Oefeningen

1. Een alfabet is een verzameling symbolen, bvb. $\{a, b, c\}$ of $\{1, 2, 3\}$ of $\{koe, paard, varken\}$. Als Σ een alfabet is, dan is Σ^i de verzameling van alle woorden over Σ van lengte i.

   $\Sigma^0 = \{\epsilon\}$

   $\Sigma^1 = \Sigma$

   $\Sigma^2 = \Sigma \times \Sigma$

   $\Sigma^3 = \Sigma \times \Sigma \times \Sigma$

   Algemeen:

   $\Sigma^0 = \{\epsilon\}$

   $\Sigma^i = \Sigma^{i-1} \times \Sigma$

   $\Sigma^* = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma^i$

   Gegeven $\Sigma = \{a, b\}$. Bereken $\Sigma^0, \Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3$.

2. Op Σ^* is een 'concatenatie' operatie gedefineerd:

   $. : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$

   die 2 woorden over Σ^* aaneenplakt (concateneert). Bvb., $abc.de = abcde$. Verder is, voor $w \in \Sigma^*$, w^r de omgekeerde versie van w.

   (a) Defineer $.^r$.
   (b) Bereken $(abcd)^r$ volgens de definitie.
   (c) Toon aan dat $(wa)^r = aw^r$.
   (d) Toon aan dat $w^{r^r} = w$.

3. Schrijf het alfabet van de λ-calculus op.

4. Schrijf het alfabet van de propositielogica op.

5. Definieer $d : \Sigma^* \times \Sigma \to \Sigma^*$ door

   $d(\epsilon, a) = \epsilon$

   $d(a, a) = \epsilon$

   $d(b, a) = b$ als $b \neq a$

   $d(cx, a) = d(c, a)d(x, a)$

   en dit $\forall a, b, c \in \Sigma$ en $\forall x \in \Sigma^*$

   (a) Wat doet d informeel ?
   (b) Toon aan dat d en $.^r$ commuteren: $(d(w, a))^r = d(w^r, a), \forall w \in \Sigma^*$ en $\forall a \in \Sigma$.

(c) Toon aan dat d commutatief is in haar 2de argument: $d(d(w,a),b) = d(d(w,b),a)$ voor alle $w \in \Sigma^*$ en voor alle $a, b \in \Sigma$.

6. Bekijk de definitie van de propositieformules $PROP \subset \Sigma^*$.

   (a) Waarvoor dient de afsluitende stap ?

   (b) Zijn de volgende formules geldige formules? Zo ja, teken hun constructieboom. Zo neen, zeg wat er fout loopt.

      i. $((p \rightarrow q) \vee \neg r)$

      ii. $(p \vee q \vee r)$

      iii. $(((p \vee q) \wedge r) \rightarrow (r \vee \neg p))$

7. Geef de volgende zinnen weer in propositionele notatie:

   (a) 'Als de bus niet komt, komen de tram en de trein'

   (b) 'Als de tram komt als de trein niet komt, dan komen de trein en de bus niet allebei'

8. Geef alle formules die met haakjes invoegen te maken zijn uit $p \wedge \neg q \rightarrow r$, met bijbehorende constructiebomen.

9. Kan je een efficiëntere representatie bedenken voor constructiebomen. Doe dit voor de formules uit oefening 6b.

10. (a) Definieer inductief rijen gebalanceerde haakjes.

    (b) Definieer op een inductieve manier een syntax voor natuurlijke rekenkundige expressies. Maak gebruik van $\mathbb{N}$ en van $\{(,),+,-,*,/\}$.

    Teken bomen in de stijl van oefening 9 voor volgende expressies.

      i. $(3 + 4) * 7$

      ii. $((8 - 5) + (6/2))$

11. Schrijf de volgende formules op in prefix en postfix notatie.

    (a) $(1 + ((2 * 7) - 5))$

    (b) $((3 + 4) * (8/2))$

    (c) $(((q \leftrightarrow r) \rightarrow p) \wedge \neg p)$

12. Voer volgende substituties met de hand uit

    (a) $[(q \leftrightarrow r)/p]\neg p$

    (b) $[(q \rightarrow s)/p](p \rightarrow q)$

    (c) $[((q \vee s) \rightarrow \neg p)/r](p \rightarrow p)$

13. Welke getallen x voldoen aan de volgende condities :

    (a) $(\neg(p \wedge q) \wedge r)$

    (b) $((\neg p \wedge q) \wedge r)$

    (c) $\neg(p \wedge (q \wedge r))$

    waarbij $p =$"$x \leq 1$", $q =$"$x \leq 3$" en $r =$"$x \geq 2$".

