ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

LOGICA EN FORMELE SYSTEMEN

DEEL I: PROPOSITIELOGICA

Ann Nowé

PROPOSITIELOGICA

Inhoud

Syntaxis en semantiek

Geldig gevolg

Afleidingen

Metatheorie

PROPOSITIELOGICA:
SYNTAXIS EN SEMANTIEK

VRIJE
UNIVERSITEIT
BRUSSEL

VOORBEELD

Correct redenering

Aanname: De afstandsbediening is kapot of de TV werkt niet goed
Aanname: Maar de TV werkt wel goed
Conclusie: Dus is de afstandsbediening kapot

Foute redenering

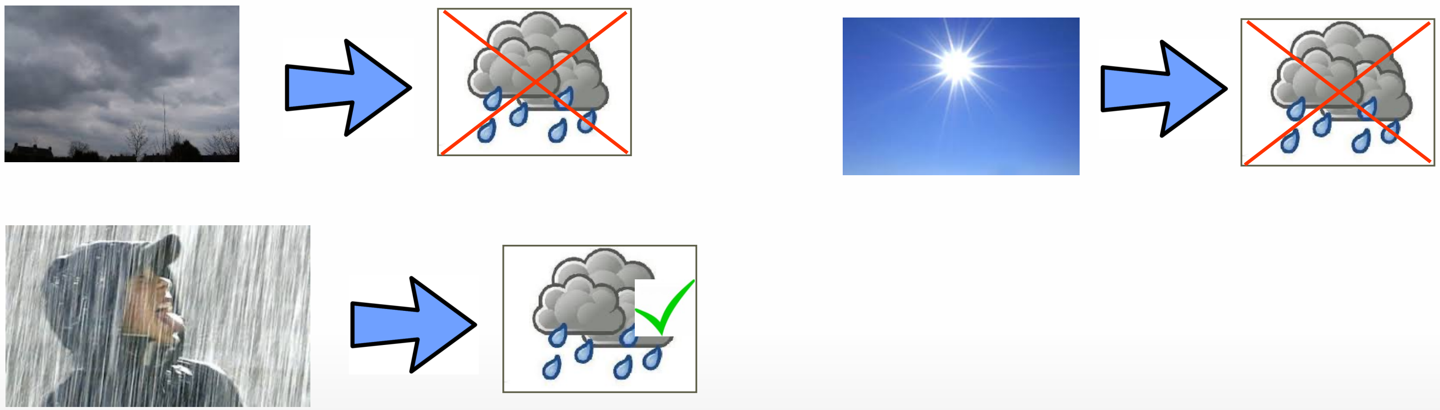
Aanname: Het schilderij hangt hier niet als het gestolen is
Aanname: Het schilderij hangt hier niet
Conclusie: Dus is het schilderij gestolen

Nogthans lijken beide sterk op elkaar
We laten ons vaak beinvloeden door de tekst!

INLEIDING

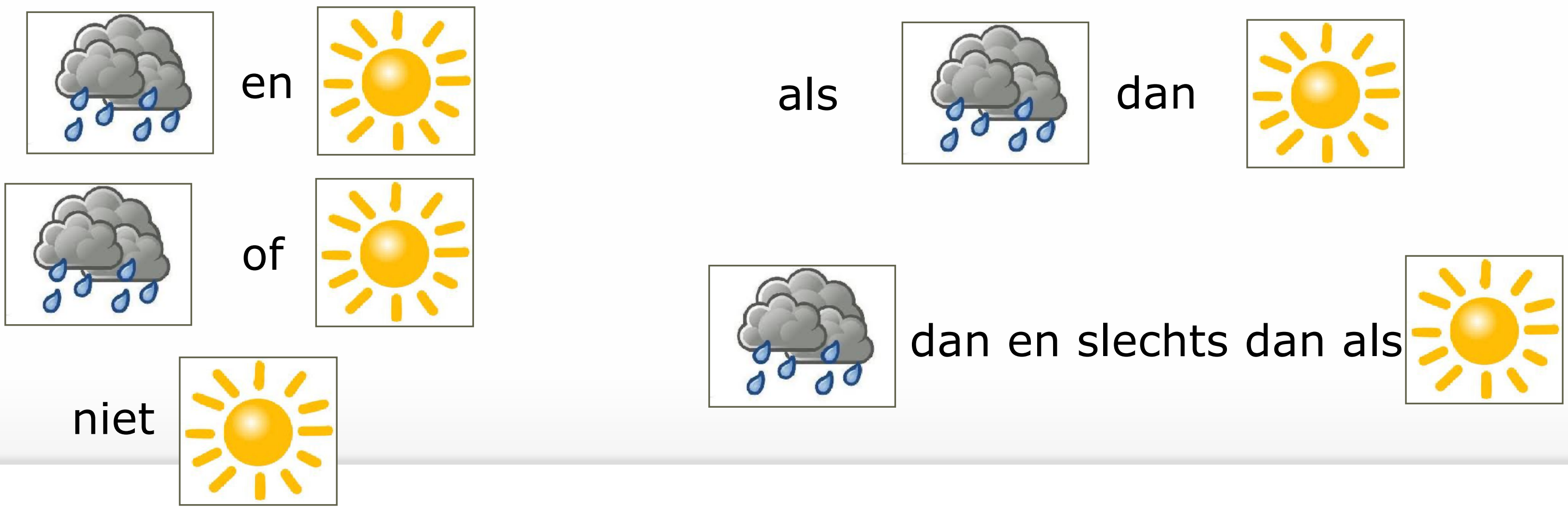
Een propositie is een uitspraak die, gegeven een situatie, waar of onwaar kan zijn

