МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра методов оптимального управления

Применение методов MPC в экономических задачах

Курсовой проект

Горошко Николая Сергеевича
студента 4 курса,
специальность «экономическая кибернетика»

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук
доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе речь пойдет об управлении по прогнозирующей модели носящее в англоязычной литературе название Model Predictive Control (MPC) или Receding Horizon Control (RHC). Оно представляет собой один из современных методов теории управления. Популярность этого метода в практических приложениях вызвана прежде всего тем, что в нем присутствуют математические модели объектов управления в пространстве состояний, в том числе нелинейные, достаточно просто учитываются ограничения на управляющие и фазовые переменные, принимаются во внимание качественные требования к процессу управления.

Классической областью применения MPC до недавнего времени были задачи стабилизации и слежения в технических приложениях, особенно в управлении химическими процессами, механическими объектами и робототехнике. Теоретические основы метода для решения задач стабилизации получили строгое обоснование в работах, были развиты на задачи робастного управления, распределенного управления. За последние годы фокус исследований MPC сместился в сторону приложений, в которых экономика процесса (минимизация энергетических затрат, максимизация выпуска или прибыли) важнее стабилизации некоторого положения равновесия. Известны примеры из практики, например, управления химическими реакторами, в которых периодические решения дают на выходе больший объем полезного продукта, чем функционирование в окрестности положения равновесия.

Цель курсовой работы применить идеи MPC для решения одной неоклассической задачи экономического роста. В работе предлагается новый подход к построению терминальной стоимости в задаче MPC и в ряде численных экспериментов демонстрируется его превосходство над подходом из работы.

[cp1251]inputenc

ГЛАВА 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ "ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ"

В данной главе собраны теоритические сведения об управлении по прогнозирующей моделии (далее – MPC), а так же о его модификации - экономическом MPC. Рассматриваются различные подходы к построению аппроксимирующих задач.

1.1 Теория управления по прогнозирующей модели

Управление по прогнозируемой модели (далее MPC, от англ. Model Predictive Control) — это продвинутый метод управления процессами, который используется для соответствующего набора ограничений. Оно используется в перерабатывающей индустрии, на химических заводах и нефтепереработке с 80-х годов XX-го века. Сейчас данный метод так же используется при калибровке энергетических систем и силовой электронике. В MPC в основном используются динамические модели процессов, наиболее часто - линейные эмпирические. Главным приимуществом MPC является то, что он способен оптимизировать текущий временной отрезок, учитывая будущие интервалы.

Модели, используемые в MPC, направлены на то, чтобы отражать поведение сложных динамических систем. Они предсказывают изменения в зависимых переменных моделируемых систем благодаря изменениям независимых переменных. Например если речь идет о химических процессах, независимые переменные, которые могут быть добавлены регулятором чаще всего являются либо установками ПИД-регуляторов, либо конечными контрольными элементами.

В основе MPC лежит итеративная оптимизация модели производства. В момент времени t производится выборка текущего состояния производства и вычисляется стратегия управления минимизацией затрат (с помощью алгоритма численной минимизации) для относительно короткого временного горизонта в будущем: $[t, t+T]$. В частности, онлайн-расчет или расчет «на лету» используются для изучения траекторий состояния, которые исходят из текущего состояния, и находят (посредством решения задач оптимального управления) стратегию минимизации затрат до времени $t+T$.

Реализуется только первый шаг стратегии управления, затем снова производится выборка состояния производства, и вычисления повторяются, начиная с нового текущего состояния, получая новый элемент управления и новый прогнозируемый путь состояния. Горизонт прогнозирования продолжает смещаться вперед, и по этой причине MPC также называют сдвигающимся горизонтом управления(англ. Receding horizon control).

Хотя этот подход не является оптимальным, на практике он дал очень хорошие результаты. Было сделано много научных исследований, чтобы найти быстрые методы решения задач оптимального управления, понять глобальные свойства устойчивости локальной оптимизации MPC и в целом улучшить метод MPC.

Основные принципы MPC Управление по прогнозирующей модели это алгоритм управления, который использует:

- внутреннюю динамическую модель процесса;
- функцию стоимости J над сдвигающимся горизонтом;
- алгоритм оптимизации, минимизирующий функцию стоимости J с использованием управления u;

Из приведенного краткого обзора методов MPC понятно, что их основу составляет решение задач оптимального управления на сдвигающемся горизонте управления с изменяющимся начальным состоянием. Поэтому в следующем разделе опишем основные результаты теории управления.

1.2 Системы управления

Рассмотрим нелинейные системы в непрерывном времени следующего вида:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \omega(t)), t \geq 0, \tag{1.1}$$

где $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n-$ вектор состояния, $u \in U \subset \mathbb{R}^r-$ вектор управления, $\omega \in W \subset \mathbb{R}^m-$ вектор возмущений, $\dot{x} = dx/dt$. Через X обозначим множесто допустимых состояний, через $U-$ множество допустимых управлений. Вектор возмущений включает в себя неучтённые воздействия на систему, ошибки моделирования и прочие неопределённости, влияющие на систему, и ограничен множеством W.

В дополнение к нелинейным системам в непрерывном времени, в MPC в данной работе мы рассмотрим и другие модели. В частности, это могут быть нелинейные системы в дискретном времени, полученные дискретизацией систем в непрерывном времени вида (1.1). Дискретный аналог системы, заданной уравнением (1.1), определяется следующим нестационарным разностным уравнением

$$x(k+1) = f_d(x(k), u(k), \omega(k)), k = 0, 1, ..., \tag{1.2}$$

где x, u, w имеют тот же смысл и размерность, что и выше, k — текущий момент времени. Правая часть динамической системы задается функцией f_d, где индекс d используется, чтобы отличать динамику в дискретном времени от динамики в непрерывном времени f.