14. Zij v de waardering gedefinieerd door $v(p) = 0$ en $v(q) = 1$.

    (a) Wat is $v(p \wedge q)$ en $v(p \uparrow q)$?
    (b) Toon aan waar het boek te kort schiet in de definitie van semantiek.
    (c) Probeer de exacte definities te formuleren.
    (d) Geef exacte semantiek aan de standaardconnectieven.
    (e) Bereken $v(((p \wedge q) \rightarrow r))$ als $v(p) = 0$, $v(q) = 1$ en $v(r) = 0$.

15. Geef waarheidtabellen op twee manieren voor

    (a) $(\neg p \vee \neg q)$
    (b) $p \wedge (q \wedge p)$
    (c) $(\neg p \wedge (\neg q \wedge r)) \vee ((q \wedge r) \vee (p \wedge r))$

16. We voeren een nieuw connectief Δ in waarvan de betekenis door de volgende waarheidstabel is gegeven:

p	q	$p\Delta q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

    (a) Vind nu een propositie waarin alleen p, q en de connectieven $\neg, \wedge, \vee$ voorkomen, die dezelfde eindkolom in een waarheidstabel oplevert.
    (b) Wat is de intuïtieve betekenis van Δ?
    (c) Druk ook $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$ uit m.b.v. $\neg, \wedge, \neg$.

17. Rekenen binnen een computer gebeurt binair. Zij $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8)$ en zij $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8)$ twee binaire getallen (laten we afspreken dat p_1 en q_1 de minst-significante cijfers voorstellen). Net zoals gewoon decimaal optellen maakt binair optellen gebruik van twee mechanismen: één mechanisme om een reeks cijfers te combineren tot een nieuw cijfer (bvb voor $5 + 8$ is het nieuwe cijfer 3) en een ander mechanisme om te weten wat de overdracht is (bvb $5 + 8$ heeft als overdracht 1, t.t.z. "één onthouden"). Net zoals bij decimaal rekenen zowel het resulterend cijfer als de overdracht begrensd zijn door 9, is bij binair rekenen de uitkomst en de overdracht beperkt door 1.

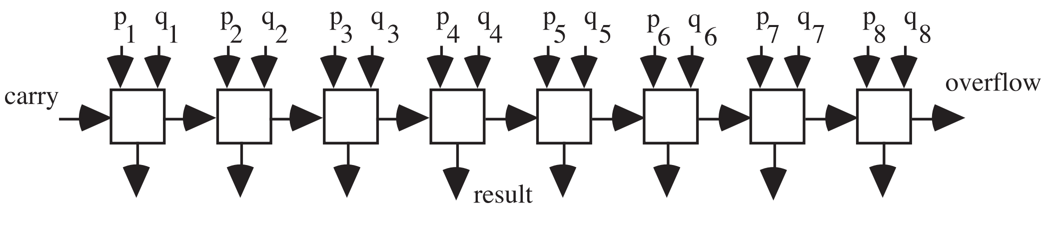

Figure 1: De full adder

(a) Vind een logisch connectief om het cijfer bij de optelling van twee bits p en q te bepalen.

(b) Vind een logisch connectief om de overdracht bij optelling van 2 bits te bepalen.

(c) Bovenstaande schakeling (de "full adder") rekent de som uit van 2 binaire getallen $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8)$ en $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8)$. Geef voor iedere digit van het resultaat een logische formule en geeft een logische formule voor de overflow. Er zal natuurlijk steeds gerekend worden met $v(c_1) = 0$

18. Bepaal $MOD(\varphi)$ voor volgende formules:

    (a) $\varphi = ((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$

    (b) $\varphi = (q \wedge (\neg p \vee p))$

    (c) $\varphi = (q \wedge (\neg p \wedge p))$

19. Bepaal alle modellen van volgende formuleverzamelingen (t.t.z. $MOD(\Sigma)$):

    (a) $\Sigma = \{((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)))\}$

    (b) $\Sigma = \{((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))), (p \vee q)\}$

    Wat gebeurt er met $MOD(\Sigma)$ als je Σ groter maakt ?

