Домрачев Алексей

Билеты к экзамену

Гармонический анализ

2 курс

МФТИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Содержание

1. Теорема Римана. Стремление к нулю коэффициентов Фурье.

$X = \{a,b\} : [a,b],(a,b),[a,b),(a,b]$, может быть $a = -\infty$, $b = +\infty$, X — промежуток.

Определение 1.1. Функция $y = f(x)$ называется абсолютно интегрируемой на промежутке X, если $\int\limits_X |f|\,dx$ сходится.

Обозначения. Совокупность абсолютно интегрируемых функций обозначается $L^1_R(X)$

Замечание Если f интегрируема на $[a,b]$, то $|f|$ — интегрируема на $[a,b]$. В обратную сторону утверждение неверно, пример функция Дирихле не интегрируема в общем случае, но интегрируема по модулю.

$$\widetilde{\mathcal{D}}(x) = \begin{cases} 1 & ,x \in \mathbb{Q} \\ -1 & ,x \in \mathbb{J} \end{cases}$$

Замечание. На $L^1_R(X)$ можно определить операции сложения функций и умножения функции на действительное число. Тем самым $L^1_R(X)$ превращается в линейное пространство.

Определение 1.2. Функция $f \in L^1_R(X)$ называется абсолютно интегрируемой с квадратом, если $\int\limits_X |f|^2\,dx$ сходится. Множество таких функций обозначают $L^2_R(X)$

$$|f|^2 \in L^1_R(X) \Rightarrow f \in L^2_R(X)$$

$* - f : X \to \mathbb{R} \Rightarrow |f|^2 = f^2$
НО $f : X \to \mathbb{C} \Rightarrow |f|^2 \neq f^2$

Пример. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ X = (0,1]$, $f \in L^1_R(X)$, $f^2 \notin L^1_R(X)$

Предложение. $L^2_R(X)$ — линейное пространство.

Определение. Линейное пространство L называется нормированным пространством, если на L введена функция $||\cdot||$ называемая нормой, обладающая следующими свойствами ($\forall x,y \in L\ \&\forall\alpha \in \mathbb{R}$)

1. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$
2. $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$

3. $||x|| \geqslant 0$, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Теорема 1.1. **Теорема Римана об осцилляции**. Если $f(x)$ абсолютно интегрируемая на конечном или бесконечном интервале (a,b): $f \in L^1_R(X)$, $X = \{a,b\}$, то справедливо следующее равенство

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin txdx = 0;$$

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\cos txdx = 0$$

Доказательство.
Первый случай. f — интегрируемая на $[a,b]$ функция. Критерий интегрируемости:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b\} : \overline{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon/2$$

Возьмем $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$, $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$, $M = \sup\limits_{[a,b]} |f|$.

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\sin txdx\right| = \left|\sum_{i=1}^k \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-m_i)\sin txdx + \sum_{i=1}^k m_i \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \sin txdx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^k (M_i - m_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{|t|}|\cos tx_{i-1} - \cos tx_i| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^k (M_i - m_i)\Delta x_i + 2k\frac{M}{|t|} < \varepsilon/2 + 2k\frac{M}{|t|}$$

Так как числа M и k фиксированы, то

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists t_0 > 0 : \forall t : |t| > t_0 \mapsto 2kM/|t| < \varepsilon/2 \mapsto \left|\int\limits_a^b f(x)\sin txdx\right| < \varepsilon,$$

то есть $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin txdx = 0$
Второй случай. $X = [a,b)$, f имеет особенность в точке b.

$$|f(x)\sin tx| \leqslant |f(x)| \Rightarrow f(x)\sin tx \in L^1_R(X) \Rightarrow$$

Критерий Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0,b-a) : \left|\int\limits_{b-\delta}^b f(x)\sin txdx\right| < \varepsilon/2$$

f интегрируема на $[a,b-\delta] \Rightarrow$ из п. 1 $\exists t_0 > 0 : \forall t : |t| > t_0 \mapsto \left|\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\sin tx dx\right| < \varepsilon/2$
Поэтому при $|t| > t_0 \mapsto$

$$\mapsto \left|\int\limits_a^{b} f(x)\sin tx dx\right| = \left|\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\sin tx dx + \int\limits_{b-\delta}^{b} f(x)\sin tx dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\sin tx dx\right| + \\ + \int\limits_{b-\delta}^{b} |f(x)|\sin tx dx < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Итак, $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin tx dx = 0$

Косинус доказывается аналогично.

Теорема 1.2. Если $f \in L^1_R(X)$, $X = \{-a,a\}$, четная на X, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$$

Если f нечетная на X, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Теорема 1.3. Если $f \in L^1_R(X), X = \{0,T\}$, и периодическая с периодом T продолжена на $\mathbb{R}$, то f абсолютно интегрируема на любом отрезке конечной длины и $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$$

Тригонометрические ряды Фурье.

Замечание. В теории тригонометрических рядов Фурье принята запись

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx,\ a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l},\ b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l} \sim f(x) \text{ — Ряд Фурье}$$

Замечание 1. Так как $\left|f(x)\cos\dfrac{k\pi x}{l}\right| \leqslant |f(x)| \& \left|f(x)\sin\dfrac{k\pi x}{l}\right| \leqslant |f(x)| \Rightarrow$ несобственные интегралы, задающие a_k и b_k сходятся.

Замечание 2. Из т. Римана об осцилляции следует, что $a_k \to 0$, $b_k \to 0$, при $k \to \infty$

Замечание 3. Функцию $f \in \mathcal{L}_R^2[-l,l]$ периодически с периодом $2l$ продолжим на $\mathbb{R}$. По теореме об интеграле периодической функции продолженная функция будет абсолютно интегрируема на любом конечном интервале. Если f непрерывна на $[-l,l]$ и $f(-l+0) = f(l-0)$, то продолженная функция будет непрерывна на всей числовой оси. Если эти пределы не совпадают, то в т. $(2m+1)l$, $m \in \mathbb{Z}$ — точка разрыва 1-го рода со скачком $f(-l+0) - f(l-0)$

2. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле. Принцип локализации.

Будем рассматривать такие функции: $f \in L^1_R[-l,l]$

Определение 2.1. Функцию

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku$$

называют ядром Дирихле

Запишем частичную сумма ряда Фурье в подходящем виде:

$$S_n^f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) =$$

$$= \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \left(\left[\frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt \right] \cos \frac{k\pi x}{l} + \left[\frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt \right] \sin \frac{k\pi x}{l} \right) =$$

$$= \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\cos \frac{\pi kt}{l} \cos \frac{\pi kx}{l} + \sin \frac{\pi kt}{l} \sin \frac{\pi kx}{l} \right) \right] dt =$$

$$= \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi(t-x)}{l} \right] dt = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) D_n dt$$

Свойства. **Свойства ядра Дирихле:**

1. $D_n(u) = D_n(-u)$ — функция четная
2. $D_n(u + 2\pi) = D_n(u)$ — функция периодическая с периодом 2π
3. $D_n(u)$ — непрерывная на $\mathbb{R}$ функция
4. $D_n(u) = \dfrac{\sin(n + 1/2)u}{2 \sin u/2}$, $u \neq 2\pi m \ \forall m \in \mathbb{Z}$, НО
$$\lim_{u \to 0} D_n(u) = (n + \frac{1}{2})$$
5. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = \pi \overset{\text{Св. 1}}{\Longrightarrow} \int\limits_{0}^{\pi} D_n(x)dx = \pi/2, \forall l \mapsto \int\limits_{0}^{l} D_n\left(\frac{\pi}{l} y\right) dy = l/2$

Доказательство.
Свойство 4.

$$D_n(u)\sin\frac{u}{2} = 1/2\sin\frac{u}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ku\sin\frac{u}{2} = 1/2\sin\frac{u}{2} + 1/2\sum_{k=1}^{n}\sin(k+1/2)u - \sin(k-1/2)u =$$
$$= 1/2\sin(n+1/2)u$$

Выведем Формулу Дирихле.

Доказательство.
Итак:

$$S_n^f(x) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)D_n\left(\frac{\pi}{l}(t-x)\right)dt = \frac{1}{l}\int_{x-l}^{x+l} f(t)D_n\left(\frac{\pi}{l}(t-x)\right)dt =$$
$$\left|\begin{array}{c} t-x=z,\ dt=dz,\ t=x+l,\ z=l \\ t=x+z;\ \ z=-l \end{array}\right|$$
$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x+z)D_n\left(\frac{\pi}{l}z\right)dz + \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x+z)D_n\left(\frac{\pi}{l}z\right)dz =$$
$$|z=-S|$$
$$= \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x-S)D_n\left(-\frac{\pi}{l}S\right)dS + \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x+z)D_n\left(\frac{\pi}{l}z\right)dz \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_n^f(x) = \frac{1}{l}\int_{0}^{l}\left[f(x+z)+f(x-z)\right]D_n\left(\frac{\pi}{l}z\right)dz$$

Принцип локализации.

Теорема 2.1. Пусть функция $f \in L_R^1[-l,l]$ продолжена с периодом $2l$ на $\mathbb{R}$. Тогда сходимость тригонометрического ряда Фурье функции f в произвольной точке x_0 и сумма этого ряда в точке x_0 (если ряд сходится в т. x_0) зависят от поведения функции f в достаточно малой окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ т. x_0 при некотором $\delta > 0$.

Доказательство.
При $u \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ справедливо тождество

$$D_n(u) = 1/2 + \cos u + \ldots + \cos nu = \frac{\sin(n+1/2)}{2\sin u/2}$$

и формула Дирихле: $S_n^f(x) = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \left[f(x+u)+f(x-u)\right] D_n\left(\frac{\pi}{l}u\right) du$

Запишем частичную сумму

$$S_n^f(x_0) = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \left[\frac{f(x_0+z)+f(x_0-z)}{2\sin\dfrac{\pi}{2l}z}\right] \sin\left[\frac{\pi}{l}(n+1/2)z\right]$$

Так как $f(x_0+z)+f(x_0-z) \in L_R^1[-l,l]$ и

$$\forall z : \delta \in (0;z) \mapsto \frac{|f(x_0+z)+f(x_0-z)|}{2\sin\dfrac{\pi}{2l}z} \leqslant \frac{|f(x_0+z)+f(x_0-z)|}{2\sin\dfrac{\pi\delta}{2l}} \Rightarrow$$

То по признаку сравнения функция $F(z) = \dfrac{f(x_0+z)+f(x_0-z)}{2\sin\dfrac{\pi}{2l}z} \in L_R^1[-l,l]$ абсолютно интегрируема на $[\delta, l]$. В силу теорему об осциляции:

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{l}\int\limits_\delta^l F(z)\sin\left[\frac{\pi}{l}(n+1/2)z\right] dz = 0 \Rightarrow$$

$$S_n^f(x_0) - \frac{1}{l}\int\limits_0^\delta \frac{f(x_0+z)+f(x_0-z)}{2\sin\dfrac{\pi z}{2l}} \sin\left[\frac{\pi}{l}(n+1/2)z\right] dz \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Это значит, что существование и величина предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^f(x_0)$ зависит только от существования и величины предела

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{l}\int\limits_0^\delta \frac{f(x_0+z)+f(x_0-z)}{2\sin\left[\dfrac{\pi z}{2l}\right]} \sin\left[\frac{\pi}{l}(n+1/2)z\right] dz$$

То есть от значений функции f на интервале $(x_0-\delta, x_0+\delta)$

3. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке.

