WISKUNDIGE BEWIJSTECHNIEKEN

VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL

STELLINGEN VAN HET TYPE P ⇒ Q (ALS … DAN …)

Rechtstreeks

- We trachten te bewijzen dat als p waar is dan ook q waar is
  - $p \Rightarrow q$ correspondeert met de logische implicatie ($p \rightarrow q$)
  - Om de implicatie te bewijzen schakelen we het enige geval waarbij de implicatie onwaar is (p waar en q onwaar) uit

  Bijv. door

  $p \rightarrow p_1$

  $p_1 \rightarrow p_2$

  …

  $p_n \rightarrow q$

  Daaruit volgt $p \rightarrow q$

Rechtstreeks

- Voorbeeld : Als $n > m > 0$, met n en m reele getallen *dan* $\dfrac{n}{m} > \dfrac{n+1}{m+1}$

- *We bewijzen dit via enkele tussenstappen van de vorm* p → q:

Als $n>m$ dan $mn + n > mn + m$ (we tellen aan beiden kanten van de ongelijkheid *mn* op)

Als $mn + n > mn + m$ dan $(m + 1)\, n > (n + 1)\, m$ (we herschrijven beide termen)

Als $(m + 1)\, n > (n + 1)\, m$ dan $\dfrac{n}{m} > \dfrac{n+1}{m+1}$ (wegens n en m positief)

STELLINGEN VAN HET TYPE $P \Rightarrow Q$ (ALS … DAN …)

- Kunnen ook door contrapositie worden bewezen
- Nuttig als rechtstreeks bewijzen moeilijk is.
- We steunen op $p \to q$ is logisch equivalent met $\neg q \to \neg p$

In een groep van 50 mensen zijn er 4 of meer mensen in dezelfde maand jarig.

BEWIJS DOOR CONTRAPOSITIE

$p \rightarrow q$ is logisch equivalent met $\neg q \rightarrow \neg p$

Dus i.p.v. $p \rightarrow q$ te bewijzen kunnen we $\neg q \rightarrow \neg p$ bewijzen

Voorbeeld1: stel a en b positieve reële getallen

Als $\underbrace{a^2 < b^2}_{p}$ dan $\underbrace{a < b}_{q}$

Via contrapositie wordt het te bewijzen (TB):

als $\underbrace{\neg(a < b)}_{\neg q}$ dan $\underbrace{\neg(a^2 < b^2)}_{\neg p}$

of nog TB: als $a \geq b$ dan $a^2 \geq b^2$

Bewijs: als $a \geq b$ dan $a.a \geq a.b$ en $a.b \geq b.b$

Dus $a.a \geq b.b$ of nog $a^2 \geq b^2$

BEWIJS DOOR CONTRAPOSITIE

$p \to q$ is logisch equivalent met $\neg q \to \neg p$

Dus i.p.v. $p \to q$ te bewijzen kunnen we $\neg q \to \neg p$ bewijzen

Voorbeeld 2: Stel x, y en a reële getallen met $x>y$, dan geldt

$$ax \leq ay \Rightarrow a \leq 0.$$

Via contrapositie wordt het te bewijzen (TB):

$$a > 0 \Rightarrow ay < ax$$

Klopt, volgt direct uit $y < x$ en de eigenschappen voor ongelijkheden

Dus TB is bewezen

BEWIJS UIT HET ONGERIJMDE

Ook genoemd: door contradictie

Stel p is te bewijzen

We gaan nu $\neg p$ aannemen en dan hieruit proberen een eigenschap q af te leiden die in strijd is met axioma’s of met gekende eigenschappen.

Omdat $\neg p \rightarrow q$ dan waar is

En q onwaar *(volgens onze axioma’s of gekende eigenschappen)*

Volgt hieruit dat $\neg p$ *(onze aanname)* onwaar moet zijn, of dus p waar.

Kan toegepast worden voor eender welk type van stelling!

BEWIJS UIT HET ONGERIJMDE

Bewijs dat er geen gehele getallen n en m bestaan zodat $8n-6m=101$

Stel er bestaan wel gehele getallen n en m zodat $8n-6m=101$

Dan $101 = 8n-6m = 2 \times (4n-3m)$

Dan is 101 als veelvoud van 2 even

Is in contradictie met 101 is oneven

BEWIJS UIT HET ONGERIJMDE TOEGEPAST OP STELLINGEN VAN HET TYPE P $\Rightarrow$ Q

$p \Rightarrow q$ correspondeert in logica met $(p \rightarrow q)$

We veronderstellen nu $\neg(p \rightarrow q)$ waar

Dit is logisch equivalent met $(p \wedge \neg q)$

En hieruit proberen we dan een onware bewering t af te leiden

Dus $(p \wedge \neg q) \rightarrow t$ waar

Maar t is onwaar

Hieruit volgt dat aanname $(p \wedge \neg q)$ onwaar moet zijn, en dus $\neg(p \rightarrow q)$ onwaar, en dus $(p \rightarrow q)$ waar.

