PROPOSITIELOGICA: METATHEORIE

VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL

PROPOSITIELOGICA: METATHEORIE

- Inhoud:
  - Metatheorie
  - Formule inductie
  - Inductiehypothese
  - Functionele volledigheid
  - Dualiteit
  - Adequaatheid van semantische tableaus
  - Correctheid en Volledigheid

METATHEORIE

Metabeweringen: beweringen over het systeem (in tegenstelling tot de beweringen uitgedrukt in het systeem)

- Voorbeelden:
  - Functionele volledigheid van connectieven
  - Correctheid van bewijssystemen

Welke bewijsvormen gebruiken we op dit metaniveau?

- Gebeurt in principe met dezelfde logica als deze van ons logisch systeem
- **Specifieke meta redeneervorm:** formule-inductie.

Formule-inductie

- Aantonen dat een bewering B geldt voor alle formules uit de propositielogica

  Gebaseerd op het principe dat formules zijn opgebouwd vanuit een basisverzameling van bouwstenen via eindige combinatie met logische operatoren

  Basisstap:
  Laat zien dat B opgaat voor de bouwstenen (propositieletters)

  Inductiestap:
  Toon aan dat, als B opgaat voor de formules φ, ψ, dan ook voor hun combinaties $\neg\varphi$, $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\rightarrow\psi)$ en $(\varphi\leftrightarrow\psi)$

- De aanname in de inductiestap (dat B opgaat voor de formules φ en ψ) heet de inductiehypothese (*IH*).

FORMULE-INDUCTIE - VOORBEELD

- Voorbeeld formule-inductie:

  Definieer voor iedere formule φ

  - *subf*(φ) = het aantal subformules in φ, en
  - *length*(φ) = het aantal symbolen in een formule φ met de hulpsymbolen) en (niet meegerekend.
  - *Voorbeeld: subf*($(p\wedge\neg q)\to p$) = 6 *en length*($(p\wedge\neg q)\to p$) = 6.

  Stelling: subf(φ) = *length*(φ) *voor* iedere formule φ.

Bewijs:

- **Basisstap**: Voor $\varphi = p$, een propositieletter, geldt $subf(p) = 1$ en $length(p) = 1$.

  Dus bewering klopt voor de basisstap $subf\ (p) = length\ (p)$, met *p een willekeurig propositieletter*.

- **Inductiestap**: Stel dat de bewering geldt voor de formules α en β (de inductiehypothese IH). Dan bewijzen we dat de bewering ook geldt voor: $\varphi = \neg\alpha$, $\varphi = (\alpha\wedge\beta)$, $\varphi = (\alpha\vee\beta)$, $\varphi = (\alpha\rightarrow\beta)$ en $\varphi = (\alpha\leftrightarrow\beta)$

  voor $\varphi = \neg\alpha$ is

  $subf(\neg\alpha) = subf(\alpha)+1 =_{IH} length(\alpha) + 1 = length(\neg\alpha)$

  voor $\varphi = (\alpha\wedge\beta)$ is

  $subf(\alpha\wedge\beta) = subf(\alpha) + subf(\beta) + 1 =_{IH} length(\alpha) + length(\beta) + 1$

  $= \mathrm{length}(\alpha\wedge\beta)$

  idem voor de andere gevallen.

FUNCTIONEEL VOLLEDIG

Stelling

De verzameling connectieven $\{\neg, \wedge\}$ is functioneel volledig, m.a.w. voor elke formule φ is er een logisch equivalente formule φ' die alleen de connectieven $\neg$ en $\wedge$ bevat.

Bewijs:

- **Basisstap**: Voor $\varphi = p$, een propositieletter, geldt dit automatisch want deze bevatten geen connectieven
- **Inductiestap**:

  IH: stel φ en ψ herschreven kunnen worden als logisch equivalente formule φ' en ψ' en φ' en ψ' zijn met alleen $\neg$ en $\wedge$ geconstrueerd. ($\varphi \equiv \varphi'$ en $\psi \equiv \psi'$; $\equiv$ herschreven)

  TB: ook $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ en $\varphi \leftrightarrow \psi$ zo te herschrijven

  Bewijs:

  $(\neg\varphi) \equiv \neg(\varphi) \equiv_{IH} \neg(\varphi') \equiv (\neg\varphi')$

  $(\varphi \wedge \psi) \equiv_{IH} (\varphi' \wedge \psi')$

  $(\varphi \vee \psi) \equiv_{IH} (\varphi' \vee \psi') \equiv \neg(\neg\varphi' \wedge \neg\psi')$

  $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \equiv_{IH} \neg(\varphi' \wedge \neg\psi')$

  $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \equiv \neg(\varphi' \wedge \neg\psi') \wedge \neg(\psi' \wedge \neg\, \varphi')$

Bewijs van de Adequaatheidsstelling

Herinner: Adequaatheidsstelling

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$ *desda*

er bestaat een gesloten semantisch tableau voor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ o ψ *desda*

alle semantische tableaus voor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ o ψ zijn gesloten

Eerst 2 beweringen bewijzen

ADEQUAATHEIDSSTELLING

Eerst veralgemening:

$\Phi \circ \Psi$ met $\Phi = \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ en $\Psi = \psi_1, \ldots, \psi_m$.

