Hoofdstuk 4

Toepassingen van afgeleiden

4.1

Extrema van functies

Definitie van een absoluut minimum en een absoluut maximum

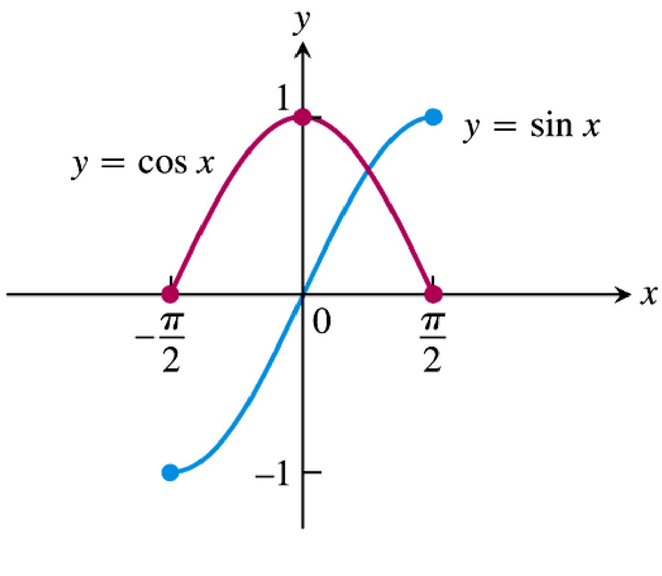
Zij f een functie met domein D. f heeft een absoluut maximum in een punt c van D indien voor alle x in D geldt dat :

$$f(x) \le f(c)$$

f heeft een absoluut minimum in een punt c van D indien voor alle x in D geldt dat :

$$f(x) \ge f(c)$$

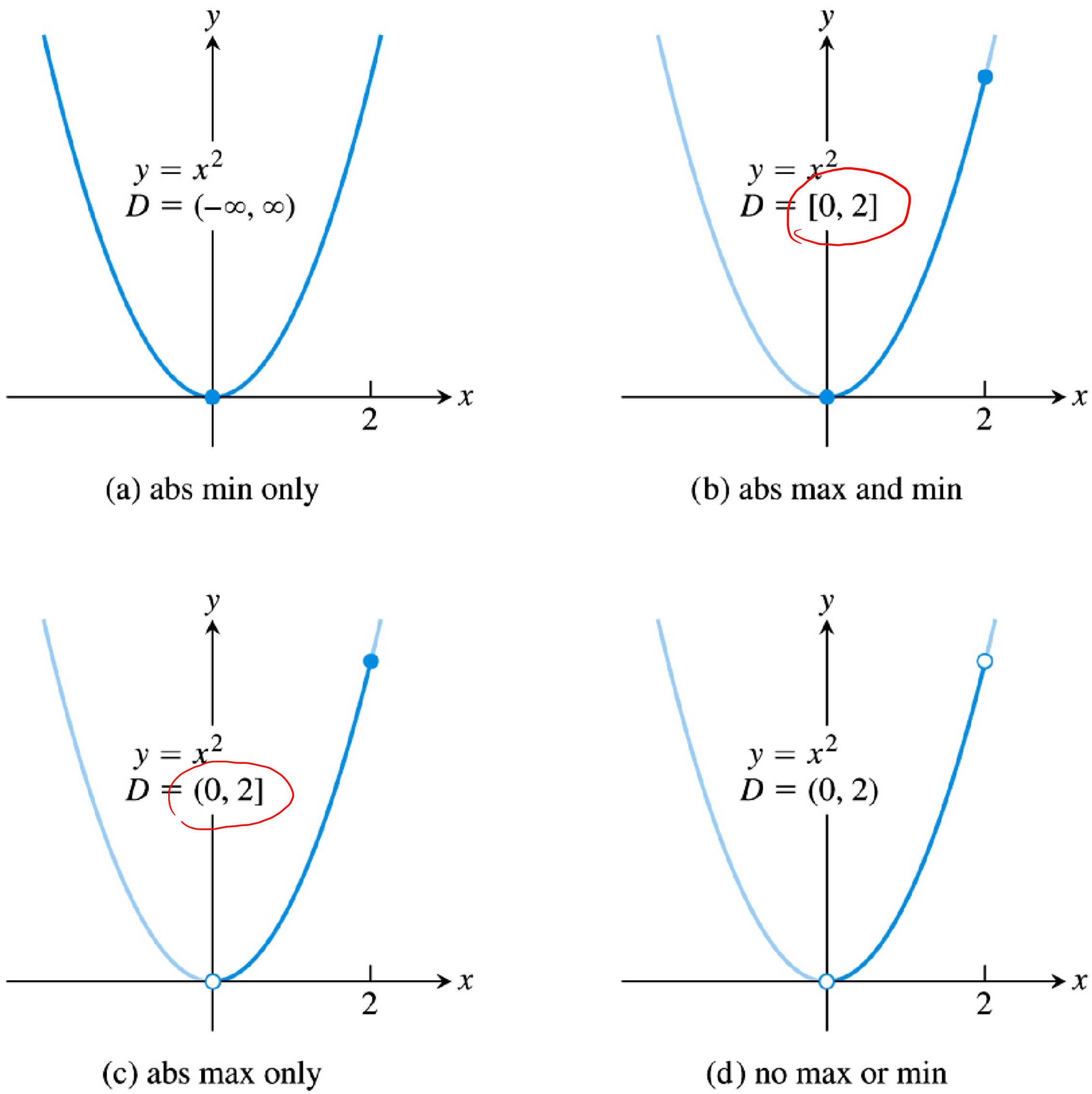
Vb: De functie sinus en cosinus op hun domein $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



① $\underline{\cos x}$ als max in $x = 0$
als min in $x = \frac{\pi}{2}$
en $x = -\frac{\pi}{2}$

② $\sin x$ als max in $x = \frac{\pi}{2}$
als min in $x = -\frac{\pi}{2}$

Het domein van de functie is belangrijk!



]0,2]

]0,2[

FIGURE 4.2 Graphs for Example 1.

Elke continue functie f gedefinieerd op een gesloten interval bereikt op dit interval een absoluut minimum m en een absoluut maximum M.

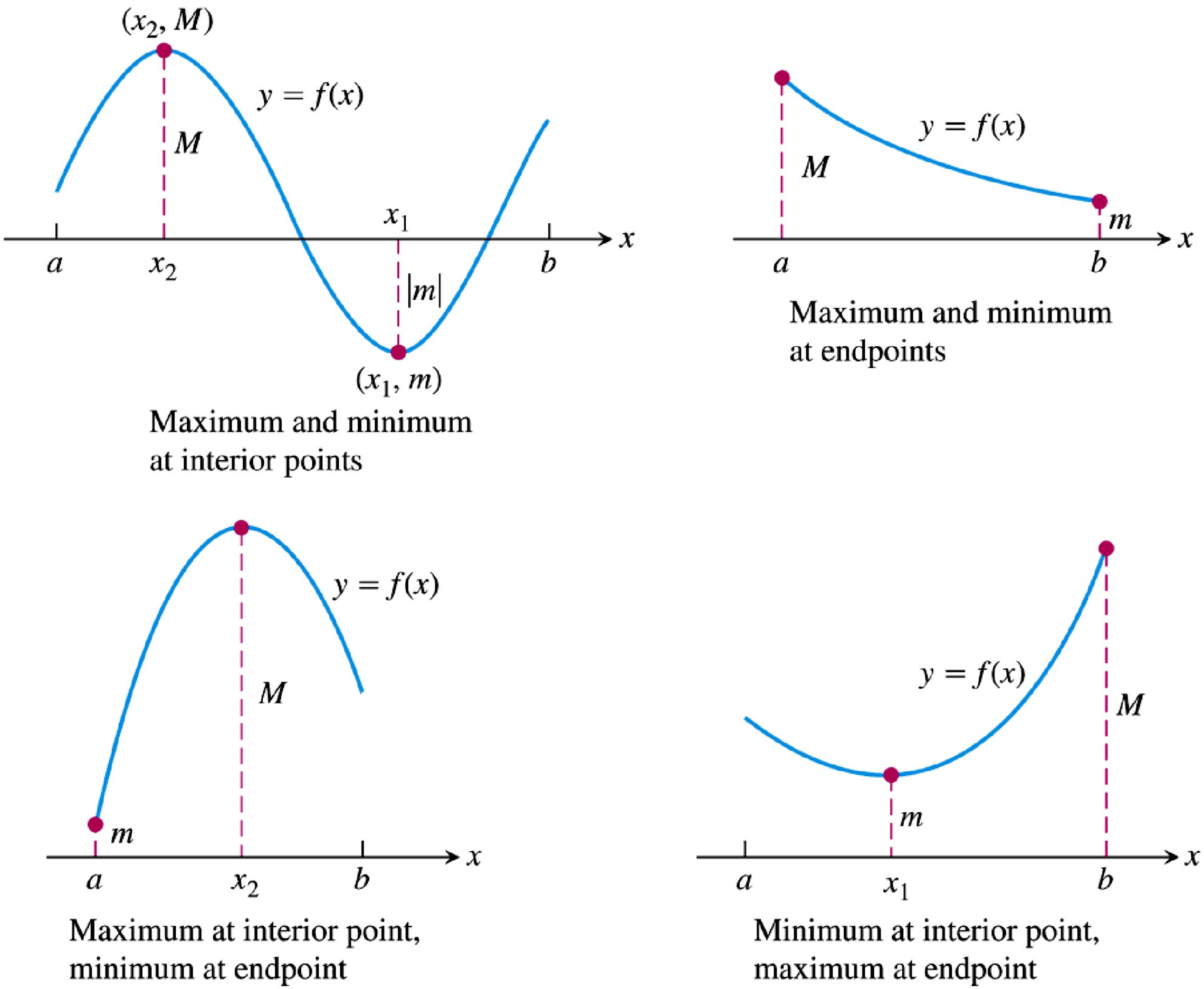
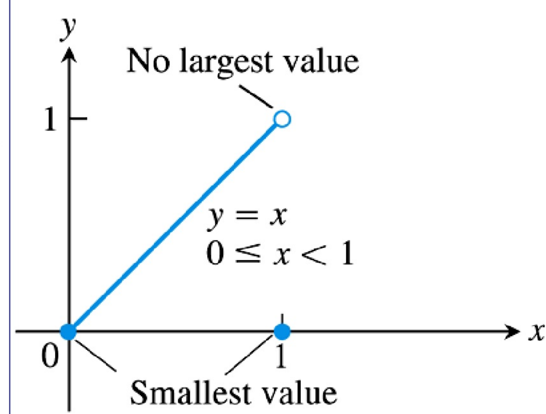