Теорема 3.1. **Признак Дини.** Пусть $f \in L^1_R[-l,l]$ продолжена с периодом $2l$ на $\mathbb{R}$, а S_0 — такое число, что для некоторого $\delta > 0$, $\delta \in (0,l)$ сходится интеграл

$$\int\limits_0^\delta \frac{|f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0|}{z}dz,$$

тогда ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к числу S_0:

$$S_n^f(x_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S_0$$

Доказательство.
$\dfrac{f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0}{z} \in L^1_R[0,l]$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(u)du = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (1/2+\cos u + \ldots + \cos nu)\, du = \pi,$$

в силу четности

$$\int\limits_0^\pi D_n(u)du = \pi/2 \text{ и } \int\limits_0^l D_n\left(\frac{\pi z}{l}\right)dz = \frac{l}{2},$$

поэтому получим

$$S_0 = \frac{2}{l}\int\limits_0^l S_0 D_n\left(\frac{\pi z}{l}\right)dz.$$

В силу

$$S_n^f(x) = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \left(f(x+z)+f(x-z)\right) D_n\left(\frac{\pi}{l}z\right)dz$$

$$S_n^f(x_0) - S_0 = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \frac{f(x_0+z)+f(x_0-z)}{2\sin\frac{\pi}{2l}z}\sin\left[\frac{\pi}{l}(n+1/2)z\right]dz - S_0\frac{2}{l}\int\limits_0^l D_n\left(\frac{\pi}{l}z\right)dz =$$

$$= \frac{1}{l}\int\limits_0^l \frac{f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0}{2\sin\frac{\pi}{2l}z}\sin\left[\frac{\pi}{l}(n+1/2)z\right]dz$$

$$g(z) = \frac{f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0}{z}\frac{z}{2\sin\dfrac{\pi}{2l}z}$$

На отрезке $[0,l]$ знаменатель обращается в 0 при $z=0$, а $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{2\sin\frac{\pi z}{2l}} = \dfrac{l}{\pi}$, поэтому функция $\dfrac{z}{2\sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right)}$ ограничена.

Так как $g(z) \in L^1_R[0,l]$, то по теореме Римана интеграл в правой части разности $S_n^f(x_0) - S_0$ стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $S_n^f(x_0) - S_0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} S_n^f(x_0) = S_0$$

Признак Гельдера.

Определение 3.1. Функция $y = f(x)$ в т. x_0 удовлетворяет условию Гельдера, если

1. существуют конечные значения $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$
2. $\exists \alpha \in (0,1]$, $\exists C > 0$, $\exists \delta > 0 : \forall z \in (0,\delta)$

   $|f(x_0 - z) - f(x_0 - 0)| \leqslant Cz^\alpha$

   $|f(x_0 + z) - f(x_0 + 0)| \leqslant Cz^\alpha$

   α — показатель Гельдера, при $\alpha = 1$ условие выше — условие Липшица.

Введем. Обобщенную левую производную:

$$f'_-(x_0) = \lim_{z\to-0} \frac{f(x_0 - z) - f(x_0 - 0)}{-z}$$

Обобщенную правую производную:

$$f'_+(x_0) = \lim_{z\to+0} \frac{f(x_0 + z) - f(x_0 + 0)}{z}$$

Предложение. Если у функции $y = f(x)$ в точке x_0 существуют конечные обобщенные производные $f'_\pm(x_0)$, то функция f в точке x_0 удовлетворяет условиям Липшица.

Доказательство.

$$\exists \alpha \in (0,1],\ \exists C_{1,2} > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall z \in (0,\delta) \mapsto \begin{cases} \left|\dfrac{f(x_0 - z) - f(x_0 - 0)}{-z}\right| \leqslant C_1 \\ \left|\dfrac{f(x_0 + z) - f(x_0 + 0)}{z}\right| \leqslant C_2 \end{cases}$$

Тогда выберем $C = \max\{C_1, C_2\} \to$ условие Гельдера при $\alpha = 1$, т.е. условие Липшица.

Следствие. Если функция $y = f(x)$ в т. x_0 имеет производную, то она в этой точке удовлетворяет условию Липшица.

Замечание. В обратную сторону утверждение следствия неверно. Пример: $y = |x|$ — в т. $x_0 = 0$ удовлетворяет Липшицу, но не является дифференцируемой в этой точке.

Теорема 3.2. Пусть функция $f \in L_R^1[-l,l]$ продолжена с периодом $2l$ на $\mathbb{R}$ и в точке x_0 удовлетворяет условию Гельдера, тогда тригонометрический ряд Фурье функции f в точке x_0 сходится к

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Если кроме того, f непрерывна в т. x_0, то тригонометрический ряд Фурье функции f в этой точке сходится к $f(x_0)$

Доказательство.
Обозначим $S_0 = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

$$\forall z \in (0,\delta) \mapsto \frac{|f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0|}{z} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|f(x_0+z)-f(x_0+0)|}{z} + \frac{|f(x_0-z)-f(x_0-0)|}{z} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{Cz^\alpha + Cz^\alpha}{z} = \frac{2C}{z^{1-\alpha}},$$

Но так как $\alpha \in (0,1]$,то $1-\alpha \in [0,1) \Rightarrow$

$$\int\limits_0^\delta \frac{dz}{z^{1-\alpha}} < \infty \overset{\text{пр. сравнения}}{\Longrightarrow} \int\limits_0^\delta \frac{|f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0}{z}\, dz < \infty \overset{\text{пр. Дини}}{\Longrightarrow}$$
$$\Rightarrow S_n^f(x_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S_0 = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

Следствие. Пусть функция $f \in L_R^1[-l,l]$ продолжена с периодом $2l$ на $\mathbb{R}$ и в точке x_0 у нее существуют конечные $f'_\pm(x_0)$, тогда тригонометрический ряд Фурье функция f в т. x_0 сходится к $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$. Если же f дифференцируем в т. x_0, то тригонометрический ряд Фурье в той т. сходится к $f(x_0)$.

4. Дифференцирование и интегрирования рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье.

Определение 4.1. Функция $y = f(x)$ называется **кусочно непрерывной** на отрезке $[a,b]$, если $\exists T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, такое что f непрерывно на (x_{i-1},x_i), $i = \overline{1,n}$ и существует конечное $f(a+0)$, $f(x_i \pm 0)$, $i = \overline{1,n}$, $f(b-0)$

Пример $y = \begin{cases} \text{sign}x, & x \in (-1,1) \\ 0, & x = \pm 1 \end{cases}$, продолжим с периодом 2 на $\mathbb{R} \Rightarrow \forall [a,b]$ содержит точку $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$, следовательно y — кусочно непрерывная.

Определение 4.2. Функция $y = f(x)$ называется **кусочно непрерывно дифференцируемой** на $[a,b]$, если $\exists T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, такие, что на $[x_{i-1},x_i]$, $i = \overline{0,n}$, функция f обладает непрерывными производными f', может быть с изменением значения функции f в точке x_k, $k = \overline{1,n}$

Определение 4.3. Функция f называется **кусочно гладкой** на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна на отрезке $[a,b]$ и кусочно непрерывно дифференцируема на нем.

Замечание 1. $y = f(x)$ периодическая с периодом $2l$ на $\mathbb{R}$

$$f(x + 2l) = f(x) \Rightarrow f(-l) = f(l)$$

и f кусочно гладкая на $[-l,l]$, то f кусочно гладкая на любом $[a,b] \subset \mathbb{R}$

Замечание 2. Производная f' кусочно непрерывной дифференцируемой на $[a,b]$ функции $y = f(x)$ будет кусочно непрерывной на $[a,b]$ функцией.

Замечание 3. Тригонометрический ряд Фурье кусочно непрерывной дифференцируемой на $[a,b]$ функции $y = f(x)$ в каждой точке непрерывности функции f сходится к $f(x)$, а в точке разрыва x сходится к $1/2\,[f(x-0) + f(x+0)]$

О почленном дифференцировании рядов Фурье.

Теорема 4.1. Пусть $y = f(x)$, $2l$–периодична на $\mathbb{R}$ и кусочно гладкая на $[-l,l]$, тогда тригонометрический ряд Фурье функции $y = f'(x)$ получается из тригонометрического ряда Фурье функции f путем его почленного дифференцирования.

Доказательство.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$f'(x) \sim \frac{\overline{a_0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} \cos\frac{k\pi x}{l} + \overline{b_k} \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$\overline{a_0} = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f'(x)dx = \frac{1}{l}(f(l) - f(-l)) = 0$$

$$\overline{a_k} = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f'(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\left[f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} + \frac{k\pi}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\right] = \frac{k\pi}{l}b_k$$

$$\overline{b_k} = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\left[f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} - \frac{k\pi}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx\right] = -\frac{k\pi}{l}a_k$$

Формальное дифференцирование тригонометрического ряда Фурье функции f дает:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boxed{-\frac{k\pi}{l}a_k}\sin\frac{k\pi x}{l} + \boxed{\frac{k\pi}{l}b_k}\cos\frac{k\pi x}{l}$$

Следствие. Пусть f $2l$–периодическая на $\mathbb{R}$ функция, имеет непрерывную производную на $[-l,l]$ до порядка $(m-2)$ включительно и кусочно гладкую производную порядка $(m-1)$ на $[-l,l]$, тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f^{(m)}$ получается из тригонометрического ряда Фурье функции f путем формального m–кратного дифференцирования.

Асимптотические оценки коэффициентов Фурье.

Предложение 1. Пусть функция $y = f(x)$, $2l$–периодическая на $\mathbb{R}$ и кусочно гладкая на $[-l,l]$, тогда для ее коэффициентов Фурье справедливы следующие асимптотические оценки:

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), b_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ при } n \to \infty$$

Доказательство.