Предполагается, что измерение состояния системы возможно в моменты времени $\tau_k = \tau_0 + kh$, где h — период дискретизации. Таким образом k-ый шаг дискретной системы (1.2) соответствует моменту τ_k. Чтобы различать непрерывное и дискретное время, обозначение t будем использовать для непрерывного времени, а τ_k и k — для дискретных моментов для модели в непрерывном времени и для модели в дискретном времени, соответственно.

В дальнейшем в работе будут рассматриваться системы с $\omega(t) \equiv 0$. Траектория, полученная путём решения уравнения (1.1) при $\omega(t) \equiv 0$ для заданного начального состояния $x(0) = x_0$ и управления $u(\cdot)$ называется номинальной и обозначается $\varphi(t|x_0, u(\cdot)), t \geq 0$. Если $f(x, u, \omega)$ непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, то такая траектория существует и единственна для любого t.

Относительно ограничений на состояние и управление предполагается, что x принадлежит множеству $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (то есть множество X может быть как подмножеством $\mathbb{R}^n$, так и множеством, равным $\mathbb{R}^n$). Случай $X = \mathbb{R}^n$ соответствует задаче без ограничений на состояние x. В то же время предполагается, что управление u принадлежит множеству $U \subset \mathbb{R}^r$. Предположение, что U может быть исключительно подмножеством $\mathbb{R}^r$ исходит из физических ограничений на механизмы управления.

Множества X, U, как правило, являются множествами простой структуры (шар, параллелепипед, иногда, выпуклый многогранник). Обычно на состояния и управления задаются дополнительные ограничения, следующие из физических ограничений для управляемого объекта, в виде смешанного ограничения

$$g(x(t), u(t)) \leq 0 \forall t \geq 0. \tag{1.3}$$

Наконец, предпологается, что возмущения ограничны некоторым подмножеством $W \subset \mathbb{R}^m$, в связи с тем, что для отдельных систем управления устойчивость замкнутого контура доказана для достаточно малых возмущений.

В общем случае устойчивость для системы (1.1) достаточно трудно доказать при неограниченных возмущениях. Обычно считается, что $W-$ простое множество.

1.3 Методы MPC

В данном подразделе мы рассмотрим методы MPC для решения задач стабилизации и приведем алгоритм, используемый в этих целях.

Для измерения качества процесса управления рассматриваемыми системами (1.1) или (1.2) используется функция:

$$l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$$

называемая функцией мгновенной стоимости в случае системы (1.1) или стоимости этапа в случае (1.2). Функция l отражает экономические требования процессу, такие как минимизация расходов или максимизация прибыли.

Устойчивым состоянием называется решение следующей задачи минимизации:

$$l(x, u) \to \min_{x,u} f(x, u, 0) = 0, g(x, u) \leq 0. \tag{1.4}$$

Решение данной задачи обозначается (x_*, u_*).

Не нарушая общности далее предполагается, что устойчивое состояние единственное. Кроме того заменой переменных в системе (1.1) можно добиться $x_* = 0, u_* = 0$, то есть точка оптимального устойчивого состояния находится в начале координат.

Во многих задачах целью управления является переход системы как можно ближе к состоянию (x_*, u_*), т.е. стабилизация этого состояния.

Методы управления по прогнозирующей модели (MPC) достигают этой цели посредством повторяющегося в режиме реального времени решения вспомогательных (они называются прогнозирующими) задач оптимального управления на конечном промежутке $[\tau_k, \tau_k + \tau_N]$. Оптимальное решение прогнозирующей задачи (программное решение) выбирается для управления системой на промежутке $[\tau_k, [\tau_{k+1})$, после чего строится и решается новая прогнозирующая задача для следующего промежутка.

При $(x_*, u_*) = (0, 0)$ прогнозирующая задача оптимального управления может быть записана в виде:

$$\int_0^{\tau_N}(\|\varphi(t|x(\tau_k),u(\cdot))\|_Q^2+\|u(t)\|_R^2)dt\to \min_u,$$

$$\dot{\varphi}(t|x(\tau_k),u(\cdot))=f(\varphi(t|x(\tau_k),u(\cdot)),u(t),0), \qquad (1.5)$$

$$g(\varphi(t|x(\tau_k),u(\cdot)),u(t))\leq 0,$$
$$\varphi(t|x(\tau_k),u(\cdot))\in X, u(t)\in U, \forall t\in[0,\tau_N].$$

В критерии качества задачи (1.4) взвешенная норма определяется стандартно: $\|x\|_Q^2 = x^TQx, Q>0$. Тогда в критерии Q и R положительно определённые матрицы, параметры настройки MPC-системы. Они отвечают за баланс между скоростью стабилизации и стоимостью переходного процесса.

В прогнозирующей задаче (1.4) математическая модель динамической системы совпадает с номинальной системой (1.1) и $\varphi(t|x(\tau_k),u(\cdot))$ предсказываемое состояние системы (1.1). Это означает, что, несмотря на наличие возмущений в динамике управляемого объекта, предсказания для него строятся по детерминированной модели. Такой подход соответствует классическим результатам MPC [10] или классическому синтезу оптимальных управлений типа обратной связи в задачах оптимального управления [14].

Начальное состояние номинальной системы задается условием $x(0) = x(\tau_k)$, где $x(|tau_k)$ текущее измеренное состояние объекта управления.

Горизонт управления и прогнозирования $\tau_N > 0$ конечен. Для эффективного численного решения прогнозирующей задачи оптимального управления (1.4) горизонт должен быть небольшим. С другой стороны, при недостаточно больших горизонтах управления MPC-регулятор не сможет обеспечить устойчивость замкнутой системы. Оценки для длины горизонта строятся в рамках так называемого безусловного MPC в работе [8].

Существуют различные подходы к модификациям базовой прогнозирующей задачи (1.4), позволяющие стабилизировать систему (1.1) при коротких горизонтах управления, для чего в задачу добавляются дополнительные терминальные ограничения и терминальная стоимость в критерий качества [4,7].