FIGURE 4.3 Some possibilities for a continuous function's maximum and minimum on a closed interval $[a, b]$.

Continuiteit is belangrijk!



Definitie van een lokaal minimum en een lokaal maximum
Zij f een functie met domein D. f heeft een lokaal maximum in een inwendig punt c van D indien voor alle x in een open interval rond c geldt dat : $f(x) \leq f(c)$

f heeft een lokaal minimum in een inwendig punt c van D indien voor alle x in een open interval rond c geldt dat : $f(x) \geq f(c)$

NB: als c een eindpunt is gebruiken we half open intervallen

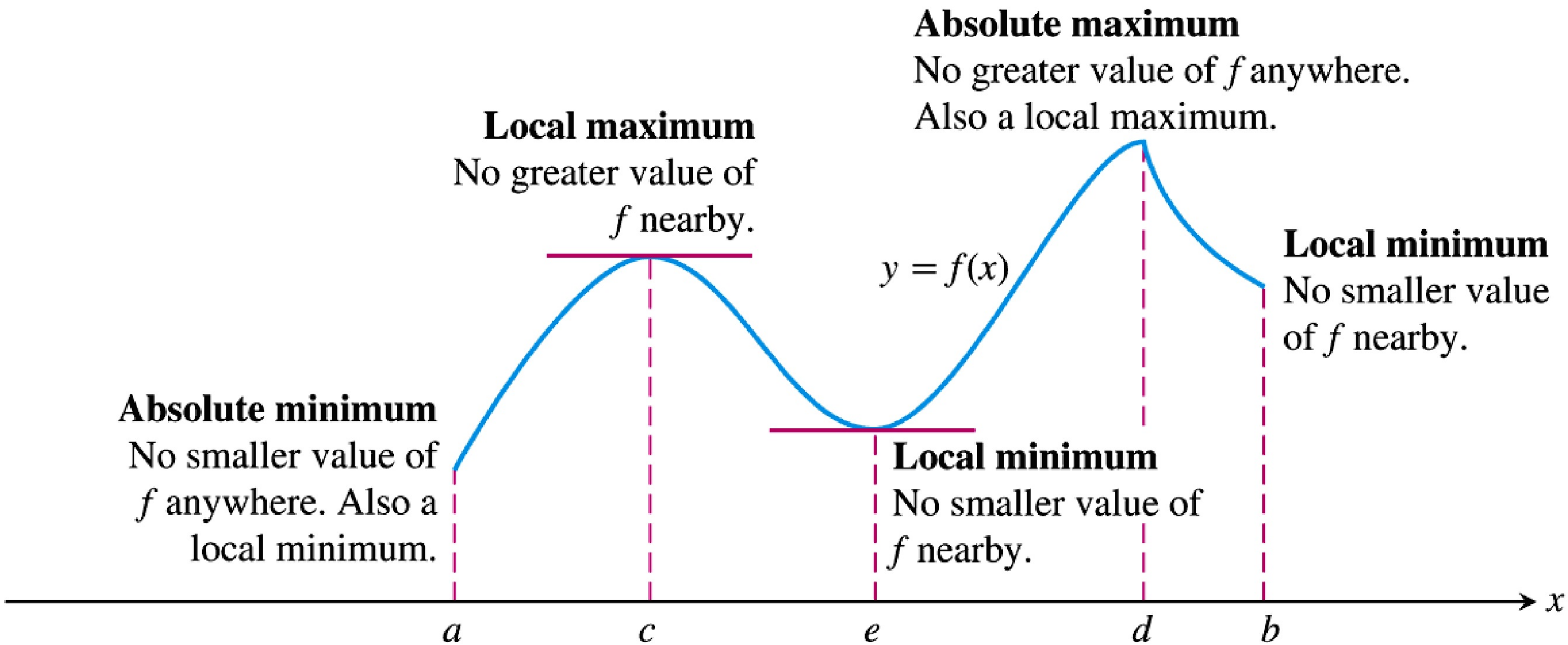


FIGURE 4.5 How to classify maxima and minima.

Eerste afgeleide stelling voor lokale extrema
Indien f een lokaal minimum of maximum heeft in een inwendig punt c van haar Domein en indien f’ gedefinieerd is in c dan geldt dat :

