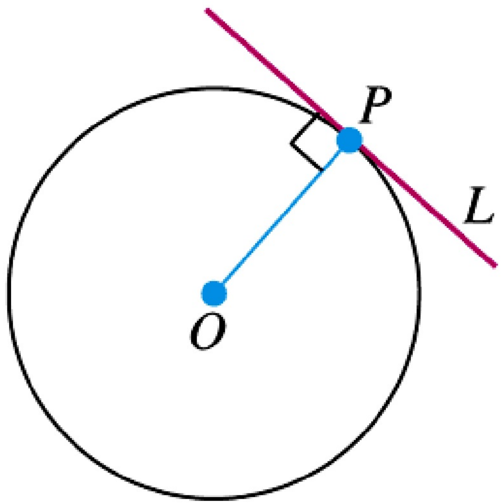
2.7

Raaklijnen
en afgeleiden

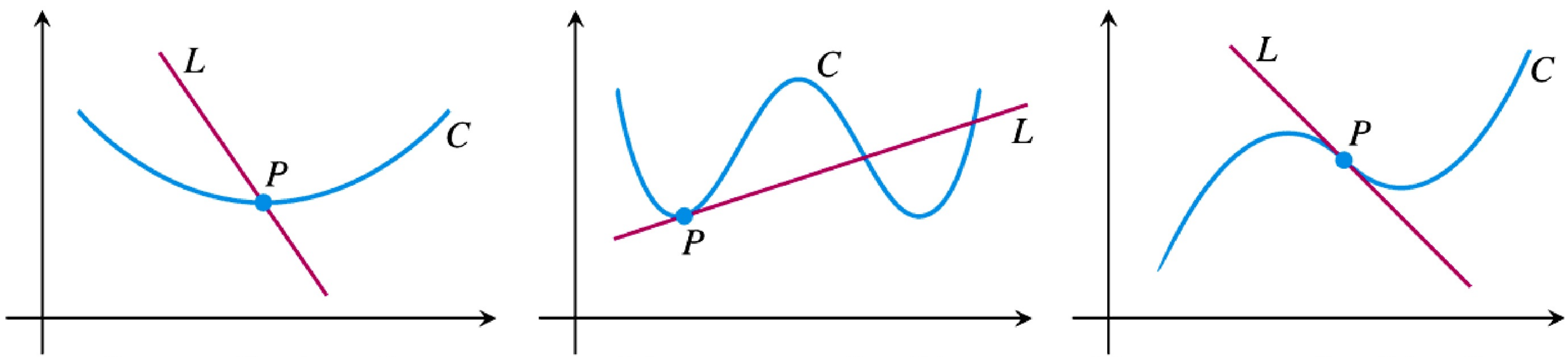
Raaklijn L in een punt P aan een grafiek



??? Hoe definiëren we de raaklijn ????

1. L gaat door P en staat loodrecht op de straal
2. L snijdt de grafiek enkel in het punt P
3. L gaat door P en ligt langs 1 kant van de grafiek

NEEN!!!