20. Gebruik modeleliminatie om de volgende problemen op te lossen:

    (a) i. Als Formele Methoden veel blokwerk is, of een slechte assistent heeft, dan is het een moeilijk vak.

    ii. Als Formele Methoden plezant is, heeft het geen slechte assistent.

    iii. Als Formele Methoden veel blokwerk is, of als het geen slechte assistent heeft, dan is het een plezant vak.

    iv. Formele Methoden is plezant enkel en alleen als er veel blokwerk aan is. Bovendien doet de assistent het fantastisch.

    Wat zijn de eigenschappen van het vak ?

    (b) i. Als je bist was je gebuisd.

    ii. Als je gebuisd was, ging je niet veel naar TD.

    iii. Als je bist of gebuisd was, ging je veel naar TD.

    iv. Als je niet bist, ging je veel naar TD.

    Is het aangeraden om van TD weg te blijven ?

21. Zijn volgende formules tautologieën ? Zijn het contradicties ?

    (a) $(((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q))$

    (b) $(((p \wedge q) \vee (r \wedge s)) \wedge \neg r)$

    (c) $((p \wedge \neg p) \wedge r)$

22. Zijn volgende formules equivalent ?

    (a) $(p \wedge q)$ en $(p \rightarrow q)$

    (b) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)$ en $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

(c) $(((p \vee \neg p) \rightarrow q) \rightarrow ((p \vee \neg p) \rightarrow r))$ en $(q \rightarrow r)$

23. Het NOR connectief (def. pag. 29) wordt meestal met $\downarrow$ aangeduid.

    (a) Toon aan dat $(p \downarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$.

    (b) Schrijf alle standaardconnectieven in functie van het $\downarrow$ connectief.

    Het NAND connectief $\uparrow$ wordt gedefinieerd door $(p \uparrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$.

    (a) Schrijf alle connectieven m.b.v. het $\uparrow$ connectief.

    (b) Toon aan dat je ook voor $\uparrow$ en $\downarrow$ wetten van de Morgan kan geven.

24. Geef een syntactische opsomming van de modellen van volgende formules.

    (a) $(p \rightarrow q)$

    (b) $((p \leftrightarrow q) \vee (p \wedge q))$

25. Zet volgende formule om naar disjunctieve normaalvorm.
    $(\neg(\neg(p \wedge q) \vee r) \vee (\neg p \wedge q))$

26. (a) Toon aan dat je elke k-plaatsige functie ($k \geq 0$) op $\{0,1\}$ m.b.v. de standaard connectieven kan maken.

    (b) Zij $h : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ een binaire functie waarmee je elke k-plaatsige functie op $\{0,1\}$ kan maken. Toon aan dat $h = h_\downarrow$ of $h = h_\uparrow$ waarbij

    i. $h_\downarrow(x,y) = 1$ desda $x + y = 0$

    ii. $h_\uparrow(x,y) = 0$ desda $x + y = 2$

27. Ga voor de volgende paren proposities telkens na of de tweede een geldig gevolg is van de eerste.

    (a) $\{p \wedge q\} \models p \rightarrow q$

    (b) $\{p \rightarrow (q \rightarrow r)\} \models (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$

    (c) $\{\neg p, q \rightarrow p\} \models q$

28. Onderzoek m.b.v. waarheidstabellen of volgende gevolgtrekkingen een tegenvoorbeeld hebben

    (a) $\{p\} \models q \rightarrow p$

    (b) $\{p \rightarrow q, q\} \models p$

    (c) $\{p \rightarrow q, q \rightarrow s\} \models p \rightarrow s$

29. Toon volgende uitspraken aan: $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \psi$ desda $\{\varphi_1\} \models \varphi_2 \rightarrow \psi$ desda $\{\varphi_1 \wedge \varphi_2\} \models \psi$

30. Bepaal alle tegenvoorbeelden van volgende gevolgtrekkingen m.b.v. semantische tableaus.

    (a) $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models q \rightarrow r$

    (b) $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow s\} \models p \rightarrow \neg s$

    (c) $\{\neg p \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow \neg r\} \models \{r \rightarrow p, (r \wedge \neg p) \rightarrow (\neg g \wedge g)\}$

(d) $\{s \vee p, b \wedge p, s \wedge p, \neg b\} \models \{\neg b \leftrightarrow a, c, d\}$

31. Beschouw volgende nieuwe connectieven.

    (a) $\uparrow (NAND)$

    (b) $\downarrow (NOR)$

    (c) $\underline{\vee}(XOR)$

    Bepaal L- en R-regels voor deze connectieven.

