МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра методов оптимального управления

Применение методов MPC в экономических задачах

Курсовой проект

Горошко Николая Сергеевича
студента 4 курса,
специальность «экономическая кибернетика»

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук
доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе речь пойдет об управлении по прогнозирующей модели носящее в англоязычной литературе название Model Predictive Control (MPC) или Receding Horizon Control (RHC). Оно представляет собой один из современных методов теории управления. Популярность этого метода в практических приложениях вызвана прежде всего тем, что в нем присутствуют математические модели объектов управления в пространстве состояний, в том числе нелинейные, достаточно просто учитываются ограничения на управляющие и фазовые переменные, принимаются во внимание качественные требования к процессу управления.

Классической областью применения MPC до недавнего времени были задачи стабилизации и слежения в технических приложениях, особенно в управлении химическими процессами, механическими объектами и робототехнике. Теоретические основы метода для решения задач стабилизации получили строгое обоснование в работах, были развиты на задачи робастного управления, распределенного управления. За последние годы фокус исследований MPC сместился в сторону приложений, в которых экономика процесса (минимизация энергетических затрат, максимизация выпуска или прибыли) важнее стабилизации некоторого положения равновесия. Известны примеры из практики, например, управления химическими реакторами, в которых периодические решения дают на выходе больший объем полезного продукта, чем функционирование в окрестности положения равновесия.

Цель курсовой работы применить идеи MPC для решения одной неоклассической задачи экономического роста. В работе предлагается новый подход к построению терминальной стоимости в задаче MPC и в ряде численных экспериментов демонстрируется его превосходство над подходом из работы.

ГЛАВА 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ "ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ"

В данной главе собраны теоритические сведения об управлении по прогнозирующей моделии (далее – MPC), а так же о его модификации - экономическом MPC. Рассматриваются различные подходы к построению аппроксимирующих задач.

1.1 Системы управления

Будем рассматривать нелинейные системы в непрерывном времени следующего вида:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \omega(t)), t \geq 0, \tag{1.1}$$

где $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$– вектор состояния, $u \in U \subset \mathbb{R}^r$– вектор управления, $\omega \in W \subset \mathbb{R}^m$– вектор возмущений, $\dot{x} = dx/dt$. Через X обозначим множесто допустимых состояний, а через U– множество допустимых управлений. Вектор возмущений включает в себя неучтённые воздействия на систему, ошибки моделирования и прочие неопределённости, влияющие на систему, и ограничен множеством W.

В дополнение к нелинейным системам в непрерывном времени, в MPC могут рассматриваться и другие модели. В частности, это могут быть нелинейные системы в дискретном времени, полученные дискретизацией систем в непрерывном времени вида (1.1). Дискретный аналог системы, заданной уравнением (1.1), определяется нестационарным разностным уравнением

$$x(k+1) = f_d(x(k), u(k), \omega(k)), k = 0, 1, ..., \tag{1.2}$$

где x, u, w имеют тот же смысл и размерность, что и выше, k– текущий момент времени. Правая часть динамической системы задается функцией f_d, где индекс d используется, чтобы отличать динамику в дискретном времени от динамики в непрерывном времени f.

Предполагается, что измерение состояния системы возможно в моменты времени$\tau_k = \tau_0 + kh$, где h– период дискретизации. Таким образом k-ый шаг дискретной системы (1.2) соответствует моменту τ_k. Чтобы различать непрерывное и дискретное время, обозначение t будем использовать для непрерывного времени, а τ_k и $k-$ для дискретных моментов для модели в непрерывном времени и для модели в дискретном времени соответственно.

В дальнейшем в работе будут рассматриваться системы с $\omega(t) \equiv 0$. Траектория, полученная путём решения уравнения (1.1) при $\omega(t) \equiv 0$ для заданного начального состояния $x(0) = x_0$ и управления $u(\cdot)$ называется номинальной и обозначается $\varphi t|x_0, u(\cdot)), t \geq 0$. Если $f(x, u, \omega)$ непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, то такая траектория существует и единственна для любого t.

Относительно ограничений на состояние и управление предполагается, что x принадлежит множеству $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (то есть множество X может быть как подмножеством $\mathbb{R}^n$, так и множеством, равным $\mathbb{R}^n$).Случай $X = \mathbb{R}^n$ соответствует задаче без ограничений на состояние x. В то же время предполагается, что управление u принадлежит множеству $U \subset \mathbb{R}^r$. Предположение, что U может быть исключительно подмножеством $\mathbb{R}^r$ исходит из физических ограничений на механизмы управления.

Множества X, U, как правило, являются множествами простой структуры (шар, параллелепипед, иногда, выпуклый многогранник). Обычно на состояния и управления задаются дополнительные ограничения, следующие из физических ограничений для управляемого объекта, в виде смешанного ограничения

$$g(x(t), u(t)) \leq 0, \forall t \geq 0. \tag{1.3}$$

Наконец, предпологается, что возмущения ограничны некоторым подмножеством $W \subset \mathbb{R}^m$, в свящзи с тем, что для отдельных систем управления устойчивость замкнутого контура доказана для достаточно малых возмущений.

В общем случае устойчивость для системы (1.1) достаточно трудно доказать при неограниченных возмущениях. Обычно считается, что $W-$ простое множество.

