МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра методов оптимального управления

Методы MPC для отслеживания магистралей в динамических задачах экономики

Курсовая работа (проект)

Горошко Николая Сергеевича
студента 3 курса,
специальность «экономическая кибернетика»

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук
доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

[cp1251]inputenc

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Курсовая работа, 29 с., 0 рис., 0 табл., 56 источников

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Цель работы и ее актуальность

Объектом исследования является

В процессе работы были получены следующие результаты

Новизна полученных результатов заключается в

Структура курсовой работы представлена тремя главами, где раскрываются

[cp1251]inputenc

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе речь пойдет об управлении по прогнозирующей модели носящее в англоязычной литературе название Model Predictive Control (MPC) или Receding Horizon Control (RHC). Оно представляет собой один из современных методов теории управления. Популярность этого метода в практических приложениях вызвана прежде всего тем, что в нем присутствуют математические модели объектов управления в пространстве состояний, в том числе нелинейные, достаточно просто учитываются ограничения на управляющие и фазовые переменные, принимаются во внимание качественные требования к процессу управления.

Классической областью применения MPC до недавнего времени были задачи стабилизации и слежения в технических приложениях, особенно в управлении химическими процессами, механическими объектами и робототехнике. Теоретические основы метода для решения задач стабилизации получили строгое обоснование в работах, были развиты на задачи робастного управления, распределенного управления. За последние годы фокус исследований MPC сместился в сторону приложений, в которых экономика процесса (минимизация энергетических затрат, максимизация выпуска или прибыли) важнее стабилизации некоторого положения равновесия. Известны примеры из практики, например, управления химическими реакторами, в которых периодические решения дают на выходе больший объем полезного продукта, чем функционирование в окрестности положения равновесия.

Цель курсовой работы применить идеи MPC для решения одной неоклассической задачи экономического роста. В работе предлагается новый подход к построению терминальной стоимости в задаче MPC и в ряде численных экспериментов демонстрируется его превосходство над подходом из работы.

[cp1251]inputenc

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

1.1 Теория управления по прогнозирующей модели

Управление по прогнозируемой модели (далее MPC, от англ. "Model Predictive Control") - это продвинутый метод управления процессами, который используется для соответствующего набора ограничений. Оно используется в перерабатывающей индустрии, на химических заводах и нефтепереработке с 80-х годов XX-го века. Сейчас данный метод так же используется при калибровке энергетических систем и силовой электронике. В MPC в основном используются динамические модели процессов, наиболее часто - линейные эмпирические. Главным приимуществом MPC является то, что он способен оптимизировать текущий временной отрезок, учитывая будущие интервалы.

Модели, используемые в MPC, направлены на то, чтобы отражать поведение сложных динамических систем. Они предсказывают изменения в зависимых переменных моделируемых систем благодаря изменениям независимых переменных. Например если речь идет о химических процессах, независимые переменные, которые могут быть добавлены регулятором чаще всего являются либо установками ПИД-регуляторов, либо конечными контрольными элементами.

В основе MPC лежит итеративная конечногоризонтальная оптимизация модели производства. В момент времени t производится выборка текущего состояния производства и вычисляется стратегия управления минимизацией затрат (с помощью алгоритма численной минимизации) для относительно короткого временного горизонта в будущем: $[t, t+T]$. В частности, онлайн-расчет или расчет «на лету» используются для изучения траекторий состояния, которые исходят из текущего состояния, и находят (посредством решения задач оптимального управления) стратегию минимизации затрат до времени $t + T$.

Реализуется только первый шаг стратегии управления, затем снова производится выборка состояния производства, и вычисления повторяются, начиная с нового текущего состояния, получая новый элемент управления и новый прогнозируемый путь состояния. Горизонт прогнозирования продолжает смещаться вперед, и по этой причине MPC также называют сдвигающимся горизонтом управления(англ. "Receding horizon control").

Хотя этот подход не является оптимальным, на практике он дал очень хорошие результаты. Было сделано много научных исследований, чтобы найти быстрые методы решения задач оптимального управления, понять глобальные свойства устойчивости локальной оптимизации MPC и в целом улучшить метод MPC.

Основные принципы MPC Управление по прогнозирующей модели это многомерный управляющий алгоритм, который использует:

- внутреннюю динамическую модель процесса;
- функцию затрат J над сдвигающимся горизонтом;
- алгоритм оптимизации, минимизирующий функцию стоимости J с использованием управления u;

Примером для нелинейной функции стоимости для оптимизации может служить следующее уравнение

$$J = \sum_{i=1}^{N} \omega_{x_i}(r_i - x_i)^2 + \sum_{i=1}^{N} \omega_{u_i} \triangle u_i{}^2$$

не нарушая установленных ограичений утверждаем, что:

x_i : $i-$тая контролируемая переменная
r_i : $i-$тая эталонная переменная
u_i : $i-$тая изменяемая переменная
$\omega_{x_i}-$коэффицент, отражающий важность x_i
$\omega_{u_i}-$коэффицент, тормозящий относительно большие изменения в u_i

Из приведенного краткого обзора методов MPC понятно, что их основу составляет решение задач оптимального управления на сдвигающемся горизонте управления с изменяющимся начальным состоянием. Поэтому в следующем разделе опишем основные результаты теории управления.

