151699947e-07
ii= 145 , relres= 5.294434529371899e-07 , err= 1.8832045617610288e-07
ii= 146 , relres= 5.021727455997936e-07 , err= 1.778462116592043e-07
ii= 147 , relres= 4.1232804339039074e-07 , err= 1.5041573931119098e-07
ii= 148 , relres= 3.561926190032515e-07 , err= 1.3764736832242616e-07
ii= 149 , relres= 3.512788505795696e-07 , err= 1.274389594349879e-07
ii= 150 , relres= 3.064207367696994e-07 , err= 1.1666825173571816e-07
ii= 151 , relres= 2.798748061820176e-07 , err= 1.0977049185475779e-07
ii= 152 , relres= 2.2571917494289003e-07 , err= 8.337051849061077e-08
ii= 153 , relres= 2.1439429883935227e-07 , err= 7.581228693961588e-08
ii= 154 , relres= 1.832198293523437e-07 , err= 6.602328269309373e-08
ii= 155 , relres= 1.6396370400368058e-07 , err= 6.010476678626903e-08
ii= 156 , relres= 1.6599236286186522e-07 , err= 5.658356029435076e-08
ii= 157 , relres= 1.5086907270601972e-07 , err= 5.1470750382672185e-08
ii= 158 , relres= 1.3552021758267122e-07 , err= 4.5585057608170195e-08
ii= 159 , relres= 1.1558890047148515e-07 , err= 4.2847642772538913e-08
ii= 160 , relres= 1.1786316291988713e-07 , err= 4.005013988705652e-08
ii= 161 , relres= 1.0535358418410726e-07 , err= 3.532321581357731e-08
ii= 162 , relres= 9.11387430009941e-08 , err= 3.222818222928233e-08
FULL: none
ii= 0 , relres= 0.9016866253138327 , err= 0.8956376033485537
ii= 1 , relres= 0.7079822849819322 , err= 0.8232848206988882
ii= 2 , relres= 0.6268633261596144 , err= 0.7453662622530225
ii= 3 , relres= 0.5450005550902804 , err= 0.675604145171504
ii= 4 , relres= 0.4828401570297935 , err= 0.5972287668351736
ii= 5 , relres= 0.42268463580588445 , err= 0.5361650940608499
ii= 6 , relres= 0.3630598335327528 , err= 0.47799422688678417
ii= 7 , relres= 0.313760618302853 , err= 0.41724622740411155
ii= 8 , relres= 0.2682864519395344 , err= 0.36261860551123504
ii= 9 , relres= 0.23043823054703938 , err= 0.31001448531599696
ii= 10 , relres= 0.19209747682802003 , err= 0.2661965319337563
ii= 11 , relres= 0.1633337721830288 , err= 0.22573937288128332
ii= 12 , relres= 0.1415087039474275 , err= 0.1917089124625161

```

```
ii= 13 , relres= 0.11846586873167693 , err= 0.16289001583218887
ii= 14 , relres= 0.10454404793454526 , err= 0.13801263729686225
ii= 15 , relres= 0.09271379740932406 , err= 0.1178955123621351
ii= 16 , relres= 0.07894508673167895 , err= 0.10147773042416526
ii= 17 , relres= 0.06829190778608175 , err= 0.08684655350128384
ii= 18 , relres= 0.05666196191861443 , err= 0.0743783595490414
ii= 19 , relres= 0.047840433597057336 , err= 0.06397192265179755
ii= 20 , relres= 0.04133990535472379 , err= 0.05505521706307297
ii= 21 , relres= 0.033906666326095056 , err= 0.04822817021383358
ii= 22 , relres= 0.027508567818346024 , err= 0.042144223782631676
ii= 23 , relres= 0.023008624898397632 , err= 0.03707293456399553
ii= 24 , relres= 0.019776193919412568 , err= 0.03257476211349055
ii= 25 , relres= 0.01737579399999922 , err= 0.028403073827618166
ii= 26 , relres= 0.0154410870401414 , err= 0.024402575193129446
ii= 27 , relres= 0.013922435430803497 , err= 0.020544626078297937
ii= 28 , relres= 0.012526921726792584 , err= 0.017173115647674098
ii= 29 , relres= 0.011643941993401045 , err= 0.01430678825073565
ii= 30 , relres= 0.009525319635897068 , err= 0.011655405895498131
ii= 31 , relres= 0.007982339945942106 , err= 0.009419346268302882
ii= 32 , relres= 0.007390665092975415 , err= 0.007793355744248472
ii= 33 , relres= 0.006520658392157475 , err= 0.006805068341273801
ii= 34 , relres= 0.004927742241255309 , err= 0.005728339002329435
ii= 35 , relres= 0.003858790337997701 , err= 0.0048959925004912405
ii= 36 , relres= 0.0031325155392480353 , err= 0.004207308461758687
ii= 37 , relres= 0.002653450101890085 , err= 0.0035800810635977045
ii= 38 , relres= 0.002308765723176363 , err= 0.0030460098184822023
ii= 39 , relres= 0.001919543892294502 , err= 0.0025653923172518863
ii= 40 , relres= 0.0016422789055171307 , err= 0.002166735717673734
ii= 41 , relres= 0.0013402705698753903 , err= 0.001849903340754105
ii= 42 , relres= 0.0011263793725955764 , err= 0.0015577471350701423
ii= 43 , relres= 0.001010009363018113 , err= 0.001313700841314764
ii= 44 , relres= 0.000827438802579377 , err= 0.001123315993616223
ii= 45 , relres= 0.0007746082874389203 , err= 0.0009508015478260984
ii= 46 , relres= 0.0006651584795273035 , err= 0.000834511176863373
ii= 47 , relres= 0.0005399115683058383 , err= 0.0007091976657017237
ii= 48 , relres= 0.0004526058318269786 , err= 0.0005953027073743066
ii= 49 , relres= 0.0003745581779179325 , err= 0.0004906136348623826
ii= 50 , relres= 0.00032607208950622703 , err= 0.00040013904468922957
ii= 51 , relres= 0.00027893611941530406 , err= 0.0003307192146754042
ii= 52 , relres= 0.00022012835203081164 , err= 0.0002734451246343865
ii= 53 , relres= 0.0001874380861695361 , err= 0.0002265635527288637
ii= 54 , relres= 0.00016334176328057707 , err= 0.00018812252661081985
ii= 55 , relres= 0.0001602172119997639 , err= 0.00016166724209009458
ii= 56 , relres= 0.00012988486283874314 , err= 0.000140018686043579
ii= 57 , relres= 9.580733053260724e-05 , err= 0.00011774679339710124
ii= 58 , relres= 7.985060390916751e-05 , err= 9.66113842018673e-05
ii= 59 , relres= 6.772349608848677e-05 , err= 8.120954679112881e-05
ii= 60 , relres= 5.7878128926798284e-05 , err= 6.852380241458345e-05
ii= 61 , relres= 5.0807042797998506e-05 , err= 5.8099122936975765e-05
ii= 62 , relres= 4.268632733957667e-05 , err= 5.029649709881099e-05
ii= 63 , relres= 3.603068062672646e-05 , err= 4.2799001762483397e-05
ii= 64 , relres= 2.8695588739992513e-05 , err= 3.5664161970955734e-05
ii= 65 , relres= 2.419679590362283e-05 , err= 2.9344259553107796e-05
ii= 66 , relres= 1.941409780377762e-05 , err= 2.4661730909558463e-05
ii= 67 , relres= 1.6338328853774675e-05 , err= 2.0688427494073648e-05
ii= 68 , relres= 1.3811945471214888e-05 , err= 1.758071239669068e-05
ii= 69 , relres= 1.1118932740095157e-05 , err= 1.4872546112612344e-05
ii= 70 , relres= 9.462089700058013e-06 , err= 1.257611851744005e-05
ii= 71 , relres= 7.724505677783268e-06 , err= 1.0758149137179229e-05
ii= 72 , relres= 6.5214300572066574e-06 , err= 9.247615341653093e-06
ii= 73 , relres= 5.361419094162881e-06 , err= 7.928557245120367e-06
```

```

ii= 74 , relres= 4.6937891588639445e-06 , err= 6.89531970507109e-06
ii= 75 , relres= 4.417312477657967e-06 , err= 5.870717530394167e-06
ii= 76 , relres= 3.846315465796947e-06 , err= 5.071049557161736e-06
ii= 77 , relres= 3.0809833068582155e-06 , err= 4.301312752169474e-06
ii= 78 , relres= 3.082430163424823e-06 , err= 3.7162290429546707e-06
ii= 79 , relres= 2.506932708149713e-06 , err= 3.3029436700002918e-06
ii= 80 , relres= 2.03904995178977e-06 , err= 2.925996632625638e-06
ii= 81 , relres= 1.7378844797217765e-06 , err= 2.5252512519990953e-06
ii= 82 , relres= 1.7401655962229581e-06 , err= 2.1912772536230004e-06
ii= 83 , relres= 1.377559750306969e-06 , err= 1.9028338037515708e-06
ii= 84 , relres= 1.1159648259815354e-06 , err= 1.620002344022047e-06
ii= 85 , relres= 1.0394645054819876e-06 , err= 1.3535874677283865e-06
ii= 86 , relres= 8.707791400890039e-07 , err= 1.1456594680455448e-06
ii= 87 , relres= 7.632719269261381e-07 , err= 9.658692511079576e-07
ii= 88 , relres= 6.453664163538615e-07 , err= 8.102566889098004e-07
ii= 89 , relres= 5.362807340854288e-07 , err= 6.748726224480961e-07
ii= 90 , relres= 4.478630367205074e-07 , err= 5.458181692747235e-07
ii= 91 , relres= 3.794147274756073e-07 , err= 4.463423501548611e-07
ii= 92 , relres= 2.881130474646653e-07 , err= 3.68371211372896e-07
ii= 93 , relres= 2.5102751385657305e-07 , err= 3.046469720741869e-07
ii= 94 , relres= 2.2786696522018602e-07 , err= 2.618646809512753e-07
ii= 95 , relres= 1.7845264499953434e-07 , err= 2.2537175905203444e-07
ii= 96 , relres= 1.484063404857158e-07 , err= 1.9167662169007806e-07
ii= 97 , relres= 1.2050757711382597e-07 , err= 1.6580147310410476e-07
ii= 98 , relres= 9.899170294704616e-08 , err= 1.4216827857079788e-07
gamma= 23207.944168063907
nb= 1 , good_iter_psf= 12
nb= 5 , good_iter_psf= 11
nb= 25 , good_iter_psf= 10
good_iter_reg= 140
good_iter_none= 87
--- GAMMA ---: 10772.17345015941
Building Regularization H-Matrix
    matrix has dimension 1416 x 1416
        no of non-zeroes      = 9746
        matrix is              real valued
        format                 = non symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
    |S|_F                  = 1.73678e+06
        sparsity constant = 20
        size of H-matrix  = 4.06 MB
    |A|_F                  = 1.73678e+06
|S-A|_2 = 3.96925e-09
matrix has dimension — H-matrix inverse ( rtol = 1416 x 1416
    no of non-zeroes      = 9746
    matrix is              real valued
    format                 = symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
    |S|_F                  = 5.18561e+06
        sparsity constant = 20
        size of H-matrix  = 2.29 MB
    |A|_F                  = 5.18561e+06
|S-A|_2 = 4.66653e-09
1e-06 , atol = 1e-14 , overwrite= False )
done in 12.12728238105774
size of inverse = 3361874 bytes

— H-matrix multiplication C=A*B
    done in 20.55s
    size of C = 3.90 MB

```

```

— H-matrix multiplication C=A*B
    done in 28.55s
    size of C = 8.57 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
    done in 26.95s
    size of LU factor = 23.61 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
[=====] 17% ETA 21 s           get truth:
    done in 26.95s
    size of LU factor = 23.76 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
    done in 26.71s
    size of LU factor = 23.50 MB
ii= 0 , relres= 0.2089358923598629 , err= nan
ii= 1 , relres= 0.06621337629863569 , err= nan
ii= 2 , relres= 0.034294968080575416 , err= nan
ii= 3 , relres= 0.0119106229786256 , err= nan
ii= 4 , relres= 0.004319800842034016 , err= nan
ii= 5 , relres= 0.0020043554367774503 , err= nan
ii= 6 , relres= 0.0009317779337534802 , err= nan
ii= 7 , relres= 0.0003737609057406779 , err= nan
ii= 8 , relres= 0.00012596511633267338 , err= nan
ii= 9 , relres= 4.451323089545507e-05 , err= nan
ii= 10 , relres= 1.9777425407545156e-05 , err= nan
ii= 11 , relres= 8.087868100767932e-06 , err= nan
ii= 12 , relres= 2.8531873962455266e-06 , err= nan
ii= 13 , relres= 1.0582328806136423e-06 , err= nan
ii= 14 , relres= 3.5617201598715856e-07 , err= nan
ii= 15 , relres= 1.1065311979776553e-07 , err= nan
ii= 16 , relres= 3.3033325319849133e-08 , err= nan
ii= 17 , relres= 1.0966278671498225e-08 , err= nan
ii= 18 , relres= 4.2341384163326815e-09 , err= nan
ii= 19 , relres= 1.3712510854683594e-09 , err= nan
ii= 20 , relres= 3.9307010519649176e-10 , err= nan
ii= 21 , relres= 1.1433420514011479e-10 , err= nan
ii= 22 , relres= 3.48521084348836e-11 , err= nan
FULL: psf1
ii= 0 , relres= 0.30138487708576434 , err= 0.19256366747644418
ii= 1 , relres= 0.13348168084339215 , err= 0.071963223723447
ii= 2 , relres= 0.07059043895649138 , err= 0.034022262222974
ii= 3 , relres= 0.03540756562048775 , err= 0.015735549103960956
ii= 4 , relres= 0.019342041856021067 , err= 0.007695725743463938
ii= 5 , relres= 0.010074645853215871 , err= 0.003925691534437133
ii= 6 , relres= 0.005628010299582792 , err= 0.0018545632905642047
ii= 7 , relres= 0.002896800622101762 , err= 0.0010686251817702656
ii= 8 , relres= 0.001434588489320567 , err= 0.00048584713712624403
ii= 9 , relres= 0.0007024012257350128 , err= 0.00024270278294286288
ii= 10 , relres= 0.00035715578341647357 , err= 0.0001199006893522183
ii= 11 , relres= 0.00018134641578592854 , err= 5.664504066942048e-05
ii= 12 , relres= 8.831512967885545e-05 , err= 3.0340841096918758e-05
ii= 13 , relres= 4.5170139388768346e-05 , err= 1.5001807580643879e-05
ii= 14 , relres= 2.401816201854885e-05 , err= 8.596164773366936e-06
ii= 15 , relres= 1.2352300816797617e-05 , err= 4.098242874093199e-06
ii= 16 , relres= 6.265510602580413e-06 , err= 2.22366868184824e-06
ii= 17 , relres= 3.237735924515832e-06 , err= 1.1057878838304744e-06
ii= 18 , relres= 1.5808973164780213e-06 , err= 5.462656790667951e-07
ii= 19 , relres= 6.917320559833508e-07 , err= 2.6670792206620877e-07
ii= 20 , relres= 3.1527614678317624e-07 , err= 1.0799234631241283e-07

```

```

ii= 21 , relres= 1.4532901807456143e-07 , err= 4.936726004580059e-08
ii= 22 , relres= 7.156370427634768e-08 , err= 2.3852686974008e-08
FULL: psf5
ii= 0 , relres= 0.25901949130682733 , err= 0.16620944955837644
ii= 1 , relres= 0.09968380195270705 , err= 0.036098661035613266
ii= 2 , relres= 0.05285718729732039 , err= 0.01552662325244382
ii= 3 , relres= 0.025749192740229996 , err= 0.008685872555228983
ii= 4 , relres= 0.011773205919940017 , err= 0.003686688270822266
ii= 5 , relres= 0.005912923538929713 , err= 0.0017714533336197753
ii= 6 , relres= 0.002838402371731087 , err= 0.0009217318550721176
ii= 7 , relres= 0.0013683099548006722 , err= 0.00047001352411096613
ii= 8 , relres= 0.0006335463095734368 , err= 0.00019641174167518932
ii= 9 , relres= 0.00027899767783840564 , err= 8.447195253684959e-05
ii= 10 , relres= 0.00012651544228986422 , err= 3.895086924441062e-05
ii= 11 , relres= 5.431666644891538e-05 , err= 1.6410241694978373e-05
ii= 12 , relres= 2.3009515771394946e-05 , err= 7.633800874744643e-06
ii= 13 , relres= 1.0106748136226312e-05 , err= 3.168406516879588e-06
ii= 14 , relres= 4.627450834360484e-06 , err= 1.49680678810334e-06
ii= 15 , relres= 2.151694537749903e-06 , err= 6.562656099957019e-07
ii= 16 , relres= 9.358843118980735e-07 , err= 2.916287166653116e-07
ii= 17 , relres= 3.854447122448435e-07 , err= 1.24982897726464e-07
ii= 18 , relres= 1.5669129024894786e-07 , err= 4.897555572212828e-08
ii= 19 , relres= 6.515080038276039e-08 , err= 2.2353665240060286e-08
FULL: psf25
ii= 0 , relres= 0.2089358923598629 , err= 0.1638997443963349
ii= 1 , relres= 0.06621337629863569 , err= 0.03056153708033922
ii= 2 , relres= 0.034294968080575416 , err= 0.01148825562987844
ii= 3 , relres= 0.0119106229786256 , err= 0.00657169780586803
ii= 4 , relres= 0.004319800842034016 , err= 0.0030596573968036753
ii= 5 , relres= 0.0020043554367774503 , err= 0.0011459314142901451
ii= 6 , relres= 0.0009317779337534802 , err= 0.00043676794145376305
ii= 7 , relres= 0.0003737609057406779 , err= 0.0001919542095697063
ii= 8 , relres= 0.00012596511633267338 , err= 6.712490658580884e-05
ii= 9 , relres= 4.451323089545507e-05 , err= 2.033759524817357e-05
ii= 10 , relres= 1.9777425407545156e-05 , err= 6.361310517813578e-06
ii= 11 , relres= 8.087868100767932e-06 , err= 2.8608230354007017e-06
ii= 12 , relres= 2.8531873962455266e-06 , err= 1.1489775565858618e-06
ii= 13 , relres= 1.0582328806136423e-06 , err= 3.7290226728335584e-07
ii= 14 , relres= 3.5617201598715856e-07 , err= 1.2749115722620507e-07
ii= 15 , relres= 1.1065311979776553e-07 , err= 4.249023579545071e-08
ii= 16 , relres= 3.3033325319849133e-08 , err= 1.2569938670350005e-08
FULL: reg
ii= 0 , relres= 1.0414653670311191 , err= 0.9927300521849565
ii= 1 , relres= 1.109587425468248 , err= 0.9818300419127938
ii= 2 , relres= 1.1099579611152681 , err= 0.963779172617379
ii= 3 , relres= 1.1617780096179404 , err= 0.9385504351033683
ii= 4 , relres= 1.1986201902288103 , err= 0.9156593565277567
ii= 5 , relres= 1.1971923931561281 , err= 0.8880699546198708
ii= 6 , relres= 1.1545127579710255 , err= 0.8600899777943273
ii= 7 , relres= 1.1919110090963576 , err= 0.8346291457490449
ii= 8 , relres= 1.1801194536738802 , err= 0.7980772208768815
ii= 9 , relres= 1.2436659588018655 , err= 0.7612746226839633
ii= 10 , relres= 1.143386395337323 , err= 0.7299878605079194
ii= 11 , relres= 1.1165840854590872 , err= 0.696580952481104
ii= 12 , relres= 1.0606009257533442 , err= 0.6645270356265415
ii= 13 , relres= 1.06001320983932 , err= 0.6256595150958798
ii= 14 , relres= 0.9821607699584294 , err= 0.5975288900209492
ii= 15 , relres= 0.9676379105087266 , err= 0.5647091700418931
ii= 16 , relres= 0.9400995659820265 , err= 0.5254021423135632
ii= 17 , relres= 0.8740562586215456 , err= 0.49713343268772053
ii= 18 , relres= 0.8596234387993663 , err= 0.47448184687695094

```

```
ii= 19 , relres= 0.846382473367856 , err= 0.44322567449249595
ii= 20 , relres= 0.8172979365062368 , err= 0.41854774192081823
ii= 21 , relres= 0.7703578369519469 , err= 0.3897314210889921
ii= 22 , relres= 0.7411688220900496 , err= 0.3656467487810428
ii= 23 , relres= 0.7109810777470927 , err= 0.34460121371611274
ii= 24 , relres= 0.676663499386495 , err= 0.3272647633036709
ii= 25 , relres= 0.6499546644993137 , err= 0.31466280355547904
ii= 26 , relres= 0.6424402694175921 , err= 0.3068809881482044
ii= 27 , relres= 0.6020294440652999 , err= 0.2854975819252619
ii= 28 , relres= 0.5880314838671706 , err= 0.2712964847134834
ii= 29 , relres= 0.6075349174892163 , err= 0.26058545646303233
ii= 30 , relres= 0.555454490045894 , err= 0.25070219891416423
ii= 31 , relres= 0.5103986434325852 , err= 0.23643695306048473
ii= 32 , relres= 0.5234115812052343 , err= 0.22895289842990538
ii= 33 , relres= 0.49907277447789566 , err= 0.22136236804694137
ii= 34 , relres= 0.47378622631371137 , err= 0.21048949287751093
ii= 35 , relres= 0.46911136035001166 , err= 0.20293716294452538
ii= 36 , relres= 0.4580749479395834 , err= 0.1944864222629238
ii= 37 , relres= 0.42524266423726864 , err= 0.18481195117842425
ii= 38 , relres= 0.409712400543538 , err= 0.17284113739880286
ii= 39 , relres= 0.36562730144497785 , err= 0.15975407639034114
ii= 40 , relres= 0.34393545041188106 , err= 0.15125960802919494
ii= 41 , relres= 0.3313860543015002 , err= 0.14396941955381887
ii= 42 , relres= 0.32995449032546476 , err= 0.13984787144717278
ii= 43 , relres= 0.32476272000104744 , err= 0.13108411426366343
ii= 44 , relres= 0.2855028470063267 , err= 0.12218528665057668
ii= 45 , relres= 0.29090306884896094 , err= 0.11735305352347956
ii= 46 , relres= 0.273131132954312 , err= 0.11183318274580678
ii= 47 , relres= 0.26675246034011074 , err= 0.10944769466829056
ii= 48 , relres= 0.2440122188510168 , err= 0.10364067071591125
ii= 49 , relres= 0.22478306379034263 , err= 0.09717431104987394
ii= 50 , relres= 0.2236945469659538 , err= 0.0908268172093417
ii= 51 , relres= 0.20636004048515547 , err= 0.08893308082811999
ii= 52 , relres= 0.19717581937315656 , err= 0.08400367631353825
ii= 53 , relres= 0.2109458124212918 , err= 0.0806448665497625
ii= 54 , relres= 0.18029095263535785 , err= 0.07727598766670421
ii= 55 , relres= 0.1596649446868512 , err= 0.07150018860900496
ii= 56 , relres= 0.15736097730330303 , err= 0.06795195442170793
ii= 57 , relres= 0.1526210752309209 , err= 0.0657818375018793
ii= 58 , relres= 0.15124794067006192 , err= 0.0630496354756112
ii= 59 , relres= 0.1396532114485957 , err= 0.06077527197308812
ii= 60 , relres= 0.1276983271178163 , err= 0.05674079570118517
ii= 61 , relres= 0.12210079886326032 , err= 0.053077614086904
ii= 62 , relres= 0.11738333248832528 , err= 0.05133951785202126
ii= 63 , relres= 0.10782474804271568 , err= 0.04829937602189371
ii= 64 , relres= 0.11683724101065511 , err= 0.04507975832492992
ii= 65 , relres= 0.1048212122425353 , err= 0.04352998134847945
ii= 66 , relres= 0.10441214548236151 , err= 0.04190135253047636
ii= 67 , relres= 0.09446683268852636 , err= 0.03898304170548311
ii= 68 , relres= 0.09199747253836175 , err= 0.03699489899949507
ii= 69 , relres= 0.08644026533885478 , err= 0.0355521550005675
ii= 70 , relres= 0.08704449952868984 , err= 0.03401369831629429
ii= 71 , relres= 0.08076843209561146 , err= 0.032233879732201626
ii= 72 , relres= 0.07897079238735753 , err= 0.03154574233660217
ii= 73 , relres= 0.06889928687514826 , err= 0.028526120411352558
ii= 74 , relres= 0.07219286930647201 , err= 0.027683955560778774
ii= 75 , relres= 0.06447927075336142 , err= 0.026484285528937165
ii= 76 , relres= 0.062120727773598436 , err= 0.024704323736225532
ii= 77 , relres= 0.0584411444685629 , err= 0.02400301256880679
ii= 78 , relres= 0.05434369795270356 , err= 0.022530995134621534
ii= 79 , relres= 0.05286521303239567 , err= 0.021727003396691025
```

