Vrije Universiteit Brussel

Logica en formele systemen
Deel II: Predikaatlogica

Predikaatlogica - Inhoud

Inhoud

- Taal
- Semantiek
- Semantische Tableaus
- Afleidingen
- Een eenvoudige theorie
- Metatheorie

Vrije Universiteit Brussel

Predikaatlogica: Taal

Vrije Universiteit Brussel

Predikaatlogica: Taal

- Inhoud:
  - Alfabet
  - Termen
  - Formules
  - Bereik van kwantoren
  - Gebonden en vrije variabelen
  - Gesloten en open Formules
  - Substitutie
  - Alfabetische variant

Vrije Universiteit Brussel

Taal

- Predikaatlogica is een uitbreiding van de propositielogica
  - Nodig om eigenschappen van individuen te beschrijven en erover te redeneren.
- Voorbeeld:

  Aanname 1: Alle mannen voetballen

  Aanname 2: Piet is een man

  Conclusie: Piet voetbalt
  - Niet weer te geven door propositielogica
  - Aanname 2 bevat eigenschap (predikaat genoemd) van een individu en er wordt over deze eigenschap een conclusie gevormd

Vrije Universiteit Brussel

Taal

De taal van predikaatlogica heeft meer uitdrukkingskracht dan de taal van propositielogica en bevat daarom meer bouwstenen:

1. Predikaatzinnen, voorbeelden:

- Piet voetbalt
- Jan bemint Marie
- Stef is kind van Kees en Ada

zeggen telkens iets over individu(en)

Predikaten worden voorgesteld via predikaatletters (hoofdletters) met vast aantal argumenten (volgorde is belangrijk!)

Individuen worden voorgesteld via constanten (kleine letters)

Voorbeelden	Alternatieve notaties	
1. V(p)	VOETBALT(piet)	Vp
2. B(j,m)	BEMINT(jan,marie)	Bjm
3. K(s,k,a)	KIND_VAN(stef,kees,ada)	Kska

Vrije Universiteit Brussel

Taal

2. *Functies*: voorgesteld door kleine letters (f, g, ...)

   $f(x,y) = 4x+3y^2$

   $m(j)$ de moeder van Jan

   m(j) nu te gebruiken: L(j, m(j))

   Jan vindt zijn moeder lief.

3. *Kwantoren*:

   uitdrukkingen van hoeveelheid

   ∀: universele kwantor: ‘alle’

   ∃: existentiële kwantor: ‘er is minstens één’

   - **Alle** mannen voetballen
   - **Er is minstens één** vrouw die voetbalt.

Taal

4. Variabelen:

Gebruik van kwantoren introduceert de nood aan variabelen (kleine letters x, y, z, …)

1. $\forall x(Mx \rightarrow Vx)$
2. $\exists x(Bx \wedge \neg Fx)$
3. $\forall x(G(x) \rightarrow \exists y(G(y) \wedge (y > x)))$.

Vrije Universiteit Brussel

Taal

- Meerdere kwantoren in één zin mogelijk
  - Voorbeelden

    ∀ en ∃
    - Voor elk getal bestaat er een groter getal
    - Iedereen heeft een moeder (voor iedereen bestaat er een moeder)

    ∃ en ∀
    - Er is een verzameling die bevat is in elke verzameling
    - Iemand is voorouder van iedereen (eva?).

Vrije Universiteit Brussel

Definitie alfabet

Definitie

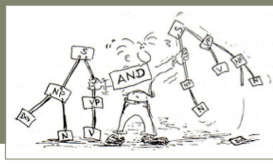
Het alfabet van een predikaat logische taal bestaat uit:

- Een verzameling ***C*** van individuele constanten: $a, b, c, \ldots, a_1, a_2, a_3, \ldots$
- Een verzameling ***P*** van predikaatletters: $P, Q, R, \ldots, P_1, P_2, P_3, \ldots$
- Een verzameling ***F*** van functieletters: $f, g, h, \ldots, f_1, f_2, f_3, \ldots$
- De logische symbolen: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$
- Een aantal individuele variabelen: $u, v, w, x, y, z, x_1, x_2, x_3, \ldots$
- De hulpsymbolen:) en (

- Plaatsigheid (aantal argumenten) voor functieletters en predikaatletters ook wel via een index: f^3abc of $f^3(a, b, c)$: f is 3-plaatsig
- Merk op: propositieletters kunnen beschouwd worden als 0-plaatsige predikaatletters.

Vrije Universiteit Brussel

Syntaxis – definitie term



– Termen
  • duiden individuele objecten aan

Definitie

De **termen** in de predikaatlogica zijn als volgt gedefinieerd (inductieve definitie):

– individuele variabelen en constanten zijn termen;

– als f een k-plaatsige functieletter is en $t_1, \ldots, t_k$ zijn termen, dan is $f(t_1, \ldots, t_k)$ ook een term;

– Niets anders is een term.

– Voorbeeld: $f^3(g^2(x,h^1(y)),a,g^2(a,y))$

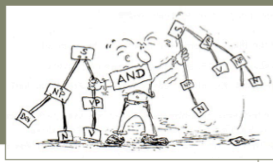
Opmerking notatie

- Prefix versus infixnotatie
  - Prefixnotatie
    - Functiesymbool vóór de argumenten
  - voorbeelden: $f(x,y)$, $+(x,y)$, $\cdot(x,y)$
  - Infixnotatie
    - Meestal bij 2-plaatsige functies
    - Functiesymbool tussen de argumenten
  - voorbeelden: $x + y$ en $x \cdot y$
- Meestal wordt in logica prefix notatie gebruikt

Geef boom (zie p 92)

Vrije Universiteit Brussel

Syntaxis – definitie formule



Definitie

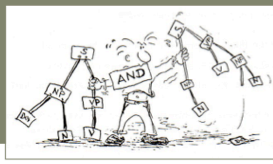
De **formules** in de predikaatlogica zijn als volgt gedefinieerd (inductieve definitie):

- als P een k-plaatsige predikaatletter is en $t_1, \ldots, t_k$ zijn termen dan is $P(t_1, \ldots, t_k)$ een formule;
- als φ en ψ formules zijn, dan zijn ook $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ en $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ formules;
- als φ een formule is en x een individuele variabele, dan zijn $\forall x\ \varphi$ en $\exists x\ \varphi$ ook formules;
- niets anders is een formule

Een formule van de vorm $P(t_1, \ldots, t_k)$ heet een **atomaire formule** of **atoom.**

Vrije Universiteit Brussel

Syntaxis – voorbeelden



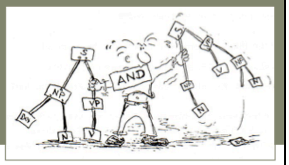
- Voorbeelden atomaire formules
  - $P^2(x,a)$
  - $P^2(f^2(x, y),g^1(a))$
- Voorbeelden van formules
  - $\forall x\ (A^1(a) \rightarrow \forall y\ (R^2(x,y) \rightarrow A^1(y)))$
  - $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (R^2(z, y) \leftrightarrow \neg Q^2(y, x))$

- Zijn geen formules
  - $P(\neg x)$
  - $A(x)\forall x$
  - $\forall x\ \exists\ R^2(x, y)$

- We houden in het algemeen de notatie zo eenvoudig mogelijk
  - Zo weinig mogelijk boven indices
  - Zo weinig mogelijk haakjes.

Vrije Universiteit Brussel

Syntaxis – voorbeelden



- Betekenisvolle voorbeelden
  - Niemand kent iedereen
    - $\neg\exists x\ \forall y\ Kxy$
  - Wie iemand kent, kent iedereen
    - $\forall x\ (\exists y\ Kxy \rightarrow \forall z\ Kxz)$
  - Wie alleen zichzelf kent, wordt door niemand gekend
    - $\forall x\ (\forall y\ (Kxy \leftrightarrow x=y\ ) \rightarrow \neg\exists z\ Kzx\ )$

Vrije Universiteit Brussel

Kracht van de taal

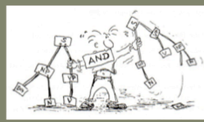
- Predikaatlogica is geschikt om wiskundige beweringen te formaliseren, bijv. uit rekenkunde, meetkunde, verzamelingenleer, …
  - Zie boek voor voorbeelden
- Predikaatlogica wordt ook gebruikt als basis voor programmeertalen
  - De voorbeeldtaal hiervan is PROLOG.

Voorbeelden uit de wiskunde niet te kennen

Wel weten dat PROLOG een programmeertaal gebaseerd op logica is.

