# PROPOSITIELOGICA: GELDIG GEVOLG

VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL

# GELDIG GEVOLG

- Inhud

# GELDIG GEVOLG - VOORBEELD

"Jan is een goede schaker en Karin is een goede dammer"

Hieruit kunnen we (intuitief) concluderen:

"Jan is een goede schaker"

Of nog: uit $(p \wedge q)$ kunnen we $p$ concluderen

| $p$ | $q$ | $(p \wedge q)$ | $p$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

Het principe voor *geldig gevolg:*

Als het uitgangspunt waar, dan is ook de conclusie waar.

## GELDIG GEVOLG

**Definitie**

Een formule $\psi$ heet een geldig gevolg van een verzameling formules $\Sigma$ als elk model van $\Sigma$ ook model is van $\psi$

- Notatie: $\Sigma \models \psi$ of ook nog $\Sigma / \psi$
  - *psi* is een geldig gevolg van sigma
  - Als $\Sigma = \{ \varphi_1 , \ldots, \varphi_n \}$ dan schrijven we $\varphi_1 , \ldots, \varphi_n \models \psi$
- Voorbeelden
  - $p, p \rightarrow q \models q$
  - $p, p \rightarrow q, q \rightarrow r \models r$

# GELDIG GEVOLG

– $\Sigma \models \psi$

- D.w.z. $\psi$ is geen geldig gevolg van $\Sigma$
- Er bestaat dus een model van $\Sigma$ dat geen model is van $\psi$. Dit model noemt men een *tegenvoorbeeld* van de gevolgtrekking $\Sigma \models \psi$

  Voorbeeld:

  $q,\ p \rightarrow q \not\models p$

  q waar en p onwaar dan $(p \rightarrow q)$ waar , maar $p$ is onwaar.

# GELDIG GEVOLG VERSUS IMPLICATIE

Opgelet “geldig gevolg” en “waarheid” zijn verschillende begrippen!

Vb: $p \vee q, \neg q \wedge r \models p \wedge r$

En toch maakt V(p) = V(q) = V(r) = 0 alle formules onwaar

Er is een nauw verband tussen de implicatie ($\rightarrow$) en logisch gevolg ( $\models$ ) maar de twee zijn verschillende concepten!

$\rightarrow$ maakt deel uit van de syntaxis van de propositielogica; $\models$ niet

Als $\varphi \models \psi$, dan is $(\varphi \rightarrow \psi)$ waar,
maar niet omgekeerd: $(\varphi \rightarrow \psi)$ betekent niet noodzakelijk $\varphi \models \psi$

- Want $(\varphi \rightarrow \psi)$ kan nl ook onwaar zijn (als $\varphi$ waar en $\psi$ onwaar) en dan is er geen geldig gevolg meer

- Als $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$ een tautologie is dan hebben we ook $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$ (en omgekeerd).

# BEKENDE GELDIGE GEVOLGEN

Ex falso: $\varphi, \neg\varphi \models \psi$

Uit een contradictie volgt alles

Contrapositie: $\varphi \to \psi \models \neg\psi \to \neg\varphi$

Hypothetisch syllogisme: $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \models \varphi \to \chi$

Disjunctief syllogisme: $\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi \models \psi$

Special geval indien $\Sigma = \varnothing$

$\models \psi$ betekent dat elke waardering een model is voor $\psi$; m.a.w. $\psi$ is een tautologie.

# GELDIG GEVOLG

- Hoe weten we dat een gevolgtrekking geldig is?

  Eerste mogelijkheid: stel waarheidstabel op

<u>Voorbeeld</u>: $\neg q$, $p \rightarrow q$ / $\neg p$

| p | q | $\neg q$ | $p \rightarrow q$ | $\neg p$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Model voor {$\neg q$, $p \rightarrow q$ } en voor $\neg p$

- Maar de grootte van een waarheidstabel is exponentieel in het aantal proposities
- Het is efficiënter om naar een tegenvoorbeeld te zoeken

  Door middel van een techniek die men semantische tableaus noemt.

# GELDIG GEVOLG – SEMANTISCH TABLEAU

De nodige concepten:

- Een sequent is een rijtje van de vorm:

  $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \circ \psi_1, \ldots, \psi_m$

  met $\varphi_1, \ldots, \psi_m$ formules, $n \geq 0$, $m \geq 0$.