```
ii= 80 , relres= 0.04976376840725715 , err= 0.020201307518236948
ii= 81 , relres= 0.050449744343943365 , err= 0.019265805239060855
ii= 82 , relres= 0.04899785583792693 , err= 0.018463452589715764
ii= 83 , relres= 0.04511298895116596 , err= 0.01767087040398345
ii= 84 , relres= 0.04194162166616069 , err= 0.016232888803023333
ii= 85 , relres= 0.04086693285324027 , err= 0.015131393351004765
ii= 86 , relres= 0.03920438811555612 , err= 0.014765967979337371
ii= 87 , relres= 0.03680956900985432 , err= 0.014315989467284563
ii= 88 , relres= 0.034558166833117694 , err= 0.013320435308631782
ii= 89 , relres= 0.03165316873559063 , err= 0.01218891433678706
ii= 90 , relres= 0.030896914992686736 , err= 0.011716688313604846
ii= 91 , relres= 0.030807973610487493 , err= 0.010620812959885649
ii= 92 , relres= 0.028889810699841336 , err= 0.010318182946569547
ii= 93 , relres= 0.026785981958872187 , err= 0.009834629776575454
ii= 94 , relres= 0.025162429962624976 , err= 0.009372002734196288
ii= 95 , relres= 0.025846128618612907 , err= 0.009178901563538223
ii= 96 , relres= 0.022986507345119783 , err= 0.00840014824488162
ii= 97 , relres= 0.02371829248588766 , err= 0.00771575832384953
ii= 98 , relres= 0.021444072176269067 , err= 0.007369385145427506
ii= 99 , relres= 0.020156344415668218 , err= 0.007086513259692777
ii= 100 , relres= 0.01842669517548828 , err= 0.006444498413948226
ii= 101 , relres= 0.01800601292911471 , err= 0.006150781865221154
ii= 102 , relres= 0.01575188258136134 , err= 0.005850398850386376
ii= 103 , relres= 0.015198995372373581 , err= 0.005498742937156078
ii= 104 , relres= 0.014813281696186233 , err= 0.0053556052765828775
ii= 105 , relres= 0.014708730931753773 , err= 0.005190398914986441
ii= 106 , relres= 0.01403976633115455 , err= 0.004976015829772973
ii= 107 , relres= 0.012976791592703492 , err= 0.004779339082539743
ii= 108 , relres= 0.012938255387671311 , err= 0.004676320863948361
ii= 109 , relres= 0.012607166469866779 , err= 0.004354344476936375
ii= 110 , relres= 0.011813929462260026 , err= 0.0041062724436362755
ii= 111 , relres= 0.011708471793306778 , err= 0.003863071367604845
ii= 112 , relres= 0.010454467880257485 , err= 0.0036243220702047033
ii= 113 , relres= 0.01061986461847975 , err= 0.003444723791165364
ii= 114 , relres= 0.010004796954268492 , err= 0.0033246291808185797
ii= 115 , relres= 0.009071612832536083 , err= 0.003183409233350041
ii= 116 , relres= 0.008858565533194872 , err= 0.0030452012256220085
ii= 117 , relres= 0.00875020445049191 , err= 0.002899841660308075
ii= 118 , relres= 0.007880156666801608 , err= 0.0028300106378498337
ii= 119 , relres= 0.007600132129840841 , err= 0.0025877939604939436
ii= 120 , relres= 0.0072439067679918355 , err= 0.0024546717513730548
ii= 121 , relres= 0.0064778563064373336 , err= 0.002290074687516841
ii= 122 , relres= 0.0066352013875877 , err= 0.0022076200328374988
ii= 123 , relres= 0.005696983141186503 , err= 0.002019778391382558
ii= 124 , relres= 0.005935286930095235 , err= 0.00197974011890157
ii= 125 , relres= 0.005314386890868867 , err= 0.001808882883738393
ii= 126 , relres= 0.004951210305532521 , err= 0.0016637750131047338
ii= 127 , relres= 0.004769726049704861 , err= 0.00160972862366875
ii= 128 , relres= 0.004501958836435921 , err= 0.0015580916301669496
ii= 129 , relres= 0.004346452752145117 , err= 0.0014696064458028064
ii= 130 , relres= 0.003974947170743931 , err= 0.0014336235969614286
ii= 131 , relres= 0.0037806307386063394 , err= 0.0013132683262686076
ii= 132 , relres= 0.003784541178818078 , err= 0.0012670601699075544
ii= 133 , relres= 0.0039055388906496227 , err= 0.001189126096091526
ii= 134 , relres= 0.0033830465033504293 , err= 0.001143253733743472
ii= 135 , relres= 0.003310499848273944 , err= 0.00109215421165948
ii= 136 , relres= 0.003325569441129271 , err= 0.001052426524189408
ii= 137 , relres= 0.003057936054205013 , err= 0.0010064043377522114
ii= 138 , relres= 0.002777109971902671 , err= 0.0009743210344072443
ii= 139 , relres= 0.002753059571034361 , err= 0.0009306884045733154
ii= 140 , relres= 0.0024432392070532893 , err= 0.0008783340182896954
```

```
ii= 141 , relres= 0.002287328080252467 , err= 0.0008094828527480478
ii= 142 , relres= 0.002201365618303544 , err= 0.0007738079353112108
ii= 143 , relres= 0.0021461279622686114 , err= 0.0007625694423910533
ii= 144 , relres= 0.001958166692803442 , err= 0.0006992597009804864
ii= 145 , relres= 0.0019480679821397106 , err= 0.0006753095779229492
ii= 146 , relres= 0.0018658111363735797 , err= 0.0006343317056145157
ii= 147 , relres= 0.0016826109897373662 , err= 0.000608913469269131
ii= 148 , relres= 0.0016050639372320692 , err= 0.0005884595931499617
ii= 149 , relres= 0.0014315658379254355 , err= 0.0005452047062534645
ii= 150 , relres= 0.001550012133462749 , err= 0.0005187390121215188
ii= 151 , relres= 0.0014813748637193243 , err= 0.0004893605312734695
ii= 152 , relres= 0.001349234882882507 , err= 0.0004697191521006178
ii= 153 , relres= 0.001294181442245409 , err= 0.00044868307430810726
ii= 154 , relres= 0.0013072077431797642 , err= 0.00042986703324131347
ii= 155 , relres= 0.0012018204250987346 , err= 0.00041174754532433095
ii= 156 , relres= 0.0011274192494108166 , err= 0.0003957348519895377
ii= 157 , relres= 0.001170738322762725 , err= 0.000383955175738222
ii= 158 , relres= 0.0011334414815484192 , err= 0.000361683291892588
ii= 159 , relres= 0.0009961244531360768 , err= 0.00034694095102556966
ii= 160 , relres= 0.0009743239559534632 , err= 0.0003375479689042841
ii= 161 , relres= 0.0009227593612572348 , err= 0.0003119505922023647
ii= 162 , relres= 0.0008891276136718593 , err= 0.0002990436588828457
ii= 163 , relres= 0.0008713871414672766 , err= 0.0002874682199320214
ii= 164 , relres= 0.000847261914375961 , err= 0.00027997149126571345
ii= 165 , relres= 0.0007257154659532851 , err= 0.00025475917376560685
ii= 166 , relres= 0.000653117103014553 , err= 0.00022864874544969912
ii= 167 , relres= 0.0006434445466013803 , err= 0.00021823417575669214
ii= 168 , relres= 0.0006036957341018853 , err= 0.00020238771127475955
ii= 169 , relres= 0.0005965668252880077 , err= 0.00019614235859870643
ii= 170 , relres= 0.0005413290139531889 , err= 0.0001852499560871443
ii= 171 , relres= 0.0005030620475515768 , err= 0.00017261457502661492
ii= 172 , relres= 0.0004930397162263614 , err= 0.00016811574009535933
ii= 173 , relres= 0.0005065417105003739 , err= 0.00015506021574192663
ii= 174 , relres= 0.0004376301176582393 , err= 0.00015061776566446277
ii= 175 , relres= 0.00045581623072922403 , err= 0.00014338165275880828
ii= 176 , relres= 0.0004395136966886146 , err= 0.0001384211124212946
ii= 177 , relres= 0.0004052519341737658 , err= 0.00013005519224099362
ii= 178 , relres= 0.00039474635012728276 , err= 0.00012455797785362936
ii= 179 , relres= 0.00034879490105072994 , err= 0.0001215600683717693
ii= 180 , relres= 0.00033040698116774855 , err= 0.0001123148182012448
ii= 181 , relres= 0.00030294955982475014 , err= 0.00010780283442752676
ii= 182 , relres= 0.0003313732902573874 , err= 0.00010332109036081189
ii= 183 , relres= 0.0003023412735968653 , err= 9.852319825469609e-05
ii= 184 , relres= 0.0002758606391727367 , err= 9.297970536892828e-05
ii= 185 , relres= 0.0002626030659388608 , err= 9.083212728098351e-05
ii= 186 , relres= 0.00024559018311458617 , err= 8.371285410359255e-05
ii= 187 , relres= 0.0002474328564641276 , err= 7.878592859290041e-05
ii= 188 , relres= 0.00022603291728899217 , err= 7.44579096065276e-05
ii= 189 , relres= 0.00021365759693237152 , err= 7.179376274031811e-05
ii= 190 , relres= 0.00020684276170119403 , err= 6.654339081495981e-05
ii= 191 , relres= 0.00019462626825744956 , err= 6.294535744589026e-05
ii= 192 , relres= 0.00017987401245328578 , err= 6.0924117616845545e-05
ii= 193 , relres= 0.00018803582637928697 , err= 5.627550910427503e-05
ii= 194 , relres= 0.00016561257387165263 , err= 5.4526554555513976e-05
ii= 195 , relres= 0.00015981305170660031 , err= 5.2588132864188054e-05
ii= 196 , relres= 0.00015819064469332393 , err= 4.881672759262665e-05
ii= 197 , relres= 0.00015722557555396764 , err= 4.727543950399498e-05
ii= 198 , relres= 0.00013245993108750763 , err= 4.467750734781018e-05
ii= 199 , relres= 0.00013506944736063023 , err= 4.3596443589688955e-05
ii= 200 , relres= 0.00013645191332277098 , err= 4.117920524270502e-05
ii= 201 , relres= 0.00012489192642593813 , err= 3.904966863713976e-05
```

```
ii= 202 , relres= 0.00012178635506689463 , err= 3.7955465997480124e-05
ii= 203 , relres= 0.00011522484939059268 , err= 3.7075074447959e-05
ii= 204 , relres= 0.00010262078135779534 , err= 3.3801655478753615e-05
ii= 205 , relres= 0.0001011764240095409 , err= 3.305197473233766e-05
ii= 206 , relres= 9.168079410454124e-05 , err= 2.94586966872596e-05
ii= 207 , relres= 8.726521027855521e-05 , err= 2.8082588690804817e-05
ii= 208 , relres= 8.642295630142159e-05 , err= 2.6790220877371493e-05
ii= 209 , relres= 7.340150192987047e-05 , err= 2.43496529287365e-05
ii= 210 , relres= 7.384502073077194e-05 , err= 2.3827708302575857e-05
ii= 211 , relres= 6.891925062156504e-05 , err= 2.1412079119026073e-05
ii= 212 , relres= 6.691015071078747e-05 , err= 2.0567802576913573e-05
ii= 213 , relres= 6.092383821276722e-05 , err= 1.9864462902024842e-05
ii= 214 , relres= 6.437517236246727e-05 , err= 1.900563742175159e-05
ii= 215 , relres= 6.45262436314613e-05 , err= 1.7734268021190684e-05
ii= 216 , relres= 5.269813081682715e-05 , err= 1.7013809201789453e-05
ii= 217 , relres= 5.6336994212622275e-05 , err= 1.575816995892325e-05
ii= 218 , relres= 5.069819296994386e-05 , err= 1.537937291637761e-05
ii= 219 , relres= 4.8365284024863424e-05 , err= 1.4574476766794106e-05
ii= 220 , relres= 4.913990727629946e-05 , err= 1.4262764165475084e-05
ii= 221 , relres= 4.6401053346460596e-05 , err= 1.3392944125670003e-05
ii= 222 , relres= 4.030495303117263e-05 , err= 1.2548711968047896e-05
ii= 223 , relres= 3.7566129172097287e-05 , err= 1.2245591359551954e-05
ii= 224 , relres= 3.696778832459952e-05 , err= 1.199269492159884e-05
ii= 225 , relres= 3.627319541575739e-05 , err= 1.1075578725202216e-05
ii= 226 , relres= 3.2942002051235034e-05 , err= 1.0678967525302678e-05
ii= 227 , relres= 3.194588214559305e-05 , err= 9.90376969418781e-06
ii= 228 , relres= 2.7770522831713457e-05 , err= 9.071902541158175e-06
ii= 229 , relres= 2.6801635697619093e-05 , err= 8.601337050127967e-06
ii= 230 , relres= 2.3585968537124524e-05 , err= 7.886027176401771e-06
ii= 231 , relres= 2.2769098070199787e-05 , err= 7.570105306133543e-06
ii= 232 , relres= 2.2093634860301838e-05 , err= 7.198669632645011e-06
ii= 233 , relres= 2.116534045654498e-05 , err= 7.059488076658556e-06
ii= 234 , relres= 2.015064381915427e-05 , err= 6.758492140737277e-06
ii= 235 , relres= 1.9131635884370563e-05 , err= 6.584327636483194e-06
ii= 236 , relres= 1.9435872918320583e-05 , err= 6.459740662060495e-06
ii= 237 , relres= 1.8716236279920205e-05 , err= 5.795325560378667e-06
ii= 238 , relres= 1.81941419135423e-05 , err= 5.607984793230299e-06
ii= 239 , relres= 1.6925360431643802e-05 , err= 5.433566099994797e-06
ii= 240 , relres= 1.710172574452099e-05 , err= 5.275128038803875e-06
ii= 241 , relres= 1.5196711748204761e-05 , err= 4.870387455409731e-06
ii= 242 , relres= 1.4987731503915373e-05 , err= 4.688319727534136e-06
ii= 243 , relres= 1.4126866188578744e-05 , err= 4.4945259713543675e-06
ii= 244 , relres= 1.3592688354729518e-05 , err= 4.282568526785923e-06
ii= 245 , relres= 1.2777944753004993e-05 , err= 3.9777100515994064e-06
ii= 246 , relres= 1.179217134250875e-05 , err= 3.8975432885479675e-06
ii= 247 , relres= 1.2523023227546587e-05 , err= 3.6504739114211235e-06
ii= 248 , relres= 1.026070354491792e-05 , err= 3.3968257148400938e-06
ii= 249 , relres= 1.0410499665850786e-05 , err= 3.299994111889491e-06
ii= 250 , relres= 9.891078902942967e-06 , err= 3.0273523598855176e-06
ii= 251 , relres= 9.225238344259958e-06 , err= 2.925455930345716e-06
ii= 252 , relres= 9.235799865638339e-06 , err= 2.7618767869506387e-06
ii= 253 , relres= 8.56462966649872e-06 , err= 2.609626715574821e-06
ii= 254 , relres= 8.230450956376048e-06 , err= 2.551840803631298e-06
ii= 255 , relres= 7.63155722978346e-06 , err= 2.4582844021133116e-06
ii= 256 , relres= 7.324346634130723e-06 , err= 2.36510821025964e-06
ii= 257 , relres= 6.959327164292704e-06 , err= 2.220969702427267e-06
ii= 258 , relres= 6.718341520507125e-06 , err= 2.175988090018252e-06
ii= 259 , relres= 6.417795147067287e-06 , err= 2.066421621938671e-06
ii= 260 , relres= 7.072869429910746e-06 , err= 1.937188814854817e-06
ii= 261 , relres= 5.6718575020645245e-06 , err= 1.8354254729742498e-06
ii= 262 , relres= 5.277912863709321e-06 , err= 1.7166140182829514e-06
```

```

ii= 263 , relres= 5.196210531923878e-06 , err= 1.6353971041431864e-06
ii= 264 , relres= 4.787771653165072e-06 , err= 1.5482478938369825e-06
ii= 265 , relres= 4.4248836750803e-06 , err= 1.4816961772475686e-06
ii= 266 , relres= 4.728219119548886e-06 , err= 1.4048210458230563e-06
ii= 267 , relres= 4.430382139042584e-06 , err= 1.328962393757678e-06
ii= 268 , relres= 4.038003631833081e-06 , err= 1.254055593269393e-06
ii= 269 , relres= 3.7010705425573973e-06 , err= 1.2244205601737816e-06
ii= 270 , relres= 3.4903925888240587e-06 , err= 1.1362659225105054e-06
ii= 271 , relres= 3.4332129421260234e-06 , err= 1.0651673525056108e-06
ii= 272 , relres= 3.2246522828433455e-06 , err= 1.030733197871663e-06
ii= 273 , relres= 3.091880141733175e-06 , err= 1.0117589730251848e-06
ii= 274 , relres= 2.961495452791027e-06 , err= 9.000400677263215e-07
ii= 275 , relres= 2.792667157652159e-06 , err= 8.533755093552867e-07
ii= 276 , relres= 2.6058577808130988e-06 , err= 8.290725011570153e-07
ii= 277 , relres= 2.6540973798406205e-06 , err= 7.822068571560818e-07
ii= 278 , relres= 2.5356650535990584e-06 , err= 7.542305124921575e-07
ii= 279 , relres= 2.369345342306975e-06 , err= 7.228325792894666e-07
ii= 280 , relres= 2.0253844088215863e-06 , err= 6.827950601160989e-07
ii= 281 , relres= 2.018184038559896e-06 , err= 6.756080192124213e-07
ii= 282 , relres= 2.097163215372481e-06 , err= 6.077726430740746e-07
ii= 283 , relres= 1.7792685592824173e-06 , err= 5.745500570389061e-07
ii= 284 , relres= 1.7174406337512934e-06 , err= 5.591780450313388e-07
ii= 285 , relres= 1.6269469873953663e-06 , err= 5.10681683049813e-07
ii= 286 , relres= 1.4410020944745596e-06 , err= 4.6559251495789954e-07
ii= 287 , relres= 1.4907133965725156e-06 , err= 4.447694274686961e-07
ii= 288 , relres= 1.3295267242821646e-06 , err= 4.1103125480938407e-07
ii= 289 , relres= 1.2450390702885873e-06 , err= 4.043943125244242e-07
ii= 290 , relres= 1.269276654236776e-06 , err= 3.9633065614457534e-07
ii= 291 , relres= 1.2390785998327205e-06 , err= 3.674968915126364e-07
ii= 292 , relres= 1.2002481172992113e-06 , err= 3.5531943116167893e-07
ii= 293 , relres= 1.0283800382263054e-06 , err= 3.371827834459477e-07
ii= 294 , relres= 1.050906732420365e-06 , err= 3.199101881438247e-07
ii= 295 , relres= 9.923124441654976e-07 , err= 3.0143566625884764e-07
ii= 296 , relres= 9.424066385413825e-07 , err= 2.866985255965403e-07
ii= 297 , relres= 8.216865541141456e-07 , err= 2.7703430197099746e-07
ii= 298 , relres= 8.377794715965813e-07 , err= 2.6967133642529284e-07
ii= 299 , relres= 8.075128504104884e-07 , err= 2.607800873715265e-07
ii= 300 , relres= 7.391124281563317e-07 , err= 2.3568085860142907e-07
ii= 301 , relres= 7.083220474240285e-07 , err= 2.291014901998159e-07
ii= 302 , relres= 6.659836290642409e-07 , err= 2.2390750925865585e-07
ii= 303 , relres= 6.225624778707176e-07 , err= 2.062503254817481e-07
ii= 304 , relres= 6.112893205939559e-07 , err= 1.964472171309531e-07
ii= 305 , relres= 5.49731024246627e-07 , err= 1.8370440679532614e-07
ii= 306 , relres= 5.641592928442082e-07 , err= 1.704113084389067e-07
ii= 307 , relres= 4.812187503524979e-07 , err= 1.6159547734019212e-07
ii= 308 , relres= 4.787629379361811e-07 , err= 1.5792567411339946e-07
ii= 309 , relres= 4.4233748184675453e-07 , err= 1.535515200928585e-07
ii= 310 , relres= 4.717393596677575e-07 , err= 1.433432836629786e-07
ii= 311 , relres= 4.263192557692118e-07 , err= 1.3515931157348518e-07
ii= 312 , relres= 3.8823378742166513e-07 , err= 1.3133307530808863e-07
ii= 313 , relres= 3.865500576047536e-07 , err= 1.2281628505955373e-07
ii= 314 , relres= 3.4291248155422953e-07 , err= 1.1290973067115084e-07
ii= 315 , relres= 3.5184092756015245e-07 , err= 1.0806894226428696e-07
ii= 316 , relres= 3.362251892635845e-07 , err= 1.0551883943536549e-07
ii= 317 , relres= 3.267878874320875e-07 , err= 9.825361076736859e-08
ii= 318 , relres= 3.043501011874381e-07 , err= 9.449401268672234e-08
ii= 319 , relres= 2.882438122442943e-07 , err= 9.063976634451122e-08
ii= 320 , relres= 2.658068708231392e-07 , err= 8.579414647527285e-08
ii= 321 , relres= 2.82840195676091e-07 , err= 8.342595624778029e-08
ii= 322 , relres= 2.538622897980603e-07 , err= 7.754833651616825e-08
ii= 323 , relres= 2.2089340744429714e-07 , err= 7.390745015057996e-08

```

```

ii= 324 , relres= 2.2658245787323893e-07 , err= 7.09550356954134e-08
ii= 325 , relres= 2.105997574609112e-07 , err= 6.700986311732613e-08
ii= 326 , relres= 2.1162143513022512e-07 , err= 6.416304701986418e-08
ii= 327 , relres= 1.9015727687418715e-07 , err= 6.168009920703994e-08
ii= 328 , relres= 2.0826949957098537e-07 , err= 5.9181791478091445e-08
ii= 329 , relres= 1.9208258134396584e-07 , err= 5.611547497735265e-08
ii= 330 , relres= 1.8202300980706694e-07 , err= 5.4077448716664934e-08
ii= 331 , relres= 1.5227766246699295e-07 , err= 4.934986673258916e-08
ii= 332 , relres= 1.5460055438363752e-07 , err= 4.738097278168258e-08
ii= 333 , relres= 1.451584484225594e-07 , err= 4.377514879732964e-08
ii= 334 , relres= 1.3255435553312407e-07 , err= 4.169123065098835e-08
ii= 335 , relres= 1.3062365766395574e-07 , err= 4.0492741933642275e-08
ii= 336 , relres= 1.2063816336055425e-07 , err= 3.790345486012611e-08
ii= 337 , relres= 1.235296626589573e-07 , err= 3.7006236682250585e-08
ii= 338 , relres= 1.1167328482400881e-07 , err= 3.49001122871338e-08
ii= 339 , relres= 1.0464551831299957e-07 , err= 3.319717726481538e-08
ii= 340 , relres= 1.0340844326874811e-07 , err= 3.212759419534185e-08
ii= 341 , relres= 1.1090485787981934e-07 , err= 3.0154597369590434e-08
ii= 342 , relres= 1.0673939480593748e-07 , err= 2.8623709417900736e-08
ii= 343 , relres= 8.121177275908163e-08 , err= 2.6710666393056513e-08
FULL: none
ii= 0 , relres= 1.3976020841610528 , err= 0.9228340166632965
ii= 1 , relres= 1.086468690657398 , err= 0.874679321603406
ii= 2 , relres= 0.9942689687998166 , err= 0.8273063652046728
ii= 3 , relres= 0.8675481573186566 , err= 0.786422513504746
ii= 4 , relres= 0.835372244780544 , err= 0.7319776864742322
ii= 5 , relres= 0.7584606655229267 , err= 0.6929907563147713
ii= 6 , relres= 0.6465103758960453 , err= 0.6484607519873411
ii= 7 , relres= 0.5965239789167658 , err= 0.6025795226810782
ii= 8 , relres= 0.5458110409975906 , err= 0.5556779047035768
ii= 9 , relres= 0.50827022802045 , err= 0.51093974940464
ii= 10 , relres= 0.46233674299363425 , err= 0.4622660002354045
ii= 11 , relres= 0.41788968531547205 , err= 0.41857494673117834
ii= 12 , relres= 0.3723025631394128 , err= 0.3782875536168891
ii= 13 , relres= 0.3524131310937892 , err= 0.3465154948796612
ii= 14 , relres= 0.3153601569293535 , err= 0.31877569781858633
ii= 15 , relres= 0.2893840963605568 , err= 0.29382354670839983
ii= 16 , relres= 0.24379605395130632 , err= 0.2668769209187162
ii= 17 , relres= 0.23340157884951315 , err= 0.24498025729530673
ii= 18 , relres= 0.21606141114906807 , err= 0.22641494391250436
ii= 19 , relres= 0.17828837015380816 , err= 0.20609447261214453
ii= 20 , relres= 0.17588476900232444 , err= 0.18996908773329854
ii= 21 , relres= 0.14384831385899186 , err= 0.1739727058103652
ii= 22 , relres= 0.1308620426954415 , err= 0.15690393072260858
ii= 23 , relres= 0.12091560371169827 , err= 0.14445092776191265
ii= 24 , relres= 0.10506641676104182 , err= 0.13232567244780147
ii= 25 , relres= 0.09475038046661115 , err= 0.1197575070697789
ii= 26 , relres= 0.0987335830994225 , err= 0.10914671562206099
ii= 27 , relres= 0.07712670597639822 , err= 0.09985958558827349
ii= 28 , relres= 0.07218623980250961 , err= 0.09015577760840988
ii= 29 , relres= 0.07005993843299062 , err= 0.0825014811935748
ii= 30 , relres= 0.06096338085045396 , err= 0.07645506706606703
ii= 31 , relres= 0.0699795604880285 , err= 0.07138925881080418
ii= 32 , relres= 0.051828782790744606 , err= 0.06679424289945401
ii= 33 , relres= 0.047828398260146704 , err= 0.06151026468207792
ii= 34 , relres= 0.0432088505118281 , err= 0.055908775478439476
ii= 35 , relres= 0.04165006818370003 , err= 0.0512667365028048
ii= 36 , relres= 0.03527178069571243 , err= 0.04677295997084678
ii= 37 , relres= 0.033389779579008134 , err= 0.042734863426868816
ii= 38 , relres= 0.028612336686743702 , err= 0.03907665136127187
ii= 39 , relres= 0.02770439435338959 , err= 0.03595523968894526

```