Vrije Universiteit Brussel

Bereik van kwantoren



- Zijn de volgende formules gelijkwaardig?

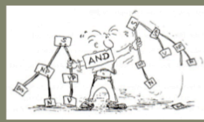
  $(\exists x\, Ax \wedge \forall y\, Bxy)$ en $\exists x\, (Ax \wedge \forall y\, Bxy)$

- Het **bereik van een kwantor** is die subformule waarvóór die kwantor is gevoegd tijdens de constructie van die formule.

Bereik van een kwantor is best te zien via de constructieboom van de formule (zie volgende slide)

Vrije Universiteit Brussel

Bereik van kwantoren



$$\varphi = \forall x\,(Ax \rightarrow \exists y\,(Rxy \wedge \forall x\, Sxy))$$

$\forall x\,(Ax \rightarrow \exists y\,(Rxy \wedge \forall x\, Sxy))$

$Ax \rightarrow \exists y\,(Rxy \wedge \forall x\, Sxy)$

Ax $\qquad$ $\exists y\,(Rxy \wedge \forall x\, Sxy)$

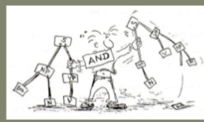
$Rxy \wedge \forall x\, Sxy$

Rxy $\qquad$ $\forall x\, Sxy$

Sxy

Vrije Universiteit Brussel

Bereik van kwantoren



– Illustratie

$$\varphi = \forall x\,(Ax \rightarrow \exists y\,(Rxy \wedge \forall x\; Sxy))$$

(1) (2) (3)

Bereik van ∀*x* (3)

Bereik van ∃*y* (2)

Bereik van ∀*x* (1)

Vrije Universiteit Brussel

Vrije en gebonden variabelen

Def. Een *voorkomen* van een variabele *x* heet **vrij** als het niet in het bereik van een kwantor ∀*x* of ∃*x* ligt

Def. Een kwantor ∀*x* of ∃*x* **bindt** de voorkomens van variabelen *x* in zijn bereik, voor zover die nog vrij zijn. Deze voorkomens heten dan **gebonden**

Voorbeeld van gebonden variabelen:

$$\varphi = \forall x\, (Ax \rightarrow \exists y\, (Rxy \wedge \forall x\; Sxy))$$

Vrije Universiteit Brussel

Vrije en gebonden variabelen

- De vrije variabelen van een formule kunnen beschouwd worden als parameters (zoals in programmeren)

Def. Een **zin** of een **gesloten formule** is een formule zonder vrije variabelen

- Voorbeelden:
  - Pa
  - $\exists x\ Px$
  - $\forall x\ \exists y\ (Rxy \vee \exists z\ (Rxz \wedge Rzy))$

Def. Een formule met vrije variabelen heet een **open formule**

- Voorbeelden
  - Rax
  - $\exists x\ Sxy$

Vrije Universiteit Brussel

Substitutie - definitie

Definitie

Substitutie

- Als t, t' termen zijn, x een variabele, dan is $[t / x]t'$ de term die ontstaat door elk voorkomen van x in t' te vervangen door t.
- Als φ een formule is, t een term en x een variabele, dan is $[t / x]\varphi$ de formule die ontstaat door elk voorkomen van ***x*** **als vrije variabele** in φ te vervangen door t.
  - $[t / x]\varphi$ wordt ook wel een instantie van φ genoemd

- Voorbeelden
  - $[y / x](\forall x\,(Rx \vee Sx) \vee Pxx) = \forall x\,(Rx \vee Sx) \vee Pyy$
  - $[f(a,b)/z]\exists x\,(Px \rightarrow Ryz) = \exists x\,(Px \rightarrow Ryf(a,b))$
  - $[y/x](\exists y\,(y < x)) = \exists y\,(y < y)$

Dus enkel vrije variablen worden vervangen!!

Vrije Universiteit Brussel

“Veilige” substituties

- De substitutie van *t* voor *x* is wel altijd gedefinieerd maar levert soms ongewenste resultaten op (zie vorig voorbeeld)

Definitie

Een term *t* heet vrij voor *x* in φ
als in $[t/x]\varphi$ **geen** variabele van *t* gebonden wordt.

- Voorbeelden
  - f^2zy is niet vrij voor x in ∃y Rxy, maar wel in Rxy of in ∃u Rxu.

Alfabetische variant

- Een **alfabetische variant van een formule** ontstaat door **gebonden** variabelen door nieuwe variabelen te vervangen.
  - Intuïtief gezien verandert hierdoor niets
  - $\exists y\ (y < x)$ heeft als alfabetische variant: $\exists z\ (z < x)$

Wordt gebruikt om substitutie veilig te kunnen uitvoeren:
Zie vorig voorbeeld:
f^2zy is niet vrij voor x in ∃y Rxy
Maar wel in ∃u Rxu (gebonden y vervangen door u).

Enkel gebonden variabelen mogen vervangen worden, de vrije varaibelen dus niet!

Vrije Universiteit Brussel

Predikaatlogica: Semantiek

Vrije Universiteit Brussel

Semantiek

– Inhoud:
- Principe
- Situatie of structuur
- Interpretatiefunctie
- Model
- Bedeling
- Waardering
- Model van een formule
- Gelijkheid tussen termen, universeel geldig, logisch equivalent
- Geldig gevolg
- Theorie en Modelverzameling

Vrije Universiteit Brussel

Semantiek - principe

- Drie aspecten zijn belangrijk bij de bestudering van de semantiek van predikaatlogica:

De interpretatiefunctie geeft betekenis aan de bouwstenen van de taal (predikaatletters, functieletters, ….).

Vrije Universiteit Brussel

Semantiek - principe

- Alle 3 de aspecten zijn essentieel
  - vergelijking met natuurlijke taal
    - Stel tekst gekend en woordenboek (interpretatiefunctie), maar niet de situatie
      - We kunnen niet weten of wat gezegd wordt waar is
    - Stel tekst gekend en de situatie, maar geen woordenboek (interpretatiefunctie)
      - We kunnen niet weten of wat gezegd wordt waar is
    - Stel een woordenboek (de interpretatiefunctie) en de situatie, maar niet de tekst
      - We weten niet wat er gezegd werd.

Vrije Universiteit Brussel

Semantiek: Structuur

- Structuur is te vergelijken met een stukje werkelijkheid
- Een structuur bestaat uit een domein waarop relaties en operaties gedefinieerd zijn.
  - *Voorbeeld*:
    domein: de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$
    relaties: $<$, $=$
    operaties: $+$, $*$
- Informeel:
  - Relaties tussen de objecten in het domein corresponderen met beweringen (vb. $5 < 10$)
  - Operaties op objecten leveren andere objecten op (vb. $8 + 2$ is 10)

Vrije Universiteit Brussel

Semantiek: Structuur - definitie

Definitie

Een structuur $\boldsymbol{D}$ is een drietal $\langle D, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{O}\rangle$ bestaande uit een **niet-lege** verzameling D (het domein), een verzameling $\boldsymbol{R}$ van relaties **op** D en een verzameling $\boldsymbol{O}$ van operaties **op** D.

Vrije Universiteit Brussel

Intermezzo: Speciale structuren

Speciale structuren:

- Relationele structuur: enkel relaties, geen operaties

  vb.: lineaire ordeningen, bomen, grafs, …

  Voorbeeld:

  D = {1, 2, 3, 4, 5} met de relatie R 'kleiner dan'

  R= {(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5) }

- Operationele structuur: domein met enkel operaties

  vb.: groepen, ringen (wiskunde).

Vrije Universiteit Brussel

Semantiek: principe vervolg

formele taal

interpretatiefunctie

situatie of structuur

Taal

Term
Predikaat(letter)
Functie(letter)
Constante

Correspondeert met

Structuur

Object
Relatie
Operatie
Welbepaald object

Merk op: De benamingen *predikaat* en *functie* worden gebruikt voor de syntactische concepten
en niet voor hun semantische interpretatie

Vrije Universiteit Brussel

Semantiek: interpretatiefunctie

– Om een formule te kunnen interpreteren is er een interpretatie van variabelen, constanten, predikaatletters en functieletters nodig

Definitie

Laat $\boldsymbol{D} = \langle D, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{O} \rangle$ een structuur zijn.