1.2 Задачи оптимального управления

Задачи оптимального управления относятся к теории экстремальных задач, то есть задач определения максимальных и минимальных значений. Задачи эти, как и собственно сама теория оптимального управления, возникла в начале XX-го века в связи с практическими задачами, появившимися изза развития новой техники в различных областях. Данные экстремальные задачи не укладывались в рамки классического вариационного счисления. В данной главе рассмотрим их, используя различные примеры. В целом решение подобных задач можно разбить на два этапа:

1. Постановка задачи

2. Решение с использованием условий оптимальности

Постановка задачи

Изначально есть некоторое, условие, однако его недостаточно для решения задачи. Для начала проведем математическую постановку задачи. Она в себя будет включать следующие факторы: математическую модель объекта управления, цель управления, ограничения на траекторию воздействия, управляющее воздействие и его длительность и т.д. Рассмотрим данные факторы подробнее.

Модели объекта

Построение модели зависит от типа рассматриваемой задачи и того, что необходимо в итоге получить. Могут быть использованы различные дифференциальные уравнения: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с последействием, стохастические уравнения, уравнения в частных производных и т.д. Для примера будем использовать обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u), \dot{x}(t) = dx/dt, t_0 \leq t \leq T \tag{1.1}$$

$u \in \mathbb{R}^m-$управление, $x \in \mathbb{R}^n$-фазовый вектор системы, $f \in \mathbb{R}^n$-заданная функция. Придавая управлению различные значения мы получаем различные состояния объекта, из которых мы и выбираем оптимальное.

Критерий качества

Управление системой (1.1) осуществляется для достижениянекоторыхцелей,которыеформальнозаписываютсявтерминахминимизации по u функционалов J, определяемых управлением u и траекторией x, где

$$J = \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u)dt + \varphi(T, x(T)) \to \min \tag{1.2}$$

F и φ - заданные скалярные функции. Задача (1.2) в общем виде называется задачей Больца. При $F = 0$ её называют задачей Майера, а при $\varphi = 0$ - Лагранжа.

Ограничения на траекторию и ограничения на управление Иногда траектория не может принадлежать какой-либо части пространства $\mathbb{R}^n$. В таких случаях указывают, что $x(t) \in G(t)$, при том, что $G(t)$-заданная область в $\mathbb{R}^n$. В зависимости от типа ограничений выделяют различные классы задач управления, такие как задачи с фиксированными концами, свободным левым либо правым концом. Так же существуют задачи с подвижными концами. Иногда же ограничения имеют интегральный характер и выглядят следующим образом: :

$$J = \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u)dt \leq 0$$

Если в задачах (1.1),(1.2) начальное и конечное положение задано, моменты начала и конца движения свободны, функция $\varphi = 0$, а $F = 1$, то получаем задачу о переводе системы (1.1) из начального положения в конечное за минимально возможное время. Так же стоит упомянуть ограничения на управление, которые могут быть двух типов:

- Информационные
- Ограниченность ресурсов управления

Условия оптимальности

Принцип максимума Понтрягина Рассмотрим простейшую задачу оптимального управления — задачу терминального управления

$$J(u) = \varphi(x(t_f)) \to \min \tag{1.3}$$
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), x(t_0) = x_0 \tag{1.4}$$
$$u(t) \in U, t \in [t_0, t_f]. \tag{1.5}$$

Требуется минимизировать критерий качества (1.3) на траекториях системы (1.4) с помощью ограниченных управлений (1.5).
В задаче (1.3)–(1.5) моменты t_0, t_f заданы, $x(t) \in \mathbb{R}^n$— состояние системы управления в момент времени t; $u(t) \in \mathbb{R}^r$ значение управления в момент времени t.
Относительно функций $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ предположим,

что они имеют частные производные $\partial f(x,u,t)/\partial x, \partial\varphi(x)/\partial x$ и непрерывны вместе с этими производными по совокупности своих аргументов.

Задачу (1.3)–(1.5) будем рассматривать в классе кусочно-непрерывных управлений, удовлетворяющих условию (1.5) во всех точках непрерывности. Множество $U \subset \mathbb{R}^r$— множество доступных значений управления, не зависит от времени. Предполагается, что U — компакт.

Отметим, что в задаче (1.3)–(1.5) левый конец траектории $x(t_0)$ закреплен, правый $x(t_f)$ — свободен, фазовые ограничения на траекторию $x(\cdot)$ отсутствуют. Требуется минимизировать функцию терминального состояния — критерий типа Майера.

Принципом максимума называется основное необходимое условие оптимальности в задачах оптимального управления, связанное с максимизацией гамильтониана.
Принцип максимума был сформулирован как гипотеза в 1956г. группой советских математиков во главе с Л.С. Понтрягиным. Первые доказательства получены Р.В.Гамкрелидзе (1957) для линейных систем быстродействия и В.Г.Болтянским (1958) для общей ЗОУ.
Для формулировки принципа максимума введем гамильтониан:

$$H(x,\psi,u,t) = \psi' f(x,u,t) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \psi_j f_j(x,u,t) \tag{1.6}$$

Здесь $\psi = \psi(t) \in \mathbb{R}^n$ — вспомогательные переменные, называемые сопряженной траекторией (котраекторией).
Для каждой пары $(u(\cdot), x(\cdot))$, состоящей из допустимого управления и соответствующей ему траектории, функцию $\psi(\cdot) = (\psi(t), t \in T)$ определим как решение сопряженного уравнения

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),\psi(t),u(t),t) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t),t)'\psi(t) \tag{1.7}$$

$$\dot{\psi}_j(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_j}(x(t),\psi(t),u(t),t) = -\textstyle\sum_{i=1}^{n} \psi_i(t)\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x(t),u(t),t), j = 1,...,n$$

с начальным условием на правом конце

$$\psi(t_f) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t_f)) \tag{1.8}$$

