# Oplossingen Oefeningen Grondslagen 1: Propositielogica: Semantiek en Geldig Gevolg

## Oefening 28

Zoeken naar tegenvoorbeelden. Vul de tabel horizontaal in en stop als je een waardering vindt waarvoor alle formules van $\Sigma$ waar zijn en waarvoor de af te leiden formule $\varphi$ onwaar is.

a) Er is geen tegenvoorbeeld te vinden, m.a.w. $\{p\} \models q \to p$

| $p$ | $q$ | $p$ | $q \to p$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

b) De tweede lijn uit de tabel geeft een tegenvoorbeeld, we kunnen dus dan al stoppen. Tegenvoorbeeld: $V(p) = 0$ en $V(q) = 1$

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $q$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | - | - | - |
| 1 | 1 | - | - | - |

c) Er is geen tegenvoorbeeld te vinden, dus $\{p \to q, q \to s\} \models p \to s$

| $p$ | $q$ | $s$ | $p \to q$ | $q \to s$ | $p \to s$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

## Oefening 29

Te bewijzen: $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \psi$ desda $\{\varphi_1\} \models \varphi_2 \to \psi$

$\Rightarrow$ Te bewijzen $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \psi$ dan $\{\varphi_1\} \models \varphi_2 \to \psi$

Bewijs: Stel $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \psi$

Dan hebben we: $\forall w$ met $w(\varphi_1) = w(\varphi_2) = 1$ geldt $w(\psi) = 1$ (*)

Nu moeten we nog bewijzen dat $\forall w$ met $w(\varphi_1)$ geldt $w(\varphi_2 \to \psi) = 1$

Voor elke $w$ zijn er voor $w(\varphi_2)$ twee mogelijkheden:

- $w(\varphi_2) = 0$, dan is $w(\varphi_2 \to \sigma) = 1$ voor elke formule $\sigma$, dus ook voor $\sigma = \psi$
- $w(\varphi_2) = 1$. Stel $w(\varphi_2 \to \psi) = 0$, dan moet $w(\psi) = 0$. Maar wegens (*) geldt dat $w(\psi) = 1$. Dit is een contradictie, dus $w(\varphi_2 \to \psi) = 1$.

$\Leftarrow$ Te bewijzen $\{\varphi_1\} \models \varphi_2 \to \psi$ dan $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \psi$

Bewijs: Stel $\{\varphi_1\} \models \varphi_2 \to \psi$

Dan hebben we: $\forall w$ : als $w(\varphi_1) = 1$ dan $w(\varphi_2 \to \psi) = 1$ (+)

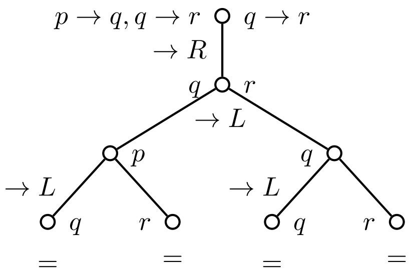
Nu moeten we nog bewijzen dat $\forall w$ als $w(\varphi_1) = w(\varphi_2) = 1$ dan $w(\psi) = 1$

Voor elke zo'n $w$ hebben we dat $w(\varphi_1) = 1$ en bijgevolg ook $w(\varphi_2 \to \psi) = 1$ (wegens (+))

Stel $w(\psi) = 0$), met $w(\varphi_2) = 1$ hebben we dan dat $w(\varphi_2 \to \psi) = 0$, want in contradictie is met (+). Dus $w(\psi) = 1$.

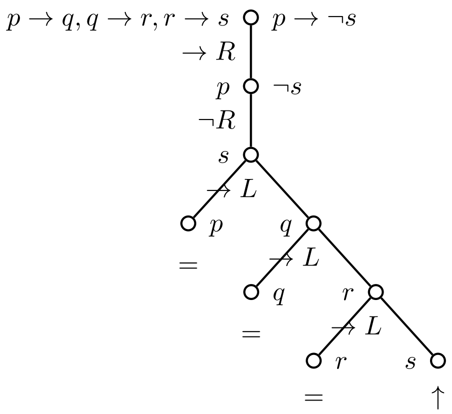
# Oefening 30

a) Merk op dat deze sequent onmiddellijk sluit, want er staat een formule $\varphi$ zowel links als rechts. Uitwerking:



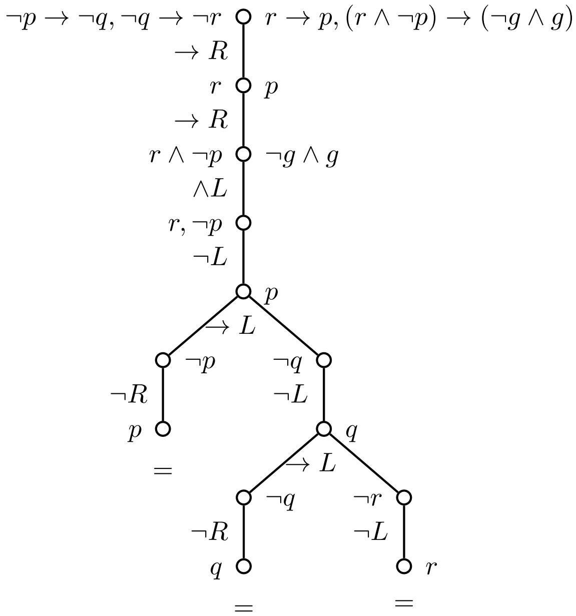

Alle takken sluiten, dus het tableau sluit. Er zijn dus geen tegenvoorbeelden, de gevolgtrekking is dus geldig.

b) Uitwerking:




Tegenvoorbeeld: $V(q) = V(r) = V(s) = V(p) = 1$

c) Uitwerking:




Alle takken sluiten. Dus het tableau sluit. Er is geen tegenvoorbeeld, de gevolgtrekking is geldig.

d) Uitwerking:

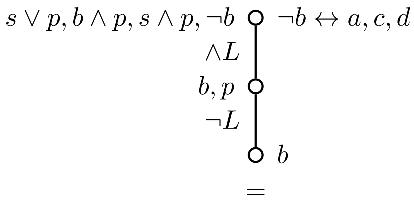
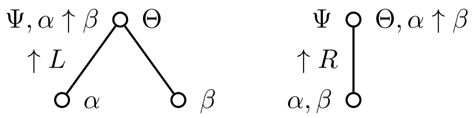



Tableau sluit, de gevolgtrekking is geldig.

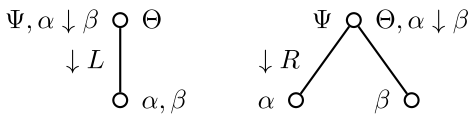
# Oefening 31

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \uparrow \beta$ | $\alpha \downarrow \beta$ | $\alpha \underline{\vee} \beta$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

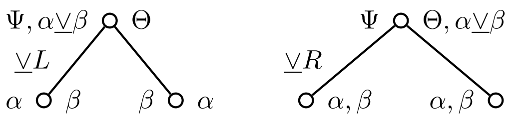
a)




b)



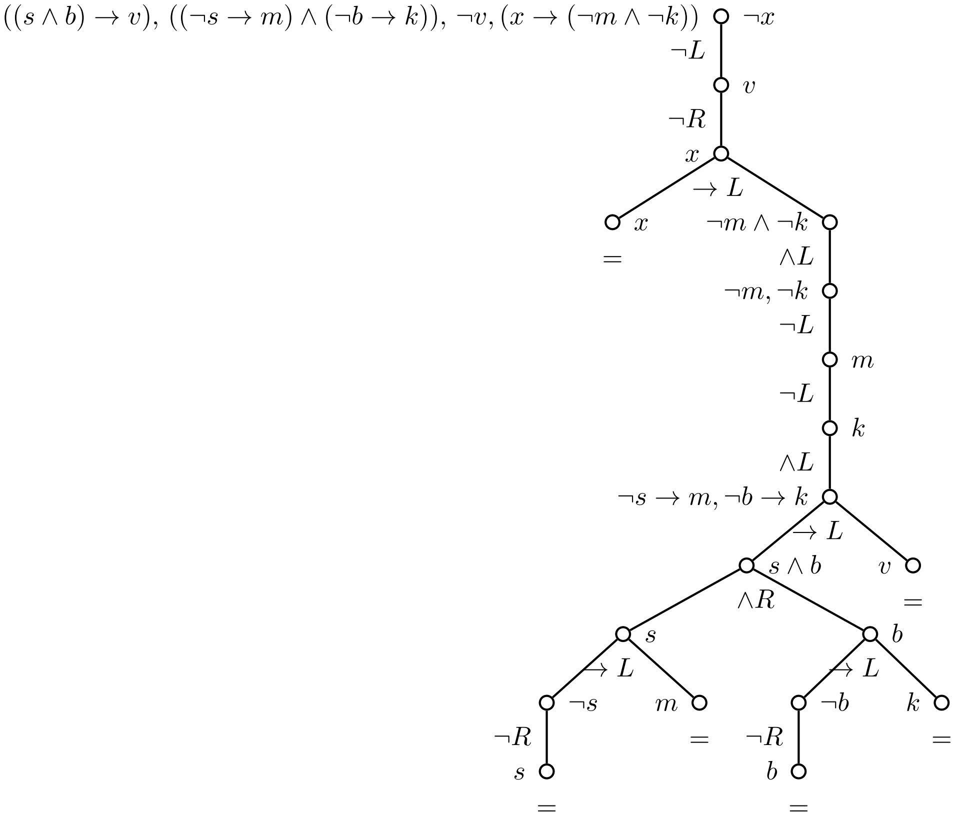

c)