Следует из того, что коэф. Фурье производной f' равны $\overline{a_k} = \dfrac{\pi k}{l}b_k$, $\overline{b_k} = -\dfrac{\pi k}{l}a_k$. Так как f' кусочно-непрерывна на $[-l,l]$, то $f' \in L^1_R[-l,l] \Rightarrow$ по теореме Римана об осциляции $\overline{a_k}$, $\overline{b_k}$ стремятся к 0 при $k \to \infty$

Вывод из предложения:

$$\overline{a_k} = \frac{\pi}{l}\frac{b_k}{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad \overline{b_k} = -\frac{\pi}{l}\frac{a_k}{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Предложение 2. Пусть f кусочно непрерывна дифференцируема на $[-l,l]$ и периодически с периодом $2l$ продолжена на $\mathbb{R}$. Тогда для коэффициентов Фурье функции f справедливо:

$$\exists C > 0 : \forall k \in \mathbb{N} \mapsto |ka_k| \leqslant C \,\&\, |kb_k| \leqslant C$$

$$a_k = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad b_k = O\left(\frac{1}{k}\right), k \to \infty$$

Доказательство.

$$\exists T = \{-l = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = l\}$$

f непрерывно дифференцируема на $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,n}$. Тогда

$$|ka_k| = \left|\frac{k}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\right| = \left|\begin{array}{c} f(x) = u \\ \cos\dfrac{k\pi x}{l}dx = dv \end{array}\right| =$$

$$= \frac{k}{l}\left|\frac{l}{k\pi}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} - \frac{l}{k\pi}\int\limits_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\right| =$$

$$= \frac{k}{l}\left|\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx\right| =$$

$$= \frac{k}{l}\left|\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{l}{k\pi}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{l}{k\pi}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{n}|f(x_i)| + \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\right|$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{n}|f(x_i)| = B, \exists A_1 > 0 \& A_2 > 0 : \begin{array}{l} \left|\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} f'(x)\sin\dfrac{k\pi x}{l}dx\right| \leqslant A_1 \\ \left|\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} f'(x)\cos\dfrac{k\pi x}{l}dx\right| \leqslant A_2 \end{array}$$

Тогда пусть $C = \max\{B + A_1, B + A_2\}$, тогда $|ka_k| \leqslant C$ и $|kb_k| \leqslant C$

Следствие. Пусть $y = f(x)$, $2l$–периодическая на $\mathbb{R}$ и на $[-l,l]$ обладает непрерывной производной до порядка $(m-2)$ включительно и кусочно гладкой производной порядка $(m-1)$. Тогда для коэффициентов Фурье функции f справедлива оценка:

$$a_k = o\left(\frac{1}{k^m}\right),\ b_k = o\left(\frac{1}{k^m}\right),\ k\to\infty$$

Доказательство.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$f^{(m)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_m a_k k^m \cos\left(\frac{k\pi x}{l} + m\frac{\pi}{2}\right) + C_m b_k k^m \sin\left(\frac{k\pi x}{l} + m\frac{\pi}{2}\right)$$

$$C_m = \left(\frac{\pi}{l}\right)^m : \left.\begin{matrix} |a_k k^m| \to 0 \\ |b_k k^m| \to 0 \end{matrix}\right\} k\to\infty$$

Почленное интегрирование рядов Фурье.

Теорема 4.2. Пусть функция $y = f(x)$ кусочно непрерывная на $[-l,l]$, $2l$–периодическая продолжена на $\mathbb{R}$, $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}$ тогда тригонометрический ряд Фурье функции $\Phi(x) = \int\limits_0^x f(t)dt - \frac{a_0 x}{2}$ может быть получена путем формального интегрирования ряда Фурье функции f.

Доказательство.
$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$ — кусочно гладкая на $[-l,l] \Rightarrow \Phi(x)$ — кусочно гладкая на $[-l,l]$, т.к. $\Phi(x) = F(x) - a_0x/2$ имеет кусочно–непрерывную производную $f(x) - a_0/2$, причем $\forall x:$

$$\Phi(x+2l) - \Phi(x) = \int\limits_x^{x+2l} f(t)dt - a_0 l = \int\limits_{-l}^{l} f(t)dt - a_0 l = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Phi$ $2l$–периодическая на $\mathbb{R}$. Тогда по первой теореме этого пункта

$$\Phi(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\frac{k\pi x}{l} + B_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$a_k = \frac{k\pi}{l}B_k$, $b_k = -\frac{k\pi}{l}A_k$, причем $\Phi(0) = 0 \to \frac{A_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k = 0 \to \frac{A_0}{2} = \frac{l}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}$ q

$$\frac{l}{\pi}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}+\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{b_k}{k}\cos\frac{k\pi x}{l}+\frac{a_k}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{l}{\pi}\frac{b_k}{k}\left(1-\cos\frac{k\pi x}{l}\right)+\frac{l}{\pi}\frac{a_k}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

К такому же результату мы придем формально проинтегрировав ряд.

Замечание. f кусочно непрерывная на $[-l,l]$ и $2l$–периодическая и продолжена на $\mathbb{R}$, то для ее коэффициентов Фурье справедливо:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}<\infty$$

То есть $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi x}{l}}{k}$ не может быть рядом Фурье никакой функции, так как расходится по интегральному признаку.

5. Теорема о равномерной сходимости ряда Фурье.

Теорема 5.1. Тригонометрический ряд Фурье $2l$–периодич. на $\mathbb{R}$ и кусочно гладкой на $[-l,l]$ функции $f(x)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к f

Доказательство.
1. Так как наша функция кусочно-гладкая, значит у неё существуют конечные значения справа и слева для каждой точки непрерывности, а также в силу кусочно-непрерывной дифференцируемости конечные значения производной справа и слева от неё, значит выполнено условие Липшица, значит выполнен признак Гельдера поточечной сходимости функции непрерывной к своему значению $\Rightarrow$ ряд Фурье сходится к f.
2. Теперь докажем равномерность. Воспользуемся неравенство Коши–Буняковского:

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k| = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{l}{k\pi}\overline{b_k}\right| \leqslant \frac{l}{\pi}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\overline{b_k})^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}|b_k| \leqslant \frac{1}{\pi}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\overline{a_k})^2}$$

Также $f' \in L^1_R[-l,l] \Rightarrow \{$ Неравенство Бесселя $\}$ $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\overline{a_k}^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\overline{b_k}^2$ сходятся как и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, а частные суммы этих рядов ограничены и $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k| \leqslant C, n = 1,2,\ldots \Rightarrow$ по признаку сходимости $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k| < \infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|b_k| < \infty$

$$\left|a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right| \leqslant |a_k| + |b_k| \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса ряд Фурье f сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к f

6. Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывной функции.

Сумма и ядро Фейера.

Определение 6.1. f — $2l$–периодическая и непрерывная на всей $\mathbb{R}$, тогда сумма

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0^f(x) + S_1^f(x) + \ldots + S_n^f(x)}{n+1}$$

называется **суммой Фейера**

$$S_n^f(x) = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x+z)D_n(\frac{\pi}{l}z)dz;\ \sigma_n(x) = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x+z)F_n(z)dz$$

$$F_n(z) = \frac{D_0(\frac{\pi}{l}z) + D_z(\frac{\pi}{l}z) + \ldots + D_n(\frac{\pi}{l}z)}{n+1} \text{ — ядро Фейера}$$

Определение 6.2. Свойства ядра Фейера:

1. F_n — $2l$–периодическая, четная и непрерывная на $\mathbb{R}$ функция.
2. $\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} F_n(z)dz = 1$, т.к. $\int\limits_{0}^{l} D(\frac{\pi}{l}y)dy = l/2$
3. $F_n(z) \geqslant 0 \forall z \in \mathbb{R} \left\{ F_n(u) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2l}u}{\sin\frac{\pi}{2l}u} \right)^2 \right\}$
4. $\forall \delta \in (0,l) \to \lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{[\delta,l]} F_n(z) = 0$;

   $$\max F_n(z) \leqslant \frac{1}{2(n+1)\sin\frac{\pi}{2l}\delta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Теорема 6.1. Последовательность $\{\sigma_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ сумм Фейера $2l$–периодической и непрерывной на $\mathbb{R}$ функции f сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к функции f

Доказательство.

1. Докажем что f — равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$; на $[-2l,2l]$ функция f равномерно непрерывная по т. Кантора, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in [-2l,2l] : |x' - x''| < \delta \mapsto |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Возьмем произвольные любые $\xi, \eta : |\xi - \eta| < \delta < l$, $x' \in [-l,l]$, тогда

$$\exists k : \xi = x' + 2kl, \eta = x'' + 2kl \Rightarrow |\xi - \eta| = |x' - x''| < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(\xi) - f(\eta)| = |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Условие равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in \mathbb{R} \,\&\, \forall z : |z| < \delta \mapsto |f(x+z) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ — равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = |\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}(f(x+z) - f(x))F_n(z)dz| \leqslant \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}|f(x+z) - f(x)|F_n(z)dz$$

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-\delta}^{\delta}|f(x+z) - f(x)|F_n(z)dz \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{l}\int\limits_{-\delta}^{\delta}F_n(z)dz$$

По свойству $\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}F_n(z)dz = 1$ и $F_n(z) > 0\ \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{l}\int\limits_{-a}^{a}F_n(z)dz < 1\ \forall a < l$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{l}\int\limits_{-\delta}^{\delta}F_n(z)dz < \frac{\varepsilon}{2}$$

Введем $M = \max\limits_{[-l,l]}|f(x)|$; $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \mapsto \max\limits_{[-\delta,l]}F_n(z) \leqslant \frac{\varepsilon}{8M}$

$$\frac{1}{l}\int\limits_{\delta}^{l}|f(x+z) - f(x)|F_n(z)dz \leqslant \frac{1}{l}2M\frac{\varepsilon}{8M}(l - \delta) < \frac{\varepsilon}{4}$$

2. Аналогично, $\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{-\delta}|f(x+z) - f(x)|F_n(z)dz < \frac{\varepsilon}{4}$

3. Тогда $|\sigma_n(x) - f(x)| = \frac{1}{l}\left|\int\limits_{-\delta}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{l} + \int\limits_{-l}^{-\delta}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \,\&\, \forall x \in \mathbb{R} \to |\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \sigma_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} f(x)$$

7. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими членами.

$$T_m(x) = A_0 + \sum A_k \cos\frac{k\pi x}{l} + B_k \sin\frac{k\pi x}{l} \text{ — тригоном. многочлен}$$

Теорема 7.1. **Теорема Вейерштрасса.** Любую $2l$–периодическую непрерывную на $\mathbb{R}$ функцию $y = f(x)$ с любой степенью точности можно равномерно на $\mathbb{R}$ приблизить тригонометрическим многочленом, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0 \exists T_m : \max_{x\in[-l,l]} |f(x) - T_m(x)| < \varepsilon$$