$$f'(c) = 0$$

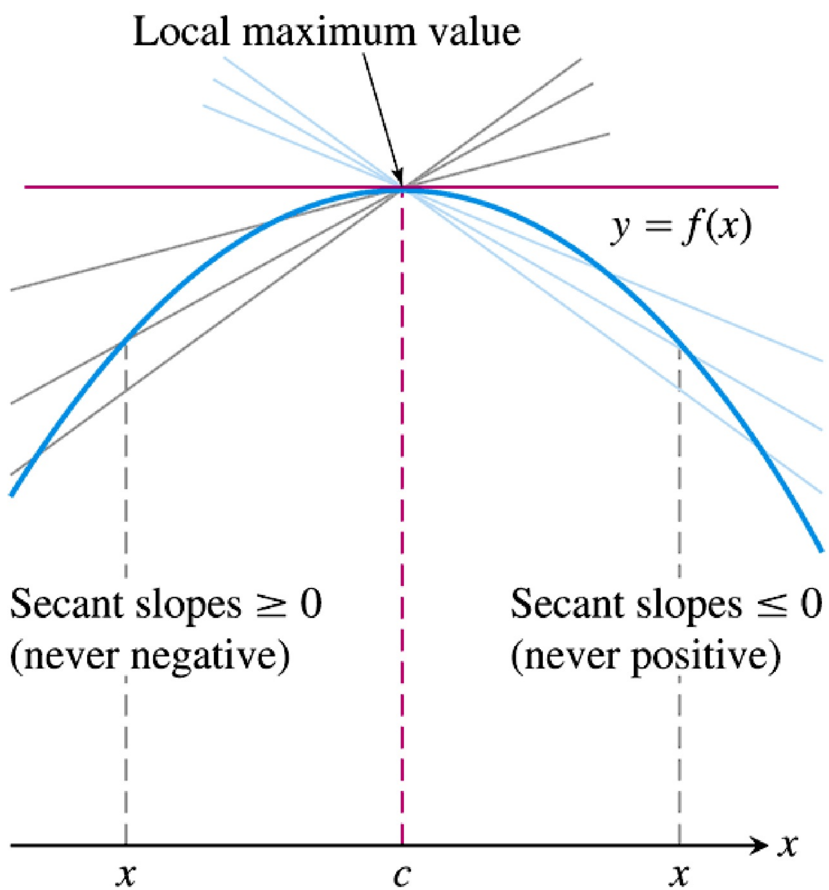


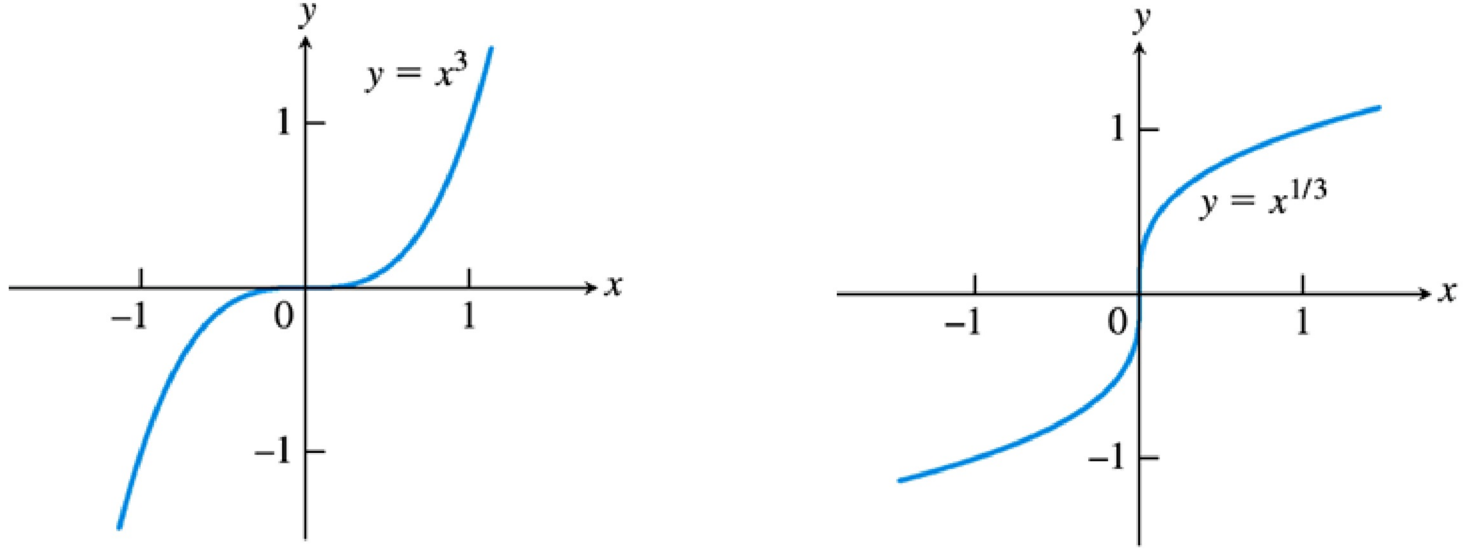
FIGURE 4.6 A curve with a local

Bewijs: **NIET**

Enkel extrema (lokaal of absoluut):
- In inwendig punt waar f ’(c) = 0
- In inwendig punt waar f ‘ (c) niet bestaat
- In een randpunt

Definitie van een kritisch punt
Een inwendig punt c van het domein van een functie f met f'(c)=0 of waarin f' niet bestaat wordt een kritisch punt genoemd

! Niet elk kritisch punt is een lokaal minimum of maximum !



f'(0)=0

f'(0) bestaat niet

Het punt x=0 is een kritisch punt maar geen extremum

Hoe vind je het absolute minimum of maximum van een continue functie f op een eindig gesloten interval ?

1. Bereken f in alle kritische punten en de beide eindpunten
2. Neem de grootste (maximum) of de kleinste (minimum)

Voorbeeld: $y = x^{2/3}$ op [-2,3]

$f(x) = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$

$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

kritisch punt in $x = 0$

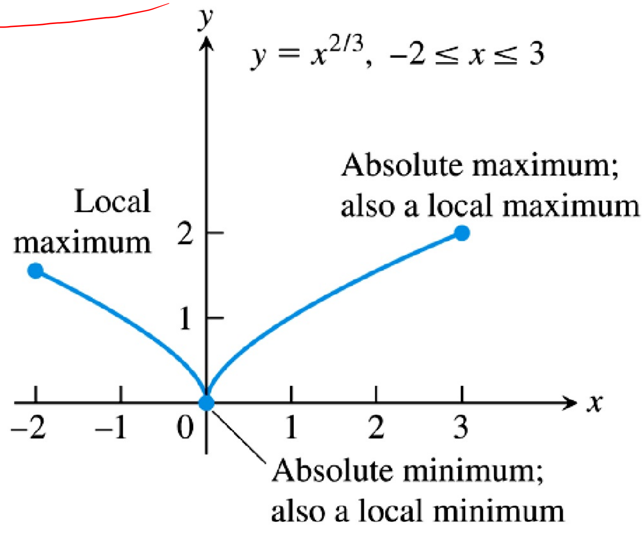


FIGURE 4.8 The extreme values of $f(x) = x^{2/3}$ on $[-2, 3]$ occur at $x = 0$ and $x = 3$ (Example 4).

$f(0) = 0$

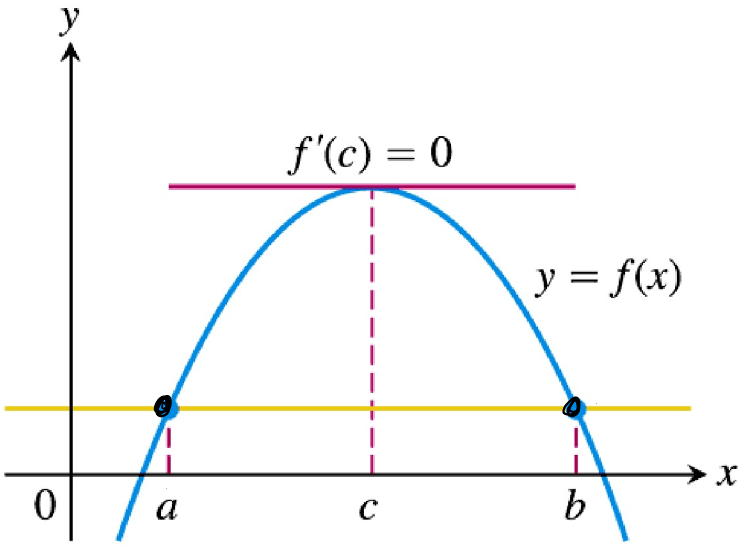
$f(-2) = \sqrt[3]{4}$

$f(3) = \sqrt[3]{9}$

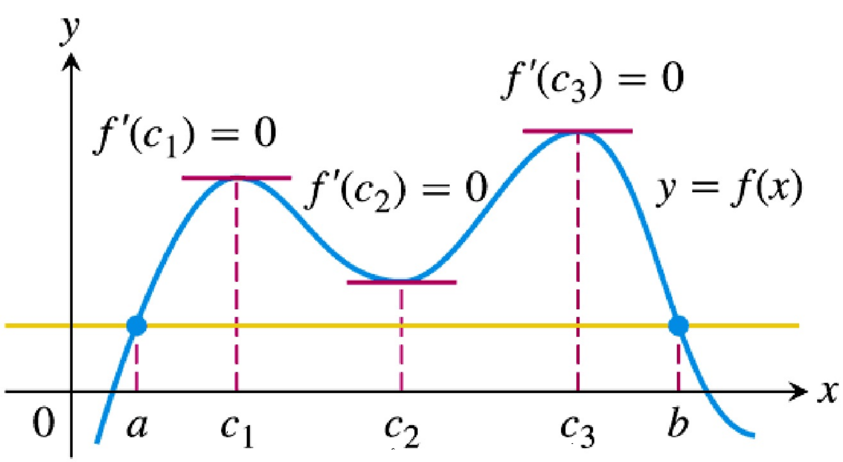
4.2

De middelwaardestelling

Theorema van Rolle



(a)



(b)

Stelling: Indien f(x) continu is in [a,b] en differentieerbaar in]a,b[en indien

f(a) = f(b)

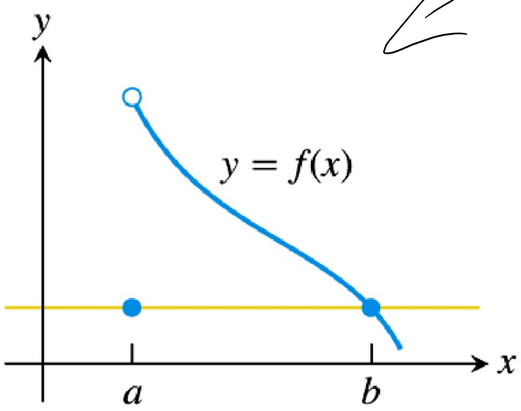
Dan bestaat er een getal c in]a,b[, waarvoor

f'(c) =0.