Здесь $\frac{\partial f}{\partial x}$ - матрица всевозможных частных производных по x, и всюду запись вида $\dfrac{\partial H}{\partial x}(x(t),\psi(t),u(t),t)$),как это обычно принято, означает, что сначала вычисляется соответствующая частная производная функции $H(x,\psi,u,t)$, а

затем вместо аргументов подставляются их конкретные значения.
Условие (1.8) на правом конце $\psi(t_f)$ сопряженной траектории часто называют условием трансверсальности.
Отметим, что сопряженное уравнение (1.7) линейно. С использованием гамильтониана уравнения (1.4), (1.7) могут быть представлены в виде системы Гамильтона:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), \psi(t), u(t), t)$$
$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), \psi(t), u(t), t)$$

Теперь можем сформулировать основной результат:
Теорема: (Принцип максимума Понтрягина). Пусть $u^0(\cdot)$ - оптимальное управление в задаче (1.3)-(1.5), $x^0(\cdot)$ - соответствующая (оптимальная) траектория системы (1.4), $\psi^0(\cdot)$ - соответствующее решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}^0(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t), \psi^0(t_f) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x^0(t_f)),$$

Тогда на оптимальном управлении $u^0(\cdot)$ необходимо выполняется условие максимума гамильтониана

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{\upsilon \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), \upsilon, t)$$

для всех $t \in [t_0, t_f]$ являющихся точками непрерывности оптимального управления $u^0(\cdot)$.

Метод динамического программирования Применяя метод динамического программирования, изучают все поле оптимальных траекторий. Для того, чтобы сравнение было наглядным, воспользуемся ранее заданной задачей (1.3)-(1.5).
Зафиксируем некоторый произвольный момент времени $t \in [t_0, T]$. Рассмотрим вспомогательную задачу управления на отрезке $[t, T]$. Через $V(t, x)$ обозначим минимальное значение критерия качества во вспомогательной задаче при начальном условии $x(t) = x$, где x – произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$. При некоторых предположениях функция $V(t, x)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\partial V(t, x)/\partial t + \min_{u \in U} f^{'}(t, x, u) \partial V(t, x)/\partial x = 0,$$

$$t_0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.9}$$

$$V(T, x) = F(x).$$

Решив данную задачу и определив $V(t,x)$ мы можем найти управление $u(t,x)$ из соотношения:

$$\min_{u \in U} f^{'}(t,x,u)\partial V(t,x)/\partial x = f^{'}(t,x,u(t,x))\partial V(t,x)/\partial x \tag{1.10}$$

Возможность находить конкретно управление есть характерная черта метода динамического программирования. Она становится особенно важной в условиях отсутствия полной информации. При решении конкретных задач с помощью метода динамического программирования мы решаем нелинейное уравнение в частных производных (1.9), а так же дополнительно исследуем оптимальное управление, получаемое из уравнения (1.10).

1.3 Численные и программные методы решения ЗОУ

Численные методы Одним из основных и простейших методов решения задач оптимального управления считается сведение ЗОУ к задаче нелинейного программирования. Мы рассмотрим простейший пример такого перехода, а так же рассмотрим алгоритм MPC для решения задач стабилизации.

Пусть для определенности речь идет об отыскании минимума функционала

$$J(x,u) = \int_0^T F(x,u)dt \tag{1.11}$$

при условии, что векторы x и u связаны дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{1.12}$$

В пространстве (x,t) проведены плоскости $\sum_i$:

$$t = i\tau$$

где τ - шаг численного интегрирования. Предположим, что на интервале $(i\tau,(i+1)\tau)$ управляющая вектор-функция принимает постоянное значение u_1

Заменим тогда управление (1.12) разностной схемой

$$x_{i+1} = x_1 + \tau f(x_1,u_1) \tag{1.13}$$

Соответственно с этим, интеграл (1.11) заменится следующей интегральной суммой:

$$J(x_i, u_i) = \tau \sum_{i=0}^{N-1} F(x_i, u_i) \tag{1.14}$$

В результате конечноразностной аппроксимации мы пришли к следующей задаче: определить векторы u_i и x_i, доставляющие минимум сумме (1.14) при связях (1.13) и условиях $u_t \in G_t, x_0 \in E_0, x_N \in E_N$ - некоторые заданные множества.

Эта задача является задачей нелинейного программирования.

Теперь коротко опишем алгоритм для решения задач при помощи MPC. Он включает следующие четыре шага:

- Положить $k = 0$.
- Решить задачу

$$\begin{gathered}\int_0^{\tau_N} (\|\varphi(t|x(\tau_k), u(\cdot))\|_Q^2 + \|u(t)\|_R^2) dt \to \min_u, \\ \dot{\varphi}(t|x(\tau_k), u(\cdot)) = f(\varphi(t|x(\tau_k), u(\cdot)), u(t), 0), \\ g(\varphi(t|x(\tau_k), u(\cdot)), u(t)) \geq 0, \\ \varphi(t|x(\tau_k), u(\cdot)) \in X, u(t) \in U, \forall t \in [0, \tau_N).\end{gathered}$$

  для $x(\tau_k)$, найти $u^0(\cdot|x(\tau_k))$

- Подавать на вход объекта управления постоянное управление $u_M PC(\tau_k) := u^0(0|x(\tau_k))$ до наступления момента τ_{k+1}.
- Положить $k := k + 1$, вернуться к шагу 2.