Een **interpretatiefunctie** *I* kent aan

– elke individuele constante *c* uit de predikaat logische taal een welbepaald object uit D toe via een nul-plaatsige operatie, $I(c) \in \boldsymbol{O}$

– elke predikaatletter *P* een relatie uit $\boldsymbol{R}$ van dezelfde plaatsigheid toe, $I(P) \in \boldsymbol{R}$

– elke functieletter *f* een operatie uit $\boldsymbol{O}$ van dezelfde plaatsigheid toe, $I(f) \in \boldsymbol{O}$ ()

Interpreteren: betekenis geven

Een nul-plaatsige operatie geeft steeds een object uit het domein terug, zodoende wordt elke constante afgebeeld op een welbepaald object uit het domein

Vrije Universiteit Brussel

Semantiek: model

Definitie
Een paar (***D***, *I*) met ***D*** een structuur en *I* een interpretatiefunctie heet een **model**

Een (on)eindig model is een model met een (on)eindig domein.

– Voorbeeld:
$\boldsymbol{D} = \langle \mathbb{N}, \{\geq\}, \{0\} \rangle$
$I(c_1) = 0$
$I(R) = \geq$

$I(\forall x\ R(x, c_1)) = \forall x\ (x \geq 0)$

Dus in dit model is de zin $\forall x\ R(x, c_1)$ waar

Let op: dit is verschillend van hoe een model gedefinieerd is in propositie logica

Vrije Universiteit Brussel

Semantiek: bedeling

Definitie

Een **bedeling** *b* is een functie die aan **elke variabele** *x* een object uit het domein toekent, dus $b(x) \in D$.

– Voorbeeld: Model $M = (\langle D, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{O}\rangle, I)$ met
$D = \mathbf{IN}$, $\boldsymbol{R} = \{<\}$, $\boldsymbol{O} = \{0,+,\cdot\}$
I: $I(P) = <$, $I(f) = +$, $I(g) = \cdot$, $I(a) = 0$
b: $b(x_i) = i$ $\qquad (i = 1,2,3,\ldots)$

$$Px_1x_2 \wedge Pf(a,x_9)g(x_5,x_9) \xrightarrow{b,I} 1 < 2 \text{ en } 9 < 45$$

<u>Opm</u>: bedeling is gedefinieerd voor alle variabelen, niet enkel voor vrije variabelen!!

Notatie - afspraken

- Notatie:

  $\langle \mathbf{IN}, \{<,=\},\{0,1,+,\cdot\}\rangle$ ook als $\langle \mathbf{IN},<,=,0,1,+,\cdot\rangle$ wanneer duidelijk is wat de relaties zijn en wat de operaties zijn.
  Zo ook: P i.p.v. $I(P)$ en f i.p.v. $I(f)$

  $b[x \mapsto d]$ is de bedeling b waarbij d aan de variabele x wordt toebedeeld.

  – Vben: b: $b(x_i) = i$ $(i = 1,2,3,\ldots)$
  $b[x_1 \mapsto 10](x_2) = 2$
  $b[x_1 \mapsto 10](x_1) = 10$

Waardering van termen

Vrije Universiteit Brussel

Definitie

Laat $M = (\boldsymbol{D}, I)$ een model zijn en b een bedeling.
Dan is de semantische waardering $V_{M,b}$ van *termen* als volgt gedefinieerd:

- $V_{M,b}(x) = b(x)$ voor variabelen x
- $V_{M,b}(a) = I(a)$ voor constanten a
- $V_{M,b}(f(t_1,\ldots,t_k)) = I(f)(V_{M,b}(t_1),\ldots, V_{M,b}(t_k))$

Vrije Universiteit Brussel

Waardering van termen

Voorbeeld

Laat M een model zijn met $\boldsymbol{D} = \langle \boldsymbol{IN}, 0, + \rangle$ en $I(f)$ = '+', $I(a)= 0$

b een bedeling waarbij b(x)=1

Dan geldt:

$V_{M,b}(f(a,x)) = I(f)(V_{M,b}(a),\ V_{M,b}(x))$

$I(f)(V_{M,b}(a),\ V_{M,b}(x)) = I(f)(I(a),\ b(x))$

$I(f)(I(a),\ b(x)) = +(0,1) = 1$

Vrije Universiteit Brussel

Waardering van formules

Net als in propositielogica is de interpretatie (semantiek) van een formule een waarheidswaarde: waar (0) of onwaar(1)

Definitie

Laat $M = (\boldsymbol{D}, I)$ een model zijn en b een bedeling.
De waarheidswaarden van formules zijn als volgt gedefinieerd:

- $V_{M,b}(P(t_1,\ldots,t_m)) = 1$ desda $I(P)(V_{M,b}(t_1),\ldots, V_{M,b}(t_m))$ geldt
- $V_{M,b}(\neg\varphi) = 1$ desda $V_{M,b}(\varphi) = 0$
  idem als in propositielogica voor $\varphi\wedge\psi$, $\varphi\vee\psi$, $\varphi\rightarrow\psi$ en $\varphi\leftrightarrow\psi$.
- $V_{M,b}(\exists x\ \varphi) = 1$ desda *er is een* $d \in D$ zodat $V_{M,b[x\mapsto d]}(\varphi) = 1$
- $V_{M,b}(\forall x\ \varphi) = 1$ desda *voor alle* $d \in D$ geldt $V_{M,b[x\mapsto d]}(\varphi) = 1$

Vrije Universiteit Brussel

Intuitief

- Een atomaire formule is waar in een structuur, als het feit dat wordt uitgedrukt inderdaad waar is in de structuur
  - Voorbeeld: $I(P)$= '<', $b(x)$=2 en $b(y)$=7 dan is Pxy waar in $\langle \boldsymbol{IN}, < \rangle$
    nl, 2 < 7 geldt in $\boldsymbol{IN}$

- Eén formule φ kan in verschillende structuren heel verschillende beweringen uitdrukken.

  Bij gegeven φ en één structuur $\boldsymbol{D}$ kunnen verschillende interpretatiefuncties aan φ een andere waarheidswaarde geven
  - Voorbeeld: $\forall x\ \forall y\ (f(x,y) = f(y,x))$ is waar op $\boldsymbol{Q}$ en $\boldsymbol{IN}$ zowel met $I(f)$ = '+' als met $I(f)$ = '·' maar onwaar met $I(f)$ = -

Vrije Universiteit Brussel

Model van een formule

Notatie

- $V_{M,b}(\varphi) = 1$ — φ is waar in M onder b
- $V(\varphi)$ ipv $V_{M,b}(\varphi)$ — als geen verwarring mogelijk
- $V_{M,b}(\varphi) = 1$ — $M,b \models \varphi$ of $M \models \varphi[b]$
- $V_{M,b}(\varphi) = 0$ — $M,b \not\models \varphi$ of $M \not\models \varphi[b]$

Definitie

Een paar M=(***D***,*I*) met structuur ***D*** en interpretatiefunctie *I* heet een model van een formule φ als voor iedere bedeling b geldt: $V_{M,b}(\varphi) = 1$

Vrije Universiteit Brussel

Semantiek - voorbeeld

<u>Voorbeeld</u>

M model met $\boldsymbol{D} = \langle \mathbf{Q}, < \rangle$ en $I(R)$ = ‘<‘.

b een bedeling waarbij $b(x_1) = 4$

Dan $V_{M,b}(\ \forall y(Rx_1y \rightarrow \exists z\ (Rx_1z \wedge Rzy))\ ) = 1$

desda voor alle q $\in$ **Q**: $V_{M,b[y \mapsto q]}\ (Rx_1y \rightarrow \exists z\ (Rx_1z \wedge Rzy)) = 1$

desda voor alle q $\in$ **Q**: als $V_{M,b[y \mapsto q]}\ (Rx_1y) = 1$ dan $V_{M,b[y \mapsto q]}(\exists z\ (Rx_1z \wedge Rzy))) = 1$

desda voor alle q $\in$ **Q**: als 4 < q,
dan is er een q’ $\in$ **Q**: $V_{M,b[y \mapsto q,\ z \mapsto q']}((Rx_1z \wedge Rzy)) = 1$

desda voor alle q $\in$ **Q**: als 4 < q,
dan is er een q’ $\in$ **Q**: $V_{M,b[y \mapsto q,\ z \mapsto q']}(Rx_1z) = 1$
en $V_{M,b[y \mapsto q,\ z \mapsto q']}(Rzy) = 1$

desda voor alle q :$\in$ **Q** als 4 < q,
dan is er een q’ $\in$ **Q** met 4 < q’ en q’ < q

Vrije Universiteit Brussel

Gelijkheid van termen

- De gelijkheidsrelatie (‘=“) is niet gedefinieerd (als relatie) in de taal:

  Indien nodig: expliciet te definiëren; alsook de semantiek ervan.