- Bv. ‘Het regent’ is in een gegeven situatie of waar of onwaar, maar nooit zowel onwaar als waar



INLEIDING

Proposities kunnen verbonden worden met de logische connectieven
en, of, niet, als-dan, dan-en-slechts-dan-als tot formules



PROPOSITIES

Beweringen, proposities genoemd, zijn atomair

- We gaan ze niet verder analyseren
- Daarom gaan we ze voorstellen door symbolen, nl. letters
- Voorbeelden:
  - Ik ben ziek: z
  - Ik lust koffie: k
  - Mijn fiets is gestolen: f
  - Brussel is de hoofdstad van België: b
  - $5 < 2$: v77

LOGISCHE CONNECTIEVEN

We gebruiken ook symbolen voor de logische connectieven:

- niet : $\neg$
- en: $\wedge$
- of: $\vee$
- als-dan: $\rightarrow$
- dan-en-slechts-dan-als: $\leftrightarrow$

INLEIDING

- Zinnen in natuurlijke taal kunnen zo vertaald worden naar formele specificaties

Voorbeelden:

Aanname: Als je ziek bent, dan lust je geen koffie
Aanname: Je lust koffie
Conclusie: Je bent niet ziek

Aanname: $(p \rightarrow \neg q)$
Aanname: q
Conclusie: $\neg p$

Aanname: Als je fiets gestolen is, dan lust je geen koffie
Aanname: Je lust koffie
Conclusie: Je fiets is niet gestolen

Aanname: $(r \rightarrow \neg q)$
Aanname: q
Conclusie: $\neg r$

COMPONENTEN VAN EEN FORMELE TAAL

Bij een (formele) taal zijn 3 aspecten belangrijk:

- Het alfabet

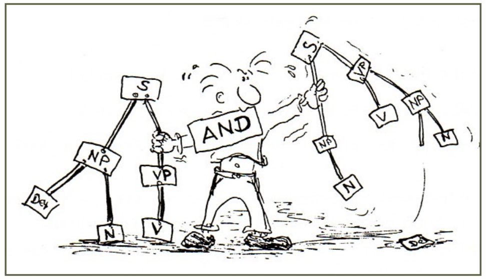
  Welke symbolen men mag gebruiken

- De syntaxis (grammatica)

  Geheel van regels die aangeeft op welke manier uitdrukkingen in de taal gevormd mogen worden

- De semantiek

  De betekenis van syntactisch correcte uitdrukkingen in een taal.



ALFABET

Propositielogica:

propositie: bewering of uitspraak, uitgedrukt in een zin

- Vben: "Brussel is de hoofdstad van België", "4 < 7", "8 < 3"

<u>Notatie</u>: kleine letters.

Keuze: bijv. h voor "Jan huilt" (geheugensteuntje) of
p, q, r, …, of p_1, p_2, p_3, … (abstracte notatie).

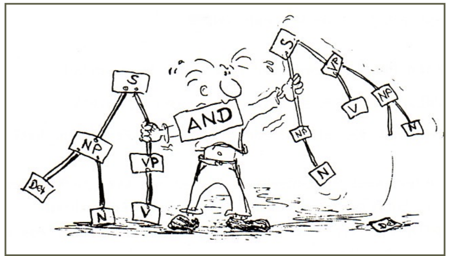
ALFABET

Definitie

Het **alfabet** van de propositielogica bestaat uit

- een verzameling propositieletters
- de logische symbolen: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$
- de hulpsymbolen:) en (

SYNTAXIS - FORMULE



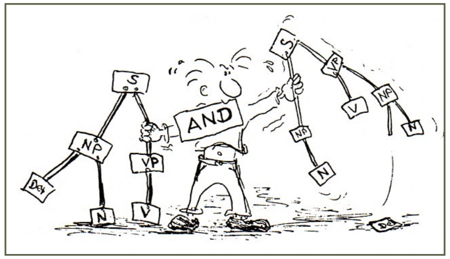
De symbolen uit het alfabet zijn te combineren via regels tot uitdrukkingen, formules genoemd.

Definitie
De **formules** in de propositielogica zijn als volgt gedefinieerd:

1. elke propositieletter is een formule
2. als φ en ψ formules zijn dan zijn $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ en $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ook formules
3. niets anders is een formule

- Om abstracte (willekeurige) formules weer te geven worden kleine Griekse letters gebruikt (φ, ψ, ...), dit noemt ment formulevariabelen

SYNTAXIS – TERMINOLOGIE



▶ Terminologie:

Propositieletters heten ook atomaire formules of atomen.