```
ii= 40 , relres= 0.0263495143949226 , err= 0.03260242197668218
ii= 41 , relres= 0.023646118174565342 , err= 0.029938371438516496
ii= 42 , relres= 0.026348345979071534 , err= 0.027383079484080648
ii= 43 , relres= 0.021624492276109002 , err= 0.025026666439256003
ii= 44 , relres= 0.018485677743429088 , err= 0.022302324491254192
ii= 45 , relres= 0.01693619559889559 , err= 0.019808806832034516
ii= 46 , relres= 0.0159737110600433 , err= 0.017805662868257605
ii= 47 , relres= 0.014728723375927226 , err= 0.016033092969871265
ii= 48 , relres= 0.01376766119687194 , err= 0.014382783870607397
ii= 49 , relres= 0.013641018823475303 , err= 0.01307764333784832
ii= 50 , relres= 0.011448752976760129 , err= 0.011753923831044904
ii= 51 , relres= 0.010227956481391824 , err= 0.010353103752610409
ii= 52 , relres= 0.008897719597751092 , err= 0.0091653845059982
ii= 53 , relres= 0.008516189765263879 , err= 0.008249509219793456
ii= 54 , relres= 0.009678519373761208 , err= 0.00745857635657637
ii= 55 , relres= 0.006941295437897017 , err= 0.0068215453797237
ii= 56 , relres= 0.005885013625091245 , err= 0.006128374670424232
ii= 57 , relres= 0.005692209523013805 , err= 0.0055395766645891555
ii= 58 , relres= 0.0046113791876011435 , err= 0.004970349632263212
ii= 59 , relres= 0.00435728236301749 , err= 0.004443647597686502
ii= 60 , relres= 0.00473266504899369 , err= 0.004024168103200031
ii= 61 , relres= 0.0034346429479742945 , err= 0.0036292310126196992
ii= 62 , relres= 0.003115136239745891 , err= 0.003227345015458759
ii= 63 , relres= 0.0027319669884180754 , err= 0.0028250717418907873
ii= 64 , relres= 0.0026882284601978147 , err= 0.002548585472949299
ii= 65 , relres= 0.0023944773121238336 , err= 0.0022719086299953857
ii= 66 , relres= 0.002187336665468575 , err= 0.0021001639067485286
ii= 67 , relres= 0.0017377813010870042 , err= 0.0018767419810691718
ii= 68 , relres= 0.0015373746571075415 , err= 0.0016779693911344632
ii= 69 , relres= 0.0014018008773529526 , err= 0.0015029670284452557
ii= 70 , relres= 0.0012416340751564006 , err= 0.0013317823752504313
ii= 71 , relres= 0.001074602985743079 , err= 0.0011938371849896088
ii= 72 , relres= 0.001094190656793067 , err= 0.0010641946318319464
ii= 73 , relres= 0.0011020004177391962 , err= 0.0009569228877613123
ii= 74 , relres= 0.0009594463411493381 , err= 0.0008934414465612751
ii= 75 , relres= 0.0007464261612456314 , err= 0.000800655417631794
ii= 76 , relres= 0.000698866480299194 , err= 0.000693150397499288
ii= 77 , relres= 0.0008045310598027543 , err= 0.0006320696605007383
ii= 78 , relres= 0.0005703435623963337 , err= 0.0005701377241667196
ii= 79 , relres= 0.00048682103384217436 , err= 0.000499215510542096
ii= 80 , relres= 0.0004449008627777177 , err= 0.0004390871332275105
ii= 81 , relres= 0.0003841105462533124 , err= 0.00038346790185306995
ii= 82 , relres= 0.00038211548159168915 , err= 0.0003406265631168979
ii= 83 , relres= 0.00034828001421276174 , err= 0.00031816423426295686
ii= 84 , relres= 0.00024548631606379737 , err= 0.0002812141549787807
ii= 85 , relres= 0.0002508394398130583 , err= 0.00024921074986237844
ii= 86 , relres= 0.00023747829780684663 , err= 0.0002282800282165537
ii= 87 , relres= 0.00019398459648367513 , err= 0.00020800398781971574
ii= 88 , relres= 0.0001670242727020723 , err= 0.00018583495859871572
ii= 89 , relres= 0.00013607174136248305 , err= 0.00016531036405365094
ii= 90 , relres= 0.0001306765303979969 , err= 0.00014555909278996757
ii= 91 , relres= 0.00011982610905284853 , err= 0.0001309843793294075
ii= 92 , relres= 0.0001418520857587501 , err= 0.00011831273453133211
ii= 93 , relres= 0.00010996973456573352 , err= 0.00011057935448314901
ii= 94 , relres= 8.83257134061935e-05 , err= 9.983754386384137e-05
ii= 95 , relres= 9.901552941230935e-05 , err= 9.072756958748718e-05
ii= 96 , relres= 7.429719596351519e-05 , err= 8.360538790709697e-05
ii= 97 , relres= 6.703329742671765e-05 , err= 7.582268060389064e-05
ii= 98 , relres= 6.699933899967329e-05 , err= 6.97987310986288e-05
ii= 99 , relres= 5.06781611471387e-05 , err= 6.365244355401411e-05
ii= 100 , relres= 5.0074034425596e-05 , err= 5.702543563517533e-05
```

```

ii= 101 , relres= 5.267366749124457e-05 , err= 5.266264453869494e-05
ii= 102 , relres= 3.9922387744446836e-05 , err= 4.776058062289712e-05
ii= 103 , relres= 4.2399098358004635e-05 , err= 4.3648784190099094e-05
ii= 104 , relres= 3.5680738204378665e-05 , err= 3.978787583612795e-05
ii= 105 , relres= 2.7757097370538118e-05 , err= 3.572726928279359e-05
ii= 106 , relres= 3.226877211786264e-05 , err= 3.271640289802792e-05
ii= 107 , relres= 2.499104569332264e-05 , err= 3.073728825211632e-05
ii= 108 , relres= 2.5520885091447948e-05 , err= 2.8234056591817496e-05
ii= 109 , relres= 1.9519470550507136e-05 , err= 2.6448634873073023e-05
ii= 110 , relres= 1.7490699694057078e-05 , err= 2.3719233608246955e-05
ii= 111 , relres= 1.867344643304247e-05 , err= 2.1721087429298624e-05
ii= 112 , relres= 1.5174049150283577e-05 , err= 1.9986504402340454e-05
ii= 113 , relres= 1.330518052897192e-05 , err= 1.7721746511096742e-05
ii= 114 , relres= 1.2967331286696575e-05 , err= 1.5923030867172357e-05
ii= 115 , relres= 1.4257415657927349e-05 , err= 1.4822254250226836e-05
ii= 116 , relres= 1.098131725771408e-05 , err= 1.3430644952880404e-05
ii= 117 , relres= 1.1001596068461332e-05 , err= 1.2235201157537068e-05
ii= 118 , relres= 9.489914886905646e-06 , err= 1.1404177957946035e-05
ii= 119 , relres= 1.0616488408169048e-05 , err= 1.061415859331843e-05
ii= 120 , relres= 7.187434955220755e-06 , err= 9.849308535447184e-06
ii= 121 , relres= 6.6498873454332055e-06 , err= 8.805879477286961e-06
ii= 122 , relres= 6.763389055814841e-06 , err= 7.811423209753577e-06
ii= 123 , relres= 5.93351302806825e-06 , err= 7.206413368894343e-06
ii= 124 , relres= 5.042708032236172e-06 , err= 6.460830950216541e-06
ii= 125 , relres= 4.611213861036029e-06 , err= 5.68275671706814e-06
ii= 126 , relres= 4.565255737989422e-06 , err= 5.1795293437217715e-06
ii= 127 , relres= 3.664568670199357e-06 , err= 4.6833709871212585e-06
ii= 128 , relres= 3.5627764172203877e-06 , err= 4.152673117336651e-06
ii= 129 , relres= 3.5574793018275038e-06 , err= 3.7938894033945107e-06
ii= 130 , relres= 2.8002276307034176e-06 , err= 3.375497627666852e-06
ii= 131 , relres= 2.2672232299921788e-06 , err= 2.9070403920569637e-06
ii= 132 , relres= 2.4547965802462702e-06 , err= 2.524843489704741e-06
ii= 133 , relres= 2.231304267977127e-06 , err= 2.3275620098437665e-06
ii= 134 , relres= 2.1169591931791965e-06 , err= 2.1137624023496753e-06
ii= 135 , relres= 1.9045092135785932e-06 , err= 1.9571876835557853e-06
ii= 136 , relres= 1.4136021525618425e-06 , err= 1.7317837820349676e-06
ii= 137 , relres= 1.545987793750848e-06 , err= 1.5567292376776735e-06
ii= 138 , relres= 1.2079381747431318e-06 , err= 1.399600301071229e-06
ii= 139 , relres= 1.3733071928216735e-06 , err= 1.2354005881695219e-06
ii= 140 , relres= 1.2132565303527653e-06 , err= 1.1425272813362471e-06
ii= 141 , relres= 1.1712665701039498e-06 , err= 1.0186022345794386e-06
ii= 142 , relres= 9.890681539562788e-07 , err= 9.305911831341551e-07
ii= 143 , relres= 8.799591982735907e-07 , err= 8.013142438075602e-07
ii= 144 , relres= 8.378047298117647e-07 , err= 7.020339967109971e-07
ii= 145 , relres= 6.335952745625505e-07 , err= 5.95596488222314e-07
ii= 146 , relres= 6.503903017615191e-07 , err= 5.022608744135502e-07
ii= 147 , relres= 5.659786440095922e-07 , err= 4.5972114552844767e-07
ii= 148 , relres= 4.618258999934206e-07 , err= 3.991573521960157e-07
ii= 149 , relres= 4.3837214640760335e-07 , err= 3.563570878300623e-07
ii= 150 , relres= 4.072417244563457e-07 , err= 3.2025307534854713e-07
ii= 151 , relres= 3.5074816234207107e-07 , err= 2.9295227285395143e-07
ii= 152 , relres= 2.5579276849629e-07 , err= 2.4858745833057385e-07
ii= 153 , relres= 2.5557566316218707e-07 , err= 2.1930955985945356e-07
ii= 154 , relres= 2.2672811896495213e-07 , err= 1.9632393940780586e-07
ii= 155 , relres= 1.711772688418974e-07 , err= 1.717207943819834e-07
ii= 156 , relres= 2.1051824504550083e-07 , err= 1.5345060689633385e-07
ii= 157 , relres= 1.439646434903332e-07 , err= 1.3565161797010074e-07
ii= 158 , relres= 1.286204571230017e-07 , err= 1.1814492298408489e-07
ii= 159 , relres= 1.125933873053629e-07 , err= 1.0109415983621608e-07
ii= 160 , relres= 1.0557512169965982e-07 , err= 9.056130404065577e-08
ii= 161 , relres= 9.683259744494544e-08 , err= 8.180680433483976e-08

```

```

gamma= 10772.17345015941
nb= 1 , good_iter_psf= 20
nb= 5 , good_iter_psf= 17
nb= 25 , good_iter_psf= 15
good_iter_reg= 296
good_iter_none= 143
--- GAMMA ---: 4999.999999999999
Building Regularization H-Matrix
    matrix has dimension 1416 x 1416
        no of non-zeroes      = 9746
        matrix is            real valued
        format                = non symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
    |S|_F                 = 806144
        sparsity constant = 20
        size of H-matrix   = 4.06 MB
    |A|_F                 = 806144
|S-A|_2 = 4.35686e-09
matrix has dimension — H-matrix inverse ( rtol = 1416 x 1416
    no of non-zeroes      = 9746
    matrix is            real valued
    format                = symmetric
    size of sparse matrix = 163.52 kB
    |S|_F                 = 5.18561e+06
        sparsity constant = 20
        size of H-matrix   = 2.29 MB
    |A|_F                 = 5.18561e+06
|S-A|_2 = 4.66653e-09
1e-06 , atol = 1e-14 , overwrite= False )
                                ] 7% ETA 10 s (5.83 GB) GB)
size of inverse = 3361874 bytes

— H-matrix multiplication C=A*B
done in 20.74s
size of C = 3.86 MB

— H-matrix multiplication C=A*B
done in 28.53s
] 3% ETA 18 s (5.83 GB)
size of C = 8.53 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
done in 26.93s
size of LU factor = 23.50 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
done in 27.26s
size of LU factor = 23.71 MB

— LU factorisation ( rtol = 1e-07 )
done in 27.34s
size of LU factor = 23.42 MB
FULL: get truth:
ii= 0 , relres= 0.3982147365000176 , err= nan
ii= 1 , relres= 0.18128545385248354 , err= nan
ii= 2 , relres= 0.12025775994519075 , err= nan
ii= 3 , relres= 0.07809981825464601 , err= nan
ii= 4 , relres= 0.03805987219174383 , err= nan
ii= 5 , relres= 0.02031854169087702 , err= nan
ii= 6 , relres= 0.013175379888285562 , err= nan
ii= 7 , relres= 0.009991030232752267 , err= nan

```

```
ii= 8 , relres= 0.007073326185423544 , err= nan
ii= 9 , relres= 0.0048799429222499 , err= nan
ii= 10 , relres= 0.002947894529065422 , err= nan
ii= 11 , relres= 0.0013806223292837727 , err= nan
ii= 12 , relres= 0.0006792554238437234 , err= nan
ii= 13 , relres= 0.00033802090074444173 , err= nan
ii= 14 , relres= 0.00016173852310235183 , err= nan
ii= 15 , relres= 8.823049068609442e-05 , err= nan
ii= 16 , relres= 4.7504909544068965e-05 , err= nan
ii= 17 , relres= 2.2816893371727953e-05 , err= nan
ii= 18 , relres= 1.1692633682238589e-05 , err= nan
ii= 19 , relres= 6.688170613824988e-06 , err= nan
ii= 20 , relres= 3.4866073377062523e-06 , err= nan
ii= 21 , relres= 1.7867501740280733e-06 , err= nan
ii= 22 , relres= 7.803783035295052e-07 , err= nan
ii= 23 , relres= 3.6530400428543034e-07 , err= nan
ii= 24 , relres= 1.6604979631489899e-07 , err= nan
ii= 25 , relres= 7.931710936705127e-08 , err= nan
ii= 26 , relres= 3.8510646928631125e-08 , err= nan
ii= 27 , relres= 1.9748387751264987e-08 , err= nan
ii= 28 , relres= 9.96139860420338e-09 , err= nan
ii= 29 , relres= 5.351730233824021e-09 , err= nan
ii= 30 , relres= 3.4739447565832984e-09 , err= nan
ii= 31 , relres= 1.3007590073349784e-09 , err= nan
ii= 32 , relres= 6.041306244609245e-10 , err= nan
ii= 33 , relres= 3.2370486891617684e-10 , err= nan
ii= 34 , relres= 1.6234935639847963e-10 , err= nan
ii= 35 , relres= 8.635790895213501e-11 , err= nan
FULL: psf1
ii= 0 , relres= 0.526486794902041 , err= 0.3330061621527111
ii= 1 , relres= 0.3238393359799781 , err= 0.14349787595513014
ii= 2 , relres= 0.20706555433907614 , err= 0.08465889946465424
ii= 3 , relres= 0.15108317736402205 , err= 0.05159557510159439
ii= 4 , relres= 0.10525466769071845 , err= 0.03993905117050664
ii= 5 , relres= 0.07167576301352516 , err= 0.02688058983777663
ii= 6 , relres= 0.04925629187931382 , err= 0.018785572705580796
ii= 7 , relres= 0.03385210567705933 , err= 0.012623929513050714
ii= 8 , relres= 0.022811641402073903 , err= 0.008134599661097218
ii= 9 , relres= 0.014600345661177393 , err= 0.005664802927164228
ii= 10 , relres= 0.010044894185386365 , err= 0.003911570472994618
ii= 11 , relres= 0.006927589681178994 , err= 0.0029305712589541887
ii= 12 , relres= 0.0051163329680128 , err= 0.0019626286148997094
ii= 13 , relres= 0.003748857703094128 , err= 0.0014029868741618835
ii= 14 , relres= 0.002636347258546064 , err= 0.0009408623323033854
ii= 15 , relres= 0.0018156424411669876 , err= 0.000670244622374451
ii= 16 , relres= 0.0011769930673520594 , err= 0.00044400425689417684
ii= 17 , relres= 0.0008684886850578785 , err= 0.0002963265027616567
ii= 18 , relres= 0.0005691593016476165 , err= 0.00019429825566543221
ii= 19 , relres= 0.0003927507158942454 , err= 0.00013135603177996452
ii= 20 , relres= 0.0002692084234847585 , err= 8.89189640133486e-05
ii= 21 , relres= 0.00019014871249746764 , err= 6.301514357458127e-05
ii= 22 , relres= 0.00012922298426867832 , err= 4.3173811621946796e-05
ii= 23 , relres= 8.578879122025125e-05 , err= 3.0205973731182775e-05
ii= 24 , relres= 5.6722047654704676e-05 , err= 1.998725295925082e-05
ii= 25 , relres= 3.9473021462555155e-05 , err= 1.1720664193310689e-05
ii= 26 , relres= 2.4847208355943238e-05 , err= 8.222610099933346e-06
ii= 27 , relres= 1.6102941771865367e-05 , err= 4.849127300204412e-06
ii= 28 , relres= 1.0595235996132409e-05 , err= 3.3855075835803333e-06
ii= 29 , relres= 6.969451761158258e-06 , err= 2.1059558305964674e-06
ii= 30 , relres= 4.698998762655482e-06 , err= 1.4645062086686402e-06
ii= 31 , relres= 3.537454028125565e-06 , err= 1.0118470158551126e-06
```

```

ii= 32 , relres= 2.5334741631178913e-06 , err= 7.613208762538907e-07
ii= 33 , relres= 1.6661994664511793e-06 , err= 5.042046978788132e-07
ii= 34 , relres= 1.1318942124892743e-06 , err= 3.181868575064379e-07
ii= 35 , relres= 7.546719352168697e-07 , err= 2.1654981223648998e-07
ii= 36 , relres= 4.966258953279301e-07 , err= 1.4121002667412768e-07
ii= 37 , relres= 3.158022699536004e-07 , err= 8.63341519830892e-08
ii= 38 , relres= 1.9907847599137174e-07 , err= 5.870569206456913e-08
ii= 39 , relres= 1.3112660083306107e-07 , err= 3.598719186182146e-08
ii= 40 , relres= 8.659930027890647e-08 , err= 2.450254735366826e-08
FULL: psf5
ii= 0 , relres= 0.454800629174972 , err= 0.30031710471042744
ii= 1 , relres= 0.24688227054676704 , err= 0.09260889676831217
ii= 2 , relres= 0.1784855413395057 , err= 0.04997329065279616
ii= 3 , relres= 0.11350232705824473 , err= 0.038031317905399646
ii= 4 , relres= 0.06573898544246914 , err= 0.0222831740951547
ii= 5 , relres= 0.041024489652514644 , err= 0.014079619482341564
ii= 6 , relres= 0.024643702125578162 , err= 0.0087603133276696
ii= 7 , relres= 0.016579804637421647 , err= 0.005011397888558428
ii= 8 , relres= 0.010824006247613857 , err= 0.003281235302898137
ii= 9 , relres= 0.006877742090075787 , err= 0.0022450086114354246
ii= 10 , relres= 0.004723675014218302 , err= 0.0014336535612496893
ii= 11 , relres= 0.0032243134147491685 , err= 0.0010160722557478535
ii= 12 , relres= 0.0019149668024841667 , err= 0.0006716895868206746
ii= 13 , relres= 0.0012134327518058135 , err= 0.00042618400390089374
ii= 14 , relres= 0.0008135994831672162 , err= 0.0002449123103504246
ii= 15 , relres= 0.0005056933305758644 , err= 0.00015312325506261067
ii= 16 , relres= 0.0003026270210733998 , err= 9.59741069011923e-05
ii= 17 , relres= 0.00019385462292252615 , err= 5.69716314355981e-05
ii= 18 , relres= 0.00012387083483020843 , err= 3.587055963260606e-05
ii= 19 , relres= 7.011983523668884e-05 , err= 2.128265870020219e-05
ii= 20 , relres= 4.018486754537177e-05 , err= 1.2699781821507223e-05
ii= 21 , relres= 2.4061182272400138e-05 , err= 7.675665428231053e-06
ii= 22 , relres= 1.5139947675622584e-05 , err= 4.468752092111891e-06
ii= 23 , relres= 9.992234709499942e-06 , err= 2.882517747314437e-06
ii= 24 , relres= 5.8723947990408195e-06 , err= 1.7806420900516446e-06
ii= 25 , relres= 3.87574419934828e-06 , err= 1.0546257288321076e-06
ii= 26 , relres= 2.7699159485138506e-06 , err= 6.771466013363793e-07
ii= 27 , relres= 1.7172656219378677e-06 , err= 5.029608617435183e-07
ii= 28 , relres= 1.0517708994312285e-06 , err= 3.2160902176383803e-07
ii= 29 , relres= 6.623962451924066e-07 , err= 1.9701924471669245e-07
ii= 30 , relres= 4.880003192091976e-07 , err= 1.1496323442100392e-07
ii= 31 , relres= 2.8865266812196107e-07 , err= 9.166582153946122e-08
ii= 32 , relres= 1.6649748043041082e-07 , err= 5.469016306023748e-08
ii= 33 , relres= 9.782818400918013e-08 , err= 3.2069772808624664e-08
FULL: psf25
ii= 0 , relres= 0.3982147365000176 , err= 0.28955089634654396
ii= 1 , relres= 0.18128545385248354 , err= 0.10067251089097719
ii= 2 , relres= 0.12025775994519075 , err= 0.05265707077611181
ii= 3 , relres= 0.07809981825464601 , err= 0.0388066850970021
ii= 4 , relres= 0.03805987219174383 , err= 0.029202345349291003
ii= 5 , relres= 0.02031854169087702 , err= 0.020051978432364455
ii= 6 , relres= 0.013175379888285562 , err= 0.013024137627996396
ii= 7 , relres= 0.009991030232752267 , err= 0.007452321129355096
ii= 8 , relres= 0.007073326185423544 , err= 0.004168128361852339
ii= 9 , relres= 0.0048799429222499 , err= 0.002276858065784669
ii= 10 , relres= 0.002947894529065422 , err= 0.001109498001056225
ii= 11 , relres= 0.0013806223292837727 , err= 0.0006069769693508927
ii= 12 , relres= 0.0006792554238437234 , err= 0.0003016211976096816
ii= 13 , relres= 0.00033802090074444173 , err= 0.00013605632128552757
ii= 14 , relres= 0.00016173852310235183 , err= 6.436238351596354e-05
ii= 15 , relres= 8.823049068609442e-05 , err= 2.823268160402553e-05

```