Программные системы Сложная программная система, в частности, пакет для решения задач оптимального управления, имеет свое поле эффективной работы, которое, как правило, характеризуется классом решаемых системой задач и арсеналом применяемых ею методов. Однако структурные особенности программной системы, взаимосвязь и соответствие приближенных методов, применяемых на разных этапах поиска численного решения, а также способность системы самостоятельно конструировать путь поиска решения в зависимости от выявленных особенностей решаемой задачи выгодно отличают программную систему от теоретически описанного класса задач и набора методов для поиска их решения. Иерархическая структура вычислительной схемы и соответствующая композиция методов, применяемых на всех уровнях поиска численного решения, являются основными характеристиками эффективной программной системы. Программная система с хорошим уровнем интеллекта кроме широкого спектра методов, как правило, содержит много

различных эвристик и логических алгоритмов для анализа сложившихся ситуаций, которые позволяют продолжить поиск оптимального управления и даже при прекращении сходимости какого-то метода. В этом случае может произойти переход либо к другому методу, либо – к подпрограмме, которая с помощью двойственного метода вычислит оптимальную оценку невязки выполнения условий оптимальности. Для дальнейшей оптимизации программа может выбрать более подходящий алгоритм или, как, например, в задачах линейного программирования, перейти к обновлению базиса, чтобы избавиться от ошибок округления, накопившихся в ходе выполнения большого количества итераций
Согласно публикации Н. И. Грачева, Ю. Г. Евтушенко, "Библиотека программ для решения задач оптимального управления" выделяются следующие основные алгоритмы

1. Метод штрафных функций;
2. Двойственный метод;
3. Метод модифицированных функций Лагранжа;
4. Метод простой итерации;
5. Метод Моррисона;
6. Модифицированный метод Моррисона;
7. Метод линеаризации;
8. Метод итерации Крылова - Черноусько;
9. Редукция к краевой задаче;

[cp1251]inputenc

ГЛАВА 2

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

В данной главе исследуется задача оптимального экономического роста в неоклассической модели с логарифмической функцией мгновенной полезности. Эти задачи представляют интерес в связи с тем, что они могут выбираться в качестве прогнозирующих задач оптимального управления при применении теории главы 1 для решения задачи роста.

2.1 Неоклассическая модель экономического роста

Неоклассическая модель оптимального экономического роста описывает замкнутую агрегированную экономику, производящую в каждый момент времени $t \geq 0$ единственный однородный продукт (капитал) со скоростью $Y(t) > 0$. В каждый момент времени t величина $Y(t)$ является функцией текущих значений капитала $K(t) > 0$ и трудовых ресурсов $L(t) > 0$; трудовые ресурсы также предполагаются однородными. Таким образом,

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) \text{ для любого } t \geq 0. \tag{2.1}$$

Функция F обычно называется производственной функцией. Относительно производственной функции F предполагается, что она определена и непрерывна на положительном квадранте

$$G = (K, L) \in \mathbb{R}^2 : K > 0, L > 0,$$

дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет следующим “неоклассическим” условиям для всех K>0, L>0:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} < 0 \qquad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} < 0 \qquad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0 \tag{2.3}$$

$$\lim_{K \to +0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \infty \qquad \lim_{K \to \infty} \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} = 0 \tag{2.4}$$

$$\lim_{L\to+0}\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}=\infty \qquad \lim_{L\to\infty}\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2}=0 \tag{2.5}$$

Наконец, предполагается, что F положительно однородна первой степени, т.е.

$$F(\lambda K,\lambda L)=\lambda F(K,L) \qquad \text{для любых } \lambda>0, K>0, L>0 \tag{2.6}$$

Последнее условие означает, что объем производства в каждую единицу времени прямо пропорционален величинам имеющихся вэту единицу времени производственных факторов. В качестве производственной функции F может фигурировать, например, стандартная функция Кобба–Дугласа вида

$$F(K,L)=AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2},$$

где $A>0, \alpha_1>0, \alpha_2>0$ и $\alpha_1+\alpha_2=1$.

Заметим, что в силу равенства (2.6) не все условия в (2.2)–(2.5) независимы. В частности, второе условие в (2.3) следует из второго условия в (2.2) и (2.6).

В замкнутой экономике произведенный продукт либо инвестируется в основные производственные фонды (капитал), либо потребляется. Предположим, что в каждый момент времени $t\geq 0$ минимально возможная часть потребляемого продукта есть $\varepsilon Y(t)>0$, где $0<\varepsilon<1$ — некоторая постоянная, а доля продукта $(1-\varepsilon)Y(t)$ может быть распределена между производством и потреблением произвольным образом.

Пусть в момент времени $t\geq 0$ часть

$$I(t)=u(t)Y(t), 0\geq u(t)\geq 1-\varepsilon, \tag{2.7}$$

произведенного продукта инвестируется в основные производственные фонды, а оставшаяся часть

$$C(t)=(1-u(t))Y(t) \tag{2.8}$$

потребляется. В дальнейшем величина $u(t)\in[0,1-\varepsilon]$ будет трактоваться как значение управления в момент времени t.

В данной модели амортизации капитала не предполагается. Поэтому в силу равенства (2.7) динамика изменения капитала может быть описана при помощи следующего дифференциального уравнения:

$$\dot{K}(t)=I(t)=u(t)Y(t). \tag{2.9}$$

Считаем, что в начальный момент времени $K(0) = K_0 > 0$.

Пусть трудовые ресурсы удовлетворяют условию экспоненциального роста, т.е.

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \tag{2.10}$$

где $\mu > 0$ — некоторая постоянная. Аналогично будем считать, что $L(0) = L_0 > 0$.