De samengestelde formules hebben een vaste uitspraak en naam:

vorm	uitspraak	naam
$\neg\varphi$	niet phi	negatie
$(\varphi \wedge \psi)$	phi en psi	conjunctie
$(\varphi \vee \psi)$	phi of psi	disjunctie
$(\varphi \rightarrow \psi)$	als phi dan psi	implicatie
$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	phi dan en slechts dan als psi	equivalentie

Korte notatie voor dan en slechts dan als: desda

OPGELET

‘en’ uit onze natuurlijk taal en logische ‘en’ ($\wedge$) zijn niet 100% equivalent

“ze kwam binnen en deed het licht uit”

“ze deed het licht uit en kwam binnen”

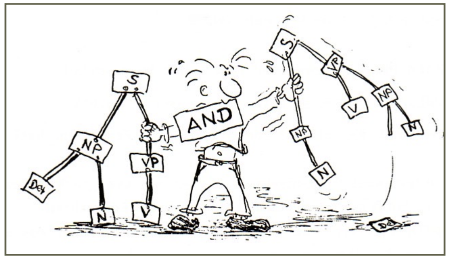
- In natuurlijke taal verschillend; in propositielogica gelijkwaardig

Idem voor ‘of’

“Voor je verjaardag krijg je een racefiets of een computer”

- In natuurlijke taal is bedoeling “óf ... óf ...”; in propositielogica kunnen beide waar zijn.

SYNTAXIS – VOORBEELDEN



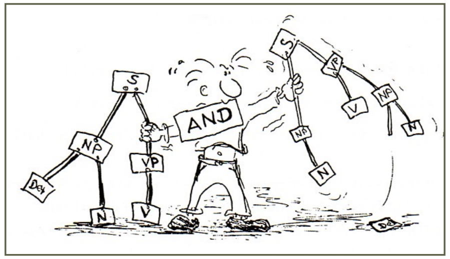
- Voorbeelden
  Welke zijn geldige formules?
  - p
  - $\neg\neg p$
  - $(\neg p)$
  - $\neg(p \rightarrow \neg q)$
  - $q\neg$
  - $(((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (\neg p \wedge q))$
  - $(p \wedge q) \wedge r)$
  - $(p \vee q \vee r)$

INDUCTIEVE DEFINITIE

- De manier waarop de formules zijn gedefinieerd heet inductief.
- Een *inductieve definitie* bestaat uit
  - Eén of meerdere basisstappen waarin bepaalde dingen meteen tot objecten van de gewenste soort worden verklaard
    - Bijv. elke propositieletter is een formule
  - Eén of meerdere opbouwstappen die de constructieprincipes geven om objecten te maken
    - Bijv. als φ en ψ formules zijn dan zijn $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ en $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ook formules
  - Een afsluitende stap die bepaalt dat alles wat niet in eindig veel stappen met behulp van 1 en 2 gevormd kan worden, geen toegestaan object is
    - Bijv. niets anders is een formule

VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL

SYNTAXIS – FORMULESCHEMA



- Formuleschema's en instanties

  een vorm zoals $(\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$ is een abstracte vorm van een formule: een formuleschema genoemd.

  Een concrete formule ontstaat als voor φ en ψ concrete formules worden ingevuld. Dit heet een instantie van het formuleschema.

  Instanties van $(\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$ zijn:

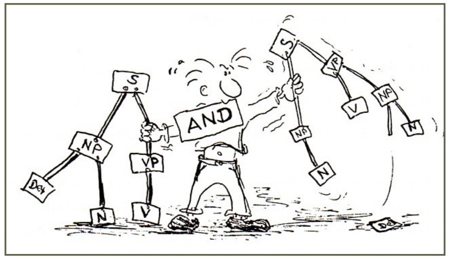
  $(p \leftrightarrow \neg q)$
  $(q \leftrightarrow \neg q)$
  $((p \wedge q) \leftrightarrow \neg(r \leftrightarrow \neg(s \rightarrow q)))$

  Met p,q,r en s proposities

Bv.
$(w \leftrightarrow \neg k)$

w = warm
k = koud

SUBSTITUTIE



Voorbeeld: $((p \wedge q) \rightarrow p)$

- Kan ik p vervangen door een andere letter?

$((s \wedge q) \rightarrow s)$

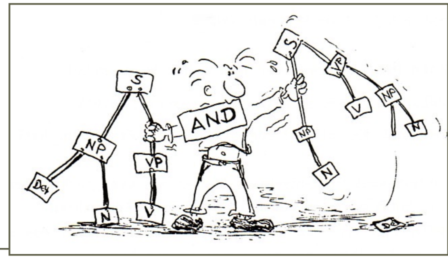
Laat φ een formule zijn waar (mogelijk) een propositieletter *p* in voorkomt. Door elk voorkomen van *p* in φ te vervangen door een formule ψ, ontstaat een nieuwe formule.

