INTERMEZZO: AXIOMATISCH BEWIJSSYSTEEM

Zoals bij propositielogica bestaat er ook een alternatief bewijssysteem, nl axioma’s en afleidingsregels

Voorbeeld hiervan uit de Wiskunde

- Peano-rekenkunde: theorie voor optellen en vermenigvuldiging van natuurlijke getallen

  Constante: 0

  Functieletters: +, . , S (opvolgfunctie)

  Termen: 0+x, x.y, S(x+Sy)

  0, S0, SS0, SSS0, … komt overeen met 0,1,2,3,…

  Axioma's:

  PA1: $\forall x\ \neg 0 = Sx$ — *0 is van geen enkel getal de opvolger*

  PA2: $\forall x\ \forall y\ (Sx = Sy \rightarrow x = y)$ — *opvolgerfunctie is injectief*

  PA3: $\forall x\ x + 0 = x$ — *recursieve definitie van +*

  $\forall x\ \forall y\ x + Sy = S(x + y)$

  PA4: $\forall x\ x\ .\ 0 = 0$ — *recursieve definitie van .*

  $\forall x\ \forall y\ x\ .\ Sy = x\ .\ y + x$

  PA5: $([0/x]\ \varphi \wedge \forall x\ (\varphi \rightarrow [Sx/x]\ \varphi)) \rightarrow \forall x\ \varphi$ (voor elke formule φ)

  principe van inductie (op S)

PREDIKAATLOGICA: EEN EENVOUDIGE THEORIE

VRIJE
UNIVERSITEIT
BRUSSEL

EENVOUDIGE THEORIE

Inhoud

- Substitutie
- Prenexvormen
- Fragmenten van Predikaatlogica

SUBSTITUTIE

Herinner:

Bewering

Substitutie

Voor termen t, t' en variabele x geldt:

$$V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t')$$

Bewijs: met inductie naar de opbouw van t'.

SUBSTITUTIE

- $V_{M,b}(x) = b(x)$ voor variabelen *x*
- $V_{M,b}(a) = I(a)$ voor constanten *a*
- $V_{M,b}(f(t_1,\ldots,t_k)) = I(f)(V_{M,b}(t_1),\ldots, V_{M,b}(t_k))$

$$V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t')$$

Bewijs: met inductie naar de opbouw van *t'*.

– Als t' = x dan $[t/x]t'$ = t, en dan $V([t/x]t') = V(t)$
  Anderzijds $V_{b[x \mapsto V(t)]}(t') = V_{b[x \mapsto V(t)]}(x) = V(t)$

– Als t' = y en y is een andere variabele of een constante,
  dan $[t/x]t'$ = y en $V([t/x]t') = V(y)$
  Anderzijds $V_{b[x \mapsto V(t)]}(t') = V_{b[x \mapsto V(t)]}(y) = V(y)$

– Inductiehypothese: stel bewering geldt voor termen t_i, i = 1, …, n
  Dan geldt voor $t'=f(t_1, \ldots, t_n)$ dat $V([t/x]t') = I(f)(V([t/x]\, t_1), \ldots, V([t/x]\, t_n))=$
  $I(f)(V_{b[x \mapsto V(t)]}(t_1), \ldots, V_{b[x \mapsto V(t)]}(t_n))$
  Anderzijds:
  $V_{b[x \mapsto V(t)]}(t') = V_{b[x \mapsto V(t)]}(f(t_1, \ldots, t_n)) = I(f)\ (V_{b[x \mapsto V(t)]}(t_1), \ldots, V_{b[x \mapsto V(t)]}(t_n))$

In formules:

Probleem: door substitutie op een vrije variabele kan deze gebonden raken, daarom extra conditie!

Bewering

Als φ een formule is, *t* een term, *x* een variabele en *t* is vrij voor *x* in φ dan geldt in elk model *M* en voor elke bedeling *b*:

$$V_{M,b}([t/x]\varphi) = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(\varphi)$$

SUBSTITUTIE

$$V_{M,b}([t/x]\varphi) = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(\varphi)$$

Bewijs: met inductie naar de opbouw van φ.

