Oplossingen Oefeningen Grondslagen 1: Propositielogica: Syntax en Semantiek

Oefening 1

- $\Sigma^0 = \{\epsilon\}$
- $\Sigma^1 = \{a, b\}$
- $\Sigma^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$
- $\Sigma^3 = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$

Oefening 2

a) $.^r : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gedefinieerd door

   (a) $\epsilon^r = \epsilon$
   (b) $a^r = a$ voor $a \in \Sigma$
   (c) $(aw)^r = w^r a$ voor $a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$

b) $(abcd)^r = (bcd)^r a = (cd)^r ba = d^r cba = dcba = dcba$

c) Te bewijzen $(wa)^r = aw^r$. Per inductie op w

   - Basisstappen
     Als $|w| = 0$ dan is $w = \epsilon$. Dan is ook $(wa)^r = (\epsilon a)^r = a^r = a = a\epsilon = aw^r$
     Als $|w| = 1$ dan is $w = b \in \Sigma$. Dus $(wa)^r = (ba)^r = a^r b = ab = aw^r$
   - Inductiestappen
     Als $|w| = n > 1$ dan geldt voor w' met $|w'| = n - 1$ en $w = bw'$ met $b \in \Sigma$:
     $(wa)^r = (bw'a)^r = (w'a)^r b$ per inductie hebben we dan ook $aw'^r b$.
     Dit komt overeen met $a(bw')^r$ ofte aw^r

d) Te bewijzen $w^{rr} = w$. Per inductie op w

   - Basisstappen
     Als $|w| = 0$, dan is $w = \epsilon$. Dus $\epsilon^{rr} = \epsilon^r = \epsilon = w$
     Als $|w| = 1$, dan is $w = a$, met $a \in \Sigma$. Dus $a^{rr} = a^r = a = w$
   - Inductiestappen
     Als $|w| = n > 1$, dan $w = aw'$ met $a \in \Sigma$ en $w' \in \Sigma^*$.
     Dan $w^{rr} = (aw')^{rr} = (w'^r a)^r$
     Uit c) weten we dat $(w'^r a)^r = aw'^{rr}$ en per inductie hebben we dan aw' wat gelijk is met w

Zie cursus Lambda-calculus.

Oefening 3

1. Een verzameling variabelen $a, b, c, ... \in V$
2. Het symbool voor functiedefinities λ
3. Aanroep symbolen (en)

Oefening 4

1. Een verzameling propositieletters $a, b, c, ...$
2. Logische symbolen $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
3. Hulpsymbolen (en)

Oefening 5

1. d verwijdert alle voorkomens van een letter a in een woord w
2. Te bewijzen per inductie op w: voor alle $\forall w \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma : d(w,a)^r = d(w^r, a)$

   - Basisstappen
     Als $|w| = 0$ dan is $w = \epsilon$, dus
     - $LHS = d(w,a)^r = d(\epsilon, a)^r = \epsilon^r = \epsilon$
     - $RHS = d(w^r, a) = d(\epsilon^r, a) = d(\epsilon, a) = \epsilon$

     Als $|w| = 1$ dan is w gelijk aan een letter ofwel gelijk aan, ofwel verschillend van a.
     Stel $w = a$, dan
     - $LHS = d(w,a)^r = d(a,a)^r = \epsilon^r = \epsilon$
     - $RHS = d(w^r, a) = d(a^r, a) = d(\epsilon, a) = \epsilon$

     Stel $w = b$ en $b \in \Sigma$ en $b \neq a$
     - $LHS = d(w,a)^r = d(b,a)^r = b^r = b$
     - $RHS = d(w^r, a) = d(b^r, a) = d(b, a) = b$
   - Inductiestap
     Als $|w| > 1$, dan $w = cw'$ met $c \in \Sigma$ en $w \in \Sigma^*$
     - $LHS = d(w,a)^r = d(cw', a)^r = (d(c,a)d(w',a))^r = d(w',a)^r d(c,a)$
     - $RHS = d(w^r, a) = d((cw)'^r, a) = d(w'^r c, a) = d(w'^r, a)d(c,a)$

     vanwege de basisstap weten we dat het laatste letter dus gelijk is en per inductie hebben we dan ook dat $d(w',a)^r = d(w'^r, a)$
3. Te bewijzen per inductie op w: voor alle $\forall w \in \Sigma^*, \forall a, b \in \Sigma : d(d(w,a),b) = d(d(w,b),a)$

   - Basisstappen
     Als $|w| = 0$ dan is $w = \epsilon$, dus
     - $LHS = d(d(w,a),b) = d(d(\epsilon,a),b) = d(\epsilon,b) = \epsilon$
     - $RHS = d(d(w,b),a) = d(d(\epsilon,b),a) = d(\epsilon,a) = \epsilon$

