PREDIKAATLOGICA: AFLEIDINGEN

VRIJE
UNIVERSITEIT
BRUSSEL

AFLEIDINGEN

We breiden het systeem van natuurlijke deductie uit de propositielogica uit tot predikaatlogica

Afleidingsregels propositielogica blijven geldig

met bijkomende afleidingsregels voor $\forall$ en $\exists$.

- We beperken ons tot formules zonder vrije variabelen.

AFLEIDINGSREGELS

- Extra afleidingsregels predikaatlogica:
  Let op: t is een term zonder variabelen
  d is een willekeurige constante

$$\frac{\forall x\, \varphi \text{ uit } \Sigma}{[t/x]\varphi \text{ uit } \Sigma}\,\forall\mathrm{E}$$

Ook wel de regel van instantiatie genoemd

$$\frac{[d/x]\varphi \text{ uit } \Sigma}{\forall x\, \varphi \text{ uit } \Sigma}\,\forall\mathrm{I} \quad \text{mits } d \text{ niet in } \forall x\, \varphi \text{ of } \Sigma \text{ voorkomt}$$

Ook wel de regel van generalisatie genoemd

AFLEIDINGSREGELS

$$\frac{[t/x]\varphi \text{ uit } \Sigma}{\exists x\,\varphi \text{ uit } \Sigma}\exists\mathrm{I}$$

Mits t vrij is voor x in φ

Als we een speciaal geval bewezen hebben
dan kunnen we de existentiële kwantor invoeren

$$\frac{\exists x\,\varphi \text{ uit } \Phi \qquad \psi \text{ uit } \Sigma,[d/x]\varphi}{\psi \text{ uit } \Phi \cup \Sigma}\exists\mathrm{E},[-[d/x]\varphi] \quad \text{mits } d \text{ niet in } \exists x\varphi \text{ of } \psi \text{ of } \Sigma \text{ voorkomt}$$

Een conclusie uit een existentiële bewering moet
los staan van een specifiek voorbeeld van die bewering

AFLEIDINGSREGELS - BELANGRIJK

Conditie “Mits t vrij is voor x in φ” in ∃I is nodig om de volgende ongewenste afleiding te vermijden:

∃ *Introductieregel*

$$\frac{[t/x]\varphi \text{ uit } \Sigma}{\exists x\varphi \text{ uit } \Sigma}\exists\mathrm{I} \qquad \text{Mits t vrij voor x in } \varphi$$

Uit $\forall y\, Ryy$ mogen we niet afleiden:

$\exists x\, \forall y\, Ryx$ omdat y niet vrij voor x is in $\forall y\, Ryx$

Nl: $\varphi = \forall y\, Ryx$; $t = y$ dan $[y/x]\, \forall y\, Ryx = \forall y\, Ryy$

Dus y is nu gebonden! En dus was y niet vrij voor x in $\forall y\, Ryx$.

VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL

AFLEIDINGEN - OPMERKING

- Deze regels zijn eenvoudiger dan die in het boek, omdat deze beperkt zijn tot formules zonder vrije variabelen.
- De voorwaarden voor de toepassing van deze regels dienen zorgvuldig in acht genomen te worden en altijd bij de verantwoording van een toepassing van de regels worden vermeld.

AFLEIDINGEN: VB 1

- We bewijzen: $\forall x \exists y\, Rxy \vdash \exists y\, Rdy$

1. $\forall x\ \exists y\ Rxy$ uit φ — aanname $\varphi = \forall x\ \exists y\ Rxy$
2. $\exists y\ Rdy$ uit φ — $\forall$E(1) ([t/x] waar t = d)

∧ Eliminatieregels

$$\frac{\varphi \wedge \psi \text{ uit } \Sigma}{\varphi \text{ uit } \Sigma}\wedge\text{E} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi \text{ uit } \Sigma}{\psi \text{ uit } \Sigma}\wedge\text{E}$$

