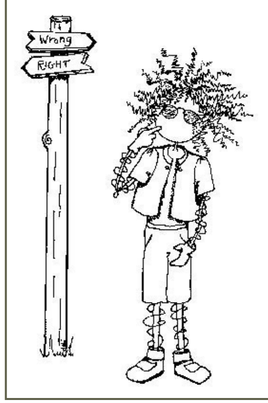
PREDIKAATLOGICA: SEMANTIEK

VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL

SEMANTIEK

- Inhoud:
  - Principe
  - Situatie of structuur
  - Interpretatiefunctie
  - Model
  - Bedeling
  - Waardering
  - Model van een formule
  - Gelijkheid tussen termen, universeel geldig, logisch equivalent
  - Geldig gevolg
  - Theorie en Modelverzameling

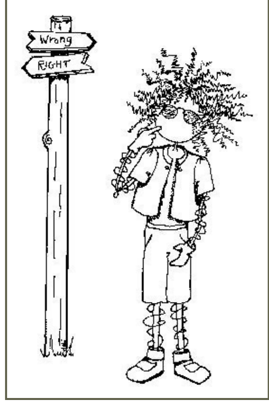
SEMANTIEK - PRINCIPE



- Drie aspecten zijn belangrijk bij de bestudering van de semantiek van predikaatlogica:

De interpretatiefunctie geeft betekenis aan de bouwstenen van de taal (predikaatletters, functieletters, constanten, variabelen).

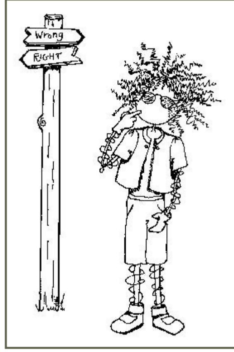
Bv. $\forall x\, P(x, a) \longrightarrow$ Alle mensen jonger dan 25



Alle 3 de aspecten zijn essentieel

- vergelijking met natuurlijke taal
  - Stel tekst gekend en woordenboek (interpretatiefunctie), maar niet de situatie
    - We kunnen niet weten of wat gezegd wordt waar is
  - Stel tekst gekend en de situatie, maar geen woordenboek (interpretatiefunctie)
    - We kunnen niet weten of wat gezegd wordt waar is
  - Stel een woordenboek (de interpretatiefunctie) en de situatie, maar niet de tekst
    - We weten niet wat er gezegd werd.

SEMANTIEK: STRUCTUUR



Structuur is te vergelijken met een stukje werkelijkheid

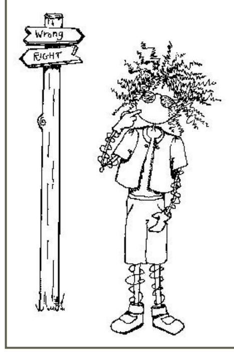
Een structuur bestaat uit een domein waarop relaties en operaties of functies gedefinieerd zijn.

- *Voorbeeld*:
  - domein: de natuurlijke getallen IN
  - relaties: < , =
  - operaties: + , *

Informeel:

- Relaties tussen de objecten in het domein corresponderen met beweringen (vb. 5 < 10)
- Operaties op objecten leveren andere objecten op vb. 8 + 2 is 10)

SEMANTIEK: STRUCTUUR - DEFINITIE



Definitie

Een structuur ***D*** is een drietal ⟨*D*, ***R***, ***O***⟩ bestaande uit een **niet-lege** verzameling *D* (het domein), een verzameling ***R*** van relaties **op** *D* en een verzameling ***O*** van operaties **op** *D*.

INTERMEZZO: SPECIALE STRUCTUREN

Speciale structuren:

Relationele structuur: enkel relaties, geen operaties

vb.: lineaire ordeningen, bomen, grafen, …

Voorbeeld:

D = {1, 2, 3, 4, 5} met de relatie R ‘kleiner dan’

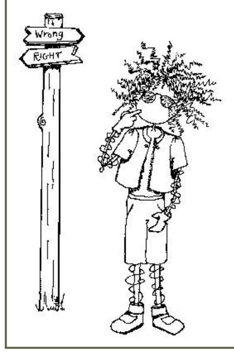
R= {(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5) }

Operationele structuur: domein met enkel operaties

vb. uit de wiskunde :

groepen : (Z,+) , (Q \{0}, .) , ringen (R, +, .)