Schets

– Eerst voor $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$

– Dan voor $\varphi = \neg\psi$ en alle andere connectieven

– Dan voor $\varphi = \forall z\ \Psi$

- *Hierbij 2 gevallen: x niet vrij en x vrij*

– *En $\varphi = \exists z\ \Psi$ analoog*

- $V_{M,b}(\exists x\ \varphi) = 1$ desda *er is een* $d \in D$ zodat $V_{M,b[x \mapsto d]}(\varphi) = 1$
- $V_{M,b}(\forall x\ \varphi) = 1$ desda *voor alle* $d \in D$ geldt $V_{M,b[x \mapsto d]}(\varphi) = 1$

PRENEXVORM

Er bestaat een verband tussen $\forall$ en $\exists$

- Equivalenties met $\forall$, $\exists$ en $\neg$:
  - $\forall x\ \neg\varphi$ is logisch equivalent met $\neg\exists x\ \varphi$

  Nl.

  $V(\forall x\ \neg\varphi) = 1$

  desda voor alle $d \in D$ geldt dat $V_{b[x \mapsto d]}(\neg\varphi) = 1$

  desda voor alle $d \in D$ geldt dat $V_{b[x \mapsto d]}(\varphi) = 0$

  desda er is geen $d \in D$ zodat $V_{b[x \mapsto d]}(\varphi) = 1$

  desda $V(\exists x\ \varphi) = 0$

  desda $V(\neg\exists x\ \varphi) = 1$

  - $\exists x\ \neg\varphi$ is logisch equivalent met $\neg\forall x\ \varphi$

  Voorbeeld:

  $\neg\neg\neg\exists x\ \forall y\ \varphi \equiv \neg\exists x\ \forall y\ \varphi \equiv \forall x\ \neg\forall y\ \varphi \equiv \forall x\ \exists y\ \neg\varphi$

  $\equiv$ staat voor logisch equivalent met

Equivalenties met $\forall$, $\exists$, $\wedge$ en $\vee$:

Lemma:

Als φ en ψ formules zijn en x een variabele is die *niet vrij voorkomt in* ψ dan zijn de volgende formules logisch equivalent:

$(\exists x\ \varphi) \wedge \psi$ en $\exists x\ (\varphi \wedge \psi)$ — $\psi \wedge (\exists x\ \varphi)$ en $\exists x\ (\psi \wedge \varphi)$

$(\forall x\ \varphi) \wedge \psi$ en $\forall x\ (\varphi \wedge \psi)$ — $\psi \wedge (\forall x\ \varphi)$ en $\forall x\ (\psi \wedge \varphi)$

$(\exists x\ \varphi) \vee \psi$ en $\exists x\ (\varphi \vee \psi)$ — $\psi \vee (\exists x\ \varphi)$ en $\exists x\ (\psi \vee \varphi)$

$(\forall x\ \varphi) \vee \psi$ en $\forall x\ (\varphi \vee \psi)$ — $\psi \vee (\forall x\ \varphi)$ en $\forall x\ (\psi \vee \varphi)$

Als x toch vrij voorkomt in ψ dan kunnen we in $\exists x\ \varphi$ *of* $\forall x\ \varphi$ overgaan op een alfabetische variant

Equivalenties met $\forall$, $\exists$ en $\rightarrow$:

Lemma

Als φ en ψ formules zijn en x een variabele is die *niet vrij voorkomt in* ψ, dan zijn de volgende formules logisch equivalent:

$(\forall x\ \varphi) \rightarrow \psi$ en $\exists x\ (\varphi \rightarrow \psi)$ $\qquad$ $\psi \rightarrow (\forall x\ \varphi)$ en $\forall x\ (\psi \rightarrow \varphi)$

$(\exists x\ \varphi) \rightarrow \psi$ en $\forall x\ (\varphi \rightarrow \psi)$ $\qquad$ $\psi \rightarrow (\exists x\ \varphi)$ en $\exists x\ (\psi \rightarrow \varphi)$

Namelijk (voorbeeld): $(\exists x\ \varphi) \rightarrow \psi \equiv \neg(\exists x\ \varphi) \vee \psi \equiv$
$(\forall x\ \neg\varphi) \vee \psi \equiv \forall x\ (\neg\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\ (\varphi \rightarrow \psi)$

