БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МОУ: кафедра методов оптимального управления

Применение методов MPC в экономических задачах

Николай С. Горошко

Содержание

- Теория управления по прогнозирующей модели
- Неоклассическая модель оптимального экономического роста
- Построение магистралей
- Результаты численного эксперимента

Цели

Применить методы MPC для решения задачи оптимального управления для неоклассической модели экономического роста. Сравнить результаты при использовании различных критериев.

Теория управления по прогнозирующей модели

МОУ: кафедра методов оптимального управления

Управление по прогнозирующей модели (далее MPC, от англ. Model Predictive Control) — это продвинутый метод управления процессами, который используется для соответствующего набора ограничений.

Неоклассическая модель оптимального экономического роста

МОУ: кафедра методов оптимального управления

Начальные условия

$$J(K, L, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1 - u(t)) + \ln F(K(t), L(t))]dt \to \max$$

$$\dot{K}(t) = u(t)F(K(t), L(t)), \qquad u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon],$$

$$\dot{L}(t) = \mu L(t),$$

$$K(0) = K_0, L(0) = L_0,$$

Условия к которым перешли в результате преобразований

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))]dt \to \max .$$

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon],$$

$$x(0) = x_0$$

Построение магистралей

Формулы для нахождения магистральных значений

$$\frac{d}{dx}f(x) = \rho + \mu$$

$$\hat{p} = \frac{1}{f(\hat{x}) - \mu\hat{x}}$$

$$\hat{u} = \frac{\mu\hat{x}}{f(\hat{x})}$$

С критерием типа Лагранжа (Базовый EMPC без дополнительных ограничений)

$$J(x,u) = \int_{\tau}^{\tau+z} e^{-\rho t}[\ln(1-u(t)) + \ln f(x(t))]dt \qquad (1)$$

$$u(t) = u_i, t \in [ih, (i+1)h], i = 0, ..., T-1; x_{i+1} = u_i f(x_i) - \mu x_i$$

$$J(x,u) = \sum_{i=0}^{T-1} \int_{ih}^{(i+1)h} e^{-\rho t}[\ln(1-u_i) + \ln f(x_i)]dt =$$

$$\sum_{i=0}^{T-1} \frac{[\ln(1-u_i) + \ln f(x_i)]}{-\rho} \left(e^{-\rho(i+1)h} - e^{-\rho ih}\right)$$

$$J(x,u) = \sum_{i=0}^{T-1} \frac{[\ln(1-u_i) + \ln f(x_i)]}{-\rho} \left(e^{-\rho(i+1)h} - e^{-\rho ih}\right) \qquad (2)$$

$$x_{i+1} = u_i f(x_i) - \mu x_i, u_i \in U_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon], x(0) = x_0, x_i \geq 0$$

EMPC с терминальным ограничением-равенством

$$J(x,u) = \sum_{i=0}^{T-1} \frac{[\ln(1-u_i) + \ln f(x_i)]}{-\rho} \left(e^{-\rho(i+1)h} - e^{-\rho i h}\right)$$

$$x_{i+1} = u_i f(x_i) - \mu x_i, u_i \in U_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon], x(0) = x_0, x(\tau + z) = \hat{x}, x_i \geq 0$$

С критерием типа Майера

$$J(x,u) = W(x(\tau+z)) + \int_{\tau}^{\tau+z} L(x(t),u(t))dt \to \max\,. \tag{3}$$

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), u(t) \in U_{\varepsilon} = [0, 1-\varepsilon],$$

$$x_0 = x(0).$$

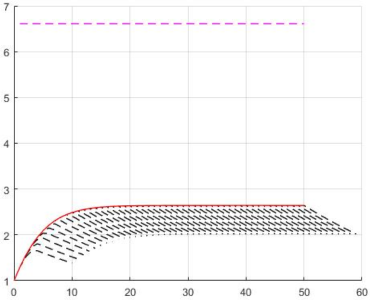
$$W(x, \tau+z) = e^{-\rho(\tau+z)}\hat{p}x$$

$$J(x,u) = e^{-\rho(\tau+z)}\hat{p}x + \int_{0}^{\infty} e^{-\rho t}[\ln(1-u(t)) + \ln f(x(t))]dt \to \max, \tag{4}$$

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), u(t) \in U_{\varepsilon} = [0, 1-\varepsilon],$$

$$x(0) = x_0, x \geq 0$$

Результаты численного эксперимента 1



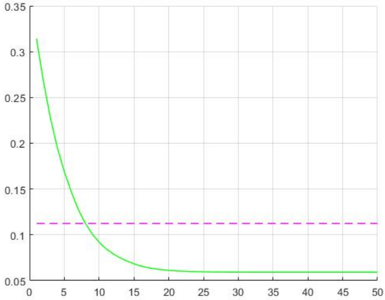


Рис.: Траектории x и u при $z = 10$

Результаты численного эксперимента 2

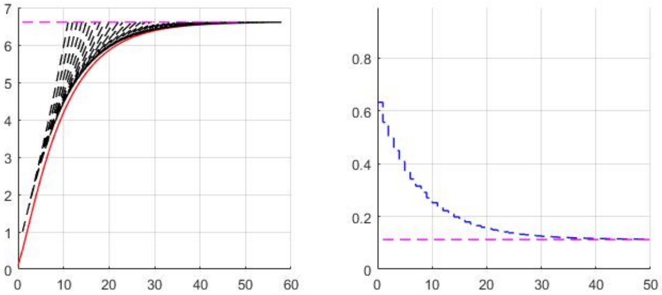
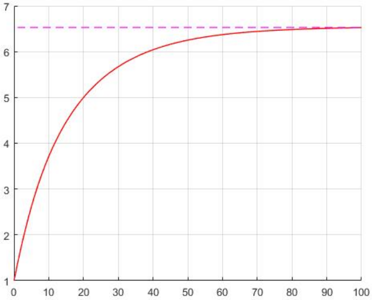


Рис.: Траектории x и u при $z = 10$

Результаты численного эксперимента 3



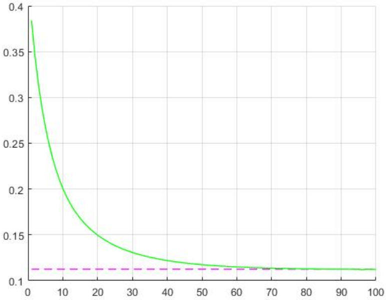


Рис.: Траектории x и u при $z = 10$

Анализ

Метод первый - слишком большой горизонт планирования для достижения магистральных значений.
Метод второй - повышенная трудоемкость и недопустимость некоторых начальных условий.
Метод третий - имеет решение при любом горизонте, даже самом малом (в отличие от предыдущего метода).

Вывод

Наиболее выгодным является третий метод, т.е. с использованием критерия типа Майера (с терминальной стоимостью)