Основные принципы MPC Управление по прогнозирующей модели это многомерный управляющий алгоритм, который использует:

- внутреннюю динамическую модель процесса;
- функцию затрат J над сдвигающимся горизонтом;
- алгоритм оптимизации, минимизирующий функцию стоимости J с использованием управления u;

Примером нелинейной функции стоимости для оптимизации может служить следующее уравнение

$$J = \sum_{i=1}^{N} \omega_{x_i}(r_i - x_i)^2 + \sum_{i=1}^{N} \omega_{u_i} \triangle {u_i}^2$$

где

x_i : $i-$тая контролируемая переменная
r_i : $i-$тая эталонная переменная
u_i : $i-$тая изменяемая переменная
$\omega_{x_i}-$коэффицент, отражающий важность x_i
$\omega_{u_i}-$коэффицент, тормозящий относительно большие изменения в u_i

Из приведенного краткого обзора методов MPC понятно, что их основу составляет решение задач оптимального управления на сдвигающемся горизонте управления с изменяющимся начальным состоянием. Поэтому в следующем разделе опишем основные результаты теории управления.

1.2 Задачи оптимального управления

Задачи оптимального управления относятся к теории экстремальных задач, то есть задач определения максимальных и минимальных значений. Задачи эти, как и собственно сама теория оптимального управления, возникла в начале XX-го века в связи с практическими задачами, появившимися изза развития новой техники в различных областях. Данные экстремальные задачи не укладывались в рамки классического вариационного счисления. В данной главе рассмотрим их, используя различные примеры. В целом решение подобных задач можно разбить на два этапа:

1. Постановка задачи

2. Решение с использованием условий оптимальности

Постановка задачи
Изначально есть некоторое, условие, однако его недостаточно для решения задачи. Для начала проведем математическую постановку задачи. Она в себя будет включать следующие факторы: математическую модель объекта управления, цель управления, ограничения на траекторию воздействия, управляющее воздействие и его длительность и т.д. Рассмотрим данные факторы подробнее.

Модели объекта
Построение модели зависит от типа рассматриваемой задачи и того, что необходимо в итоге получить. Могут быть использованы различные дифференциальные уравнения: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с последействием, стохастические уравнения, уравнения в частных производных и т.д. Для примера будем использовать обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u), \dot{x}(t) = dx/dt, t_0 \leq t \leq T \tag{1.4}$$

$u \in \mathbb{R}^m$−управление, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $f \in \mathbb{R}^n$-заданная функция. Придавая управлению различные значения мы получаем различные состояния объекта, из которых мы и выбираем оптимальное.

Критерий качества
Управление системой (1.1) осуществляется для достижениянекоторыхцелей,которыеформальнозаписываютсявтерминахминимизации по u функционалов J, определяемых управлением u и траекторией x, где

$$J = \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u)dt + \varphi(T, x(T)) \to \min \tag{1.5}$$

F и φ - заданные скалярные функции. Задача (1.2) в общем виде называется задачей Больца. При $F = 0$ её называют задачей Майера, а при $\varphi = 0$ - Лагранжа.

Ограничения на траекторию и ограничения на управление Иногда траектория не может принадлежать какой-либо части пространства $\mathbb{R}^n$. В таких случаях указывают, что $x(t) \in G(t)$, при том, что $G(t)$—заданная область в $\mathbb{R}^n$. В зависимости от типа ограничений выделяют различные классы задач управления, такие как задачи с фиксированными концами, свободным левым либо правым концом. Так же существуют задачи с подвижными концами. Иногда же ограничения имеют интегральный характер и выглядят следующим образом:

$$J = \textstyle\int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u)dt \leq 0$$

Если в задачах (1.1),(1.2) начальное и конечное положение задано, моменты начала и конца движения свободны, функция $\varphi = 0$, а $F = 1$, то получаем задачу о переводе системы (1.1) из начального положения в конечное за минимально возможное время. Так же стоит упомянуть ограничения на управление, которые могут быть двух типов:

- Информационные
- Ограниченность ресурсов управления

Условия оптимальности

Принцип максимума Понтрягина Рассмотрим простейшую задачу оптимального управления — задачу терминального управления

$$J(u) = \varphi(x(t_f)) \to \min \tag{1.6}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), x(t_0) = x_0 \tag{1.7}$$

$$u(t) \in U, t \in [t_0, t_f]. \tag{1.8}$$

Требуется минимизировать критерий качества (1.3) на траекториях системы (1.4) с помощью ограниченных управлений (1.5).
В задаче (1.3)—(1.5) моменты t_0, t_f заданы, $x(t) \in \mathbb{R}^n$— состояние системы управления в момент времени t; $u(t) \in \mathbb{R}^r$ значение управления в момент времени t.
Относительно функций $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ предположим, что они имеют частные производные $\partial f(x, u, t)/\partial x, \partial\varphi(x)/\partial x$ и непрерывны вместе с этими производными по совокупности своих аргументов.

Задачу (1.3)—(1.5) будем рассматривать в классе кусочно-непрерывных управлений, удовлетворяющих условию (1.5) во всех точках непрерывности. Множество $U \subset \mathbb{R}^r$—множество доступных значений управления, не зависит от времени. Предполагается, что U — компакт.

Отметим, что в задаче (1.3)—(1.5) левый конец траектории $x(t_0)$ закреплен, правый $x(t_f)$ — свободен, фазовые ограничения на траекторию $x(\cdot)$ отсутствуют. Требуется минимизировать функцию терминального состояния — критерий типа Майера.

Принципом максимума называется основное необходимое условие оптимальности в задачах оптимального управления, связанное с максимизацией гамильтониана.

Принцип максимума был сформулирован как гипотеза в 1956г. группой советских математиков во главе с Л.С. Понтрягиным. Первые доказательства получены Р.В.Гамкрелидзе (1957) для линейных систем быстродействия и В.Г.Болтянским (1958) для общей ЗОУ.
Для формулировки принципа максимума введем гамильтониан:

$$H(x,\psi,u,t)=\psi' f(x,u,t)=\sum_{j=1}^{n}\psi_j f_j(x,u,t) \tag{1.9}$$

Здесь $\psi=\psi(t)\in\mathbb{R}^n$ — вспомогательные переменные, называемые сопряженной траекторией (котраекторией).