  Voorbeeld definitie gelijkheid tussen termen:
  $V_{M,b}(t_1=t_2) = 1$ desda $V_{M,b}(t_1) = V_{M,b}(t_2)$

Gelijkheid hier is gebaseerd op de identiteit tussen objecten in het domein

Vrije Universiteit Brussel

Semantiek – eigenschappen

Eigenschap van de waarheidsfunctie:

Waarheidswaarde van een formule hangt af van de structuur ***D***, de interpretatiefunctie *I* en van het effect van de bedeling *b* op de vrije variabelen in die formule (en dus niet van de bedeling van de gebonden variabelen).

Dit is gebaseerd op de volgende bewering:

Bewering:

Als een formule φ vrije variabelen $x_1,\dots,x_k$ bevat en er zijn 2 bedelingen b_1 en b_2 met $b_1(x_i) = b_2(x_i)$, voor $i = 1,\dots,k$, dan geldt $V_{M,b1}(\varphi) = V_{M,b2}(\varphi)$

Vrije Universiteit Brussel

Semantiek – eigenschappen

- Gevolg:
  - Voor zinnen (gesloten formules) zijn er geen vrije variabelen, dus doet de bedeling er niet toe.
    - Voor zinnen spreken we dus over waarheid en onwaarheid in een model.

Vrije Universiteit Brussel

Substitutie – eigenschappen

Bewering

Substitutie

Voor alle termen t, t' geldt:

$$V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t')$$

Links: eerst substitueren en dan de waarde van t' bepalen

Rechts: waarde van t' berekenen en we bedelen de waardering van t aan x

Dus wat betreft de waardering is substitutie in een term hetzelfde als substitutie in de bedeling.

Vrije Universiteit Brussel

Substitutie – eigenschappen

$$V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t')$$

Voorbeeld:

Als $t' = f(x,y)$ en $t = a$ dan

$$\begin{aligned} V_{M,b}([a/x]f(x,y)) &= V_{M,b}(f(a,y)) \\ &= I(f)(V_{M,b}(a), V_{M,b}(y)) \\ &= I(f)(I(a), b(y))) \end{aligned}$$

Anderzijds:

$$\begin{aligned} V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(a)]}(f(x,y)) &= I(f)(V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(a)]}(x), V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(a)]}(y)) \\ &= I(f)(V_{M,b}(a), b(y)) \\ &= I(f)(I(a), b(y)) \end{aligned}$$

Bewijs later.

Vrije Universiteit Brussel

Geldig gevolg

Definitie

Geldig gevolg:

Laat Σ een verzameling formules zijn en ψ een formule, dan ψ volgt uit Σ, $\Sigma \models \psi$, desda:

voor elk model *M* en elke bedeling *b* geldt:

als voor elke $\varphi \in \Sigma$ geldt dat $V_{M,b}(\varphi) = 1$

dan ook $V_{M,b}(\psi) = 1$

- Opmerking: oneindig veel mogelijkheden voor *M* en *b !!*

Vrije Universiteit Brussel

Semantiek

Def. Een formule ψ heet universeel geldig als $\models \psi$

– Intuïtief: Een universeel geldige formule is waar in alle modellen *M* en onder iedere bedeling *b*

Def. Twee formules φ en ψ heten logisch equivalent als $\models \varphi \leftrightarrow \psi$

Voorbeelden:

$\forall x\,(Rx \rightarrow Px),\ \exists x\, Rx \models \exists x\, Px$

$\models Ta \rightarrow \exists x\, Tx$

$\models \forall x\, Rx \leftrightarrow \neg \exists x \neg Rx$

Vrije Universiteit Brussel

Theorie

Definitie

$\{\varphi \mid \varphi$ is een zin en $V_M(\varphi) = 1\}$ is een theorie voor een model M

Notatie Th(M)

- Intuïtief: De verzameling van ware zinnen is een theorie voor M
- We kunnen een theorie ook weergeven door axioma's

Definitie

Axiomaverzameling voor een model *M*

Een formuleverzameling Σ axiomatiseert een theorie $Th(M)$ als voor alle zinnen φ geldt: $\varphi \in Th(M)$ desda $\Sigma \models \varphi$

- Een goede axiomatisering geeft de essentiële kenmerken van het model weer.

Vrije Universiteit Brussel

Modelverzameling

Definitie

Modelverzameling voor de zin φ, $MOD(\varphi)$, is

$\{M \mid V_M(\varphi) = 1\}$

Modelverzameling voor de verzameling zinnen Σ, $MOD(\Sigma)$, is $\{M \mid V_M(\varphi) = 1 \text{ voor alle } \varphi \in \Sigma\}$

- MOD is verzameling van modellen die de zin, resp. een verzameling zinnen, waar maakt.

Vrije Universiteit Brussel

Predikaatlogica: Semantische tableaus

Vrije Universiteit Brussel

Semantische tableaus

- Zoals in de propositielogica kunnen we semantische tableaus gebruiken om de geldigheid van een gevolgtrekking te testen
- Hoofdidee:
  - zoeken van een tegenvoorbeeld voor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \text{ o } \psi$
- Let op: tegenvoorbeeld in predikaatlogica is
  - Er bestaat een model en een bedeling die $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ waar maakt en ψ onwaar
    - Dus structuur (domain), interpretatiefunctie en bedeling nodig.

Semantische tableaus

- Regels en techniek van de propositielogica zijn uitgebreid naar de predikaatlogica:
  - Bijkomende reductieregels voor de kwantoren $\forall$ en $\exists$
  - Gaandeweg construeren van een domein *D*
  - Bijhouden van de interpretatiefunctie I en de bedeling *b*
  - De reductieregels voor de connectieven blijven van kracht

- Beperking:
  - geen functieletters in de formules
  - Gevolgtrekkingen zonder constanten en zonder vrije variabelen (anders veel ingewikkelder).

Vrije Universiteit Brussel

Semantische tableaus

- Voorbeeld
  - Geldige gevolgtrekking:
    $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$, $\forall x(Bx \rightarrow Cx)$ / $\forall x(Ax \rightarrow Cx)$
    $\varphi_1 = Ax \rightarrow Bx$, $\varphi_2 = Bx \rightarrow Cx$

Universele formules moeten waar zijn voor elk element in het domein, dus ook voor d_1

Nodig: Minstens 1 element in het domein die de bewering onwaar maakt

$$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2 \circ \forall x(Ax \rightarrow Cx)$$

$$\Big|\ \forall_R$$

$$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2 \circ Ad_1 \rightarrow Cd_1 \qquad (1)\ D = \{d_1\}$$

$$\Big|\ \rightarrow_R$$

$$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Ad_1 \circ Cd_1 \qquad (1)\ D = \{d_1\}$$

$$\Big|\ \forall_L$$

$$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Ad_1 \rightarrow Bd_1, Ad_1 \circ Cd_1 \qquad (1)\ D = \{d_1\}$$

Blijft staan als herinnering

$$(2)\ \forall x\varphi_1 : \{d_1\}$$

Constructie van het domein

Eerst de voor-alle rechts elimineren omdat er nog geen domein geconstrueerd is (of het domein is leeg). Voor-alle rechts is dus gemakkelijker

Semantische tableaus

$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Ad_1 \to Bd_1, Ad_1 \circ Cd_1$ (1) $D = \{d_1\}$

$\to_L$ (2) $\forall x\varphi_1 : \{d_1\}$

$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Bd_1, Ad_1 \circ Cd_1$ (1) $D = \{d_1\}$ (2) $\forall x\varphi_1 : \{d_1\}$

$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Ad_1 \circ Ad_1, Cd_1$ (1) $D = \{d_1\}$ (2) $\forall x\varphi_1 : \{d_1\}$

=

$\forall_L$

$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Bd_1 \to Cd_1, Bd_1, Ad_1 \circ Cd_1$ (1) $D = \{d_1\}$

$\to_L$ (2) $\forall x\varphi_1 : \{d_1\}$ (3) $\forall x\varphi_2 : \{d_1\}$

$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Cd_1, Bd_1, Ad_1 \circ Cd_1$ (1) $D = \{d_1\}$ (2) $\forall x\varphi_1 : \{d_1\}$ (3) $\forall x\varphi_2 : \{d_1\}$

=

$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Bd_1, Ad_1 \circ Bd_1, Cd_1$ (1) $D = \{d_1\}$ (2) $\forall x\varphi_1 : \{d_1\}$ (3) $\forall x\varphi_2 : \{d_1\}$

=

Tableau is gesloten!