Notatie uitspraak

$[\psi/p]\varphi$ formule die resulteert door p in φ te *substitueren* (te *vervangen*) *door* ψ

VUB VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL

SUBSTITUTIE



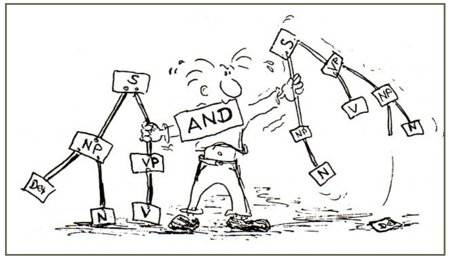
Definitie

Substitutie

1. $[\psi/p]\varphi = \psi$ als $\varphi = p$
   $[\psi/p]\varphi = \varphi$ als φ een propositieletter is verschillend van p

2. $[\psi/p]\neg\varphi = \neg[\psi/p]\varphi$
   $[\psi/p](\varphi \wedge \chi) = ([\psi/p]\varphi \wedge [\psi/p]\chi)$
   $[\psi/p](\varphi \vee \chi) = ([\psi/p]\varphi \vee [\psi/p]\chi)$
   $[\psi/p](\varphi \rightarrow \chi) = ([\psi/p]\varphi \rightarrow [\psi/p]\chi)$
   $[\psi/p](\varphi \leftrightarrow \chi) = ([\psi/p]\varphi \leftrightarrow [\psi/p]\chi)$

SUBSTITUTIE – VOORBEELDEN

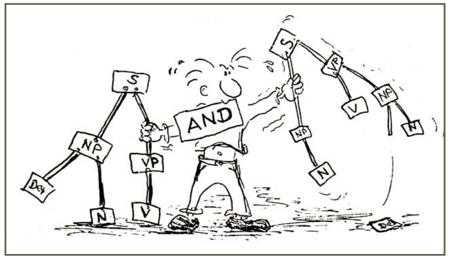


Voorbeelden substitutie:

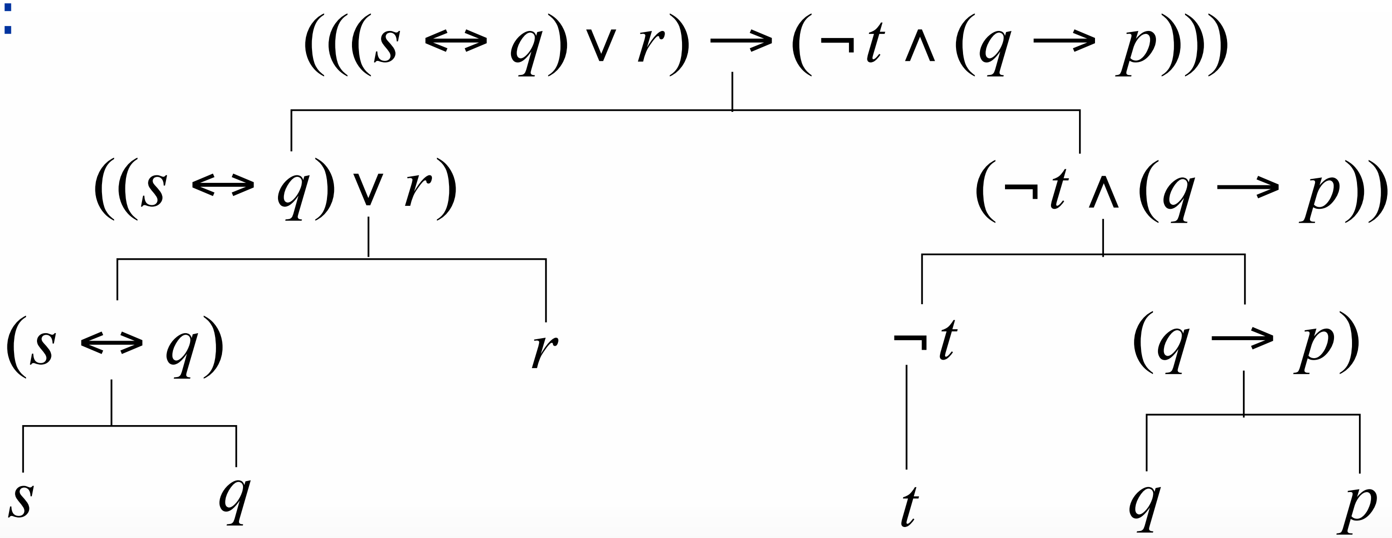
$$[(p \rightarrow q)/r](r \wedge s) =$$

$$[(p \vee \neg p)/q](q \rightarrow (s \rightarrow q)) =$$

CONSTRUCTIEBOOM

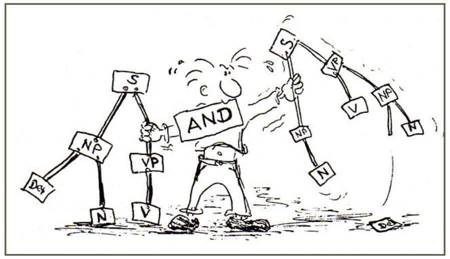


- De opbouw van een formule kan worden weergegeven door een constructieboom
- Bijv.:



de boom wordt van onder naar boven gelezen

CONSTRUCTIEBOOM



- Haakjes zijn belangrijk; ze geven het bereik van een connectief aan
- Ze leggen de constructie eenduidig vast
- Hoeveel constructiebomen bestaan er voor een formule?