```
ii= 16 , relres= 4.7504909544068965e-05 , err= 1.3746263349128476e-05
ii= 17 , relres= 2.2816893371727953e-05 , err= 7.605956467255919e-06
ii= 18 , relres= 1.1692633682238589e-05 , err= 4.0053884804252744e-06
ii= 19 , relres= 6.688170613824988e-06 , err= 1.963056648772819e-06
ii= 20 , relres= 3.4866073377062523e-06 , err= 9.448008258862494e-07
ii= 21 , relres= 1.7867501740280733e-06 , err= 5.3504191349356e-07
ii= 22 , relres= 7.803783035295052e-07 , err= 2.6657578498771035e-07
ii= 23 , relres= 3.6530400428543034e-07 , err= 1.351091220393133e-07
ii= 24 , relres= 1.6604979631489899e-07 , err= 6.32733547712588e-08
ii= 25 , relres= 7.931710936705127e-08 , err= 3.0504780811420006e-08
FULL: reg
ii= 0 , relres= 1.0436596165702747 , err= 0.9979332029684506
ii= 1 , relres= 1.115761146345676 , err= 0.9947075924244105
ii= 2 , relres= 1.1229003667108926 , err= 0.9892184442328479
ii= 3 , relres= 1.186011499673668 , err= 0.9812240925801998
ii= 4 , relres= 1.234260878503644 , err= 0.9737470709658541
ii= 5 , relres= 1.246445811998027 , err= 0.9644518363500286
ii= 6 , relres= 1.2163721703794743 , err= 0.954687248401684
ii= 7 , relres= 1.2701065284229616 , err= 0.945549602495665
ii= 8 , relres= 1.279512604472137 , err= 0.9319141231982399
ii= 9 , relres= 1.373853316183168 , err= 0.9175730262064895
ii= 10 , relres= 1.2848459270404469 , err= 0.9047408919428187
ii= 11 , relres= 1.279324045789408 , err= 0.8904507923383196
ii= 12 , relres= 1.2395770487391455 , err= 0.8761183362586807
ii= 13 , relres= 1.2709839548507476 , err= 0.857916600583957
ii= 14 , relres= 1.2013571567830055 , err= 0.8440312393479613
ii= 15 , relres= 1.2137484396714986 , err= 0.8270702597980917
ii= 16 , relres= 1.2182084660247383 , err= 0.805542619854266
ii= 17 , relres= 1.16196829631289 , err= 0.7891043337669414
ii= 18 , relres= 1.1679397211174938 , err= 0.7754691678751472
ii= 19 , relres= 1.1876068155435031 , err= 0.7558484806194435
ii= 20 , relres= 1.178949734119388 , err= 0.7394192060086326
ii= 21 , relres= 1.1508136833959586 , err= 0.719135650331537
ii= 22 , relres= 1.1430501794727537 , err= 0.7011580071304172
ii= 23 , relres= 1.1301446833373265 , err= 0.6844087690057219
ii= 24 , relres= 1.1035120540395982 , err= 0.6696687203221601
ii= 25 , relres= 1.0745839035753184 , err= 0.6576004434598507
ii= 26 , relres= 1.097720933098718 , err= 0.6512673640640042
ii= 27 , relres= 1.0617097323173206 , err= 0.6313474238023125
ii= 28 , relres= 1.066571353281764 , err= 0.616948349609822
ii= 29 , relres= 1.1113333086217834 , err= 0.6039992059263045
ii= 30 , relres= 1.0648047086762205 , err= 0.5950688434902834
ii= 31 , relres= 1.003187530696273 , err= 0.5792096400623011
ii= 32 , relres= 1.0444212137816797 , err= 0.5693378744516627
ii= 33 , relres= 1.0252075761861796 , err= 0.5613411671271772
ii= 34 , relres= 1.009124705461908 , err= 0.5488704862012856
ii= 35 , relres= 1.004380628083176 , err= 0.5411434292702333
ii= 36 , relres= 1.010173380473602 , err= 0.5286367620453153
ii= 37 , relres= 0.9710138777358881 , err= 0.515415130065599
ii= 38 , relres= 0.9738338090228011 , err= 0.49911025957826227
ii= 39 , relres= 0.9114595896918062 , err= 0.4801531999878457
ii= 40 , relres= 0.8858277609396996 , err= 0.46748336549399094
ii= 41 , relres= 0.872053311602912 , err= 0.45621541638586655
ii= 42 , relres= 0.9024251463615193 , err= 0.4494273540327315
ii= 43 , relres= 0.9093963772870269 , err= 0.43684640600171853
ii= 44 , relres= 0.8323201195544485 , err= 0.4222618459179824
ii= 45 , relres= 0.8699545091881657 , err= 0.41405629890074447
ii= 46 , relres= 0.8382488837553602 , err= 0.40461748759374533
ii= 47 , relres= 0.8316128244545896 , err= 0.40036150980077845
ii= 48 , relres= 0.7849981802190552 , err= 0.3898867796603661
ii= 49 , relres= 0.7506862008386663 , err= 0.37781941258935264
```

```
ii= 50 , relres= 0.7431728865902496 , err= 0.36444281338892603
ii= 51 , relres= 0.7409552365411323 , err= 0.36134181690694844
ii= 52 , relres= 0.7157644487071289 , err= 0.3522121037406777
ii= 53 , relres= 0.7568410238465315 , err= 0.3422998503183993
ii= 54 , relres= 0.691858849371054 , err= 0.33825685557909047
ii= 55 , relres= 0.6383544981942765 , err= 0.3259767808112561
ii= 56 , relres= 0.6602632287092464 , err= 0.3192568183520643
ii= 57 , relres= 0.6358084402152615 , err= 0.3139948217142469
ii= 58 , relres= 0.6502901720327735 , err= 0.3088432693483984
ii= 59 , relres= 0.6095403405766294 , err= 0.302201480629772
ii= 60 , relres= 0.5806932059340983 , err= 0.2924280347936109
ii= 61 , relres= 0.5806236684770243 , err= 0.2837272903527303
ii= 62 , relres= 0.5619163881315274 , err= 0.279218101098174
ii= 63 , relres= 0.5364816807993766 , err= 0.2710063910389454
ii= 64 , relres= 0.5861829437871424 , err= 0.2620329713609294
ii= 65 , relres= 0.5560012884099462 , err= 0.25787152132228897
ii= 66 , relres= 0.5625272700286515 , err= 0.2538470411935908
ii= 67 , relres= 0.5279507503049389 , err= 0.24505267539567482
ii= 68 , relres= 0.5242182399912318 , err= 0.23868755058339858
ii= 69 , relres= 0.5064998385366585 , err= 0.2338538189653986
ii= 70 , relres= 0.5289131576975922 , err= 0.2278658718339904
ii= 71 , relres= 0.48704737944611853 , err= 0.22308966429976607
ii= 72 , relres= 0.5352087308300549 , err= 0.21921320386202006
ii= 73 , relres= 0.4548411044734683 , err= 0.21075108621306968
ii= 74 , relres= 0.4695190545878612 , err= 0.20525635636078213
ii= 75 , relres= 0.44716799960653486 , err= 0.20315052013760881
ii= 76 , relres= 0.44150112786162604 , err= 0.1965332610835553
ii= 77 , relres= 0.4235119219144061 , err= 0.19383073160504133
ii= 78 , relres= 0.40485661753331276 , err= 0.18789501090114832
ii= 79 , relres= 0.4042022580069752 , err= 0.1848401372642898
ii= 80 , relres= 0.3921807090428921 , err= 0.1784431830540605
ii= 81 , relres= 0.4106798627733036 , err= 0.17371470068593814
ii= 82 , relres= 0.3879170647132393 , err= 0.17068331752683732
ii= 83 , relres= 0.3946889057925064 , err= 0.16655594142514812
ii= 84 , relres= 0.3714646550982632 , err= 0.16106289358071182
ii= 85 , relres= 0.37569817459320604 , err= 0.15585596020082232
ii= 86 , relres= 0.3674693985649484 , err= 0.1534712183412475
ii= 87 , relres= 0.3484422753733965 , err= 0.15146265337869866
ii= 88 , relres= 0.33906722429547925 , err= 0.1459538444052444
ii= 89 , relres= 0.3259071930154347 , err= 0.13982753279234403
ii= 90 , relres= 0.3248303228902164 , err= 0.13706045334609496
ii= 91 , relres= 0.31617763196149656 , err= 0.1298295897153611
ii= 92 , relres= 0.309520629390583 , err= 0.12599050021784114
ii= 93 , relres= 0.30229171686557244 , err= 0.124233228505026
ii= 94 , relres= 0.29387975442142866 , err= 0.12255315476006257
ii= 95 , relres= 0.28472343135596706 , err= 0.11718026215744122
ii= 96 , relres= 0.31159681135718686 , err= 0.11514195334195688
ii= 97 , relres= 0.3011868308884733 , err= 0.11093482410727118
ii= 98 , relres= 0.27691889613833615 , err= 0.10898659969686386
ii= 99 , relres= 0.27224357336890753 , err= 0.1068738894898439
ii= 100 , relres= 0.27353241954140006 , err= 0.10285993741968259
ii= 101 , relres= 0.2523291597029125 , err= 0.10111283355482188
ii= 102 , relres= 0.23295535194183564 , err= 0.09735117870255884
ii= 103 , relres= 0.24227236963765092 , err= 0.09513009343386343
ii= 104 , relres= 0.22576144898912018 , err= 0.09375902429188267
ii= 105 , relres= 0.22864658743849026 , err= 0.09219709029387613
ii= 106 , relres= 0.22858391552909046 , err= 0.09094812344328444
ii= 107 , relres= 0.21712706759558864 , err= 0.08862491163681693
ii= 108 , relres= 0.21226133511872483 , err= 0.08753960707951086
ii= 109 , relres= 0.21685687942505247 , err= 0.08466444228790196
ii= 110 , relres= 0.20857820090964693 , err= 0.08249398645087128
```

```
ii= 111 , relres= 0.21102642969263571 , err= 0.08035847344773195
ii= 112 , relres= 0.19471488244887347 , err= 0.07737249271698898
ii= 113 , relres= 0.19903251831804952 , err= 0.0753867709303431
ii= 114 , relres= 0.18378595872584824 , err= 0.07352360198434203
ii= 115 , relres= 0.18151115496073786 , err= 0.07154720480746611
ii= 116 , relres= 0.18664538996261984 , err= 0.06998086714474619
ii= 117 , relres= 0.16731456212186757 , err= 0.06908185923119789
ii= 118 , relres= 0.17410388577844202 , err= 0.0665280496713702
ii= 119 , relres= 0.16848627865235163 , err= 0.06581605951556123
ii= 120 , relres= 0.16610529494742937 , err= 0.0644196160644265
ii= 121 , relres= 0.15297167821334415 , err= 0.062491764657437436
ii= 122 , relres= 0.15860577716827604 , err= 0.061484650079722244
ii= 123 , relres= 0.1429606446609068 , err= 0.05893010992427041
ii= 124 , relres= 0.1527737704897643 , err= 0.05831628458633385
ii= 125 , relres= 0.1424497951555186 , err= 0.05600240951775016
ii= 126 , relres= 0.14922845815584382 , err= 0.055288780375306025
ii= 127 , relres= 0.1333300797700707 , err= 0.05333329175614744
ii= 128 , relres= 0.12868385674288343 , err= 0.0521503640468519
ii= 129 , relres= 0.13656136293223975 , err= 0.05105199265568515
ii= 130 , relres= 0.1204985234856421 , err= 0.05003883203914103
ii= 131 , relres= 0.12823645698913883 , err= 0.04861758143209701
ii= 132 , relres= 0.11797302732918195 , err= 0.04754885640421831
ii= 133 , relres= 0.11989325225438356 , err= 0.04569345538426582
ii= 134 , relres= 0.11319424037329463 , err= 0.044389738196091676
ii= 135 , relres= 0.11798841066375151 , err= 0.04363370912594554
ii= 136 , relres= 0.11210574932786506 , err= 0.04245170571311757
ii= 137 , relres= 0.10377335636832444 , err= 0.041972362141781336
ii= 138 , relres= 0.10552711576834396 , err= 0.041092397052040375
ii= 139 , relres= 0.10198721224550375 , err= 0.04009910597650299
ii= 140 , relres= 0.09712846748501897 , err= 0.039787130885519634
ii= 141 , relres= 0.0974660588562867 , err= 0.03863396531312668
ii= 142 , relres= 0.09209504001595382 , err= 0.03772107267715084
ii= 143 , relres= 0.09080857694531086 , err= 0.037189608421895524
ii= 144 , relres= 0.09644784828141485 , err= 0.03680482071051897
ii= 145 , relres= 0.08541969060922655 , err= 0.03552289701782979
ii= 146 , relres= 0.08936449622026818 , err= 0.03497734194693606
ii= 147 , relres= 0.08305985567440353 , err= 0.033768675582668516
ii= 148 , relres= 0.07734758242987715 , err= 0.03298699451795585
ii= 149 , relres= 0.07503717293213388 , err= 0.03186493495076194
ii= 150 , relres= 0.07474443823640753 , err= 0.03156631259905164
ii= 151 , relres= 0.079553185947194 , err= 0.03106567840113979
ii= 152 , relres= 0.0749510168286014 , err= 0.029845438027881494
ii= 153 , relres= 0.07461213268600489 , err= 0.029445595933260106
ii= 154 , relres= 0.07274722458395415 , err= 0.02862657448994649
ii= 155 , relres= 0.07011048769006714 , err= 0.027927816282795566
ii= 156 , relres= 0.06736995601348368 , err= 0.027413380002600497
ii= 157 , relres= 0.07180857763727982 , err= 0.026714775115950072
ii= 158 , relres= 0.06834433971578435 , err= 0.02599452951637358
ii= 159 , relres= 0.06251177438643268 , err= 0.02564250806373817
ii= 160 , relres= 0.0654304761982668 , err= 0.025180143657314538
ii= 161 , relres= 0.06177445009596259 , err= 0.024323431018389616
ii= 162 , relres= 0.06291858562002664 , err= 0.024096420139411708
ii= 163 , relres= 0.059761253684280785 , err= 0.023544454385379797
ii= 164 , relres= 0.06684136255669348 , err= 0.022798622590139934
ii= 165 , relres= 0.05511265290216267 , err= 0.022316346472122606
ii= 166 , relres= 0.05332220804183329 , err= 0.021263697962340844
ii= 167 , relres= 0.05230016242607625 , err= 0.020893720267471216
ii= 168 , relres= 0.05033074315933619 , err= 0.019978705315899313
ii= 169 , relres= 0.051907487447635285 , err= 0.019542509814377274
ii= 170 , relres= 0.04866723094422723 , err= 0.019163309925930475
ii= 171 , relres= 0.04660709526697056 , err= 0.01854307150501935
```

```
ii= 172 , relres= 0.0462805610361697 , err= 0.01829505219618834
ii= 173 , relres= 0.05034111135484107 , err= 0.01783961851396112
ii= 174 , relres= 0.0457177803792172 , err= 0.017403038824993312
ii= 175 , relres= 0.04356179793127847 , err= 0.017121072127075837
ii= 176 , relres= 0.044225424059372055 , err= 0.016389249275867206
ii= 177 , relres= 0.04063736907711343 , err= 0.01580395726115123
ii= 178 , relres= 0.03965321199764003 , err= 0.015685825701679604
ii= 179 , relres= 0.04260307624411802 , err= 0.01529613399648522
ii= 180 , relres= 0.03796625198454249 , err= 0.014972993338448766
ii= 181 , relres= 0.038567993890012135 , err= 0.014808416153468978
ii= 182 , relres= 0.03636905101465063 , err= 0.014542601199374226
ii= 183 , relres= 0.03689330165798387 , err= 0.013930823278666276
ii= 184 , relres= 0.03398099596883829 , err= 0.013580890379580603
ii= 185 , relres= 0.03721216748541617 , err= 0.013420679299296273
ii= 186 , relres= 0.03456208380158614 , err= 0.013023218291598424
ii= 187 , relres= 0.03416132804566908 , err= 0.012806755026856954
ii= 188 , relres= 0.03430031956128173 , err= 0.012405959476415594
ii= 189 , relres= 0.03261633739587471 , err= 0.012154267610770474
ii= 190 , relres= 0.03206836736246428 , err= 0.01190733527508793
ii= 191 , relres= 0.031349150317142346 , err= 0.011434661204143956
ii= 192 , relres= 0.029235898072304676 , err= 0.011079376541164568
ii= 193 , relres= 0.030662552462860246 , err= 0.010667417524813566
ii= 194 , relres= 0.0281280232774137 , err= 0.010391106288955163
ii= 195 , relres= 0.028193817757391826 , err= 0.010283130444947016
ii= 196 , relres= 0.028342110675259734 , err= 0.009912914437229282
ii= 197 , relres= 0.028718438933153196 , err= 0.009629902528990687
ii= 198 , relres= 0.026626357230832228 , err= 0.009483936222040478
ii= 199 , relres= 0.025353856934956738 , err= 0.009346602727569828
ii= 200 , relres= 0.027386571543124155 , err= 0.009004383567032027
ii= 201 , relres= 0.024971994065528615 , err= 0.008778131430344394
ii= 202 , relres= 0.025180057142484093 , err= 0.008687835105335329
ii= 203 , relres= 0.024793583004957275 , err= 0.008500429976873565
ii= 204 , relres= 0.022979876032526603 , err= 0.008198488747954893
ii= 205 , relres= 0.02269689097929878 , err= 0.008095829202441864
ii= 206 , relres= 0.025655898738393006 , err= 0.007745706158717239
ii= 207 , relres= 0.02161718013618432 , err= 0.00757446088996414
ii= 208 , relres= 0.02132580305795041 , err= 0.007498846803763767
ii= 209 , relres= 0.021644863649043115 , err= 0.007209945704355931
ii= 210 , relres= 0.021300685894356484 , err= 0.007053875290126033
ii= 211 , relres= 0.019027888030833464 , err= 0.006891326221036841
ii= 212 , relres= 0.020675148746331633 , err= 0.006603004398871134
ii= 213 , relres= 0.018173300069951076 , err= 0.006429258173999825
ii= 214 , relres= 0.01793538991658356 , err= 0.006244402876826108
ii= 215 , relres= 0.016973374143534052 , err= 0.005889106813796337
ii= 216 , relres= 0.017858805451371158 , err= 0.005831609056606582
ii= 217 , relres= 0.017355046647425296 , err= 0.005665186099630033
ii= 218 , relres= 0.01681479884432782 , err= 0.0055367077301614895
ii= 219 , relres= 0.016736647943976696 , err= 0.005477105435899618
ii= 220 , relres= 0.01637412455101229 , err= 0.005332886111014181
ii= 221 , relres= 0.015783741971915292 , err= 0.005128001241138441
ii= 222 , relres= 0.015493820568502483 , err= 0.00503772618575348
ii= 223 , relres= 0.013932343041387326 , err= 0.0049680222613510015
ii= 224 , relres= 0.014983006225140783 , err= 0.004880813083086156
ii= 225 , relres= 0.013307000835080103 , err= 0.004697190353937285
ii= 226 , relres= 0.015086596875992305 , err= 0.004611540965863214
ii= 227 , relres= 0.013530830359842785 , err= 0.0045122220526153
ii= 228 , relres= 0.012985691341330693 , err= 0.0043583154750600215
ii= 229 , relres= 0.01264235434460438 , err= 0.00427429058319432
ii= 230 , relres= 0.012278256293488363 , err= 0.004201444062756296
ii= 231 , relres= 0.011961660994198701 , err= 0.004036151035022607
ii= 232 , relres= 0.011128903048815688 , err= 0.003988587270173568
```

```
ii= 233 , relres= 0.011225218076406984 , err= 0.003921917188800056
ii= 234 , relres= 0.010442802957300133 , err= 0.0038062321305461543
ii= 235 , relres= 0.010313752353529536 , err= 0.0037121844625975643
ii= 236 , relres= 0.010195370626724548 , err= 0.0036912863463261247
ii= 237 , relres= 0.010569718818631264 , err= 0.003503904086189217
ii= 238 , relres= 0.01009690231811192 , err= 0.003447397659537512
ii= 239 , relres= 0.009804744040167731 , err= 0.003388742941893254
ii= 240 , relres= 0.009618325956533814 , err= 0.003268752133033182
ii= 241 , relres= 0.009398614170428359 , err= 0.0032222979382244294
ii= 242 , relres= 0.009239931470688358 , err= 0.003186250632379609
ii= 243 , relres= 0.008937926615299695 , err= 0.0031139382332541067
ii= 244 , relres= 0.009078718143129699 , err= 0.0030581578056194133
ii= 245 , relres= 0.008927577005287454 , err= 0.0029996171888337516
ii= 246 , relres= 0.008177497711529005 , err= 0.0029379594440051868
ii= 247 , relres= 0.008494429874686207 , err= 0.0029014161494189455
ii= 248 , relres= 0.009342608857337703 , err= 0.00283793850075862
ii= 249 , relres= 0.007497404562269373 , err= 0.002743118219211356
ii= 250 , relres= 0.008180527888746222 , err= 0.002684427244062964
ii= 251 , relres= 0.007350812803298477 , err= 0.002585407175084344
ii= 252 , relres= 0.007575124459499093 , err= 0.002548806784829407
ii= 253 , relres= 0.007139095184583399 , err= 0.0024551274706372445
ii= 254 , relres= 0.00680020866379282 , err= 0.002377602468171716
ii= 255 , relres= 0.006830564660327846 , err= 0.0023502199024380624
ii= 256 , relres= 0.006679916511157931 , err= 0.002321568203319486
ii= 257 , relres= 0.006452786276285765 , err= 0.0022606227180809947
ii= 258 , relres= 0.006252330131019296 , err= 0.0022072957849391347
ii= 259 , relres= 0.006529308477144541 , err= 0.0021651110210196595
ii= 260 , relres= 0.006442734701274955 , err= 0.00210784635158392
ii= 261 , relres= 0.005836338496136515 , err= 0.002047823616971598
ii= 262 , relres= 0.005704638238941 , err= 0.0019856254065993197
ii= 263 , relres= 0.0056713218945763375 , err= 0.001968827156698639
ii= 264 , relres= 0.005530880211887968 , err= 0.0019147904662378213
ii= 265 , relres= 0.005173234368466859 , err= 0.0018742086244320677
ii= 266 , relres= 0.005381393377972747 , err= 0.001849939873405075
ii= 267 , relres= 0.005668934093897472 , err= 0.0018134409884950952
ii= 268 , relres= 0.005097853378446842 , err= 0.0017457823173299076
ii= 269 , relres= 0.004880421572283636 , err= 0.0017285663499559598
ii= 270 , relres= 0.0047176012112520194 , err= 0.0016995204911756949
ii= 271 , relres= 0.004580554750730378 , err= 0.001633895379544039
ii= 272 , relres= 0.004632541135759534 , err= 0.001594429030630302
ii= 273 , relres= 0.004364318536284357 , err= 0.0015718221801022212
ii= 274 , relres= 0.005009397889526168 , err= 0.0015021436410763555
ii= 275 , relres= 0.004301654315209764 , err= 0.0014762506867298686
ii= 276 , relres= 0.004114546653415314 , err= 0.001459032776269278
ii= 277 , relres= 0.004085588387442476 , err= 0.0014233568635572081
ii= 278 , relres= 0.004222684303747932 , err= 0.0013893989897766645
ii= 279 , relres= 0.0037936865053379994 , err= 0.0013432005429709702
ii= 280 , relres= 0.0034608326517753703 , err= 0.0013125178732578556
ii= 281 , relres= 0.0037576944885399583 , err= 0.001248420156411471
ii= 282 , relres= 0.003392100373438546 , err= 0.0012164221613860475
ii= 283 , relres= 0.0033387507381695677 , err= 0.0012082627218148673
ii= 284 , relres= 0.0035568058494371835 , err= 0.0011805815104774125
ii= 285 , relres= 0.003473282599730541 , err= 0.0011560526620532823
ii= 286 , relres= 0.003241456939081272 , err= 0.0011330510505384382
ii= 287 , relres= 0.003408082497539587 , err= 0.0011074112212507245
ii= 288 , relres= 0.003036537501508104 , err= 0.001090087506709392
ii= 289 , relres= 0.0030393987644328465 , err= 0.0010406802120926796
ii= 290 , relres= 0.002832120899153057 , err= 0.0010272978735645806
ii= 291 , relres= 0.003012733515381975 , err= 0.0010144109506703912
ii= 292 , relres= 0.002943391222002321 , err= 0.0009854148980733574
ii= 293 , relres= 0.0026647822926830905 , err= 0.0009498896294523719
```