Semantische tableaus - regels

Vrije Universiteit Brussel

- Extra reductieregels:

$$\forall_R : \quad \frac{\Phi \circ \forall x \varphi, \Psi}{\Phi \circ [d_{k+1}/x]\varphi, \Psi} \qquad \frac{(1)\ D = \{d_1, \cdots, d_k\} \quad (2)\ \cdots\cdots}{(1)\ D = \{d_1, \cdots, d_k, d_{k+1}\} \quad (2)\ \cdots \text{idem} \cdots}$$

Nieuw element

  - Om $\forall x\ \varphi$ onwaar te maken, moet **er minstens 1 object** in *D* zijn zodat $[d/x]\ \varphi$ onwaar is. We voeren daarom d_{k+1} in
  - Achtereenvolgens toepassen van $\forall_R$ zorgt dat het domein langzamerhand wordt opgebouwd.

Semantische tableaus - regels

$\forall_L$:

$$\dfrac{\Phi, \forall x\, \varphi \circ \Psi}{\Phi, \forall x\, \varphi, [d_1/x]\varphi, \cdots, [d_k/x]\varphi \circ \Psi}$$

(1) $\{d_1, \cdots, d_k\}$

(2) $\cdots\cdots$

(1) $\{d_1, \cdots, d_k\}$

(2) $\forall x \varphi : \{d_1, \cdots, d_k\}$

$\cdots$idem$\cdots$

- Om $\forall x\ \varphi$ waar te maken, moet $[d/x]\ \varphi$ waar zijn **voor alle** objecten die tijdens de constructie in het domein terecht komen.
  - Dit vereist het "invullen" voor elk object uit het geconstrueerde domein.
- Moet ook terug gebeuren als er later nog nieuwe elementen aan het domein worden toegevoegd !!!

Vrije Universiteit Brussel

Semantische tableaus

$$\exists_L : \quad \begin{array}{c} \Phi, \exists x\varphi \circ \Psi \\ | \\ \Phi, [d_{k+1}/x]\varphi \circ \Psi \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \quad \{d_1, \cdots, d_k\} \\ (2) \quad \cdots\cdots \\ (1) \quad \{d_1, \cdots, d_k, d_{k+1}\} \\ (2) \quad \cdots \text{idem} \cdots \end{array}$$

$$\exists_R : \quad \begin{array}{c} \Phi \circ \exists x\varphi, \Psi \\ | \\ \Phi \circ [d_1/x]\varphi, \cdots, [d_k/x]\varphi, \exists x\varphi, \Psi \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \quad \{d_1, \cdots, d_k\} \\ (2) \quad \cdots\cdots \\ (1) \quad \{d_1, \cdots, d_k\} \\ (2) \quad \exists x\varphi : \{d_1, \cdots, d_k\} \\ \quad \cdots \text{idem} \cdots \end{array}$$

Semantische tableaus -Vb 9.2

$\varphi \equiv Ax \to \forall y By$

$\Psi \equiv \forall x \forall y (Ax \to By)$

$$\forall x\varphi \circ \forall x \forall y(Ax \to By)$$
$$\mid \forall_R$$
$$\forall x\varphi \circ \forall y(Ad_1 \to By) \quad (1)\ D = \{d_1\}$$
$$\mid \forall_R$$
$$\forall x\varphi \circ Ad_1 \to Bd_2 \quad (1)\ D = \{d_1, d_2\}$$
$$\mid \to_R$$
$$\forall x\varphi, Ad_1 \circ Bd_2 \quad (1)\ D = \{d_1, d_2\}$$
$$\mid \forall_L$$
$$\forall x\varphi, Ad_1 \to \forall y By, Ad_2 \to \forall y By, Ad_1 \circ Bd_2 \quad *$$
$$\mid \to_L$$

Left branch: $\forall x\varphi, \forall y By, Ad_2 \to \forall y By, Ad_1 \circ Bd_2\ *$ $\mid \to_L$

- Left: $\forall x\varphi, \forall y By, Ad_1 \circ Bd_2\ *$ $\mid \forall_L$ $\forall x\varphi, \forall y By, Bd_1, Bd_2, Ad_1 \circ Bd_2\ **$ $=$
- Right: $\forall x\varphi, \forall y By, Ad_1 \circ Ad_2, Bd_2\ *$ $\mid \forall_L$ $\forall x\varphi, \forall y By, Bd_1, Bd_2, Ad_1 \circ Ad_2, Bd_2\ **$ $=$

Right branch: $\forall x\varphi, Ad_2 \to \forall y By, Ad_1 \circ Ad_1, Bd_2\ *$ $=$

$*$: (1) $D = \{d_1, d_2\}$
(2) $\forall x\varphi : \{d_1, d_2\}$

$**$: (1) $D = \{d_1, d_2\}$
(2) $\forall x\varphi : \{d_1, d_2\}$
$\forall y By : \{d_1, d_2\}$

Dit tableau sluit.

Semantische tableaus -Vb 9.4

Vrije Universiteit Brussel

$\varphi_1 \equiv Ax \wedge Bx$
$\varphi_2 \equiv Bx \wedge Cx$

$$\neg\exists x(Ax \wedge Bx), \neg\exists x(Bx \wedge Cx) \circ \neg\exists x(Ax \wedge Cx)$$
$$\Big| \; \neg_L, \neg_L, \neg_R$$
$$\exists x(Ax \wedge Cx) \circ \exists x(Ax \wedge Bx), \exists x(Bx \wedge Cx)$$
$$\Big| \; \exists_L$$
$$Ad_1 \wedge Cd_1 \circ \exists x(Ax \wedge Bx), \exists x(Bx \wedge Cx) \qquad D = \{d_1\}$$
$$\Big| \; \wedge_L$$
$$Ad_1, Cd_1 \circ \exists x(Ax \wedge Bx), \exists x(Bx \wedge Cx) \qquad D = \{d_1\}$$
$$\Big| \; \exists_R$$
$$Ad_1, Cd_1 \circ Ad_1 \wedge Bd_1, \exists x(Ax \wedge Bx), \exists x(Bx \wedge Cx) \quad *$$
$$\wedge_R$$

$$Ad_1, Cd_1 \circ Ad_1, \exists x\varphi_1, \exists x\varphi_2 \quad * \qquad\qquad Ad_1, Cd_1 \circ Bd_1, \exists x\varphi_1, \exists x\varphi_2 \quad *$$
$$\Big| \; \exists_R$$
$$Ad_1, Cd_1 \circ Bd_1, Bd_1 \wedge Cd_1, \exists x\varphi_1, \exists x\varphi_2 \quad **$$
$$\wedge_R$$
$$Ad_1, Cd_1 \circ Bd_1, \exists x\varphi_1, \exists x\varphi_2 \quad ** \qquad\qquad Ad_1, Cd_1 \circ Cd_1, \ldots$$

Tegenvoorbeeld!

$*$: (1) $D = \{d_1\}$
(2) $\exists x\varphi_1 : \{d_1\}$

$**$: (1) $D = \{d_1\}$
(2) $\exists x\varphi_1 : \{d_1\}$
$\exists x\varphi_2 : \{d_1\}$

Vrije Universiteit Brussel

Semantische tableaus -Vb 9.5

$$*: (1)\ D = \{d_1, d_2\}$$
$$(2)\ \forall y R d_1 y : \{d_1, d_2\}$$

$$**: (1)\ D = \{d_1, d_2\}$$
$$(2)\ \forall y R d_1 y : \{d_1, d_2\}$$
$$\exists x R x d_2 : \{d_1, d_2\}$$

$$\exists x \forall y Rxy \circ \forall y \exists x Rxy$$
$$\Big|\ \exists_L$$
$$\forall y R d_1 y \circ \forall y \exists x Rxy \qquad D = \{d_1\}$$
$$\Big|\ \forall_R$$
$$\forall y R d_1 y \circ \exists x R x d_2 \qquad D = \{d_1, d_2\}$$
$$\Big|\ \forall_L$$
$$\forall y R d_1 y, R d_1 d_1, R d_1 d_2 \circ \exists x R x d_2 \qquad *$$
$$\Big|\ \exists_R$$
$$\forall y R d_1 y, R d_1 d_1, R d_1 d_2 \circ R d_1 d_2, R d_2 d_2, \exists x R x d_2 \qquad **$$
$$=$$

Vrije Universiteit Brussel

Semantische tableaus -Vb 9.6

Domein mag niet leeg zijn!

