1.2 Задачи оптимального управления

Задачи оптимального управления относятся к теории экстремальных задач, то есть задач определения максимальных и минимальных значений. Задачи эти, как и собственно сама теория оптимального управления, возникла в начале XX-го века в связи с практическими задачами, появившимися из-за развития новой техники в различных областях. Данные экстремальные задачи не укладывались в рамки классического вариационного счисления.
В данной главе мы рассмотрим их, используя различные примеры. В целом решение подобных задач можно разбить на два этапа:

1. Постановка задачи
2. Решение с использованием условий оптимальности

Данные пункты содержат в себе сразу несколько подпунктов, так что сейчас мы перейдем от общего к частному.

1.2.1. Постановка задачи оптимального управления

Изначально у нас есть некоторое, условие, однако его недостаточно для решения задачи. Для начала проведем *математическую постановку задачи.*

Она в себя будет включать следующие факторы: математическую модель объекта управления, цель управления, ограничения на траекторию воздействия, управляющее воздействие и его длительность и т.д. Рассмотрим данные факторы подробнее.

1.2.1.1 Модели объекта

Построение модели зависит от типа рассматриваемой нами задачи и того что мы желаем в итоге получить. Могут быть использованы различные дифференциальные уравнения: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с последействием, стохастические уравнения, уравнения в частных производных и т.д.
Для примера мы будем использовать самое обыкновенное дифференциальное уравнение: $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u), \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$, $t_0 \le t \le T$ **(1)**, где $u \in R^m -$ управление, $x \in \ R^n -$ фазовый вектор системы, $f \in \ R^n -$ заданная функция, а R^n – евклидово пространство размерность n. Придавая нашему управлению различные значения мы получаем различные состояния объекта, из которых мы и выбираем оптимальное.

1.2.1.2 Критерий качества

Управление системой (1) осуществляется для достижения некоторых целей, которые формально записываются в терминах минимизации по u функционалов J, определяемых управлением u и траекторией x, где

$$J = \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u)dt + \varphi(T, x(T)) \rightarrow min \qquad \textbf{(2)}$$

F и φ – заданные скалярные функции. Задача (2) в общем виде называется задачей Больца. При F = 0 её называют задачей Майера, а при φ = 0 – Лагранджа.

1.2.1.3 Ограничения на траекторию и ограничения на управление

Иногда траектория не может принадлежать какой-либо части пространства R^n. В таких случаях указывают, что $x(t) \in G(t)$, при том, что $G(t)$ − заданная область в R^n. В зависимости от типа ограничений выделяют различные классы задач управления, такие как задачи с фиксированными концами, свободным левым либо правым концом. Так же существуют задачи с подвижными концами. Иногда же ограничения имеют интегральный характер и выглядят следующим образом:

$$\int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u)dt \ \leq 0$$

Если в задачах (1),(2) начальное и конечное положение задано, моменты начала и конца движения свободны, функция φ = 0, а F =1, то получаем задачу о переводе системы (1) из начального положения в конечное за минимально возможное время. Далее мы рассмотри ограничения на управление, а после перейдем к примеру.

Ограничения могут быть двух типов

- Информационные
- Ограниченность ресурсов управления

Информационные ограничения на управление зависят от того, какая именно информация о системе (1) доступна при выработке управляющего воздействия. Если вектор x(t) недоступен измерению, то оптимальное управление ищется в классе функций u(t), зависящих только от t. В этом случае оптимальное управление именуется программным. Если же вектор x(t) известен точно, то оптимальное управление называется синтезом оптимального управления и ищется в классе функционалов u(t, ${x_{t_0}}^t$). Здесь ${x_{t_0}}^t$ – вся траектория движения на отрезке $t_0 \leq s \leq t$.

Ограничения, обусловленные ограниченностью ресурсов управления имеют вид $u(t) \in U(t)$, где $U(t)$ заданное множество из R^m.

Рассмотрим классический пример с задачей оптимального по быстродействию управления механическим объектом, которая известна как «задача о тележке». Тележку массы m требуется с помощью горизонтальной силы u, не превышающей по модулю величины L, переместить за минимальное время по горизонтальной прямой(без трения) из начального положения A, в котором она имела скорость $v_н$, в конечное положение B, где скорость $v_к$.

Согласно закону Ньютона движение тележки вдоль оси Ox описывается уравнением $m\ddot{x} = u$ (**3**), где $\ddot{x} = \ddot{x}(\mathrm{t}) = d^2\mathrm{x}(\mathrm{t})/\,\mathrm{d}t^2$ – ускорение в момент времени t; u = u(t) – величина силы, приложенной в момент t к объекту управления.

Из физической постановки задачи следуют условия на положение x(t) и скорость $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$ в начальный (t=0) и конечный (t = t^2) моменты времени: $x(0) = \alpha, \dot{x}(0) = \nu_{\text{н}}; x(t^*) = \beta, \dot{x}(t^*) = \nu_{\text{к}}$. Так же мы считаем, что прилагаемые силы u ограничены $|u(t)| \leq L$; $t \in [0, t^*]$.

Таким образом, математическая модель рассматриваемой задачи состоит в поиске таких момента t^{*0} и кусочно-непрерывной функции $u^0(t)$, $t \in [0, t^{*0}]$, ограниченной выше указанными условиями, для которых на соответствующем решении $x^0(t)$, $t \in [0, t^{*0}]$ уравнения (3) выполняются заданные условия и минимальна продолжительность переходного процесса.