Для каждой пары $(u(\cdot),x(\cdot))$, состоящей из допустимого управления и соответствующей ему траектории, функцию $\psi(\cdot)=(\psi(t),t\in T)$ определим как решение сопряженного уравнения

$$\dot\psi(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),\psi(t),u(t),t)=-\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t),t)'\psi(t) \tag{1.10}$$

$$\dot\psi_j(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_j}(x(t),\psi(t),u(t),t)=-\textstyle\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x(t),u(t),t),j=1,...,n$$

с начальным условием на правом конце

$$\psi(t_f)=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x(t_f)) \tag{1.11}$$

Здесь $\frac{\partial f}{\partial x}$ - матрица всевозможных частных производных по x, и всюду запись вида $\dfrac{\partial H}{\partial x}(x(t),\psi(t),u(t),t\ \ )$,как это обычно принято, означает, что сначала вычисляется соответствующая частная производная функции $H(x,\psi,u,t)$, а затем вместо аргументов подставляются их конкретные значения.

Условие (1.8) на правом конце $\psi(t_f)$ сопряженной траектории часто называют условием трансверсальности.

Отметим, что сопряженное уравнение (1.7) линейно. С использованием гамильтониана уравнения (1.4), (1.7) могут быть представлены в виде системы Гамильтона:

$$\dot x(t)=\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),\psi(t),u(t),t)$$
$$\dot\psi(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),\psi(t),u(t),t)$$

Теперь можем сформулировать основной результат:

Теорема: (Принцип максимума Понтрягина). Пусть $u^0(\cdot)$ - оптимальное управление в задаче (1.3)—(1.5), $x^0(\cdot)$ - соответствующая (оптимальная) траектория системы (1.4), $\psi^0(\cdot)$ - соответствующее решение сопряженной системы

$$\dot\psi^0(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}(x^0(t),\psi^0(t),u^0(t),t),\psi^0(t_f)=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x^0(t_f)),$$

Тогда на оптимальном управлении $u^0(\cdot)$ необходимо выполняется условие максимума гамильтониана

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \underset{\upsilon \in U}{max} H(x^0(t), \psi^0(t), \upsilon, t)$$

для всех $t \in [t_0, t_f]$ являющихся точками непрерывности оптимального управления $u^0(\cdot)$.

Метод динамического программирования Применяя метод динамического программирования, изучают все поле оптимальных траекторий. Для того, чтобы сравнение было наглядным, воспользуемся ранее заданной задачей (1.3)—(1.5).

Зафиксируем некоторый произвольный момент времени $t \in [t_0, T]$. Рассмотрим вспомогательную задачу управления на отрезке $[t, T]$. Через $V(t, x)$ обозначим минимальное значение критерия качества во вспомогательной задаче при начальном условии $x(t) = x$, где x – произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$. При некоторых предположениях функция $V(t, x)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\partial V(t,x)/\partial t + \min_{u \in U} f^{'}(t,x,u) \partial V(t,x)/\partial x = 0,$$
$$t_0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.12}$$
$$V(T,x) = F(x).$$

Решив данную задачу и определив $V(t, x)$ мы можем найти управление $u(t, x)$ из соотношения:

$$\min_{u \in U} f^{'}(t,x,u) \partial V(t,x)/\partial x = f^{'}(t,x,u(t,x)) \partial V(t,x)/\partial x \tag{1.13}$$

Возможность находить конкретно управление есть характерная черта метода динамического программирования. Она становится особенно важной в условиях отсутствия полной информации. При решении конкретных задач с помощью метода динамического программирования мы решаем нелинейное уравнение в частных производных (1.9), а так же дополнительно исследуем оптимальное управление, получаемое из уравнения (1.10).

1.3 Численные и программные методы решения ЗОУ

Численные методы Одним из основных и простейших методов решения задач оптимального управления считается сведение ЗОУ к задаче нелинейного программирования. Мы рассмотрим простейший пример такого перехода, а так же рассмотрим алгоритм MPC для решения задач стабилизации.

Пусть для определенности речь идет об отыскании минимума функционала

$$J(x,u) = \int_0^T F(x,u)dt \tag{1.14}$$

при условии, что векторы x и u связаны дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{1.15}$$

В пространстве (x,t) проведены плоскости $\sum_i$:

$$t = i\tau$$

где τ - шаг численного интегрирования. Предположим, что на интервале $(i\tau,(i+1)\tau)$ управляющая вектор-функция принимает постоянное значение u_1

Заменим тогда управление (1.12) разностной схемой

$$x_{i+1} = x_1 + \tau f(x_1,u_1) \tag{1.16}$$

Соответственно с этим, интеграл (1.11) заменится следующей интегральной суммой:

$$J(x_i,u_i) = \tau\sum_{i=0}^{N-1} F(x_i,u_i) \tag{1.17}$$

В результате конечноразностной аппроксимации мы пришли к следующей задаче: определить векторы u_i и x_i, доставляющие минимум сумме (1.14) при связях (1.13) и условиях $u_t \in G_t, x_0 \in E_0, x_N \in E_N$ - некоторые заданные множества.

Эта задача является задачей нелинейного программирования.

Теперь коротко опишем алгоритм для решения задач при помощи MPC. Он включает следующие четыре шага:

- Положить $k = 0$.