Het tableau met $\Phi \circ \Psi$ als topsequent is gesloten als $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \vDash \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m$ of anders geschreven als $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi_1, \ldots, \psi_m$ of ook wel $\Phi \vDash \Psi$

Let op het verschil tussen de conjuncties links en de disjuncties rechts! Waarom is dit zo?

ADEQUAATHEIDSSTELLING – HULPSTELLING 1

Bewering 1

Stel $\Phi \circ \Psi$ is de topsequent van een gesloten tableau.
Dan geldt $\Phi \models \Psi$

Bewijs

per inductie op het aantal knopen van de tableau

- Tableau heeft 1 knoop: omdat de tableau gesloten is betekent dit dat een zekere formule zowel links in Φ als rechts in Ψ voorkomt. Dan kan er geen tegenvoorbeeld zijn en dus $\Phi \models \Psi$

Vervolg bewijs

Tableau heeft meerdere knopen: ontstaan door toepassen van een regel

- **Geval I** (reductie zonder splitsing): door toepassing van $\neg_L$ regel

Topsequent: $\Phi, \neg\alpha \circ \Psi$

Sequent er onder: $\Phi \circ \alpha, \Psi$. Hier geldt per inductie $\Phi \models \alpha, \Psi$ (want 1 knoop minder en gesloten) (IH)

Op dit niveau geldt de inductie hypothese (IH), dus
Als $V(\Phi)=1$ dan $V(\alpha)=1$ of $V(\Psi)=1$
(nl. $\Phi \models \alpha, \Psi$)

$$\neg_L : \quad \begin{array}{c} \Phi, \neg\alpha \circ \Psi \\ | \\ \Phi \circ \alpha, \Psi \end{array}$$

TB: als $V(\Phi)=1$ en $V(\neg\alpha)=1$ dan $V(\Psi)=1$ (nl. $(\Phi, \neg\alpha \models \Psi)$)

Stel dus een waardering V zodat $V(\Phi)=1$ en $V(\neg\alpha)=1$. Aangezien $V(\Phi)=1$ volgt op basis van de IH, nu dat deze bewering dan α of Ψ waar moet maken. Vermits $V(\neg\alpha) = 1$ en dus $V(\alpha) = 0$ moet V dus Ψ waar maken en hebben we dan bewezen: $\Phi, \neg\alpha \models \Psi$

ADEQUAATHEIDSSTELLING – HULPSTELLING 1

Vervolg bewijs

Geval II (reductie met splitsing): : door toepassing van $\wedge_R$ regel

Topsequent: $\Phi \circ \alpha\wedge\beta, \Psi$

Sequenten er onder: $\Phi \circ \alpha, \Psi$ en $\Phi \circ \beta, \Psi$. Hier geldt per inductie $\Phi \models \alpha, \Psi$ **en** $\Phi \models \beta, \Psi$ (door de IH, want beide tableau's een knoop minder en gesloten)

Op dit niveau geldt de inductie hypothese (IH):
- V(Φ)=1 dan V(α)=1 of V(Ψ)= 1

en

- V(Φ)=1 dan V(β)=1 of V(Ψ)= 1

$$\wedge_R : \quad \begin{array}{ccc} & \Phi \circ \alpha \wedge \beta, \Psi & \\ \Phi \circ \alpha, \Psi & & \Phi \circ \beta, \Psi \end{array}$$

TB: V(Φ)=1 dan V($\alpha\wedge\beta$)=1 of V(Ψ)=1

Als V(Φ)=1 dan zal die waardering ofwel Ψ waar maken ofwel α en β waar maken (door de IH) en dus ofwel Ψ ofwel $\alpha\wedge\beta$ waar maken.

En dus $\Phi \models \alpha\wedge\beta, \Psi$

Vervolg Bewijs

andere gevallen gelijkaardig

Bewering 2

Stel een open tableau heeft een tak t die niet sluit. Zij V een waardering die alle **propositieletters** links op de tak t waar maakt en al deze rechts onwaar maakt. Dan geldt voor **elke formule** φ: als φ links op tak t voorkomt dan $V(\varphi) = 1$ en als φ rechts op de tak t voorkomt dan $V(\varphi)= 0$

Bewijs

per **formule-inductie op** φ, en in een open tableau is elke toepasbare regel toegepast

<u>Basisstap</u>. Blad van tableau bestaat uit allemaal propositieletters, t.b. per definitie van V

ADEQUAATHEIDSSTELLING – HULPSTELLING 2

Inductiestap. (bewijs enkel voor 2 gevallen, rest analoog).