32. Als Superman in staat zou zijn en bereid zou zijn kwaad te voorkomen dan zou hij dat doen. Als Superman het kwaad niet zou kunnen voorkomen dan was hij machteloos en als hij het niet zou willen voorkomen dan was hij kwaadwillig. Superman voorkomt het kwaad niet. Als Superman bestaat dan is hij noch machteloos noch kwaadwillig.

    Toon *formeel* aan dat Superman niet bestaat. Waarheidstabellen zijn verboden.

33. In 'De Koopman van Venetië' van Shakespeare bezit Portia 2 kistjes (een gouden en een zilveren) waarin ze haar portret verstopt heeft. Ieder kistje heeft een inscriptie. Ze belooft haar minnaar dat hij met haar kan trouwen indien hij op basis van de inscripties in staat is om het kistje te kiezen waarin haar portret zit.

    Veronderstel dat de kistjes de volgende opschriften bevatten:

    - Op het gouden kistje: Het portret zit hier niet in.

    - Op het zilveren kistje: Precies één van de inscripties op de kistjes is waar.

    Je mag ervan uitgaan dat het portret in precies één kistje zit.

    (a) Geef een gestructureerde (met genummerde stappen) redenering die de minnaar moet helpen het juiste kistje te kiezen.

    (b) Formaliseer het probleem m.b.v. propositielogica en toon d.m.v. een formele techniek aan dat je conclusie uit (a) correct is. Waarheidstabellen zijn verboden.

34. Bepaal m.b.v. semantische tableaus of volgende formuleverzamelingen semantisch consistent zijn.

    (a) $\{p \to q, p \to r, r \to s, s \to \neg p\}$

    (b) $\{p, \neg q, q \to p\}$

    (c) $\{p, q, q \to \neg p\}$

35. Waarom zijn semantisch inconsistente verzamelingen niet zo interessant ?

36. Bepaal mb.v. semantische tableaus of volgende formules tautologieen zijn.

    (a) $((p \to q) \wedge (q \to p)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

    (b) $((p \wedge q) \vee (r \wedge s)) \wedge \neg r$

    (c) $(p \wedge \neg p) \wedge r$

    Zonee, construeer dan minstens één tegenvoorbeeld.

37. Hoe zou je semantische tableaus gebruiken om aan te tonen of 2 formules φ en ψ equivalent zijn ?

38. Bewijs met natuurlijke deductie
    (a) $\{p \to (q \to r)\} \vdash q \to (p \to r)$
    (b) $\{(p \wedge q) \to r\} \vdash p \to (q \to r)$
    (c) $\{p \to q, p \to r\} \vdash p \to (q \wedge r)$ en de twee beweringen die uit de omkering voortkomen.

39. Bewijs volgende wetten van de logica m.b.v. het natuurlijk deductiesysteem:
    (a) $\{p \vee (q \wedge r)\} \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ en omgekeerd
    (b) $\{p \vee (p \wedge q)\} \vdash p$ en omgekeerd

40. Bewijs met natuurlijke deductie:
    (a) $\vdash p \to \neg\neg p$
    (b) $\{\neg p \vee q\} \vdash p \to q$
    (c) $\{\neg p \to \neg q\} \vdash q \to p$

41. Laat zien dat de volgende verzamelingen syntactisch inconsistent zijn:
    (a) $\{\varphi, \psi, \varphi \to \neg\psi\}$
    (b) $\{\neg\rho \to \psi, \rho \to \sigma, \neg\psi, \neg\sigma\}$

42. Toon aan: een verzameling Γ is syntactisch consistent desda Γ is semantisch consistent.

43. Zijn de volgende verzamelingen consistent?
    (a) $\{p \to q, p \to r, r \to s, s \to \neg p\}$
    (b) $\{p, \neg q, q \to p\}$
    (c) $\{p, q, q \to \neg p\}$

44. Pas de bewijstechniek van de formule-inductie toe op de volgende uitspraken.
    (a) Elke formule bevat een even aantal haakjes.
    (b) Definieer de functie K van het alfabet naar $\mathbb{N}$ door $K(\wedge) = -1$; $K(\vee) = -1$; $K(\to) = -1$; $K(\leftrightarrow) = -1$; $K(\neg) = 0$; $K(() = 0$; $K()) = 0$ en $K(p) = 1$ voor elke propositieletter p. We breiden K uit naar woorden door $K(ab) = K(a) + K(b)$. Toon nu aan dat voor iedere formule φ geldt: $K(\varphi) = 1$. Geldt het omgekeerde ook ?
    (c) Het aantal propositieletters gebruikt in een formule is altijd eindig.