SEMANTIEK: INTERPRETATIEFUNCTIE



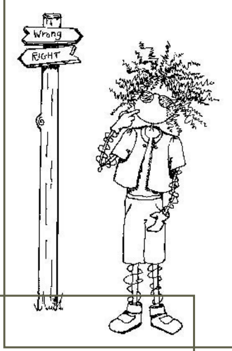
– Om een formule te kunnen interpreteren is er een interpretatie van variabelen, constanten, predikaatletters en functieletters nodig

Definitie

Laat $\boldsymbol{D} = \langle D, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{O} \rangle$ een structuur zijn.

Een **interpretatiefunctie** I kent aan

- elke individuele constante c uit de predikaat logische taal een welbepaald object uit D toe via een nul-plaatsige operatie, $I(c) \in \boldsymbol{O}$
- elke predikaatletter P een relatie uit $\boldsymbol{R}$ van dezelfde plaatsigheid toe, $I(P) \in \boldsymbol{R}$
- elke functieletter f een operatie uit $\boldsymbol{O}$ van dezelfde plaatsigheid toe, $I(f) \in \boldsymbol{O}$



SEMANTIEK: MODEL

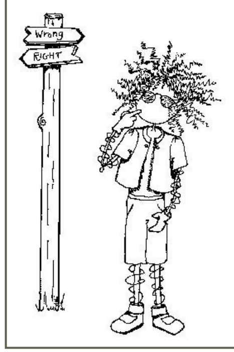
Definitie
Een paar (***D***, *I*) met ***D*** een structuur en *I* een interpretatiefunctie heet een **model**

Een (on)eindig model is een model met een (on)eindig domein.

- Voorbeeld:
  $\boldsymbol{D} = \langle \mathbb{N}, \{\geq\}, \{0\}\rangle$
  $I(R) = \geq$
  $I(c_1) = 0$

  $I(\forall x\ R(x, c_1)) = \forall x\ (x \geq 0)$

  Dus in dit model is de zin $\forall x\ R(x, c_1)$ waar



SEMANTIEK: BEDELING

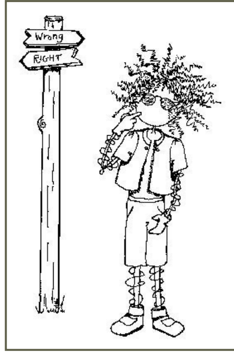
> *Definitie*
>
> Een **bedeling** b is een functie die aan **elke variabele** x een object uit het domein toekent, dus $b(x) \in D$.

– Voorbeeld: Model $M = (\langle D, \mathbf{R}, \mathbf{O}\rangle, I)$ met
$D = \mathcal{N}$, $\mathbf{R} = \{<\}$, $\mathbf{O} = \{0,+,\cdot\}$
I: $I(P) = <$, $I(f) = +$, $I(g) = \cdot$, $I(a) = 0$
b: $b(x_i) = i$ $\qquad (i = 1,2,3,\ldots)$

$$Px_1x_2 \wedge Pf(a,x_9)g(x_5,x_9) \xrightarrow{b,I} 1 < 2 \text{ en } 9 < 45$$

Opm: bedeling is gedefinieerd voor alle variabelen, niet enkel voor vrije variabelen !

NOTATIE - AFSPRAKEN

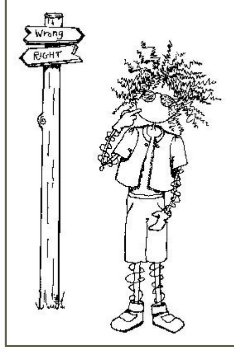


Notatie:
$\langle\, \boldsymbol{N}, \{<,=\},\{0,1,+,\cdot\}\rangle$ ook als $\langle\, \boldsymbol{N},<,=,0,1,+,\cdot\,\rangle$ wanneer duidelijk is wat de relaties zijn en wat de operaties zijn.
Zo ook: P i.p.v. $I(P)$ en f i.p.v. $I(f)$

$b[x \mapsto d]$ is de bedeling b waarbij d aan de variabele x wordt toebedeeld.

- Vben: b: $b(x_i) = i$ $(i = 1,2,3,\ldots)$
  $b[x_1 \mapsto 10](x_1) = 10$
  $b[x_1 \mapsto 10](x_2) = 2$

WAARDERING VAN TERMEN



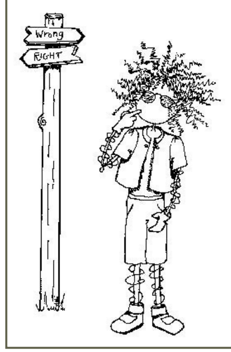
Definitie

Laat $M = (\boldsymbol{D}, I)$ een model zijn en b een bedeling.