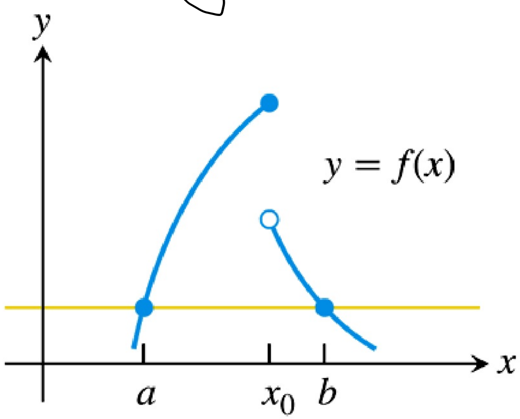
Bewijs **NIET**

FIGURE 4.10 Rolle's Theorem says that a differentiable curve has at least one horizontal tangent between any two points where it crosses a horizontal line. It may have just one (a), or it may have more (b).

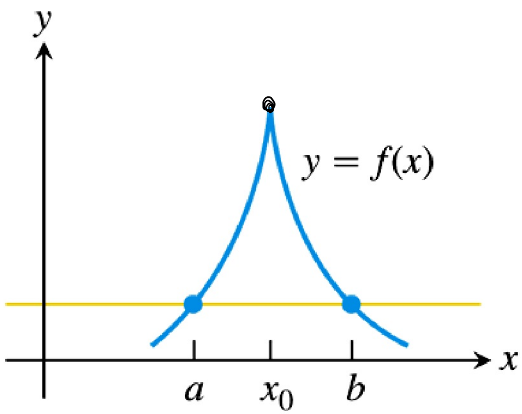
De voorwaarden van continuïteit op [a,b] en afleidbaarheid op]a,b[zijn essentieel !



(a) Discontinuous at an endpoint of $[a, b]$



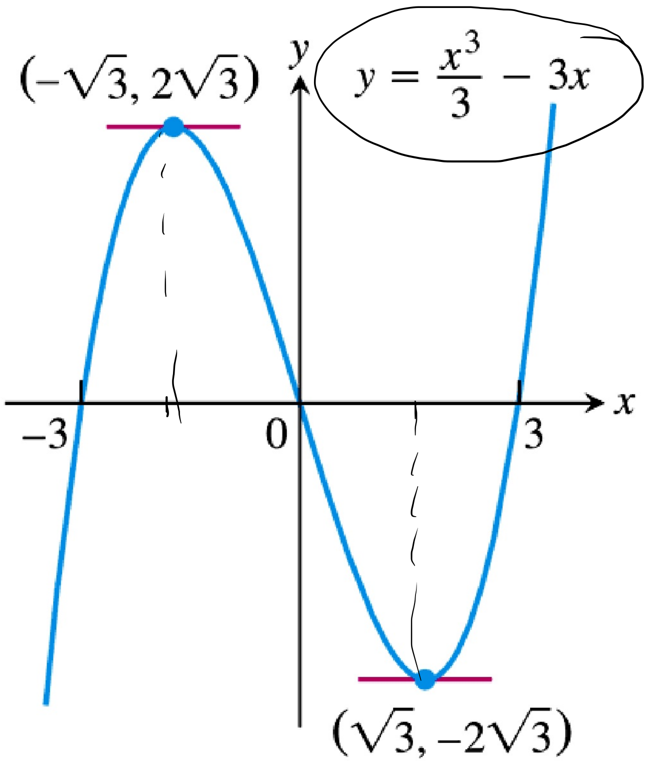
(b) Discontinuous at an interior point of $[a, b]$



(c) Continuous on $[a, b]$ but not differentiable at an interior point

FIGURE 4.11 There may be no horizontal tangent if the hypotheses of Rolle's Theorem do not hold.

Voorbeeld: De onderstaande functie op [-3,3]



$y' = x^2 - 3$

$y' = 0 \iff x^2 = 3$

$\iff x = \pm\sqrt{3}$

FIGURE 4.12 As predicted by Rolle's Theorem, this curve has horizontal tangents between the points where it crosses the x-axis (Example 1).

Middelwaardestelling

Indien f(x) continu is in [a,b] en differentieerbaar in]a,b[, dan bestaat er minstens een getal c in]a,b[waarvoor geldt dat:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bewijs **NIET**

$A(a, f(a))$

$B(b, f(b))$

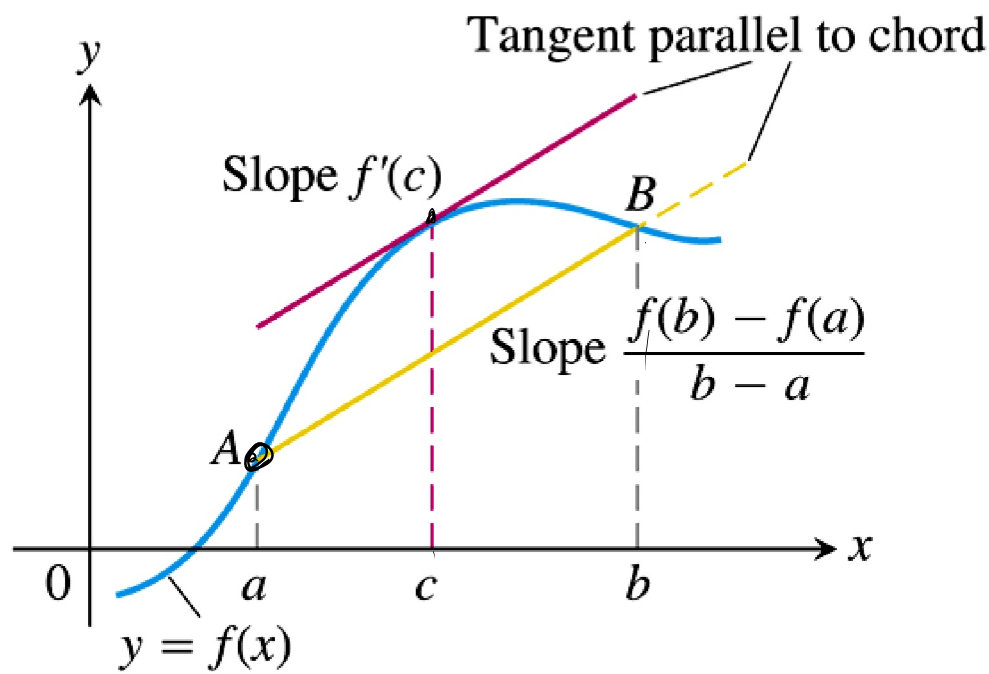


FIGURE 4.14 Geometrically, the Mean Value Theorem says that somewhere between *A* and *B* the curve has at least one tangent parallel to chord *AB*.