$*$: (1) $D = \{d_1\}$
(2) $\forall y \exists x Rxy : \{d_1\}$

$**$: (1) $D = \{d_1\}$
(2) $\forall y \exists x Rxy : \{d_1\}$
$\exists x \forall y Rxy : \{d_1\}$

$***$: (1) $D = \{d_1, d_2\}$
(2) $\forall y \exists x Rxy : \{d_1\}$
$\exists x \forall y Rxy : \{d_1\}$

$****$: (1) $D = \{d_1, d_2, d_3\}$
(2) $\forall y \exists x Rxy : \{d_1\}$
$\exists x \forall y Rxy : \{d_1\}$

$$\forall y \exists x Rxy \circ \exists x \forall y Rxy \qquad D = \{d_1\}$$
$$\Big| \; \forall_L$$
$$\forall y \exists x Rxy, \exists x Rxd_1 \circ \exists x \forall y Rxy \qquad *$$
$$\Big| \; \exists_R$$
$$\forall y \exists x Rxy, \exists x Rxd_1 \circ \forall y Rd_1 y, \exists x \forall y Rxy \qquad **$$
$$\Big| \; \exists_L$$
$$\forall y \exists x Rxy, Rd_2 d_1 \circ \forall y Rd_1 y, \exists x \forall y Rxy \qquad ***$$
$$\Big| \; \forall_R$$
$$\forall y \exists x Rxy, Rd_2 d_1 \circ Rd_1 d_3, \exists x \forall y Rxy \qquad ****$$
$$\Big|$$

Dit wordt een oneindig diepe tak, want we moeten de formules terug invullen voor d_2 en d_3 !
Dit tableau sluit niet.

Semantische tableaus: Samenvatting

– Mogelijkheden:
  1. Het tableau sluit, gevolgtrekking is geldig.
  2. Er is een niet-sluitende *tak*. Deze kan:
     2.1 eindig afbreken, of
     2.2 oneindig doorlopen
     In beide gevallen: tegenvoorbeeld; gevolgtrekking is niet geldig

Oneindige tak: tegenvoorbeeld met een oneindig domein.

Vrije Universiteit Brussel

Predikaatlogica & beslisbaarheid

- De predikaatlogica is **niet beslisbaar** (stelling van Church 1936):

  Er bestaat geen algoritme om voor iedere willekeurige formule te bepalen of deze afleidbaar is of niet uit een formuleverzameling.

  - Sommige fragmenten van de predikaatlogica zijn wel beslisbaar
- Semantische tableaus zijn wel **adequaat** voor de predikaatlogica:

  Een sequent heeft een gesloten tableau dan en slechts dan als de corresponderende gevolgtrekking geldig is.

  - Zo'n gesloten tableau wordt gevonden wanneer men zorgt voor fair scheduling van de reductieregels (d.w.z. ze moeten allemaal aan de beurt komen).

Algemeen: Een theorie T is beslisbaar wanneer er een mechanische procedure bestaat om, bij een

gegeven formule ϕ van de taal, uit te maken of ϕ afleidbaar uit T dan wel niet.

Vrije Universiteit Brussel

Predikaatlogica: Afleidingen

Vrije Universiteit Brussel

Afleidingen

We breiden het systeem van natuurlijke deductie uit de propositielogica uit tot predikaatlogica

- Afleidingsregels propositielogica blijven geldig
- Nodig: afleidingsregels voor $\forall$ en $\exists$.
  - Beperking tot formules zonder vrije variabelen.

Afleidingsregels

– Extra afleidingsregels predikaatlogica:

Let op: t is een term zonder variabelen

d is een individuele constante

$$\frac{\forall x\, \varphi \text{ uit } \Sigma}{[t/x]\varphi \text{ uit } \Sigma}\forall\text{E}$$

Ook wel de regel van instantiatie genoemd

$$\frac{[d/x]\varphi \text{ uit } \Sigma}{\forall x\, \varphi \text{ uit } \Sigma}\forall\text{I} \quad \text{mits } d \text{ niet in } \forall x\, \varphi \text{ of } \Sigma \text{ voorkomt}$$

Ook wel de regel van generalisatie genoemd

Vb som vn hoeken diehoek is 180

Aantonen voor een willekeurige driehoek (d), zonder iets van de eigenschappen van die driehoek te gebruiken (d komt niet voor in …)

Afleidingsregels

$$\frac{[t/x]\varphi \text{ uit } \Sigma}{\exists x\,\varphi \text{ uit } \Sigma}\exists \mathrm{I}$$

Mits t vrij is voor x in φ

Als we een speciaal geval bewezen hebben
dan kunnen we de existentiële kwantor invoeren

$$\frac{\exists x\,\varphi \text{ uit } \Phi \qquad \psi \text{ uit } \Sigma,[d/x]\varphi}{\psi \text{ uit } \Phi \cup \Sigma}\exists \mathrm{E},[-[\mathrm{d/x}]\varphi]$$

mits d niet in $\exists x\varphi$ of ψ of Σ voorkomt

Een conclusie uit een existentiële bewering moet
los staan van een specifiek voorbeeld van die bewering

Vb socrates sterfelijk -> er bestaat een mens die sterfelijk is

Vrije Universiteit Brussel

Afleidingsregels - belangrijk

- Conditie “Mits t vrij is voor x in φ” in ∃I is nodig om de volgende ongewenste afleiding te vermijden:

  Uit $\forall y\ Ryy$ mogen we niet afleiden:
  $\exists x\ \forall y\ Ryx$ omdat y niet vrij voor x is in $\forall y\ Ryx$

Nl: $\varphi = \forall y\ Ryx$; $t = y$ dan $[y/x]\ \forall y\ Ryx = \forall y\ Ryy$

Dus y is nu gebonden! En dus was y niet vrij voor x in $\forall y\ Ryx$.

Herinner: t vrij voor x d.w.z. dat geen enkele variable van t gebonden wordt door de substitutie

Vrije Universiteit Brussel

Afleidingen - Opmerking

- Deze regels zijn eenvoudiger dan die in het boek, omdat zij beperkt zijn tot formules zonder vrije variabelen.
- De voorwaarden voor de toepassing van deze regels dienen zorgvuldig in acht genomen te worden en altijd bij de verantwoording van een toepassing van de regels worden vermeld.

Vrije Universiteit Brussel

Afleidingen: Vb 10.1

– We bewijzen: $\forall x \exists y\, Rxy \vdash \exists y\, Rdy$

1.	$\forall x\, \exists y\, Rxy$	uit φ	aanname $\varphi = \forall x\, \exists y\, Rxy$
2.	$\exists y\, Rdy$	uit φ	$\forall E(1)$ ([t/x] waar t = d)

Vrije Universiteit Brussel

Afleidingen: Vb 10.3

– We bewijzen: $\forall x(Ax \rightarrow Bx) \vdash \forall x Ax \rightarrow \forall x Bx$

1.	$\forall x\ (Ax \rightarrow Bx)$	uit φ	aanname $\varphi = \forall x\ (Ax \rightarrow Bx)$
2.	$\forall x\ Ax$	uit ψ	aanname $\psi = \forall x\ Ax$
3.	Ad	uit ψ	$\forall$E(2)
4.	$Ad \rightarrow Bd$	uit φ	$\forall$E(1)
5.	Bd	uit φ,ψ	$\rightarrow$E(3,4)
6.	$\forall x\ Bx$	uit φ,ψ	$\forall$I(5) d niet in $\forall x\ Bx$, φ, ψ
7.	$\forall x\ Ax \rightarrow \forall x\ Bx$	uit φ	$\rightarrow$I(6)

Afleidingen: Vb 10.4

Vrije Universiteit Brussel

We bewijzen: $\forall x\, Ax \vee \forall x Bx \vdash \forall x(Ax \vee Bx)$

1. $\forall xAx \vee \forall xBx$ uit φ aanname $\varphi = \forall xAx \vee \forall xBx$
2. $\forall x Ax$ uit ψ aanname $\psi = \forall x Ax$
3. Ad uit ψ ∀E(2)
4. $Ad \vee Bd$ uit ψ ∨I(3)
5. $\forall x(Ax \vee Bx)$ uit ψ ∀I(4) d niet in $\forall x(Ax \vee Bx)$, ψ
6. $\forall x Bx$ uit χ aanname $\chi = \forall x Bx$
7. Bd uit χ ∀E(6)
8. $Ad \vee Bd$ uit χ ∨I(7)
9. $\forall x(Ax \vee Bx)$ uit χ ∀I(8) d niet in $\forall x(Ax \vee Bx)$, χ
10. $\forall x(Ax \vee Bx)$ uit φ ∨E(1,5,9)

Afleidingen: Vb 10.5

We bewijzen: $\exists x\,(Ax \wedge Bx) \vdash \exists x\,Ax \wedge \exists x\,Bx$

1.	$\exists x(Ax \wedge Bx)$	uit χ	aanname $\chi = \exists x(Ax \wedge Bx)$	
2.	$Ad \wedge Bd$	uit φ	aanname $\varphi = Ad \wedge Bd$	
3.	Ad	uit φ	$\wedge$E(2)	
4.	$\exists x\, Ax$	uit φ	$\exists$I(3)	
5.	Bd	uit φ	$\wedge$E(2)	
6.	$\exists x\, Bx$	uit φ	$\exists$I(5)	
7.	$\exists x Ax \wedge \exists x Bx$	uit φ	$\wedge$I(4,6)	
8.	$\exists x Ax \wedge \exists x Bx$	uit χ	$\exists$E(1,7)	d niet in $\exists x Ax \wedge \exists x Bx$ of χ

Afleidingen: Vb 10.6

– We proberen te bewijzen dat $\exists x\, Rxx \vdash \forall x \exists z\, Rxz$
Deze afleiding is echter niet correct!