Доказательство.
Мы продолжили f на $\mathbb{R}$ с периодом $2l$ и к полученной функции применим теорему Фейера. Тогда:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \forall x \mapsto |\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

В качества $T_m(x)$ выбрали некоторую сумму Фейера $\sigma_n(f,x)$ при $n \geqslant N$. Тогда для $T_m(x)$ выполняется:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists T_m : \max_{x\in[-l,l]} |f(x) - T_m(x)| < \varepsilon$$

Теорема 7.2. Любую непрерывную на $[a,b]$ функцию $y = f(x)$ с любой степенью точностью можно *равномерно* на $[a,b]$ приблизить многоленном, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists P_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n : max|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon\ \forall x \in [a,b]$$

Доказательство.
I. $[a,b] = [0,l]$, f четно продолжим на $[-l;0]$ и периодически с периодом $2l$ на $\mathbb{R}$, обозначим $\tilde{f}(x) = f(x)$, $x \in [0;l]$

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists T_m : \max_{x\in[0,l]} |f(x) - T_m(x)| < \varepsilon/2$$

$y = \cos\dfrac{k\pi x}{l}$, $y = \sin\dfrac{k\pi x}{l}$ — раскладываются в ряд Тейлора, который равномерно сходится, в частности, на $[0,l] \Rightarrow T_m$ раскладывается в ряд Тейлора, равномерно сходящийся на $[0,l]$

Если $P_n(x)$ — частична сумма ряда Тейлора $T_m(x)$, в силу равномерной сходимости

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n : \max |T_m(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall x \in [0,l]$$

$$\forall x \in [0,l] \; |f(x) - P_n(x)| \leqslant |f(x) - T_m(x)| + |T_m(x) - P_n(x)| \leqslant \max |f(x) - T_m(x)| + \\ + \max |T_m(x) - P_n(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

II. $[a,b]$ — произвольный. $x = a + \frac{t}{l}(b-a)$, $t \in [0,l]$

$$F(t) = f\left(a + \frac{t}{l}(b-a)\right)$$

$F(t)$ — непрерывна на $[a,b]$ как суперпозиция двух непрерывных функций.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P_n : \max |F(t) - P_n(t)| < \varepsilon \; \forall t \in [0,l]$$

$t = \frac{x-a}{b-a} l \to P_n(t) = Q_n(x) \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists Q_n : \max |f(x) - Q_n(x)| < \varepsilon \; \forall x \in [a,b]$$

А значит случай I верен при всех $x \in [a,b]$

8. Минимальное свойство коэффициентов Фурье по ортогональной системе. Неравенства Бесселя.

$\mathcal{E}$ — предгильбертово пространство
$\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots\} \subset \mathcal{E}$

Определение 8.1. Система Φ называется **ортогональной**, если $\forall i,j : i \neq j \mapsto (\varphi_i,\varphi_j) = 0$. Если при этом $\forall i \mapsto (\varphi_i,\varphi_i) = 1$, то система Φ называется **ортонормированной**.

Начальные условия: $\mathcal{E}$ — предгильбертово пространство, $\Phi = \{\varphi_1,\varphi_2, \ldots ,\varphi_n, \ldots\}$ — счетная ортонормированная система элементов из $\mathcal{E}$

Определение 8.2. Назовем **рядом Фурье** элементов $f \in \mathcal{E}$ по системе Φ следующий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k\varphi_k,\ f_k = (f,\varphi_k)$$

f_k — **коэффициент Фурье** элемента f
Частичная сумма ряда Фурье элемента f по системе Φ

$$S_n^f = \sum_{k=1}^{n} f_k\varphi_k,\ f_k = (f,\varphi_k)$$

$||f - g||$ — **отклонение элемента** g от элемента f.
$||f|| = \sqrt{(f,f)}$ — **норма** элемента f

Теорема 8.1. **Основная теорема**. Из всех сумм вида $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$, наименьшее отклонение по норме данного пространства от элемента f имеет частичная сумма ряда Фурье элемента f по Φ

Доказательство.

$$||f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k||^2 = (f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k,\ f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} c_k(f,\varphi_k) + ||f||^2$$

выделим полный квадрат и учтем, что $(f,\varphi_k) = f_k$

$$||f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k||^2 = \sum_{k=1}^{n}(c_k - f_k)^2 + ||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2$$

Следовательно отклонение наименьшее, если $c_k = f_k$

Следствие 1. Для любого элемента $f \in \mathcal{E}$, для любых чисел c_k, для любой счетной ортонормированной системы элементов Φ и для любого фиксированного числа n, выполняется неравенство:

$$||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant ||f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k||^2$$

Следствие 2. Для любого элемента $f \in \mathcal{E}$, для любой счетной ортонормированной системы элементов Φ и для любого фиксированного числа n, справедливо **тождество Бесселя**:

$$||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 = ||f - \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k||^2$$

Следствие 3. Для любого элемента $f \in \mathcal{E}$, для любой счетной ортонормированной системы элементов Φ и для любого фиксированного числа n, справедливо **неравенство Бесселя**:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leqslant ||f||^2$$

Доказательство.
Из тождества Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant ||f||^2$$

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2$ — монотонно возрастающая последовательность, к тому же она ограниченна из неравенства выше, следовательно $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2 < \infty$.

9. Полнота ортогональной системы функций, ортогональный базис и равенство Парсеваля.

** — это небольшой билет, просто много текста для понимания:)*

Метрическое пространство $\mathcal{M} = (\mathcal{L}, \rho)$ — полное, если $\forall \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность, сходится.

$\mathcal{N} = (\mathcal{L}, ||\cdot||)$— полное, если $\forall \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность сходится. $\rho(x,y) = ||x-y||$

Определение 9.1. Полное линейное нормированное пространство называется банаховым. Полное предгильбертово пространство называется гильбертовым пространством.

$\mathcal{E} = (\mathcal{L}, (\cdot,\cdot))$ — предгильбертово, а $\mathcal{L}$ — бесконечномерное.

Определение 9.2. $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}, \mathcal{N} = (\mathcal{L}, ||\cdot||)$ — банахово пространство. $\mathcal{N}' = (\mathcal{L}', ||\cdot||)$ называется **подпространством** пространства $\mathcal{N}$, если $\mathcal{N}'$ — банахово.

Определение. Норма $||\cdot||_2$ на линейном пространстве $\mathcal{L}$ не слабее нормы $||\cdot||_1$ на этом пространстве, если

$$\exists C > 0 : \forall x \in \mathcal{L} \mapsto ||x||_1 \leqslant C \cdot ||x||_2$$

Нормы $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$ на $\mathcal{L}$ эквивалентны, если

$$\exists C_1 > 0 \& \exists C_2 > 0 : \forall x \in \mathcal{L} \mapsto C_1||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant C_2||x||_2$$

Определение 9.3. $\mathcal{L} = \mathcal{C}[a,b]$ — пространство функций непрерывных на $[a,b]$

1. $||f||_c = \max|f(x)|$, $C[a,b] = (\mathcal{C}[a,b], ||\cdot||_c)$ сходимость в $C[a,b]$ равномерная.
2. $||f||_1 = \int\limits_a^b |f(x)|dx$, $L_c^1[a,b] = (\mathcal{C}[a,b], ||\cdot||_1)$ сходимость в $L_c^1[a,b]$ — сходится в среднем.
3. $||f||_2 = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}$, $L_C^2[a,b] = (\mathcal{C}[a,b], ||\cdot||_2)$ — сходимость в среднем квадратичном.

Предложение. Для норм, введенных на линейном пространстве $\mathcal{C}[a,b]$ справедливо:

1. $||\cdot||_C$ не слабее норм $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$
2. $||\cdot||_2$ не слабее нормы $||\cdot||_1$

Доказательство. Пункт первый:

$$||f||_1 = \int\limits_a^b |f(x)|dx \leqslant ||f||_C \int\limits_a^b dx = (b-a)||f||_C$$

$$||f||_2 = \sqrt{\int\limits_a^b (f(x))^2 dx} \leqslant \sqrt{||f||_c^2 \int\limits_a^b dx} = \sqrt{b-a}||f||_C$$

Пункт второй:

$$||f||_1 = \int\limits_a^b |f(x)|dx \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b (f(x))^2 dx}\sqrt{\int\limits_a^b dx} = \sqrt{b-a}||f||_2$$

□

Пример. $\tilde{\mathcal{C}}[a,b] = \{f \in \mathcal{C}[a,b] : f(a) = f(b)\}$

$\tilde{C}[a,b] = (\tilde{\mathcal{C}}[a,b], ||\cdot||_C)$ — подпространство $C[a,b]$

Определение 9.4. Счетная система $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, элементов нормированного пространства $\mathcal{N} = (\mathcal{L}, ||\cdot||)$ называется **полной**, если

$$\forall f \in \mathcal{N} \ \&\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : ||f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k|| < \varepsilon$$

Теорема 9.1. Пусть в предгильбертовом пространстве $\mathcal{E}$ задана счетная ортнормированная система $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Ряд Фурье элемента f из $\mathcal{E}$ по системе Φ сходится к f тогда и только тогда, когда $||f||^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2$, $f_k = (f, \varphi_k)$ — **равенство Парсеваля**.

Доказательство.

Необходимость

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k \text{ сходится к } f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \mapsto ||f - \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k|| < \sqrt{\varepsilon}$$

Из тождества Бесселя:

$$||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 = ||f - \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k||^2 < \varepsilon \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} f_k^2 = ||f||^2$$

Достаточность. Дано равенство Парсеваля:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \mapsto ||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon$$

применение тождества Бесселя заканчивает доказательство.

Определение 9.5. Счетная ортонормированная система $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, элементарного предгильбертового пространства $\mathcal{E}$ называется **ортонормированным базисом**, если любой элемент f этого пространства является суммой своего ряда Фурье.