Dan is de semantische waardering $V_{M,b}$ van *termen* als volgt gedefinieerd:

- $V_{M,b}(x) = b(x)$ voor variabelen x
- $V_{M,b}(a) = I(a)$ voor constanten a
- $V_{M,b}(f(t_1,\ldots,t_k)) = I(f)(V_{M,b}(t_1),\ldots, V_{M,b}(t_k))$

WAARDERING VAN TERMEN



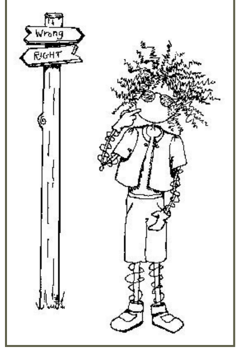
Voorbeeld

Laat M een model zijn met $\boldsymbol{D} = \langle \mathbf{N}, 0, + \rangle$ en $I(f) = $ '+', $I(a) = 0$

b een bedeling waarbij $b(x)=1$

Dan geldt:

$$
\begin{aligned}
V_{M,b}(f(a,x)) &= I(f)(V_{M,b}(a),\ V_{M,b}(x)) \\
&= I(f)(I(a),\ b(x)) \\
&= +(0,1) = 1
\end{aligned}
$$



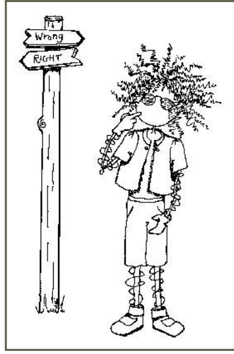
WAARDERING VAN FORMULES

Net als in propositielogica is de interpretatie (semantiek) van een formule een waarheidswaarde: waar (1) of onwaar(0)

Definitie

Laat $M = (\boldsymbol{D}, I)$ een model zijn en b een bedeling.
De waarheidswaarden van formules zijn als volgt gedefinieerd:

- $V_{M,b}(P(t_1,\ldots,t_m)) = 1$ desda $I(P)(V_{M,b}(t_1),\ldots, V_{M,b}(t_m))$ geldt
- $V_{M,b}(\neg\varphi) = 1$ desda $V_{M,b}(\varphi) = 0$
  idem als in propositielogica voor $\varphi\wedge\psi$, $\varphi\vee\psi$, $\varphi\rightarrow\psi$ en $\varphi\leftrightarrow\psi$.
- $V_{M,b}(\exists x\ \varphi) = 1$ desda *er is een* $d \in D$ zodat $V_{M,b[x\mapsto d]}(\varphi) = 1$
- $V_{M,b}(\forall x\ \varphi) = 1$ desda *voor alle* $d \in D$ geldt $V_{M,b[x\mapsto d]}(\varphi) = 1$



INTUITIEF

Een atomaire formule is waar in een structuur, als het feit dat wordt uitgedrukt inderdaad waar is in de structuur

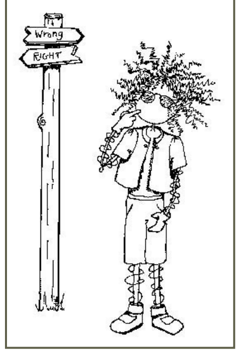
- Voorbeeld: $I(P)$= '<', $b(x)$=2 en $b(y)$=7 dan is Pxy waar in $\langle \boldsymbol{N}, < \rangle$
  nl, $2 < 7$ geldt in $\boldsymbol{N}$

Eén formule φ kan in verschillende structuren heel verschillende beweringen uitdrukken.