- Решить задачу

$$\begin{gathered}\int_0^{\tau_N}(\|\varphi(t|x(\tau_k),u(\cdot))\|_Q^2+\|u(t)\|_R^2)dt\to\min_u,\\ \dot\varphi(t|x(\tau_k),u(\cdot))=f(\varphi(t|x(\tau_k),u(\cdot)),u(t),0),\\ g(\varphi(t|x(\tau_k),u(\cdot)),u(t))\geq 0,\\ \varphi(t|x(\tau_k),u(\cdot))\in X,u(t)\in U,\forall t\in[0,\tau_N).\end{gathered}$$

  для $x(\tau_k)$, найти $u^0(\cdot|x(\tau_k))$

- Подавать на вход объекта управления постоянное управление $u_MPC(\tau_k) := u^0(0|x(\tau_k))$ до наступления момента τ_{k+1}.

- Положить $k := k + 1$, вернуться к шагу 2.

Программные системы Сложная программная система, в частности, пакет для решения задач оптимального управления, имеет свое поле эффективной работы, которое, как правило, характеризуется классом решаемых системой задач и арсеналом применяемых ею методов. Однако структурные особенности программной системы, взаимосвязь и соответствие приближенных методов, применяемых на разных этапах поиска численного решения, а также способность системы самостоятельно конструировать путь поиска решения в зависимости от выявленных особенностей решаемой задачи выгодно отличают программную систему от теоретически описанного класса задач и набора методов для поиска их решения. Иерархическая структура вычислительной схемы и соответствующая композиция методов, применяемых на всех уровнях поиска численного решения, являются основными характеристиками эффективной программной системы.

Программная система с хорошим уровнем интеллекта кроме широкого спектра методов, как правило, содержит много различных эвристик и логических алгоритмов для анализа сложившихся ситуаций, которые позволяют продолжить поиск оптимального управления и даже при прекращении сходимости какого-то метода. В этом случае может произойти переход либо к другому методу, либо – к подпрограмме, которая с помощью двойственного метода вычислит оптимальную оценку невязки выполнения условий оптимальности. Для дальнейшей оптимизации программа может выбрать более подходящий алгоритм или, как, например, в задачах линейного программирования, перейти к обновлению базиса, чтобы избавиться от ошибок округления, накопившихся в ходе выполнения большого количества итераций.

Согласно публикации Н. И. Грачева, Ю. Г. Евтушенко, "Библиотека программ для решения задач оптимального управления" выделяются следующие основные алгоритмы

1. Метод штрафных функций;
2. Двойственный метод;
3. Метод модифицированных функций Лагранжа;
4. Метод простой итерации;
5. Метод Моррисона;
6. Модифицированный метод Моррисона;
7. Метод линеаризации;
8. Метод итерации Крылова - Черноусько;
9. Редукция к краевой задаче;

ГЛАВА 2

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

В данной главе исследуется задача оптимального экономического роста в неоклассической модели с логарифмической функцией мгновенной полезности. Эти задачи представляют интерес в связи с тем, что они могут выбираться в качестве прогнозирующих задач оптимального управления при применении теории главы 1 для решения задачи роста.

2.1 Неоклассическая модель экономического роста

Неоклассическая модель оптимального экономического роста описывает замкнутую агрегированную экономику, производящую в каждый момент времени $t \geq 0$ единственный однородный продукт (капитал) со скоростью $Y(t) > 0$. В каждый момент времени t величина $Y(t)$ является функцией текущих значений капитала $K(t) > 0$ и трудовых ресурсов $L(t) > 0$; трудовые ресурсы также предполагаются однородными. Таким образом,

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) \text{ для любого } t \geq 0. \tag{2.1}$$

Функция F обычно называется производственной функцией. Относительно производственной функции F предполагается, что она определена и непрерывна на положительном квадранте

$$G = (K, L) \in \mathbb{R}^2 : K > 0, L > 0,$$

дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет следующим неоклассическим условиям для всех K>0, L>0:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} < 0 \qquad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} < 0 \qquad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0 \tag{2.3}$$

$$\underset{K\to+0}{lim}\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}=\infty \qquad \underset{K\to\infty}{lim}\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2}=0 \tag{2.4}$$

$$\underset{L\to+0}{lim}\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}=\infty \qquad \underset{L\to\infty}{lim}\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2}=0 \tag{2.5}$$

Наконец, предполагается, что F положительно однородна первой степени, т.е.

$$F(\lambda K,\lambda L)=\lambda F(K,L) \qquad \text{для любых} \lambda>0, K>0, L>0 \tag{2.6}$$

Последнее условие означает, что объем производства в каждую единицу времени прямо пропорционален величинам имеющихся в эту единицу времени производственных факторов. В качестве производственной функции F может фигурировать, например, стандартная функция Кобба-Дугласа вида

$$F(K,L)=AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2},$$

где $A>0,\alpha_1>0,\alpha_2>0$ и $\alpha_1+\alpha_2=1$.
Заметим, что в силу равенства (2.6) не все условия в (2.2)—(2.5) независимы. В частности, второе условие в (2.3) следует из второго условия в (2.2) и (2.6).

В замкнутой экономике произведенный продукт либо инвестируется в основные производственные фонды (капитал), либо потребляется. Предположим, что в каждый момент времени $t\geq 0$ минимально возможная часть потребляемого продукта есть $\varepsilon Y(t)>0$, где $0<\varepsilon<1$ - некоторая постоянная, а доля продукта $(1-\varepsilon)Y(t)$ может быть распределена между производством и потреблением произвольным образом.

Пусть в момент времени $t\geq 0$ часть

$$I(t)=u(t)Y(t), 0\geq u(t)\geq 1-\varepsilon, \tag{2.7}$$

произведенного продукта инвестируется в основные производственные фонды, а оставшаяся часть

$$C(t)=(1-u(t))Y(t) \tag{2.8}$$

потребляется. В дальнейшем величина $u(t)\in[0,1-\varepsilon]$ будет трактоваться как значение управления в момент времени t.