```
ii= 294 , relres= 0.002669712921106038 , err= 0.0009445816385905056
ii= 295 , relres= 0.0027223039677729656 , err= 0.0009125442602985991
ii= 296 , relres= 0.0026094332176170164 , err= 0.0008957741758729607
ii= 297 , relres= 0.0024186199262405082 , err= 0.0008691740874193127
ii= 298 , relres= 0.0022667012512605366 , err= 0.0008567859493623157
ii= 299 , relres= 0.002410346338934771 , err= 0.0008341735730367684
ii= 300 , relres= 0.002417456938042521 , err= 0.000807133692169755
ii= 301 , relres= 0.0020843619969148517 , err= 0.0007865963651907629
ii= 302 , relres= 0.0021575744490113136 , err= 0.0007733812675107483
ii= 303 , relres= 0.002084647241300592 , err= 0.0007514072624651864
ii= 304 , relres= 0.0020588109023186355 , err= 0.0007420202441324495
ii= 305 , relres= 0.002160047872360916 , err= 0.0007310054392522253
ii= 306 , relres= 0.0018993831654732945 , err= 0.0007130707328101246
ii= 307 , relres= 0.0019534086867754098 , err= 0.0006825689672818858
ii= 308 , relres= 0.001768427523337371 , err= 0.0006763395771869252
ii= 309 , relres= 0.0017099587853615912 , err= 0.0006653281137780833
ii= 310 , relres= 0.001768263078726282 , err= 0.0006549028633005987
ii= 311 , relres= 0.0018119591831012836 , err= 0.0006301651941539784
ii= 312 , relres= 0.0016356478069203303 , err= 0.000623682192488507
ii= 313 , relres= 0.0016648972595497808 , err= 0.0006178517439695671
ii= 314 , relres= 0.001642383827568658 , err= 0.0006025235370241959
ii= 315 , relres= 0.001694164388225891 , err= 0.0005883796323012197
ii= 316 , relres= 0.0015451060012344954 , err= 0.0005776050806104915
ii= 317 , relres= 0.001558965389606927 , err= 0.0005643094787866806
ii= 318 , relres= 0.0015763766513358973 , err= 0.0005515375236229426
ii= 319 , relres= 0.001460627774655536 , err= 0.0005343184478214828
ii= 320 , relres= 0.0013750704343769135 , err= 0.0005167243170262897
ii= 321 , relres= 0.0014206216745812888 , err= 0.0005082134021053715
ii= 322 , relres= 0.001353925817328983 , err= 0.00048751181242910233
ii= 323 , relres= 0.0012499325263301679 , err= 0.00047902695401744845
ii= 324 , relres= 0.0013017229328660324 , err= 0.0004678862124424797
ii= 325 , relres= 0.0013212433711571377 , err= 0.0004595384605643916
ii= 326 , relres= 0.001191201365926744 , err= 0.0004514774364592004
ii= 327 , relres= 0.0012273798111771342 , err= 0.000439566380980816
ii= 328 , relres= 0.001219583557996248 , err= 0.0004317012660628535
ii= 329 , relres= 0.0013096463739022811 , err= 0.0004228920475970319
ii= 330 , relres= 0.0011928112905767348 , err= 0.0004138945807352658
ii= 331 , relres= 0.0011068998399344652 , err= 0.0003974911165890096
ii= 332 , relres= 0.001061280700338525 , err= 0.0003950299877414115
ii= 333 , relres= 0.001157518447565142 , err= 0.00038380201076672083
ii= 334 , relres= 0.0010432931331951704 , err= 0.0003722409238118677
ii= 335 , relres= 0.0010011234385293687 , err= 0.00036654095174669165
ii= 336 , relres= 0.0010633122873469156 , err= 0.000359505054332893
ii= 337 , relres= 0.0009658630634723116 , err= 0.0003519543472854683
ii= 338 , relres= 0.000986355968355648 , err= 0.00034704056310239274
ii= 339 , relres= 0.0009276074582844512 , err= 0.00033743782705385016
ii= 340 , relres= 0.0009025328491717244 , err= 0.00033175498875340594
ii= 341 , relres= 0.0009422265057582846 , err= 0.00032769879223392047
ii= 342 , relres= 0.0009621006961844595 , err= 0.0003132317813057536
ii= 343 , relres= 0.0007974248055940508 , err= 0.00030218799760426275
ii= 344 , relres= 0.0008003806697659723 , err= 0.0002970858074490647
ii= 345 , relres= 0.0008029806905410637 , err= 0.00029127516071770457
ii= 346 , relres= 0.0008017807049843619 , err= 0.00028565931849501526
ii= 347 , relres= 0.0008230029977152357 , err= 0.00027584577178175
ii= 348 , relres= 0.0007101865804398153 , err= 0.0002726149480685274
ii= 349 , relres= 0.0009183304475714227 , err= 0.0002618376246528756
ii= 350 , relres= 0.000714376582271743 , err= 0.0002524742780331415
ii= 351 , relres= 0.0007091241740238656 , err= 0.00024925266070375613
ii= 352 , relres= 0.0007636822203658364 , err= 0.0002446291090450805
ii= 353 , relres= 0.0006945817073537734 , err= 0.00023881112324063288
ii= 354 , relres= 0.0007713261076318987 , err= 0.00022969862208105436
```

```
ii= 355 , relres= 0.0006161049817086734 , err= 0.00022084966691289973
ii= 356 , relres= 0.0006401916800543174 , err= 0.00021747960952400394
ii= 357 , relres= 0.0006088745770275774 , err= 0.0002092339964293635
ii= 358 , relres= 0.0005802680906003077 , err= 0.0002073640412709129
ii= 359 , relres= 0.000594802069280019 , err= 0.00020345728225978977
ii= 360 , relres= 0.0005565455475327331 , err= 0.00019972580516581194
ii= 361 , relres= 0.0005749049564132201 , err= 0.0001928615910386798
ii= 362 , relres= 0.0005381479781732079 , err= 0.0001860613716616759
ii= 363 , relres= 0.0005241471695432272 , err= 0.00018321353387905744
ii= 364 , relres= 0.0005094118980581732 , err= 0.00018107088312411198
ii= 365 , relres= 0.0005349400716525107 , err= 0.00017635804965904862
ii= 366 , relres= 0.00048647500912635266 , err= 0.0001705500028459961
ii= 367 , relres= 0.0004597644900617365 , err= 0.00016930025373551095
ii= 368 , relres= 0.00045588596301883325 , err= 0.00016689496962019604
ii= 369 , relres= 0.0005027799147273812 , err= 0.0001625929527914766
ii= 370 , relres= 0.000466284941928878 , err= 0.0001589218132294568
ii= 371 , relres= 0.0004638709798358784 , err= 0.00015566483604482676
ii= 372 , relres= 0.0004513976033772072 , err= 0.00015375553474095623
ii= 373 , relres= 0.0004148211374141591 , err= 0.0001500047725931417
ii= 374 , relres= 0.00046614397915764464 , err= 0.0001456971001115619
ii= 375 , relres= 0.0004010772608497433 , err= 0.00014307554539702314
ii= 376 , relres= 0.00037703034209925456 , err= 0.00013983950192486208
ii= 377 , relres= 0.00037048158050230685 , err= 0.00013859222920403972
ii= 378 , relres= 0.0004045034014784703 , err= 0.0001338849974835223
ii= 379 , relres= 0.0004015972415063304 , err= 0.00012993572387999302
ii= 380 , relres= 0.000359129348146144 , err= 0.00012700842143061617
ii= 381 , relres= 0.00037523949562674974 , err= 0.0001248868699556361
ii= 382 , relres= 0.0003473794742050611 , err= 0.0001213202464727839
ii= 383 , relres= 0.0003606487328802317 , err= 0.00011895269057236613
ii= 384 , relres= 0.0003283261802801176 , err= 0.00011360327922367874
ii= 385 , relres= 0.0003282448232322996 , err= 0.00010994262614266002
ii= 386 , relres= 0.00034441300257908556 , err= 0.00010853676155917967
ii= 387 , relres= 0.000291106572321221 , err= 0.00010461289574397604
ii= 388 , relres= 0.00030258483704175275 , err= 0.00010230334395635908
ii= 389 , relres= 0.00028857367715560695 , err= 0.00010046311378219965
ii= 390 , relres= 0.0002905279931342312 , err= 9.835319136223725e-05
ii= 391 , relres= 0.0002799652535185359 , err= 9.65711372784972e-05
ii= 392 , relres= 0.00028389174732665643 , err= 9.49950800080325e-05
ii= 393 , relres= 0.00025989354067690106 , err= 9.307933338949816e-05
ii= 394 , relres= 0.0002542669555233134 , err= 9.173999902143898e-05
ii= 395 , relres= 0.0002812003509655358 , err= 9.01859686331388e-05
ii= 396 , relres= 0.00022801456331954093 , err= 8.676364157052821e-05
ii= 397 , relres= 0.0002317171787512992 , err= 8.401811846358533e-05
ii= 398 , relres= 0.00025445040780453453 , err= 8.178081447255698e-05
ii= 399 , relres= 0.00021985485261568098 , err= 7.964649761994983e-05
ii= 400 , relres= 0.00022518678101768688 , err= 7.805331004582051e-05
ii= 401 , relres= 0.0002245375593646965 , err= 7.600523776115254e-05
ii= 402 , relres= 0.00021246249828003498 , err= 7.466313193769566e-05
ii= 403 , relres= 0.00021896065308672267 , err= 7.319802800886081e-05
ii= 404 , relres= 0.000211044020253861 , err= 7.181081741089938e-05
ii= 405 , relres= 0.00019878981057391674 , err= 7.014505508536425e-05
ii= 406 , relres= 0.00019850527159157044 , err= 6.96023049314125e-05
ii= 407 , relres= 0.00020680323147024977 , err= 6.796419627658586e-05
ii= 408 , relres= 0.00018284914498257888 , err= 6.51181744114531e-05
ii= 409 , relres= 0.00018112676590044798 , err= 6.414417798314325e-05
ii= 410 , relres= 0.0001748397646309237 , err= 6.239133032092195e-05
ii= 411 , relres= 0.00016948339221495613 , err= 6.0754250511721035e-05
ii= 412 , relres= 0.00017359604938961562 , err= 5.956538487527493e-05
ii= 413 , relres= 0.000164324858761985 , err= 5.886728061413094e-05
ii= 414 , relres= 0.00017099698767965302 , err= 5.655375824819298e-05
ii= 415 , relres= 0.00017772143365976195 , err= 5.5544591751230355e-05
```

```

ii= 416 , relres= 0.00015833649154197704 , err= 5.409417913873099e-05
ii= 417 , relres= 0.0001540719833741759 , err= 5.277391812923748e-05
ii= 418 , relres= 0.0001427440264541362 , err= 5.218486573771776e-05
ii= 419 , relres= 0.0001632627635133782 , err= 5.0273039974465535e-05
ii= 420 , relres= 0.0001360486477587895 , err= 4.825377858739748e-05
ii= 421 , relres= 0.0001304524365518918 , err= 4.76076330730953e-05
ii= 422 , relres= 0.00012824109743331618 , err= 4.679574683623689e-05
ii= 423 , relres= 0.00013174698528103313 , err= 4.5710327146874126e-05
ii= 424 , relres= 0.00013214230681683265 , err= 4.5164241702501035e-05
ii= 425 , relres= 0.00012736430459148434 , err= 4.3755738116923245e-05
ii= 426 , relres= 0.00011784955289489977 , err= 4.263694939291746e-05
ii= 427 , relres= 0.0001165785275541639 , err= 4.193513316254817e-05
ii= 428 , relres= 0.00011462878342547742 , err= 4.145046306727497e-05
ii= 429 , relres= 0.00011284834192314461 , err= 3.998423101269724e-05
ii= 430 , relres= 0.00011053788521414937 , err= 3.889456036662013e-05
ii= 431 , relres= 0.0001000133590837659 , err= 3.8283093656562024e-05
ii= 432 , relres= 0.00011127942317019245 , err= 3.7578963173019984e-05
ii= 433 , relres= 0.00010376771750416044 , err= 3.638623598001191e-05
ii= 434 , relres= 0.00010617704804518754 , err= 3.59475326298508e-05
ii= 435 , relres= 9.614367146027072e-05 , err= 3.465648471458762e-05
ii= 436 , relres= 8.996379471142654e-05 , err= 3.412601599114454e-05
ii= 437 , relres= 9.046010337008006e-05 , err= 3.392544870963677e-05
ii= 438 , relres= 9.483388253079992e-05 , err= 3.299657300528374e-05
ii= 439 , relres= 8.73997212354149e-05 , err= 3.1730821506790406e-05
ii= 440 , relres= 8.367627885382674e-05 , err= 3.122788592145465e-05
ii= 441 , relres= 8.426181525775292e-05 , err= 3.0439640805565004e-05
ii= 442 , relres= 8.589492219734826e-05 , err= 2.9952832414975207e-05
ii= 443 , relres= 8.098181780556852e-05 , err= 2.9442456317684533e-05
ii= 444 , relres= 8.526070663338324e-05 , err= 2.893468654432839e-05
ii= 445 , relres= 8.229779511662974e-05 , err= 2.783062198958955e-05
ii= 446 , relres= 7.824362110989418e-05 , err= 2.7402850348893106e-05
ii= 447 , relres= 7.612017178016451e-05 , err= 2.657344445410354e-05
ii= 448 , relres= 7.779825932545342e-05 , err= 2.5460087149994463e-05
ii= 449 , relres= 6.908345496847526e-05 , err= 2.493679012679946e-05
ii= 450 , relres= 6.798606754541109e-05 , err= 2.4397647395648212e-05
ii= 451 , relres= 7.40361282938922e-05 , err= 2.33230233882785e-05
ii= 452 , relres= 7.138594237920848e-05 , err= 2.2781288557292682e-05
ii= 453 , relres= 6.116830880986338e-05 , err= 2.2214666755285943e-05
ii= 454 , relres= 7.320532617319457e-05 , err= 2.1590623170645557e-05
ii= 455 , relres= 6.0291195819925903e-05 , err= 2.0839169162755955e-05
ii= 456 , relres= 6.097318422925351e-05 , err= 2.008780515576531e-05
ii= 457 , relres= 5.6351112394355836e-05 , err= 1.985186878822291e-05
ii= 458 , relres= 5.549059827312263e-05 , err= 1.9404323478918947e-05
ii= 459 , relres= 5.659108291412752e-05 , err= 1.899306597938815e-05
ii= 460 , relres= 6.077701602121464e-05 , err= 1.8078461191992665e-05
ii= 461 , relres= 5.153112449237099e-05 , err= 1.7762696418148623e-05
ii= 462 , relres= 4.932389357819697e-05 , err= 1.7582018375260276e-05
ii= 463 , relres= 5.298298267602366e-05 , err= 1.7093073118653754e-05
ii= 464 , relres= 5.017514986636277e-05 , err= 1.6673189251897666e-05
ii= 465 , relres= 5.0488894597055466e-05 , err= 1.6150004896916127e-05
ii= 466 , relres= 4.499357190207939e-05 , err= 1.584803639382292e-05
ii= 467 , relres= 4.600723632467841e-05 , err= 1.5671875548431803e-05
ii= 468 , relres= 4.3878255983515684e-05 , err= 1.5160454214815928e-05
ii= 469 , relres= 4.4546463223818e-05 , err= 1.4713046908876727e-05
ii= 470 , relres= 4.285314705207685e-05 , err= 1.4492675997640556e-05
ii= 471 , relres= 3.7628485788358805e-05 , err= 1.409754543866622e-05
ii= 472 , relres= 4.0311168572603766e-05 , err= 1.3428808846308606e-05
ii= 473 , relres= 3.706564849686061e-05 , err= 1.3190438497489049e-05
ii= 474 , relres= 3.72589690400964e-05 , err= 1.3069487361630338e-05
ii= 475 , relres= 3.6397463181473404e-05 , err= 1.2829255452872123e-05
ii= 476 , relres= 3.792269360495778e-05 , err= 1.2625997652982389e-05

```

```
ii= 477 , relres= 3.820629026864592e-05 , err= 1.2380840839287993e-05
ii= 478 , relres= 4.019524809437662e-05 , err= 1.1984456921819748e-05
ii= 479 , relres= 3.547748435218041e-05 , err= 1.178622722665104e-05
ii= 480 , relres= 3.455956420855009e-05 , err= 1.1575389326030584e-05
ii= 481 , relres= 3.476321000828461e-05 , err= 1.1465236112371555e-05
ii= 482 , relres= 3.181934336831601e-05 , err= 1.107848234087627e-05
ii= 483 , relres= 3.274733057547803e-05 , err= 1.0941985030155393e-05
ii= 484 , relres= 2.875978860463233e-05 , err= 1.0301056053595447e-05
ii= 485 , relres= 3.0173823618665314e-05 , err= 1.008385573414041e-05
ii= 486 , relres= 2.9692389668035906e-05 , err= 9.757181705128864e-06
ii= 487 , relres= 2.8770897643789283e-05 , err= 9.549782354218144e-06
ii= 488 , relres= 2.600158239250873e-05 , err= 9.308224853066525e-06
ii= 489 , relres= 2.595142164898886e-05 , err= 9.164872450944985e-06
ii= 490 , relres= 2.5976254850914145e-05 , err= 8.826066636758233e-06
ii= 491 , relres= 2.531338522257954e-05 , err= 8.685489601589604e-06
ii= 492 , relres= 2.5236926655594126e-05 , err= 8.495528391374176e-06
ii= 493 , relres= 2.469081653080581e-05 , err= 8.340925187959498e-06
ii= 494 , relres= 2.2687818830206146e-05 , err= 8.200924306543582e-06
ii= 495 , relres= 2.293142169249637e-05 , err= 8.154737065632734e-06
ii= 496 , relres= 2.4216115558653175e-05 , err= 7.85053838933219e-06
ii= 497 , relres= 2.250097394255511e-05 , err= 7.730393089731246e-06
ii= 498 , relres= 2.128724094565691e-05 , err= 7.649251605796733e-06
ii= 499 , relres= 2.0073649920565617e-05 , err= 7.482949549940314e-06
ii= 500 , relres= 2.1090710955776445e-05 , err= 7.436347194256429e-06
ii= 501 , relres= 2.308318591422868e-05 , err= 7.264950965705134e-06
ii= 502 , relres= 2.2272074690125005e-05 , err= 7.031180715833401e-06
ii= 503 , relres= 1.994072069159883e-05 , err= 6.888057105575983e-06
ii= 504 , relres= 2.0879051634936698e-05 , err= 6.780138176494443e-06
ii= 505 , relres= 1.7658844897551613e-05 , err= 6.5844757707223414e-06
ii= 506 , relres= 1.8352345591350147e-05 , err= 6.435609496621523e-06
ii= 507 , relres= 1.7685202368416296e-05 , err= 6.105581802229698e-06
ii= 508 , relres= 1.6184453033826165e-05 , err= 5.994457387936096e-06
ii= 509 , relres= 1.5908889871765733e-05 , err= 5.936768067434121e-06
ii= 510 , relres= 1.611188362481803e-05 , err= 5.743106579676734e-06
ii= 511 , relres= 1.5083868015916398e-05 , err= 5.563269194437601e-06
ii= 512 , relres= 1.5282747334798765e-05 , err= 5.401294095060437e-06
ii= 513 , relres= 1.4833313297456736e-05 , err= 5.321569751404769e-06
ii= 514 , relres= 1.4449009768436667e-05 , err= 5.2783748505948824e-06
ii= 515 , relres= 1.4276875342076386e-05 , err= 5.11461307882126e-06
ii= 516 , relres= 1.4448383735413111e-05 , err= 5.015828339022512e-06
ii= 517 , relres= 1.4315616271043463e-05 , err= 4.922388652734257e-06
ii= 518 , relres= 1.2968502047655319e-05 , err= 4.848354690216431e-06
ii= 519 , relres= 1.2981289822293872e-05 , err= 4.769488538788134e-06
ii= 520 , relres= 1.5296582864336806e-05 , err= 4.654235184767624e-06
ii= 521 , relres= 1.2761548329188524e-05 , err= 4.380792650153092e-06
ii= 522 , relres= 1.2323075750681885e-05 , err= 4.345124556471554e-06
ii= 523 , relres= 1.1857033703353866e-05 , err= 4.2662707261388135e-06
ii= 524 , relres= 1.1492154427056054e-05 , err= 4.095321415404002e-06
ii= 525 , relres= 1.244139611283179e-05 , err= 3.974814093335519e-06
ii= 526 , relres= 1.1727676537190711e-05 , err= 3.876490618459019e-06
ii= 527 , relres= 1.044582636411016e-05 , err= 3.799511199294615e-06
ii= 528 , relres= 1.0387177345041232e-05 , err= 3.758702734593528e-06
ii= 529 , relres= 1.1163952589940911e-05 , err= 3.622399590226364e-06
ii= 530 , relres= 1.0597292201131274e-05 , err= 3.5116428043766436e-06
ii= 531 , relres= 9.397089625433551e-06 , err= 3.4032796494722483e-06
ii= 532 , relres= 9.319135651606945e-06 , err= 3.3718858561919065e-06
ii= 533 , relres= 1.044960009979666e-05 , err= 3.2980397164330516e-06
ii= 534 , relres= 9.941035290521517e-06 , err= 3.215270636186008e-06
ii= 535 , relres= 8.861518615585795e-06 , err= 3.1293144384183707e-06
ii= 536 , relres= 8.668895147289213e-06 , err= 3.08230698682646e-06
ii= 537 , relres= 8.362601526489418e-06 , err= 2.97873331596753e-06
```

```
ii= 538 , relres= 8.196957752707413e-06 , err= 2.9424713299018998e-06
ii= 539 , relres= 9.315690912995071e-06 , err= 2.8866627545866046e-06
ii= 540 , relres= 8.304751919111544e-06 , err= 2.7848240266489332e-06
ii= 541 , relres= 7.438792802406874e-06 , err= 2.6742362443460463e-06
ii= 542 , relres= 7.72377128199865e-06 , err= 2.6306856338530616e-06
ii= 543 , relres= 7.384662472007298e-06 , err= 2.601729437361599e-06
ii= 544 , relres= 7.827393988645707e-06 , err= 2.5325521404662575e-06
ii= 545 , relres= 7.013273374173703e-06 , err= 2.4192234832026715e-06
ii= 546 , relres= 6.748191042151587e-06 , err= 2.3679495718821058e-06
ii= 547 , relres= 6.656848326329448e-06 , err= 2.3457618051632193e-06
ii= 548 , relres= 6.76086631637977e-06 , err= 2.240644884204877e-06
ii= 549 , relres= 6.3079641571918164e-06 , err= 2.2135160468451695e-06
ii= 550 , relres= 6.354419321438996e-06 , err= 2.1782697894304295e-06
ii= 551 , relres= 5.602937530683017e-06 , err= 2.073153843958759e-06
ii= 552 , relres= 5.572701684296131e-06 , err= 2.0624126033676936e-06
ii= 553 , relres= 5.621034591594047e-06 , err= 2.044491369716083e-06
ii= 554 , relres= 5.9542043226262054e-06 , err= 1.9636742579260544e-06
ii= 555 , relres= 5.4520697996435385e-06 , err= 1.9117822681158297e-06
ii= 556 , relres= 5.3137250005397714e-06 , err= 1.871195633381177e-06
ii= 557 , relres= 5.1910410517400144e-06 , err= 1.8401109689389792e-06
ii= 558 , relres= 5.0915496190249654e-06 , err= 1.7817831594392144e-06
ii= 559 , relres= 5.091358296214389e-06 , err= 1.7674083049242867e-06
ii= 560 , relres= 4.82289687763606e-06 , err= 1.678280045862535e-06
ii= 561 , relres= 4.294946351519394e-06 , err= 1.630145058333188e-06
ii= 562 , relres= 4.427636562282433e-06 , err= 1.62173718188959e-06
ii= 563 , relres= 4.7117873970080725e-06 , err= 1.5856465913215625e-06
ii= 564 , relres= 4.7637431513490785e-06 , err= 1.5441130212744938e-06
ii= 565 , relres= 4.444053615135921e-06 , err= 1.5033310199674269e-06
ii= 566 , relres= 3.991013402435362e-06 , err= 1.4648423384837708e-06
ii= 567 , relres= 3.921706080333457e-06 , err= 1.431023861173558e-06
ii= 568 , relres= 3.836452967409778e-06 , err= 1.411325802351373e-06
ii= 569 , relres= 4.2760476649473686e-06 , err= 1.378068270470634e-06
ii= 570 , relres= 3.7927259910591624e-06 , err= 1.3490612234361072e-06
ii= 571 , relres= 4.036664995926947e-06 , err= 1.3239437239287816e-06
ii= 572 , relres= 3.8014138805876724e-06 , err= 1.2848475745491323e-06
ii= 573 , relres= 3.336149312835708e-06 , err= 1.2622388123651141e-06
ii= 574 , relres= 3.5855855111666945e-06 , err= 1.2463594394382807e-06
ii= 575 , relres= 3.54867967215508e-06 , err= 1.2126622716768258e-06
ii= 576 , relres= 3.639533708030624e-06 , err= 1.1809336815365925e-06
ii= 577 , relres= 3.2105661847203227e-06 , err= 1.1419213965349207e-06
ii= 578 , relres= 3.2956880663783554e-06 , err= 1.115870122861669e-06
ii= 579 , relres= 3.1457929394026417e-06 , err= 1.0907902332855029e-06
ii= 580 , relres= 3.1072502279357015e-06 , err= 1.0725741284949132e-06
ii= 581 , relres= 3.019995899642282e-06 , err= 1.060650989836785e-06
ii= 582 , relres= 2.9819141802922738e-06 , err= 1.0244789097045463e-06
ii= 583 , relres= 2.8793115461839542e-06 , err= 9.99384500607153e-07
ii= 584 , relres= 2.7720071885628794e-06 , err= 9.898454663658045e-07
ii= 585 , relres= 2.6009323402510347e-06 , err= 9.623400034866018e-07
ii= 586 , relres= 2.6449262408177753e-06 , err= 9.476642014352324e-07
ii= 587 , relres= 2.6146513879628292e-06 , err= 9.188079986571678e-07
ii= 588 , relres= 2.575750248370613e-06 , err= 8.781169983919366e-07
ii= 589 , relres= 2.4404222400472197e-06 , err= 8.685101189745928e-07
ii= 590 , relres= 2.3748985433333225e-06 , err= 8.614937925155686e-07
ii= 591 , relres= 2.305123481870544e-06 , err= 8.312822655656963e-07
ii= 592 , relres= 2.355112313686107e-06 , err= 7.922724792014058e-07
ii= 593 , relres= 2.2403461571690987e-06 , err= 7.660532329586376e-07
ii= 594 , relres= 2.226647397799965e-06 , err= 7.564556326440579e-07
ii= 595 , relres= 2.04580980677697e-06 , err= 7.393838302153034e-07
ii= 596 , relres= 2.108218477444025e-06 , err= 7.303684622462841e-07
ii= 597 , relres= 2.0973709196473344e-06 , err= 7.155702210949545e-07
ii= 598 , relres= 1.9683105721470967e-06 , err= 6.834528645999158e-07
```

