Oplossingen Oefeningen Grondslagen 1: Propositielogica: Semantiek II

Oefening 20

a) Het vak Grondslagen van de Informatica I heette vroeger Formele Methoden.

- b = “veel blokwerk”
- s = “slechte assistent”
- m = “moeilijk vak”
- p = “plezant”

(a) Als Formele Methoden veel blokwerk is, of een slechte assistent heeft, dan is het een moeilijk vak. $\varphi_1 = (b \vee s) \to m$

(b) Als Formele Methoden plezant is, heeft het geen slechte assistent. $\varphi_2 = p \to \neg s$

(c) Als Formele Methoden veel blokwerk is, of als het geen slechte assistent heeft, dan is het een plezant vak. $\varphi_3 = (b \vee \neg s) \to p$

(d) Formele Methoden is plezant enkel en alleen als er veel blokwerk aan is. Bovendien doet de assistent het fantastisch. $\varphi_4 = (p \leftrightarrow b) \wedge \neg s$

b	s	m	p	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0	0	0	0	1	1	0	-
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	-
0	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	-	-	-
0	1	0	1	0	-	-	-
0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	-	-
1	0	0	0	0	-	-	-
1	0	0	1	0	-	-	-
1	0	1	0	1	1	0	-
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	-	-	-
1	1	0	1	0	-	-	-
1	1	1	0	1	1	0	-
1	1	1	1	1	0	-	-

Oftewel, Formele Methoden vergt veel blokwerk, heeft geen slechte assistent, is moeilijk en is plezant.

b)
- i = “je bist”
- u = “je was gebuisd”
- t = “je ging veel naar TD”

(a) Als je bist, dan was je gebuisd: $\varphi_1 = i \to u$

(b) Als je gebuisd was, dan ging je niet veel naar TD: $\varphi_2 = u \to \neg t$

(c) Als je bist of gebuisd was, dan ging je naar TD: $\varphi_3 = (i \vee u) \to t$

(d) Als je niet bist, dan ging je veel naar TD: $\varphi_4 = \neg i \to t$

i	u	t	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	-
0	1	1	1	0	-	-
1	0	0	0	-	-	-
1	0	1	0	-	-	-
1	1	0	1	1	0	-
1	1	1	1	0	-	-

Conclusie: $V(i) = 0$, $V(u) = 0$, $V(t) = 1$

Oftewel: Je bist niet, je was niet gebuisd, je ging veel naar TD.

Oefening 21

a) $\varphi = ((p \to q) \wedge (q \to p)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \Rightarrow$ Tautologie

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	φ
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

b) $\varphi = (((p \wedge q) \vee (r \wedge s)) \wedge \neg r) \Rightarrow$ Noch tautologie, noch contradictie

p	q	r	s	$p \wedge q$	$r \wedge s$	$\neg r$	$(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$	φ
0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	1	0

c) $\varphi = (p \wedge \neg p) \wedge r \Rightarrow$ Contradictie

p	r	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	φ
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0

Oefening 22

a) $p \wedge q$ en $p \to q \Rightarrow$ Niet equivalent

p	q	$p \wedge q$	$p \to q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

b) $p \to (q \to r)$ en $(p \to q) \to (p \to r) \Rightarrow$ Equivalent

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \to (p \to r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

c) $((p \vee \neg p) \to q) \to ((p \vee \neg p) \to r)$ en $q \to r$ Waar (i) $= (p \vee \neg p) \to q$ en (ii) $= (p \vee \neg p) \to r \Rightarrow$ Equivalent

p	q	r	$\neg p$	$p \vee \neg p$	(i)	(ii)	$(i) \to (ii)$	$q \to r$
0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1

Oefening 23

- NOR

  1. Toon aan dat $p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$

p	q	$p \downarrow q$	$\neg(p \vee q)$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

  2. – $\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha \downarrow \alpha$
     – $\alpha \vee \beta \Leftrightarrow (\alpha \downarrow \beta) \downarrow (\alpha \downarrow \beta)$
     – $\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow (\alpha \downarrow \alpha) \downarrow (\beta \downarrow \beta)$
     – $\alpha \to \beta \Leftrightarrow ((\alpha \downarrow \alpha) \downarrow \beta) \downarrow ((\alpha \downarrow \alpha) \downarrow \beta)$

- NAND

- Toon aan dat $p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$

p	q	$p \uparrow q$	$\neg(p \wedge q)$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

- - $\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha \uparrow \alpha$
  - $\alpha \vee \beta \Leftrightarrow (\alpha \uparrow \alpha) \uparrow (\beta \uparrow \beta)$
  - $\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow (\alpha \uparrow \beta) \uparrow (\alpha \uparrow \beta)$
  - $\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow ((\alpha \uparrow \alpha) \uparrow (\alpha \uparrow \alpha)) \uparrow (\beta \uparrow \beta)$
- De wetten van de Morgan voor $\uparrow$ en $\downarrow$

  $\neg(\alpha \uparrow \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \downarrow \neg\beta$

α	β	$\neg(\alpha \uparrow \beta)$	$\neg\alpha \downarrow \neg\beta$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

  $\neg(\alpha \downarrow \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \uparrow \neg\beta$

α	β	$\neg(\alpha \downarrow \beta)$	$\neg\alpha \uparrow \neg\beta$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Oefening 24

a) Syntactische opsomming van de modellen: $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

b) Syntactische opsomming van de modellen: $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$	$((p \leftrightarrow q) \vee (p \wedge q))$
0	0	0	1	1
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

Oefening 25

$$\begin{aligned}
\neg(\neg(p \wedge q) \vee r) \vee (\neg p \wedge q) &\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee \neg q) \vee r) \vee (\neg p \wedge q) \\
&\Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q) \\
&\Leftrightarrow ((\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q) \\
&\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q)
\end{aligned}$$

Disjunctieve normaalvorm met behulp van een syntactische opsomming van de modellen:

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg(p \wedge q) \vee r)$	$\neg(\neg(p \wedge q) \vee r)$	$(\neg p \wedge q)$	$\neg(\neg(p \wedge q) \vee r) \vee (\neg p \wedge q)$
0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1	0	0	0

Dus $(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

Oefening 26

a) Met behulp van inductie op k.