В данной модели амортизации капитала не предполагается. Поэтому в силу равенства (2.7) динамика изменения капитала может быть описана при помощи следующего дифференциального уравнения:

$$\dot{K}(t) = I(t) = u(t)Y(t). \tag{2.9}$$

Считаем, что в начальный момент времени $K(0) = K_0 > 0$.

Пусть трудовые ресурсы удовлетворяют условию экспоненциального роста, т.е.

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \tag{2.10}$$

где $\mu > 0$ — некоторая постоянная. Аналогично будем считать, что $L(0) = L_0 > 0$.

Пусть $\rho > 0$ - параметр дисконтирования и в каждый момент времени $t \geq 0$ мгновенная полезность $g(K(t), L(t), u(t))$ текущего процесса управления есть логарифм полного потребления $C(t)$, т.е. (см. (2.1), (2.8))

$$g(K(t), L(t), u(t)) = \ln C(t) = \ln(1 - u(t)) + \ln F(K(t), L(t)).$$

2.2 Задача оптимального управления для неоклассической модели экономики с логарифмической функцией мгновенной полезности

Неоклассическая модель оптимального экономического роста (с логарифмической функцией мгновенной полезности) формулируется в виде следующей задачи оптимального управления $(P_\varepsilon), 0 < \varepsilon < 1$:

$$J(K, L, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1 - u(t)) + \ln F(K(t), L(t))]dt \to \max . \tag{2.11}$$

$$\dot{K}(t) = u(t)F(K(t), L(t)), \qquad u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon],$$
$$\dot{L}(t) = \mu L(t),$$
$$K(0) = K_0, L(0) = L_0,$$

При исследовании неоклассической задачи оптимального экономического роста обычно, используя условие однородности (2.6), понижают размерность системы и переходят к вспомогательной фазовой переменной $x = K/L$ (величине капитала, приходящегося на единицу рабочей силы) и однофакторной производственной функции f вида $f(x) = F(x, 1)$, x>0. В этом случае в силу условий (2.1) и (2.6) для любого $t \geq 0$

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{1}{L(t)}F(K(t), L(t)) = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = f(x(t)).$$

Функция f определена и непрерывна на $\tilde{G} = (0, \infty)$. В силу условий (2.2) для всех $x > 0$

$$\frac{d}{dx}f(x) > 0, \qquad \frac{d^2}{d^2x}f(x) < 0 \tag{2.12}$$

и вследствие (2.2)-(2.6)

$$\underset{x\to+0}{lim} f(x) = 0 \quad \underset{x\to\infty}{lim} f(x) = \infty \quad \underset{x\to+0}{lim}\frac{d}{dx}f(x) = \infty \quad \underset{x\to\infty}{lim}\frac{d}{dx}f(x) = 0 \tag{2.13}$$

Для переменной $x(t) = K(t)/L(t)$ в силу равенств (2.9) и (2.10) имеем

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\frac{K(t)}{L(t)} = \dot{K}(t)\frac{1}{L(t)} - \frac{K(t)}{L^2(t)}\dot{L}(t) = u(t)\frac{Y(t)}{L(t)} - \mu\frac{K(t)}{L(t)}$$

откуда в силу определения переменной x и условий (2.1) и (2.6) вытекает равенство

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t).$$

Величина мгновенного потребления на единицу трудовых ресурсов в момент времени $t \geq 0$ есть $c(t) = C(t)/L(t)$. Согласно (2.1) и (2.8) получаем

$$c(t) = (1 - u(t))\frac{Y(t)}{L(t)} = (1 - u(t))f(x(t)).$$

Заметим, что в силу равенства (2.10) трудовые ресурсы L в рассматриваемой модели подчиняются заранее заданной динамике. Поэтому максимизация интегрального функционала (2.11) эквивалентна задаче максимизации функционала

$$J(x, u) = \textstyle\int_0^\infty e^{-\rho t}\ln c(t)dt = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))]dt,$$

характеризующего агрегированную удельную скорость роста потребления на единицу рабочей силы.

Пусть в задаче (P_ε) существует оптимальное допустимое управление u_*. Тогда пусть (K_*, L_*) — соответствующая управлению u_* допустимая траектория. В силу неоклассических условий (2.2)—(2.5) и положительности производственной функции F имеем

$$\frac{\partial \ln F(R, L)}{\partial K} = \frac{1}{F(K, L)}\frac{\partial F(R, L)}{\partial K} > 0 \text{ для любых } K > 0, L > 0$$
$$\frac{\partial \ln F(R, L)}{\partial L} = \frac{1}{F(K, L)}\frac{\partial F(R, L)}{\partial L} > 0 \text{ для любых } K > 0, L > 0$$

Для вектора $u_0 = 1 - \varepsilon \in U_\varepsilon$ правая часть управляемой системы в начальной точке (K_0, L_0) положительна. Если оптимальное управление u_* таково, что для некоторого положительного числа θ начиная с некоторого момента времени $\tau \geq 0$ выполняется неравенство $u_*(t) \geq \theta$, то для данного управления u_* выполняются следующие условия

$$x_*(t) \geq 0 \text{ для любого } t \geq \tau$$
$$\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} - \theta I \geq 0 \text{ при почти всех } t \geq \tau,$$

где $I^-(n \times n)$-единичная диагональная матрица. Тогда сопряженная переменная ψ, соответствующая оптимальной паре (x_*, u_*) удовлетворяет условию трансверсальности. Следовательно, в этом случае соответствующая оптимальной тройке (K_*, L_*, u_*) в силу принципа максимума в нормальной форме сопряженная переменная $\psi = (\psi^1, \psi^2)$ удовлетворяет условию трансверсальности.

