

Oplossingen Oefeningen Grondslagen 1: Predikaatlogica: Syntax

November 30, 2013

Oefening 46

- a) $+1(+1(+1(+1(nul))))$ of
 $*2(+1(+1(nul)))$ of
 $*2(*2(+1(nul)))$ of
 $+1(+1(*2(+1(nul))))$ of ...
- b) idem a)
- c) $-1(*2(*2(*2(*2(*2(+1(nul)))))))$

Oefening 47

Zij V de aftelbare verzameling variabelen:

- a) $X = V \cup C$
- b) $X = V \cup \{f^n(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in X\}$

Oefening 48

- a) Neen, dit is geen eerste orde.
- b) Neen, dit is een term.
- c) Neen, A_1^3 heeft drie argumenten nodig.
- d) Ja.
- e) Ja.
- f) Neen, A_1^3 heeft drie argumenten nodig.

Oefening 49

- a)
 - i) De opvolger van alle getallen is niet nul.
 - ii) Ieder getal is nul of is een opvolger van een ander getal.
 - iii) Ieder getal heeft een directe opvolger.

- b) i) $\forall x \forall y \forall z (x + y) + z = x + (y + z)$
 ii) $\forall x \forall y (x + y < x.y)$
 iii) We nemen aan dat E staat voor 'is even' en P staat voor 'is priem'.
 $\forall x ((x \geq 2 \wedge E(x)) \rightarrow \exists y \exists z (P(y) \wedge P(z) \wedge (x = y + z)))$
- c) i) $E(x) \equiv \exists y (x = 2.y)$
 ii) $D(y, x) \equiv \exists z (x = z.y)$
 iii) $P(X) \equiv x \geq 2 \wedge \forall y (D(x, y) \rightarrow ((x = y) \vee (y = 1)))$

Oefening 50

Van links naar rechts ('G' staat voor 'gebonden', 'V' voor 'vrij'):

- a) x_1 V, x_2 G, x_2 G. Term t is niet vrij voor x_1 .
 b) x_1 G, x_2 G. Term t is vrij voor x_1 .
 c) x_1 G, x_1 V, x_2 G. Term t is niet vrij voor x_1 .
 d) x_1 V, x_2 G, x_1 V, x_1 G, x_2 G. Term t is niet vrij voor x_1 .

Oefening 51

a)

$$\begin{aligned}
 [t/x_1]\varphi &= ([t/x_1]\forall x_2 A_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow [t/x_1]A_1^1(x_1)) && \text{imp.} \\
 &= (\forall x_2 [t/x_1]A_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow A_1^1([t/x_1]x_1)) && \text{kwa., pred.} \\
 &= (\forall x_2 A_1^2([t/x_1]x_2, [t/x_1]f_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow A_1^1(f_1^2(x_1, x_3))) && \text{pred., var.} \\
 &= (\forall x_2 A_1^2(x_2, f_1^2([t/x_1]x_1, [t/x_1]x_2)) \rightarrow A_1^1(f_1^2(x_1, x_3))) && \text{var., fun.} \\
 &= (\forall x_2 A_1^2(x_2, f_1^2(f_1^2(x_1, x_3), x_2)) \rightarrow A_1^1(f_1^2(x_1, x_3))) && \text{var., var.}
 \end{aligned}$$

b)

$$[t/x_1]\varphi = \forall x_1 \forall x_3 (A_1^1(x_3) \rightarrow A_1^1(x_1)) \quad \text{kwa.}$$

c)

