Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский Государственный Университет

Факультет прикладной математики и информатики Кафедра методов оптимального управления

Курсовая работа

Методы МРС для отслеживания магистралей в динамических задачах экономики

Автор работы: студент (-ка)
3 курса специализации
Экономическая кибернетика ________________________ Н.С.Горошко

Руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент ________________________ Н.М.Дмитрук

Минск 2020

Оглавление

1 Обзор литературы

1.1 Теория управления по прогнозирующей модели

1.2 Задачи оптимального управления

Задачи оптимального управления относятся к теории экстремальных задач, то есть задач определения максимальных и минимальных значений. Задачи эти, как и собственно сама теория оптимального управления, возникла в начале XX-го века в связи с практическими задачами, появившимися из-за развития новой техники в различных областях. Данные экстремальные задачи не укладывались в рамки классического вариационного счисления. В данной главе мы рассмотрим их, используя различные примеры. В целом решение подобных задач можно разбить на два этапа:

1. Постановка задачи
2. Решение с использованием условий оптимальности

Данные пункты содержат в себе сразу несколько подпунктов, так что сейчас мы перейдем от общего к частному.

Постановка задачи

Изначально у нас есть некоторое, условие, однако его недостаточно для решения задачи. Для начала проведем математическую постановку задачи. Она в себя будет включать следующие факторы: математическую модель объекта управления, цель управления, ограничения на траекторию воздействия, управляющее воздействие и его длительность и т.д. Рассмотрим данные факторы подробнее.

Модели объекта

Построение модели зависит от типа рассматриваемой задачи и того, что необходимо в итоге получить. Могут быть использованы различные дифференциальные уравнения: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с последействием, стохастические уравнения, уравнения в частных производных и т.д. Для примера будем использовать обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u), \dot{x}(t) = dx\ dt, t_0 \leq t \leq T \tag{1}$$

$u \in R^m-$управление, $x \in R^n$-фазовый вектор системы, $f \in R^n$-заданная функция, а R^n – евклидово пространство размерность n. Придавая нашему управлению различные значения мы получаем различные состояния объекта, из которых мы и выбираем оптимальное.

Критерий качества

Управление системой (1) осуществляется для достижения некоторых целей, которые формально записываются в терминах минимизации по u функционалов J, определяемых управлением u и траекторией x, где

$$J = \int_{t_0}^{T}(F(t, x(t), u)dt) + \varphi(T, x(T)) \rightarrow min \tag{2}$$

F и φ – заданные скалярные функции. Задача (2) в общем виде называется задачей Больца. При $F = 0$ её называют задачей Майера, а при $\varphi = 0$ – Лагранджа.

Ограничения на траекторию и ограничения на управление

Иногда траектория не может принадлежать какой-либо части пространства R^n. В таких случаях указывают, что $x(t) \in G(t)$,при том,что $G(t)$-заданная область в R^n. В зависимости от типа ограничений выделяют различные классы задач управления, такие как задачи с фиксированными концами, свободным левым либо правым концом. Так же существуют задачи с подвижными концами. Иногда же ограничения имеют интегральный характер и выглядят следующим образом:

$$J = \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u)dt \leq 0$$

Если в задачах (1),(2) начальное и конечное положение задано, моменты начала и конца движения свободны, функция $\varphi = 0$, а $F = 1$, то получаем задачу о переводе системы (1) из начального положения в конечное за минимально возможное время. Далее мы рассмотри ограничения на управление, а после перейдем к примеру. Ограничения могут быть двух типов

- Информационные
- Ограниченность ресурсов управления

Информационные ограничения на управление зависят от того, какая именно информация о системе (1) доступна при выработке управляющего воздействия. Если вектор $x(t)$ недоступен измерению, то оптимальное управление ищется в классе функций $u(t)$, зависящих только от t. В этом случае оптимальное управление называется программным. Если же вектор $x(t)$ известен точно, то оптимальное управление называется синтезом оптимального управления и ищется в классе функционалов $u(t, x_{t_0}^t)$. Здесь $x_{t_0}^t$ – вся траектория движения на отрезке $t_0 \leq s \leq t$. Ограничения, обусловленные ограниченностью ресурсов управления имеют вид $u(t) \in U(t)$,где $U(t)$ заданное множество из R^m.

Условия оптимальности

Принцип максимума

Для начала сформулируем условия оптимальности в общем случае.
Теорема: Пусть $u^0(t), x^0(t), t \in T$, - оптимальные управление и траектория задачи

$$J(u) = \varphi(x(t^*)) + \int_0^{t^*} f_0(x(t), u(t))dt \to min$$

$$\dot{x} = f(x, u), x(0) = x_0 \tag{3}$$

$$x(t^*) \in X^* = \{x \in R^n : h_i \leq 0, i = 1, ..., m_1, h_i(x) = 0, i = m_1 + 1, ..., m\}, u(t) \in U, t \in T = [0, t^*],$$
где $h_i(x)$)-непрерывно дифференцируемые функции, $x \in R^n i = 1, ..., m, m < n$.