Мы рассмотрим задачу (P_ε) при произвольном малом параметре $\varepsilon > 0$. При этом будет показано, что для любого начального состояния $(K_0, L_0) \in G$ в случае, когда параметр ε достаточно мал, значение этого параметра ε никакого влияния на оптимальную тройку (K_*, L_*, u_*) не оказывает.

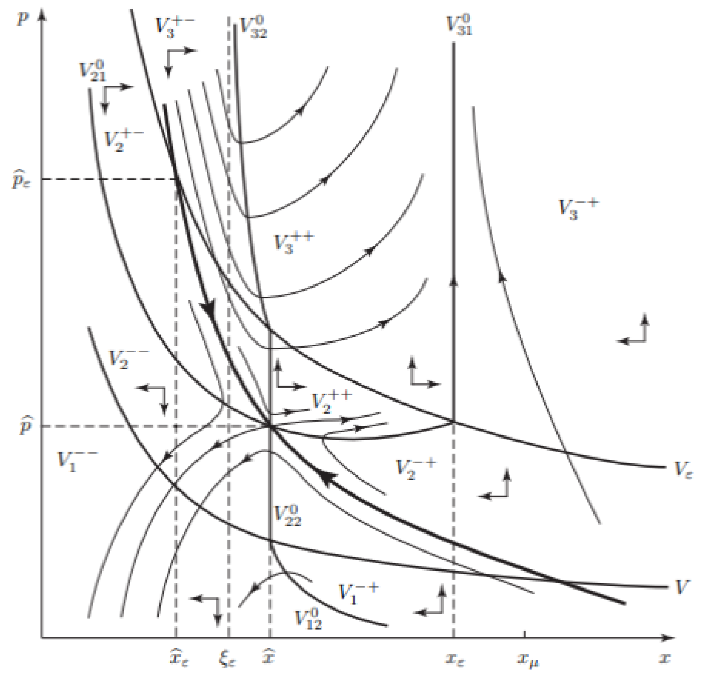
Таким образом, в терминах фазовой переменной x задача оптимального управления (P_ε), $0 < \varepsilon < 1$, переписывается в виде следующей задачи $(\tilde{P}_\varepsilon)$:

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))]dt \to \max .$$
$$\dot{x}(t) = u(t) f(x(t)) - \mu x(t), u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon],$$
$$x(0) = x_0, \tag{2.14}$$

Здесь $x_0 \in \tilde{G} = x \in \mathbb{R}^1 : x > 0$ и $f(x) = F(x, 1)$ для любого $x \in \tilde{G}$. Остальные данные в задаче $(\tilde{P}_\varepsilon)$ те же самые, что и в задаче (P_ε).

2.3 Построение магистралей

Магистралями мы называем равновесное положение экономической системы. В данной задаче равновесным положением мы считаем точку $(\hat{x}, \hat{p})$ из следующей системы:



где p — сопряженная переменная.

Данная точка является единственным положением равновесия гамильтоновой системы.

Переменную $\hat{x}$ мы считаем по формуле

$$\frac{d}{dx}f(x) = \rho + \mu, \text{ а } \hat{p} = \frac{1}{f(\hat{x}) - \mu\hat{x}}.$$

Чтобы перейти к определенным в предыдущем пункте (x_*, u_*) воспользуемся следующими формулами:

$$x_*(t) \equiv x, u_*(t) = 1 - \frac{1}{f(\hat{x})\hat{p}}$$

Данные формулы будут использоваться для нахождения магистрали в третьей главе.

ГЛАВА 3

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

3.1 Применение метода MPC к решению задачи об экономическом росте

Рассмотрим задачу (2.14).

$$J(x,u) = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1-u(t)) + \ln f(x(t))]dt \to \max .$$
$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon],$$
$$x(0) = x_0, x \geq 0$$

Цель данной главы применить методы решения ЗОУ для решения данной задачи. Для решения задачи воспользуемся алгоритмом, который был указан в пунтке 1.3. Рассматривать будем прогнозирующую задачу Лагранжа(п. 1.2), т.е.

$$J(x,u) = \int_0^z e^{-\rho t}[\ln(1-u(t)) + \ln f(x(t))]dt$$

Решение задачи будем искать численно в классе кусочно-постоянных функций, то есть

$$u(t) = u_i, t \in [ih, (i+1)h], i = 0, ..., T-1$$

где $h = z/T$ - период дискретизации, $T \in \mathbb{N}$, T - горизонт планирования. Фазовая же переменная x и уравнение для её рассчета изменятся следующим образом:

$$x_{i+1} = u_i f(x_i) - \mu x_i$$

В таком случае критерий качества нашей задачи имеет следующий вид:

$$J(x,u) = \sum_{i=0}^{T-1} \int_{ih}^{(i+1)h} e^{-\rho t}[\ln(1-u_i) + \ln f(x_i)]dt =$$
$$\sum_{i=0}^{T-1} \frac{[\ln(1-u_i) + \ln f(x_i)]}{-\rho} \left(e^{-\rho(i+1)h} - e^{-\rho ih}\right)$$

В итоге мы получаем следующую дискретизированую задачу:

$$x_{i+1} = u_i f(x_i) - \mu x_i, u_i \in U_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon], x(0) = x_0, x_i \geq 0$$
$$J(x,u) = \sum_{i=0}^{T-1} \frac{[\ln(1-u_i) + \ln f(x_i)]}{-\rho} \left(e^{-\rho(i+1)h} - e^{-\rho i h}\right)$$

Таким образом, задача оптимального управления в классе дискретных управляющих воздействий свелась к задаче нелинейного прогаммирования. Для ее численного решения существует ряд реализованных программно процедур, в частности, в рамках курсовой работы будет использвоаться стандартная процедура fminsearch пакета Matlab.