Пусть $\rho > 0$ — параметр дисконтирования и в каждый момент времени t?0 мгновенная полезность $g(K(t), L(t), u(t))$ текущего процесса управления есть логарифм полного потребления $C(t)$, т.е. (см. (2.1), (2.8))

$$g(K(t), L(t), u(t)) = \ln C(t) = \ln(1 - u(t)) + \ln F(K(t), L(t)).$$

2.2 Задача оптимального управления для неоклассической модели экономики с логарифмической функцией мгновенной полезности

Неоклассическая модель оптимального экономического роста (с логарифмической функцией мгновенной полезности) формулируется в виде следующей задачи оптимального управления $(P_\varepsilon), 0 < \varepsilon < 1$:

$$\dot{K}(t) = u(t)F(K(t), L(t)), \qquad u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon],$$
$$\dot{L}(t) = \mu L(t),$$
$$K(0) = K_0, L(0) = L_0,$$

$$J(K, L, u) = \textstyle\int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1 - u(t)) + \ln F(K(t), L(t))]dt \to \max. \tag{2.11}$$

При исследовании неоклассической задачи оптимального экономического роста обычно, используя условие однородности (2.6), понижают размерность системы и переходят к вспомогательной фазовой переменной $x = K/L$ (величине капитала, приходящегося на единицу рабочей силы) и однофакторной производственной функции f вида $f(x) = F(x, 1)$, x>0. В этом случае в силу условий (2.1) и (2.6) для любого $t \geq 0$

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{1}{L(t)} F(K(t), L(t)) = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = f(x(t)).$$

Функция f определена и непрерывна на $\tilde{G} = (0, \infty)$. В силу условий (2.2) для всех $x > 0$

$$\tfrac{d}{dx}f(x) > 0, \qquad \tfrac{d^2}{d^2x}f(x) < 0 \tag{2.12}$$

и вследствие (2.2)–(2.6)

$$\lim_{x\to+0} f(x) = 0 \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to+0} \tfrac{d}{dx}f(x) = \infty \quad \lim_{x\to\infty} \tfrac{d}{dx}f(x) = 0 \tag{2.13}$$

Для переменной $x(t) = K(t)/L(t)$ в силу равенств (2.9) и (2.10) имеем

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\frac{K(t)}{L(t)} = \dot{K}(t)\frac{1}{L(t)} - \frac{K(t)}{L^2(t)}\dot{L}(t) = u(t)\frac{Y(t)}{L(t)} - \mu\frac{K(t)}{L(t)}$$

откуда в силу определения переменной x и условий (2.1) и (2.6) вытекает равенство

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t).$$

Величина мгновенного потребления на единицу трудовых ресурсов в момент времени $t \geq 0$ есть $c(t) = C(t)/L(t)$. Согласно (2.1) и (2.8) получаем

$$c(t) = (1 - u(t))\frac{Y(t)}{L(t)} = (1 - u(t))f(x(t)).$$

Заметим, что в силу равенства (2.10) трудовые ресурсы L в рассматриваемой модели подчиняются заранее заданной динамике. Поэтому максимизация интегрального функционала (2.11) эквивалентна задаче максимизации функционала

$$J(x,u) = \textstyle\int_0^\infty e^{-\rho t}\ln c(t)dt = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))]dt,$$

характеризующего агрегированную удельную скорость роста потребления на единицу рабочей силы.

Пусть в задаче (P_ε) существует оптимальное допустимое управление u_*. Тогда пусть (K_*, L_*) — соответствующая управлению u_* допустимая траектория. В силу неоклассических условий (2.2)–(2.5) и положительности производственной функции F имеем

$$\frac{\partial \ln F(R,L)}{\partial K} = \frac{1}{F(K,L)}\frac{\partial F(R,L)}{\partial K} > 0 \text{ для любых } K > 0, L > 0$$
$$\frac{\partial \ln F(R,L)}{\partial L} = \frac{1}{F(K,L)}\frac{\partial F(R,L)}{\partial L} > 0 \text{ для любых } K > 0, L > 0$$

Для вектора $u_0 = 1 - \varepsilon \in U_\varepsilon$ правая часть управляемой системы в начальной точке (K_0, L_0) положительна. Если оптимальное управление u_* таково, что для некоторого положительного числа θ начиная с некоторого момента времени $\tau \geq 0$ выполняется неравенство $u_*(t) \geq \theta$, то для данного управления u_* выполняются следующие условия

$$x_*(t) \geq 0 \text{ для любого } t \geq \tau$$
$$\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} - \theta I \geq 0 \text{ при почти всех } t \geq \tau,$$

где $I^-(n \times n)$-единичная диагональная матрица. Тогда сопряженная переменная ψ, соответствующая оптимальной паре (x_*, u_*) удовлетворяет условию трансверсальности

Следовательно, в этом случае соответствующая оптимальной тройке (K_*, L_*, u_*) в силу принципа максимума в нормальной форме сопряженная переменная $\psi = (\psi^1, \psi^2)$ удовлетворяет условию трансверсальности.

Мы рассмотрим задачу (P_ε) при произвольном малом параметре $\varepsilon > 0$. При этом будет показано, что для любого начального состояния $(K_0, L_0) \in G$ в случае, когда параметр ε достаточно мал, значение этого параметра ε никакого влияния на оптимальную тройку (K_*, L_*, u_*) не оказывает. Таким образом, в терминах фазовой переменной x задача оптимального управления (P_ε), $0 < \varepsilon < 1$, переписывается в виде следующей задачи $(\tilde{P}_\varepsilon)$:

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon],$$

$$x(0) = x_0, \tag{2.14}$$

$$J(x, u) = \textstyle\int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))]dt \to \max .$$

Здесь $x_0 \in \tilde{G} = x \in \mathbb{R}^1 : x > 0$ и $f(x) = F(x, 1)$ для любого $x \in \tilde{G}$. Остальные данные в задаче $(\tilde{P}_\varepsilon)$ те же самые, что и в задаче (P_ε).