Пусть $u^0(t|x(\tau_k)), t\in[0,\tau_N]$, оптимальное программное управление в задаче (1.4), т.е. такая функция, которая порождает траекторию $\varphi^0(t|x(\tau_k)) = \varphi(t|x(\tau_k),u_0(\cdot)), t\in[0,\tau_N]$, вместе с которой оно удовлетворяет всем ограничениям задачи и доставляет минимум критерию качества.

Как уже отмечалось выше, алгоритм управления по принципу MPC состоит в том, чтобы решать задачу (1.4) для $x(\tau_k)$ последовательно для каждого $k = 0,1,....$ Управление, которое применяется к объекту управления значение оптимального программного управления в начальный момент времени, т.е.

$$u(t)\equiv u_{MPC}(\tau_k) := u^0(0|x(\tau_k)), t\in[\tau_k,\tau_{k+1}] \qquad (1.6)$$

Поскольку построенное управление (1.5) зависит от состояния объекта, оно является управлением типа обратной связи, и таким образом, алгоритм MPC обеспечивает управление системой по принципу замкнутого контура.

Суммируя, алгоритм MPC имеет следующие шаги:

- Положить $k = 0$.
- Решить задачу (1.4) для $x(\tau_k)$, найти $u^0(\cdot|x(\tau_k))$
- Подавать на вход объекта управления постоянное управление $u_{MPC}(\tau_k) := u^0(0|x(\tau_k))$ до наступления момента τ_{k+1}.
- Положить $k := k + 1$, вернуться к шагу 2.

Система (1.1) с управлением (1.5) замкнутая система является асимптотически устойчивой при выполнении ряда условий на функцию f, матрицы Q, R и горизонт управления τ_N[8] или дополнительных терминальных условия в прогнозирующей задаче оптимального управления [4, 7].

[cp1251]inputenc

ГЛАВА 2

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

В данной главе исследуется задача оптимального экономического роста в неоклассической модели с логарифмической функцией мгновенной полезности. Эти задачи представляют интерес в связи с тем, что они могут выбираться в качестве прогнозирующих задач оптимального управления при применении теории главы 1 для решения задачи роста.

2.1 Неоклассическая модель экономического роста

Неоклассическая модель оптимального экономического роста описывает замкнутую агрегированную экономику, производящую в каждый момент времени $t \geq 0$ единственный однородный продукт (капитал) со скоростью $Y(t) > 0$. В каждый момент времени t величина $Y(t)$ является функцией текущих значений капитала $K(t) > 0$ и трудовых ресурсов $L(t) > 0$; трудовые ресурсы также предполагаются однородными. Таким образом,

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) \text{ для любого } t \geq 0. \tag{2.1}$$

Функция F обычно называется производственной функцией. Относительно производственной функции F предполагается, что она определена и непрерывна на положительном квадранте

$$G = (K, L) \in \mathbb{R}^2 : K > 0, L > 0,$$

дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет следующим неоклассическим условиям для всех K>0, L>0:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} < 0 \qquad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} < 0 \qquad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0 \tag{2.3}$$

$$\lim_{K\to+0}\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}=\infty \qquad \lim_{K\to\infty}\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2}=0 \tag{2.4}$$

$$\lim_{L\to+0}\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}=\infty \qquad \lim_{L\to\infty}\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2}=0 \tag{2.5}$$

Наконец, предполагается, что F положительно однородна первой степени, т.е.

$$F(\lambda K,\lambda L)=\lambda F(K,L) \qquad \text{для любых} \lambda>0, K>0, L>0 \tag{2.6}$$

Последнее условие означает, что объем производства в каждую единицу времени прямо пропорционален величинам имеющихся в эту единицу времени производственных факторов. В качестве производственной функции F может фигурировать, например, стандартная функция Кобба-Дугласа вида

$$F(K,L)=AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2},$$

где $A>0, \alpha_1>0, \alpha_2>0$ и $\alpha_1+\alpha_2=1$.
Заметим, что в силу равенства (2.6) не все условия в (2.2)—(2.5) независимы. В частности, второе условие в (2.3) следует из второго условия в (2.2) и (2.6).

В замкнутой экономике произведенный продукт либо инвестируется в основные производственные фонды (капитал), либо потребляется. Предположим, что в каждый момент времени $t\geq 0$ минимально возможная часть потребляемого продукта есть $\varepsilon Y(t)>0$, где $0<\varepsilon<1$ - некоторая постоянная, а доля продукта $(1-\varepsilon)Y(t)$ может быть распределена между производством и потреблением произвольным образом.

Пусть в момент времени $t\geq 0$ часть

$$I(t)=u(t)Y(t), 0\geq u(t)\geq 1-\varepsilon, \tag{2.7}$$

произведенного продукта инвестируется в основные производственные фонды, а оставшаяся часть

$$C(t)=(1-u(t))Y(t) \tag{2.8}$$

потребляется. В дальнейшем величина $u(t)\in[0,1-\varepsilon]$ будет трактоваться как значение управления в момент времени t.

В данной модели амортизации капитала не предполагается. Поэтому в силу равенства (2.7) динамика изменения капитала может быть описана при помощи следующего дифференциального уравнения:

$$\dot{K}(t) = I(t) = u(t)Y(t). \tag{2.9}$$

Считаем, что в начальный момент времени $K(0) = K_0 > 0$.

Пусть трудовые ресурсы удовлетворяют условию экспоненциального роста, т.е.

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \tag{2.10}$$

где $\mu > 0$ — некоторая постоянная. Аналогично будем считать, что $L(0) = L_0 > 0$.