Теорема 9.2. Для счетной ортонормированной системы Φ в предгильбертовом пространстве $\mathcal{E}$ эквивалентны следующие условия:

1. Φ — полная система в $\mathcal{E}$
2. Φ — ортонормированный базис пространства $\mathcal{E}$
3. $\forall f \in \mathcal{E} \mapsto ||f||^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2$, $f_k = (f,\varphi_k)$ (Равенство Парсеваля)

Доказательство.
2) $\Leftrightarrow$ 3) следует из теоремы 9.1.
1) $\Rightarrow$ 2): $[\Phi$ — полная$] \overset{def}{=\!=} \left[\forall \varepsilon > 0 \;\&\; \forall f \in \mathcal{E} \; \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n : ||f - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k|| < \varepsilon\right]$
Из теоремы 8.1:

$$||f - \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k|| \leqslant ||f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k|| < \varepsilon$$

Используя тождество Бесселя

$$||f - S_{n_0}^f|| = ||f||^2 - \sum_{k=1}^{n_0} f_k^2 \text{ — убывающая последовательность}$$

Значит $\{f - S_n^f\}$ — убывающая $\Rightarrow \forall n \geqslant n_0 \mapsto ||f - S_n^f|| \leqslant \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geqslant n_0 \mapsto ||f - S_n^f|| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} S_n^f = f \text{ (по норме)}$$

2) $\Rightarrow$ 1) $[\ \Phi$ — ОНБ в $\mathcal{E}\ ] = \left[\underline{\forall f \in \mathcal{E}} \mapsto f = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \varphi_k\right]$

$$\underline{\forall \varepsilon > 0} \; \exists n_0 : \forall n \geqslant n_0 \mapsto \underline{||f - \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k|| < \varepsilon} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ то, что подчеркнуто говорит о том, что система Φ полна в $\mathcal{E}$ по определению.

10. Полнота тригонометрической системы в пространстве функций, интегрируемых с квадратом. Сходимость ряда Фурье в среднем квадратичном, равенство Парсеваля для тригонометрической системы.

Полнота тригонометрических систем. Пусть имеем:

$$\Phi = \{\frac{1}{\sqrt{kl}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi x}{l}\}_{k=1}^{\infty} \text{ — ортонормированная система}$$

Определение 10.1. Подмножество N' множества нормированного пространства N называется **плотным** в N, если

$$\forall g \in N \;\&\; \forall\varepsilon > 0 \;\exists f \in N' : ||f - g|| < \varepsilon$$

Теорема 0 Подмножество $\tilde{C}[a,b]$ пространства $L^2_R[a,b]$ плотно в $L^2_R[a,b]$

Теорема 10.1. Если ортонормированная система $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $\tilde{C}[a,b]$, то она полна в $L^2_R[a,b]$ и $L^2_C[a,b]$

Доказательство.
По теореме 0

$$\forall\varepsilon > 0 \;\&\; \forall f \in \mathcal{L}^2_R[a,b] \;\exists g \in \tilde{\mathcal{C}}[a,b] : ||f - g||_2 < \varepsilon/2$$

Система Φ полна в $\tilde{\mathcal{C}}[a,b] \Rightarrow \exists\alpha_1, \ldots, \alpha_n : ||g - \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k||_c < \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}}$

$$||f - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k|| = ||f - g + g - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k||_2 \leqslant ||f - g||_2 + ||g - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k||_2 =$$

$$= ||f - g||_2 + \sqrt{b-a}||g - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k||_C < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$\Rightarrow \Phi$ полна в $L^2_R[a,b]$ и так как она состоит из непрерывных функций, то Φ полна в $L^2_C[a,b]$

Теорема 10.2. Тригонометрические системы полны в $\mathcal{L}^2_R[-l,l]$ и в $\mathcal{L}^2_C[-l,l]$

Доказательство.
По теореме Вейерштрасса любую непрерывную функцию можно равномерно приблизить с любой точностью тригонометрическим многочленом. Тогда

$$\forall f \in C[a,b] \ \& \ \forall \varepsilon > 0 \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n : ||f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k|| < \varepsilon$$

Следовательно тригонометрическая система полна в C, тогда по теореме 10.1 она полна в $\mathcal{L}_R^2[a,b]$ и $\mathcal{L}_C^2[a,b]$

Несколько фактов.

$$\Phi = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \ldots \right\}_{k=1}^{\infty} \qquad \alpha_k, \beta_k$$

1. Φ ортонормированный базис в $\mathcal{L}_R^2[-l,l]$, т.е. тригонометрический ряд Фурье
$$\forall f \in \mathcal{L}_R^2[-l,l]$$
сходится по норме $|| \circ ||_2$ к f

2. Равенство Парсеваля
$$\alpha_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 + \beta_k^2 = ||f||_2^2$$
$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{l} ||f||_2^2$$

3. Система Φ замкнута в $L_R^2[-l,l]$, т.е. $(f,\varphi_k) = 0 \ \forall k \Rightarrow f = 0$ (в смысле определения эквивалентных функций)

11. Теорема Рисса-Фишера

Теорема 11.1. **Рисса-Фишера.** Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задана счетная ортонормированная система элементов $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ и последовательность чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$, тогда $\exists f \in \mathcal{H}$:

1. $\alpha_k = (f,\varphi_k)$, $k = 1,2,\ldots$ — коэффициенты Фурье по системе Φ
2. $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\varphi_k$ (f сходится к ряду Фурье по норме)
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = ||f||^2$

Доказательство.
Условие 2: рассмотрим суммы $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k$

$$||S_{n+p} - S_n||^2 = ||\sum_{k=1}^{n+p} \alpha_k\varphi_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k||^2 = ||\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k\varphi_k||^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k\varphi_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k\varphi_k\right) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2$$

По условию:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty \overset{\text{кр. Коши}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N\ \&\ \forall p \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2 < \varepsilon^2$$

$$||S_{n+p} - S_n|| < \varepsilon \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ — фундаментальная}$$

$$\Rightarrow \exists f \in \mathcal{H} : f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\varphi_k \text{ (по норме)}$$

Условие 1: Рассмотрим (f,φ_k)

$$(f, \varphi_k) = (f - S_n, \varphi_k) + (S_n, \varphi_k)$$

Из неравенства Коши–Буняковского:

$$(f - S_n, \varphi_k) \leqslant ||f - S_n||||\varphi_k|| = ||f - S_n|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$(S_n, \varphi_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_j\varphi_j,\varphi_k\right) = \alpha_k, \begin{cases} j \neq k \to (\varphi_j,\varphi_k) = 0 \\ j = k \to (\varphi_j,\varphi_k = 1) \end{cases} \quad \Rightarrow (f,\varphi_k) = \alpha_k$$

Условие 3 следует из т. 9.2.

12. Полнота и замкнутость ортогональной системы, их связь

Определение 12.1. Счетная ортонормированная система элементов $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ предгильбертова пространства $\mathcal{E}$ называется **замкнутой**, если из равенств $(f,\varphi_k) = 0$, $k = 1,2,\ldots$ следует, что $f = 0$

Теорема 12.1.

1. Если в предгильбертовом пространстве $\mathcal{E}$ ортонормированная система элементов $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна, то она замкнута
2. Если в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ ортонормированная система элементов $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута, то она полна.

Доказательство.

Докажем утверждение 1.Φ — полна $\overset{\text{Т.9.2}}{\Rightarrow} \forall f \in \mathcal{E} \mapsto ||f||^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2$,

$$f_k = (f,\varphi_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow ||f|| = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow \Phi \text{ замкнута}$$

Докажем утверждение 2. Φ — замкнута, но не является полной

$$\exists g \in \mathcal{H} : ||g||^2 > \sum_{k=1}^{\infty} g_k^2,\ g_k = (g,\varphi_k),\ k = 1,2,\ldots \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} g_k^2 < \infty$$

т.к. это ряд с положительными членами, и все его част. суммы сходятся. Тогда по т. Рисса–Фишера

$$\exists f \in \mathcal{H} : f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k\varphi_k \text{ и } ||f||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} g_k^2,\ f \neq g,$$

из замкнутости следует

$$(f - g,\varphi_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow f - g = 0 \Rightarrow f = g \text{ — противоречие}$$

Теорема 12.2. *Произвольная числовая последовательность $\{\alpha_k\}$ является последовательностью коэффициентов Фурье, некоторого элемента f гильбертова пространства $\mathcal{H}$ по ортонормированной системе элементов $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в том и только том случае, когда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$. При этом, если система Φ полна, то такой элемент f из $\mathcal{H}$ нахо-*

дится единственным образом. Если система Φ не является полной, то такой элемент f находится с точностью до элемента $g \neq 0$, который имеет нулевой ряд Фурье.

Доказательство. Достаточность следует из т. Рисса-Фишера

Необходимость.

$$\exists f \in \mathcal{H} : \alpha_k = (f,\varphi_k),\ k = 1,2,\ldots \overset{\text{неравенство Бесселя}}{\Longrightarrow} ||f||^2 \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$$

$\square$

13. Полнота пространства $C[a,b]$, неполнота пространств непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами.

Теорема 13.1. Пространство $\mathcal{C}[a,b]$ полно, а пространства $\mathcal{L}^1_C[a,b]$ и $\mathcal{L}^2_C[a,b]$ неполны.

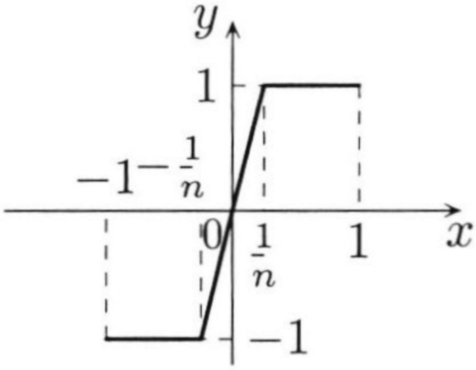
Доказательство.
Если последовательность f_n непрерывных на $[a,b]$ функций фундаментальная в норме $||\circ||_C$, то

$$\forall\varepsilon > 0 \to \exists n_0 : \forall n,m \geqslant n_0, \forall x \in [a,b] \mapsto |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

т.е. выполнен критерий Коши равномерной сходимости, и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$. Предельная функция для равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций также непрерывна, поэтому $f \in \mathcal{C}[a,b]$. Итак, $fn \to f$ в $\mathcal{C}[a,b]$, и пространство $\mathcal{C}[a,b]$ полно.
Докажем неполноту $\mathcal{L}^2_C[-1,1]$(в общем случае неполнота $\mathcal{L}^2_C$ и $\mathcal{L}^1_C$ доказывается аналогично). Рассмотрим последовательность непрерывных на $[-1,1]$ функций

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, \text{ если } -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1, \text{ если } x \in \left[-1; -\frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}; 1\right] \end{cases}$$

График такой функции:



Легко видеть, что

$$\forall x \in [0,1] \to \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \text{sign } x = f(x)$$

Докажем, что имеет место сходимость также в среднем квадратичном(sign $x \in \mathcal{L}^2_R[-1,1)$. В самом деле,

$$||f_n - f||_2^2 = \int_{-1}^{1} (f_n(x) - f(x))^2 dx =$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nx)^2 dx < 2\int_0^{\frac{1}{n}} 1dx = \frac{2}{n} \to 0$$

то есть $||f_n - f||_2 \to 0$

Поэтому последовательность f_n фундаментальна в $\mathcal{L}_R^2[-1{,}1]$, значит, и в $\mathcal{L}_C^2[-1{,}1]$. Но она не может сходиться в $\mathcal{L}_C^2[-1{,}1]$, так как не существует непрерывной на $[-1{,}1]$ функции g такой, что $||f_n - g||_2 \to 0$.В самом деле, если $f_n \to g$ в $\mathcal{L}_C^2[-1{,}1]$, то $f_n \to g$ в $\mathcal{L}_R^2[-1{,}1]$. Так как последовательность f_n имеет в $\mathcal{L}_R^2[-1{,}1]$ два передела f и g, то $f = g$ в $\mathcal{L}_R^2[-1{,}1]$, т.е. $f \sim g$ и $\int\limits_{-1}^{1}(f(x) - g(x))^2 dx = 0$. Отсюда следует, что $\int\limits_{0}^{1}(f(x) - g(x))^2 dx = 0$. Так как $f(x) = 1$ на $[0{,}1]$, то $\int\limits_{0}^{1}(1 - g(x))^2 dx = 0$. Так как функция g непрерывна на $[-1{,}1]$, то $g(x) \equiv 1$ на $[0{,}1]$.Аналогично $g(x) \equiv -1$ на $[-1{,}0]$. Полученное противоречие показывает, что фундаментальная последовательность f_n в $\mathcal{L}_C^2[-1{,}1]$ не имеет предела в этом пространстве, т.е. пространство $\mathcal{L}_C^2[-1{,}1]$ неполно.

14. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость собственных интегралов, зависящих от параметра.

Начальные условия. $\prod = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\, c \leqslant y \leqslant d\} = [a,b] \times [c,d]$

$w = f(x,y)$, при каждом фиксированном $y \in [c,d]$, функция $w = f(x,y)$ интегрируема на $[a,b]$

$\forall y \in [c,d]$ $J = J(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ — интеграл зависящий от параметра.

Теорема 14.1. Если $w = f(x,y)$ непрерывна на Π, то функция $J = J(y)$ непрерывна на $[c,d]$

Доказательство.
Π — компакт, $w = f(x,y)$ непрерывна на Π, следовательно можем воспользоваться Т. Кантора:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x,y) \in \Pi : y + \Delta y \in [c,d] \& |\Delta y| < \delta \mapsto |f(x,y+\Delta y) - f(x,y)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

Рассмотрим приращение функции $\mathcal{J}$, $\forall y \in [c,d]$:

$$|\Delta \mathcal{J}(y, \Delta y)| = |\mathcal{J}(y + \Delta y) - \mathcal{J}(y)| = \left| \int\limits_a^b \left[f(x,y + \Delta y) - f(x,y)\right] dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_a^b |f(x,y + \Delta y) - f(x,y)|\, dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \int\limits_a^b dx = \varepsilon$$

$\Rightarrow \mathcal{J}$ непрерывна на $[c,d]$

Теорема 14.2. Если $w = f(x,y)$ непрерывна на Π, то $\mathcal{J} = \mathcal{J}(y)$ интегрируема на $[c,d]$ и $\forall y_o \in [c,d]$ выполняется

$$\int\limits_c^{y_0} \mathcal{J}(y)dy = \int\limits_c^{y_0} \left[\int\limits_a^b (x,y)dx \right] dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^{y_0} f(x,y)dy \right] dx$$

Доказательство.

Из т. 14.1 следует, что $\mathcal{J} = \mathcal{J}_y$ интегрируема на $[c,d]$. По теореме о сведении кратного интеграла к повторному: каждый из повторных интегралов существует и равен двойному интегралу:

$$\iint\limits_{\Pi_0} f(x,y)dxdy, \text{ где } \Pi_0 = [a,b] \times [c,d]$$

Теорема 14.3. Если функция $w = f(x,y)$ и $w = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны на Π, то $\mathcal{J} = \mathcal{J}(y)$ дифференцируема на $[c,d]$ и

$$\mathcal{J}'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

Доказательство.

По условию $w = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывна на Π введем функцию $g(y) = \int\limits_a^b \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ — непрерывна на $[c,d]$ по т. 14.1 и интегрируема на $[c,d]$ по теореме 14.2, следовательно

$$\forall y \in [c,d] \mapsto \int\limits_y^c g(y)dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx \right] dy = \int\limits_a^b \left[f(x,y) - f(x,c) \right] dx = \mathcal{J}(y) - \mathcal{J}(c)$$

$$\mathcal{J}(y) = \int\limits_c^y g(y)dy + \mathcal{J}(c)$$

Из непрерывности и интегрируемости $g(y)$, следует дифференцируемость $\mathcal{J}$ на $[c,d]$, значит,

$$\mathcal{J}'(y) = g(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}dx$$

15. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса и Дирихле.

Несобственный интеграл первого рода. Начальные условия.

$\Pi - [a, +\infty) \times E$, где $E \in \mathbb{R}^1$

$w = f(x,y)$ при каждом фиксированном $y \in E$ интегрируема в несобственном смысле на $[a, +\infty)$

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_y = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx,\ y \in E$$

Определение 15.1. Несобственный интеграл $\mathcal{J} = \mathcal{J}_y$ сходится равномерно по параметру y на множестве E, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A = A(\varepsilon) \geqslant a : \forall R \geqslant A\ \&\ \forall y \in E \mapsto \left| \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

Отрицание:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 :\ \forall A \geqslant a\ \exists R_A \geqslant A\ \&\ \exists y_A \in E \mapsto \left| \int\limits_{R_A}^{+\infty} f(x,y_A) \right| \geqslant \varepsilon_0$$

Несобственный интеграл второго рода. Начальные условия. $\Pi_b = [a,b) \times E, \in\subset \mathbb{R}$

Если $\forall y \in E$ фиксированная функция $w = f(x,y)$ интегрируема в несобственном смысле на $[a,b)$, то на E определена функция:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

Определение 15.2. Несобственный интеграл $\mathcal{J} = \mathcal{J}(y)$ сходится равномерно по параметру y на E

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \eta \in (0,\delta)\ \&\ \forall y \in E \mapsto \left| \int\limits_{b-\eta}^{b} F(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

Теорема 15.1. **Критерий Коши.** Для равномерной сходимости по параметру y на множестве E несобственного интеграла $\mathcal{J} = \mathcal{J}(y)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists A = A(\varepsilon) > 0 \geqslant a : \forall R', R'' : R'' > R' \geqslant A \,\&\, \forall y \in E \mapsto$$
$$\mapsto |\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx| < \varepsilon$$

Доказательство.
Необходимость.
Непосредственно следует из определения.

$$\forall\varepsilon > 0 \exists A = A((\varepsilon) \geqslant a : \forall R' \geqslant A \,\&\, \forall y \in E \mapsto$$
$$\mapsto \left|\int\limits_{R'}^{\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \left|\int\limits_{R''}^{\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Так как $R'' > R' \Rightarrow \left|\int\limits_{R'}^{+\infty} f(x,y)dx\right| + \left|\int\limits_{+\infty}^{R''} f(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$
Достаточность.

$$\forall\varepsilon > 0 \exists A = A(\varepsilon) > 0 \geqslant a : \forall R', R'' : R'' > R' \geqslant A \,\&\, \forall y \in E \mapsto |\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx| < \varepsilon$$

Тогда по критерию Коши сходимости несобственных интегралов при всех $y \in E$ интеграл сходится, следовательно устремляя $R'' \to \infty$ получаем равномерную сходимость.

Замечание **Отрицание условия Коши:**

$$\exists\varepsilon_0 > 0 : \forall A \geqslant a \; \exists R'_A, R''_A : R''_A > R'_A \geqslant A \,\&\, \exists y_A \in E : \left|\int\limits_{R'_A}^{R''_A} f(x,y_A)dx\right| \geqslant \varepsilon_0$$

Теорема 15.2. **Признак Вейерштрасса.** Функция $w = f(x,y)$ определена на $\Pi = [a,+\infty) \times E$, при каждом фиксированном $y \in E$ функция f интегрируема на $[a,R]$, $\forall R > a$ и на Π выполнено неравенство $|f(x,y)| \leqslant g(x)$. Если $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx < \infty$, то несобственный интеграл $\mathcal{J} = \mathcal{J}(y)$ сходится равномерно по параметру y на E

Доказательство.
Из критерия Коши:

$$\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx < \infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \; \exists A = A(\varepsilon) : \forall R', R'' : R' > R'' \geqslant A \mapsto \int\limits_{R'}^{R''} g(x)dx < \varepsilon$$

Тогда $\forall y \in E$ выполняется

$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx\right| \leqslant \int\limits_{R'}^{R''} |f(x,y)|\, dx \leqslant \int\limits_{R'}^{R''} g(x)dx < \varepsilon$$

Следовательно $\mathcal{J} = \mathcal{J}(y)$ сходится равномерно по параметру y на E

Следствие. Если функция $w = \varphi(x,y)$ ограничена на $\Pi = [a, +\infty) \times E$ и $\forall y \in E$ $\varphi(x,y)$ интегрируема на $[a,R]$ $\forall R \geqslant a$, а $\int\limits_a^{+\infty} |h(x)|dx < \infty$, то сходится равномерно по параметру y на E интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x,y)h(x)dx$

Доказательство.

$$g(x) = M|h(x)|, \; M = \sup_{\Pi} |\varphi(x,y)| \Rightarrow \text{ признак Вейрештрасса.}$$

Теорема 15.3. **Признак Дирихле.** Пусть $w = f(x,y)$ непрерывна в Π_∞ и $\forall y \in [c.d]$ $\mathcal{J}(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится и выполнены следующие условия:

1. $\exists M > 0 : \forall R > a \;\&\; \forall y \in [c,d]$ $\left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx\right| \leqslant M$
2. $g = g(x)$ непрерывно дифференцируема, монотонна и
$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x)dx$ сходится равномерно по параметру y на $[c,d]$

Доказательство.
Проинтегрируем по частям: $\forall R > a \;\&\; \forall y \in [c,d] \mapsto$

$$\mapsto \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)g(x)dx = F(x,y)g(x)\Big|_R^{+\infty} - \int\limits_R^{+\infty} F(x,y)g'(x)dx$$

Так как $\forall y \in [c,d] \mapsto \lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y)g(x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)g(x)dx = -F(R,y)g(R) - \int\limits_R^{+\infty} F(x,y)g'(x)dx;$$

По условию $g'(x) \leqslant 0$ & $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0 \Rightarrow g(R) \geqslant 0$ и опять же по условию $\left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx\right| \leqslant M \Rightarrow$

$$\left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)g(x)dx\right| \leqslant Mg(R) - M\int\limits_R^{+\infty} g'(x)dx = 2Mg(R) = 2M\,|g(R)|$$

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon) \geqslant a:\ \forall R \geqslant A \mapsto |g(R)| < \frac{\varepsilon}{2M} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)g(x)dx\right| < \varepsilon$

Теорема 15.4. **Признак Дини.** Пусть функция $w = f(x,y)$ непрерывна на Π_∞, неотрицательна на нем и $\forall y \in [c,d]$ интеграл $\mathcal{J}(y)$ сходится и функция $\mathcal{J}(y)$ непрерывна на $[c,d]$, тогда $\mathcal{J}(y)$ сходится равномерно по параметру y на $[c,d]$.