  In het algemeen is er precies één constructieboom per formule
  Dit is niet steeds zo in de natuurlijke taal
  Bijv: "Als de baby niet huilt en trappelt, dan is hij gelukkig".

SEMANTIEK

We weten nu wat een geldige formule is maar wat is de betekenis van een formule?

- Dit is zijn waarheidswaarde, nl. waar of onwaar
- Hoe die bepalen?

  Voorbeeld

  - De Nederlandse zin "het regent en de zon schijnt" kan *waar* zijn of *niet waar* zijn.
    Dit is gebaseerd op de waarheidswaarden van de onderdelen

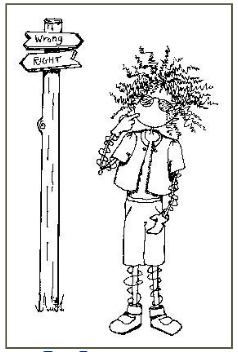
niet waar

waar

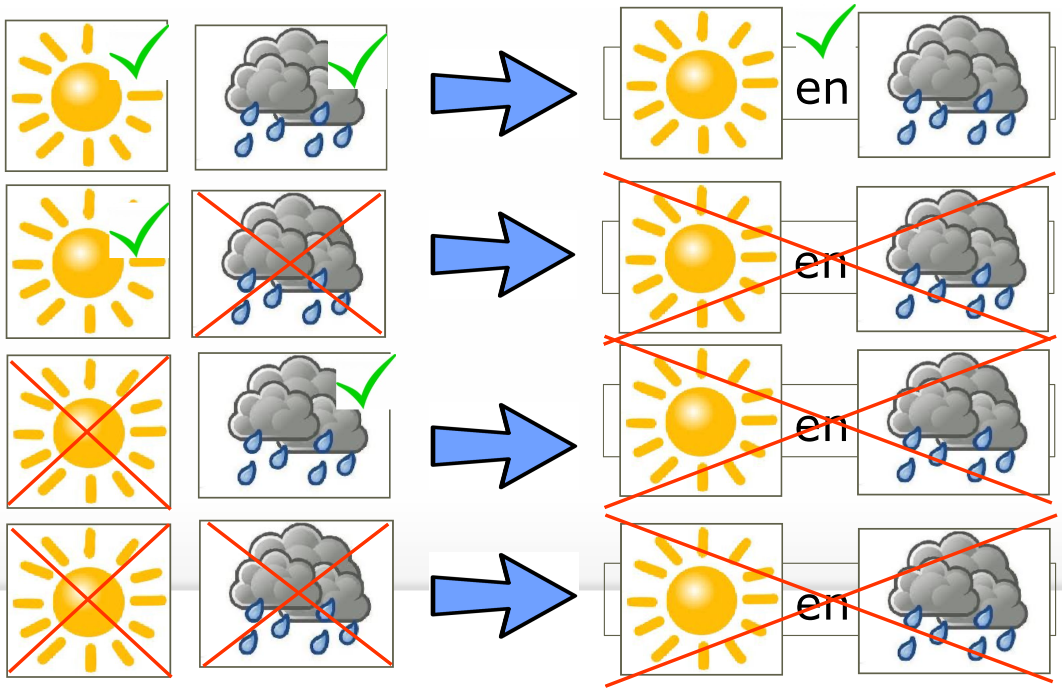
niet waar

niet waar

SEMANTIEK



De waarheidswaarde van een formule wordt gegeven door de waarheidswaarde van de delen van de formule.