∧ Introductieregel

$$\frac{\varphi \text{ uit } \Sigma \quad \psi \text{ uit } \Phi}{\varphi \wedge \psi \text{ uit } \Sigma \cup \Phi}\wedge\text{I}$$

→ Eliminatieregel

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \text{ uit } \Sigma \quad \varphi \text{ uit } \Phi}{\psi \text{ uit } \Sigma \cup \Phi}\rightarrow\text{E}$$

→ Introductieregel

$$\frac{\psi \text{ uit } \Sigma, \varphi}{\varphi \rightarrow \psi \text{ uit } \Sigma}\rightarrow\text{I, } [\text{-}\varphi]$$

∨ Introductieregels

$$\frac{\varphi \text{ uit } \Sigma}{\varphi \vee \psi \text{ uit } \Sigma}\vee\text{I} \qquad \frac{\psi \text{ uit } \Sigma}{\varphi \vee \psi \text{ uit } \Sigma}\vee\text{I}$$

∨ Eliminatieregel

$$\frac{\varphi \vee \psi \text{ uit } \Sigma \quad \alpha \text{ uit } \Phi, \varphi \quad \alpha \text{ uit } \Psi, \psi}{\alpha \text{ uit } \Sigma \cup \Phi \cup \Psi}\vee\text{E}[\text{-}\varphi, \text{-}\psi]$$

¬ Eliminatieregels

$$\frac{\varphi \text{ uit } \Phi \quad \neg\varphi \text{ uit } \Psi}{\psi \text{ uit } \Phi \cup \Psi}\neg\text{E}$$

$$\frac{\varphi \text{ uit } \Phi, \neg\psi \qquad \neg\varphi \text{ uit } \Psi, \neg\psi}{\psi \text{ uit } \Phi \cup \Psi}\neg\text{E}^*[-\neg\psi]$$

¬ Introductieregel

$$\frac{\varphi \text{ uit } \Sigma, \psi \qquad \neg\varphi \text{ uit } \Phi, \psi}{\neg\psi \text{ uit } \Sigma \cup \Phi}\neg\text{I } [\text{-}\psi]$$

∀ Eliminatieregel

$$\frac{\forall x\, \varphi \text{ uit } \Sigma}{[t/x]\varphi \text{ uit } \Sigma}\forall\text{E}$$

∀ Introductieregel

$$\frac{[d/x]\varphi \text{ uit } \Sigma}{\forall x\, \varphi \text{ uit } \Sigma}\forall\text{I} \quad \text{mits } d \text{ niet in } \forall x\varphi \text{ of } \Sigma \text{ voorkomt}$$

∃ Introductieregel

$$\frac{[t/x]\varphi \text{ uit } \Sigma}{\exists x\, \varphi \text{ uit } \Sigma}\exists\text{I}$$

Mits t vrij voor x in φ

∃ Eliminatieregel

$$\frac{\exists x \varphi \text{ uit } \Phi \quad \psi \text{ uit } \Sigma, [d/x]\varphi}{\psi \text{ uit } \Phi \cup \Sigma}\exists\text{E}, [\text{-}[d/x]\varphi]$$

mits d niet voorkomt in $\exists x\varphi$ of in ψ of in Σ

AFLEIDINGEN: VB 2

We bewijzen: $\forall x\,(Ax \to Bx) \vdash \forall x\, Ax \to \forall x\, Bx$

1.	$\forall x\ (Ax \to Bx)$	uit φ	aanname $\varphi = \forall x\ (Ax \to Bx)$
2.	$\forall x\ Ax$	uit ψ	hulpaanname $\psi = \forall x\ Ax$
3.	Ad	uit ψ	$\forall$E(2)
4.	$Ad \to Bd$	uit φ	$\forall$E(1)
5.	Bd	uit φ, ψ	$\to$E(3,4)
6.	$\forall x\ Bx$	uit φ, ψ	$\forall$I(5) *d* niet in $\forall x\ Bx$, φ, ψ
7.	$\forall x\ Ax \to \forall x\ Bx$	uit φ	$\to$I(6) [-ψ]