$\equiv$ staat voor logisch equivalent met

$\forall x\, \neg\varphi \equiv \neg\exists x\, \varphi$ $\quad\quad$ $\exists x\, \neg\varphi \equiv \neg\forall x\, \varphi$ $\quad\quad$ $\equiv$ staat voor "is logisch equivalent met"

$$
\begin{array}{llll}
(\exists x\, \varphi) \wedge \psi \equiv \exists x\, (\varphi \wedge \psi) & & \psi \wedge (\exists x\, \varphi) \equiv \exists x\, (\psi \wedge \varphi) \\
(\forall x\, \varphi) \wedge \psi \equiv \forall x\, (\varphi \wedge \psi) & & \psi \wedge (\forall x\, \varphi) \equiv \forall x\, (\psi \wedge \varphi) \\
(\exists x\, \varphi) \vee \psi \equiv \exists x\, (\varphi \vee \psi) & & \psi \vee (\exists x\, \varphi) \equiv \exists x\, (\psi \vee \varphi) \\
(\forall x\, \varphi) \vee \psi \equiv \forall x\, (\varphi \vee \psi) & & \psi \vee (\forall x\, \varphi) \equiv \forall x\, (\psi \vee \varphi)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
(\forall x\, \varphi) \rightarrow \psi \equiv \exists x\, (\varphi \rightarrow \psi) & & \psi \rightarrow (\forall x\, \varphi) \equiv \forall x\, (\psi \rightarrow \varphi) \\
(\exists x\, \varphi) \rightarrow \psi \equiv \forall x\, (\varphi \rightarrow \psi) & & \psi \rightarrow (\exists x\, \varphi) \equiv \exists x\, (\psi \rightarrow \varphi)
\end{array}
$$

Equivalenties met $\forall$, $\exists$ en $\leftrightarrow$

Lemma:

Als φ en ψ formules zijn en x is een variabele die *niet vrij voorkomt in* ψ en y is een variabele die niet vrij voorkomt in φ en ψ, dan zijn de volgende formules logisch equivalent:

$(\exists x\ \varphi) \leftrightarrow \psi$ en

$$((\exists x\ \varphi) \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow (\exists x\ \varphi)) \text{ en}$$
$$((\forall x\ (\varphi \rightarrow \psi)) \wedge (\exists x\ (\psi \rightarrow \varphi)) \text{ en}$$
$$((\forall x\ (\varphi \rightarrow \psi)) \wedge (\exists y\ (\psi \rightarrow [y/x]\varphi)) \text{ en}$$
$$\forall x\ ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\exists y\ (\psi \rightarrow [y/x]\varphi))) \text{ en}$$
$$\forall x\ \exists y\ ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow [y/x]\varphi))$$

PRENEXVORM

Definitie

Prenexvorm

Een formule van de vorm $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\ \psi$, waarbij

- Q_i kwantoren ($\exists$ of $\forall$) zijn,
- $i = 1, \ldots, n$
- ψ een formule is waarin geen kwantoren meer voorkomen

heet een *prenexvorm* met $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n$ als prefix en ψ als matrix.

Voorbeeld:

$\exists x \forall y \forall x_1(((Ryx \to Ay) \to Ax) \to Ax_1)$

PRENEXSTELLING

Prenexstelling:

Voor elke formule φ bestaat er een prenexformule ψ zodat φ en ψ logisch equivalent zijn, i.e ($V(\varphi)=V(\psi)$).

Bewijs: met inductie naar φ.

PRENEXVORM

$\forall x \neg\varphi \equiv \neg\exists x\, \varphi \qquad \exists x \neg\varphi \equiv \neg\forall x\, \varphi$

$\equiv$ staat voor "is logisch equivalent met"

$$
\begin{array}{llll}
(\exists x\, \varphi) \wedge \psi \equiv \exists x\, (\varphi \wedge \psi) & & \psi \wedge (\exists x\, \varphi) \equiv \exists x\, (\psi \wedge \varphi) \\
(\forall x\, \varphi) \wedge \psi \equiv \forall x\, (\varphi \wedge \psi) & & \psi \wedge (\forall x\, \varphi) \equiv \forall x\, (\psi \wedge \varphi) \\
(\exists x\, \varphi) \vee \psi \equiv \exists x\, (\varphi \vee \psi) & & \psi \vee (\exists x\, \varphi) \equiv \exists x\, (\psi \vee \varphi) \\
(\forall x\, \varphi) \vee \psi \equiv \forall x\, (\varphi \vee \psi) & & \psi \vee (\forall x\, \varphi) \equiv \forall x\, (\psi \vee \varphi)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
(\forall x\, \varphi) \to \psi \equiv \exists x\, (\varphi \to \psi) & & \psi \to (\forall x\, \varphi) \equiv \forall x\, (\psi \to \varphi) \\
(\exists x\, \varphi) \to \psi \equiv \forall x\, (\varphi \to \psi) & & \psi \to (\exists x\, \varphi) \equiv \exists x\, (\psi \to \varphi)
\end{array}
$$