45. Zij Γ een willekeurige collectie formules, toon nu aan:
    (a) als $\Gamma \vdash \varphi$ dan geldt voor alle ψ
    $\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \psi)$ en $\Gamma \vdash (\neg\psi \to \varphi)$

(b) als $\Gamma \vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$ dan $\Gamma \vdash \varphi$ en $\Gamma \vdash \psi$

(c) omgekeerd: indien zowel $\Gamma \vdash \varphi$ als $\Gamma \vdash \psi$ dan $\Gamma \vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$

46. Neem een predikaatlogisch alfabet met

$C = \{nul\}$

$F = \{+1, -1, *2\}$

Maak termen om volgende objecten uit $I\!N$ voor te stellen. Neem $+1$ voor de opvolger, -1 voor de voorganger, *nul* voor 0 en $*2$ voor het verdubbelen.

(a) Het getal 4.

(b) Het dubbele van 2.

(c) Het getal 31

47. Beschrijf de verzameling termen X van volgende talen:

(a) Een eerste orde taal met een alfabet waar geen functiesymbolen in zitten.

(b) Een eerste orde taal met een alfabet met slechts één functiesymbool en zonder individuele constanten.

48. Welke van de volgende zijn formules in een taal met als alfabet $C = \{a_1\}$, $P = \{A_1^1, A_1^2, A_1^3\}$ en $F = \{f_1^1, f_1^3, f_2^3\}$?

(a) $A_1^1(A_1^2(f_1^1(x_1), x_1))$

(b) $f_1^3(x_1, x_3, x_4)$

(c) $(A_1^1(x_2) \to A_1^3(x_3, a_1))$

(d) $\neg\forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$

(e) $\forall x_2(A_1^1(x_2) \to \neg A_1^1(x_2))$

(f) $A_1^3(f_2^3(x_1, x_2, x_3))$

49. (a) Beschouw volgende beweringen over de natuurlijke getallen $I\!N$. De eenplaatsige functieletter S staat voor de successor- of opvolgerfunctie. De semantiek ervan is $Sn = n + 1$. Welke beweringen worden uitgedrukt door de volgende formules?

i. $\forall x \neg(Sx = 0)$

ii. $\forall x(x = 0 \vee \exists y(x = Sy)))$

iii. $\forall x \exists y(x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y))$

(b) Schrijf de volgende beweringen met behulp van formules:

i. Optellen van getallen is associatief.

ii. De som van twee getallen is altijd kleiner dan hun produkt.

iii. Elk even getal groter dan 2 is de som van twee priemgetallen (‘Goldbach’s Vermoeden’).

(c) Definieer met behulp van formules de volgende begrippen:

i. x is even

ii. x is een deler van y

iii. x is een priemgetal.

50. Geef de gebonden en vrije voorkomens van x_1 en x_2 in de volgende formules.

    (a) $\forall x_2(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, a_1))$
    (b) $(A_1^1(x_3) \to (\neg\forall x_1 \forall x_2 A_1^3(x_1, x_2, a_1))$
    (c) $(\forall x_1 A_1^1(x_1) \to \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2))$
    (d) $\forall x_2(A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \to \forall x_1(A_2^2(x_3, f_2^2(x_1, x_2))))$

    Is de term $f_1^2(x_2, x_3)$ vrij voor x_1 in enige van deze?

51. Zij t de term $f_1^2(x_1, x_3)$. Hieronder wordt telkens een formule φ gegeven. Bepaal steeds $[t/x_1]\varphi$.

    (a) $(\forall x_2 A_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \to A_1^1(x_1))$
    (b) $\forall x_1 \forall x_3(A_1^1(x_3) \to A_1^1(x_1))$
    (c) $\forall x_2 A_1^1(f_1^1(x_2)) \to \forall x_3 A_1^3(x_1, x_2, x_3)$
    (d) $\forall x_2 A_1^3(x_1, f_1^1(x_1), x_2) \to \forall x_3 A_1^1(f_1^2(x_1, x_3))$

52. Bereken VV van de formules in oefening **??**. Zijn het gesloten of open formules ?

53. We bekijken het universum E_1 bestaande uit de natuurlijke getallen en het universum E_2 van alle kantoorgebouwen. We beschikken over de volgende predikaten:

$I(x, y)$	"x is gelijk aan y"
$K(x)$	"x is een kwadraat"
$G(x)$	"x is een gebouw"
$L(x, y)$	"x is groter dan y"

    Druk nu onderstaande zinnen uit met behulp van kwantoren en deze predikaten en bepaal voor elk van de universa E_1, E_2, $E_1 \cup E_2$ of ze waar zijn.