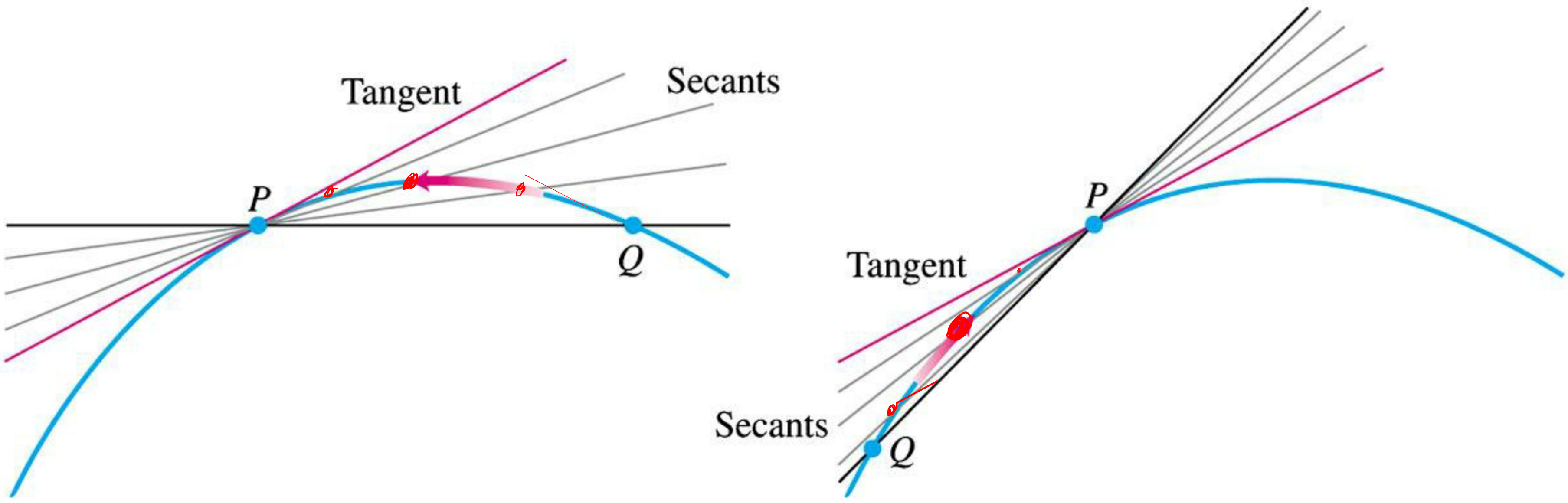
L meets *C* only at *P* but is not tangent to *C*.

L is tangent to *C* at *P* but meets *C* at several points.

L is tangent to *C* at *P* but lies on two sides of *C*, crossing *C* at *P*.

FIGURE 2.64 Exploding myths about tangent lines.

De definitie van een raaklijn aan een grafiek



De raaklijn aan een grafiek in een punt P is de rechte door P, waarvan de rico de limiet is van de rico's van de koordes PQ als Q het punt P nadert

Zoek de rico en de vergelijking van de raaklijn aan de parabool $y=x^2$ in het punt P(2,4)

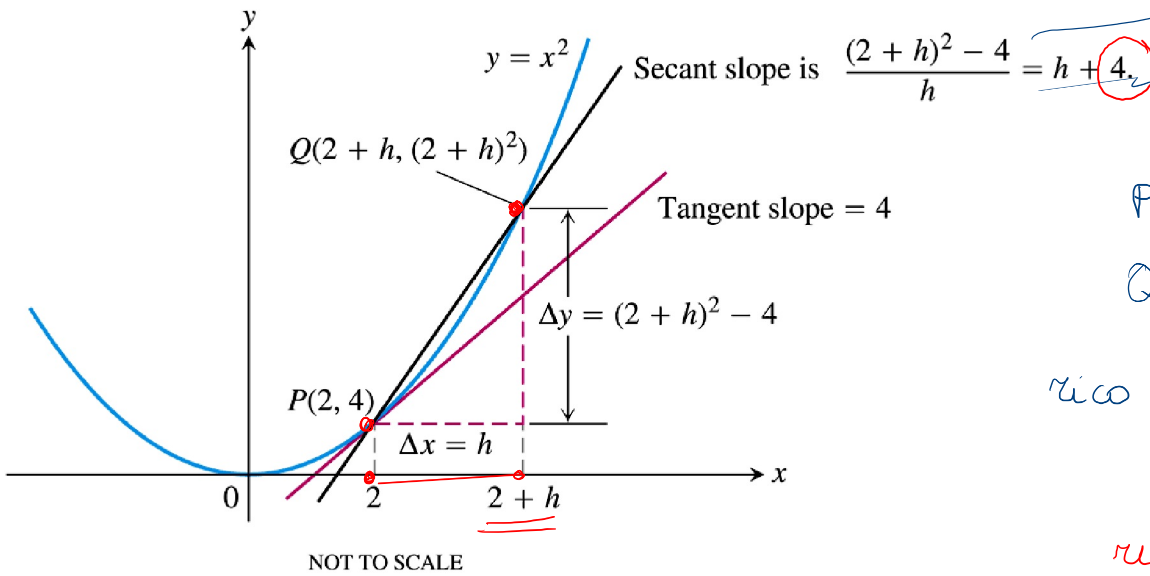


FIGURE 2.66 Finding the slope of the parabola $y = x^2$ at the point $P(2, 4)$ (Example 1).