BEWIJS UIT HET ONGERIJMDE TOEGEPAST OP STELLINGEN VAN HET TYPE P ⇒ Q

Als n is een oneven geheel getal, dan n^2 een oneven geheel getal.

We veronderstellen de negatie is waar, en tonen aan dat dit tot een contractie leidt.

Dus n is een oneven geheel getal en n^2 een even geheel getal.

n oneven, $n = 2k + 1$, met $k \in Z$

Dan $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

Is in contradictie met n^2 is even

BEWIJS UIT HET ONGERIJMDE TOEGEPAST OP STELLINGEN VAN HET TYPE P ⇒ Q

Als x is een rationaal getal, y is een irrationaal getal ,

dan is $x + y$ is een irrationaal getal.

We veronderstellen het omgekeerde

x is een rationaal getal, y is een irrationaal getal en x + y is rationaal

x is een rationaal getal dus $x = p/q$, $x + y$ is rationaal dus $x + y = r/s$,
met $p,q,r,s \in Z$

Dan $p/q + y = r/s$ en dus $y = r/s$ - p/q

en ook $y = (rq - ps) / sq$,

Op gelijke noemer zetten

maar dit is een contractie met y irrationaal

Als breuk van 2 gehele getallen is y rationaal

STELLINGEN VAN HET TYPE P $\Leftrightarrow$ Q

$p \Leftrightarrow q$ correspondeert in logica met $(p \leftrightarrow q)$

Aangezien

$(p \leftrightarrow q)$ logisch equivalent is met $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

kunnen we het bewijs van de equivalentie geven door elke implicatie afzonderlijk te bewijzen, dus

$p \Rightarrow q$ en $p \Leftarrow q$ bewijzen.

Een veel voorkomend geval is: $(p \Rightarrow q)$ rechtstreeks bewijzen

en $(q \Leftarrow p)$ via contrapositie, dus $\neg p \Rightarrow \neg q$ bewijzen

VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL

Voorbeeld zie metatheorie

BEWIJS PER INDUCTIE

Te gebruiken wanneer we iets moeten bewijzen voor een aftelbaar oneindig aantal

Gebaseerd op de volgende **stelling**:

Zij $\{p_n \mid n \in N\}$ een verzameling uitspraken zodat

(a) p_0 waar is (basisstap)

(b) $\forall\, k \in N$: als p_k waar is, dan is p_{k+1} waar (inductiestap)

Dan is p_n waar voor alle $n \in N$

p_k wordt de inductiehypothese genoemd

BEWIJS PER INDUCTIE

Voorbeeld 1 t.b: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$, $\forall\, n \in N$

<u>Bewijs</u> Zij p_n de bewering $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$

Voldoet die aan (a) en (b) uit de vorige stelling?

(a) p_0 is waar, nl. $1 = 1^2$

De som bevat maar één term,
en $(0+1)^2 = 1$

(b) Zij $k \in N$ willekeurig. Onderstel p_k waar, dus $\underline{1 + 3 + \ldots + (2k+1) = (k+1)^2}$

Inductie hypothese (I.H.)

Nu bewering voor *n = k +1 aantonen*

$$\underline{1 + 3 + \ldots + (2k+1)} + (2(k+1)+1) = \underbrace{(k+1)^2}_{\text{Wegens I.H.}} + 2(k+1) + 1 = ((k+1)+1)^2$$

en dus ook p_{k+1} waar

Aangezien k willekeurig is, is bewezen dat $\forall\, k \in N$: als p_k dan p_{k+1}

Dus dan is p_n waar voor alle $n \in N$ (vorige stelling)

$(a+b)^2 =$
$a^2 + 2ab + b^2$

BEWIJS PER INDUCTIE

Voorbeeld 2 : t.b. $2^n > n^2$, $\forall n \in N$, $n \geq 5$

<u>Bewijs</u> Zij p_n de bewering $2^n > n^2$

Voldoet die aan (a) en (b) uit de vorige stelling?