- Een waardering $V$ heet een tegenvoorbeeld van een sequent $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \circ \psi_1, \ldots, \psi_m$ indien

  $V(\varphi_1) = \ldots = V(\varphi_n) = 1$ en

  $V(\psi_1) = \ldots = V(\psi_m) = 0$

- Merk op (belangrijk!): Een sequent $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \circ \psi_1, \ldots, \psi_m$ heeft geen tegenvoorbeeld als er een $i$ en een $j$ bestaan zodat $\varphi_i = \psi_j$.

# GELDIG GEVOLG – SEMANTISCH TABLEAU

- Om te bepalen of $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$ gaan we onderzoeken of er al dan niet een tegenvoorbeeld is voor het sequent $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \text{ o } \psi$.

  Dit doen we op een systematische manier

  - Semantisch tableau

- Een semantisch tableau is een schema waarin op systematische wijze het mogelijk bestaan van tegenvoorbeelden van een gegeven sequent teruggebracht wordt (*gereduceerd*) tot dat van één of meer eenvoudiger sequenten.

## GELDIG GEVOLG – SEMANTISCH TABLEAU

# Voorbeeld van een semantisch tableau:

- Heeft $p \vee q, \neg q$ / $p$ een tegenvoorbeeld?
- Wordt herleid tot: heeft $p \vee q, \neg q \text{ o } p$ een tegenvoorbeeld?

  *$\neg q$ waar maken is hetzelfde als $q$ onwaar maken,*
  *dus m.a.w. heeft* $p \vee q \text{ o } p, q$ een tegenvoorbeeld?

  Nu 2 gevallen ($p \vee q$):

  $p \text{ o } p, q$ heeft tegenvoorbeeld of
  $q \text{ o } p, q$ heeft tegenvoorbeeld

beide kunnen geen tegenvoorbeeld hebben (zie opmerking!)
dus $p \vee q, \neg q$ / $p$ heeft geen tegenvoorbeeld,
dus $p \vee q, \neg q \models p$.

## GELDIG GEVOLG

- Nu als semantisch tableau:
  Heeft $p \vee q, \neg q$ / $p$ een tegenvoorbeeld?

$p \vee q, \neg q$ ∘ $p$
heeft een tegenvoorbeeld
desda
$p \vee q$ ∘ $p, q$
een tegenvoorbeeld heeft

$$p \vee q, \neg q \circ p$$

← reductieregel

$$p \vee q \circ p, q$$

← reductieregel

| $p \circ p, q$ | $q \circ p, q$ |
|---|---|
| = | = |

$p \vee q$ ∘ $p, q$ heeft een tegenvoorbeeld
desda
$p$ ∘ $p, q$ een tegenvoorbeeld heeft
**of** $q$ ∘ $p, q$ een tegenvoorbeeld heeft

desda: dan en slechts dan als

# GELDIG GEVOLG – SEMANTISCH TABLEAU

## Techniek van de semantische tableau

Bij elke connectief hoort een linker en een rechter reductieregel:

- Linkerregel: toepassen als de connectief links staat
- Rechterregel: toepassen als de connectief aan de rechterkant staat

## De regels voor $\neg$

$$\neg_L : \quad \dfrac{\Phi, \neg\alpha \circ \Psi}{\Phi \circ \alpha, \Psi} \qquad\qquad \neg_R : \quad \dfrac{\Phi \circ \neg\alpha, \Psi}{\Phi, \alpha \circ \Psi}$$

# GELDIG GEVOLG – SEMANTISCH TABLEAU

## Voor de connectieven $\wedge$ en $\vee$

$$\wedge_L: \quad \begin{array}{c} \Phi, \alpha \wedge \beta \circ \Psi \\ \hline \Phi, \alpha, \beta \circ \Psi \end{array}
\qquad\qquad
\wedge_R: \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\Phi \circ \alpha \wedge \beta, \Psi} \\ \hline \Phi \circ \alpha, \Psi & \Phi \circ \beta, \Psi \end{array}$$

$$\vee_L: \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\Phi, \alpha \vee \beta \circ \Psi} \\ \hline \Phi, \alpha \circ \Psi & \Phi, \beta \circ \Psi \end{array}
\qquad\qquad
\vee_R: \quad \begin{array}{c} \Phi \circ \alpha \vee \beta, \Psi \\ \hline \Phi \circ \alpha, \beta, \Psi \end{array}$$