Voorbeeld:

$\forall x(\forall y\, (Ryx \to Ay) \to Ax) \to \forall x\, Ax$

$\equiv \forall x(\forall y\, (Ryx \to Ay) \to Ax) \to \forall x_1\, Ax_1$ (alfabetische variant)

$\equiv \forall x(\forall y\, (Ryx \to Ay) \to Ax) \to \forall x_1\, Ax_1$

$\equiv \forall x(\exists y\, ((Ryx \to Ay) \to Ax)) \to \forall x_1\, Ax_1$

$\equiv \forall x(\exists y\, ((Ryx \to Ay) \to Ax)) \to \forall x_1\, Ax_1$

$\equiv \exists x(\exists y\, ((Ryx \to Ay) \to Ax) \to \forall x_1\, Ax_1)$

$\equiv \exists x(\exists y\, ((Ryx \to Ay) \to Ax) \to \forall x_1\, Ax_1)$

$\equiv \exists x \forall y\, (((Ryx \to Ay) \to Ax) \to \forall x_1\, Ax_1)$

$\equiv \exists x \forall y\, (((Ryx \to Ay) \to Ax) \to \forall x_1\, Ax_1)$

$\equiv \exists x \forall y \forall x_1 (((Ryx \to Ay) \to Ax) \to Ax_1)$

Opm. De volgorde van de kwantoren vooraan hangt af van de volgorde waarin je ze naar voren haalt.

Men beperkt zich vaak tot delen (fragmenten) van de predikaatlogica

- Monadische taal: enkel één-plaatsige predikaatletters
  - Voldoende voor behandeling van syllogismen

    Syllogismen: gevolgtrekkingen met 2 aannames en 1 conclusie van de vorm ‘alle/geen/sommige A is/zijn B’

    voorbeeld: alle kaaimannen zijn reptielen
    geen reptiel kan fluiten
    dus geen kaaiman kan fluiten.

FRAGMENTEN VAN DE PREDIKAATLOGICA

- Universele formules: alleen universele kwantoren in hun prefix
- Horn-zinnen
  - zijn universele zinnen van de vorm

    $\forall x_1 \ldots \forall x_n \, (A_1 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B$

    waarbij $A_1, \ldots, A_k, B$ atomaire beweringen zijn

    Worden gebruikt in de programmeertaal PROLOG

    Voorbeeld:

```
sibling(X,Y) :-
    parentS(F,M,X),
    parentS(F,M,Y),
    X \= Y.
```

PREDIKAATLOGICA: METATHEORIE

- Inhoud:
  - Adequaatheid van semantische tableaus
  - De volledigheidsstelling

PREDIKAATLOGICA: METATHEORIE

VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL

ADEQUAATHEID VAN TABLEAUS

Semantische tableaus zijn een juiste methode om de geldigheid van een gevolgtrekking in de predikaatlogica te bewijzen of te weerleggen.

Herinner:

- Beperkt tot taal zonder functiesymbolen, zonder individuele constanten en zonder vrije variabelen

Adequaatheidsstelling (zonder bewijs)

Als Σ een formuleverzameling is en φ een formule, dan geldt:

$\Sigma \models \varphi$ *desda* er bestaat een gesloten semantisch tableau voor $\Sigma \circ \varphi$

Volledigheidsstelling:
Voor de predikaatlogica geldt dat voor iedere formuleverzameling Σ en iedere formule φ

$$\Sigma \vdash \varphi \text{ desda } \Sigma \models \varphi$$

- Correctheid (“soundness”):

  $\Sigma \vdash \varphi$ impliceert $\Sigma \models \varphi$

- Volledigheid (“completeness”):

  $\Sigma \models \varphi$ impliceert $\Sigma \vdash \varphi$

EINDE PREDIKAATLOGICA