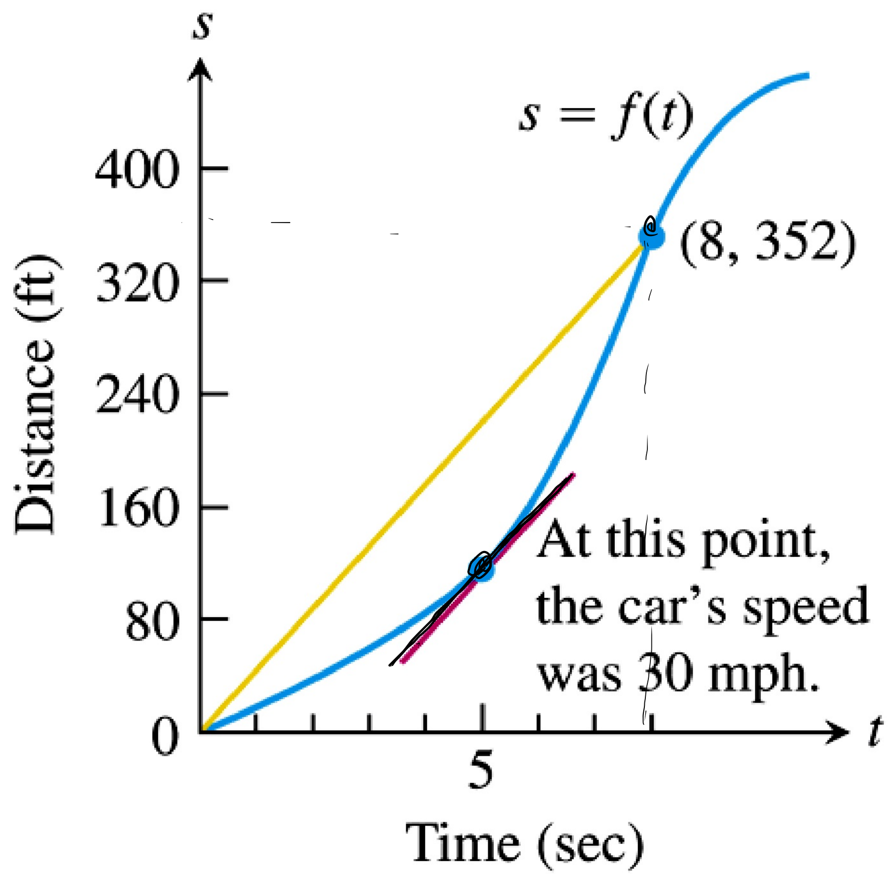
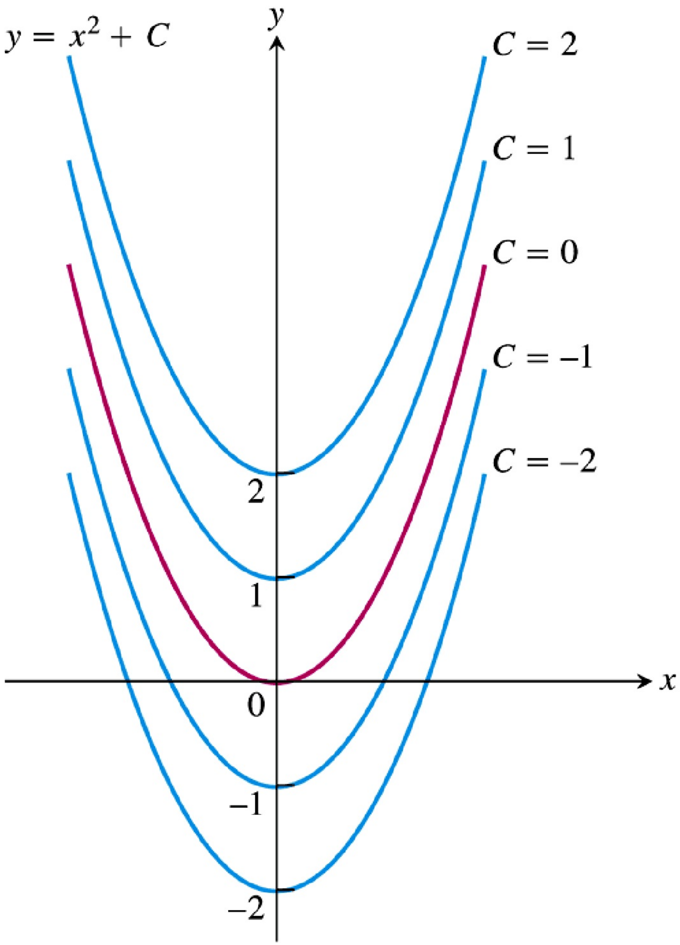


FIGURE 4.19 Distance versus elapsed time for the car in Example 4.

Er is steeds een tijdstip waarop je met een snelheid rijdt die gelijk is aan je gemiddelde snelheid



Gevolg 1: Functies waarvan de afgeleide op een open interval]a,b[overal 0 is, zijn constant op dit interval

Gevolg2 : Functies met dezelfde afgeleide op een open interval]a,b[**zijn op een constante na gelijk op dit**

$f' = g'$

$(f-g)' = 0$

$f - g = \text{Cst}$

Bewijs **NIET**

FIGURE 4.20 From a geometric point of view, Corollary 2 of the Mean Value Theorem says that the graphs of functions with identical derivatives on an interval can differ only by a vertical shift there. The graphs of the functions with derivative $2x$ are the parabolas $y = x^2 + C$, shown here for selected values of C.

Uit de versnelling op elk tijdstip t en de beginsnelheid en de beginpositie kun je de positie van een punt berekenen op elk moment.

4.3

Monotone Functies en de eerste afgeleide Test

$y' = 2x$

$x \in]-\infty, 0]$

DEFINITIONS **Increasing, Decreasing Function**

Let f be a function defined on an interval I and let x_1 and x_2 be any two points in I.

1. If $f(x_1) < f(x_2)$ whenever $x_1 < x_2$, then f is said to be **increasing** on I.
2. If $f(x_2) < f(x_1)$ whenever $x_1 < x_2$, then f is said to be **decreasing** on I.

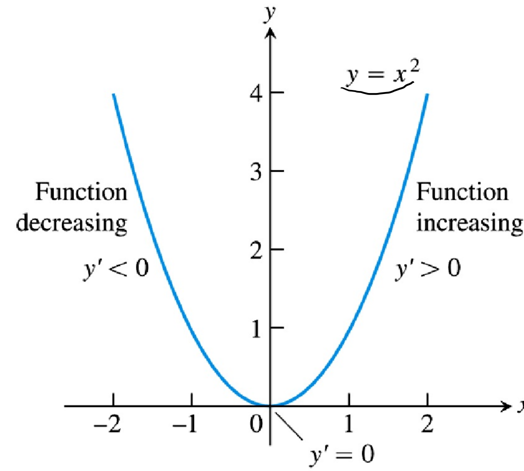
A function that is increasing or decreasing on I is called **monotonic** on I.

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \to \text{f is strikt stijgend} \\ f(x_1) \leq f(x_2) \to \text{f is stijgend} \\ f(x_1) > f(x_2) \to \text{f is strikt dalend} \\ f(x_1) \geq f(x_2) \to \text{f is dalend} \end{cases} \longrightarrow \text{f is monotoon}$$

Eerste afgeleide test voor monotone functies

Zij f continu op [a,b] en afleidbaar op]a,b[dan geldt het volgende:
- Indien f'(x)>0 in elk punt van]a,b[dan is f stijgend op]a,b[
- Indien f'(x)<0 in elk punt van]a,b[dan is f dalend op]a,b[

Bewijs NIET



$]0, \infty[$

$[0, \infty[$

FIGURE 4.21 The function $f(x) = x^2$ is monotonic on the intervals $(-\infty, 0]$ and $[0, \infty)$, but it is not monotonic on $(-\infty, \infty)$.

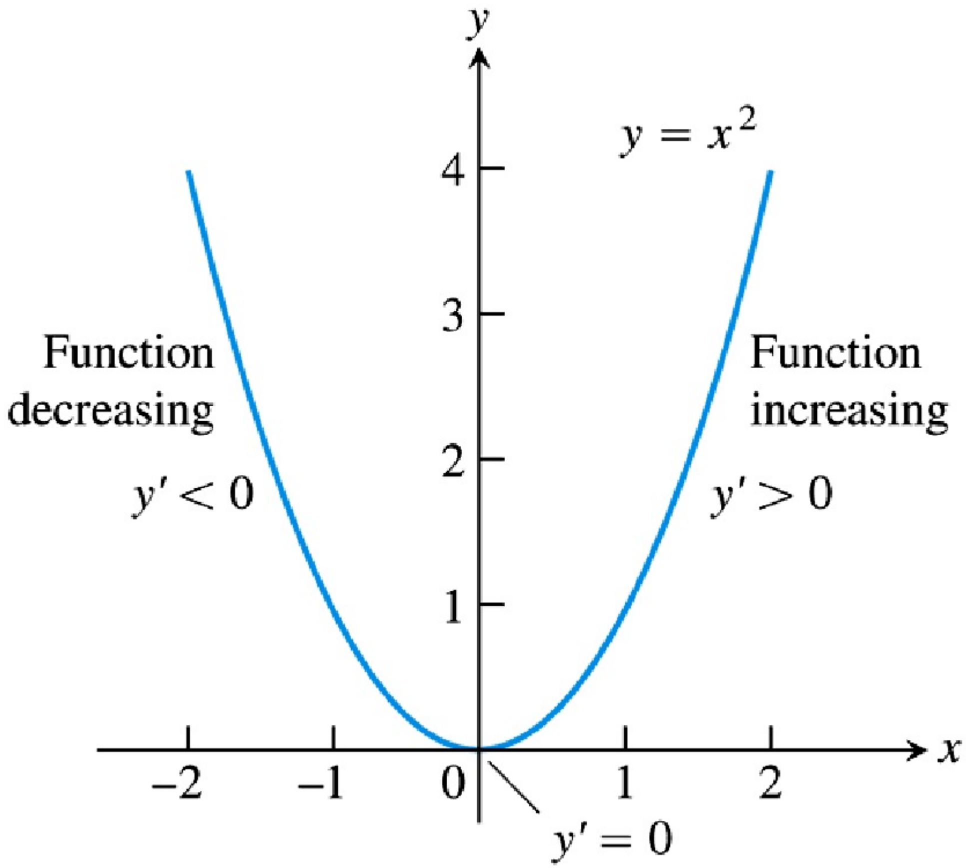


FIGURE 4.21 The function $f(x) = x^2$ is monotonic on the intervals $(-\infty, 0]$ and $[0, \infty)$, but it is not monotonic on $(-\infty, \infty)$.