Пусть $\rho > 0$ - параметр дисконтирования и в каждый момент времени $t \geq 0$ мгновенная полезность $g(K(t), L(t), u(t))$ текущего процесса управления есть логарифм полного потребления $C(t)$, т.е. (см. (2.1), (2.8))

$$g(K(t), L(t), u(t)) = \ln C(t) = \ln(1 - u(t)) + \ln F(K(t), L(t)).$$

2.2 Задача оптимального управления для неоклассической модели экономики с логарифмической функцией мгновенной полезности

Неоклассическая модель оптимального экономического роста (с логарифмической функцией мгновенной полезности) формулируется в виде следующей задачи оптимального управления $(P_\varepsilon), 0 < \varepsilon < 1$:

$$J(K, L, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1 - u(t)) + \ln F(K(t), L(t))]dt \to \max. \tag{2.11}$$

$$\dot{K}(t) = u(t)F(K(t), L(t)), \qquad u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon],$$
$$\dot{L}(t) = \mu L(t),$$
$$K(0) = K_0, L(0) = L_0,$$

При исследовании неоклассической задачи оптимального экономического роста обычно, используя условие однородности (2.6), понижают размерность системы и переходят к вспомогательной фазовой переменной $x = K/L$ (величине капитала, приходящегося на единицу рабочей силы) и однофакторной производственной функции f вида $f(x) = F(x, 1)$, x>0. В этом случае в силу условий (2.1) и (2.6) для любого $t \geq 0$

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{1}{L(t)}F(K(t), L(t)) = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = f(x(t)).$$

Функция f определена и непрерывна на $\tilde{G} = (0, \infty)$. В силу условий (2.2) для всех $x > 0$

$$\frac{d}{dx} f(x) > 0, \qquad \frac{d^2}{d^2 x} f(x) < 0 \tag{2.12}$$

и вследствие (2.2)-(2.6)

$$\underset{x \to +0}{lim} f(x) = 0 \quad \underset{x \to \infty}{lim} f(x) = \infty \quad \underset{x \to +0}{lim} \frac{d}{dx} f(x) = \infty \quad \underset{x \to \infty}{lim} \frac{d}{dx} f(x) = 0 \tag{2.13}$$

Для переменной $x(t) = K(t)/L(t)$ в силу равенств (2.9) и (2.10) имеем

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \frac{K(t)}{L(t)} = \dot{K}(t) \frac{1}{L(t)} - \frac{K(t)}{L^2(t)} \dot{L}(t) = u(t) \frac{Y(t)}{L(t)} - \mu \frac{K(t)}{L(t)}$$

откуда в силу определения переменной x и условий (2.1) и (2.6) вытекает равенство

$$\dot{x}(t) = u(t) f(x(t)) - \mu x(t).$$

Величина мгновенного потребления на единицу трудовых ресурсов в момент времени $t \geq 0$ есть $c(t) = C(t)/L(t)$. Согласно (2.1) и (2.8) получаем

$$c(t) = (1 - u(t)) \frac{Y(t)}{L(t)} = (1 - u(t)) f(x(t)).$$

Заметим, что в силу равенства (2.10) трудовые ресурсы L в рассматриваемой модели подчиняются заранее заданной динамике. Поэтому максимизация интегрального функционала (2.11) эквивалентна задаче максимизации функционала

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \ln c(t) dt = \int_0^\infty e^{-\rho t} [\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))] dt,$$

характеризующего агрегированную удельную скорость роста потребления на единицу рабочей силы.

Пусть в задаче (P_ε) существует оптимальное допустимое управление u_*. Тогда пусть (K_*, L_*) — соответствующая управлению u_* допустимая траектория. В силу неоклассических условий (2.2)—(2.5) и положительности производственной функции F имеем

$$\frac{\partial \ln F(R, L)}{\partial K} = \frac{1}{F(K, L)} \frac{\partial F(R, L)}{\partial K} > 0 \text{ для любых } K > 0, L > 0$$
$$\frac{\partial \ln F(R, L)}{\partial L} = \frac{1}{F(K, L)} \frac{\partial F(R, L)}{\partial L} > 0 \text{ для любых } K > 0, L > 0$$

Для вектора $u_0 = 1 - \varepsilon \in U_\varepsilon$ правая часть управляемой системы в начальной точке (K_0, L_0) положительна. В таком случае, для задачи (P_ε) выполняется теорема 10.1 из публикации Асеева и Кряжимского [3]. К тому же, можно утверждать, что оптимальное управление u_* таково, что для некоторого положительного числа θ начиная с некоторого момента времени $\tau \geq 0$ выполняется неравенство $u_*(t) \geq \theta$, то для данного управления u_* выполняются следующие условия

$$x_*(t) \geq 0 \text{ для любого } t \geq \tau$$
$$\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} - \theta I \geq 0 \text{ при почти всех } t \geq \tau,$$

где $I^{-}(n \times n)$-единичная диагональная матрица. Тогда сопряженная переменная ψ, соответствующая оптимальной паре (x_*, u_*) удовлетворяет условию трансверсальности. Следовательно, в этом случае соответствующая оптимальной тройке (K_*, L_*, u_*) в силу принципа максимума в нормальной форме сопряженная переменная $\psi = (\psi^1, \psi^2)$ удовлетворяет условию трансверсальности.

Используя теорему 10.1, о которой шла речь выше, в публикации [3] выводится видоизмененный принцип максимума Понтрягина. Он даст нам соотношения, которых будет вполне достаточно для однозначной характеризации всех оптимальных режимов в задаче (P_ε). Мы рассмотрим задачу (P_ε) при произвольном малом параметре $\varepsilon > 0$. При этом будет показано, что для любого начального состояния $(K_0, L_0) \in G$ в случае, когда параметр ε достаточно мал, значение этого параметра ε никакого влияния на оптимальную тройку (K_*, L_*, u_*) не оказывает.

Таким образом, в терминах фазовой переменной x задача оптимального управления (P_ε), $0 < \varepsilon < 1$, переписывается в виде следующей задачи $(\tilde{P}_\varepsilon)$:

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))]dt \to \max.$$
$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon],$$
$$x(0) = x_0, \tag{2.14}$$

Здесь $x_0 \in \tilde{G} = x \in \mathbb{R}^1 : x > 0$ и $f(x) = F(x, 1)$ для любого $x \in \tilde{G}$. Остальные данные в задаче $(\tilde{P}_\varepsilon)$ те же самые, что и в задаче (P_ε).