Bij gegeven φ en één structuur ***D*** kunnen verschillende interpretatiefuncties aan φ een andere waarheidswaarde geven

- Voorbeeld: $\forall x \, \forall y \, (f(x,y) = f(y,x))$ is waar op Q en $\boldsymbol{N}$ zowel met $I(f)$ = '+' als met $I(f)$ = ' $\cdot$ ' maar onwaar met $I(f)$ = -

MODEL VAN EEN FORMULE



Notatie

- $V_{M,b}(\varphi) = 1$ — φ is waar in M onder b
- $V(\varphi)$ ipv $V_{M,b}(\varphi)$ — als geen verwarring mogelijk
- $V_{M,b}(\varphi) = 1$ — $M,b \models \varphi$ of $M \models \varphi[b]$
- $V_{M,b}(\varphi) = 0$ — $M,b \not\models \varphi$ of $M \not\models \varphi[b]$

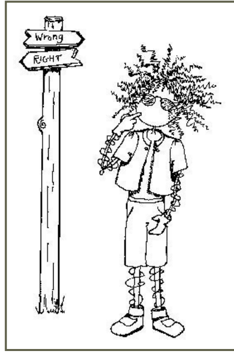
Definitie

Een paar M=(***D***,*I*) met structuur ***D*** en interpretatiefunctie *I* heet een model van een formule φ als voor iedere bedeling b geldt:

$$V_{M,b}(\varphi) = 1$$

SEMANTIEK - VOORBEELD

- $V_{M,b}(P(t_1,\ldots,t_m)) = 1$ desda $I(P)(V_{M,b}(t_1),\ldots, V_{M,b}(t_m))$ geldt
- $V_{M,b}(\neg\varphi) = 1$ desda $V_{M,b}(\varphi) = 0$
  idem als in propositielogica voor $\varphi\wedge\psi$, $\varphi\vee\psi$, $\varphi\rightarrow\psi$ en $\varphi\leftrightarrow\psi$.
- $V_{M,b}(\exists x\ \varphi) = 1$ desda *er is een* $d \in D$ zodat $V_{M,b[x\mapsto d]}(\varphi) = 1$
- $V_{M,b}(\forall x\ \varphi) = 1$ desda *voor alle* $d \in D$ geldt $V_{M,b[x\mapsto d]}(\varphi) = 1$



<u>Voorbeeld</u>

M model met $\boldsymbol{D}= \langle Q,< \rangle$ en $I(R)$ = '<'.

b een bedeling waarbij $b(x_1) = 4$

Dan $V_{M,b}(\forall y(Rx_1y\rightarrow\exists z\ (Rx_1z \wedge Rzy))) = 1$ (waar)

desda voor alle $q \in Q$: $V_{M,b[y\mapsto q]}\ (Rx_1y\rightarrow\exists z\ (Rx_1z \wedge Rzy)) = 1$

desda voor alle $q \in Q$: als $V_{M,b[y\mapsto q]}\ (Rx_1y) = 1$ dan $V_{M,b[y\mapsto q]}(\exists z\ (Rx_1z \wedge Rzy))) = 1$

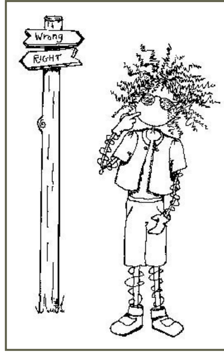
desda voor alle $q \in Q$: als $4 < q$,
dan is er een $q' \in Q$: $V_{M,b[y\mapsto q,\ z\mapsto q']}((Rx_1z \wedge Rzy)) = 1$

desda voor alle $q \in Q$: als $4 < q$,
dan is er een $q' \in Q$: $V_{M,b[y\mapsto q,\ z\mapsto q']}(Rx_1z) = 1$
en $V_{M,b[y\mapsto q,\ z\mapsto q']}(Rzy) = 1$

desda voor alle q :$\in Q$ als $4 < q$,
dan is er een $q' \in$ Q met $4 < q'$ en $q' < q$

Is waar in D = $\langle Q,< \rangle$

Opm Rxy als verkorte versie van $R^2(x,y)$



GELIJKHEID VAN TERMEN

De gelijkheidsrelatie (‘=“) is niet standaard gedefinieerd in de taal:

Indien nodig: expliciet te definiëren; alsook de semantiek ervan.

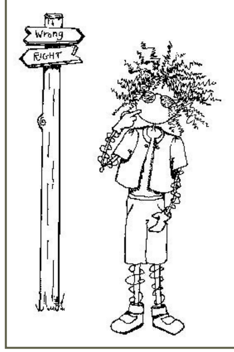
Voorbeeld definitie gelijkheid tussen termen:

$V_{M,b}(t_1 = t_2) = 1$ desda $V_{M,b}(t_1) = V_{M,b}(t_2)$

Gelijkheid hier is gebaseerd op de identiteit tussen objecten in het domein

$V_{M,b}(f(a,x)) = V_{M,b}(f(x,a))$ als f een commutatieve functie

SEMANTIEK – EIGENSCHAPPEN



Eigenschap van de waarheidsfunctie:

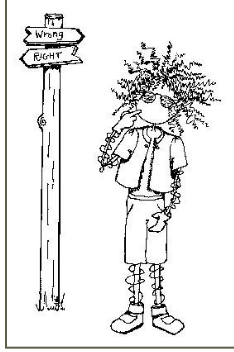
Waarheidswaarde van een formule hangt af van de structuur ***D***, de interpretatiefunctie *I* en van het effect van de bedeling *b* op de vrije variabelen in die formule (en dus niet van de bedeling van de gebonden variabelen).