2.3 Построение магистралей

Основные положения магистральной теории американский ученый Дж. ф. Нейман опубликовал в 30-х гг. XX в. В магистральной теории изучается модель расширяющейся экономики. Магистральная теория позволяет вычислять оптимальные траектории экономического роста. Доказано, что оптимальный путь проходит хотя бы частично по магистральной траектории.

Магистральная теория строится на основе следующей аксиоматики.

1. Аксиома невозможности производства При отсутствии затрат производство невозможно.

2. Аксиома преобразуемости При определенных технологических способах любой набор затрат можно преобразовать в другой набор выпусков.

3. Аксиома продуктивности Все продукты можно произвести при помощи технологий.

Пусть u_* — оптимальное управление в задаче (P_ε) (или, что то же самое, в задаче $(\tilde{P}_\varepsilon)$), (K_*, L_*) — соответствующая оптимальная траектория. Тогда $x_*(t) = K_*(t)/L_*(t), t \geq 0$, есть соответствующая u_* оптимальная допустимая траектория в задаче $(\tilde{P}_\varepsilon)$).
$x_*(t) = x_*^1, x_*^2, ..., x_*^m$ - множество оптимальных траекторий. Рост экономики ограничен наиболее сдерживающим темпом, который определяется показателем

$$\bar{x} = \min_{i=1,m} x_*^i$$

Показатель $\bar{x}$ является условно минимальным темпом роста производства. Условность состоит в том, что из множества Z применяется одна из существующих групп технологий $Z^r \in Z, r = 1, 2, \ldots, s$. Значение показателя $\bar{x}$ может быть увеличено применением других групп технологий из множества z. Тогда оптимизация выполняется по Парето. Критерием оптимизации становится достижение равенства

$$x^* = \max_{r=1,s} \min_{i=1,m} x_*^i$$

Показатель x^* называется технологическим темпом роста. В магистральной теории доказано, что с таким темпом происходит максимально возможный рост производства продукции.

Магистраль – это траектория пропорционального сбалансированного роста экономики с технологическим (максимальным) темпом x^*. Начальное L_{*0} и конечное L_{*t} состояния экономики при отыскании магистрали не задают.

Пропорциональный рост означает, что соотношение (пропорции) между объемами затрат или выпуска разных видов продукции в разные элементарные отрезки времени не изменяется. Соблюдение динамического баланса состоит в том, что замкнутой экономике полученный результат производства продукции полностью затрачивается на производство продукции в следующем периоде. Магистраль же строится по следующей формуле:

$$L{*}_t = x^* L{*}_{t-1}$$

Магистраль, которая проходит через точки $L{*}_0$ и $L{*}_t$, как правило не проходит через точку фактического начала $L_*(0)$ и желаемого конечного состояния экономики $L_*(t)$.

Поэтому наилучшая стратегия экономического роста состоит в разделении реальной траектории на три участка. В начальном участке экономика из точки фактического состояния $L_*(0)$ выходит на магистраль, затем она движется по магистрали и на третьем участке выходит в заданную точку состояния экономики $L_*(t)$. В частных случаях участки могут быть нулевыми. Магистраль не зависит от горизонта планирования (числа элементарных отрезков времени). Сформулированные положения доказаны в теоремах о магистрали.

2.4 Стабилизация в окрестности магистрали

[cp1251]inputenc

ГЛАВА 3

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Применение метода MPC к решению задачи об экономическом росте

Рассмотрим задачу (2.14).

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon],$$
$$x(0) = x_0, x \geq 0$$
$$J(x,u) = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1-u(t)) + \ln f(x(t))]dt \to \max.$$

Цель данной главы - применить методы решения ЗОУ(в т.ч. методы MPC) для решения данной задачи. Для решения задачи воспользуемся алгоритмом, который был указан в пунтке 1.3. Рассматривать будем прогнозирующую задачу Лагранжа(п. 1.2), т.е.

$$J(x,u) = \int_0^z e^{-\rho t}[\ln(1-u(t)) + \ln f(x(t))]dt$$

Решение задачи будем искать численно в классе кусочно-постоянных функций, то есть

$$u(t) = u_i, t \in [ih, (i+1)h], i = 0, ..., T-1$$

где $h = z/T$ - период дискретизации, $T \in \mathbb{N}$. T - дискретный горизонт планирования.

Фазовая же переменная x и уравнение для её рассчета изменятся следующим образом:

$$\dot{x}_{i+1} = u_i f(x_i) - \mu x_i$$

В таком случае интегральное слагаемое нашей задачи имеет следующий вид:

$$J(x,u) = \sum_{i=0}^{T-1} \int_{ih}^{(i+1)h} e^{-\rho t}[\ln(1-u_i) + \ln f(x_i)]dt =$$
$$\sum_{i=0}^{T-1} \frac{[\ln(1-u_i) + \ln f(x_i)]}{\rho} \left(e^{-\rho(i+1)h} - e^{-\rho ih}\right)$$

В итоге мы получаем следующую дискретизированую задачу:

$$\dot{x}_{i+1} = u_i f(x_i) - \mu x_i, u_i \in U_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon], x(0) = x_0, x_i \geq 0$$
$$J(x,u) = \textstyle\sum_{i=0}^{T-1} \dfrac{[\ln(1-u_i) + \ln f(x_i)]}{\rho} \left(e^{-\rho(i+1)h} - e^{-\rho i h}\right)$$

Таким образом, задача оптимального управления в классе дискретных управляющих воздействий свелась к задаче нелинейного прогаммирования. Для ее численного решения существует ряд реализованных программно процедур, в частности, в рамках курсовой работы будет использвоаться стандартная процедура fminsearch пакета Matlab.
В качестве производственной функции мы рассматриваем:

$$f(x) = x^\alpha$$

В задаче будем использовать следующие параметры: $T = 10, \alpha = 0.3, \mu = 0.03, \rho = 0.05, \varepsilon = 0.01$.