2.3 Построение магистралей

Магистралью называется равновесное положение экономической системы. Для этой системы в данной задаче следует построить гамильтонову систему принципа максимума для $(\tilde{P}_\varepsilon)$.

В силу теоремы 15.2 [3], предлагающей нам еще один вариант принципа максимума Понтрягина в терминах сопряженной переменной p, текущей функции Гамильтона– Понтрягина $\mathcal{M}$ и текущего гамильтониана M для любого $t \geq 0$ имеем $p(t) > 0$. Так как все допустимые траектории x управляемой системы $\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon]$, положительные, то любая пара (x_*, p), где x_* — оптимальная траектория в задаче $(\tilde{P}_\varepsilon)$, а p — соответствующая ей текущая сопряженная переменная, при всех значениях $t \geq 0$ принимает значения в положительном квадранте

$$\Gamma = (x, p) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, p > 0.$$

Построим гамильтонову систему принципа максимума для задачи $(\tilde{P}_\varepsilon)$ в открытом множестве Γ

Разрешая условие максимума относительно управления u в множестве Γ, получаем, что максимум в фунции Гамильтона-Понтрягина достигается в точке

$$u(x,p) = \begin{cases} 0, 0 < p < \dfrac{1}{f(x)}, \\ 1 - \dfrac{1}{f(x)p}, \dfrac{1}{f(x)} \leq p \leq \dfrac{1}{\varepsilon f(x)}, \\ 1 - \varepsilon, p > \dfrac{1}{\varepsilon f(x)}, \end{cases}$$

и всюду в множестве Γ имеем

$$M(x,p) = (u(x,p)f(x) - \mu x)p + \ln(1 - u(x,p)) + \ln f(x).$$

В соответствии с вышеуказанным условаием определим множества Γ_1, Γ_2 и Γ_3:

$$\Gamma_1 = (x,p) \in \Gamma\colon 0 < p < \frac{1}{f(x)}, \; \Gamma_2 = (x,p) \in \Gamma\colon \frac{1}{f(x)} \leq p \geq \frac{1}{\varepsilon f(x)},$$
$$\Gamma_3 = (x,p) \in \Gamma\colon p > \frac{1}{\varepsilon f(x)}$$

Логично, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

В множестве Γ_1 гамильтонова система принципа максимума имеет вид

$$\dot{x} = -\mu x(t), \dot{p}(t) = (\rho + \mu)p(t) - \frac{1}{f(x(t))}\frac{d}{dx}f(x(t)). \qquad (2.15)$$

Таким образом, в множестве Γ_1 положений равновесия у гамильтоновой системыпринципа максимума нет. Все ее траектории имеют в этом множестве экспоненциально убывающую координату x. Определим функцию $y_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ равенством

$$y_1(x) = \frac{1}{(\rho+\mu)f(x)}\frac{d}{dx}f(x) \text{ для любого } x > 0.$$

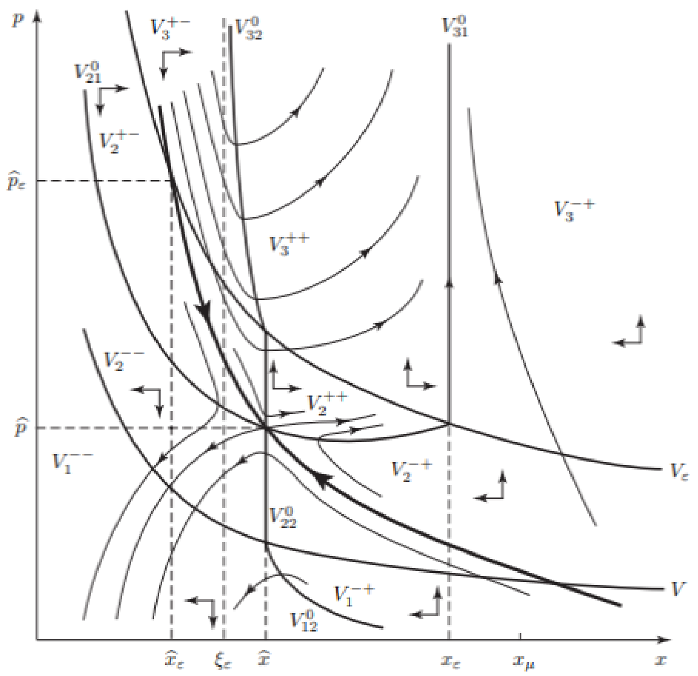
В силу неоклассических условий функция y_1 монотонно убывает,

$$y_1(x) \to \infty \text{ при } x \to 0 \text{и } y_1(x) \to 0 \text{ при } x \to \infty,$$

а равенство $y1(x) = 1/f(x)$ выполняется в единственной точке $\hat{x}$, являющейся корнем уравнения

$$\frac{d}{dx}f(x) = \rho + \mu \tag{2.16}$$

Определив кривые $V^0_{12}, V^0_{21}, V^0_{22}, V^0_{31}, V^0_{32}$, а так же множества, на которые они разбивают Γ_1, Γ_2 и Γ_3, мы можем построить характер поведения траекторий гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина для задачи $(\tilde{P}_\varepsilon)$ [3]:



Точка $(\hat{x}, \hat{p})$ будет считаться равновесной в данной системе и пренадлежать множеству Γ_2, т.к. все траектории Γ_1 имеют экспоненциальную убывающую координату x (см. расчеты выше), а во множестве Γ_3 прямая V^0_{31} и кривая V^0_{32} не пересекаются (см. рис.).

Соответственно, используя (2.16) для рассчета $\hat{x}$ и формулу $\hat{p} = \dfrac{1}{f(\hat{x}) - \mu\hat{x}}$ мы получаем нашу точку $(\hat{x}, \hat{p})$. Чтобы перейти к определенным в предыдущем пункте (x_*, u_*) воспользуемся следующими формулами:

$$x_*(t) \equiv x, u_*(t) = 1 - \frac{1}{f(\hat{x})\hat{p}}$$

К ним переходим в силу следствия 15.2 [3], по которому положение равновесия $(\hat{x}, \hat{p})$ соответствует оптимальной стационарной траектории с начальным условием $x_0 = \hat{x}$ для управляемой системы $\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon]$ из задачи $(\tilde{P}_\varepsilon)$.