1. $\exists x\, Rxx$ uit χ aanname $\chi = \exists x\, Rxx$
2. Rdd uit φ aanname $\varphi = Rdd$
3. $\exists z\, Rdz$ uit φ $\exists$I(2)
4. $\exists z\, Rdz$ uit χ $\exists$E(1,3) $-\varphi$ d niet in $\exists z\, Rdz, \chi$ (Onjuist!)
5. $\forall x \exists z\, Rxz$ uit χ $\forall$I(4) d niet in $\forall x \exists z\, Rxz$, χ

Afleidingen: Vb. 10.7

Vrije Universiteit Brussel

We laten zien dat $\exists x(Ax \wedge Bx), \neg\exists x(Bx \wedge Cx) \vdash \neg\forall x(Ax \to Cx)$

1. $\exists x(Ax \wedge Bx)$	uit φ	aanname $\varphi = \exists x(Ax \wedge Bx)$
2. $\neg\exists x(Bx \wedge Cx)$	uit ψ	aanname $\psi = \neg\exists x(Bx \wedge Cx)$
3. $Ad \wedge Bd$	uit ξ	aanname $\xi = Ad \wedge Bd$
4. $\forall x(Ax \to Cx)$	uit χ	aanname $\chi = \forall x(Ax \to Cx)$
5. $Ad \to Cd$	uit χ	$\forall$E(4)
6. Ad	uit ξ	$\wedge$E(3)
7. Bd	uit ξ	$\wedge$E(3)
8. Cd	uit χ, ξ	$\to$E(6,5)
9. $Bd \wedge Cd$	uit χ, ξ	$\wedge$I(7,8)
10. $\exists x(Bx \wedge Cx)$	uit χ, ξ	$\exists$I(9)
11. $\neg\forall x(Ax \to Cx)$	uit ψ, ξ	$\neg$I(2,10) (intrekking van χ)
12. $\neg\forall x(Ax \to Cx)$	uit φ, ψ	$\exists$E(1,11) d niet in φ, ψ, $\exists x(Ax \wedge Bx)$

Syllogisme: sommige A zijn B, geen B is C dus niet alle A zijn C

Vrije Universiteit Brussel

Afleidingen: Vb. 10.8

We laten zien dat $\exists x \forall y Rxy \vdash \forall y \exists x Rxy$

1. $\exists x \forall y Rxy$	uit φ	aanname $\varphi = \exists x \forall y Rxy$
2. $\forall y Rdy$	uit ψ	aanname $\psi = \forall y Rdy$
3. Rde	uit ψ	$\forall$E(2)
4. $\exists x Rxe$	uit ψ	$\exists$I(3)
5. $\exists x Rxe$	uit φ	$\exists$E(1,4) d niet in φ, $\exists x Rxe$
6. $\forall y \exists x Rxy$	uit φ	$\forall$I(5) e niet in $\forall y \exists x Rxy$, φ

Vrije Universiteit Brussel

Intermezzo: Axiomatisch bewijssysteem

- Zoals bij propositielogica bestaat er ook een alternatief bewijssysteem, nl axioma's en afleidingsregels

Vrije Universiteit Brussel

Intermezzo: Axiomatisch bewijssysteem

- Voorbeeld hiervan uit de Wiskunde
  - Peano-rekenkunde: theorie voor optellen en vermenigvuldiging van natuurlijke getallen

    Constante: 0

    Functieletters: +, . , S (opvolgfunctie)

    Termen: 0+x, x.y, S(x+Sy)

    0, S0, SS0, SSS0, … komt overeen met 0,1,2,3,…

    Axioma's:

    PA1: $\forall x \; \neg 0 = Sx$ — *0 is van geen enkel getal de opvolger*

    PA2: $\forall x \; \forall y \; (Sx = Sy \rightarrow x = y)$ — *opvolgerfunctie is injectief*

    PA3: $\forall x \; x + 0 = x$ — *recursieve definitie van +*

    $\forall x \; \forall y \; x + Sy = S(x + y)$

    PA4: $\forall x \; x \,.\, 0 = 0$ — *recursieve definitie van .*

    $\forall x \; \forall y \; x \,.\, Sy = x \,.\, y + x$

    PA5: $([0/x]\, \varphi \wedge \forall x\, (\varphi \rightarrow [Sx/x]\, \varphi)) \rightarrow \forall x\, \varphi$ (voor elke formule φ)

    principe van inductie (op S)

Vrije Universiteit Brussel

Predikaatlogica: Een eenvoudige theorie

Vrije Universiteit Brussel

Eenvoudige theorie

- Inhoud
  - Substitutie
  - Prenexvormen
  - Fragmenten van Predikaatlogica

Vrije Universiteit Brussel

Substitutie

- Herinner:

Bewering

Substitutie

Voor termen t, t' en variabele x geldt:

$$V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t')$$

Bewijs: met inductie naar de opbouw van t'.

Substitutie

$V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t')$

Bewijs: met inductie naar de opbouw van *t'*.

- Als t' = x dan $[t/x]t'$ = t, en dan $V([t/x]t') = V(t)$
  Anderzijds $V_{b[x \mapsto V(t)]}(t') = V_{b[x \mapsto V(t)]}(x) = V(t)$
- Als t' = y en y is een andere variabele of een constante, dan $[t/x]t'$ = y
  en $V([t/x]t') = V(y)$
  Anderzijds $V_{b[x \mapsto V(t)]}(t') = V_{b[x \mapsto V(t)]}(y) = V(y)$
- Inductiehypothese: stel bewering geldt voor termen t_i, i = 1, …, n
  Dan geldt voor $t'=f(t_1, \ldots, t_n)$ dat $V([t/x]t') = I(f)(V([t/x]\,t_1), \ldots, V([t/x]\,t_n))=$
  $I(f)(V_{b[x \mapsto V(t)]}(t_1), \ldots, V_{b[x \mapsto V(t)]}(t_n))$
  Anderzijds:
  $V_{b[x \mapsto V(t)]}(t') = V_{b[x \mapsto V(t)]}(f(t_1, \ldots, t_n)) = I(f)\,((V_{b[x \mapsto V(t)]}(t_1), \ldots, V_{b[x \mapsto V(t)]}(t_n))$

Substitutie

In formules:

Probleem: door substitutie op een vrije variabele kan deze gebonden raken, daarom extra conditie!

Bewering

Als φ een formule is, *t* een term, *x* een variabele en *t* is vrij voor *x* in φ dan geldt in elk model *M* en voor elke bedeling *b*:

$$V_{M,b}([t/x]\varphi) = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(\varphi)$$

Substitutie

$$V_{M,b}([t/x]\varphi) = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(\varphi)$$

Bewijs: met inductie naar de opbouw van φ.

Schets

- Eerst voor $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$
- Dan voor $\varphi = \neg\psi$ en alle andere connectieven
- Dan voor $\varphi = \forall z\ \Psi$
  - *Hierbij 2 gevallen: x niet vrij en x vrij*
- *En $\varphi = \exists z\ \Psi$ analoog*

Prenexvorm

Er bestaat een verband tussen ∀ en ∃

– Equivalenties met ∀, ∃ en ¬:

- $\forall x \neg \varphi$ is logisch equivalent met $\neg \exists x\ \varphi$

Nl.