$$\begin{aligned}
 [t/x_1]\varphi &= [t/x_1]\forall x_2 A_1^1(f_1^1(x_2)) \rightarrow [t/x_1]\forall x_3 A_1^3(x_1, x_2, x_3) && \text{imp.} \\
 &= \forall x_2 [t/x_1]A_1^1(f_1^1(x_2)) \rightarrow [t/x_1]\forall x_3 A_1^3(x_1, x_2, x_3) && \text{kwa.} \\
 &= \forall x_2 A_1^1([t/x_1]f_1^1(x_2)) \rightarrow [t/x_1]\forall x_3 A_1^3(x_1, x_2, x_3) && \text{pred.} \\
 &= \forall x_2 A_1^1(f_1^1([t/x_1]x_2)) \rightarrow [t/x_1]\forall x_3 A_1^3(x_1, x_2, x_3) && \text{fun.} \\
 &= \forall x_2 A_1^1(f_1^1(x_2)) \rightarrow [t/x_1]\forall x_3 A_1^3(x_1, x_2, x_3) && \text{var.} \\
 &= \forall x_2 A_1^1(f_1^1(x_2)) \rightarrow \forall x_4 [t/x_1][x_4/x_3]A_1^3(x_1, x_2, x_3) && \text{kwa. (syn.var.)} \\
 &= \forall x_2 A_1^1(f_1^1(x_2)) \rightarrow \forall x_4 [t/x_1]A_1^3([x_4/x_3]x_1, [x_4/x_3]x_2, [x_4/x_3]x_3) && \text{pred.} \\
 &= \forall x_2 A_1^1(f_1^1(x_2)) \rightarrow \forall x_4 [t/x_1]A_1^3(x_1, x_2, x_4) && \text{var., var., var.} \\
 &= \forall x_2 A_1^1(f_1^1(x_2)) \rightarrow \forall x_4 A_1^3([t/x_1]x_1, [t/x_1]x_2, [t/x_1]x_4) && \text{pred.} \\
 &= \forall x_2 A_1^1(f_1^1(x_2)) \rightarrow \forall x_4 A_1^3(f_1^2(x_1, x_3), x_2, x_4) && \text{var., var., var.}
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
[t/x_1]\varphi &= [t/x_1]\forall x_2 A_1^3(x_1, f_1^1(x_1), x_2) \rightarrow [t/x_1]\forall x_3 A_1^1(f_1^2(x_1, x_3)) && \text{imp.} \\
&= \forall x_2 [t/x_1]A_1^3(x_1, f_1^1(x_1), x_2) \rightarrow \forall x_4 [t/x_1][x_4/x_3]A_1^1(f_1^2(x_1, x_3)) && \text{kwa., kwa. (syn.var.)} \\
&= \forall x_2 A_1^3([t/x_1]x_1, [t/x_1]f_1^1(x_1), [t/x_1]x_2) \rightarrow \forall x_4 [t/x_1][x_4/x_3]A_1^1(f_1^2(x_1, x_3)) && \text{pred.} \\
&= \forall x_2 A_1^3(f_1^2(x_1, x_3), f_1^1([t/x_1]x_1), x_2) \rightarrow \forall x_4 [t/x_1][x_4/x_3]A_1^1(f_1^2(x_1, x_3)) && \text{var., fun., var.} \\
&= \forall x_2 A_1^3(f_1^2(x_1, x_3), f_1^1(f_1^2(x_1, x_3)), x_2) \rightarrow \forall x_4 [t/x_1]A_1^1([x_4/x_3]f_1^2(x_1, x_3)) && \text{var., pred.} \\
&= \forall x_2 A_1^3(f_1^2(x_1, x_3), f_1^1(f_1^2(x_1, x_3)), x_2) \rightarrow \forall x_4 A_1^1([t/x_1]f_1^2([x_4/x_3]x_1, [x_4/x_3]x_3)) && \text{pred., fun.} \\
&= \forall x_2 A_1^3(f_1^2(x_1, x_3), f_1^1(f_1^2(x_1, x_3)), x_2) \rightarrow \forall x_4 A_1^1([t/x_1]f_1^2(x_1, x_4)) && \text{var., var.} \\
&= \forall x_2 A_1^3(f_1^2(x_1, x_3), f_1^1(f_1^2(x_1, x_3)), x_2) \rightarrow \forall x_4 A_1^1(f_1^2([t/x_1]x_1, [t/x_1]x_4)) && \text{fun.} \\
&= \forall x_2 A_1^3(f_1^2(x_1, x_3), f_1^1(f_1^2(x_1, x_3)), x_2) \rightarrow \forall x_4 A_1^1(f_1^2(f_1^2(x_1, x_3), x_4)) && \text{var., var.}
\end{aligned}$$