```

ii= 599 , relres= 1.9919693518281484e-06 , err= 6.751923028574015e-07
ii= 600 , relres= 1.8956576419985209e-06 , err= 6.638818786141454e-07
ii= 601 , relres= 1.8503876630998825e-06 , err= 6.566003049781026e-07
ii= 602 , relres= 2.0534804941138083e-06 , err= 6.401435785571086e-07
ii= 603 , relres= 1.9702220247859e-06 , err= 6.187508156955266e-07
ii= 604 , relres= 1.8957724210015595e-06 , err= 6.080889820888564e-07
ii= 605 , relres= 1.705611434338767e-06 , err= 5.965693736203836e-07
ii= 606 , relres= 1.6481211643777683e-06 , err= 5.789414079951848e-07
ii= 607 , relres= 1.6688105885572874e-06 , err= 5.672739758810014e-07
ii= 608 , relres= 1.7021595486981536e-06 , err= 5.616489662571709e-07
ii= 609 , relres= 1.7351131786953286e-06 , err= 5.393076857534593e-07
ii= 610 , relres= 1.6475135105046919e-06 , err= 5.217084322643334e-07
ii= 611 , relres= 1.3839600910220874e-06 , err= 4.962005024324669e-07
ii= 612 , relres= 1.4626269937512178e-06 , err= 4.892033893215321e-07
ii= 613 , relres= 1.4302938899720824e-06 , err= 4.6744358703348295e-07
ii= 614 , relres= 1.3857220413758539e-06 , err= 4.545673526319469e-07
ii= 615 , relres= 1.2477358050065636e-06 , err= 4.4520084704564644e-07
ii= 616 , relres= 1.3255540488054509e-06 , err= 4.366143882168809e-07
ii= 617 , relres= 1.2924815238006997e-06 , err= 4.2939943245330194e-07
ii= 618 , relres= 1.2123313752280314e-06 , err= 4.208103749013008e-07
ii= 619 , relres= 1.2008833187731868e-06 , err= 4.1471595519360943e-07
ii= 620 , relres= 1.2737844267528279e-06 , err= 4.0063571684838893e-07
ii= 621 , relres= 1.153262811268577e-06 , err= 3.944387210298043e-07
ii= 622 , relres= 1.0693090850525928e-06 , err= 3.895545150738382e-07
ii= 623 , relres= 1.1887366211913241e-06 , err= 3.805721743199654e-07
ii= 624 , relres= 1.147087551519659e-06 , err= 3.742808592678581e-07
ii= 625 , relres= 1.128560282849384e-06 , err= 3.643411968145802e-07
ii= 626 , relres= 1.2447877453151833e-06 , err= 3.5159174423490126e-07
ii= 627 , relres= 9.534158909443079e-07 , err= 3.425706424954825e-07
ii= 628 , relres= 9.88103673491416e-07 , err= 3.364887922341568e-07
ii= 629 , relres= 9.986239525169223e-07 , err= 3.30608291511965e-07
ii= 630 , relres= 9.584273071482914e-07 , err= 3.215938866208587e-07
ii= 631 , relres= 9.815793236542064e-07 , err= 3.1499604302364174e-07
ii= 632 , relres= 9.527128188446602e-07 , err= 2.9951971536627705e-07
ii= 633 , relres= 8.555718009967883e-07 , err= 2.9280486404895627e-07
ii= 634 , relres= 8.342875096312479e-07 , err= 2.892991972568142e-07
ii= 635 , relres= 8.279982456685327e-07 , err= 2.8372672636605434e-07
ii= 636 , relres= 8.216636355914369e-07 , err= 2.7629330581164753e-07
ii= 637 , relres= 8.196850642114911e-07 , err= 2.58981491356548e-07
ii= 638 , relres= 7.050743957996371e-07 , err= 2.5418864080517667e-07
ii= 639 , relres= 7.346630746070246e-07 , err= 2.51346977615748e-07
ii= 640 , relres= 7.836570322562582e-07 , err= 2.4708005190413746e-07
ii= 641 , relres= 7.394390634634888e-07 , err= 2.3864047992363576e-07
ii= 642 , relres= 7.074940962419308e-07 , err= 2.3639882399133154e-07
ii= 643 , relres= 6.907798819811954e-07 , err= 2.2908442909300378e-07
ii= 644 , relres= 6.946355646223882e-07 , err= 2.2641342076662728e-07
ii= 645 , relres= 6.336334803257265e-07 , err= 2.2112145399158062e-07
ii= 646 , relres= 6.40325052197939e-07 , err= 2.1809426084137163e-07
ii= 647 , relres= 6.536720366019838e-07 , err= 2.148425239701415e-07
ii= 648 , relres= 6.196998361294873e-07 , err= 2.1020460304245195e-07
ii= 649 , relres= 5.967965460074254e-07 , err= 2.0021835913663976e-07
ii= 650 , relres= 5.772711383968513e-07 , err= 1.9632860174036195e-07
ii= 651 , relres= 5.258479683694374e-07 , err= 1.9289604903312124e-07
ii= 652 , relres= 5.521166055473128e-07 , err= 1.8385005759010746e-07
ii= 653 , relres= 5.261121141898645e-07 , err= 1.7542633529944782e-07
ii= 654 , relres= 4.753768262965528e-07 , err= 1.738361542218195e-07
ii= 655 , relres= 4.780823465876134e-07 , err= 1.6599355964702892e-07
ii= 656 , relres= 4.6733463532030775e-07 , err= 1.6322824298649471e-07
ii= 657 , relres= 5.093474622860471e-07 , err= 1.5927619485849314e-07
ii= 658 , relres= 5.128699517386657e-07 , err= 1.5532582427721064e-07
ii= 659 , relres= 4.492391678688288e-07 , err= 1.5194845975064452e-07

```

```
ii= 660 , relres= 4.1288856417553653e-07 , err= 1.4842700612444254e-07
ii= 661 , relres= 4.345240162844112e-07 , err= 1.4655007556642846e-07
ii= 662 , relres= 4.2771945930894226e-07 , err= 1.4410524404298082e-07
ii= 663 , relres= 4.5472859104251033e-07 , err= 1.4160360002075268e-07
ii= 664 , relres= 4.2554966694468563e-07 , err= 1.344768920039345e-07
ii= 665 , relres= 3.8191169378246104e-07 , err= 1.329010127902001e-07
ii= 666 , relres= 4.0809993630599413e-07 , err= 1.295811525385797e-07
ii= 667 , relres= 3.682725098564738e-07 , err= 1.2754106459297347e-07
ii= 668 , relres= 3.864979067078728e-07 , err= 1.2549744216795228e-07
ii= 669 , relres= 3.583589037947825e-07 , err= 1.2027233937435973e-07
ii= 670 , relres= 3.6898723745220723e-07 , err= 1.1820282215543476e-07
ii= 671 , relres= 3.1351248712665337e-07 , err= 1.1131687644321856e-07
ii= 672 , relres= 3.0324531632217133e-07 , err= 1.0938665092657935e-07
ii= 673 , relres= 3.1511044318834597e-07 , err= 1.066233546383974e-07
ii= 674 , relres= 3.1083356299558414e-07 , err= 1.028982450797638e-07
ii= 675 , relres= 2.827000838167e-07 , err= 1.0061383880354343e-07
ii= 676 , relres= 2.807137936663764e-07 , err= 9.967871846551238e-08
ii= 677 , relres= 2.6641782354864507e-07 , err= 9.829700551109363e-08
ii= 678 , relres= 2.647076183154057e-07 , err= 9.674210471618335e-08
ii= 679 , relres= 2.6196711722619605e-07 , err= 9.463851937599048e-08
ii= 680 , relres= 2.5726114720443e-07 , err= 9.344977606073392e-08
ii= 681 , relres= 2.8268974149046417e-07 , err= 8.99210777042509e-08
ii= 682 , relres= 2.7318071507838926e-07 , err= 8.856690468336589e-08
ii= 683 , relres= 2.5109770978002054e-07 , err= 8.681525839327866e-08
ii= 684 , relres= 2.3831779764195053e-07 , err= 8.520244887597009e-08
ii= 685 , relres= 2.4388827972421015e-07 , err= 8.349591455549232e-08
ii= 686 , relres= 2.2816102255767818e-07 , err= 8.245051227657896e-08
ii= 687 , relres= 2.341553240734504e-07 , err= 7.961958315784999e-08
ii= 688 , relres= 2.3557229841031574e-07 , err= 7.835485575507915e-08
ii= 689 , relres= 2.1852349433452894e-07 , err= 7.550506535296239e-08
ii= 690 , relres= 2.0750833947785e-07 , err= 7.40975117536887e-08
ii= 691 , relres= 2.0996036730621283e-07 , err= 7.2495351279058e-08
ii= 692 , relres= 1.934898492928028e-07 , err= 7.052094512821012e-08
ii= 693 , relres= 1.9936107247262946e-07 , err= 6.921773932031114e-08
ii= 694 , relres= 1.949176346560909e-07 , err= 6.741953439756235e-08
ii= 695 , relres= 2.0651867291403098e-07 , err= 6.510939388574969e-08
ii= 696 , relres= 1.8635712279017983e-07 , err= 6.374346676677327e-08
ii= 697 , relres= 1.7992912989944932e-07 , err= 6.270966685803542e-08
ii= 698 , relres= 1.6100130481827426e-07 , err= 6.151276162236498e-08
ii= 699 , relres= 1.6078625965017395e-07 , err= 6.045266587920447e-08
ii= 700 , relres= 1.7136843126504291e-07 , err= 5.909482513067975e-08
ii= 701 , relres= 1.5756893904501346e-07 , err= 5.62825090821851e-08
ii= 702 , relres= 1.5651777876579848e-07 , err= 5.527225638218406e-08
ii= 703 , relres= 1.5675750734173657e-07 , err= 5.4631688373900733e-08
ii= 704 , relres= 1.3749927117623572e-07 , err= 5.35059100203214e-08
ii= 705 , relres= 1.4916099379330183e-07 , err= 5.2389405194489154e-08
ii= 706 , relres= 1.5185035261205733e-07 , err= 5.138019919547017e-08
ii= 707 , relres= 1.4822212456401125e-07 , err= 5.0485820431641976e-08
ii= 708 , relres= 1.4101701362590715e-07 , err= 4.879740598336186e-08
ii= 709 , relres= 1.3143034993370332e-07 , err= 4.7634266299406745e-08
ii= 710 , relres= 1.3051880201133396e-07 , err= 4.646028617006986e-08
ii= 711 , relres= 1.1874607118514183e-07 , err= 4.5913705615154414e-08
ii= 712 , relres= 1.2967009440722053e-07 , err= 4.519644199493284e-08
ii= 713 , relres= 1.2352256939643504e-07 , err= 4.3975547225337387e-08
ii= 714 , relres= 1.1612128178066335e-07 , err= 4.211667287143701e-08
ii= 715 , relres= 1.1570739542342398e-07 , err= 4.1782905799791065e-08
ii= 716 , relres= 1.0935091701060493e-07 , err= 4.099820841666791e-08
ii= 717 , relres= 1.1107354799496326e-07 , err= 4.0557819304377634e-08
ii= 718 , relres= 1.1656086463408003e-07 , err= 3.908017483368176e-08
ii= 719 , relres= 1.0451626005097623e-07 , err= 3.7297535074748164e-08
ii= 720 , relres= 1.0260691666062626e-07 , err= 3.557621201302718e-08
```

```
ii= 721 , relres= 9.390003672650674e-08 , err= 3.474431344266166e-08
FULL: none
ii= 0 , relres= 1.7988818054528461 , err= 0.9599021430947445
ii= 1 , relres= 1.6308881812840452 , err= 0.9221364485008202
ii= 2 , relres= 1.5278292337446127 , err= 0.8838181557229989
ii= 3 , relres= 1.2910765713615546 , err= 0.8546778952487056
ii= 4 , relres= 1.2738085184105916 , err= 0.8187738512338026
ii= 5 , relres= 1.183672017089101 , err= 0.7919415361380368
ii= 6 , relres= 1.03612591953859 , err= 0.7603915800185616
ii= 7 , relres= 1.0020973941608236 , err= 0.7268868395885211
ii= 8 , relres= 0.9671604328913739 , err= 0.6892981915509099
ii= 9 , relres= 0.8930210069645693 , err= 0.6530327821059947
ii= 10 , relres= 0.8164090838720632 , err= 0.6149461334010633
ii= 11 , relres= 0.7695361727766302 , err= 0.5794230213898984
ii= 12 , relres= 0.7395853341921075 , err= 0.5423178831825294
ii= 13 , relres= 0.733382308522333 , err= 0.51023711054725
ii= 14 , relres= 0.6666464268754787 , err= 0.4804135410848477
ii= 15 , relres= 0.6366011540590436 , err= 0.45266684650759287
ii= 16 , relres= 0.5863059450887226 , err= 0.4189895028992693
ii= 17 , relres= 0.5738422568686011 , err= 0.39051669207012735
ii= 18 , relres= 0.548192736647 , err= 0.36571262156986084
ii= 19 , relres= 0.4819047118735909 , err= 0.3355327445767051
ii= 20 , relres= 0.4770120168827828 , err= 0.3121502477894958
ii= 21 , relres= 0.3994248819090063 , err= 0.28889524276567463
ii= 22 , relres= 0.3900338263196952 , err= 0.2635901728783767
ii= 23 , relres= 0.37164525535851733 , err= 0.24395668043700616
ii= 24 , relres= 0.3168312152852331 , err= 0.2256133221033091
ii= 25 , relres= 0.2821477644608628 , err= 0.2084246043203529
ii= 26 , relres= 0.29819132784406344 , err= 0.19478992504288237
ii= 27 , relres= 0.23866967565002217 , err= 0.1818593986359301
ii= 28 , relres= 0.23069293500806834 , err= 0.16885496039344924
ii= 29 , relres= 0.2386015379420344 , err= 0.1590160756425746
ii= 30 , relres= 0.22689651579427525 , err= 0.15170216093183095
ii= 31 , relres= 0.20366332957645436 , err= 0.1454152235383025
ii= 32 , relres= 0.17224807717249443 , err= 0.13659824802303638
ii= 33 , relres= 0.15970735092224383 , err= 0.12905195108817383
ii= 34 , relres= 0.1415801428707524 , err= 0.12153703549554135
ii= 35 , relres= 0.13517135519672188 , err= 0.11578873993478236
ii= 36 , relres= 0.11751263738673817 , err= 0.11013253092906565
ii= 37 , relres= 0.12044399265965594 , err= 0.10461015884804628
ii= 38 , relres= 0.10785904954256931 , err= 0.09864283921395876
ii= 39 , relres= 0.1036396500268546 , err= 0.09405120609050142
ii= 40 , relres= 0.11468595881850359 , err= 0.09008844632950583
ii= 41 , relres= 0.0895079197341068 , err= 0.08622927244769825
ii= 42 , relres= 0.08702403590442409 , err= 0.08229242993940591
ii= 43 , relres= 0.07742586604701905 , err= 0.07873462691177559
ii= 44 , relres= 0.06988071624915727 , err= 0.07504046796176551
ii= 45 , relres= 0.06726452602293219 , err= 0.07100035957435052
ii= 46 , relres= 0.06357633303986303 , err= 0.06748627088787974
ii= 47 , relres= 0.06616861200000765 , err= 0.06467539441529126
ii= 48 , relres= 0.06139920631492333 , err= 0.062184124556076394
ii= 49 , relres= 0.05753205108713613 , err= 0.059170371651372886
ii= 50 , relres= 0.05129606457996632 , err= 0.05637181968733399
ii= 51 , relres= 0.04958995777074629 , err= 0.05352680738234154
ii= 52 , relres= 0.04963291097004438 , err= 0.050406620563552954
ii= 53 , relres= 0.05176057922668066 , err= 0.048412659375283475
ii= 54 , relres= 0.04873886799372241 , err= 0.04647263045208927
ii= 55 , relres= 0.04242821878721865 , err= 0.0439367777373309
ii= 56 , relres= 0.0386270050230479 , err= 0.04123478315868078
ii= 57 , relres= 0.0417169683468675 , err= 0.039030569342633575
ii= 58 , relres= 0.03778686748835748 , err= 0.036877596973112874
```

```
ii= 59 , relres= 0.0347626963210251 , err= 0.03466940602356375
ii= 60 , relres= 0.035258394470578706 , err= 0.03295180462561607
ii= 61 , relres= 0.02990703795683842 , err= 0.03088766478791469
ii= 62 , relres= 0.027095370654890726 , err= 0.029099598479108448
ii= 63 , relres= 0.02754769868917376 , err= 0.027144788910157768
ii= 64 , relres= 0.02543819856225703 , err= 0.025619120329564093
ii= 65 , relres= 0.029353888736217176 , err= 0.024117794740402917
ii= 66 , relres= 0.02190209754398178 , err= 0.02266031371714138
ii= 67 , relres= 0.02080696332278603 , err= 0.02113047189480498
ii= 68 , relres= 0.020792834067395117 , err= 0.019534003477383804
ii= 69 , relres= 0.01790967138303964 , err= 0.018056103452803257
ii= 70 , relres= 0.016671479511599398 , err= 0.016695183918037353
ii= 71 , relres= 0.015436204390978902 , err= 0.015428734658095753
ii= 72 , relres= 0.01764101018591177 , err= 0.014324276759040546
ii= 73 , relres= 0.016600021643092433 , err= 0.013620467643295732
ii= 74 , relres= 0.014528263724456635 , err= 0.012812594972821991
ii= 75 , relres= 0.013806387637044061 , err= 0.012068550998388869
ii= 76 , relres= 0.016293153624598364 , err= 0.011412277528751782
ii= 77 , relres= 0.01156354334285977 , err= 0.010807810784222568
ii= 78 , relres= 0.010271033248256749 , err= 0.009986375956685525
ii= 79 , relres= 0.010308690120418214 , err= 0.00918269977533147
ii= 80 , relres= 0.009671052726697616 , err= 0.008423305672819957
ii= 81 , relres= 0.009778391566166502 , err= 0.007730346195900104
ii= 82 , relres= 0.010694465437035902 , err= 0.007268334150851745
ii= 83 , relres= 0.007466957361259887 , err= 0.006788894022867932
ii= 84 , relres= 0.006910613728589901 , err= 0.006098869142768382
ii= 85 , relres= 0.007282516743116855 , err= 0.005580497584055026
ii= 86 , relres= 0.007183518821359887 , err= 0.005191509139768198
ii= 87 , relres= 0.0061077641444670285 , err= 0.004848579896377415
ii= 88 , relres= 0.005524438107398243 , err= 0.004471616435210243
ii= 89 , relres= 0.004679092321989559 , err= 0.0040984801578950085
ii= 90 , relres= 0.0047873114213389965 , err= 0.003781899063294885
ii= 91 , relres= 0.0042354920979964196 , err= 0.00347584076696637
ii= 92 , relres= 0.004812150632351909 , err= 0.003250091005098725
ii= 93 , relres= 0.003979084124585859 , err= 0.0030745392810719707
ii= 94 , relres= 0.003305515664591396 , err= 0.0028404967159789663
ii= 95 , relres= 0.0034262710931840063 , err= 0.0026149571502821142
ii= 96 , relres= 0.0035117467670266944 , err= 0.002461464195035755
ii= 97 , relres= 0.003146437047920444 , err= 0.0023324722032889273
ii= 98 , relres= 0.0031284530113593785 , err= 0.002240832604764217
ii= 99 , relres= 0.0022737114884849936 , err= 0.0021072500577045622
ii= 100 , relres= 0.0024663339672599664 , err= 0.001981663722753089
ii= 101 , relres= 0.002171611633275898 , err= 0.001900334309231783
ii= 102 , relres= 0.0020862090710853224 , err= 0.0017815001931433397
ii= 103 , relres= 0.002092666684522697 , err= 0.0016899395668536145
ii= 104 , relres= 0.0018522249988293458 , err= 0.0015981019472575862
ii= 105 , relres= 0.00210682027202072 , err= 0.0015159485726741204
ii= 106 , relres= 0.0015401207410392235 , err= 0.001428931961719404
ii= 107 , relres= 0.0014175927094442868 , err= 0.0013113529964733097
ii= 108 , relres= 0.0016716373766803088 , err= 0.0012281646871008468
ii= 109 , relres= 0.0012965528505377213 , err= 0.001143514851518865
ii= 110 , relres= 0.001163484966403213 , err= 0.00105252498603681
ii= 111 , relres= 0.0014075663326513237 , err= 0.0009777336704894406
ii= 112 , relres= 0.0010703713213103415 , err= 0.0009080669464273464
ii= 113 , relres= 0.001060518673287298 , err= 0.000836599856882947
ii= 114 , relres= 0.0012211128945203923 , err= 0.0007932104241125018
ii= 115 , relres= 0.0008353792444406346 , err= 0.0007296440864420634
ii= 116 , relres= 0.0007897671579524261 , err= 0.0006701580433197843
ii= 117 , relres= 0.0008649290411267797 , err= 0.0006203760991057279
ii= 118 , relres= 0.0007178013313793104 , err= 0.000585354943826779
ii= 119 , relres= 0.0006264733246508066 , err= 0.0005391165464437231
```

