WISKUNDIGE BEWIJSTECHNIEKEN

VRIJE
UNIVERSITEIT
BRUSSEL

STELLINGEN VAN HET TYPE P ⇒ Q (ALS … DAN …)

Rechtstreeks

- We trachten te bewijzen dat als p waar is dan ook q waar is
  - $p \Rightarrow q$ correspondeert met de logische implicatie ($p \rightarrow q$)
  - Om de implicatie te bewijzen schakelen we het enige geval waarbij de implicatie onwaar is (p waar en q onwaar) uit

  Bijv. door

  $p \rightarrow p_1$

  $p_1 \rightarrow p_2$

  …

  $p_n \rightarrow q$

  Daaruit volgt $p \rightarrow q$

STELLINGEN VAN HET TYPE P ⇒ Q (ALS … DAN …)

Rechtstreeks

- Voorbeeld : Als $n > m > 0$, *met n en m reele getallen*

$$dan \qquad \frac{n+1}{m+1} > \frac{n}{m}$$

Als $n>m$ dan $mn + n > mn + m$

Als $mn + n > mn + m$ dan $(m + 1)\, n > (n + 1)\, m$

Als $(m + 1)\, n > (n + 1)\, m$ dan $\frac{n+1}{m+1} > \frac{n}{m}$ (wegens n en m positief)

STELLINGEN VAN HET TYPE P $\Rightarrow$ Q (ALS … DAN …)

Onrechtstreeks

- Bewijs door contrapositie

BEWIJS DOOR CONTRAPOSITIE

$p \rightarrow q$ is logisch equivalent met $\neg q \rightarrow \neg p$

Dus i.p.v. $p \rightarrow q$ te bewijzen kunnen we $\neg q \rightarrow \neg p$ bewijzen

Bijvoorbeeld: a en b positieve reële getallen

Als $a^2 < b^2$ dan $a < b$

Te bewijzen door contrapositie, nl

als $\neg(a < b)$ dan $\neg(a^2 < b^2)$

of nog TB: als $a \geq b$ dan $a^2 \geq b^2$

Bewijs: als $a \geq b$ dan $a.a \geq a.b$ en $a.b \geq b.b$

Dus $a.a \geq b.b$ of nog $a^2 \geq b^2$

VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL

BEWIJS UIT HET ONGERIJMDE

Ook genoemd: door contradictie

Stel p is te bewijzen

We gaan nu $\neg p$ aannemen en dan hieruit proberen een eigenschap q af te leiden die in strijd is met axioma's of met gekende eigenschappen.

Omdat $\neg p \to q$ dan waar is

En q onwaar

Volgt hieruit dat $\neg p$ onwaar moet zijn, of dus p waar.

Kan toegepast worden voor eender welk type van stelling!

BEWIJS UIT HET ONGERIJMDE TOEGEPAST OP STELLINGEN VAN HET TYPE $P \Rightarrow Q$

$p \Rightarrow q$ correspondeert in logica met $(p \rightarrow q)$

We veronderstellen nu $\neg(p \rightarrow q)$ waar

Dit is logisch equivalent met $(p \wedge \neg q)$

En hieruit proberen we dan een onware bewering t af te leiden

Dus $(p \wedge \neg q) \rightarrow t$ waar

Maar t is onwaar

Hieruit volgt dat $(p \wedge \neg q)$ onwaar moet zijn, en dus

$\neg(p \rightarrow q)$ onwaar, en dus $(p \rightarrow q)$ waar.

BEWIJS UIT HET ONGERIJMDE TOEGEPAST OP STELLINGEN VAN HET TYPE P ⇒ Q

Als n is een oneven geheel getal, dan n^2 een oneven geheel getal.

We veronderstellen de negatie is waar, en tonen aan dat dit tot een contractie leidt.

Dus n is een oneven geheel getal en n^2 een even geheel getal.

n oneven, $n = 2k + 1$, met $k \in Z$

Dan $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k + 2k + 1$

Is in contradictie met n^2 is even

BEWIJS UIT HET ONGERIJMDE TOEGEPAST OP STELLINGEN VAN HET TYPE P ⇒ Q

x is een rationaal getal, y is een irrationaal getal ,

dan is x + y is een irrationaal getal.

We veronderstellen het omgekeerde

x is een rationaal getal, y is een irrationaal getal en x + y is rationaal

x is een rationaal getal dus $x = p/q$, $x + y$ is rationaal dus $x + y = r/s$, met $p,q,r,s \in Z$

$x + y = r/s$ dus ook $p/q + y = r/s$ en dus $y = r/s$ - p/q

en ook $y = (rq - ps) / sq$, maar dit is een contractie met y irrationaal

sq

STELLINGEN VAN HET TYPE P $\Leftrightarrow$ Q

$p \Leftrightarrow q$ correspondeert in logica met $(p \leftrightarrow q)$

Aangezien

$(p \leftrightarrow q)$ logisch equivalent is met $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

kunnen we het bewijs van de equivalentie geven door elke implicatie afzonderlijk te bewijzen, dus

$p \Rightarrow q$ en $p \Leftarrow q$ bewijzen.