# Oefening 32

- s = superman kan kwaad voorkomen (in staat)
- b = superman wil kwaad voorkomen (bereid)
- v = superman voorkomt kwaad
- k = superman is kwaadwillig
- m = superman is machteloos
- x = superman bestaat

We hebben de volgende vier uitspraken in $\Sigma = \{((s \wedge b) \to v),\ ((\neg s \to m) \wedge (\neg b \to k)),\ \neg v, (x \to (\neg m \wedge \neg k))\}$. Dan kijken we of $\Sigma \models \neg x$. Dus elk model van $\Sigma$ is ook een model voor $\neg x$.




Alle takken sluiten, dit wil zeggen dat er geen tegenvoorbeelden zijn en dat $\neg x$ dus een geldig gevolg is. Superman bestaat dus niet.

# Oefening 33

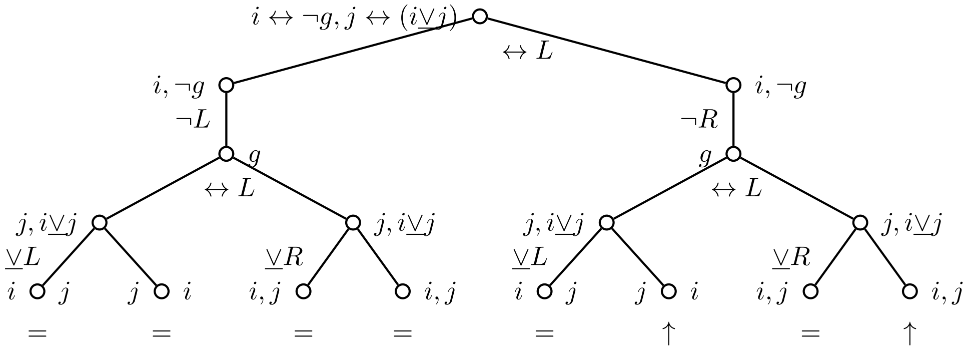
We definiëren de propositieletters als volgt:

$g$: het portret zit in het gouden kistje, $\neg g$: het portret zit in het zilveren kistje

$i$: de inscriptie op het gouden kistje is waar, $\neg i$: de inscriptie op het gouden kistje is vals

$j$: de inscriptie op het zilveren kistje is waar, $\neg j$: de inscriptie op het zilveren kistje is vals

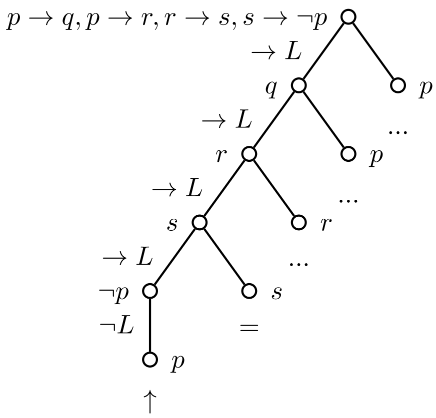
Verder kunnen we de inscripties omzetten in de volgende formules: $i \leftrightarrow \neg g$ en $j \leftrightarrow i \underline{\vee} j$. We kunnen nu op zoek gaan naar modellen voor de opgestelde formuleverzameling zoals weergegeven in figuur onderaan.



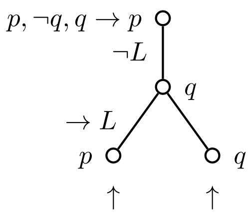

Twee modellen: $V_1(g) = 1, V_1(i) = 0, V_1(j) = 1$ en $V_2(g) = 1, V_2(i) = 0, V_2(j) = 0$. In ieder model is $V(g) = 1$, we mogen dus besluiten dat het portret in het gouden kistje zit.