# GELDIG GEVOLG – SEMANTISCH TABLEAU

## Reductieregels voor de connectieven $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$

$$\rightarrow_L: \quad \begin{array}{c} \Phi, \alpha \rightarrow \beta \circ \Psi \\ \hline \Phi, \beta \circ \Psi \qquad \Phi \circ \alpha, \Psi \end{array} \qquad\qquad \rightarrow_R: \quad \begin{array}{c} \Phi \circ \alpha \rightarrow \beta, \Psi \\ \hline \Phi, \alpha \circ \beta, \Psi \end{array}$$

$$\leftrightarrow_L: \quad \begin{array}{c} \Phi, \alpha \leftrightarrow \beta \circ \Psi \\ \hline \Phi, \alpha, \beta \circ \Psi \qquad \Phi \circ \alpha, \beta, \Psi \end{array} \qquad\qquad \leftrightarrow_R: \quad \begin{array}{c} \Phi \circ \alpha \leftrightarrow \beta, \Psi \\ \hline \Phi, \alpha \circ \beta, \Psi \qquad \Phi, \beta \circ \alpha, \Psi \end{array}$$

# GELDIG GEVOLG – SEMANTISCH TABLEAU

Door het telkens toepassen van een reductieregel op de sequenten krijgen we een boom

Als er geen reductieregel meer kan worden toegepast spreken we van een semantisch tableau

- Elke tak correspondeert met een mogelijke route om een tegenvoorbeeld te vinden.

# GELDIG GEVOLG – SEMANTISCH TABLEAU

Indien links en rechts in de tak (sequent) dezelfde formule optreedt is er geen tegenvoorbeeld te vinden. Men noemt de **tak gesloten**

Een tak is open indien de tak niet gesloten is en er kunnen geen reductiestappen meer worden toegepast op deze tak

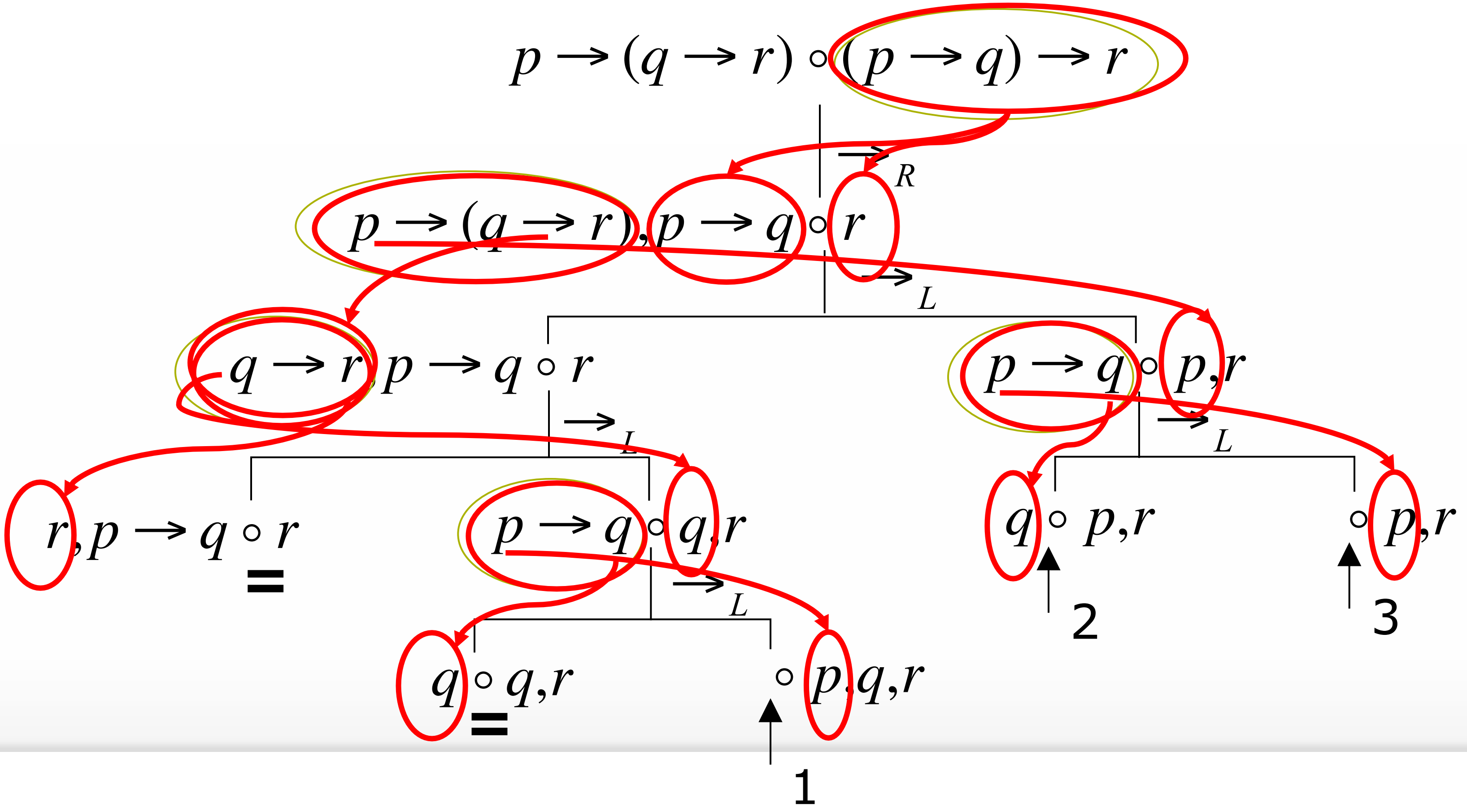
Een tableau is gesloten als al zijn takken gesloten zijn:

- Er is geen enkel tegenvoorbeeld te vinden, dus **geldig gevolg!**

Een tableau is open als er tenminste één tak niet gesloten kan worden

- Dus tenminste één tegenvoorbeeld en dus geen geldig gevolg.

# Voorbeeld: Is $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ / $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ geldig?



## GELDIG GEVOLG – SEMANTISCH TABLEAU

Er worden 3 tegenvoorbeelden gevonden:

1. $V_1(p) = 0$, $V_1(q) = 0$, $V_1(r) = 0$
2. $V_2(p) = 0$, $V_2(q) = 1$, $V_2(r) = 0$
3. $V_3(p) = 0$, $V_3(r) = 0$ (opm. vervat de eerste 2)

Conclusie: $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ o $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ heeft tegenvoorbeelden, en dus:

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \not\models (p \rightarrow q) \rightarrow r$$

Een semantisch tableau vindt alle tegenvoorbeelden!

# SEMANTISCH CONSISTENT

*Definitie*

Een formuleverzameling $\Sigma$ is ***semantisch consistent*** als $\Sigma$ een model heeft

- Dus $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ is consistent als $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \circ$ een tegenvoorbeeld heeft.

  Het tegenvoorbeeld is nl de waardering die alle formules in $\Sigma$ (links in het sequent) waar maakt (en rechts onwaar maakt – maar dat is leeg)

- Of nog $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ is consistent als $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \circ$ een open tableau heeft

Een formuleverzameling zonder model heet *inconsistent*.
Het corresponderende tableau is gesloten.

# SEMANTISCH CONSISTENT

## Voorbeeld:

- is $\{p \vee q, \neg(p \to \neg r), q \to r, \neg(r \wedge p)\}$ consistent of inconsistent?

# TAUTOLOGIE TESTEN

## Tautologie testen met behulp van een semantische tableau:

- Herinner: Een formule $\varphi$ is een *tautologie* als alle waarderingen model zijn van $\varphi$
- m.a.w. als er geen waardering te vinden is zodat $V(\varphi) = 0$
- m.a.w. er is geen tegenvoorbeeld voor o $\varphi$
- m.a.w. als het semantische tableau voor o $\varphi$ gesloten is.

# TAUTOLOGIE TESTEN

## Voorbeelden:

- Is $\neg(p \wedge \neg p)$ een tautologie?
- Is $\varphi \rightarrow \psi \leftrightarrow \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$

# GELDIG GEVOLG - ADEQUAATHEIDSTELLING

- Semantische tableaus werden geïntroduceerd als een methode om de geldigheid van een gevolgtrekking te bepalen

**Adequaatheidstelling**:

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$

*desda*

er bestaat een gesloten semantisch tableau voor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ o $\psi$

*desda*

alle semantische tableaus voor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ o $\psi$ zijn gesloten

Bewijs later

VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL