Γ΄.1 Δειγματοληψία και αναδίπλωση σήματος

Θεωρείστε το σήμα συνεχούς χρόνου

$$x(t) = \cos(100\pi t) + \cos(200\pi t) + sin(500\pi t)$$

1. Ποιά είναι η ελάχιστη απαιτούμενη συχνότητα δειγματοληψίας για να μπορεί επιτευχθεί ανακατασκευή του σήματος $x(t)$ από την ακολουθία των περιοδικών δειγμάτων του; Η απάντηση να δικαιολογηθεί αυστηρά.

2. Χρησιμοποιώντας το πακέτο MATLAB, σχεδιάστε το σήμα $x(t), t \in [-10, 10]$. Χρησιμοποιείστε βήμα $\Delta t = 0,001$.

3. Εφαρμόστε τον τύπο ανακατασκευής του θεωρήματος δειγματοληψίας με συχνότητα αυτή που υπολογίσατε στο ερώτημα 1. Στο γράφημα του ερωτήματος 2, υπερθέσατε (με διαφορετικό χρώμα) το γράφημα του ανακατασκευασμένου σήματος.

4. Επαναλάβατε το ερώτημα 3 με συχνότητα δειγματοληψίας *μεγαλύτερη* από τη συχνότητα που υπολογίσατε στο ερώτημα 1.

Στο γράφημα των ερωτημάτων 2 και 3, υπερθέσατε (με διαφορετικό χρώμα) το γράφημα του νέου ανακατασκευασμένου σήματος.

5. Επαναλάβατε το ερώτημα 3 με συχνότητα δειγματοληψίας *μικρότερη* από τη συχνότητα που υπολογίσατε στο ερώτημα 1. Στο γράφημα των ερωτημάτων 2, 3 και 4, υπερθέσατε (με διαφορετικό χρώμα) το γράφημα του νέου ανακατασκευασμένου σήματος.

6. Τι παρατηρείτε; Συνοψίστε τα συμπεράσματά σας.

Γ΄.2 Μετασχηματισμοί Fourier

1. Να γραφεί ένα πρόγραμμα MATLAB για τον υπολογισμό της σειράς Fourier που αντιστοιχεί σε σήμα πεπερασμένης διάρκειας T. Το σήμα να προσδιορίζεται ως όρισμα και για τον υπολογισμό να χρησιμοποιείται η προσέγγιση του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier που υλοποιεί η συνάρτηση fft.

2. Να γραφεί ένα πρόγραμμα MATLAB για την αντιστροφή δεδομένης σειράς Fourier. Το πρόγραμμα θα δέχεται ως είσοδο ένα διάνυσμα με τους συντελεστές της σειράς, τη θεμελιώδη συχνότητα, καθώς και τον επιθυμητό αριθμό συντελεστών στον τύπο αντιστροφής.

3. Να επιλεγεί ως σήμα ο χαρακτήρας ASCII που αντιστοιχεί στο πρώτο γράμμα του επωνύμου σας και να επαληθευτούν τα προγράμματα του ερωτήματος 1 και 2.

Γ΄.3 Δημιουργία μουσικού κομματιού

Στην εργασία αυτή, χρησιμοποιούμε απλούς τόνους για τη σύνθεση ενός μουσικού κομματιού. Κάθε μουσική νότα μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα ημιτονοειδές σήμα συγκεκριμένης συχνότητας. Οι μουσικές νότες κατατάσσονται σε ομάδες των δώδεκα, που ονομάζονται *οκτάβες*. Οι δώδεκα νότες σε κάθε οκτάβα διανέμονται λογαριθμικά ως προς τη συχνότητά τους, με τη συχνότητα κάθε νότας να ισούται με $2^{\frac{1}{12}}$ φορές τη συχνότητα της αμέσως χαμηλότερης νότας. Επομένως, ολίσθηση προς τα πάνω κατά μια οκτάβα αντιστοιχεί σε διπλασιασμό της συχνότητας των νοτών της αρχικής οκτάβας. Στη συγκεκριμένη άσκηση, όλες οι νότες βρίσκονται στην οκτάβα που περιέχει το εύρος συχνοτήτων 220 Hz – 440 Hz, σύμφωνα με τον πίνακα:

A	220
$A^{\#}, B^{b}$	$220*2^{\frac{1}{12}}$
B	$220*2^{\frac{2}{12}}$
C	$220*2^{\frac{3}{12}}$
$C^{\#}, D^{b}$	$220*2^{\frac{4}{12}}$
D	$220*2^{\frac{5}{12}}$
$D^{\#}, E^{b}$	$220*2^{\frac{6}{12}}$
E	$220*2^{\frac{7}{12}}$
F	$220*2^{\frac{8}{12}}$
$F^{\#}, G^{b}$	$220*2^{\frac{9}{12}}$
G	$220*2^{\frac{10}{12}}$
$G^{\#}, A^{b}$	$220*2^{\frac{11}{12}}$.