16. Непрерывность и интегрируемость несобственных интегралов по параметру.

Начальные условия: $\Pi_\infty = [a, +\infty] \times [c,d]$, $\mathcal{J}(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx,\ y \in [c,d]$

Теорема 16.1. Пусть $w = f(x,y)$ непрерывна на Π_∞ и интеграл $\mathcal{J}(y)$ сходится равномерно по параметру y на $[c,d]$, тогда функция $\mathcal{J}(y)$ непрерывна на $[c,d]$ и

$$\lim_{y\to y_0} \mathcal{J}(y) = \int\limits_a^{+\infty} \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx$$

Доказательство.
Рассмотрим такую функциональную последовательность

$$\mathcal{J}_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathcal{J}_n(y)$ непрерывна на $[c,d]$. По условию $\mathcal{J}(y)$ равномерно сходится по параметру y:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geqslant n_0\ \&\ \forall y \in [c,d] \mapsto \left| \int\limits_{a+n}^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

Тогда оценим:

$$|\mathcal{J}(y) - \mathcal{J}_n(y)| = \left| \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx \right| = \left| \int\limits_{a+n}^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

$$\mathcal{J}_n(y) \underset{n\to\infty}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \mathcal{J}(y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathcal{J}(y)$ непрерывна на $[c,d] \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{y\to y_0} \mathcal{J}(y) = \mathcal{J}(y_0) = \int\limits_a^{+\infty} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)dx$

Теорема 16.2. Пусть $w = f(x,y)$ непрерывна на Π_∞ и интеграл $\mathcal{J}(y)$ сходится равномерно по параметру y на $[c,d]$, тогда $\mathcal{J}(y)$ интегрируема на $[c,d]$ и

$$\int\limits_c^d \mathcal{J}(y)dy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \right] dy = \int\limits_a^{+\infty} \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy \right] dx$$

Доказательство.
$\mathcal{J}(y)$ сходится равномерно по параметру y на $[c,d]$ и $f(x,y)$ непрерывна на $\Pi_\infty \overset{\text{Т. 16.1}}{\Longrightarrow}$
$\Longrightarrow \mathcal{J}(y)$ непрерывна на $[c,d] \Rightarrow \mathcal{J}(y)$ интегрируема на $[c,d]$

$\mathcal{J}(y)$ сходится равномерно по параметру y на $[c,d]$ и по определению:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A = A(\varepsilon) \geqslant a:\ \forall R > A\ \&\ \forall y \in [c,d] \mapsto \left| \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{d-c}$$

$$\left| \int\limits_d^c \mathcal{J}(y)dy \right| = \left| \int\limits_d^c \left[\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \right] dy \right| = \left| \int\limits_d^c \left[\int\limits_a^{R} f(x,y)dx \right] dy + \int\limits_c^d \left[\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx \right] dy \right|$$

Первый интеграл этой суммы собственный, значит по теореме 14.2 можем поменять порядок интегрирования:

$$\left| \int\limits_d^c \mathcal{J}(y)dy \right| = \left| \int\limits_a^R \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy \right] dx + \int\limits_c^d \left[\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx \right] dy \right|$$

Тогда

$$\left| \int\limits_c^d \mathcal{J}(y)dy - \int\limits_a^R \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy \right] dx \right| \leqslant \int\limits_c^d \left| \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx \right| dy < \frac{\varepsilon}{d-c} \int\limits_c^d dy = \varepsilon, \forall R$$

$\Rightarrow \int\limits_c^d \mathcal{J}(y)dy = \int\limits_a^{+\infty} \int\limits_c^d f(x,y)dydx$

Теорема 16.3. Пусть функция $w = f(x,y)$ неотрицательна и непрерывна при $x \geqslant a$ и $y \geqslant c$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{J}(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

сходится равномерно по параметру y на $[c,c+n]$

$$I(x) = \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

сходится равномерно по параметру x на $[a, a+n]$.
Тогда, если существует хотя бы один из этих повторных интегралов

$$\int\limits_a^{+\infty} \left[\int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy \right] dx, \quad \int\limits_c^{+\infty} \left[\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \right] dy,$$

то существует и второй.

Доказательство.

Пусть существует, т.е. сходится $\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy$. Рассмотрим функцию

$$g_n = \int\limits_c^{c+n} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{\text{T.16.2}}{=\!=\!=} \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{c+n} f(x,y)dy \leqslant \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

$\{g_n\}$ монотонна, возрастает и ограничена сверху, следовательно так как существует $\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy$ и $f \geqslant 0 \to \{g_n\}$ сходится $\Rightarrow$

$$g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

Аналогично доказательство для другого интеграла.

17. Дифференцирование несобственных интегралов по параметру.

Теорема 17.1. Пусть функции f и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна в Π_∞, $\mathcal{J}(y)$ сходится при некотором $y_0 \in [c,d]$, а $\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c,d]$, тогда $\mathcal{J}(y)$ сходится равномерно по параметру y на $[c,d]$, $\mathcal{J}(y)$ дифференцируема на $[c,d]$ и $\mathcal{J}'(y) = \mathcal{I}(y)$

Доказательство.

Рассмотрим функциональную последовательность $\mathcal{J}_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx, \forall n \in \mathbb{N}$, так как это собственные интегралы в $\Pi_0 \Rightarrow \mathcal{J}_n(y)$ дифференцируемая функция на $[c,d]$ и $\mathcal{I}_n(y) = \mathcal{J}_n'(y) = \int\limits_a^{a+n} \dfrac{\partial f}{\partial y}dx$

По условию $\mathcal{J}(y)$ сходится в т. $y_0 \in [c,d] \Rightarrow$

$$\mathcal{J}_n(y_0) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y_0)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{J}(y_0)$$

Тогда имеем $[\mathcal{J}_n(y)]$: дифференцируемая функция на $[c,d]$, $\mathcal{J}_n(y_0) \to \mathcal{J}(y_0)$ и $\mathcal{I}_n(y) \underset{n\to\infty}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \mathcal{I}(y)$(т.к сходится равномерно по параметру) $\Rightarrow \mathcal{J}_n(y) \underset{n\to\infty}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \mathcal{J}(y)$ и $\mathcal{J}'(y) = \mathcal{I}(y)$

** — последнее следствие получается из теоремы второго семестра, можете поискать или поверить мне на слово:)*

18. Достаточные условия сходимости интеграла Фурье в точке.

Начальные условия: пусть функция f определена на $(-l,l)$, периодически продолжена на $\mathbb{R}$, тогда для f можем записать тригонометрический ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l},$$

в котором

$$a_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}dt,\ k=0,1,2,\dots$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}dt,\ k=1,2,\dots$$

Подставим их значения в изначальный тригонометрический ряд:

$$\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}dt+\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}dt =$$

Если функция $f:\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt<\infty$, то при $l\to\infty\mapsto\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)dt\to 0$, тогда

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi}{l}(t-x)dt =$$

Обозначим $z_0=0$, $z_1=\frac{\pi}{l}$, $z_2=\frac{2\pi}{l},\dots,z_k=\frac{k\pi}{l},\dots,\Delta z_k=z_k-z_{k-1}=\frac{\pi}{l}$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta z_k\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cos z_k(t-x)dt \text{ — подобно интегральной сумме функции}$$

$I(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cos z(t-x)dt\Rightarrow$ при $l\to\infty$ введем

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos z(t-x)dt \text{ — интеграл Фурье функции } f$$

Замечание

$$F(x)=\int\limits_{0}^{+\infty}\left[a(z)\cos zx+b(z)\sin zx\right]dz$$

где $a(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos zt\,dt,\ \ b(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin zt\,dt$

Теорема 18.1. *Пусть функция $f = f(x) \in L^1_R(-\infty, +\infty)$, а функция $g = g(x,y)$ непрерывна и ограничена на $\Pi = (-\infty, +\infty) \times [c,d]$. Тогда*

1. $\mathcal{J}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x,y)dx$, *непрерывна на* $[c,d]$
2. $\mathcal{J}(y)$ *интегрируема на* $[c,d]$ *и*
$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x,y)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x)g(x,y)dy$$

Доказательство. По условию $g(x)$ – ограничена на $\Pi \Rightarrow \forall (x,y) \in \Pi \mapsto |g(x,y)| \leqslant M$, а $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$, тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, следовательно по критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R' = R'(\varepsilon), \exists R'' = R''(\varepsilon) : -\infty < R' < R'' < +\infty \mapsto$$
$$\mapsto \int\limits_{-\infty}^{R'} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{6M}, \ \int\limits_{R''}^{+\infty} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{6M}$$

Для выбранного ε рассмотрим $\Pi_0 = [R', R''] \times [c,d]$ — компакт. Функция g непрерывна на Π_0, следовательно g равномерно непрерывна на нем, тогда по определению

$$\forall \varepsilon (\text{для нашего}) \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x,y) \in \Pi_0 : y + \Delta y \in [c,d] \ \& \ |\Delta y| < \delta \mapsto$$
$$\mapsto |g(x,y+\Delta y) - g(x,y)| < \frac{\varepsilon}{3C},$$

где $C = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx \Rightarrow$ оценим:

$$|\mathcal{J}(y+\Delta y) - \mathcal{J}(y)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{R'} [g(x,y+\Delta y) - g(x,y)] f(x)dx + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{R'}^{R''} [g(x,y+\Delta y) - g(x,y)] f(x)dx + \int\limits_{R''}^{+\infty} [g(x,y+\Delta y) - g(x,y)] f(x)dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2M\frac{\varepsilon}{6M} + \frac{\varepsilon}{3C}C + 2M\frac{\varepsilon}{6M} = \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathcal{J}(y)$ непрерывна на $[c,d] \Rightarrow \mathcal{J}(y)$ интегрируема на $[c,d]$

Оставшуюся часть теоремы Знаменская не доказала, не знаю почему, но можно посмотреть доказательство на странице 200 Иванова(2 том, 2 издание, не исправленное) $\square$