     Als $|w| = 1$ dan is w gelijk aan een letter ofwel gelijk aan, ofwel verschillend van a en/of b. Gezien = symmetrisch is, hoeven we het maar voor één letter te bekijken. We nemen a.
     Stel $w = a$, dan

- $LHS = d(d(w,a),b) = d(d(a,a),b) = d(\epsilon,b) = \epsilon$
- $RHS = d(d(w,b),a) = d(d(a,b),a) = d(a,a) = \epsilon$

Stel $w = c$ en $c \in \Sigma$ en $c \neq a$ en $c \neq b$

- $LHS = d(d(w,a),b) = d(d(c,a),b) = d(c,b) = c$
- $RHS = d(d(w,b),a) = d(d(c,b),a) = d(c,a) = c$

- Inductiestap Als $|w| > 1$, dan $w = cw'$ met $c \in \Sigma$ en $w \in \Sigma^*$
  - $LHS = d(d(w,a),b) = d(d(cw',a),b) = d(d(c,a)d(w',a),b) = d(d(c,a),b)d(d(w',a),b)$
  - $RHS = d(d(w,b),a) = d(d(cw',b),a) = d(d(c,b)d(w',b),a) = d(d(c,b),a)d(d(w',b),a)$

  vanwege de basisstap weten we dat $d(d(c,a),b) = d(d(c,b),a)$ en per inductie hebben we ook dat $d(d(w',a),b) = d(d(w',b),a)$

Oefening 6

a) De afsluitende stap zorgt ervoor dat "woorden" die niet gevormd kunnen worden via stap 1 of 2 niet beschouwd kunnen worden als een formule. Bijvoorbeeld: $\neg pq$ en $p \rightarrow\rightarrow q$ zijn geen formules.

b) i) ja
ii) neen: er staan geen haakjes, de constructieboom zou ambigu zijn
iii) ja

Oefening 7

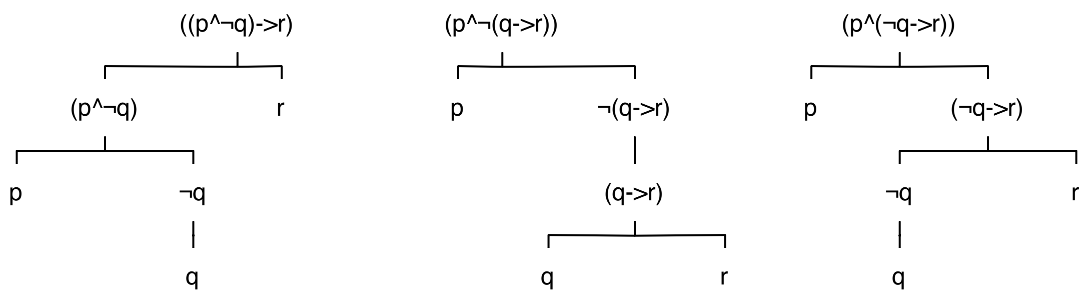
b = "de bus komt", a = "de tram komt", e = "de trein komt"

a) $(\neg b \rightarrow (a \wedge e))$

b) $((\neg e \rightarrow a) \rightarrow \neg(e \wedge b))$

Oefening 8

$((p \wedge \neg q) \rightarrow r)$, $(p \wedge \neg(q \rightarrow r))$, $(p \wedge (\neg q \rightarrow r))$



Oefening 9

Vermits de propositiesymbolen telkens herhaald worden, zouden we deze kunnen weglaten en ze enkel onderaan in de bladeren van de boom schrijven.

Oefening 10

Gebalanceerde haakjes

- Basisstap: () is een rij gebalanceerde haakjes
- Opbouwstappen:
  - Als H een rij gebalanceerde haakjes is, dan is ook (H) een rij gebalanceerde haakjes.
  - Als H_1 en H_2 rij gebalanceerde haakjes zijn, dan is ook H_1H_2 een rij gebalanceerde haakjes.
- Afsluitende stap: niets anders is een rij gebalanceerde haakjes

Let op: bovenstaande oplossing kan tot ambigue bomen leiden. Bijvoorbeeld ()()() heeft twee constructiebomen. Men kan dit oplossen met volgende inductieve definitie:

- Basisstap: () is een rij gebalanceerde haakjes
- Opbouwstappen:
  - Als H een rij gebalanceerde haakjes is, dan is ook (H) een rij gebalanceerde haakjes.
  - Als H een rij gebalanceerde haakjes is, dan is ook $()H$ een rij gebalanceerde haakjes.
  - Als H_1 en H_2 rij gebalanceerde haakjes zijn, dan is ook $(H_1)H_2$ een rij gebalanceerde haakjes.
- Afsluitende stap: niets anders is een rij gebalanceerde haakjes

Natuurlijke Expressies (NE)

- Basisstap: elke $n \in \mathbb{N}$ is een natuurlijke expressie
- Opbouwstappen:
  - Als N_1 en N_2 natuurlijke expressies zijn, dan zijn ook $(N_1 + N_2)$, $(N_1 - N_2)$, $(N_1 * N_2)$ en (N_1/N_2) natuurlijke expressies.
- Afsluitende stap: niets anders is een natuurlijke expressie

Oefening 11

a) prefix: $+(1, -(*(2, 7), 5))$ en postfix:$(1, ((2, 7)*, 5)-)+$

b) prefix: $*(+(3, 4), /(8, 2))$ en postfix: $((3, 4)+, (8, 2)/)*$

c) prefix: $\wedge(\rightarrow (\leftrightarrow (q, r), p), \neg(p))$ en postfix: $(((q, r) \leftrightarrow, p) \rightarrow, (p)\neg)\wedge$

Oefening 12

a)

$$\begin{aligned} [(q \leftrightarrow r)/p]\neg p &= \neg[(q \leftrightarrow r)/p]p && \neg - regel \\ &= \neg(q \leftrightarrow r) && prop.letter - regel \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} [(q \rightarrow s)/p](p \rightarrow q) &= ([(q \rightarrow s)/p]p \rightarrow [(q \rightarrow s)/p]q) && \rightarrow -regel \\ &= ((q \rightarrow s) \rightarrow [(q \rightarrow s)/p]q) && prop.letter - regel \\ &= ((q \rightarrow s) \rightarrow q) && prop.letter - regel \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} [((q \wedge s) \rightarrow \neg p)/r](p \rightarrow p) &= ([((q \wedge s) \rightarrow \neg p)/r]p \rightarrow [((q \wedge s) \rightarrow \neg p)/r]p) && \neg - regel \\ &= (p \rightarrow [((q \wedge s) \rightarrow \neg p)/r]p) && prop.letter - regel \\ &= (p \rightarrow p) && prop.letter - regel \end{aligned}$$

Oefening 13

Deze oplossingen zijn opgesteld in de veronderstelling dat x een natuurlijk getal is!

a)

$$\begin{aligned} (\neg(p \wedge q) \wedge r) &\simeq \neg(x \leq 1 \wedge x \leq 3) \wedge x \geq 2 \\ &\simeq (\neg(x \leq 1) \wedge x \geq 2) \\ &\simeq (x > 1 \wedge x \geq 2) \\ &\simeq x \geq 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} ((\neg p \wedge q) \wedge r) &\simeq (\neg(x \leq 1) \wedge x \leq 3) \wedge x \geq 2 \\ &\simeq ((x > 1 \wedge x \leq 3) \wedge x \geq 2) \\ &\simeq ((x = 2 \vee x = 3) \wedge x \geq 2) \\ &\simeq (x = 2 \vee x = 3) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \neg(p \wedge (q \wedge r)) &\simeq \neg(x \leq 1 \wedge (x \leq 3 \wedge x \geq 2)) \\ &\simeq \neg(x \leq 1 \wedge (x = 2 \vee x = 3)) \\ &\simeq alle\ natuurlijke\ getallen \end{aligned}$$

Oefening 14

a) $V(p \wedge q) = 0$, dit kan je aflezen in de waarheidstabel van $p \wedge q$, bekijk de lijn waar $p = 0$ en $q = 1$.
$V(p \uparrow q) =?$, dit is afhankelijk van de betekenis van $\uparrow$

b) Het boek geeft een precieze definitie voor $V(p), V(q), ...$ met $p, q, ...$ propositieletters. Het geeft echter niet de definitie va $V(\varphi)$ met φ een willekeurig propositieformule. Hiervoor zijn nodig: een definitie voor de waarderingen van de connectieven en hoe deze gecombineerd kunnen worden.

c) Definitie: de waardering van een k-plaatsige connectief $\circ$ is een functie $f_\circ : \{0,1\}^k \to \{0,1\} = V(\circ)$

Definitie: zij V een waardering. De waardering van een formule φ is gedefinieerd door:

- Als $\varphi = p$, met p een propositieletter, dan is $V(\varphi) = V(p)$
- Als $\circ$ een k-plaatsige connectief is, en $\sigma_1, ..., \sigma_r$ zijn formules en $\varphi = \circ(\sigma_1, ..., \sigma_r)$ dan is $V(\varphi) = V(\circ)(V(\sigma_1), ..., V(\sigma_r))$