Dit is gebaseerd op de volgende bewering:

Bewering:

Als een formule φ vrije variabelen $x_1,\ldots,x_k$ bevat en er zijn 2 bedelingen b_1 en b_2 met $b_1(x_i) = b_2(x_i)$, voor $i = 1,\ldots,k$, dan geldt $V_{M,b1}(\varphi) = V_{M,b2}(\varphi)$

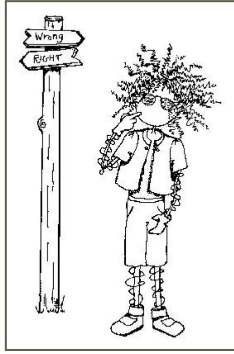
SEMANTIEK – EIGENSCHAPPEN



Gevolg:

- Voor zinnen (gesloten formules) zijn er geen vrije variabelen, dus doet de bedeling er niet toe.
- Voor zinnen spreken we dus over waarheid en onwaarheid in een model.

SUBSTITUTIE – EIGENSCHAPPEN



Bewering

Substitutie

Voor alle termen t, t' geldt:

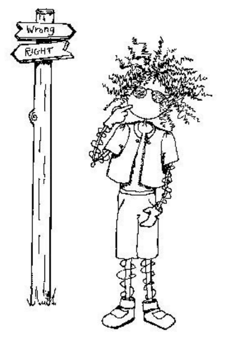
$$V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t')$$

Links: eerst substitueren en dan de waarde van t' bepalen

Rechts: waarde van t' berekenen en we bedelen de waardering van t aan x

Dus wat betreft de waardering is substitutie in een term hetzelfde als substitutie in de bedeling.

SUBSTITUTIE – EIGENSCHAPPEN



- $V_{M,b}(x) = b(x)$ voor variabelen x
- $V_{M,b}(a) = I(a)$ voor constanten a
- $V_{M,b}(f(t_1,\ldots,t_k)) = I(f)(V_{M,b}(t_1),\ldots, V_{M,b}(t_k))$

$$V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t')$$

Voorbeeld:

Als $t' = f(x,y)$ en $t = a$ dan

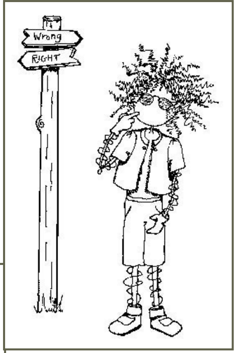
$$\begin{aligned} V_{M,b}([a/x]f(x,y)) &= V_{M,b}(f(a,y)) \\ &= I(f)(V_{M,b}(a), V_{M,b}(y)) \\ &= I(f)(I(a), b(y))) \end{aligned}$$

Anderzijds:

$$\begin{aligned} V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(a)]}(f(x,y)) &= I(f)(V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(a)]}(x), V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(a)]}(y)) \\ &= I(f)(V_{M,b}(a), b(y)) \\ &= I(f)(I(a), b(y)) \end{aligned}$$

Bewijs later.

GELDIG GEVOLG



Definitie

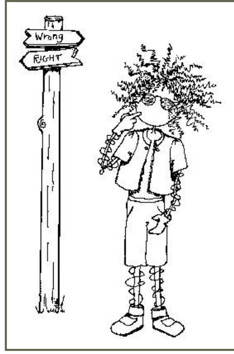
Geldig gevolg:

Laat Σ een verzameling formules zijn en ψ een formule, dan ψ volgt uit Σ, $\Sigma \models \psi$, desda:

voor elk model M en elke bedeling b geldt:
als voor elke $\varphi \in \Sigma$ geldt dat $V_{M,b}(\varphi) = 1$
dan ook $V_{M,b}(\psi) = 1$

- Opmerking: oneindig veel mogelijkheden voor M en b !!