    (a) Er zijn twee verschillende objekten.
    (b) Alle objekten zijn verschillend van kwadraten.
    (c) Er zijn geen gebouwen.
    (d) Er is geen grootste objekt.

54. Geef een minimaal model $(\mathbb{D}, I)$ om volgende formules te kunnen interpreteren.

    (a) $\forall x_2(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, a_1))$
    (b) $(\forall x_2(A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \to \forall x_1(A_2^2(x_3, f_2^2(x_1, x_2))))$

    Volgend model zullen we een aantal keer tegenkomen. Als de taal L een constante, een predikaat en drie functiesymbolen bevat, worden die in het model $\mathbb{N} = ((\mathbb{N}, \{\lambda x.x+1, +, .\}, \{=\}), I)$ geinterpreteerd als:

    $I(a_1) = 0$
    $I(f_1^1) = \lambda x.x + 1$
    $I(f_1^2) = +$
    $I(f_2^2) = .$
    $I(A_1^2) ==$

55. Beschouw het model $I\!N$ met de bedeling b zodanig dat $b(x) = 4$, $b(y) = 5$ en $b(z) = 16$. Waardeer nu telkens volgende termen en formules.

    (a) $f_1^2(z, f_2^2(x, f_1^2(y, f_1^1(y))))$
    (b) $(A_1^1(x) \to \neg\forall x\forall y A_1^2(x, y))$
    (c) $\forall x(A_1^2(f_1^2(z, x), z) \to \forall x(A_1^2(y, f_2^2(x, z))))$

56. Vind in het model $I\!N$, zo mogelijk, bedelingen b en b‘ zodat voor volgende formules φ geldt $V_{I\!N,b}(\varphi) = 1$ (t.t.z. $I\!N, b \models \varphi$) en $V_{I\!N,b‘}(\varphi) = 0$ (t.t.z. $I\!N, b‘ \not\models \varphi$).

    (a) $A_1^2(f_1^2(x_1, x_1), f_2^2(x_2, x_3))$
    (b) $(A_1^2(f_1^2(x_1, a_1), x_2) \to A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3))$
    (c) $\forall x_1 A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), x_3)$
    (d) $(\forall x_1 A_1^2(f_2^2(x_1, a_1), x_1) \to A_1^2(x_1, x_2))$
    (e) $\forall x_1(A_1^2(x_1, a_1) \wedge A_1^2(x_1, x_2))$

57. Is $I\!M = ((\{x|xis - een - prof\}, \Phi, \{geeft - meer - uren - als, geeft - het - moeilijkste - vak\}), I)$ met $I(a_1) = Theo, I(A_1^2) = geeft - meer - uren - als, enI(A_1^1) = geeft - het - moeilijkste - vak$ een model voor

    (a) $\forall x_1(A_1^2(x_1, x_2) \wedge \neg A_1^2(x_1, x_2))$
    (b) $A_1^1(a_1) \vee \neg A_1^1(a_1)$
    (c) $\forall x_1(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^1(x_1))$

58. Bereken $V_{I\!M,b}([t/x]t')$ op 2 manieren als

    $t = f_1^2(x, f_2^2(a_1, x))$

    $t' = f_2^2(f_1^2(x, a_1), f_2^2(x, y))$

    en

    $I\!M = ((I\!N, \{\lambda(x, y).x + y2, .\}, \Phi), I)$

    met

    $I(a1) = 3$

    $I(f_1^2) = .$

    $I(f_2^2) = \lambda(x, y).x + y^2$

    en

    $b(x) = 2$

    $b(y) = 1.$

59. Zijn volgende formules universeel geldig?

    (a) $\forall x R(x) \to \forall y \neg R(y)$
    (b) $\forall x\forall y(S(x, y) \to S(y, x))$
    (c) $\forall x(R(x) \vee \neg R(x))$
    (d) $(\forall x(R(x) \wedge A(x)) \to \neg\exists x\neg A(x)$

60. Zet volgende formule om in prenexvorm:

    $\forall x \exists y(R(x, y) \rightarrow \exists w R(w, y)) \rightarrow \exists y \forall x(S(x, y) \rightarrow \exists w S(y, w))$