Στην απλούστερη περίπτωση, κάθε νότα μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα ημιτονοειδές σήμα περιορισμένης διάρκειας, ακολουθούμενο από μικρότερης διάρκειας έλλειψη ήχου (παύση). Η παύση επιτρέπει τη διάκριση μεταξύ δύο νοτών της ίδιας συχνότητας.

1. Χρησιμοποιώντας το πακέτο MATLAB, κατασκευάστε ένα διάνυσμα που να περιέχει την αναπαράσταση διακριτού χρόνου των νοτών κάποιου μουσικού κομματιού. Χρησιμοποιείστε συχνότητα δειγματοληψίας 8000 δειγμάτων ανά δευτερόλεπτο. Μην παραλείψετε να συμπεριλάβετε μικρές παύσεις μεταξύ των νοτών.

2. Επιφέρετε *ψηφιακή* ολίσθηση προς τα άνω και προς τα κάτω κατά μία οκτάβα με αντίστοιχη αλλαγή της διάρκειας κάθε νότας.

3. Μετατρέψτε την ένταση κάθε νότας σε μειούμενη με το χρόνο, έτσι ώστε η μουσική να ακούγεται περισσότερο ρεαλιστική.

Γ΄.4 Συμπίεση εικόνας με χρήση μετασχηματισμών

Ο διακριτός συνημιτονικός μετασχηματισμός μιας δισδιάστατης εικόνας $g(i,k)$, $0 \le i,k \le N-1$, ορίζεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} G_c(m,n) &= \alpha(m)\alpha(n) \cdot \\ & \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} g(i,k)\cos[\frac{\pi(2i+1)m}{2N}]\cos[\frac{\pi(2k+1)n}{2N}], \end{aligned}$$

με τύπο αντιστροφής

$$\begin{aligned} g(i,k) &= \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} \alpha(m)\alpha(n) \cdot \\ & G_c(m,n)\cos[\frac{\pi(2i+1)m}{2N}]\cos[\frac{\pi(2k+1)n}{2N}] \end{aligned}$$

και

$$\alpha(0) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \qquad \alpha(m) = \sqrt{\frac{2}{N}}, \quad 1 \le m \le N-1.$$

Ο διακριτός συνημιτονικός μετασχηματισμός της δισδιάστατης εικόνας $g(i,k)$, $0 \le i,k \le N-1$, μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή ορθομοναδιαίων πινάκων ως:

$$\underline{\underline{G_c}} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{g}}\,\underline{\underline{C}},$$

όπου

$$C(i,m) = \alpha(m)\cos[\frac{\pi(2i+1)m}{2N}].$$

1. Να υλοποιηθεί ο διακριτός συνημιτονικός μετασχηματισμός και να χρησιμοποιηθεί για συμπίεση εικόνας.

Γ'.5 Θόλωση και αποθόλωση εικόνας

Θεωρείστε ένα σύστημα απεικόνισης στο οποίο κατά τη διάρκεια της φωτογραφικής έκθεσης εμφανίζεται σχετική κίνηση ανάμεσα στη φωτογραφική μηχανή και το αντικείμενο το οποίο φωτογραφίζεται. Πιο συγκεκριμένα, θεωρείστε ότι η κίνηση είναι γραμμική με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος του οριζόντιου άξονα. Στην περίπτωση αυτή, η μονοδιάστατη κρουστική απόκριση του συστήματος απεικόνισης δίνεται από τη σχέση

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{cT}, & 0 \leq x \leq cT \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

$$\cancel{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot K}$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς έχει μέτρο $|\hat{K}(s)|$ που δίνεται από μια σχέση της μορφής

$$|\hat{K}(s)| = \text{σταθερά} \times \left|\frac{\sin(cTs/2)}{cTs/2}\right|.$$

1. Χρησιμοποιώντας το πακέτο MATLAB, σχεδιάστε το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

2. Αποφανθείτε (με πλήρη τεκμηρίωση) για το αν αύξηση της γραμμικής ταχύτητας c βελτιώνει ή δυσχεραίνει το φαινόμενο του θολώματος από γραμμική κίνηση. Για διευκόλυνσή σας, εξετάστε τη θέση του πρώτου μηδενισμού της συνάρτησης μεταφοράς (δηλ. την πρώτη λύση ως προς s της εξίσωσης $|\hat{K}(s)| = 0$) και την εξάρτησή του από την ταχύτητα c.

3. Προσομοιώστε σε MATLAB τη διαδικασία θολώματος από οριζόντια γραμμική κίνηση, όπως περιγράφεται παραπάνω.