SEMANTIEK



Def. Een formule ψ heet **universeel geldig** als $\models \psi$

▶ Intuïtief: Een universeel geldige formule is waar in alle modellen *M* en onder iedere bedeling *b*

Def. Twee formules φ en ψ heten **logisch equivalent** als

$$\models \varphi \leftrightarrow \psi$$

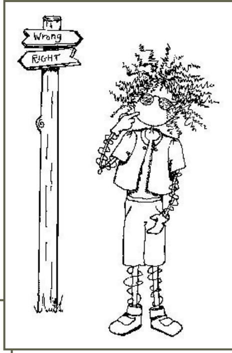
Voorbeelden:

$$\forall x\,(Rx \rightarrow Px),\ \exists x\,Rx \models \exists x\,Px$$

$$\models Ta \rightarrow \exists x\,Tx$$

$$\models \forall x\,Rx \leftrightarrow \neg\exists x \neg Rx$$

THEORIE



Definitie

$\{\varphi \mid \varphi$ is een zin en $V_M(\varphi) = 1\}$ is een **theorie voor een model *M***

Notatie Th(M)

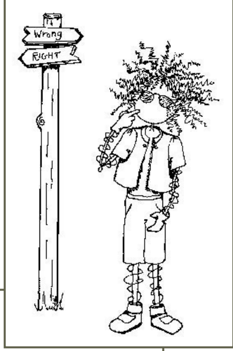
- Intuïtief: De verzameling van ware zinnen is een theorie voor M
- We kunnen een theorie ook weergeven door axioma's

Definitie

Axiomaverzameling voor een model *M*

Een formuleverzameling Σ axiomatiseert een theorie $Th(M)$ als voor alle zinnen φ geldt: $\varphi \in Th(M)$ desda $\Sigma \models \varphi$

- Een goede axiomatisering geeft de essentiële kenmerken van het model weer.



MODELVERZAMELING

Definitie

Modelverzameling voor de zin φ, *MOD*(φ), is

$$\{M \mid V_M(\varphi) = 1\}$$

Modelverzameling voor de verzameling zinnen Σ, *MOD*(Σ), is

$$\{M \mid V_M(\varphi) = 1 \text{ voor alle } \varphi \in \Sigma\}$$

MOD is verzameling van modellen die de zin, resp. een verzameling zinnen, waar maakt.

PREDIKAATLOGICA: SEMANTISCHE TABLEAUS

VRIJE
UNIVERSITEIT
BRUSSEL

Zoals in de propositielogica kunnen we semantische tableaus gebruiken om de geldigheid van een gevolgtrekking te testen

Hoofdidee:

- zoeken van een tegenvoorbeeld voor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ o ψ

Let op: tegenvoorbeeld in predikaatlogica is

- Er bestaat een model en een bedeling die $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ waar maakt en ψ onwaar
  - Dus structuur (domein), interpretatiefunctie en bedeling nodig.

SEMANTISCHE TABLEAUS

- Regels en techniek van de propositielogica zijn uitgebreid naar de predikaatlogica:
  - Bijkomende reductieregels voor de kwantoren $\forall$ en $\exists$
  - Gaandeweg construeren van een domein D
  - Bijhouden van de interpretatiefunctie I en de bedeling b
  - De reductieregels voor de connectieven blijven van kracht

- In deze cursus:
  - geen functieletters in de formules
  - Gevolgtrekkingen zonder constanten en zonder vrije variabelen (anders veel ingewikkelder).

SEMANTISCHE TABLEAUS

Voorbeeld

- Geldige gevolgtrekking:
  $\forall x(Ax \to Bx)$, $\forall x(Bx \to Cx)$ / $\forall x(Ax \to Cx)$
  $\varphi_1 = Ax \to Bx$, $\varphi_2 = Bx \to Cx$