Решая для устойчивого состояния получим

$$x^* = 6.675, u^* = 0.627$$

Листинг программы

```
[k, c] = mpcsolve(iterationsnum, horizon,...
@(t,k,c)applycontrol(t0,k0,c),...
@(t,k,c)stagecost(t0,k0,c), ...
k0, t0, dt, c0);
%@(t,k,c) nlconstraint(t,dt,k,c,deq));
function x = applycontrol(t0,k0,c)
[~, x] = ode45(@(c,x)deq(c,k0),[t0, t0+1], k0);
x = x(end);
end
function [x, u] = mpcsolve(iterationsnum, horizon,...
applycontrol, stagecost,...
x0, t0, dt,u0)
t = t0;
x = zeros(horizon + 1,iterationsnum);
x(1,1) = x0;
u = zeros(horizon,iterationsnum);
r=u;
for i = 1:iterationsnum
a = x(1,i);
```

```
u(:, i) = fminsearch(@(u)costfun(applycontrol,...
stagecost,a,t,dt,u),u0);
for j = 1:horizon
x(j+1,i) = applycontrol(t + j*dt,x(j,i),u(j,i));
end
x(1,i+1) = x(2,i);
t = t + dt;
end
%x = sum(sum(x))/(iterationsnum*(horizon+1));
end
function [cost] = costfun(applycontrol,...
stagecost, x0,t0,dt,u)
cost = 0;
x = x0;
t = t0;

cost = cost + stagecost(t, x, u);
x = applycontrol(t,x,u);
t = t + dt;

end

function [r] = stagecost(t, k, c)
rho = 0.05;
alpha = 0.3;
l = (log(1 - c) + log(k^alpha))/rho;
r = l*(exp(-rho * (t+1))-exp(-rho * t));
end
function [v] = deq(c,k)
mu = 0.03;
alpha = 0.3;
v = c*k^alpha - mu*k;
end
```

[cp1251]inputenc

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей дипломной работе был проведён обзор метода управления по прогнозирующей модели (MPC).

Рассмотрена неклассическая задача экономического роста с логарифмической функцией мгновенной полезности. Для исследуемой задачи было предложено использование метода управления по прогнозирующей модели. По результатам исследования был построен и запрогромирован алгоритм MPC.

[cp1251]inputenc

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.:Инностранная литература, 1960. – 400 с.

2 Данциг, Д. Линейное программирование, его применения и обобщения / Д. Данциг. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.

3 Дмитрук Н.М., Габасов Р., Калинин А.И. Децентрализованные стратегии в задачах опти-мального управления и стабилизации взаимосвязанных динамических систем: отчет о НИР (заключительный) / НИИ ППМИ; науч. рук. Дмитрук, Н.М. – 71 с.

4 Дмитрук, Н.М. Оптимальное управление взаимосвязанными объектами // В сборнике "Динамика систем и процессы управления Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского". – Изд-во: Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 2015. – С. 147-154.

5 Дмитрук, Н.М. Оптимальное управление мультиагентными динамическими системами в условиях неопределенности / Н.М. Дмитрук // Доклады НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 2. – С. 11-15.

6 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Во Тхи Тань Ха. Оптимальное управление в реальном времени многомерным динамическим объектом // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 121–135.

7 Габасов, Р. Принципы оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 15-18.

8 Габасов, Р. Оптимальное децентрализованное управление динамическими системами в условиях неопределенности / Р. Габасов, Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2011. – Т. 51, № 7. – С. 1209-1227.

9 Габасов, Р. Оптимальное управление динамическим объектом по совершенным измерениям его состояний / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Н.С. Павленок // Докл. Академии наук. – 2012. – Т. 444, № 4. – С. 371-375.

10 Габасов, Р. Оптимальное децентрализованное управление группой динамических объектов / Р. Габасов, Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008. – Т. 48, № 4. – С. 593-609.

11 Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем: Методы функционального анализа. – Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1973.

12 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Павленок Н.С. Оптимальное управление динамическим объектом по совершенным измерениям его состояний // Доклад Академии

13 Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени //Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1992. – Т. 4. – С. 3-19.

14 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костина Е.А. Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления // Автоматика и телемеханика, 1996

15 Габасов Р., Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова. Оптимальное наблюдение за нестационарными системами // Известия РАН. Теория и системы управления. № 3, 2002. С. 35 – 46.

16 Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принципы оптимального управления //Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48. – №. 1. – С. 15-18.

17 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Поясок Е.И. Оптимальное наблюдение в реальном времени линейного динамического объекта // Доклады Академии наук. 2013. Т. 448, № 3. С. 145–148.

18 Габасов Р., Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова. Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Труды Института матема-тики и механики УрО РАН, Т.10, №2, 2004. С. 33-57.

19 Каляев И. А., Гайдук А. Р., Капустян С. Г. Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов //М.: Физматлит. – 2009. – Т. 280.

