Machete: Tipos y Términos

Las expresiones de tipos (o simplemente tipos) son

$$\sigma ::= \mathsf{Bool} \mid \mathsf{Nat} \mid \sigma \to \sigma$$

Sea $\mathcal{X}$ un conjunto infinito enumerable de variables y $x \in \mathcal{X}$. Los términos están dados por

$$\begin{aligned} M ::= {} & x \\ & \mid \lambda x : \sigma . M \\ & \mid M \ M \\ & \mid \mathsf{true} \\ & \mid \mathsf{false} \\ & \mid \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ M\ \mathsf{else}\ M \\ & \mid \mathsf{zero} \\ & \mid \mathsf{succ}(M) \\ & \mid \mathsf{pred}(M) \\ & \mid \mathsf{isZero}(M) \end{aligned}$$

Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{true} : \mathsf{Bool}}\ \textit{T-True} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{false} : \mathsf{Bool}}\ \textit{T-False}$$

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}\ \textit{T-Var}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathsf{Bool} \quad \Gamma \vdash P : \sigma \quad \Gamma \vdash Q : \sigma}{\Gamma \vdash \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ P\ \mathsf{else}\ Q : \sigma}\ \textit{T-If}$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma . M : \sigma \to \tau}\ \textit{T-Abs} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\ N : \tau}\ \textit{T-App}$$

Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{zero} : \mathsf{Nat}} \; \textit{T-Zero}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathsf{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{succ}(M) : \mathsf{Nat}} \; \textit{T-Succ} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \mathsf{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{pred}(M) : \mathsf{Nat}} \; \textit{T-Pred}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathsf{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{isZero}(M) : \mathsf{Bool}} \; \textit{T-IsZero}$$

Machete: Semántica operacional

$$V ::= \mathsf{true} \mid \mathsf{false} \mid \lambda x : \sigma . M \mid \mathsf{zero} \mid \mathsf{succ}(V)$$

(Los valores de tipo Nat pueden escribirse como $\underline{n}$, lo cual abrevia $\mathsf{succ}^n(\mathsf{zero})$).

Reglas de Evaluación en un paso

Si $M_1 \to M_1'$, **entonces** $M_1 M_2 \to M_1' M_2$ $\qquad$ (*E-App*$_1$ o μ)

Si $M_2 \to M_2'$, **entonces** $V M_2 \to V M_2'$ $\qquad$ (*E-App*$_2$ o ν)

$(\lambda x : \sigma . M) V \to M\{x := V\}$ $\qquad$ (*E-AppAbs o* β)

Machete: Semántica operacional

Reglas de Evaluación en un paso

$$\text{if true then } M_2 \text{ else } M_3 \to M_2 \qquad (\textit{E-IfTrue})$$

$$\text{if false then } M_2 \text{ else } M_3 \to M_3 \qquad (\textit{E-IfFalse})$$

Si $M_1 \to M_1'$**, entonces**

$$\text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \to \text{if } M_1' \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \qquad (\textit{E-If})$$

Machete: Semántica operacional

Reglas de Evaluación en un paso

$$\mathrm{pred}(\mathrm{succ}(\underline{n})) \to \underline{n} \qquad (\textit{E-PredSucc})$$

$$\textbf{Opcional*: } \mathrm{pred}(\mathrm{zero}) \to \mathrm{zero} \qquad (\textit{E-Pred}_0)$$

$$\mathrm{isZero}(\mathrm{zero}) \to \mathrm{true} \qquad (\textit{E-IsZero}_0)$$

$$\mathrm{isZero}(\mathrm{succ}(\underline{n})) \to \mathrm{false} \qquad (\textit{E-IsZero}_n)$$

$$\textbf{Si } M \to N\textbf{, entonces } \mathrm{succ}(M) \to \mathrm{succ}(N) \qquad (\textit{E-Succ})$$

$$\textbf{Si } M \to N\textbf{, entonces } \mathrm{pred}(M) \to \mathrm{pred}(N) \qquad (\textit{E-Pred})$$

$$\textbf{Si } M \to N\textbf{, entonces } \mathrm{isZero}(M) \to \mathrm{isZero}(N) \qquad (\textit{E-IsZero})$$

*Introducir la regla pred_0 restaura la propiedad de Progreso, pero ya no modela los naturales tradicionales, sino una variante.

Machete: Extensión con μ

$$M ::= \ldots \mid \mu x : \tau.M$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \mu x : \sigma.M : \sigma} \; \textit{T-Fix}$$

$$\mu x : \sigma.M \to M\{x := \mu x : \sigma.M\} \quad (\textit{E-Fix})$$