Eerste afgeleide test voor lokale extrema

Zij c een kritisch punt van een continue functie f en zij f differentieerbaar in elk punt van een interval rond c, behalve eventueel in c zelf.
Er geldt in c:

1. Als f' van negatief verandert naar positief, dan heeft f een lokaal minimum in c
2. Als f' van positief verandert naar negatief, dan heeft f een lokaal maximum in c
3. Als f' niet van teken verandert in c, dan heeft f geen lokaal extremum in c

Bewijs niet

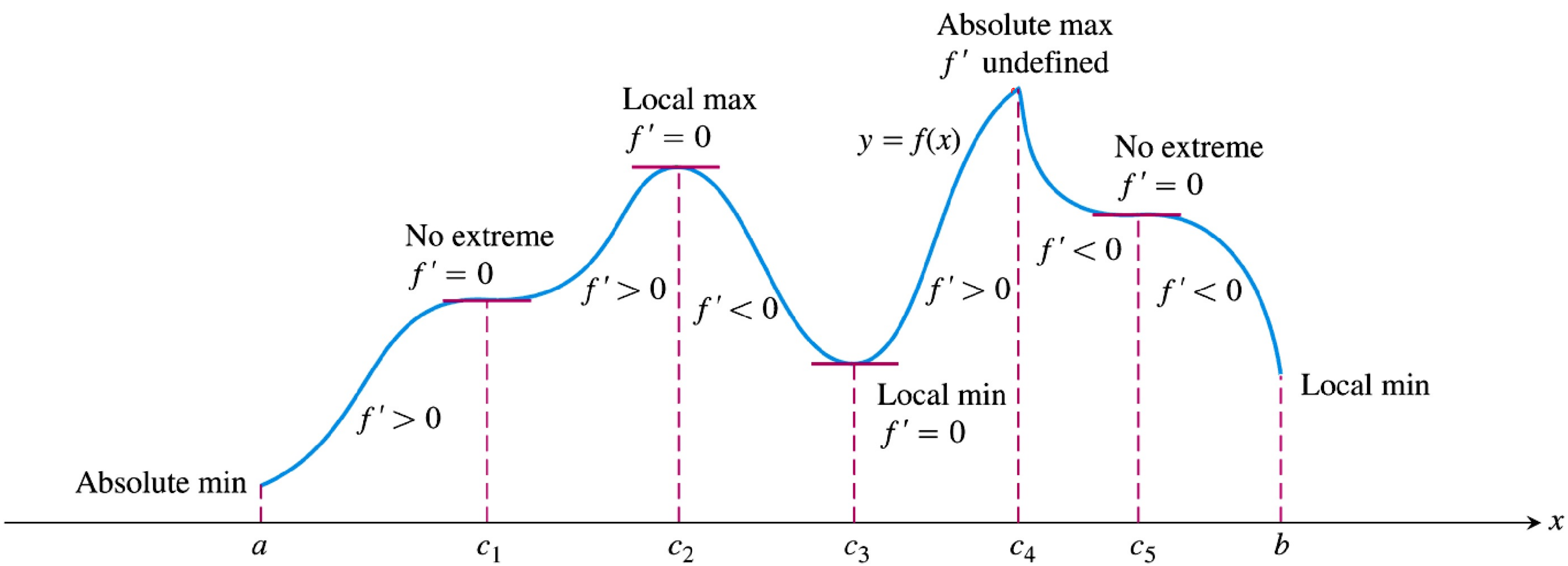


FIGURE 4.23 A function's first derivative tells how the graph rises and falls.

4.4

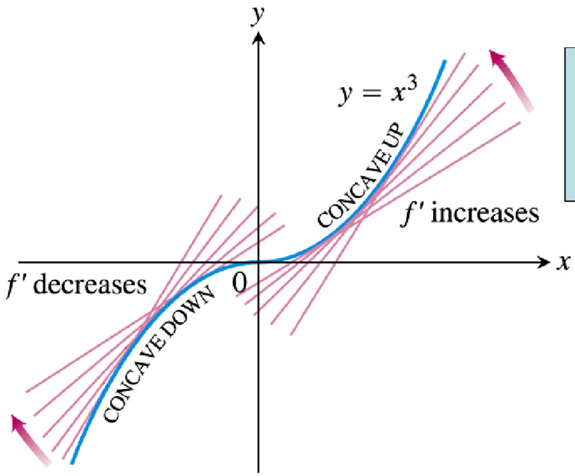
Concaviteit en het Schetsen van een grafiek

Definitie van concaaf boven en concaaf onder
De grafiek van een afleidbare functie y = f(x) is
- Concaaf boven op een open interval I indien f' stijgt op I
- Concaaf onder op een open interval I indien f' daalt op I

Voorbeelden: $y=x^2$

$y' = 2x$

$y'' = 2 > 0$



De 2de afgeleide test voor concaviteit
f tweemaal differentieerbaar op I
(a) f boven concaaf op I als f ''>0 op I
(b) f onder concaaf op I als f ''<0 op I

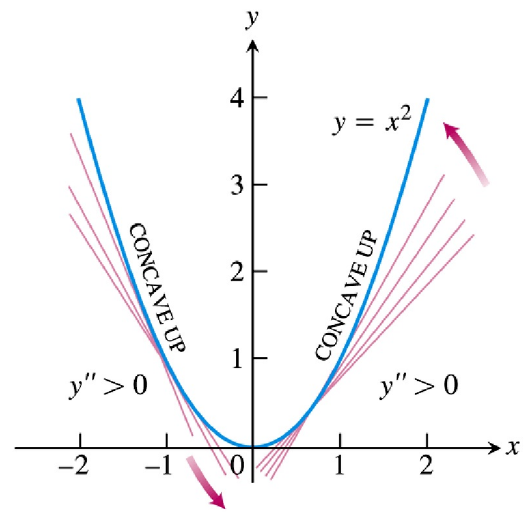
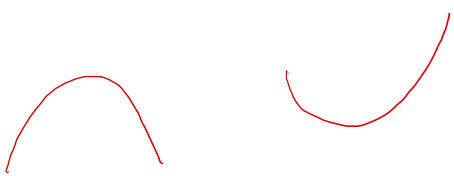


FIGURE 4.26 The graph of $f(x) = x^2$ is concave up on every interval (Example 1b).



Voorbeelden: $y=x^2$

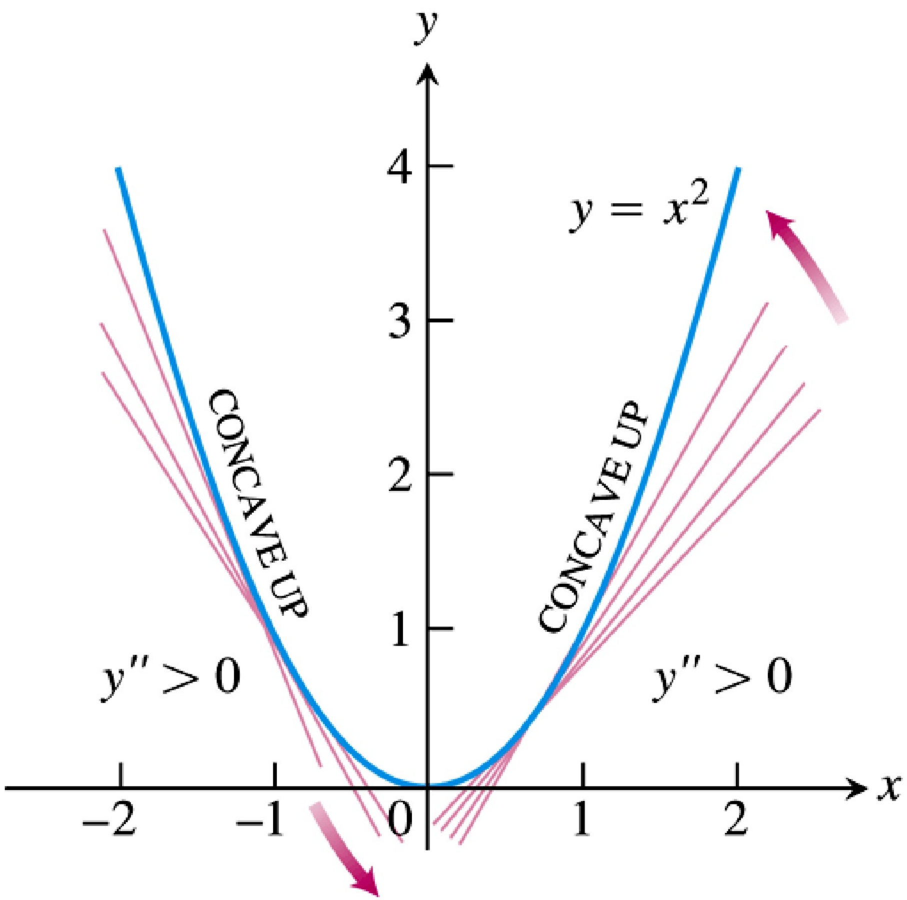


FIGURE 4.26 The graph of $f(x) = x^2$ is concave up on every interval (Example 1b).