  Let op: er zijn nu 3 V's in het spel: V voor propositieletters, V voor connectieven, en V voor formules, die de semantiek van formules berekent door middel van d).

d)
- $V(\to) = f_\to$ met $f_\to = 1$ als $x = 0$ of $y = 1$ en $f_\to = 0$ anders.
- $V(\leftrightarrow) = f_\leftrightarrow$ met $f_\leftrightarrow = 1 \Leftrightarrow x = y$
- $V(\wedge) = f_\wedge$ met $f_\wedge(x, y) = min(x, y)$
- $V(\vee) = f_\vee$ met $f_\vee(x, y) = max(x, y)$
- $V(\neg) = f_\neg$ met $f_\neg(x) = 1 - x$

e)

$$\begin{aligned} V((p \wedge q) \to r) &= f_\to(V((p \wedge q)), V(r)) \\ &= f_\to(f_\wedge(V(p), V(q)), 0) \\ &= f_\to(f_\wedge(0, 1), 0) \\ &= f_\to(0, 0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Oefening 15

Zie volgende pagina

a) (¬pv¬q)

Eerste manier:

p	q	¬p	¬q	¬pv¬q
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Tweede manier

p	q	¬pv¬q
0	0	1 1 1
0	1	1 1 0
1	0	0 1 1
1	1	0 0 0

b) (p^(q^p))

Eerste manier:

p	q	q^p	(p^(q^p))
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Tweede manier:

p	q	(p^(q^p))
0	0	0 0
0	1	0 0
1	0	0 0
1	1	1 1

c) (¬p^(¬q^r))v((q^r)v(p^r))

Eerste manier

p	q	r	(q^r)	(p^r)	¬q	¬p	¬q^r	¬p^(¬q^r)	(q^r)v(p^r)	(¬p^(¬q^r))v ((q^r)v(p^r))
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1

Oefening 16

1. $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
2. Exclusive OR (XOR, $\underline{\vee}$)
3. $p \rightarrow q$ is equivalent met $\neg p \vee q$
   $p \leftrightarrow q$ is equivalent met $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Oefening 17

1. XOR
2. $\wedge$
3. c_1 is hier de carry. Voor elke p_i, q_i, $i = 1..8$:
   (a) $r_i = (c_i \underline{\vee} (p_i \underline{\vee} q_i))$
   (b) $c_{i+1} = (p_i \wedge q_i) \vee ((p_i \underline{\vee} q_i) \wedge c_i)$

Oefening 18

a) $\varphi = ((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$

	p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$	$((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$
$v1$	0	0	1	1	1	1
$v2$	0	1	1	1	1	1
$v3$	1	0	0	0	0	1
$v4$	1	1	0	1	1	1

$Mod(\varphi) = \{v1, v2, v3, v4\}$

Merk op: tautologie $(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$

b) $\varphi = (q \wedge (\neg p \vee p))$

	p	q	$\neg p$	$\neg p \vee p$	$(q \wedge (\neg p \vee p))$
$v1$	0	0	1	1	0
$v2$	0	1	1	1	1
$v3$	1	0	0	1	0
$v4$	1	1	0	1	1

$Mod(\varphi) = \{v2, v4\}$

Merk op: $q \Leftrightarrow (q \wedge (\neg p \vee p))$

c) $\varphi = (q \wedge (\neg p \wedge p))$

	p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge p$	$(q \wedge (\neg p \wedge p))$
$v1$	0	0	1	0	0
$v2$	0	1	1	0	0
$v3$	1	0	0	0	0
$v4$	1	1	0	0	0

$Mod(\varphi) = \{\}$

Merk op: $(p \wedge \neg p) = vals$

Oefening 19

a) $\Sigma = \{((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)))\}$

	p	q	$((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)))$
$v1$	0	0	1
$v2$	0	1	1
$v3$	1	0	1
$v4$	1	1	1

$Mod(\Sigma) = \{v1, v2, v3, v4\}$

b) $\Sigma = \{((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))), (p \vee q)\}$

	p	q	$((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)))$	$(p \vee q)$
$v1$	0	0	1	0
$v2$	0	1	1	1
$v3$	1	0	1	1
$v4$	1	1	1	1

$Mod(\Sigma) = \{v2, v3, v4\}$

Opmerking: $Mod(\Sigma \cup \{\varphi\}) \subseteq Mod(\Sigma)$ ten opzichte van alle waarderingen die je kan maken met de propositieletters in zowel Σ en φ.