```
ii= 120 , relres= 0.0005961576922527599 , err= 0.0004972825596839975
ii= 121 , relres= 0.000625139355515532 , err= 0.00047105939731844926
ii= 122 , relres= 0.0005308773509669859 , err= 0.0004438157800563075
ii= 123 , relres= 0.000650998860818446 , err= 0.00042410917865456167
ii= 124 , relres= 0.00044495989634030003 , err= 0.0004015117318594641
ii= 125 , relres= 0.00042223608202484074 , err= 0.0003737475021923207
ii= 126 , relres= 0.0004514220250756996 , err= 0.0003527326020313263
ii= 127 , relres= 0.00038805408116525966 , err= 0.0003312143118820047
ii= 128 , relres= 0.0003289340032519615 , err= 0.0003080076887333931
ii= 129 , relres= 0.00035958304539021157 , err= 0.00028862404126346516
ii= 130 , relres= 0.0002999765598326233 , err= 0.0002713425673730061
ii= 131 , relres= 0.0003483803710392603 , err= 0.00025005525374569585
ii= 132 , relres= 0.00029259382930794893 , err= 0.00023915673400670383
ii= 133 , relres= 0.000282139156964239 , err= 0.0002203453285513918
ii= 134 , relres= 0.00026763374956640214 , err= 0.00020676831729051512
ii= 135 , relres= 0.00021742626301978458 , err= 0.00019219134841623863
ii= 136 , relres= 0.0002705813076577047 , err= 0.0001781464836019347
ii= 137 , relres= 0.00020581781860794368 , err= 0.00016668092094259432
ii= 138 , relres= 0.00022827113477204825 , err= 0.00015480485951766
ii= 139 , relres= 0.0001853346902998465 , err= 0.00014248434377189858
ii= 140 , relres= 0.00015069539876025597 , err= 0.00012876063509781972
ii= 141 , relres= 0.0001345383012689136 , err= 0.00011800468794421874
ii= 142 , relres= 0.0001392519883601754 , err= 0.00010901951922695936
ii= 143 , relres= 0.00014735894917851548 , err= 0.00010389562894376054
ii= 144 , relres= 0.00014412785202105524 , err= 9.757661932343897e-05
ii= 145 , relres= 0.0001237628896212432 , err= 9.223899949764511e-05
ii= 146 , relres= 0.00013490018222373165 , err= 8.759993678910295e-05
ii= 147 , relres= 9.862501818520323e-05 , err= 8.188989809934907e-05
ii= 148 , relres= 0.0001058437519975166 , err= 7.559877582505333e-05
ii= 149 , relres= 9.21863440530725e-05 , err= 7.13112001761932e-05
ii= 150 , relres= 9.598269095523566e-05 , err= 6.700858126184465e-05
ii= 151 , relres= 7.61781000845282e-05 , err= 6.270513181846997e-05
ii= 152 , relres= 6.886777436914378e-05 , err= 5.7831843334701195e-05
ii= 153 , relres= 6.821729452102562e-05 , err= 5.3803954269182364e-05
ii= 154 , relres= 5.720520779549236e-05 , err= 5.069130397417763e-05
ii= 155 , relres= 5.733234012184008e-05 , err= 4.658372350315938e-05
ii= 156 , relres= 6.0262785446184275e-05 , err= 4.343945955059528e-05
ii= 157 , relres= 5.1079030636095504e-05 , err= 4.0864287008250235e-05
ii= 158 , relres= 4.368605806117888e-05 , err= 3.7687178104103236e-05
ii= 159 , relres= 4.598622252471112e-05 , err= 3.5195767381174986e-05
ii= 160 , relres= 4.218806989453438e-05 , err= 3.280533200566061e-05
ii= 161 , relres= 4.842973359330253e-05 , err= 3.063284289596822e-05
ii= 162 , relres= 3.5522491574275165e-05 , err= 2.9033820171288698e-05
ii= 163 , relres= 3.1058427440220446e-05 , err= 2.6682824961915406e-05
ii= 164 , relres= 3.3251228017314384e-05 , err= 2.4457535452416797e-05
ii= 165 , relres= 2.8621386487195586e-05 , err= 2.2727251597611845e-05
ii= 166 , relres= 3.6278832226402206e-05 , err= 2.163404153642326e-05
ii= 167 , relres= 2.628895825176018e-05 , err= 2.0228958179903263e-05
ii= 168 , relres= 2.0123892544309918e-05 , err= 1.841480149309434e-05
ii= 169 , relres= 1.9644969270316106e-05 , err= 1.672155431148202e-05
ii= 170 , relres= 1.984883412620654e-05 , err= 1.5365792210531424e-05
ii= 171 , relres= 2.0809833092443416e-05 , err= 1.443166512485227e-05
ii= 172 , relres= 1.8562723608549748e-05 , err= 1.3606917442267655e-05
ii= 173 , relres= 1.5349548692395618e-05 , err= 1.2783875547500096e-05
ii= 174 , relres= 1.753808396938475e-05 , err= 1.1876233879057827e-05
ii= 175 , relres= 1.461823523830465e-05 , err= 1.1219446471800039e-05
ii= 176 , relres= 1.4769276175583027e-05 , err= 1.0583176166451176e-05
ii= 177 , relres= 1.2839499826131293e-05 , err= 1.0011472451312398e-05
ii= 178 , relres= 1.1991291722224938e-05 , err= 9.24798460343844e-06
ii= 179 , relres= 1.0794839397039891e-05 , err= 8.762822859056599e-06
ii= 180 , relres= 9.921882971861939e-06 , err= 8.061863145884592e-06
```

```
ii= 181 , relres= 9.014773756846325e-06 , err= 7.668969476015712e-06
ii= 182 , relres= 8.118038931401701e-06 , err= 7.132589591219937e-06
ii= 183 , relres= 8.571033187941019e-06 , err= 6.753761932871692e-06
ii= 184 , relres= 6.2892259613881456e-06 , err= 6.344320147516791e-06
ii= 185 , relres= 8.229704456677576e-06 , err= 5.961661992172328e-06
ii= 186 , relres= 6.823186051238236e-06 , err= 5.69591601306585e-06
ii= 187 , relres= 7.18584542654759e-06 , err= 5.472145599842333e-06
ii= 188 , relres= 5.570892654789866e-06 , err= 5.165597163353067e-06
ii= 189 , relres= 5.782952461839355e-06 , err= 4.857218013854928e-06
ii= 190 , relres= 5.356827716001007e-06 , err= 4.624571648855038e-06
ii= 191 , relres= 5.007391233754568e-06 , err= 4.4045651903800945e-06
ii= 192 , relres= 4.927951645017509e-06 , err= 4.136245154402795e-06
ii= 193 , relres= 5.279332136599828e-06 , err= 3.9354915729297425e-06
ii= 194 , relres= 3.7728450765792e-06 , err= 3.7091618938133445e-06
ii= 195 , relres= 4.052466538697796e-06 , err= 3.495908843204778e-06
ii= 196 , relres= 3.684180187941507e-06 , err= 3.3170824726682797e-06
ii= 197 , relres= 2.9802789942288686e-06 , err= 3.078317084196993e-06
ii= 198 , relres= 3.5398948036919015e-06 , err= 2.888911276021047e-06
ii= 199 , relres= 2.765274821974593e-06 , err= 2.745204810185271e-06
ii= 200 , relres= 2.475865286442903e-06 , err= 2.5572292154496848e-06
ii= 201 , relres= 2.430849317944508e-06 , err= 2.3894416501209432e-06
ii= 202 , relres= 2.4328346572825177e-06 , err= 2.2238087868193927e-06
ii= 203 , relres= 2.32012462166099e-06 , err= 2.097082042509483e-06
ii= 204 , relres= 2.1078790550777662e-06 , err= 1.977850147045052e-06
ii= 205 , relres= 1.9564357244534735e-06 , err= 1.8539004655331285e-06
ii= 206 , relres= 1.903123630956703e-06 , err= 1.6991711977080045e-06
ii= 207 , relres= 2.292288166101813e-06 , err= 1.6140301946292663e-06
ii= 208 , relres= 1.651794628991371e-06 , err= 1.5086589791387734e-06
ii= 209 , relres= 2.1689385066123593e-06 , err= 1.429943746286648e-06
ii= 210 , relres= 1.4979784492472527e-06 , err= 1.3412092378862308e-06
ii= 211 , relres= 1.5100151834569455e-06 , err= 1.2520142113599136e-06
ii= 212 , relres= 1.3967644549303962e-06 , err= 1.173821873090787e-06
ii= 213 , relres= 1.3116117616411009e-06 , err= 1.0939519146607383e-06
ii= 214 , relres= 1.0207391455123129e-06 , err= 9.949816763016969e-07
ii= 215 , relres= 9.440555932457487e-07 , err= 9.119640602014062e-07
ii= 216 , relres= 1.2346021134565232e-06 , err= 8.471085466532494e-07
ii= 217 , relres= 8.564142077389135e-07 , err= 8.000382518350924e-07
ii= 218 , relres= 1.0103775263444905e-06 , err= 7.493857422553866e-07
ii= 219 , relres= 8.147952393429464e-07 , err= 7.075878234914798e-07
ii= 220 , relres= 7.598743475696287e-07 , err= 6.579230083270594e-07
ii= 221 , relres= 7.215585658357511e-07 , err= 6.160254875742002e-07
ii= 222 , relres= 8.603226993714303e-07 , err= 5.846006734220761e-07
ii= 223 , relres= 6.27713893832237e-07 , err= 5.438165345642312e-07
ii= 224 , relres= 7.274277372786807e-07 , err= 5.157802139762168e-07
ii= 225 , relres= 4.7426237343644653e-07 , err= 4.779903316200057e-07
ii= 226 , relres= 4.695951548629517e-07 , err= 4.4056779049799614e-07
ii= 227 , relres= 4.89049608229048e-07 , err= 4.125773237960947e-07
ii= 228 , relres= 4.2572519634971627e-07 , err= 3.861469086696389e-07
ii= 229 , relres= 4.847222002098891e-07 , err= 3.6606637123992215e-07
ii= 230 , relres= 4.366618691451523e-07 , err= 3.515148755178966e-07
ii= 231 , relres= 4.0731266299226827e-07 , err= 3.3118128286005716e-07
ii= 232 , relres= 3.0328691706295985e-07 , err= 3.089061706538017e-07
ii= 233 , relres= 3.1586894165270914e-07 , err= 2.870943331658195e-07
ii= 234 , relres= 3.410717149451777e-07 , err= 2.7541434637655807e-07
ii= 235 , relres= 2.5879002666334855e-07 , err= 2.5565827731600496e-07
ii= 236 , relres= 2.7771669988846394e-07 , err= 2.4010778109169195e-07
ii= 237 , relres= 2.2661365235129535e-07 , err= 2.224702377485752e-07
ii= 238 , relres= 2.3232379680084055e-07 , err= 2.10509820617925e-07
ii= 239 , relres= 2.2243116801199734e-07 , err= 1.9706323647916292e-07
ii= 240 , relres= 2.564295820598639e-07 , err= 1.879443168077055e-07
ii= 241 , relres= 1.5627397845283473e-07 , err= 1.739202442019799e-07
```

```

ii= 242 , relres= 1.58501868747756e-07 , err= 1.5824093066676733e-07
ii= 243 , relres= 1.8380346239625626e-07 , err= 1.4852855796333152e-07
ii= 244 , relres= 1.3784194983843318e-07 , err= 1.3906244146483394e-07
ii= 245 , relres= 1.248039556167423e-07 , err= 1.245643881785091e-07
ii= 246 , relres= 1.4270575072173158e-07 , err= 1.1596686301992085e-07
ii= 247 , relres= 1.280689786925021e-07 , err= 1.087290240762913e-07
ii= 248 , relres= 1.5900639832808268e-07 , err= 1.0221401999331085e-07
ii= 249 , relres= 1.1491494287069239e-07 , err= 9.662866719479131e-08
ii= 250 , relres= 1.1927910777181437e-07 , err= 9.129478954903163e-08
ii= 251 , relres= 1.125816474581563e-07 , err= 8.631993886475119e-08
ii= 252 , relres= 9.732373472608876e-08 , err= 8.177998977981667e-08
gamma= 4999.999999999999
nb= 1 , good_iter_psf= 36
nb= 5 , good_iter_psf= 30
nb= 25 , good_iter_psf= 23
good_iter_reg= 628
good_iter_none= 216

```

```
In [68]: print('all_num_iter_sweep=' , all_num_iter_sweep)
print('num_iter_sweep_reg=' , num_iter_sweep_reg)
print('num_iter_sweep_none=' , num_iter_sweep_none)
```

```
all_num_iter_sweep= [[15, 15, 15], [12, 12, 12], [11, 11, 11], [9, 9, 9], [12, 1
1, 10], [20, 17, 15], [36, 30, 23]]
num_iter_sweep_reg= [9, 17, 34, 67, 140, 296, 628]
num_iter_sweep_none= [186, 152, 119, 99, 87, 143, 216]
```

```
In [69]: all_num_iter_sweep = np.array(all_num_iter_sweep)
num_iter_sweep_reg = np.array(num_iter_sweep_reg)
num_iter_sweep_none = np.array(num_iter_sweep_none)

print('all_num_iter_sweep' , all_num_iter_sweep)
print('num_iter_sweep_reg=' , num_iter_sweep_reg)
print('num_iter_sweep_none=' , num_iter_sweep_none)

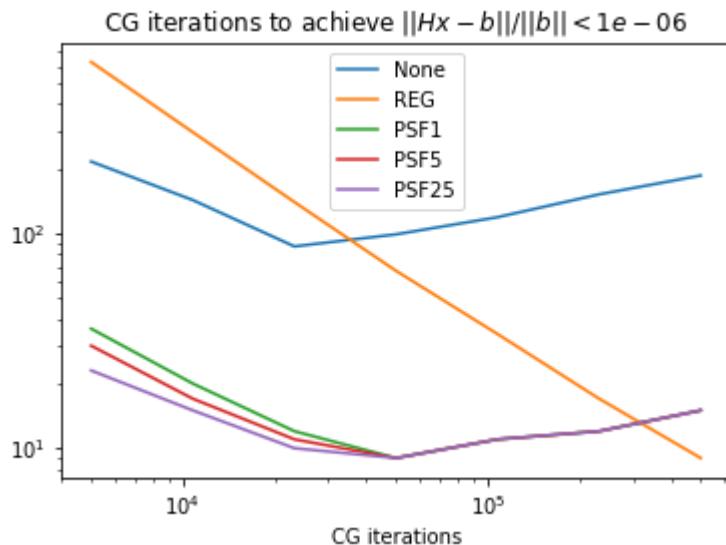
np.savetxt(save_dir_str + '/all_num_iter_sweep.txt' , all_num_iter_sweep)
np.savetxt(save_dir_str + '/num_iter_sweep_reg.txt' , num_iter_sweep_reg)
np.savetxt(save_dir_str + '/num_iter_sweep_none.txt' , num_iter_sweep_none)
```

```
all_num_iter_sweep [[15 15 15]
 [12 12 12]
 [11 11 11]
 [ 9  9  9]
 [12 11 10]
 [20 17 15]
 [36 30 23]]
num_iter_sweep_reg= [  9   17   34   67  140  296  628]
num_iter_sweep_none= [186 152 119   99   87  143  216]
```

```
In [70]: plt.loglog(all_gammas , num_iter_sweep_none)
plt.loglog(all_gammas , num_iter_sweep_reg)
for k in range(len(all_num_batches)):
    plt.loglog(all_gammas , all_num_iter_sweep[:,k])

plt.title(r'CG iterations to achieve $||Hx-b|| / ||b|| < ' + str(sweep_tol) + '$')
plt.xlabel(r'$\gamma$')
plt.xlabel('CG iterations')
plt.legend(['None', 'REG'] + ['PSF'+str(nb) for nb in all_num_batches])
```

Out[70]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7fa36ad3a310>



Plots to make (7):

- Batches of impulse responses (Nick will do this, save as hi-res PNG)
- H-matrix structure and block cluster tree

In [174...]

```
PCK = all_PCK[-1]
CB = PCK.col_batches

def plot_batch(b):
    phi = dl.Function(PCK.V_out)
    ff0 = CB.psi_vertex_batches[b]
    max_ff0 = np.max(ff0)
    ff = ff0.copy()
    ff = np.abs(ff)**1.0
    phi.vector()[CB.vertex2dof_out] = ff

    start = CB.batch2point_start[b]
    stop = CB.batch2point_stop[b]
    pp = CB.sample_points[start:stop, :]
    mu_batch = CB.sample_mu[start:stop, :]
    Sigma_batch = CB.sample_Sigma[start:stop, :, :]

    plt.figure(figsize=(6,6))

    # cm = dl.plot(phi, cmap='binary')
    cm = dl.plot(phi, cmap='gray_r')
    # cm = dl.plot(phi, cmap='jet_r')
    # cm = dl.plot(phi, cmap='jet')
    # cm = dl.plot(phi, cmap='turbo_r')
    # cm = dl.plot(phi, cmap='turbo')
    # cm = dl.plot(phi)
    # cm = dl.plot(phi, cmap='Greys_r')
    # cm = dl.plot(phi, cmap='Greys')
    # plt.colorbar(cm)

    plt.scatter(pp[:, 0], pp[:, 1], c='k', s=20, marker='*')
```

```

# plt.scatter(mu_batch[:, 0], mu_batch[:, 1], c='k', s=3)

plot_ellipse(np.zeros(2), (10000**2)*np.eye(2), n_std_tau=1,
             facecolor='none', edgecolor='gray', linewidth=1)

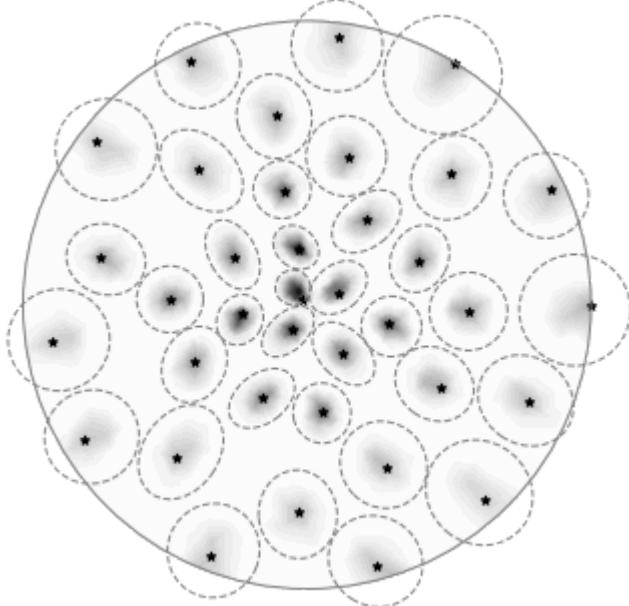
for k in range(mu_batch.shape[0]):
    plot_ellipse(mu_batch[k, :], Sigma_batch[k, :, :], n_std_tau=CB.tau,
                 facecolor='none', edgecolor='gray', linewidth=1, linestyle=1)

plt.xlim(-11500,11500)
plt.ylim(-11500,11500)
plt.axis('off')