В качестве производственной функции мы рассматриваем:

$$f(x) = x^\alpha$$

В задаче будем использовать следующие параметры: $T = 10, \alpha = 0.3, \mu = 0.03, \rho = 0.05, \varepsilon = 0.01$.

Решая уравнения для устойчивого состояния (магистраль) получим

$$x_* = 6.6076, u_* = 1.1250$$

3.2 Листинг программы

Для рассчета состояния в следующий момент времени опредилим функции applycontrol на основе ode45 и deq, в качестве переменной для ode45:

```
function x = applycontrol(t,k,c)
[~, x] = ode45(@(t,k) deq(k,c),[t, t+dt], k);
x = x(end,:);
end

function dk = deq(k,c)
dk = c*k^(alpha) - mu*k;
end
```

Здесь k - начальное состояние, с управление, t - начальный момент времени. Определим функцию mpcsolve для решения задачи методом управления с прогнозирующей моделью.

Чтобы в дальнейшем иметь возможность ее повторного использования для решения других задач реализуем ее в общем виде, независящем от рассматриваемой в данной работе задачи. Для решения задачи на конечном промежутке будем использовать реализованную в Matlab функцию fmincon, минимизирующую функцию при заданных линейных и нелинейных ограничениях. Также определим функцию полной стоимости costfun, суммирующую функции стоимости этапа. Для дальнейшего анализа решения функция mpcsolve возвращает не только построенные оптимальную траекторию и последовательность управлений, но и все траектории и управления для задач на конечном промежутке, полученные при решении задачи на каждой итерации.

```
function [x, u] = mpcsolve(Nmpc, x0, t0, u0)
t = t0;
x = zeros(N + 1,Nmpc);
x(1,1) = x0;
u = zeros(N,Nmpc);
for i = 1:Nmpc
u(:, i) = fmincon(@(u) costfun(x(1,i),t,u),...
u0,[],[],[],[],zeros(N,1),ones(N,1)-eps);
for j = 1:N
x(j+1,i) = applycontrol(t + j*dt,x(j,i),u(j,i));
end
x(1,i+1) = x(2,i);
t = t + dt;
end
end

function cost = costfun(x0,t0,u)
cost = 0;
x = x0;
t = t0;
for i = 1:N
cost = cost + stagecost(t, x, u(i));
x = applycontrol(t,x,u(i));
t = t + dt;
end
end

function r = stagecost(t, k, c)
r = (log(1 - c) + log(k^alpha))*...
(exp(-rho * (t+dt))-exp(-rho * t))/rho;
end
```

Для получения результата вызовем функцию mpcsolve

```
[k, c] = mpcsolve(Nmpc, k0, t0, 0.3*ones(N,1));
```

3.3 Результаты исследования

Пускай мы указали в качестве начальных данных T (горизонт планирования) равным 10, рассматривать нашу задачу мы будем как минимум для четырех различных горизонтов: 10, 30, 50 и 70. В качестве начальных условий везде используется $x_0 = 1$, период квантования $h = 1$.

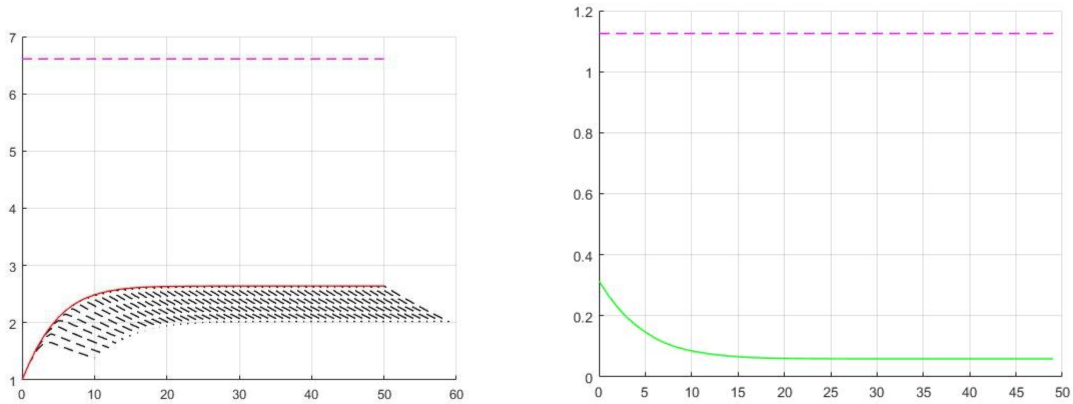


Рис. 3.1: Траектории x и u при T = 10

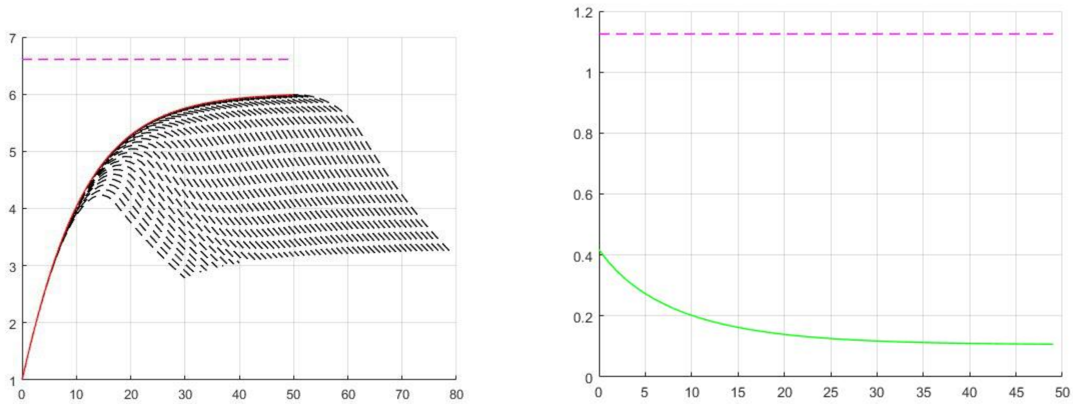


Рис. 3.2: Траектории x и u при T = 30

Как мы видим, с увеличением горизонта планирования наша траектория приближается к устойчивому состоянию x_*.
Также следует отметить, что при увеличении горизонта нелинейно возрастает и время решения задачи. Здесь представлены траектории вплоть до $T = 70$.