# Oefening 34

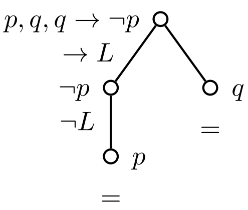
In deze oefening wordt er niet gevraagd alle modellen op te sommen, maar om te kijken of een verzameling formules semantisch consistent is. Een verzameling formules is semantisch consistent als er minstens 1 model voor deze verzameling bestaat. Met andere woorden, als we 1 model voor een verzameling vinden, dan is de vraag opgelost.

a) 


Er is minstens 1 open tak, en deze tak omvat 1 model met $V(p) = 0$ en $V(q) = V(r) = V(s) = 1$. De verzameling formules is dus semantisch consistent.

b) 


Er zijn twee open takken, beiden met het model $V(p) = 1$ en $V(q) = 0$. De verzameling formules is dus semantisch consistent.

c) 

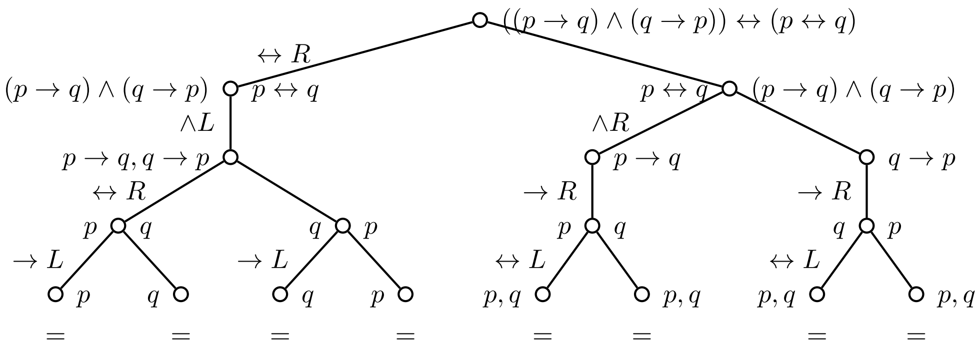

Alle takken sluiten, er zijn dus geen modellen voor deze formuleverzameling. De verzameling formules is bijgevolg semantisch inconsistent.

# Oefening 35

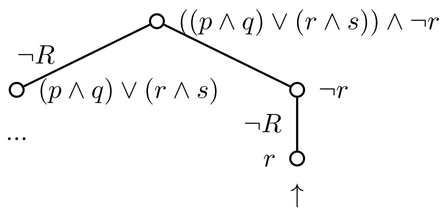
Omdat elke formule $\varphi$ het geldig gevolg is van een inconsistente formuleverzameling $\Sigma$. In afwezigheid van modellen is elke formule afleidbaar (zie afleidingen).

# Oefening 36

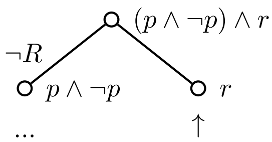
In deze opgave wordt er gevraagd te controleren of de gegeven formules tautologien zijn. Dit doe je door een semantisch tableau voor $\models \varphi$ te maken. Er werd verder ook gevraagd minstens n tegenvoorbeeld te geven indien de formule geen tautologie zou zijn. We hoeven dus, bij het vinden van een open tak, het tableau niet helemaal uit te werken om de vraag te beantwoorden. In onderstaande modeloplossingen werden de takken die niet verder werden uitgewerkt, aangeduid met drie puntjes.

a) 


Alle takken sluiten, wat betekent dat er voor deze formule geen tegenvoorbeelden zijn. Er is dus sprake van een tautologie.

b) 


Er is minstens 1 open tak, dus er is voor deze formule minstens 1 tegenvoorbeeld. Bijgevolg is deze formule geen tautologie. De open tak aangeduid met een pijltje toont dat alle modellen met $V(r) = 1$ een tegenvoorbeeld zijn. Bijgevolg is $V(r) = V(p) = V(q) = V(s) = 1$ een tegenvoorbeeld.

c) 

Er is minstens 1 open tak, dus er is voor deze formule minstens 1 tegenvoorbeeld. Bijgevolg is deze formule geen tautologie. De open tak aangeduid met een pijltje toont dat alle modellen met $V(r) = 0$ een tegenvoorbeeld zijn (ongeacht de waarheidswaarde van $p$. Bijgevolg omvat deze open tak de volgende tegenvoorbeelden:

- $V_1(r) = 0$ en $V_1(p) = 0$
- $V_2(r) = 0$ en $V_2(p) = 1$

# Oefening 37

$\varphi \Leftrightarrow \psi$ desda $\varphi \leftrightarrow \psi$ een tautologies is, desda het sequent $\circ\varphi \leftrightarrow \psi$ sluit.