Een veel voorkomend geval is: $(p \Rightarrow q)$ rechtstreeks bewijzen en $(q \Leftarrow p)$ via contrapositie, dus $\neg p \Rightarrow \neg q$ bewijzen

BEWIJS PER INDUCTIE

Te gebruiken wanneer we iets moeten bewijzen voor een aftelbaar oneindig aantal

Gebaseerd op de volgende **stelling**:

Zij $\{p_n \mid n \in N\}$ een verzameling uitspraken zodat

(a) p_0 waar is (basisstap)

(b) $\forall k \in N$: als p_k waar is, dan is p_{k+1} waar (inductiestap)

Dan is p_n waar voor alle $n \in N$

VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL

p_k wordt de inductiehypothese genoemd

BEWIJS PER INDUCTIE

Voorbeeld 1 t.b: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n + 1)^2$, $\forall n \in N$

<u>Bewijs</u> Zij p_n de bewering $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n + 1)^2$

Voldoet die aan (a) en (b) uit de vorige stelling?

(a) p_0 is waar, nl. $1 = 1^2$

(b) Zij $k \in N$ willekeurig. Onderstel p_k waar, dus $1 + 3 + \ldots + (2k+1) = (k + 1)^2$ dan is ook

$$1 + 3 + \ldots + (2k+1) + (2(k+1) +1) = (k + 1)^2 + 2(k +1) + 1 = ((k + 1) + 1)^2$$

en dus ook p_{k+1} waar

Aangezien k willekeurig is, is bewezen dat $\forall k \in N$: als p_k dan p_{k+1}

Dus dan is p_n waar voor alle $n \in N$ (vorige stelling)

BEWIJS PER INDUCTIE

Voorbeeld 2 : t.b. $2^n > n^2$, $\forall n \in N$, $n \geq 5$

<u>Bewijs</u> Zij p_n de bewering $2^n > n^2$

Voldoet die aan (a) en (b) uit de vorige stelling?

(a) p_5 is waar, nl. $2^5 > 5^2$ $(32 > 25)$

(b) Zij $k \in N$, $k \geq 5$. Onderstel dat p_k waar is, dus als $2^k > k^2$ dan is $2^{k+1} > (k+1)^2$

! Soms makkelijker om inductiehypothese te formuleren ifv k-1, i.e. als $2^{k-1} > (k-1)^2$ dan is $2^k > k^2$

$2^k = 2 \text{ x } 2^{k-1} > 2 \text{ x } (k-1)^2 = 2\,(k^2 - 2k+1) = 2k^2 - 4k+2 =$

$k^2 + k^2 - 4k+2 = k^2 + k(k-4)+2 > k^2$ (wegens $k(k-4)+2$ positief, met $k>5$)

Zo is bewezen dat $\forall k \in N, k \geq 5$: als p_k dan p_{k+1}

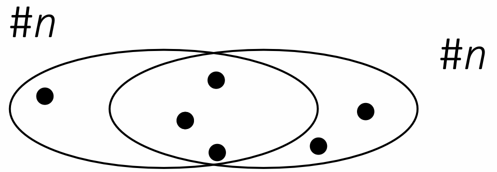
Dus p_n waar voor alle $n \in N$, $n \geq 5$

ALLE PAARDEN ZIJN WIT ????

Stelling Alle paarden zijn wit

Bewijs per inductie

- (b) Als n paarden dezelfde kleur hebben, dan ook n+1 paarden



- (a) Paard van Sinterklaas is wit

Wat loopt hier fout?

SORITES PARADOXEN

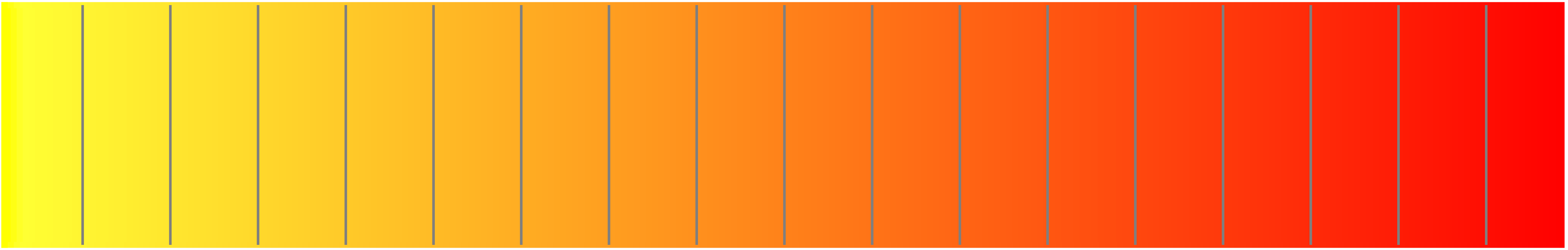
- 1.000.000 zandkorrels vormen samen een zandhoop.
- Als 1.000.000 zandkorrels samen een zandhoop vormen, doen 999.999 zandkorrels dat ook.
- Als 999.999 zandkorrels samen een zandhoop vormen, doen 999.998 zandkorrels dat ook.
- ...
- Dus 1 zandkorrel vormt ook een zandhoop.

Samengevat:

- 1.000.000 zandkorrels vormen samen een zandhoop.
- Als een x-aantal zandkorrels samen een zandhoop vormen, doen x-1 aantal zandkorrels dat ook.
- Dus 1 zandkorrel vormt ook een zandhoop.

VAAGHEID

VAAGHEID



EINDE BEWIJZEN