- Bewijs voor $\neg\varphi$

  Als $\neg\varphi$ links voorkomt
  dan moet er een keer de $\neg_L$ regel zijn toegepast waar φ rechts voorkomt.

  Dan is (door de inductiehypothese) $V(\varphi) = 0$, zodat $V(\neg\varphi) = 1$

$$\neg_L : \frac{\Phi \circ \varphi, \Psi}{\Phi, \neg\varphi \circ \Psi}$$

Op dit niveau geldt de inductie hypothese (IH): $V(\varphi) = 0$ (nl. φ rechts)

Bewijs vervolg

Inductiestap. (bewijs 2de geval)

- Bewijs voor $\varphi \wedge \psi$

  Als $\varphi \wedge \psi$ rechts voorkomt dan moet er een keer de $\wedge_R$ regel zijn toegepast.

  De tak t volgt in de splitsing de linker- of rechterkant.

  Neem bijvoorbeeld de linkerkant met φ rechts.

  Door IH is $V(\varphi) = 0$ en dan is ook $V(\varphi \wedge \psi) = 0$

  Indien rechterkant: Door IH is $V(\psi) = 0$ en dat is ook $V(\varphi \wedge \psi) = 0$

Op dit niveau geldt de inductie hypothese (IH):
$V(\varphi) = 0$ (nl. φ rechts)
of
$V(\psi) = 0$ (nl. ψ rechts)

$$\wedge_R : \quad \frac{\Phi \circ \varphi \wedge \psi, \Psi}{\Phi \circ \varphi, \Psi \qquad \Phi \circ \psi, \Psi}$$

ADEQUAATHEIDSSTELLING – BEWIJS DEEL 1

Nu bewijs adequaatheidsstelling

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$ *desda*

er bestaat een gesloten semantisch tableau voor

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \circ \psi$

Bewijs

$\Leftarrow$ is een speciaal geval van bewering 1

$\Rightarrow$ stel er is geen gesloten tableau. Dan moet er een open tableau zijn. Door bewering 2 levert elke open tak dan een tegenvoorbeeld zodat de geldigheid weerlegt wordt (en dit is een contradictie met het gegeven)

En bijkomend:

Als één tableau voor een sequent sluit dan sluiten alle tableaus voor dit sequent

ADEQUAATHEIDSSTELLING – BEWIJS DEEL 2

En bijkomend:

Als één tableau voor een sequent sluit dan sluiten alle tableaus voor dit sequent

Bewijs

Als één tableau sluit dan is de gevolgtrekking geldig.

Als er ook een open tableau zou zijn dan zou de gevolgtrekking niet geldig zijn.

Dit is een contradictie. Dus alle tableaus moeten sluiten

Betekenis:

Het is onbelangrijk in welke volgorde we de reductieregels toepassen om het tableau te construeren, het resultaat is altijd hetzelfde.

VOLLEDIGHEIDSSTELLING

Volledigheidsstelling:

Voor de propositielogica geldt dat voor iedere formuleverzameling Σ en iedere formule φ

$\Sigma \vdash \varphi$ desda $\Sigma \models \varphi$

- correctheid ("soundness"):
  $\Sigma \vdash \varphi$ impliceert $\Sigma \models \varphi$
- Volledigheid ("completeness"):
  $\Sigma \models \varphi$ impliceert $\Sigma \vdash \varphi$

Met een lege verzameling Σ zegt deze stelling dat de tautologieën van de propositielogica precies de stellingen van het bewijssysteem van natuurlijke deductie zijn.

VOLLEDIGHEIDSSTELLING

Stelling (correctheid):

$$\Sigma \vdash \varphi \text{ impliceert } \Sigma \models \varphi$$

- Deze stelling wordt bewezen door van alle afleidingsregels aan te tonen dat hun resultaten geldig zijn (met inductie naar het aantal knopen in een bewijsboom).

  (Bewijs niet te kennen)

VOLLEDIGHEIDSSTELLING

Stelling (volledigheid):

$$\Sigma \models \varphi \text{ impliceert } \Sigma \vdash \varphi$$

- Bewijs:

  Gebaseerd op maximaal consistente verzamelingen
  (een verzameling is maximaal consistent als het toevoegen van elke formule die nog niet in die verzameling zat tot een inconsistente verzameling leidt).

  (Bewijs niet te kennen)

EINDE PROPOSITIELOGICA