SEMANTIEK

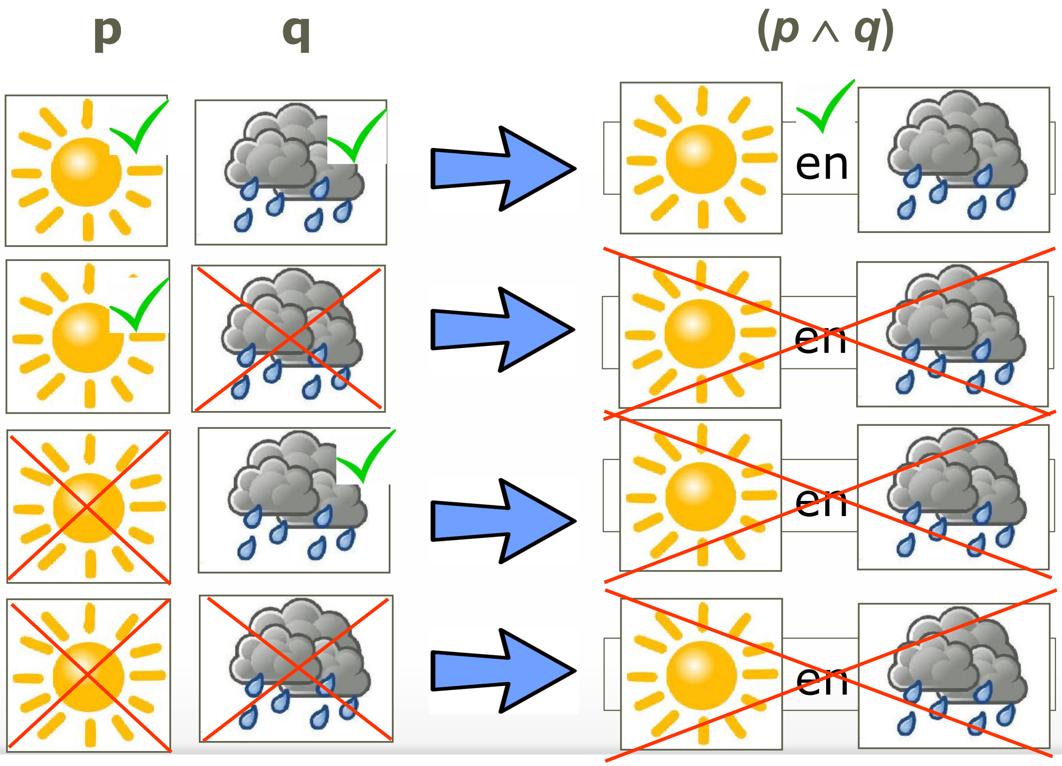
De begrippen 'waar' en 'onwaar' worden waarheidswaarden genoemd.
Vaak wordt 1 gebruikt voor waar en 0 voor onwaar

Voor atomen (propositieletters) moet de waarheidswaarde gegeven (of verondersteld) worden

De waarheidswaarde voor een samengestelde formule

- is waar of onwaar
- en volgt uit de waarheidswaarden van de samenstellende delen door middel van de waarheidstabellen van de connectieven.

WAARHEIDSTABELLEN – VOORBEELD



Waarheidstabel voor $\wedge$:

p	q	$(p \wedge q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Elke rij staat voor een bepaalde situatie, waardering genoemd (notatie V).

WAARHEIDSTABELLEN

Er is een waarheidstabel voor elke connectief:

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

φ	ψ	$(\varphi \wedge \psi)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

φ	ψ	$(\varphi \vee \psi)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

φ	ψ	$(\varphi \rightarrow \psi)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

φ	ψ	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

OPMERKING

De semantiek van de implicatie ($\varphi \rightarrow \psi$) vertoont overeenkomst met als-dan zinnen uit de natuurlijke taal

- Bijv. “als ik het gras afmaai dan krijg ik 5 Euro”
- Maar! “als de maan van groene kaas is dan ben ik rijk”

  Waar of onwaar?
- Het geval waarin φ onwaar is komt onnatuurlijk over

  In de natuurlijke taal gebruiken we meestal “als ...dan...” zinnen in een oorzaak-gevolg situatie

  Als de oorzaak onwaar is vinden we het onrealistisch om over het gevolg na te denken en vinden we de implicatie dus intuïtief onwaar, maar in propositie logica is de implicatie dan waar!

WAARHEIDSTABEL SAMENGESTELDE FORMULE

- De mogelijke waarderingen voor een willekeurige formule φ volgen uit de waarheidstabellen voor de connectieven. Deze worden ook weergegeven in een waarheidstabel

- Waarheidstabel voor een samengestelde formule:

  tabel met waarheidswaarden voor alle mogelijke waarderingen (combinaties) van de voorkomende propositieletters en de deelformules.

VOORBEELD

$((h \wedge s) \rightarrow \neg u)$:

	h	s	u	$(h \wedge s)$	$\neg u$	$((h \wedge s) \rightarrow \neg u)$
V_1	1	1	1	1	0	0
V_2	1	1	0	1	1	1
V_3	1	0	1	0	0	1
V_4	1	0	0	0	1	1
V_5	0	1	1	0	0	1
V_6	0	1	0	0	1	1
V_7	0	0	1	0	0	1
V_8	0	0	0	0	1	1

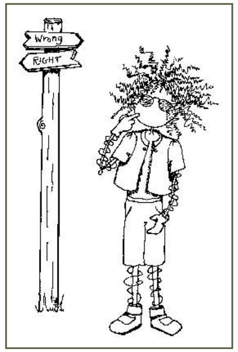
VOORBEELD

$((h \wedge s) \rightarrow \neg u)$:

	h	s	u	$(h \wedge s)$	$\neg u$	$((h \wedge s) \rightarrow \neg u)$	$((h \wedge s) \rightarrow \neg u)$		
V_1	1	1	1	1	0	0	1	0	0
V_2	1	1	0	1	1	1	1	1	1
V_3	1	0	1	0	0	1	0	1	0
V_4	1	0	0	0	1	1	0	1	1
V_5	0	1	1	0	0	1	0	1	0
V_6	0	1	0	0	1	1	0	1	1
V_7	0	0	1	0	0	1	0	1	0
V_8	0	0	0	0	1	1	0	1	1

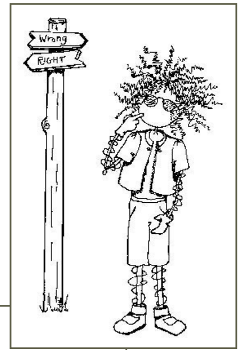
Compactere notatie

COMPLEXITEIT WAARHEIDSTABELLEN



- Wanneer er n verschillende propositieletters in een formule voorkomen dan heeft de waarheidstabel van de formule 2^n rijen.