61. Bewijs met semantische tableaus.

    (a) $\{\neg\exists x(A(x) \wedge B(x)), \exists x(B(x) \wedge C(x))\} \models \neg\forall(C(x) \rightarrow A(x))$

    (b) $\{\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \vee \forall y(B(y) \rightarrow A(y))\} \models \forall x \forall y((A(x) \wedge B(y)) \rightarrow (B(x) \vee A(y))$

    (c) $\{\forall x \forall y((A(x) \wedge B(y)) \rightarrow (B(x) \vee A(y))\} \models \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \vee \forall y(B(y) \rightarrow A(y))$

    (d) $\models \neg\exists x \forall y(R(x, y) \leftrightarrow \neg R(y, y))$

    (e) $\models \neg\exists x \forall y(R(x, y) \leftrightarrow \neg\exists z(R(y, z) \wedge R(z, y)))$

62. Geef met behulp van een semantisch tableau een tegenvoorbeeld voor volgende gevolgtrekking:

    $\{\forall x \forall y((A(x) \wedge B(x)) \rightarrow R(x, y)), \forall x \neg R(x, x), \forall x(A(x) \vee B(x))\} \models \forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow A(x))$

63. Test de volgende syllogismen op geldigheid en geef in geval van niet-geldigheid een tegenvoorbeeld:

    (a) $\{\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \exists x(A(x) \wedge C(x))\} \models \exists x(C(x) \wedge B(x))$

    (b) $\{\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \exists x(A(x) \wedge \neg C(x))\} \models \exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$

    (c) $\{\neg\exists x(A(x) \wedge B(x)), \forall x(B(x) \rightarrow C(x))\} \models \neg\exists x(C(x) \wedge A(x))$

64. Bewijs m.b.v. natuurlijke deductie:

    (a) $\{\forall x(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$ en omgekeerd

    (b) $\{\exists x(\varphi \vee \psi)\} \vdash \exists x\varphi \vee \exists x\psi$ en omgekeerd

65. Bewijs de volgende, bij prenexvormconstructies gebruikte, gevolgtrekkingen (x niet vrij in ψ).

    (a) $\{\exists x\varphi \rightarrow \psi\} \vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ en omgekeerd

    (b) $\{\forall x\varphi \rightarrow \psi\} \vdash \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$ en omgekeerd

66. Bewijs het volgende syllogisme:

    $\{\exists x(A(x) \wedge B(x)), \neg\exists x(B(x) \wedge C(x))\} \vdash \neg\forall x(A(x) \rightarrow C(x))$

67. Schrijf volgende functies in λ-notatie:

    (a) $f(x) = 7x$

    (b) $g(y) = y^2$

    (c) $tripsam(f) = f \circ f \circ f$

    (d)

$$l(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x = 0 \\ x.l(x-1) & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

68. Beschouw volgende '$\mathcal{P}$-calculus': Syntaxregels:

(a) $|$ is een woord uit $\mathcal{P}$.
(b) als w een woord is uit $\mathcal{P}$, is $w|$ een woord uit $\mathcal{P}$.
(c) als w en w‘ woorden zijn uit $\mathcal{P}$ is $(w\$)w$‘ een woord uit $\mathcal{P}$.

Reductieregels:

(a) $(w\$)| =_{\mathcal{P}} w|$
(b) $(w\$)|w =_{\mathcal{P}} (w|\$)w$

Opgaven:

(a) Reken de expressie $((||||||\$)|||\$)||||$ uit volgens $=_{\mathcal{P}}$.
(b) Wat is de informele betekenis van $\mathcal{P}$?
(c) Geef een formele semantiek aan $\mathcal{P}$.
(d) Bereken de semantiek van opgave en oplossing van (a).

69. Zijn volgende woorden elementen van Λ (t.t.z. geldige Λ-expressies) ?

(a) $(\lambda x.(\lambda y.((z)x)t)(\lambda x.y)z)(\lambda x.x)$
(b) $(\lambda x.x)(\lambda y.y)(\lambda z.z)$
(c) $(\lambda x.x)(\lambda y.y)\lambda z.z$
(d) y
(e) $\lambda x.t$

70. Voor iedere λ-expressie kan men als volgt ‘constructiebomen’ tekenen.

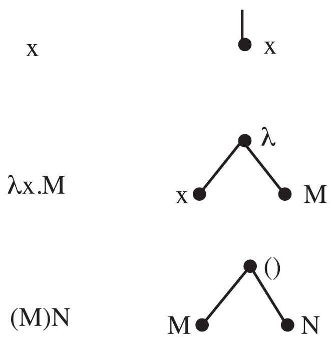

Figure 2: Constructiebomen voor λ-expressies

Teken de constructiebomen voor elk van de volgende λ-expressies.