$\forall$ *Eliminatieregel*	$\forall$ *Introductieregel*
$\dfrac{\forall x\,\varphi \text{ uit } \Sigma}{[t/x]\varphi \text{ uit } \Sigma}\forall E$	$\dfrac{[d/x]\varphi \text{ uit } \Sigma}{\forall x\,\varphi \text{ uit } \Sigma}\forall I$ mits d niet in $\forall x\varphi$ of Σ voorkomt
$\exists$ *Introductieregel*	$\exists$ *Eliminatieregel*
$\dfrac{[t/x]\varphi \text{ uit } \Sigma}{\exists x\,\varphi \text{ uit } \Sigma}\exists I$ Mits t vrij voor x in φ	$\dfrac{\exists x\varphi \text{ uit } \Phi \quad \psi \text{ uit } \Sigma,[d/x]\varphi}{\psi \text{ uit } \Phi \cup \Sigma}\exists E,[-[d/x]\varphi]$ mits d niet voorkomt in $\exists x\varphi$ of in ψ of in Σ

AFLEIDINGEN: VB 3

We bewijzen: $\forall x\, Ax \vee \forall x Bx \vdash \forall x(Ax \vee Bx)$

1.	$\forall xAx \vee \forall xBx$	uit φ	aanname $\varphi = \forall xAx \vee \forall xBx$
2.	$\forall x\, Ax$	uit ψ	hulpaanname $\psi = \forall x\, Ax$
3.	Ad	uit ψ	$\forall$E(2)
4.	$Ad \vee Bd$	uit ψ	$\vee$I(3)
5.	$\forall x(Ax \vee Bx)$	uit ψ	$\forall$I(4) d niet in $\forall x(Ax \vee Bx)$, ψ
6.	$\forall x\, Bx$	uit χ	hulpaanname $\chi = \forall x\, Bx$
7.	Bd	uit χ	$\forall$E(6)
8.	$Ad \vee Bd$	uit χ	$\vee$I(7)
9.	$\forall x(Ax \vee Bx)$	uit χ	$\forall$I(8) d niet in $\forall x(Ax \vee Bx)$, χ
10.	$\forall x(Ax \vee Bx)$	uit φ	$\vee$E(1,5,9) [- ψ, - χ]

$\vee$ Eliminatieregel

$$\frac{\varphi \vee \psi \text{ uit } \Sigma \quad \alpha \text{ uit } \Phi,\varphi \quad \alpha \text{ uit } \Psi,\psi}{\alpha \text{ uit } \Sigma \cup \Phi \cup \Psi} \vee E[-\varphi,-\psi]$$

VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL

AFLEIDINGEN: VB 4

We bewijzen: $\exists x\,(Ax \wedge Bx) \vdash \exists x\,Ax \wedge \exists x\,Bx$

1.	$\exists x(Ax \wedge Bx)$	uit χ	aanname $\chi = \exists x(Ax \wedge Bx)$
2.	$Ad \wedge Bd$	uit φ	hulpaanname $\varphi = Ad \wedge Bd$
3.	Ad	uit φ	$\wedge$E(2)
4.	$\exists x\, Ax$	uit φ	$\exists$I(3)
5.	Bd	uit φ	$\wedge$E(2)
6.	$\exists x\, Bx$	uit φ	$\exists$I(5)
7.	$\exists x Ax \wedge \exists x Bx$	uit φ	$\wedge$I(4,6)
8.	$\exists x Ax \wedge \exists x Bx$	uit χ	$\exists$E(2,7)[- φ] d niet in $\exists x Ax \wedge \exists x Bx$ of χ

$\exists$ *Eliminatieregel*

$$\frac{\exists x\varphi \text{ uit } \Phi \qquad \psi \text{ uit } \Sigma,[d/x]\varphi}{\psi \text{ uit } \Phi \cup \Sigma}\ \exists\mathrm{E},[-[d/x]\varphi]$$

mits d niet voorkomt in $\exists x\varphi$ of in ψ of in Σ

AFLEIDINGEN: VB 5

- We proberen te bewijzen dat $\exists x\, Rxx \vdash \forall x \exists z\, Rxz$
  Deze afleiding is echter niet correct!