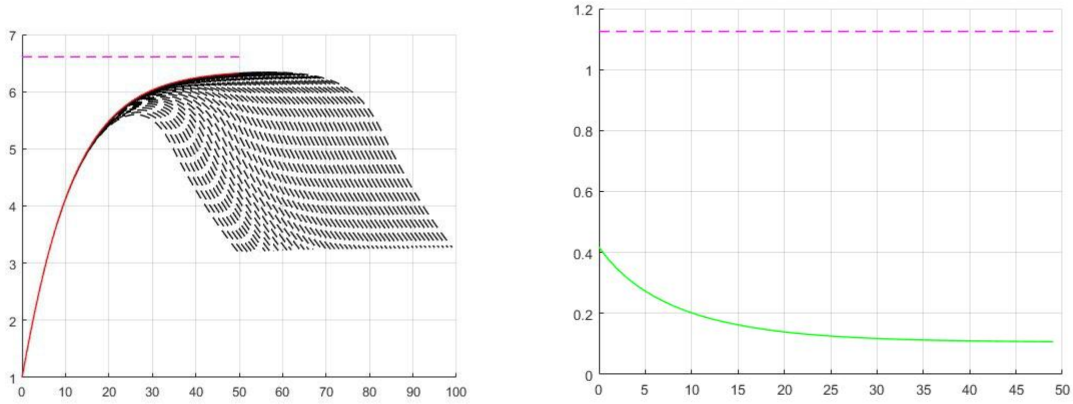


Рис. 3.3: Траектории x и u при T = 50

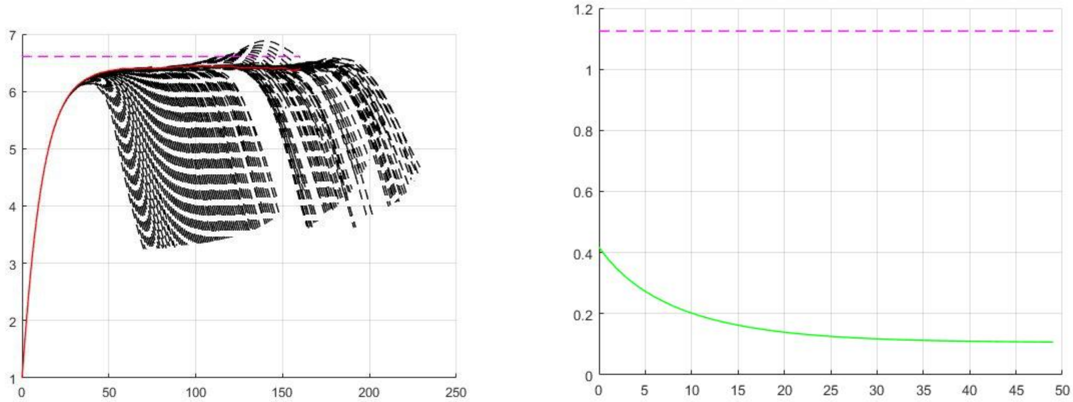


Рис. 3.4: Траектории x при T = 70

Учитывая динамику можно предположить, что при $T \approx 90$ траектория x совпадет с магистралью.

На рис. 3.1 — 3.4 можно наблюдать эффект критерия Лагранжа: программные траектории (штриховые линии) покидают траекторию на заключительном участке, чтобы выполнить условие трансверсальности. Понятно, что на построение этих участков численная процедура решения задачи нелинейного программирования вынуждена тратить некоторое дополнительное время.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной курсовой работе был проведен обзор управления по прогнозирующей модели (MPC) на примере неоклассической модели экономического роста.

Было получено магистральное состояние, гарантирующее максимальную скорость экономического роста, по результатам использования запрограмированного алгоритма магистральное состояние было достигнуто для достаточно большого горизонта T.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 В. В. Альсевич, В. В. Крахотко. " Методы оптимизации: упражнения и задания" — Мн. : БГУ, 2005. — 405 с.

2 Колмановский В.Б. "Задачи оптимального управления" М., 1997. - 7 с.

3 С. М. Асеев, А. В. Кряжимский, "Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста", Тр. МИАН, 257, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2007, 3–271; Proc. Steklov Inst. Math., 257 (2007), 1–255

4 Моисеев Н.Н., "Численные методы в теории оптимальных систем", М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971. — 424 с.

5 Н. И. Грачев, Ю. Г. Евтушенко, "Библиотека программ для решения задач оптимального управления", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 19:2 (1979), 367–387; U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 19:2 (1979), 99–119

6 Mayne, D; Rawlings; Rao; Scokaert (2000). "Constrained model predictive control: stability and optimality". Automatica. 36 (6): 789–814.

7 Vichik, Sergey; Borrelli, Francesco (2014). "Solving linear and quadratic programs with an analog circuit". Computers and Chemical Engineering. 70: 160–171.