Nodig: Minstens 1 element in het domein die de bewering onwaar maakt

Universele formules moeten waar zijn voor elk element in het domein, dus ook voor d_1

$$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2 \circ \forall x(Ax \to Cx)$$

$$\forall_R$$

$$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2 \circ Ad_1 \to Cd_1 \quad (1)\ D = \{d_1\}$$

$$\to_R$$

$$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Ad_1 \circ Cd_1 \quad (1)\ D = \{d_1\}$$

$$\forall_L$$

$$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Ad_1 \to Bd_1, Ad_1 \circ Cd_1 \quad (1)\ D = \{d_1\}$$

$$(2)\ \forall x\varphi_1 : \{d_1\}$$

Blijft staan als herinnering

Constructie van het domein

SEMANTISCHE TABLEAUS

$$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Ad_1 \rightarrow Bd_1, Ad_1 \circ Cd_1 \qquad (1)\ D = \{d_1\} \quad (2)\ \forall x\varphi_1{:}\{d_1\}$$

$$\rightarrow_L$$

$$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Bd_1, Ad_1 \circ Cd_1 \qquad (1)\ D = \{d_1\} \quad (2)\ \forall x\varphi_1{:}\{d_1\}$$

$$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Ad_1 \circ Ad_1, Cd_1 \qquad (1)\ D = \{d_1\} \quad (2)\ \forall x\varphi_1{:}\{d_1\} \qquad =$$

$$\forall_L$$

$$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Bd_1 \rightarrow Cd_1, Bd_1, Ad_1 \circ Cd_1 \qquad (1)\ D = \{d_1\} \quad (2)\ \forall x\varphi_1{:}\{d_1\} \quad (3)\ \forall x\varphi_2{:}\{d_1\}$$

$$\rightarrow_L$$

$$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Cd_1, Bd_1, Ad_1 \circ Cd_1 \qquad (1)\ D = \{d_1\} \quad (2)\ \forall x\varphi_1{:}\{d_1\} \quad (3)\ \forall x\varphi_2{:}\{d_1\} \qquad =$$

$$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Bd_1, Ad_1 \circ Bd_1, Cd_1 \qquad (1)\ D = \{d_1\} \quad (2)\ \forall x\varphi_1{:}\{d_1\} \quad (3)\ \forall x\varphi_2{:}\{d_1\} \qquad =$$

Tableau is gesloten!

Extra reductieregels:

$$\forall_R : \quad \dfrac{\Phi \circ \forall x \varphi, \Psi}{\Phi \circ [d_{k+1}/x]\varphi, \Psi} \qquad \begin{array}{ll} (1) & D = \{d_1, \cdots, d_k\} \\ (2) & \cdots\cdots \\ (1) & D = \{d_1, \cdots, d_k, d_{k+1}\} \\ (2) & \cdots \text{idem} \cdots \end{array}$$

Nieuw element

– Om $\forall x\ \varphi$ onwaar te maken, moet **er minstens 1 object** in D zijn zodat $[d/x]\ \varphi$ onwaar is. We voeren daarom d_{k+1} in

– Achtereenvolgens toepassen van $\forall_R$ zorgt dat het domein langzamerhand wordt opgebouwd.

SEMANTISCHE TABLEAUS - REGELS

$\forall_L$:

$$\begin{array}{c} \Phi, \forall x\varphi \circ \Psi \\ | \\ \Phi, \forall x\varphi, [d_1/x]\varphi, \cdots, [d_k/x]\varphi \circ \Psi \end{array}$$

(1) $\{d_1, \cdots, d_k\}$

(2) $\cdots\cdots$

(1) $\{d_1, \cdots, d_k\}$

(2) $\forall x\varphi : \{d_1, \cdots, d_k\}$

$\cdots$idem$\cdots$

Om $\forall x\ \varphi$ waar te maken, moet $[d/x]\ \varphi$ waar zijn **voor alle** objecten die tijdens de constructie in het domein terecht komen.

- Dit vereist het "invullen" voor elk object uit het geconstrueerde domein.

Moet ook terug gebeuren als er later nog nieuwe elementen aan het domein worden toegevoegd !!!

SEMANTISCHE TABLEAUS

$\exists_L$:

$$\Phi, \exists x\, \varphi \circ \Psi$$

(1) $\{d_1, \cdots, d_k\}$

(2) $\cdots\cdots$

$$\Phi, [d_{k+1}/x]\varphi \circ \Psi$$

(1) $\{d_1, \cdots, d_k, d_{k+1}\}$

(2) $\cdots \text{idem} \cdots$

$\exists_R$:

$$\Phi \circ \exists x\, \varphi, \Psi$$

(1) $\{d_1, \cdots, d_k\}$

(2) $\cdots\cdots$

$$\Phi \circ [d_1/x]\varphi, \cdots, [d_k/x]\varphi, \exists x\, \varphi, \Psi$$

(1) $\{d_1, \cdots, d_k\}$

(2) $\exists x \varphi : \{d_1, \cdots, d_k\}$

$\cdots \text{idem} \cdots$