SEMANTIEK - WAARDERING

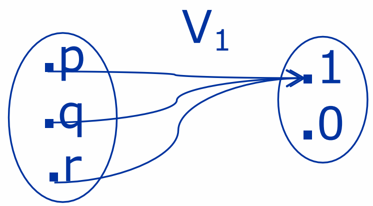


Definitie

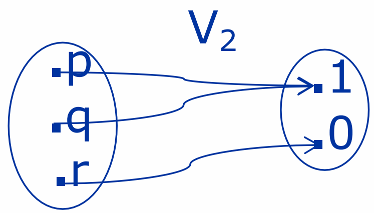
Een waardering is een functie van alle propositieletters naar de waarheidswaarden ‘waar’ (1) en ‘onwaar’ (0)

Voorbeelden waarderingen:

V_1 p -> 1 ; q -> 1; r -> 1

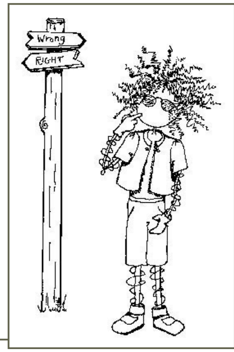


V_2 p -> 1 ; q -> 1; r -> 0



- Via een gegeven waardering kan men de waarheidswaarde van een willekeurige formule φ bepalen

SEMANTIEK - MODEL



Definitie

Een waardering V heet een model *van een formule* φ als geldt dat $V(\varphi) = 1$.

– de verzameling van alle modellen van φ noteren we

$$MOD(\varphi) = \{V \mid V(\varphi) = 1\}$$

SEMANTIEK - MODEL

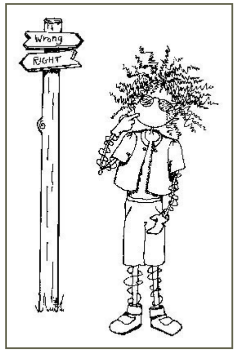
– We kunnen ook spreken over de modellen van een verzameling formules

Definitie

Een waardering V heet een model van een formuleverzameling Σ als V een model is van elke formule $\varphi \in \Sigma$

De verzameling van modellen van Σ *wordt genoteerd als* Mod(Σ)

SEMANTIEK - MODEL



Voorbeeld

- Wat zijn de modellen van: $\{(r \rightarrow s), \neg(r \wedge s)\}$?
- M.a.w. voor welke waarderingen van r en s zijn beide formules waar?

Merk op dat $\mathrm{Mod}(\Sigma \cup \{\varphi\}) \subseteq \mathrm{Mod}(\Sigma)$

- Hoe meer modellen hoe minder informatieve inhoud;
- Hoe minder modellen hoe meer informatieve inhoud;
- Eén model betekent volledige informatie.

MODELELIMINATIE

Verschaft een aantal formules voldoende informatie om een vraag te kunnen beantwoorden?

Bijv.: Jan komt als Marie of Anne komt (φ); Anne komt als Marie niet komt (ψ); Jan komt niet als Anne komt (χ)

Wie komt er wel en wie niet?

m.a.w. heeft $\{\varphi , \psi , \chi \}$ een uniek model?

Techniek: Modeleliminatie

- gebaseerd op:
  als $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ dan geldt $MOD(\Sigma_2) \subseteq MOD(\Sigma_1)$
- Bepaal eerst alle modellen van φ, vervolgens kijken we welke ook modellen zijn ψ, en tenslotte welke ook modellen zijn voor χ .

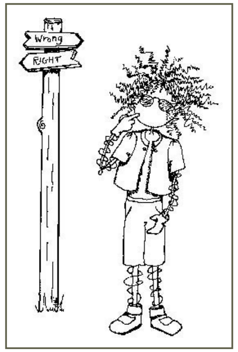
MODELELIMINATIE – VOORBEELD

Modeleliminatie: voorbeeld

- Over het weer in Londen weten we het volgende:
  Het waait of het regent.
  Als het waait en regent, dan is het koud.
  Als het regent, dan is het niet koud.
  Als het niet waait, dan is het koud.