Definitie van een buigpunt

Een buigpunt is een punt, waar de functie een raaklijn heeft en van concaviteit verandert.

$y' = \cos x$

$y'' = -\sin x$

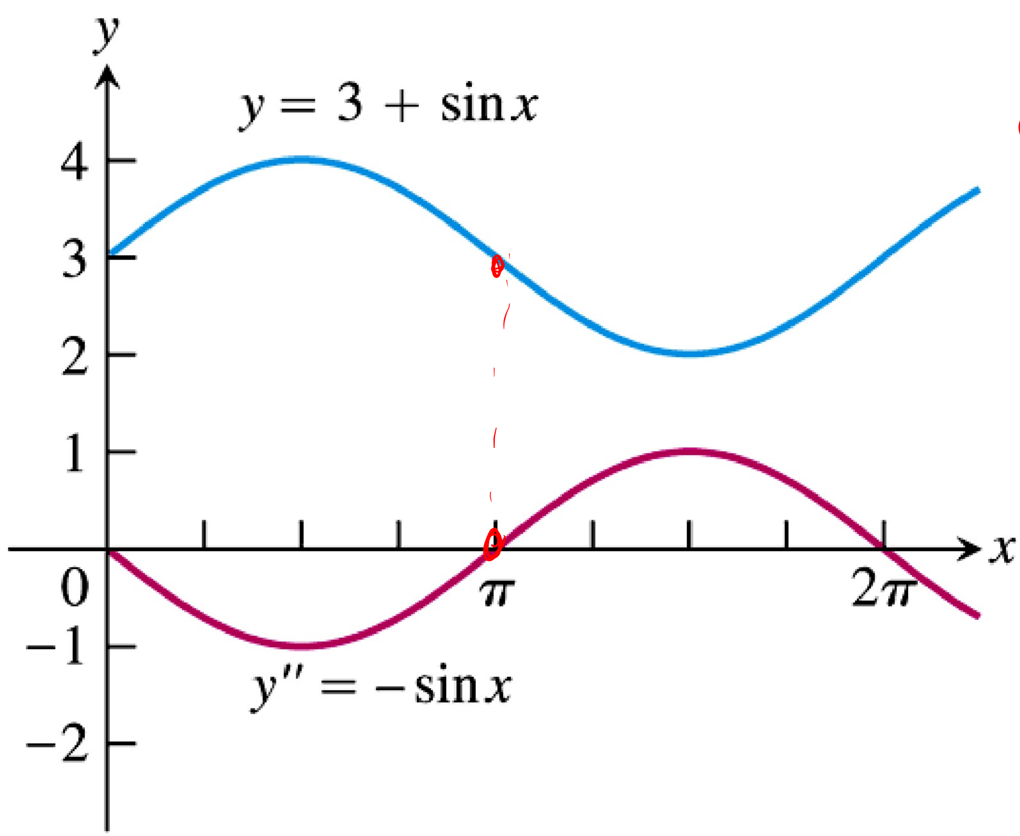
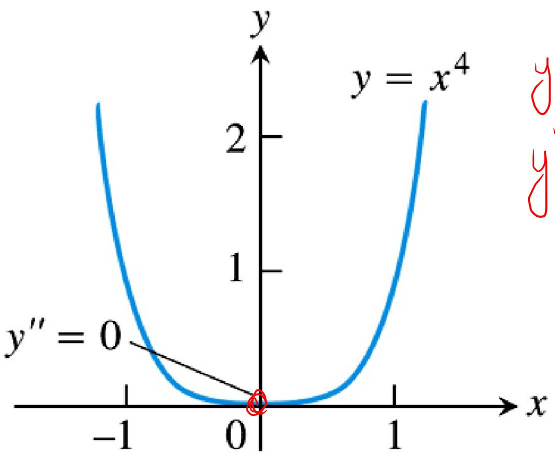


FIGURE 4.27 Using the graph of y'' to determine the concavity of y (Example 2).

y=x⁴ heeft geen buigpunt
Alhoewel y''(0)=0

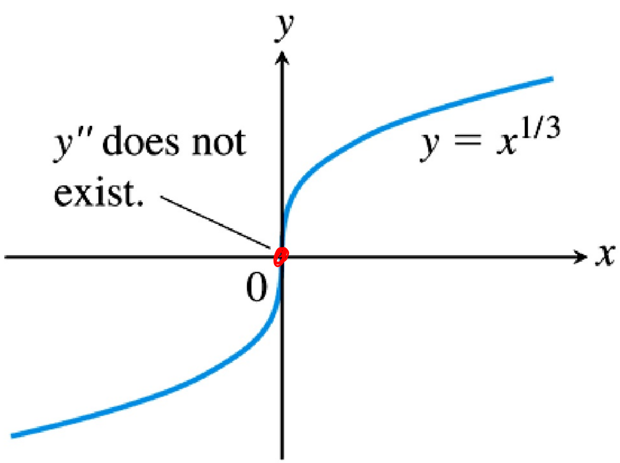


$y' = 4x^3$

$y'' = 12x^2 > 0$

FIGURE 4.28 The graph of $y = x^4$ has no inflection point at the origin, even though $y'' = 0$ there (Example 3).

Buigpunt alhoewel y'' niet bestaat



$y' = \frac{1}{3} x^{-2/3}$

$y'' = -\frac{2}{9} x^{-5/3}$

$= -\frac{2}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$

$x < 0 \to y'' > 0$

conc. boven

$x > 0 \to y'' < 0$

conc onder

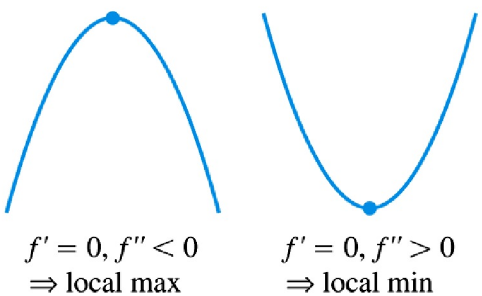
FIGURE 4.29 A point where y'' fails to exist can be a point of inflection (Example 4).

De tweede afgeleide test voor lokale extrema

Zij f ” continu op een open interval rond x=c dan geldt:

1. Als f ’(c) = 0 en f ”(c)<0 dan heeft f een lokaal maximum in c
2. Als f ’(c) = 0 en f ”(c)>0 dan heeft f een lokaal minimum in c
3. Als f ’(c) = 0 en f ”(c)=0 dan weten we niets (lokaal minimum, maximum of ???)

Bewijs niet



Teken de grafiek

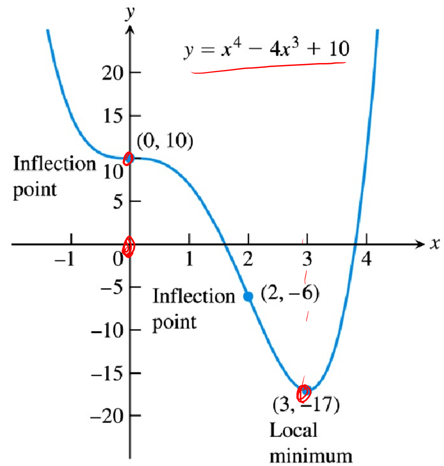


FIGURE 4.30 The graph of $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ (Example 6).