2.4 Задача оптимального управления для неоклассической модели экономики с логарифмической функцией мгновенной полезности с терминальной стоимостью

Метод, изложенный в пункте 2.2 и после использованный для численного эксперимента в пунктах 3.1 — 3.3 имеет свои недостатки, явно изложенные и показанные при численном эксперименте. Основным, пожалуй, является трудоемкость решения для приблежении к магистрали. Для этого требуется увеличить горизонт до $T = 90$, в результате чего возможна ситуация, когда решение данной задачи невозможно построить в реальном времени.

Недостатки данного метода мы устраним, включив в задачу терминальную стоимость, т.е.

$$J(x,u) = W(x(\tau+T)) + \int_{\tau}^{\tau+T} L(x(t),u(t))dt \to \max. \tag{2.17}$$

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon],$$
$$x_0 = x(0), t \in [\tau, \tau+T]$$

Для того, чтобы выбрать подходящую терминальную стоимость W, запишем условия оптимальности (условия Каруша-Куна-Таккера) для задачи нелинейного программирования:

$$\partial L(x,u)/\partial x + (\partial f(x,u)/\partial x)^T\lambda = 0, \partial L(x,u)/\partial u + (\partial f(x,u)/\partial u)^T\lambda = 0, f(x,u) = 0. \tag{2.18}$$

Пара (x_*, u_*) необходимо удовлетворяет условиям вместе с некоторым (оптимальным) множителем Лагранжа λ_*.

Вернемся теперь к прогнозирующей задаче ОУ. Управление $u(t) \equiv u_*$, соответствующие ему прямая траектория $x(t) \equiv x_*$ и сопряженная траектория $\psi(t) \equiv \lambda_*$, т.е. магистраль, является решением гамильтоновой системы принципа максимума

$$\dot{\psi} = -(\partial f(x(t), u(t))/\partial x)^T \psi(t) + \partial L(x(t), u(t))/\partial x, \dot{x} = f(x(t), u(t)), t \in [\tau, \tau+T], \tag{2.19}$$

при начальном условии $x(\tau) = x_*$, и условии трансверсальности $\psi(\tau + T) = -\lambda_*$. Для того, чтобы в задаче 2.17 получить условие трансверсальности $\psi(\tau+T) = -\lambda_*$, выберем линейную терминальную стоимость $W(x) = \lambda_*^T x$. Тогда $\psi(\tau + T) = -\partial W(x(\tau + T))/\partial x = -\lambda_*$

[cp1251]inputenc

ГЛАВА 3

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

3.1 Применение метода MPC к решению базовой задачи об экономическом росте

Рассмотрим задачу (2.14).

$$J(x,u) = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1-u(t)) + \ln f(x(t))]dt \to \max .$$
$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon],$$
$$x(0) = x_0, x \geq 0$$

Цель данной главы применить методы решения ЗОУ для решения данной задачи. Для решения задачи воспользуемся алгоритмом, который был указан в пунтке 1.3. Рассматривать будем прогнозирующую задачу Лагранжа, т.е.

$$J(x,u) = \int_0^z e^{-\rho t}[\ln(1-u(t)) + \ln f(x(t))]dt$$

Решение задачи будем искать численно в классе кусочно-постоянных функций, то есть

$$u(t) = u_i, t \in [ih, (i+1)h], i = 0, ..., T-1$$

где $h = z/T$ - период дискретизации, $T \in \mathbb{N}$, T - горизонт планирования. Фазовая же переменная x и уравнение для её рассчета изменятся следующим образом:

$$x_{i+1} = u_i f(x_i) - \mu x_i$$

В таком случае критерий качества нашей задачи имеет следующий вид:

$$J(x,u) = \textstyle\sum_{i=0}^{T-1} \displaystyle\int_{ih}^{(i+1)h} e^{-\rho t}[\ln(1-u_i) + \ln f(x_i)]dt =$$
$$\textstyle\sum_{i=0}^{T-1} \displaystyle\frac{[\ln(1-u_i) + \ln f(x_i)]}{-\rho} \left(e^{-\rho(i+1)h} - e^{-\rho ih}\right)$$

В итоге мы получаем следующую дискретизированую задачу:

$$x_{i+1} = u_i f(x_i) - \mu x_i, u_i \in U_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon], x(0) = x_0, x_i \geq 0$$
$$J(x, u) = \sum_{i=0}^{T-1} \frac{[\ln(1-u_i) + \ln f(x_i)]}{-\rho} \left(e^{-\rho(i+1)h} - e^{-\rho i h}\right)$$

Таким образом, задача оптимального управления в классе дискретных управляющих воздействий свелась к задаче нелинейного прогаммирования. Для ее численного решения существует ряд реализованных программно процедур, в частности, в рамках курсовой работы будет использвоаться стандартная процедура fminsearch пакета Matlab.

В качестве производственной функции мы рассматриваем:

$$f(x) = x^\alpha$$

В задаче будем использовать следующие параметры: $T = 10, \alpha = 0.3, \mu = 0.03, \rho = 0.05, \varepsilon = 0.01$.

Решая уравнения для устойчивого состояния (магистраль) получим

$$x_* = 6.6076, u_* = 0.11250$$

3.2 Программное решение

Для рассчета состояния в следующий момент времени опредилим функции applycontrol на основе ode45 и deq, в качестве переменной для ode45:

```
function x = applycontrol(t,k,c)
[~, x] = ode45(@(t,k) deq(k,c),[t, t+dt], k);
x = x(end,:);
end

function dk = deq(k,c)
dk = c*k^(alpha) - mu*k;
end
```

Здесь k — начальное состояние, с управление, t — начальный момент времени. Определим функцию mpcsolve для решения задачи методом управления с прогнозирующей моделью.