1. $\exists x\ Rxx$ uit χ aanname $\chi = \exists x\ Rxx$
2. Rdd uit φ <u>hulpaanname</u> $\varphi = Rdd$
3. $\exists z\ Rdz$ uit φ ∃I(2)
4. $\exists z\ Rdz$ uit χ ∃E(1,3) [-φ] d niet in $\exists z\ Rdz, \chi$ (Onjuist!)
5. $\forall x \exists z\ Rxz$ uit χ ∀I(4) d niet in $\forall x \exists z\ Rxz,\ \chi$

∃ *Eliminatieregel*

$$\frac{\exists x \varphi \text{ uit } \Phi \qquad \psi \text{ uit } \Sigma,[d/x]\varphi}{\psi \text{ uit } \Phi \cup \Sigma}\ \exists E,[-[d/x]\varphi]$$

mits d niet voorkomt in $\exists x \varphi$ of in ψ of in Σ

AFLEIDINGEN: VB. 6

We bewijzen $\exists x(Ax \wedge Bx), \neg\exists x(Bx \wedge Cx) \vdash \neg\forall x(Ax \rightarrow Cx)$

1. $\exists x(Ax \wedge Bx)$	uit φ	aanname $\varphi = \exists x(Ax \wedge Bx)$
2. $\neg\exists x(Bx \wedge Cx)$	uit ψ	aanname $\psi = \neg\exists x(Bx \wedge Cx)$
3. $Ad \wedge Bd$	uit ξ	hulpaanname $\xi = Ad \wedge Bd$
4. $\forall x(Ax \rightarrow Cx)$	uit χ	hulpaanname $\chi = \forall x(Ax \rightarrow Cx)$
5. $Ad \rightarrow Cd$	uit χ	$\forall$E(4)
6. Ad	uit ξ	$\wedge$E(3)
7. Bd	uit ξ	$\wedge$E(3)
8. Cd	uit χ,ξ	$\rightarrow$E(6,5)
9. $Bd \wedge Cd$	uit χ,ξ	$\wedge$I(7,8)
10. $\exists x(Bx \wedge Cx)$	uit χ,ξ	$\exists$I(9)
11. $\neg\forall x(Ax \rightarrow Cx)$	uit ψ,ξ	$\neg$I(2,10) [- χ]
12. $\neg\forall x(Ax \rightarrow Cx)$	uit φ,ψ	$\exists$E(1,11) [- ξ] d niet in φ,ψ, $\exists x(Ax \wedge Bx)$

Syllogisme: sommige A zijn B, geen B is C dus niet alle A zijn C

AFLEIDINGEN: VB. 7

We bewijzen $\exists x \forall y Rxy \vdash \forall y \exists x Rxy$

1.	$\exists x \forall y\, Rxy$	uit φ	aanname $\varphi = \exists x \forall y\, Rxy$
2.	$\forall y\, Rdy$	uit ψ	hulpaanname $\psi = \forall y\, Rdy$
3.	Rde	uit ψ	$\forall$E(2)
4.	$\exists x\, Rxe$	uit ψ	$\exists$I(3)
5.	$\exists x\, Rxe$	uit φ	$\exists$E(1,4) [-ψ] d niet in φ, $\exists x\, Rxe$
6.	$\forall y \exists x\, Rxy$	uit φ	$\forall$I(5) e niet in $\forall y \exists x\, Rxy$, φ