$y = x^4 - 4x^3 + 10$

$y' = 4x^3 - 12x^2$

$= 4x^2(x-3)$

$x = 0$ $\quad$ $x = 3$

y': $-$ 0 $-$ 0 $+$ (0, 3; x)

$y''(3) > 0$

$y'' = 12x^2 - 24$

$= 12x(x-2)$

con bov. $\quad$ ond. $\quad$ bov.

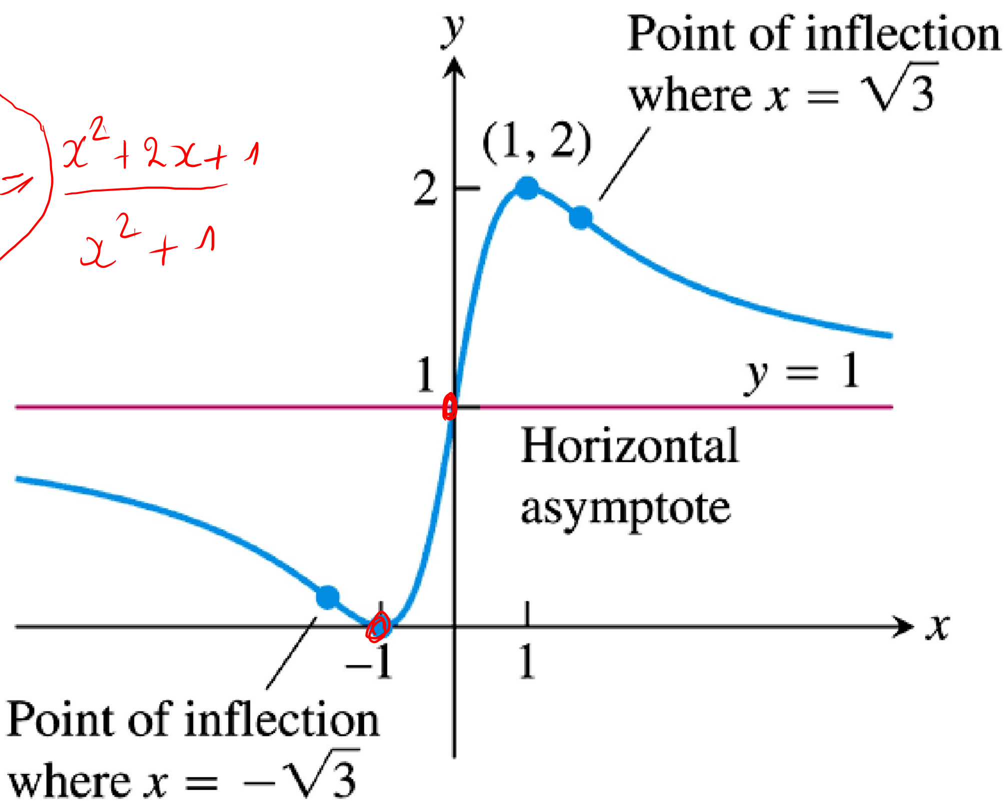
y'': $+$ $-$ $+$ (0, 2; x)

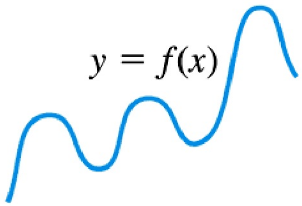
Strategie om y = f(x) te schetsen

1. Bepaal het domein van f en eventuele symmetriën
2. Bereken y' en y''
3. Zoek de kritische punten van f en bepaal het gedrag van f in deze punten
4. Bepaal de punten waar de functie stijgt en daalt
5. Zoek de buigpunten en bepaal de concaviteit van de grafiek
6. Identificeer de asymptoten
7. Plot enkele cruciale punten zoals de snijpunten met de assen en de punten uit 3-5.

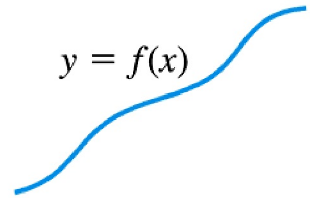
Voorbeeld:

$$y = \frac{(x+1)^2}{1+x^2} \Rightarrow \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$$

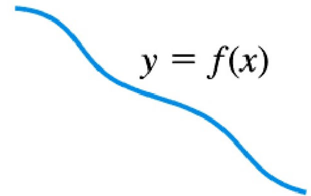




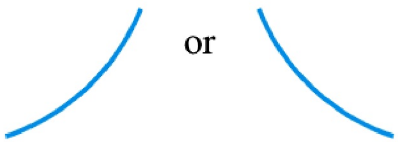
Differentiable $\Rightarrow$ smooth, connected; graph may rise and fall



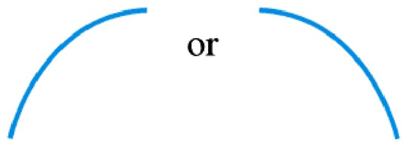
$y' > 0 \Rightarrow$ rises from left to right; may be wavy



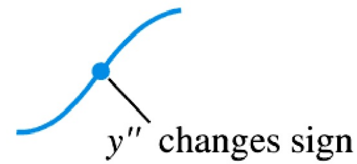
$y' < 0 \Rightarrow$ falls from left to right; may be wavy



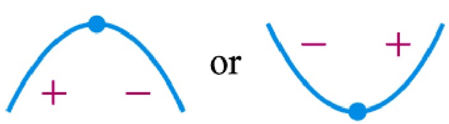
$y'' > 0 \Rightarrow$ concave up throughout; no waves; graph may rise or fall



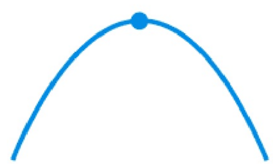
$y'' < 0 \Rightarrow$ concave down throughout; no waves; graph may rise or fall



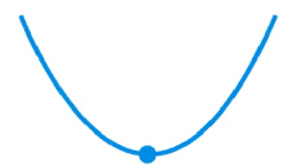
Inflection point



y' changes sign $\Rightarrow$ graph has local maximum or local minimum



$y' = 0$ and $y'' < 0$ at a point; graph has local maximum



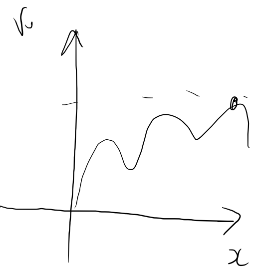
$y' = 0$ and $y'' > 0$ at a point; graph has local minimum

4.5

Toegepaste Optimizatie Problemen

$x = ?$ zodat Volume van doos max.

(1) Figuur met alle geg. + variabelen x



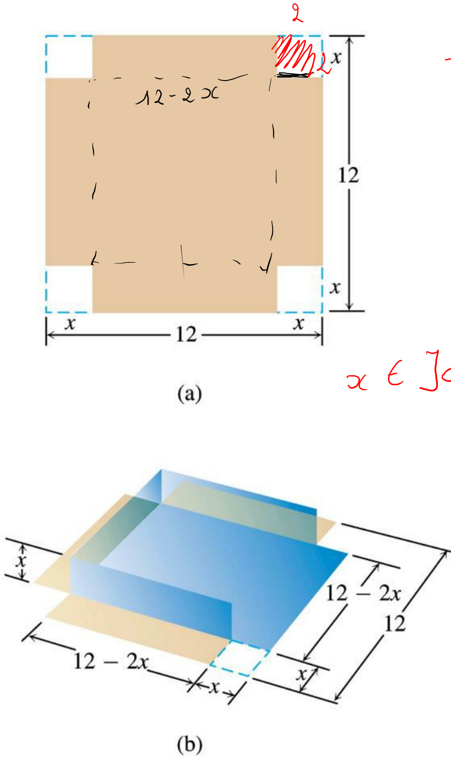


FIGURE 4.32 An open box made by cutting the corners from a square sheet of tin. What size corners maximize the box's volume (Example 1)?

$x \in \,]0,6[$

(2) $V(x) = (12-2x)^2 x$

$= (144 - 48x + 4x^2)x$

$= 4(36x - 12x^2 + x^3)$

(3) $V'(x) = 4(36 - 24x + 3x^2)$

$= 12(12 - 8x + x^2) = 12(x-6)(x-2)$

$D = \Delta = 64 - 48 = 16$

$\cancel{x_1 = \frac{8+4}{2}} = 6$

$x_2 = \frac{8-4}{2} = 2$

$\Rightarrow V''(2)$

$V''(x) = 12(-8+2x)$

en dus

$V''(2) = 12(-8+4)$

$= -48 < 0$

$\Downarrow$

$\boxed{x = 2 \text{ is een max.}}$

max. Volume $= 62 \times 2 = 124$