(a) p_5 is waar, nl. $2^5 > 5^2$ $(32 > 25)$

(b) Zij $k \in N$, $k \geq 5$. Onderstel dat p_k waar is, dus als $2^k > k^2$ dan is $2^{k+1} > (k+1)^2$

! Soms makkelijker om inductiehypothese te formuleren ifv k-1, i.e. als $2^{k-1} > (k-1)^2$ dan is $2^k > k^2$

$2^k = 2 \text{ x } 2^{k-1} > 2 \text{ x } (k-1)^2 = 2 \text{ x } (k^2 - 2k+1) = 2k^2 - 4k+2 =$

$k^2 + k^2 - 4k+2 = k^2 + k(k-4) +2 > k^2$ (wegens $k(k-4)+2$ positief, $k > 5$)

Zo is bewezen dat $\forall\ k \in N, k \geq 5$: als p_k dan p_{k+1}

Dus p_n waar voor alle $n \in N$, $n \geq 5$

BEWIJS PER INDUCTIE

Bewijs deze recurrentie relatie per inductie

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + (2n-1) & \text{if } n \geq 2 \\ 1 & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

$$a_n = n^2 \qquad \text{for } n \geq 1$$

Inductie hypothese $a_{n-1} = (n-1)^2$

Basisstap $n = 1$, $a_1 = 1^2 = 1$

Bewijzen van inductiestap $a_n \overset{\text{Def}}{=} a_{n-1} + (2n - 1) \overset{\text{I.H.}}{=} (n-1)^2 + (2n - 1) = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2$

ANDERE VORMEN VAN INDUCTIE

De inductie die hier werd besproken wordt ook **"weak"** induction genoemd.

p_{k+1} volgt uit p_k

Bij **"strong"** induction wordt p_{k+1} bewezen op basis van p_0 …… p_k

Structurele inductie is inductie op structuren, zoals bv formules van propositie logica. Formules werden op inductieve wijze gedefineerd. Formules zijn propositieletters, of bestaan uit subformules. De inductiestap bewijst eeneigenschap van formules op basis van eigenschap subformules. (voorbeelden zie metatheorie)

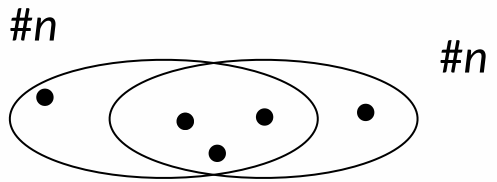
Ander voorbeeld de datastructuur boom. Een boom bestaat uit 1 knoop (wortel) of subomen. Zo kan men bewijzen via structurele inductie dat de relatie tussen het aantal interne knopen i van een complete binaire boom met n bladeren $n = i + 1$ is.

ALLE PAARDEN ZIJN WIT ????

Stelling Alle paarden zijn wit

Bewijs per inductie

- (b) Als n paarden dezelfde kleur hebben, dan ook n+1 paarden



- (a) Paard van Sinterklaas is wit

Wat loopt hier fout?

SORITES PARADOXEN

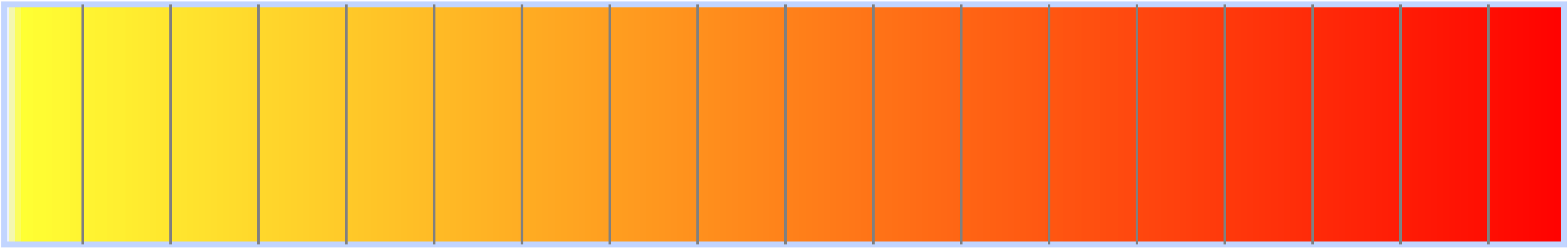
- 1.000.000 zandkorrels vormen samen een zandhoop.
- Als 1.000.000 zandkorrels samen een zandhoop vormen, doen 999.999 zandkorrels dat ook.
- Als 999.999 zandkorrels samen een zandhoop vormen, doen 999.998 zandkorrels dat ook.
- ...
- Dus 1 zandkorrel vormt ook een zandhoop.

Samengevat:

- 1.000.000 zandkorrels vormen samen een zandhoop.
- Als een x-aantal zandkorrels samen een zandhoop vormen, doen x-1 aantal zandkorrels dat ook.
- Dus 1 zandkorrel vormt ook een zandhoop.

VAAGHEID

VAAGHEID



Fuzzy logic of vage logica

EINDE BEWIJZEN