- Welke conclusies kunnen we hieruit trekken? Wat zijn de modellen?
  Vertaling:
  w : het waait
  r : het regent
  k : het is koud
  $\Sigma = \{ (w \vee r), ((w \wedge r) \to k), (r \to \neg k), (\neg w \to k)\}$

MODELELIMINATIE – VOORBEELD

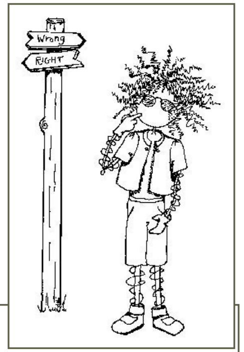


$$\Sigma = \{\, (w \vee r), ((w \wedge r) \to k), (r \to \neg k), (\neg w \to k) \,\}$$

	w	r	k	$(w \vee r)$	$((w \wedge r) \to k)$	$(r \to \neg k)$	$(\neg w \to k)$
V_1	1	1	1	1	1	0	
V_2	1	1	0	1	0		
→ V_3	1	0	1	1	1	1	1
→ V_4	1	0	0	1	1	1	1
V_5	0	1	1	1	1	0	
V_6	0	1	0	1	1	1	0
V_7	0	0	1	0			
V_8	0	0	0	0			

Conclusie: Twee modellen blijven over: V_3 en V_4.
Voor beide geldt: het waait en het regent niet.

TAUTOLOGIE EN CONTRADICTIE

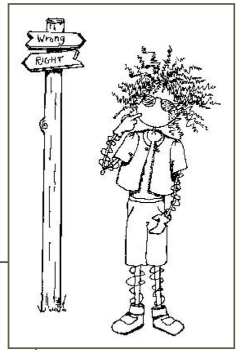


Definitie

Een formule φ heet een tautologie als elke waardering een model is van φ, m.a.w. $\forall V$: $V(\varphi)=1$.

- M.a.w. (intuitief) een tautologie is een formule die altijd waar is
- Voorbeelden van tautologieën:
  $(p \to (q \to p))$,
  alle instanties van $(\varphi \vee \neg\varphi)$ en $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.
- De tegenhanger van een tautologie heet een contradictie. Dus een contradictie is een formule die altijd onwaar is.

LOGISCH EQUIVALENT



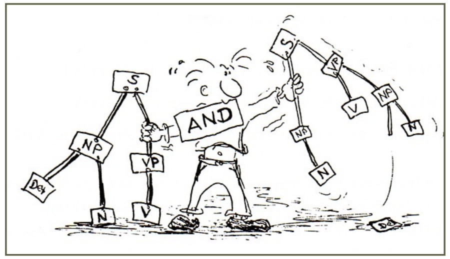
Definitie

Twee formules φ en ψ heten logisch equivalent als de formule $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ een tautologie is

Vben logische equivalenties:

- φ en $\neg\neg\,\varphi$,
- $(\varphi \wedge (\psi \wedge \chi))$ en $((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi)$ (associativiteit)
- de wetten van De Morgan:
  $(\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi))$ is een tautologie
  $(\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi))$ is een tautologie
- de principes van distributiviteit:
  $((\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)))$ is een tautologie
  $((\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)))$ is een tautologie

LOSSERE NOTATIE



Logische equivalenties rechtvaardigen een lossere notatie:

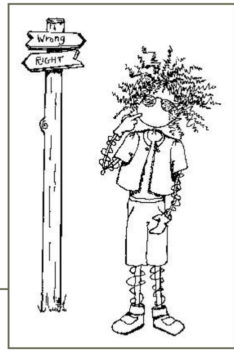
- Op grond van de logische equivalentie van $((\varphi \wedge (\psi \wedge \chi))$ en $((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi)$ laten we toe om haakjes weg te laten, dus $(\varphi \wedge \psi \wedge \chi)$ i.p.v. $((\varphi \wedge (\psi \wedge \chi))$ of $((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi)$

- Dit noemt men de associativiteit van $\wedge$

- Ook '$\vee$' is associatief

- Ook buitenste haakjes mogen weggelaten worden indien geen verwarring mogelijk $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$ i.p.v. $(\varphi \wedge \psi \wedge \chi)$

FUNCTIONEEL VOLLEDIG



Definitie

Een verzameling van connectieven C heet functioneel volledig als elk formule φ logisch equivalent is met een formule ψ die enkel connectieven uit C bevat

- De verzameling connectieven $\{\neg, \wedge, \vee\}$ is functioneel volledig (bewijs later).
- $\{\neg, \vee\}$ is dan ook functioneel volledig op grond van de tautologie $((\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi))$. Hierdoor kunnen alle voorkomens van $\wedge$ vervangen worden door $\neg$ en $\vee$.

ANDERE CONNECTIEVEN

NOR connectief

- noch … noch
- Waarheidstabel voor **NOR**:

p	***q***	**(*p* NOR *q*)**
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

- {NOR} is functioneel volledig.

DISJUNTIEVE NORMAALVORM

Definitie

Een formule is in disjunctieve normaalvorm wanneer deze de syntactische vorm heeft van een disjunctie van conjuncties, bestaande uit atomen of negaties van atomen:

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n1}) \vee \ldots \vee (\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_{nk})$$

waarbij $\varphi_1, \ldots, \chi_{nk}$ atomen of negaties van atomen zijn

Algemeen geldt dat voor iedere formule φ een logisch equivalente formule φ* bestaat die in disjunctieve normaalvorm is (zonder bewijs).

REDENEREN

Hoe kunnen we nu gaan redeneren?

Essentieel 2 manieren:

Via de modellen: semantisch (geldig gevolg)

Via afleidingsregels: syntactisch (natuurlijke deductie)