**1.2 Задачи оптимального управления**

Задачи оптимального управления относятся к теории экстремальных задач, то есть задач определения максимальных и минимальных значений. Задачи эти, как и собственно сама теория оптимального управления, возникла в начале ХХ-го века в связи с практическими задачами, появившимися из-за развития новой техники в различных областях. Данные экстремальные задачи не укладывались в рамки классического вариационного счисления.  
В данной главе мы рассмотрим их, используя различные примеры. В целом решение подобных задач можно разбить на два этапа:

1. Постановка задачи
2. Решение с использованием условий оптимальности

Данные пункты содержат в себе сразу несколько подпунктов, так что сейчас мы перейдем от общего к частному.

**1.2.1. Постановка задачи оптимального управления**

Изначально у нас есть некоторое, условие, однако его недостаточно для решения задачи. Для начала проведем *математическую постановку задачи.*

Она в себя будет включать следующие факторы: математическую модель объекта управления, цель управления, ограничения на траекторию воздействия, управляющее воздействие и его длительность и т.д. Рассмотрим данные факторы подробнее.

**1.2.1.1 Модели объекта**

Построение модели зависит от типа рассматриваемой нами задачи и того что мы желаем в итоге получить. Могут быть использованы различные дифференциальные уравнения: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с последействием, стохастические уравнения, уравнения в частных производных и т.д.  
Для примера мы будем использовать самое обыкновенное дифференциальное уравнение: **(1)**, где – евклидово пространство размерность *n*. Придавая нашему управлению различные значения мы получаем различные состояния объекта, из которых мы и выбираем оптимальное.

**1.2.1.2 Критерий качества**

Управление системой (1) осуществляется для достижения некоторых целей, которые формально записываются в терминах минимизации по u функционалов J, определяемых управлением u и траекторией х, где

**(2)**

F и φ – заданные скалярные функции. Задача (2) в общем виде называется задачей Больца. При F = 0 её называют задачей Майера, а при φ = 0 – Лагранджа.

**1.2.1.3 Ограничения на траекторию и ограничения на управление**

Иногда траектория не может принадлежать какой-либо части пространства Rn. В таких случаях указывают, что . В зависимости от типа ограничений выделяют различные классы задач управления, такие как задачи с фиксированными концами, свободным левым либо правым концом. Так же существуют задачи с подвижными концами. Иногда же ограничения имеют интегральный характер и выглядят следующим образом:

Если в задачах (1),(2) начальное и конечное положение задано, моменты начала и конца движения свободны, функция φ = 0, а F =1, то получаем задачу о переводе системы (1) из начального положения в конечное за минимально возможное время.  
Далее мы рассмотри ограничения на управление, а после перейдем к примеру.

Ограничения могут быть двух типов

* Информационные
* Ограниченность ресурсов управления

Информационные ограничения на управление зависят от того, какая именно информация о системе (1) доступна при выработке управляющего воздействия. Если вектор x(t) недоступен измерению, то оптимальное управление ищется в классе функций u(t), зависящих только от t. В этом случае оптимальное управление именуется программным. Если же вектор x(t) известен точно, то оптимальное управление называется синтезом оптимального управления и ищется в классе функционалов u(t, ). Здесь – вся траектория движения на отрезке t0 ≤ s ≤ t.

Ограничения, обусловленные ограниченностью ресурсов управления имеют вид .

Рассмотрим классический пример с задачей оптимального по быстродействию управления механическим объектом, которая известна как «задача о тележке».  
Тележку массы m требуется с помощью горизонтальной силы u, не превышающей по модулю величины L, переместить за минимальное время по горизонтальной прямой(без трения) из начального положения А, в котором она имела скорость νн, в конечное положение В, где скорость νк.

Согласно закону Ньютона движение тележки вдоль оси Ох описывается уравнением – ускорение в момент времени t; u = u(t) – величина силы, приложенной в момент t к объекту управления.

Из физической постановки задачи следуют условия на положение x(t) и скорость в начальный (t=0) и конечный (t = t2) моменты времени: . Так же мы считаем, что прилагаемые силы u ограничены |u(t)|≤L; .

Таким образом, математическая модель рассматриваемой задачи состоит в поиске таких момента *t\*0* и кусочно-непрерывной функции *u0(t)*, [0, *t\*0*], ограниченной выше указанными условиями, для которых на соответствующем решении x0(t), [0, *t\*0*] уравнения (3) выполняются заданные условия и минимальна продолжительность переходного процесса.

**1.2.2 Условия оптимальности**

**1.2.2.1 Принцип максимума**

Для начала сформулируем условия оптимальности в общем случае.

**Теорема:** *Пусть - оптимальные управление и траектория задачи*

**(4)**

*.*

*Тогда найдутся такие числа выполняются условия:*

1. *Условие нетривиальности: ;*
2. *Условия неотрицательности: ;*
3. *Условие максимума:*
4. ***Условие трансверсальности***

*;*

1. ***Условия дополняющей нежесткости***

*.*

Чтобы продолжить решение нам необходимо понять, что же такое условие максимума. Сформулируем теорему.  
**Теорема:** *Оптимальное управление , в задаче ,*

*где – штраф за «единицу» нарушения ограничения вместе с соответствующей траекторией , удовлетворяют условию максимума: где – решение сопряженной системы с начальным условием , в котором .*

Данные теоремы используются для решения задач оптимального управления, однако не всегда их использование является эффективным. Существуют так же и другие методы нахождения условий оптимальности. К примеру можно пользоваться *динамическим программированием.*

**1.2.2.2. Метод динамического программирования**