Oefening 52

a)

$$\begin{aligned}
&VV(\forall x_1 A_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow A_1^1(x_1)) \\
&= VV(A_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow A_1^1(x_1)) \setminus \{x_1\} \\
&= (VV(A_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2))) \cup VV(A_1^1(x_1))) \setminus \{x_1\} \\
&= (VV(x_2) \cup VV(f_1^2(x_1, x_2))) \cup VV(x_1) \setminus \{x_1\} \\
&= (\{x_2\} \cup (VV(x_1) \cup VV(x_2)) \cup \{x_1\}) \setminus \{x_1\} \\
&= (\{x_2\} \cup (\{x_1\} \cup \{x_2\}) \cup \{x_1\}) \setminus \{x_1\} \\
&= \{x_1, x_2\} \setminus \{x_2\} \\
&= \{x_1\}
\end{aligned}$$

\Rightarrow open formule.

b)

$$\begin{aligned}
&VV(\forall x_1 \forall x_3 (A_1^1(x_3) \rightarrow A_1^1(x_1))) \\
&= VV(\forall x_3 (A_1^1(x_3) \rightarrow A_1^1(x_1))) \setminus \{x_1\} \\
&= VV((A_1^1(x_3) \rightarrow A_1^1(x_1))) \setminus \{x_1, x_3\} \\
&= (VV(x_3) \cup VV(x_1)) \setminus \{x_1, x_3\} \\
&= \{x_1, x_3\} \setminus \{x_1, x_3\} \\
&= \{\}
\end{aligned}$$

\Rightarrow gesloten formule.

b)

$$\begin{aligned}
& VV(\forall x_2 A_1^1(f_1^1(x_2)) \rightarrow \forall x_3 A_1^3(x_1, x_2, x_3)) \\
&= VV(\forall x_2 A_1^1(f_1^1(x_2))) \cup VV(\forall x_3 A_1^3(x_1, x_2, x_3)) \\
&= (VV(A_1^1(f_1^1(x_2))) \setminus \{x_2\}) \cup (VV(A_1^3(x_1, x_2, x_3)) \setminus \{x_3\}) \\
&= (VV(f_1^1(x_2)) \setminus \{x_2\}) \cup ((VV(x_1) \cup VV(x_2) \cup VV(x_3)) \setminus \{x_3\}) \\
&= (VV(x_2) \setminus \{x_2\}) \cup (\{x_1, x_2, x_3\} \setminus \{x_3\}) \\
&= (\{x_2\} \setminus \{x_2\}) \cup (\{x_1, x_2\}) \\
&= \{\} \cup \{x_1, x_2\} \\
&= \{x_1, x_2\}
\end{aligned}$$

\Rightarrow open formule

d)

$$\begin{aligned}
& VV(\forall x_2 A_1^3(x_1, f_1^1(x_1), x_2) \rightarrow \forall x_3 A_1^1(f_1^2(x_1, x_3))) \\
&= VV(\forall x_2 A_1^3(x_1, f_1^1(x_1), x_2)) \cup VV(\forall x_3 A_1^1(f_1^2(x_1, x_3))) \\
&= (VV(A_1^3(x_1, f_1^1(x_1), x_2)) \setminus \{x_2\}) \cup (VV(A_1^1(f_1^2(x_1, x_3))) \setminus \{x_3\}) \\
&= ((VV(x_1) \cup VV(f_1^1(x_1)) \cup VV(x_2)) \setminus \{x_2\}) \cup (VV(f_1^2(x_1, x_3)) \setminus \{x_3\}) \\
&= ((\{x_1\} \cup VV(x_1) \cup \{x_2\}) \setminus \{x_2\}) \cup ((VV(x_1) \cup VV(x_3)) \setminus \{x_3\}) \\
&= ((\{x_1\} \cup \{x_1\} \cup \{x_2\}) \setminus \{x_2\}) \cup ((\{x_1\} \cup \{x_3\}) \setminus \{x_3\}) \\
&= \{x_1\} \cup \{x_1\} \\
&= \{x_1\}
\end{aligned}$$

\Rightarrow open formule