Тогда найдутся такие числа $\lambda_i^0, i = 1, ..., m$), что вдоль указанных управления $u^0(t), t \in T$,траектории $x^0(t), t \in T$,и решения $\psi^0(t), t \in T$,сопряженной системы $x(t)^* \in X^*$ выполняются условия:

1. Условие нетривиальности: $\sum_{i=0}^{m}(\lambda_i^0)^2 \neq 0$;
2. Условия неотрицательности: $\lambda_i^0 \geq 0, i = 0, ..., m_1$;
3. Условие максимума: $H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t)) = maxH(x^0(t), \psi^0(t), u(t)), t \in [t, t^*[$, где максимум мы берем по u
4. Условие трансверсальности:

$$\psi^0(t^*) = -\lambda_0^0 \partial\psi(x^0(t^*))\partial x - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^0(\partial h_i(x^0(t^*)))\partial x$$

5. Условия дополняющей нежесткости: $\lambda_i^0 h_i(x^0(t^*)) = 0, i = 1, ..., m_1$.

Чтобы продолжить решение нам необходимо понять, что же такое условие максимума. Сформулируем теорему.
Теорема: Оптимальное управление управление $u^0(t), t \in T$в задаче $J_p(u) = \varphi(x(t^*)) + \int_0^{t^*} f_0(x(t), u(t))dt + \sum_{(i=1)}^m \rho_i h_i^2 x(t^*) \to min, \dot{x} = f(x, u), x(0) = x_0, u(t) \in U, t \in T$, где $\rho_i > 0$– штраф за «единицу» нарушения$h_i^2 x(t^*) = 1$ ограничения $h_i(x) = 0$ вместе с соответствующей траекторией $x^0(t), t \in T$, удовлетворяют условию максимума:$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t)) = \overset{u \in U}{max} H(x^0(t), \psi^0(t), u(t)), t \in [0, t^*[$, где $\psi^0(t), t \in T$ – решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -(\partial H(x(t), \psi, u(t)))/\partial x$ с начальным условием$\psi^0(t^*) = -\partial\varphi(x^0(t^*))/\partial x - \sum_{(i=1)}^m \lambda_i^0(\partial h_i(x^0(t^*)))/\partial x$, в котором $\lambda_i^0 = 2\rho_i h_i x^0(t^*), i = 1, ..., m$. Данные теоремы используются для решения задач оптимального управления, однако не всегда их использование является эффективным.

Метод динамического программирования

Применяя метод динамического программирования, мы изучаем все поле оптимальных траекторий. Для того, чтобы сравнение было наглядным, мы воспользуемся ранее заданной задачей (3). Зафиксируем некоторый произвольный момент времени $t \in [t_0, T]$. Рассмотрим вспомогательную задачу управления на отрезке $[t, T]$. Через $V(t, x)$ обозначим минимальное значение критерия качества во вспомогательной задаче при начальном условии $x(t) = x$, где x – произвольный вектор из R^n. Мы можем предположить, что функция $V(t, x)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\partial V(t, x)/\partial t + \overset{u \in U}{min} f^{'}(t, x, u)\partial V(t, x)/\partial x = 0,$$

$$t_0 \le t \le T, x \in R^n, \tag{4}$$

$$V(T, x) = F(x).$$

Решив данную задачу и определив $V(t, x)$ мы можем найти управление $u(t, x)$ из соотношения:

$$\overset{u \in U}{min} f^{'}(t, x, u)\partial V(t, x)/\partial x = f^{'}(t, x, u(t, x))\partial V(t, x)/\partial x \tag{5}$$

Возможность находить конкретно управление есть характерная черта метода динамического программирования. Она становится особенно важной в условиях отсутствия полной информации. При решении конкретных задач с помощью метода динамического программирования мы решаем нелинейное уравнение в частных производных (4), а так же дополнительно исследуем оптимальное управление, получаемое из уравнения (5).

1.3 Численные и программные методы решения ЗОУ

Численные методы

Здесь будем говорить о четырех численных методах решения задач оптимального управления.

- Метод проекции градиента
- Метод сопряженного градиента
- Метод Ньютона
- Метод штрафных функций

Рассматривать каждый метод мы не будем, а сфокусируемся исключительно на первом

Метод проекции градиента Опишем алгоритм решения для задачи $f(x) \to min, x \in X \subset R^n$, где $f(x)$ - непрерывно дифференцируема, а множество X выпукло, замкнуто и ограничено. Пусть задано начальное приближение $x^0 \in X$ и методом проекции градиента вычислено $x^k \in X$. Следующее приближение вычисляем по формуле

$$x^{k+1} = P_X(x^k - \alpha_k \bigtriangledown f(x^k)), \alpha_k > 0, k = 0, 1, ... \tag{1}$$