(a) $(\lambda x.(\lambda y.((z)x)t)(\lambda x.y)z)(\lambda x.x)t$
(b) $(\lambda x.x)(\lambda y.y)(\lambda z.z)x$
(c) $(\lambda x.x)(\lambda y.y)\lambda z.z$
(d) y
(e) $\lambda x.t$

(f) $(y)(y)(y)x$

(g) $(((y)y)y)x$

71. Geef alle λ-expressies die je door invoeging van haakjes kan maken m.b.v. $\lambda x.\lambda x.xxx$. Teken ook hun constructiebomen.

72. Schrijf volgende functies in $\lambda - notatie$ 'gecurryed'.

    (a) $\lambda(x, y, z).(x^2 + y^2 = z^2)$

    (b) $\lambda(x, (y, z)).x- \parallel (y, z) \parallel$

73. Schrijf volgende functies in $\lambda - notatie$ 'uncurryed'.

    (a) $\lambda x \lambda y \lambda z.x + y - z$

    (b) $\lambda f \lambda x f(x)$

74. Welke (Scheme-special-form) zorgt er voor dat je in λ-calculus comfortabel kan programmeren ?

75. Geef in volgende λ-expressies voor ieder voorkomen van iedere variabele aan of ze vrij of gebonden voorkomt. Geef ook formeel van elke λ-expressie de verzameling VV aan. Zijn het combinatoren ?

    (a) $\lambda f.\lambda x.((f)(x)x)(f)(x)x$

    (b) $\lambda f.(x)y$

    (c) $\lambda g.(\lambda y.(x)y)\lambda z.z$

76. Bepaal respectievelijk de substitutie van volgende λ-expressies in de λ -expressies van oefening **??**.

    (a) $\lambda x.x$ in x

    (b) $\lambda x.(f)x$ in y

    (c) $(y)(g)z$ in x

77. Zijn volgende λ-expressies α-gelijk ?

    (a) $\lambda x.x$ en $\lambda z.z$

    (b) $\lambda x.((f)x)x$ en $\lambda y.((g)y)y$

    (c) $\lambda x.(x)x$ en $\lambda z.(z)x$

    (d) $(\lambda x.x)x$ en $(\lambda z.z)x$

    (e) $(\lambda x.x)y$ en y

78. Zijn volgende λ-expressies β-gelijk ?

    (a) $((\lambda n.\lambda m.\lambda f.\lambda x.((n)f)((m)f)x)\lambda f.\lambda x.(f)(f)(f)x)\lambda f.\lambda x.(f)x =_\beta \lambda g.\lambda y.(g)(g)(g)(g)y$

    (b) $(\lambda n.\lambda f.\lambda x.(f)((n)f)x)\lambda f.\lambda x.(f)(f)x =_\beta \lambda g.\lambda y.(g)(g)y$

79. Reken uit:

    (a) $(succ)c_4$

    (b) $((plus)c_2)c_2$

(c) $(((cons)c_1)c_2)car$

(d) $((times)c_3)c_2$

80. (a) Maak de booleaanse waarden samen met hun operaties *not*, *and* en *or*.

    (b) Geef een λ-expressie voor de machtsverheffing voor $n, m \geq 1$.

81. (a) Maak het $=$ en het $<$ predicaat op Church-numerals. De andere predicaten volgen hier automatisch uit.

    (b) Maak een λ-expressie repeat die een Church-numeral c_n en willekeurige λ-expressies F en A als invoer neemt, en die F n keer op A toepast.

82. Modeleer gehele getallen in λ-calculus.

83. Schrijf λ-termen voor ggd en fib op numerals.

84. (a) Maak een λ-expressie F zodanig dat voor elke λ-expressie M geldt: $(F)M =_\beta (M)M$.

    (b) Maak een λ-expressie F zodanig dat voor elke λ-expressie M geldt: $(F)M =_\beta (M)F$.

    (c) Maak F zodat voor elke M: $(F)M =_\beta F$

    (d) Vind F zodat voor elke M en N: $((F)M)N =_\beta (M(N)M)N$