20 Кириллова, Ф.М. Синтез оптимальных систем – оптимальное управление в реальном времени / Ф.М. Кириллова, Н.М. Дмитрук, Р. Габасов // В сборнике "Динамика систем и процессы управления Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского". – Изд-во: Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 2015. – С. 208-219

21 Кряжимский, А.В. Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы / А.В. Кряжимский, Н.В. Стрелковский// Труды Институт математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т.20, № 3. – С. 132–147.

22 Куржанский, А.Б. Задача управления групповым движением. Общие соотношения / А.Б. Куржанский // Доклады РАН. – 2009. – Т. 426, № 1. – С. 20–25.

23 Куржанский, А.Б. О задаче группового управления в условиях препятствий / А.Б. Куржанский // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 166-179.

24 Малкин И.Г. Теория устойчивости движения – М., Наука, 1966

25 Петрикевич Я. И. Линейные алгоритмы управления геометрическим расположением объектов в многоагентной системе //Управление большими системами: сборник трудов. – 2010. – №. 30-1.

26 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.

27 Сетевые модели в управлении / Сборник статей (под ред. Д.А. Новикова, О.П. Кузнецова, М.В. Губко). – М.: Эгвес, 2011. – 443 с.

28 Фельдбаум А.А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1953. Т. 14, № 5. С. 712–728.

29 Constrained model predictive control: Stability and optimality / D.Q. Mayne [et. al] // Automatica. – 2000. – Vol. 36, no. 6. – P. 789-814.

30 Distributed model predictive control: A tutorial review and future research directions / P.D. Christofides [et. al] // Computers & Chemical Eng. – 2013. – Vol. 51. – P. 21–41.

31 Distributed model predictive control / E. Camponogara [et. al] // IEEE Control Systems Magazine. – 2002. – Vol. 22, no. 1. – P. 44-52.

32 Dmitruk, N.M. Optimal Measurement Feedback Control of Finite-time Continuous Linear Systems / N.M. Dmitruk, R. Findeisen, F. Allgöwer // 17th IFAC World Congress. Seoul, 2008.

33 Dmitruk, N. Robust Optimal Control of Dynamically Decoupled Systems via Distributed Feedbacks / N. Dmitruk // Optimization in the Natural Sciences. Communications in Computer and Information Science. – Springer, 2015. – Vol. 499. – P. 95-106.

34 Farina, M. Distributed predictive control: A non-cooperative algorithm with neighbor-to-neighbor communication for linear systems / M. Farina, R. Scattolini // Automatica. – 2012. – Vol. 48, no. 6. – P. 1088-1096.

35 Grune L., Pannek J. Nonlinear model predictive control. – Springer London, 2011.

36 Gabasov R., Kirillova F. M., Prischepova S. V. Optimal feedback control. – Springer, 1995.

37 Hopkin A.M. A phase plan approach to the compensation of saturating servomechanisms // Trans. AIEE. 1951. Pt. 1, Vol. 70. P. 631–639.

38 Jia, D. Min-max feedback model predictive control for distributed control with communication / D. Jia, B. Krogh // Proc. American Control Conference, 2002. – P. 4507-4512.

39 Karmarkar, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming / N. Karmarkar // Combinatorica. – 1984. – Vol. 4, no. 4. – P. 373-395.

40 Keerthi, S.S. Optimal, ininite horizon feedback laws for a general class of constrained discrete time systems: Stability and moving-horizon approximations / S.S. Keerthi, E.G. Gilbert // Journal of Optimization Theory and Application. – 1988. – Vol. 57, no. 2. – P. 265-293.

41 Keviczky, T. Decentralized receding horizon control for large scale dynamically decoupled systems / T. Keviczky, F. Borrelli, G.J. Balas // Automatica. – 2006. – Vol. 42. – P. 2105-2115.

42 Kostina E., Kostyukova O. Worst-case control policies for (terminal) linear-quadratic control problems under disturbances // Int. J. of Robust and Nonlinear Control, 2009

43 Magni, L. Stabilizing decentralized model predictive control of nonlinear systems / L. Magni, R. Scattolini // Automatica. – 2006. – Vol. 43, no. 7. – P. 1231–1236.

44 Mehrotra, S. On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Method / S. Mehrotra // SIAM Journal on Optimization. – 1992. – Vol. 2. – P. 575–601.

45 Müller, M.A. Cooperative control of dynamically decoupled systems via distributed model predictive control / M.A. Müller, M. Reble, F. Allgöwer // Internat. Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2012. – Vol. 22, no. 12. – P. 1376-1397.

46 Nocedal, J. Numerical Optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. – Springer Series in Operations Research, Springer Verlag, 2006.

47 Rawlings, J.B. Model Predictive Control: Theory and Design / J.B. Rawlings, D.Q. Mayne. – Madison: Nob Hill Publishing, 2009. – 576 p.

48 Richards, A. Robust distributed model predictive control / A. Richards, J.P. How // Internat. Journal of Control. – 2007. – Vol. 80, no. 9. – P. 1517-1531.

49 Scattolini, R. Architectures for distributed and hierarchical model predictive control — a review / R. Scattolini // Journal of Process Control. – 2009. – Vol. 19, no. 5. – P. 723-731.

50 Siljak, D.D. Decentralized control of complex systems / D.D. Siljak. – London: Academic Press, 1991. – 525 p.

51 Trodden, P. Cooperative distributed MPC of linear systems with coupled constraints / P. Trodden, A. Richards // Automatica. – Vol. 49, no. 2. – P. 479–487.

52 Trodden, P. Distributed model predictive control of linear systems with persistent disturbances / P. Trodden, A. Richards // Internat. Journal of Control. – 2010. – Vol. 83, no. 8. – P. 1653-1663.