Теорема 18.2. **Признак Дини.** Пусть $f(x) \in \mathcal{L}^1_R(-\infty, +\infty)$, а $S(x)$ — такое число, что при некотором $r > 0$ сходится интеграл

$$\int\limits_0^r \frac{|\varphi(u)|}{u} du < \infty,$$

где $\varphi(u) = f(x-u) + f(x+u) - 2S(x)$, тогда интеграл Фурье функции f сходится к $S(x)$

Доказательство.
Оценим:

$$\mathcal{J}_R(x) - S(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}[f(x+u) - f(x-u)]\frac{\sin Ru}{u}du - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin Ru}{u}duS(x) =$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin Ru}{u}duS(x) = 1$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}[f(x-u) - f(x-u) - 2S(x)]\frac{\sin Ru}{u}du = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[\varphi(u)\frac{\sin Ru}{u}du\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{r}\varphi(u)\frac{\sin Ru}{u}du + \frac{1}{\pi}\int\limits_r^{+\infty}\varphi(u)\frac{\sin Ru}{u}du = \mathcal{J}_R^1 + \mathcal{J}_R^2$$

1. $\underline{\mathcal{J}_R^1}$: По условию

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{r}\varphi(u)\frac{\sin Ru}{u}du\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{r}\frac{|\varphi(u)|}{u}du < \infty$$

   то есть $\mathcal{J}_R^1 \to 0$ при $R \to +\infty$ в силу условия теоремы и теоремы Римана об осцилляции

2. $\underline{\mathcal{J}_R^2}$:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_r^{+\infty}\varphi(u)\frac{\sin Ru}{u}du = \frac{1}{\pi}\int\limits_r^{+\infty}\frac{f(x-u)+f(x+u)}{u}\sin Ru\,du - \frac{2}{\pi}S(x)\int\limits_r^{+\infty}\frac{\sin Ru}{u}du$$

   в этой сумме первый интеграл $\xrightarrow{R\to+\infty}$ 0 по т. Римана об осцилляции, а второй $\xrightarrow{R\to+\infty}$ 0 по определению сходимости несобственного интеграла $\Rightarrow$

$$\mathcal{J}_R(x) - S(x) \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

Теорема 18.3. **Признак Гельдера.** Пусть $f \in \mathcal{L}_R^1(-\infty, +\infty)$ и функция f в т. $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Гельдера. Тогда интеграл Фурье функции f сходится к $\dfrac{f(x+0) - f(x-0)}{2}$

Доказательство.
Доказательство аналогично признаку Гельдера из 3 пункта.

19. Преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье. Непрерывность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции. Формулы обращения.

Начальные условия. Пусть функция $f(x) : f \in \mathcal{L}^1_R(-\infty,\infty)$, f — непрерывна на $\mathbb{R}$ и $\forall x \in \mathbb{R}$ существуют конечные односторонние производные $f'(x \pm 0)$

Введем Формула Коши:

$$\mathcal{F}(z) = \text{v.p.}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iz(t-x)} dt$$

$$f(x) = \text{v.p.}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(z) e^{izx} dz$$

Введем Прямое и обратное преобразования Фурье:

$$F[f](x) = \text{v.p.}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt$$

$$F^{-1}[f](x) = \text{v.p.}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ixt} dt$$

Если f — **нечетная**, то обозначим

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}_s^f(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \sin zt\, dt \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \mathcal{F}_s^f(z) \sin zx\, dz \end{aligned}\right. \quad \text{— \textbf{синус преобразование Фурье}}$$

Если f — **четная**, то обозначим

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}_c^f(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \cos zt\, dt \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \mathcal{F}_c^f(z) \cos zx\, dz \end{aligned}\right. \quad \text{— \textbf{косинус преобразование Фурье}}$$

Также, выпишем, что если f — **нечетная**, то $F[f](x) = -i\mathcal{F}_s^f(x)$
Если f — **четная**, то $F[f](x) = \mathcal{F}_c^f(x)$
Если же, f — **произвольная**, то

$$f(x) = g(x) + h(x), \quad \begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ h(x) &= \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{aligned} \Rightarrow F[f](x) = \mathcal{F}_c^g - i\mathcal{F}_S^h$$

Свойства преобразования Фурье.

Теорема 19.1. Пусть функция $f(x) : f \in \mathcal{L}_R^1(-\infty,\infty)$, f — непрерывна на $\mathbb{R}$ и $\forall x \in \mathbb{R}$ существуют конечные односторонние производные $f'(x \pm 0)$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$ справедливо

$$F[F^{-1}[f]](x) = f(x)$$
$$F^{-1}[F[f]](x) = f(x)$$

Доказательство.

$$F[F^{-1}[f]](x) = \text{v.p. } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F^{-1}[f](t) e^{-ixt} dt =$$

Проведем замену: $-t = S$, $dt = -dS$

$$= \text{v.p. } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F^{-1}[f](-S) e^{ixs} dS = \text{v.p. } \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} dS \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iSt} dt =$$
$$= \text{v.p. } \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dS \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iS(t-x)} dt = f(x)$$

Равенство v.p. $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dS \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iS(t-x)} dt = f(x)$ — формула Коши
Для второго равенства из теоремы доказательство аналогично.

Теорема 19.2. Пусть функция $f(x) : f \in \mathcal{L}_R^1(-\infty,\infty)$, f — непрерывна на $\mathbb{R}$ и $\forall x \in \mathbb{R}$ существуют конечные односторонние производные $f'(x \pm 0)$. Тогда функции $F[f]$ и $F^{-1}[f]$ равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$ и

$$\lim_{x\to\infty} F[f] = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F^{-1}[f] = 0$$

Доказательство.
Проведем доказательство для действительной части прямого образования Фурье (для остальных частей аналогично)

Обозначим: $a(x) = \text{Re } F[f](x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos xt \, dt$

Возьмем любые $x_1, x_2 \Rightarrow$

$$|a(x_1) - a(x_2)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos x_1 t - \cos x_2 t) dt \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) 2 \sin \frac{(x_1 - x_2)t}{2} \cos \frac{(x_1 + x_2)t}{2} dt \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-A} |f(t)| dt + \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-A}^{A} |tf(t)| dt + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{A}^{+\infty} |f(t)| dt$$

В полученной сумме каждый интеграл обозначим $\mathcal{J}_i$, $i = \overline{1{,}3}$ соответственно. Так как $f \in \mathcal{L}^1_R(-\infty,\infty)$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A = A(\varepsilon) > 0 : \mathcal{J}_1 < \frac{\varepsilon}{3}, \mathcal{J}_3 < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\mathcal{J}_2 = \int\limits_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} |tf(t)| dt = M(\varepsilon) \Rightarrow$ выберем:

$$\exists \delta = \frac{\varepsilon}{3M(\varepsilon)} : |x_1 - x_2| < \delta \mapsto |a(x_1) - a(x_2)| < \varepsilon$$

Следовательно $a(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и по теореме Римана об осцилляции

$$a(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} F[f] = 0$$

20. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

Теорема 20.1. **Дифференцирование преобразования Фурье.** Пусть функции $f(x)$ и $xf(x) \in \mathcal{L}^1_R(-\infty, +\infty)$, функция f непрерывна на $(-\infty, +\infty)$, т.е. $f \in C(-\infty, +\infty)$ и существуют конечный односторонние производные $f'(x \pm 0) \forall x \in \mathbb{R}$. Тогда преобразование Фурье функции $f : F[f]$ — непрерывно дифференцируемая функция и ее производная

$$\frac{d}{dx}\left[F[f](x)\right] = F[(-it)f](x)$$

Доказательство.

Продифференцируем по переменной x функцию $F[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt \Rightarrow$

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-it)f(t)e^{-itx}dt = F[(-it)f](x)$$

Теперь обоснуем законность дифференцирования:

$$|(-it)f(t)e^{-itx}| \leqslant |tf(t)|, \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|dt < \infty \text{ (из условий теоремы)}$$

Тогда по теореме Вейерштрасса $I(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-it)f(t)e^{-itx}dt$ сходится равномерно по параметру $x \in [-A,A]$, $\forall A > 0 \Rightarrow I(x)$ непрерывна на $[-A,A] \Rightarrow F[f](x)$ непрерывно дифференцируемая функция на $[-A,A] \forall A \Rightarrow$ на всем $\mathbb{R}$ и справедливо выражение, которое мы доказываем.

Следствие. Пусть функция f, $xf, \ldots, x^n f \in \mathcal{L}^1_R(-\infty,\infty)$, $f \in C(-\infty,\infty)$ и $\forall x \in \mathbb{R}$ существуют конечные $f^{(n)}(x \pm 0) \Rightarrow F[f](x) - n$ раз дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$ и $\forall k = 1,2,\ldots,n$ выполняется

$$\frac{d^n}{dx^n} F[f](x) = F[(-it)^n f](x)$$

Теорема 20.2. **Преобразование Фурье производной.** Пусть функция f непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, f' обладает конечными односторонними производными в любой точке $x \in \mathbb{R}$ и $f,\, f' \in \mathcal{L}^1_R(-\infty,+\infty)$, тогда

$$F[f'](x) = (ix)F[f](x)$$

Доказательство.

Для функцииf справедлива формула Ньютона–Лейбница:

$$\forall x \in \mathbb{R} \mapsto \int\limits_0^{+\infty} f'(t)dt = f(x) - f(0)$$

Тогда $f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)dt$, где $f'(t)$ абсолютно интегрируема функция, следовательно $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(0) + \int\limits_0^{+\infty} f'(t)dt = A$. Покажем, что $A = 0$: пусть $A > 0 \Rightarrow$

$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall x > a \mapsto f(x) > \frac{1}{2}A \Rightarrow$$

$\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, что противоречит условия теоремы.

Значит $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Аналогично $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$$F[f'](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-itx}dt =$$

$$\left| \begin{array}{c} u = e^{-itx} \Rightarrow du = -ixe^{-itx}dt \\ dv = f'(t)dt \Rightarrow v = f(t) \end{array} \right|$$

$$= \frac{f(t)e^{-itx}}{\sqrt{2\pi}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{ix}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt = (ix)F[f](x)$$

$* - \frac{f(t)e^{-itx}}{\sqrt{2\pi}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ обнулилось, так как $|e^{-itx}| = 1$

Следствие. Пусть f $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, $f^{(n)}$ имеет конечные односторонние производные в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ и $f,f',\ldots,\ f^{(n)} \in \mathcal{L}^1_R(-\infty,+\infty)$. Тогда $F[f^{(n)}](x) = (ix)^n F[f](x)$ и $F[f](x) = 0\left(\frac{1}{x^n}\right)$ при $x \to \infty$