Vrije Universiteit Brussel

Wiskundige bewijstechnieken

Prof. Dr. Olga De Troyer

Stellingen van het type $p \Rightarrow q$ (als … dan …)

- Rechtstreeks
  - We trachten te bewijzen dat als p waar is dan ook q waar is
    - $p \Rightarrow q$ correspondeert met de logische implicatie ($p \rightarrow q$)
    - Om de implicatie te bewijzen schakelen we het enige geval waarbij de implicatie onwaar is (p waar en q onwaar) uit

Bijv. door

$p \rightarrow p1$

$p1 \rightarrow p2$

…

$pn \rightarrow q$

Daaruit volgt $p \rightarrow q$

Vrije Universiteit Brussel

Stellingen van het type p ⇒ q (als … dan …)

- Onrechtstreeks
  - Bewijs door contrapositie

Vrije Universiteit Brussel

Bewijs door contrapositie

$p \rightarrow q$ is logisch equivalent met $\neg q \rightarrow \neg p$

Dus i.p.v. $p \rightarrow q$ te bewijzen kunnen we $\neg q \rightarrow \neg p$ bewijzen

Bijvoorbeeld: a en b positieve reële getallen

Als $a^2 < b^2$ dan $a < b$

Te bewijzen door contrapositie, nl

als $\neg(a < b)$ dan $\neg(a^2 < b^2)$

of nog TB: als $a \geq b$ dan $a^2 \geq b^2$

Bewijs: als $a \geq b$ dan $a.a \geq a.b$ en $a.b \geq b.b$

Dus $a.a \geq b.b$ of nog $a^2 \geq b^2$

Vrije Universiteit Brussel

Bewijs uit het ongerijmde

Ook genoemd: door contradictie

Voor eender welk type van stelling!

Stel p is te bewijzen

We gaan nu $\neg p$ aannemen en dan hieruit proberen een eigenschap q af te leiden die in strijd is met axioma's of met gekende eigenschappen.

Omdat $\neg p \rightarrow q$ dan waar is

En $\quad q$ onwaar

Volgt hieruit dat $\neg p$ onwaar moet zijn, of dus p waar.

Vrije Universiteit Brussel

Bewijs uit het ongerijmde toegepast op stellingen van het type $p \Rightarrow q$

We veronderstellen nu $\neg(p \rightarrow q)$ waar

Dit is logisch equivalent met $(p \wedge \neg q)$

En hieruit proberen we dan een onware bewering t af te leiden

Dus $(p \wedge \neg q) \rightarrow t$ waar

En t onwaar

Hieruit volgt dat $(p \wedge \neg q)$ onwaar moet zijn, en dus $\neg(p \rightarrow q)$ onwaar, en dus $(p \rightarrow q)$ waar.

Stellingen van het type $p \Leftrightarrow q$

$p \Leftrightarrow q$ correspondeert in logica met $(p \leftrightarrow q)$

Aangezien

$(p \leftrightarrow q)$ logisch equivalent is met $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

kunnen we het bewijs van de equivalentie geven door elke implicatie afzonderlijk te bewijzen, dus

$p \Rightarrow q$ en $p \Leftarrow q$ bewijzen.

Een veel voorkomend geval is: $(p \Rightarrow q)$ rechtstreeks bewijzen en $(q \Leftarrow p)$ via contrapositie, dus

$\neg p \Rightarrow \neg q$ bewijzen

Vrije Universiteit Brussel

Bewijs per inductie

- Te gebruiken wanneer we iets moeten bewijzen voor een oneindig aantal

Gebaseerd op de volgende **stelling**:

Zij $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ een verzameling uitspraken zodat

(a) p_0 waar is

(b) $\forall k \in \mathbb{N}$: als p_k waar is, dan is p_{k+1} waar

Dan is p_n waar voor alle $n \in \mathbb{N}$

Vrije Universiteit Brussel

Principe bewijs per inductie

Bewijs is gebaseerd op de volgende stelling

Stelling

Zij S een deelverzameling van IN zodat

(i) $0 \in S$

(ii) $\forall k \in \mathbb{N}$: als $k \in S$ dan $k + 1 \in S$

Dan is $S = \mathbb{N}$

(Bewijs van deze stelling uit het ongerijmde)

Principe bewijs per inductie

Stelling

Zij $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ een verzameling uitspraken zodat

(a) p_0 waar is

(b) $\forall k \in \mathbb{N}$: als p_k waar is, dan is p_{k+1} waar

Dan is p_n waar voor alle $n \in \mathbb{N}$

Bewijs

Veronderstel dat $p_0, p_1, p_2, \ldots$ voldoen aan (a) en (b)

Zij $S = \{ n \in \mathbb{N} \mid p_n \text{ is waar}\}$

Uit (a) volgt dat $0 \in S$ en uit (b) volgt dat

$$\forall k \in \mathbb{N}: \text{als } k \in S \text{ dan } k + 1 \in S$$

Dus is $S = \mathbb{N}$ (vorige stelling), en d.w.z.: p_n waar voor alle $n \in \mathbb{N}$

Vrije Universiteit Brussel

Bewijs per inductie

Voorbeeld

Stelling

$1 + 3 + 5 + ... + (2n+1) = (n + 1)^2 , \forall n \in IN$

Bewijs

Zij p_n de bewering $1 + 3 + 5 + ... + (2n+1) = (n + 1)^2$

Voldoet die aan (a) en (b) uit de vorige stelling?

(a) p_0 is waar, nl. $1 = 1^2$

(b) Zij $k \in IN$ willekeurig. Onderstel dat p_k waar is, dus

$1 + 3 + 5 + ... + (2k+1) = (k + 1)^2$

dan is $1 + 3 + 5 + ... + (2k+1) + (2(k+1) +1) =$

$(k + 1)^2 + 2(k +1) + 1 = ((k + 1) + 1)^2$

Zo is bewezen dat $\forall k \in IN$: als p_k dan p_{k+1}

Dus dan is p_n waar voor alle $n \in IN$ (vorige stelling)

Vrije Universiteit Brussel

EINDE BEWIJZEN