- Basisstap: Stel f is een unfaire functie op $\{0, 1\}$, dan zijn er 4 mogelijkheden:
  - $f_1(x) = 1 - x$
  - $f_2(x) = x$
  - $f_3(x) = 0$
  - $f_4(x) = 1$

  Die respectievelijk overeen komen met de formules
  - $\varphi_1 = \neg p$
  - $\varphi_2 = p$
  - $\varphi_3 = p \wedge \neg p$
  - $\varphi_4 = p \vee \neg p$
- Inductiestap: Zij f een k-plaatsige functie op $\{0, 1\}$
  Neem dan

$$g(x_1, ..., x_{k-1}) = f(0, x_1, ..., x_{k-1}) \quad (1)$$
$$h(x_1, ..., x_{k-1}) = f(1, x_1, ..., x_{k-1}) \quad (2)$$
$$\quad (3)$$

  g en h zijn $(k-1)$-plaatsige functie op $\{0, 1\}$. Dus bestaan er - door inductie - formules voor φ_g en φ_h voor g en h. Als formule voor f, neem f $\varphi_f = (q_0 \rightarrow \varphi_h) \wedge (\neg q_0 \rightarrow \varphi_g)$. Dan is opnieuw $w(\varphi_f) = f$, waar q_0 voor de propositieletter voor de eerste parameter staat.

b) Eerst bewijzen we dat $h(0, 0) = 1$ en $h(1, 1) = 0$ uit het ongerijmde.

   (a) Stel $h(1, 1) = 1$, dan kunnen we nooit een NOT maken.
   $NOT : n(x) = 1 - x$ en n is een combinatie van h's. Bijvoorbeeld: $n(x) = h(h(x, h(x, x)), x)$
   Maar als $h(1, 1) = 1$, dan hebben we op ieder niveau in gelijk welke combinatie van h's een 1 die er uit zal komen. Met andere woorden, de $n(1) = 1$, wat een contradictie is.

   (b) Op een analoge manier kan onmogelijk $h(0, 0) = 0$ zijn.

   Nu we weten dat $h(0, 0) = 1$ en $h(1, 1) = 0$, dan rest er ons nog $h(0, 1)$ en $h(1, 0$ onder de loep te nemen. Dit geeft ons vier combinaties.

   (a)
   - $h_1(0, 0) = 1$
   - $h_1(0, 1) = 1 \quad \leftarrow$
   - $h_1(1, 0) = 1 \quad \leftarrow$
   - $h_1(1, 1) = 0$

(b)
- $h_2(0,0) = 1$
- $h_2(0,1) = 0 \quad \leftarrow$
- $h_2(1,0) = 1 \quad \leftarrow$
- $h_2(1,1) = 0$

(c)
- $h_3(0,0) = 1$
- $h_3(0,1) = 1 \quad \leftarrow$
- $h_3(1,0) = 0 \quad \leftarrow$
- $h_3(1,1) = 0$

(d)
- $h_4(0,0) = 1$
- $h_4(0,1) = 0 \quad \leftarrow$
- $h_4(1,0) = 0 \quad \leftarrow$
- $h_4(1,1) = 0$

Merk op dat $h_2(x,y) = 1 - y$, h_2 heeft slechts de kracht van $\neg$. Merk ook op dat $h_3(x,y) = 1 - x$ dus h_3 heeft ook slechts de kracht van $\neg$. Omdat de $\neg$ niet functioneel volledig is, zijn bijgevolg h_2 en h_3 ook niet functioneel volledig en worden ze dus buiten beschouwing gelaten (h kan onmogelijk h_2 of h_3 zijn).

h_1 komt overeen met $h_\uparrow$, want $h_1(x,y) = h_\uparrow(x,y) = 0$ desda $x + y = 2$

h_4 komt overeen met $h_\downarrow$, want $h_4(x,y) = h_\downarrow(x,y) = 1$ desda $x + y = 0$

We hebben dus aangetoond dat $h = h_\uparrow$ of $h = h_\downarrow$

Oefening 27

a) Uit deze waarheidstabel lezen we dat $\{p \wedge q\} \models p \rightarrow q$ vermits elk model van $p \wedge q$ ook een model is voor $p \rightarrow q$.

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

b) $\{p \rightarrow (q \rightarrow r)\} \models ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ is zeker geldig gevolg, want beide formules zijn equivalent (identieke kolom in de waarheidstabel).

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

c) Geen geldig gevolg want $V(p) = 0, V(q) = 0$ is een model voor $\{\neg p, q \rightarrow p\}$, maar niet voor q. We hebben dus een tegenvoorbeeld gevonden. Met andere woorden: $\{\neg p, q \rightarrow p\} \not\models q$

p	q	$\neg p$	$q \rightarrow p$	q
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1