Чтобы в дальнейшем иметь возможность ее повторного использования для решения других задач реализуем ее в общем виде, независящем от рассматриваемой в данной работе задачи. Для решения задачи на конечном промежутке будем использовать реализованную в Matlab функцию fmincon, минимизирующую функцию при заданных линейных и нелинейных ограничениях. Также определим функцию полной стоимости costfun, суммирующую функции стоимости этапа. Для дальнейшего анализа решения функция mpcsolve возвращает не только построенные оптимальную траекторию и последовательность управлений, но и все траектории и управления для задач на конечном промежутке, полученные при решении задачи на каждой итерации.

```
function [x, u] = mpcsolve(Nmpc, x0, t0, u0)
t = t0;
x = zeros(N + 1,Nmpc);
x(1,1) = x0;
u = zeros(N,Nmpc);
for i = 1:Nmpc
u(:, i) = fmincon(@(u) costfun(x(1,i),t,u),...
u0,[],[],[],[],zeros(N,1),ones(N,1)-eps);
for j = 1:N
x(j+1,i) = applycontrol(t + j*dt,x(j,i),u(j,i));
end
x(1,i+1) = x(2,i);
t = t + dt;
end
end
function cost = costfun(x0,t0,u)
cost = 0;
x = x0;
t = t0;
for i = 1:N
cost = cost + stagecost(t, x, u(i));
x = applycontrol(t,x,u(i));
t = t + dt;
end
end
function r = stagecost(t, k, c)
r = (log(1 - c) + log(k^alpha))*...
(exp(-rho * (t+dt))-exp(-rho * t))/rho;
end
```

Для получения результата вызовем функцию mpcsolve

```
[k, c] = mpcsolve(Nmpc, k0, t0, 0.3*ones(N,1));
```

3.3 Результаты исследования

Пускай мы указали в качестве начальных данных T (горизонт планирования) равным 10, рассматривать нашу задачу мы будем как минимум для четырех различных горизонтов: 10, 30, 50 и 70. В качестве начальных условий везде используется $x_0 = 1$, период квантования $h = 1$.

Как мы видим, с увеличением горизонта планирования наша траектория приближается к устойчивому состоянию x_*.

Также следует отметить, что при увеличении горизонта нелинейно возрастает

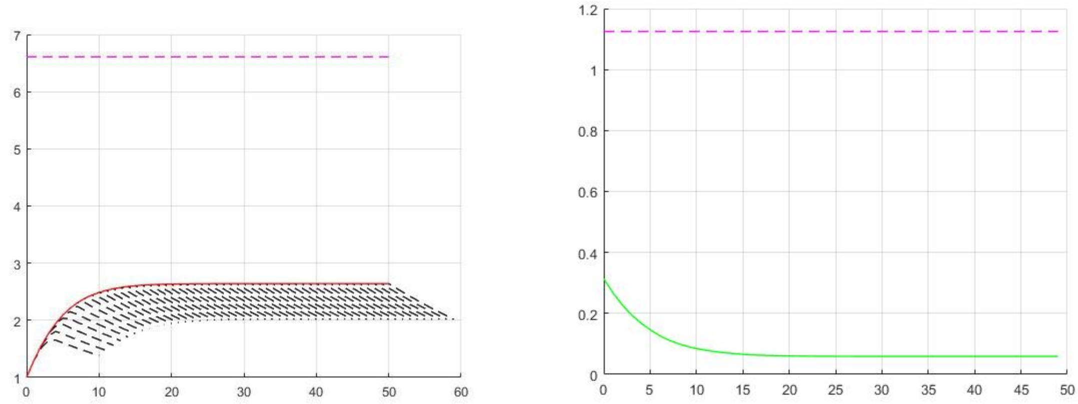


Рис. 3.1: Траектории x и u при $T = 10$

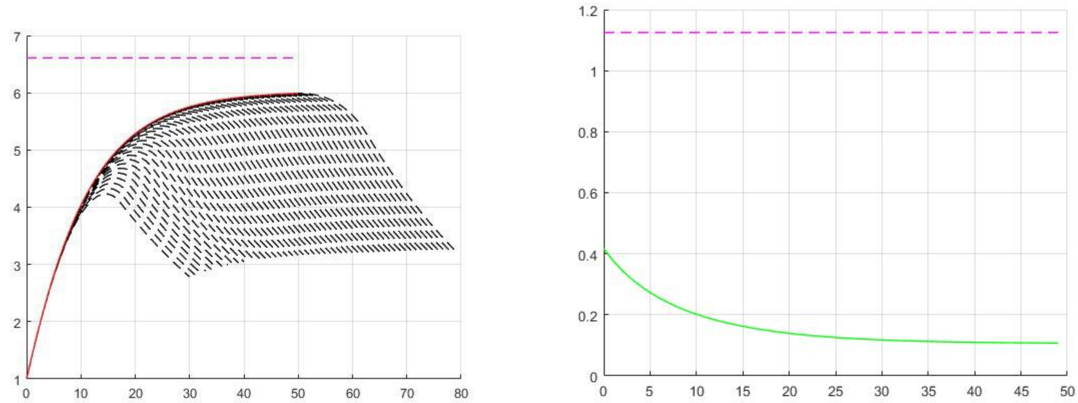


Рис. 3.2: Траектории x и u при $T = 30$

и время решения задачи. Здесь представлены траектории вплоть до $T = 70$. Учитывая динамику можно предположить, что при $T \approx 90$ траектория x совпадет с магистралью.

На рис. 3.1 — 3.4 можно наблюдать эффект критерия Лагранжа: программные траектории (штриховые линии) покидают траекторию на заключительном участке, чтобы выполнить условие трансверсальности. Понятно, что на построение этих участков численная процедура решения задачи нелинейного программирования вынуждена тратить некоторое дополнительное время.