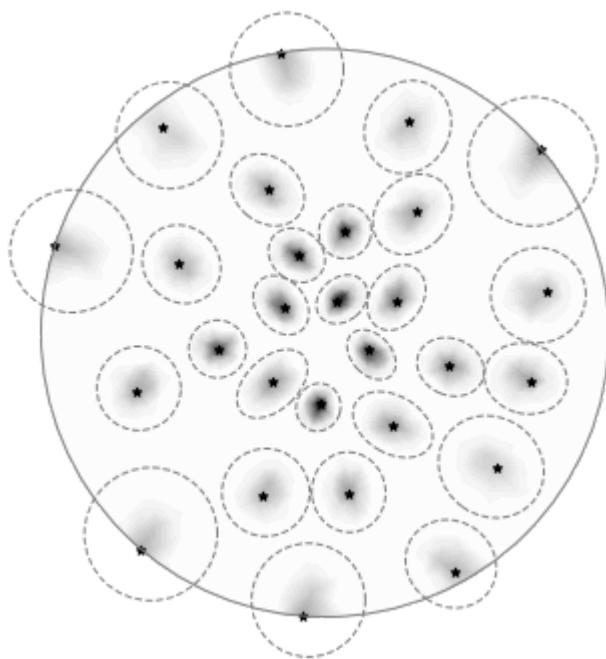
for b in range(PCK.col_batches.num_batches):
    plt.figure()
    plot_batch(b)
    plt.savefig(save_dir_str + '/impulse_batch' + str(b) + '.png', bbox_inches='tight')

```

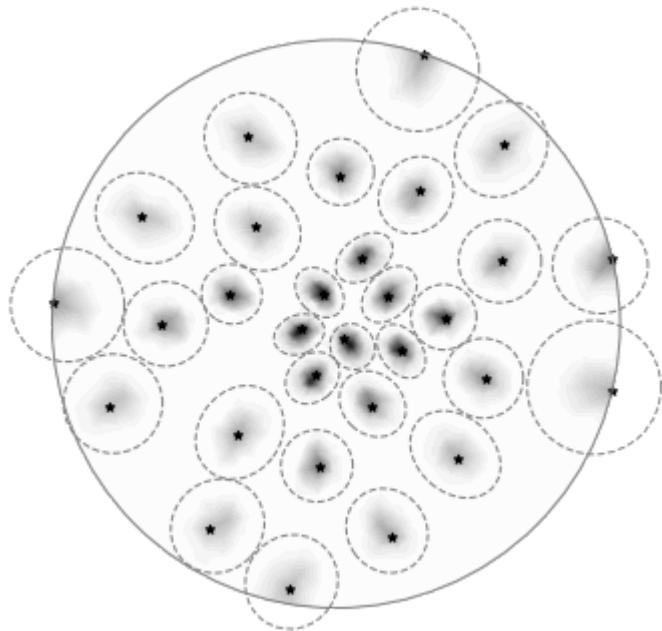
/home/nick/repos/nalger_helper_functions/nalger_helper_functions/plot_ellipse.py:16: RuntimeWarning: divide by zero encountered in double_scalars
theta = np.arctan(v_big[1] / v_big[0]) * 180. / np.pi
/tmp/ipykernel_5880/2805767550.py:47: RuntimeWarning: More than 20 figures have been opened. Figures created through the pyplot interface (`matplotlib.pyplot.figure`) are retained until explicitly closed and may consume too much memory. (To control this warning, see the rcParam `figure.max_open_warning`).
plt.figure()
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



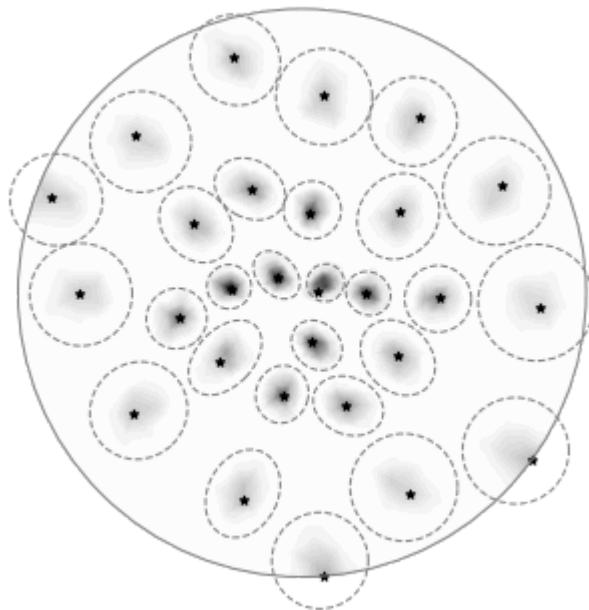
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



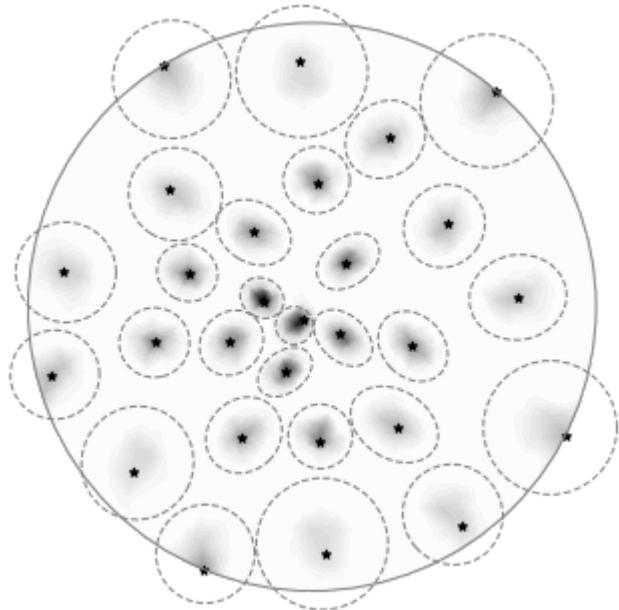
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



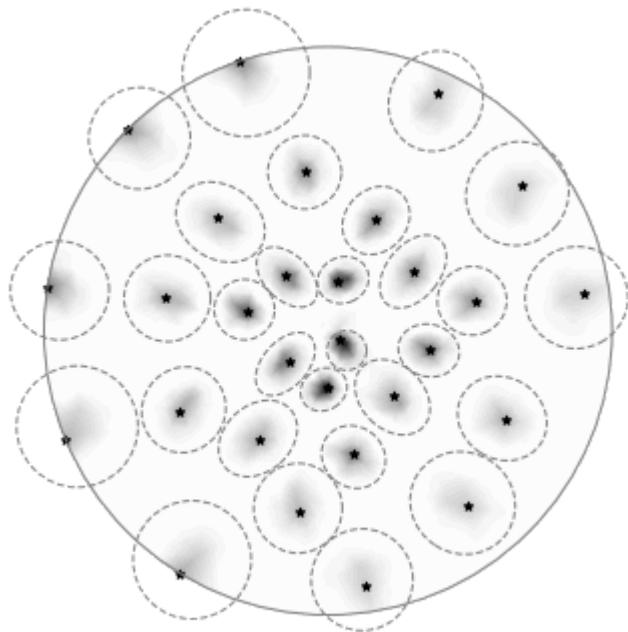
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



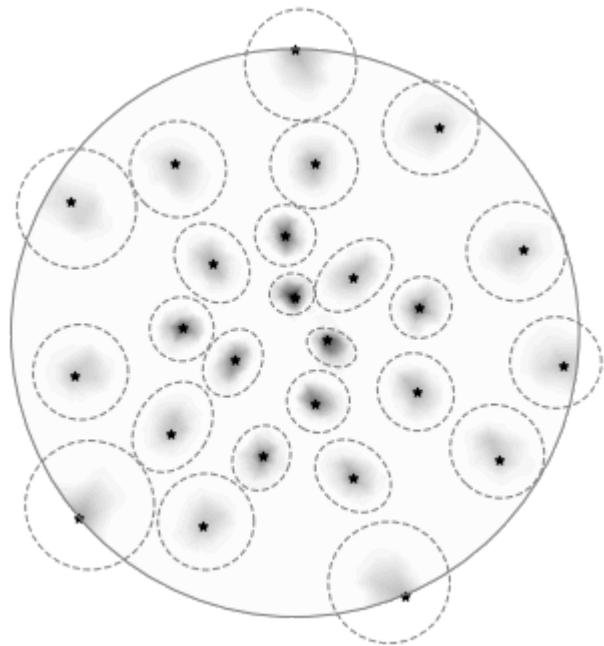
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



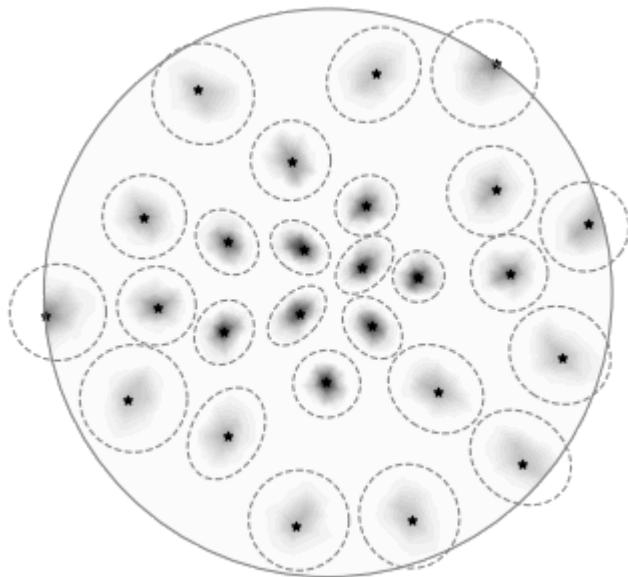
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



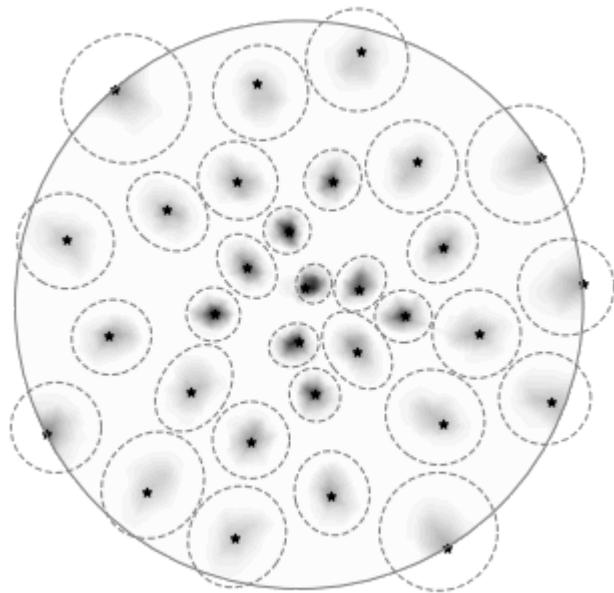
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



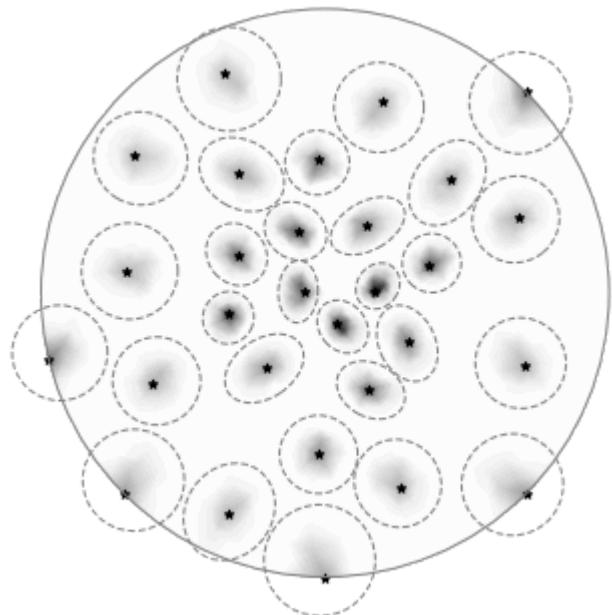
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



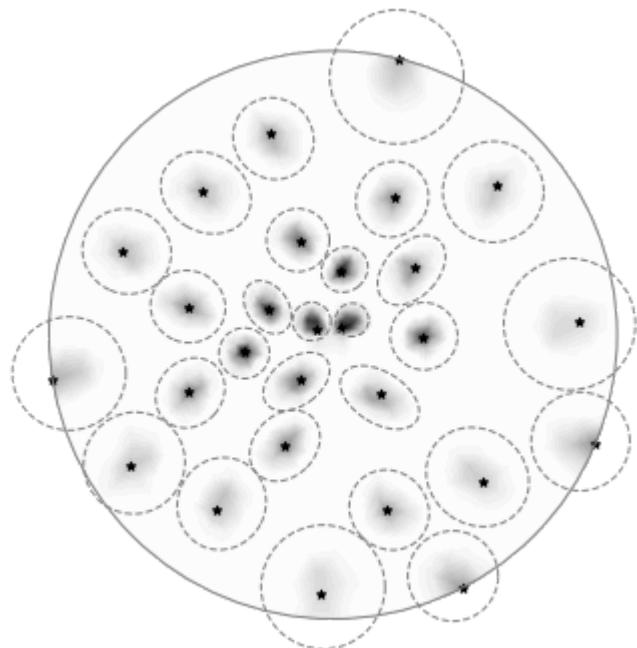
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



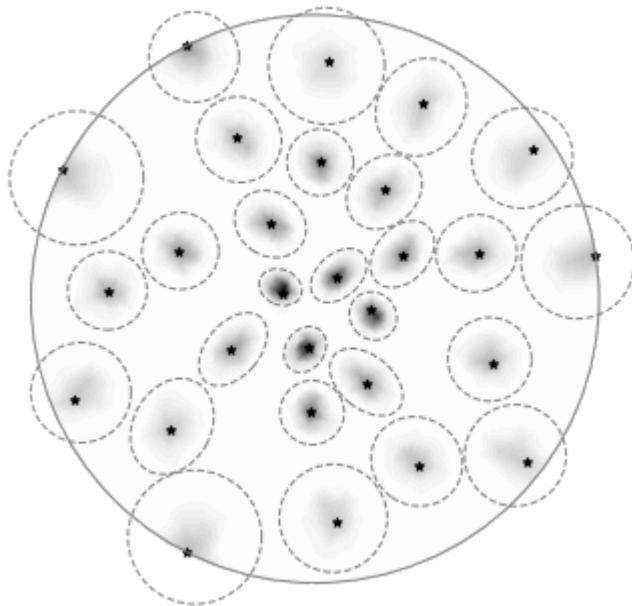
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



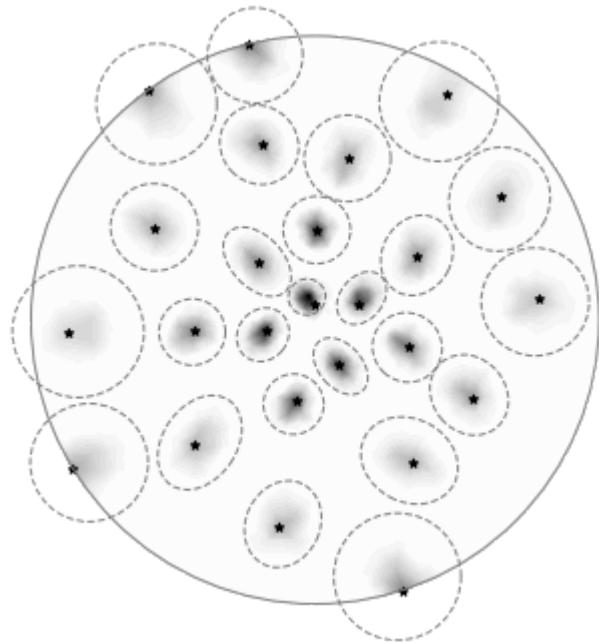
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



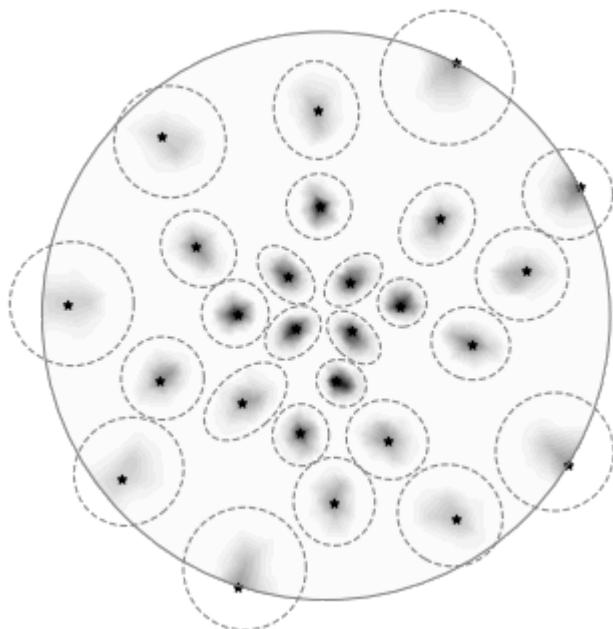
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



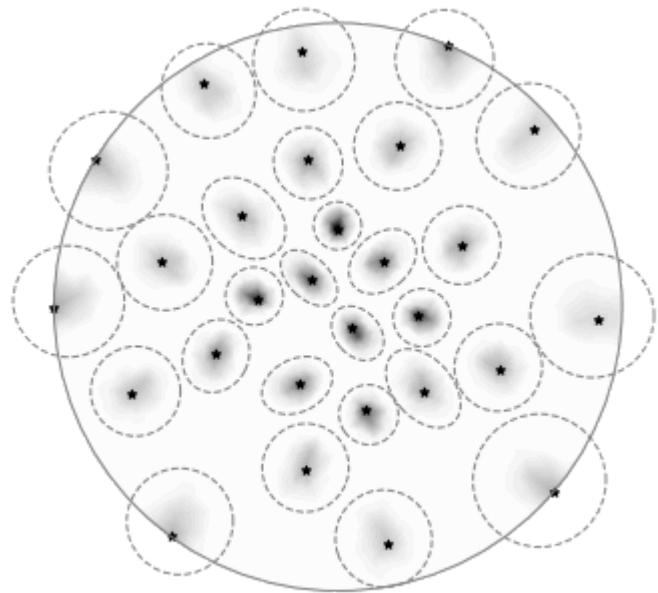
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



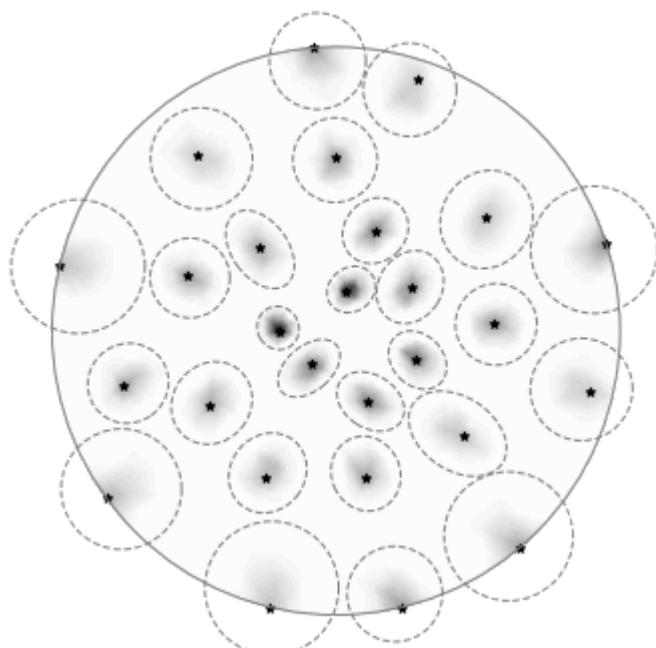
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



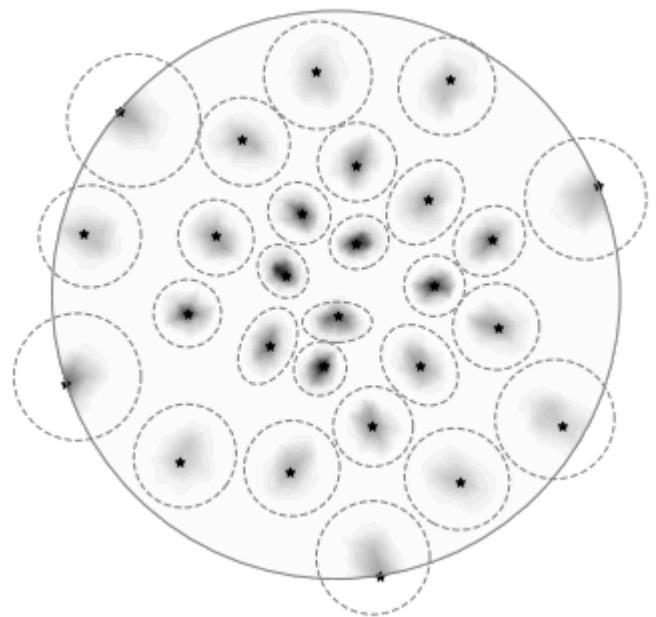
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



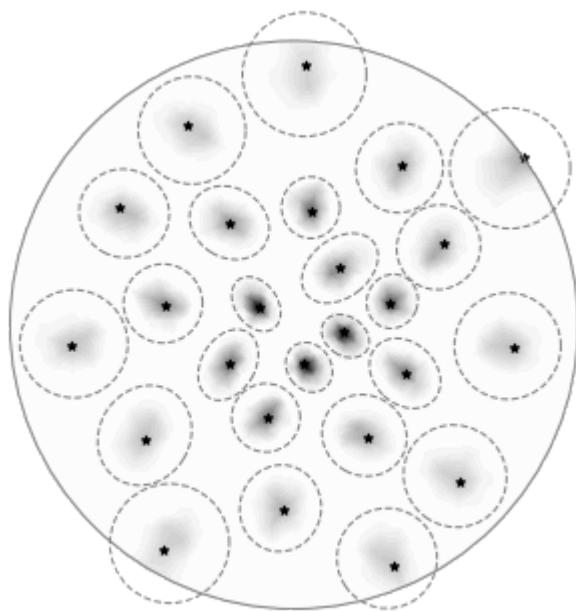
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



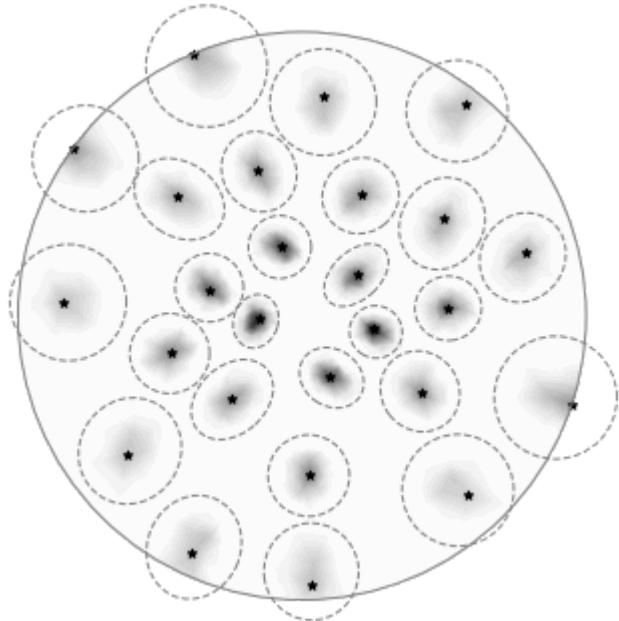
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



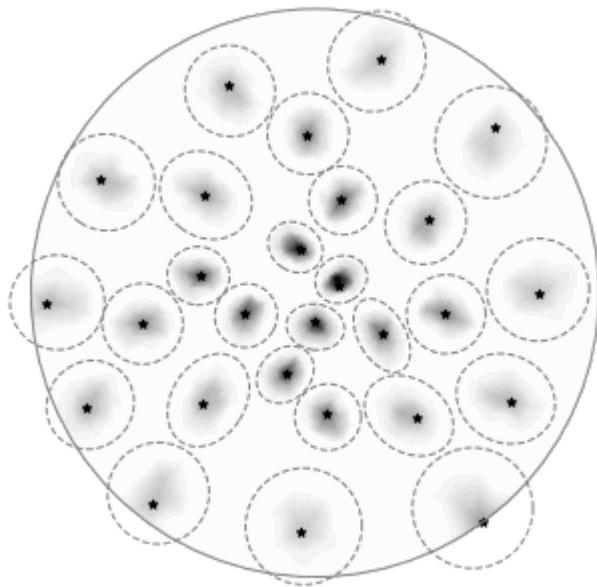
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



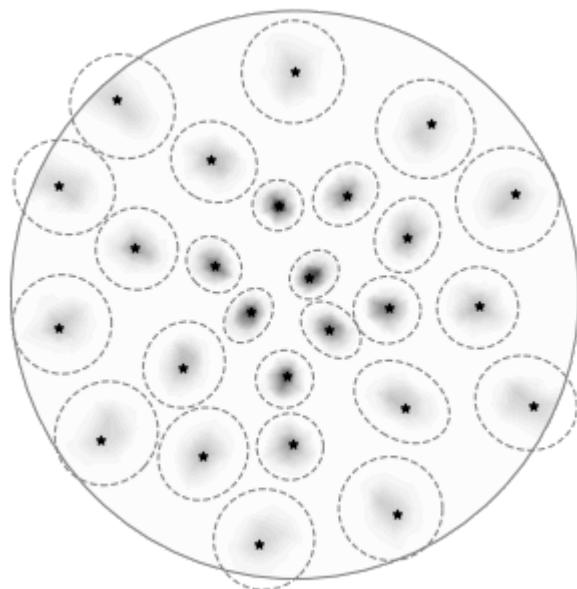
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



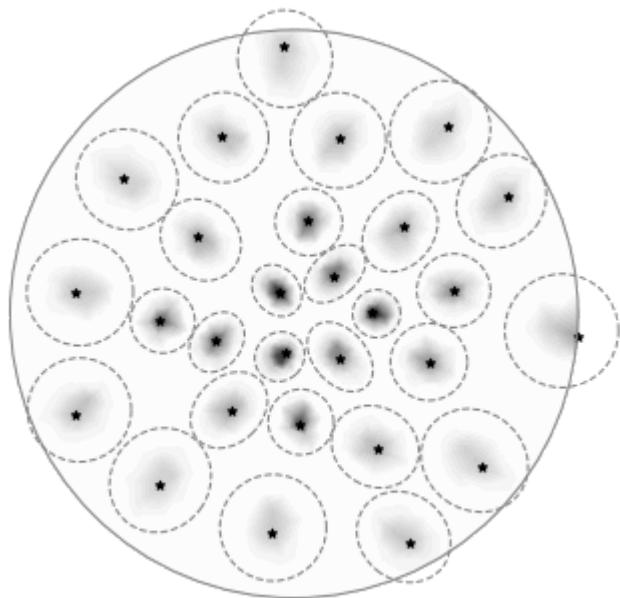
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



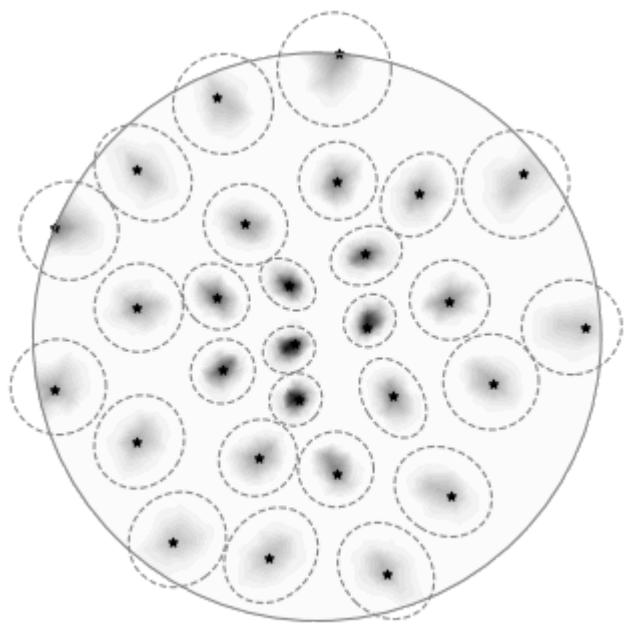
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



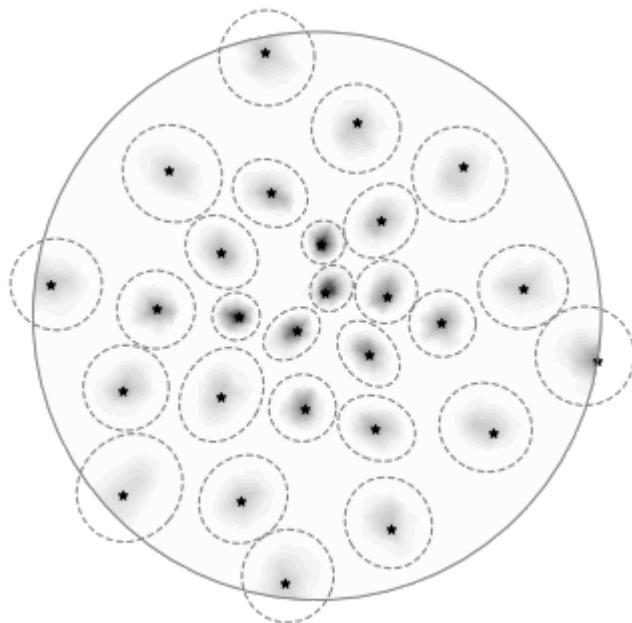
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



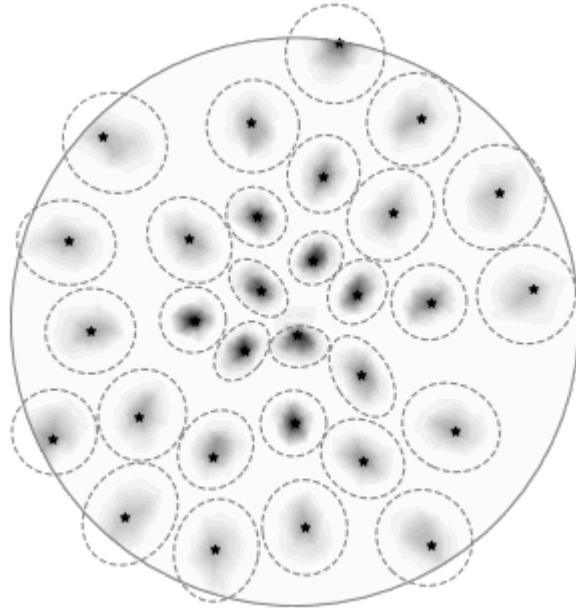
<Figure size 432x288 with 0 Axes>



<Figure size 432x288 with 0 Axes>



<Figure size 432x288 with 0 Axes>



```
In [179]: all_Hd_pch[-1].bct.visualize(save_dir_str + '/stokes_bct.eps')
```

```
In [182]: # all_Hd_pch[-1].visualize(save_dir_str + '/stokes_Hd.eps')
```

```
In [184]: Hd_lowtol = hpro.h_add(all_Hd_pch[-1], all_Hd_pch[-1], alpha=1.0, beta=0.0, rtol  
Hd_lowtol.visualize(save_dir_str + '/Hd_lowtol.eps')
```