$V(\forall x \neg \varphi) = 1$

desda voor alle $d \in D$ geldt dat $V_{b[x \mapsto d]}(\neg \varphi) = 1$

desda voor alle $d \in D$ geldt dat $V_{b[x \mapsto d]}(\varphi) = 0$

desda er is geen $d \in D$ zodat $V_{b[x \mapsto d]}(\varphi) = 1$

desda $V(\exists x\ \varphi) = 0$

desda $V(\neg \exists x\ \varphi) = 1$

- $\exists x \neg \varphi$ is logisch equivalent met $\neg \forall x\ \varphi$

Voorbeeld:

$\neg\neg\neg \exists x\ \forall y\ \varphi \equiv \neg \exists x\ \forall y\ \varphi \equiv \forall x\ \neg \forall y\ \varphi \equiv \forall x\ \exists y\ \neg \varphi$

$\equiv$ is logisch equivalent met

Prenexvorm

- Equivalenties met ∀, ∃, ∧ en ∨:

Lemma:

Als φ en ψ formules zijn en x een variabele is die *niet vrij voorkomt in ψ* dan zijn de volgende formules logisch equivalent:

$(\exists x\ \varphi) \wedge \psi$ en $\exists x\ (\varphi \wedge \psi)$	$\psi \wedge (\exists x\ \varphi)$ en $\exists x\ (\psi \wedge \varphi)$
$(\forall x\ \varphi) \wedge \psi$ en $\forall x\ (\varphi \wedge \psi)$	$\psi \wedge (\forall x\ \varphi)$ en $\forall x\ (\psi \wedge \varphi)$
$(\exists x\ \varphi) \vee \psi$ en $\exists x\ (\varphi \vee \psi)$	$\psi \vee (\exists x\ \varphi)$ en $\exists x\ (\psi \vee \varphi)$
$(\forall x\ \varphi) \vee \psi$ en $\forall x\ (\varphi \vee \psi)$	$\psi \vee (\forall x\ \varphi)$ en $\forall x\ (\psi \vee \varphi)$

Als x toch vrij voorkomt in ψ dan kunnen we in $\exists x\ \varphi$ *of* $\forall x\ \varphi$ overgaan op een alfabetische variant

Prenexvorm

- Equivalenties met $\forall$, $\exists$ en $\rightarrow$:

Lemma

Als φ en ψ formules zijn en x een variabele is die *niet vrij voorkomt in* ψ, dan zijn de volgende formules logisch equivalent:

$(\forall x\ \varphi) \rightarrow \psi$ en $\exists x\ (\varphi \rightarrow \psi)$ $\qquad$ $\psi \rightarrow (\forall x\ \varphi)$ en $\forall x\ (\psi \rightarrow \varphi)$

$(\exists x\ \varphi) \rightarrow \psi$ en $\forall x\ (\varphi \rightarrow \psi)$ $\qquad$ $\psi \rightarrow (\exists x\ \varphi)$ en $\exists x\ (\psi \rightarrow \varphi)$

Namelijk (voorbeeld): $(\exists x\ \varphi) \rightarrow \psi \ \equiv\ \neg(\exists x\ \varphi) \vee \psi \ \equiv$
$(\forall x\ \neg\varphi) \vee \psi \ \equiv\ \forall x\ (\neg\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\ (\varphi \rightarrow \psi)$

$\equiv$ is logisch equivalent met

Prenexvorm

- Equivalenties met $\forall$, $\exists$ en $\leftrightarrow$:

Lemma:

Als φ en ψ formules zijn en x is een variabele die *niet vrij voorkomt in* ψ en y is een variabele die niet vrij voorkomt in φ en ψ, dan zijn de volgende formules logisch equivalent:

$(\exists x\ \varphi) \leftrightarrow \psi$ en

$((\exists x\ \varphi) \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow (\exists x\ \varphi))$ en

$((\forall x\ (\varphi \rightarrow \psi)) \wedge (\exists x\ (\psi \rightarrow \varphi))$ en

$((\forall x\ (\varphi \rightarrow \psi)) \wedge (\exists y\ (\psi \rightarrow [y/x]\varphi))$ en

$\forall x\ ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\exists y\ (\psi \rightarrow [y/x]\varphi)))$ en

$\forall x\ \exists y\ ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow [y/x]\varphi))$

Prenexvorm

Definitie

Prenexvorm

Een formule van de vorm $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\ \psi$, waarbij

- Q_i kwantoren ($\exists$ of $\forall$) zijn,
- $i = 1, \ldots, n$ en
- ψ een formule is waarin geen kwantoren meer voorkomen

heet een *prenexvorm* met $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n$ als prefix en ψ als matrix.

Voorbeeld:

$\exists x \forall y \forall x_1(((Ryx \rightarrow Ay) \rightarrow Ax) \rightarrow Ax_1)$

Vrije Universiteit Brussel

Prenexstelling

Prenexstelling:

Voor elke formule φ bestaat er een prenexformule ψ zodat φ en ψ logisch equivalent zijn, i.e ($V(\varphi)=V(\psi)$).

Bewijs: met inductie naar φ.

Prenexvorm

- Voorbeeld:
  $\forall x(\forall y\,(Ryx \to Ay) \to Ax) \to \forall x\, Ax$
  - $\equiv \forall x(\forall y\,(Ryx \to Ay) \to Ax) \to \forall x_1\, Ax_1$ (alfabetische variant)
  - $\equiv \forall x(\forall y\,(Ryx \to Ay) \to Ax) \to \forall x_1\, Ax_1$
  - $\equiv \forall x(\exists y\,((Ryx \to Ay) \to Ax)) \to \forall x_1\, Ax_1$
  - $\equiv \forall x(\exists y\,((Ryx \to Ay) \to Ax)) \to \forall x_1\, Ax_1$
  - $\equiv \exists x(\exists y\,((Ryx \to Ay) \to Ax) \to \forall x_1\, Ax_1)$
  - $\equiv \exists x(\exists y\,((Ryx \to Ay) \to Ax) \to \forall x_1\, Ax_1)$
  - $\equiv \exists x \forall y\,(((Ryx \to Ay) \to Ax) \to \forall x_1\, Ax_1)$
  - $\equiv \exists x \forall y\,(((Ryx \to Ay) \to Ax) \to \forall x_1\, Ax_1)$
  - $\equiv \exists x \forall y \forall x_1(((Ryx \to Ay) \to Ax) \to Ax_1)$
  - NB De volgorde van de kwantoren vooraan hangt af van de volgorde waarin je ze naar voren haalt.

Fragmenten van de Predikaatlogica

- Men beperkt zich vaak tot delen (fragmenten) van de predikaatlogica
  - Monadische taal: enkel één-plaatsige predikaatletters
    - Voldoende voor behandeling van syllogismen

      Syllogismen: gevolgtrekkingen met 2 aannames en 1 conclusie van de vorm 'alle/geen/sommige A is/zijn B'

      voorbeeld: alle kaaimannen zijn reptielen
geen reptiel kan fluiten
dus geen kaaiman kan fluiten.

Fragmenten van de Predikaatlogica

Vrije Universiteit Brussel

– Universele formules: alleen universele kwantoren in hun prefix

– Horn-zinnen

- zijn universele zinnen van de vorm

$\forall x_1 \ldots \forall x_n\ (A_1 \wedge \ldots \wedge A_k) \to B$

waarbij $A_1, \ldots, A_k, B$ atomaire beweringen zijn

Worden gebruikt in de programmeertaal PROLOG

Voorbeeld:

```
sibling(X,Y) :-
    parentS(F,M,X),
    parentS(F,M,Y),
     X \= Y.
```

Vrije Universiteit Brussel

Predikaatlogica:
Metatheorie

Predikaatlogica: Metatheorie

– Inhoud:
  - Adequaatheid van semantische tableaus
  - De volledigheidsstelling

Vrije Universiteit Brussel

Adequaatheid van tableaus

- Semantische tableaus zijn een juiste methode om de geldigheid van een gevolgtrekking in de predikaatlogica te bewijzen of te weerleggen.
- Herinner:
  - Beperkt tot taal zonder functiesymbolen, zonder individuele constanten en zonder vrije variabelen

Adequaatheidsstelling (zonder bewijs)

Als Σ een formuleverzameling is en φ een formule, dan geldt:

$\Sigma \models \varphi$ *desda* er bestaat een gesloten semantisch tableau voor Σ o φ

Volledigheidsstelling

Volledigheidsstelling:

Voor de predikaatlogica geldt dat voor iedere formuleverzameling Σ en iedere formule φ

$\Sigma \vdash \varphi$ desda $\Sigma \models \varphi$

- Correctheid ("soundness"):
  $\Sigma \vdash \varphi$ impliceert $\Sigma \models \varphi$
- Volledigheid ("completeness"):
  $\Sigma \models \varphi$ impliceert $\Sigma \vdash \varphi$

Vrije Universiteit Brussel

EINDE PREDIKAATLOGICA