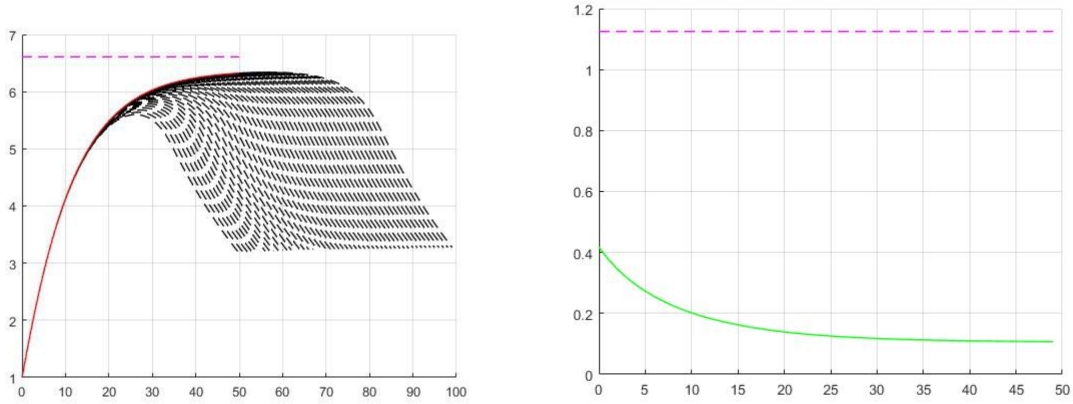


Рис. 3.3: Траектории x и u при $T = 50$

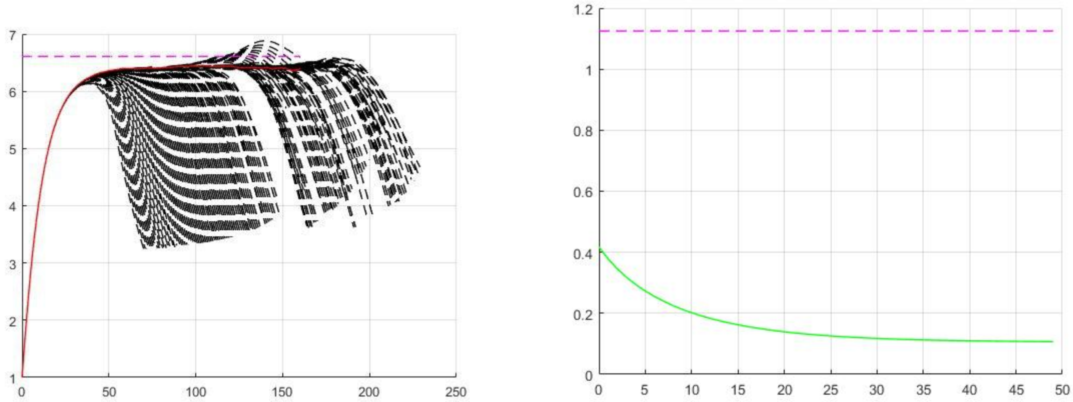


Рис. 3.4: Траектории x и u при $T = 70$

3.4 Применение метода MPC к решению задачи об экономическом росте с терминальной стоимостью

Теперь же, используя теоретические выкладки из п. 2.4, а так же рассчеты, приведенные в прошлой главе решим данную задачу добавив терминальную стоимость. По сути, теперь решаем задачу с критерием типа Майера, а не Лагранжа. Предположив, что терминальная стоимость содержит дисконтирующий множитель $W(x, \tau + T) = e^{-\rho(\tau+T)}\lambda_* x$ получим следующую прогнозирующую задачу:

$$J(x,u) = e^{-\rho(\tau+T)}\lambda_* x + \int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1-u(t)) + \ln f(x(t))]dt \to \max, \quad (3.1)$$

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon],$$
$$x(0) = x_0, x \geq 0$$

Восплоьзовавшись вычислениями из п. 3.1 перейдем сразу к дискретизированной задаче, которую будем использовать при вычислении в Matlab:

$$J(x,u) = e^{-\rho(\tau+T)}\lambda_* x_{i+1} + \sum_{i=0}^{T-1} \frac{[\ln(1-u_i) + \ln f(x_i)]}{-\rho} \left(e^{-\rho(i+1)h} - e^{-\rho i h}\right), \quad (3.2)$$

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon],$$
$$x(0) = x_0, x \geq 0$$

Уточним лишь, что для вычисления λ_* мы используем формулу $\lambda_* = 1/(x_*^\alpha(1-u_*))$, где (x_*, u_*) мы вычислили ранее в п 3.1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном курсовом проекте был проведен обзор управления по прогнозирующей модели (MPC) на примере неоклассической модели экономического роста.

Было получено магистральное состояние, гарантирующее максимальную скорость экономического роста, по результатам использования запрограмированного алгоритма магистральное состояние было достигнуто для достаточно большого горизонта T.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 В. В. Альсевич, В. В. Крахотко. ” Методы оптимизации: упражнения и задания” — Мн. : БГУ, 2005. — 405 с.

2 Колмановский В.Б. ”Задачи оптимального управления” М., 1997. - 7 с.

3 С. М. Асеев, А. В. Кряжимский, ”Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста”, Тр. МИАН, 257, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2007, 3–271; Proc. Steklov Inst. Math., 257 (2007), 1–255

4 Моисеев Н.Н., ”Численные методы в теории оптимальных систем”, М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971. — 424 с.

5 Н. И. Грачев, Ю. Г. Евтушенко, ”Библиотека программ для решения задач оптимального управления”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 19:2 (1979), 367–387; U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 19:2 (1979), 99–119

6 Mayne, D; Rawlings; Rao; Scokaert (2000). "Constrained model predictive control: stability and optimality". Automatica. 36 (6): 789–814.

7 Vichik, Sergey; Borrelli, Francesco (2014). "Solving linear and quadratic programs with an analog circuit". Computers and Chemical Engineering. 70: 160–171.