$$\frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = h + 4$$

$P(x_1, y_1)$

$Q(x_2, y_2)$

rico PQ $\rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

rico raaklyn = 4

$y = 4x + b$

$4 = 8 + b \rightarrow b = -4$

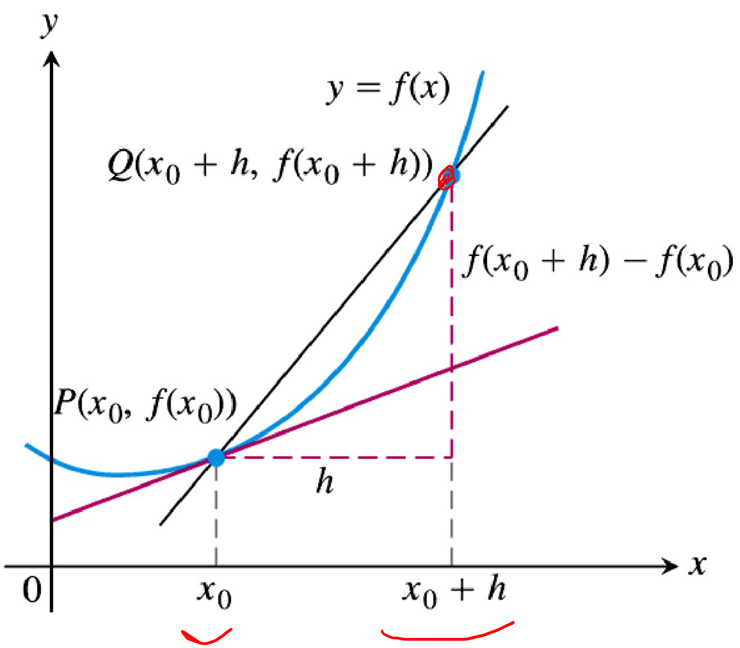
Raaklijn: y = 4x - 4

De helling van de grafiek y=f(x) in het punt P(x_o,f(x_o)) is het getal m met

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \qquad \text{(indien deze limiet bestaat)}$$

De raaklijn aan de grafiek in het punt P is de rechte door P met m als rico:

y-f(x_o) = m(x-x_o)



rico koorde $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

" raaklyn $\lim_{h\to 0}$

Vb: raaklijn aan
f(x)=mx+b in x_o

Bereken de helling van onderstaande grafiek in x=a.

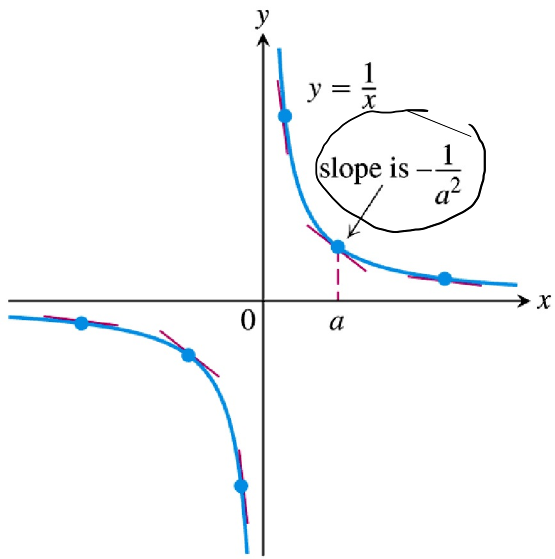


FIGURE 2.69 The tangent slopes, steep near the origin, become more gradual as the point of tangency moves away.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{a - (a+h)}{(a+h)\,a}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{h}^{\,1}}{(a+h)\,a\,\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(a+h)\,a} = -\frac{1}{a^2}$$

Samenvattend

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

= de helling van de grafiek y = f(x) in het punt $P(x_o, f(x_o))$

= rico van de raaklijn aan y=f(x) in het punt $P(x_o, f(x_o))$

= (limiet van ~~het~~ differentiequotient)

= Onmiddellijke snelheid van verandering van y met x in x_o

= afgeleide van f in x_0 = $f'(x_o)$

3.1

De afgeleide functie

Definitie van de afgeleide functie

De **afgeleide f'(x)** naar x van een functie f(x) **in het punt x is** gedefinieerd als:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

als deze limiet bestaat.

Indien deze limiet bestaat voor x dan zeggen dat f differentieerbaar is in x of f heeft een afgeleide in x.

Notatie: $f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$

$f'(a)$

Notatie voor de afgeleide in x=a: $f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d}{dx} f(x)\right|_{x=a}$

- domein van f' deel van domein van f; indien gelijk ➔ f is differentieerbaar

- f differentieerbaar op een open interval als f' bestaat voor elk punt van dit interval

NB: differentieerbaar en afleidbaar zijn synoniemen

$]a, b[$

f is afleidbaar op een gesloten interval, indien f afleidbaar is op het open interval en de linker- en rechterlimiet respectievelijk in het rechter- en linkereindpunt betaan. We noemen deze limieten de linker- en rechterafgeleide

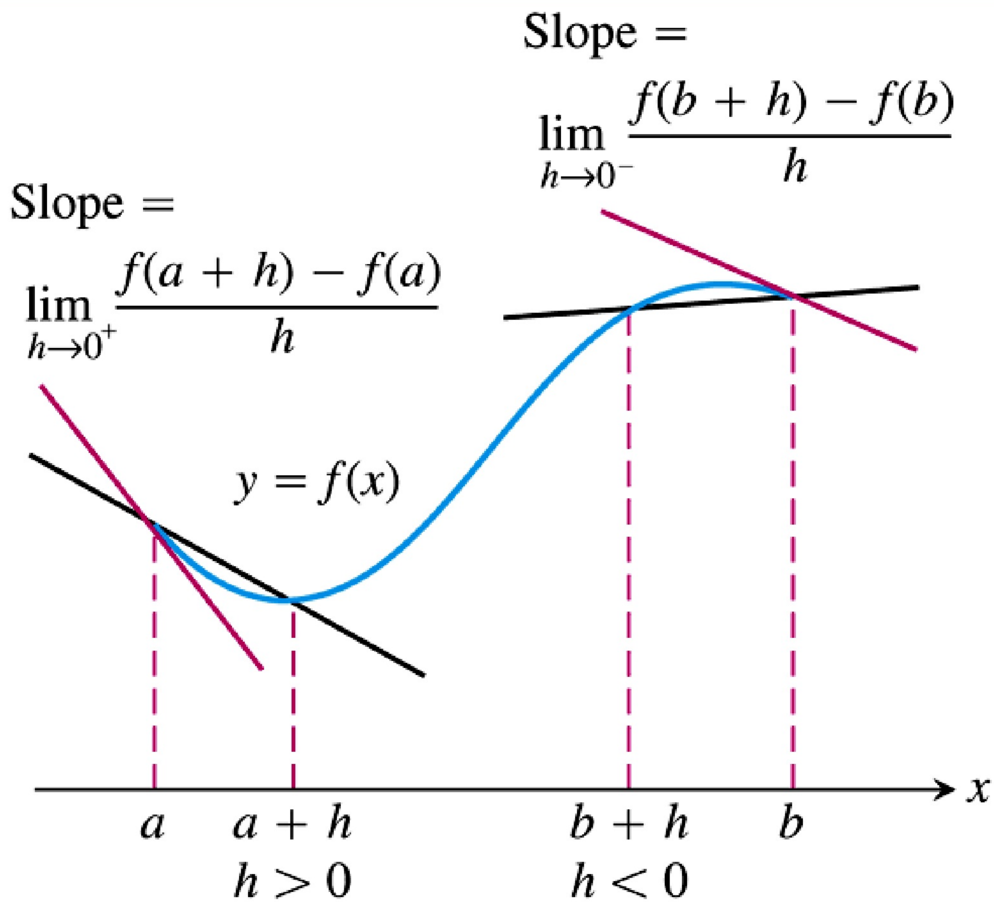
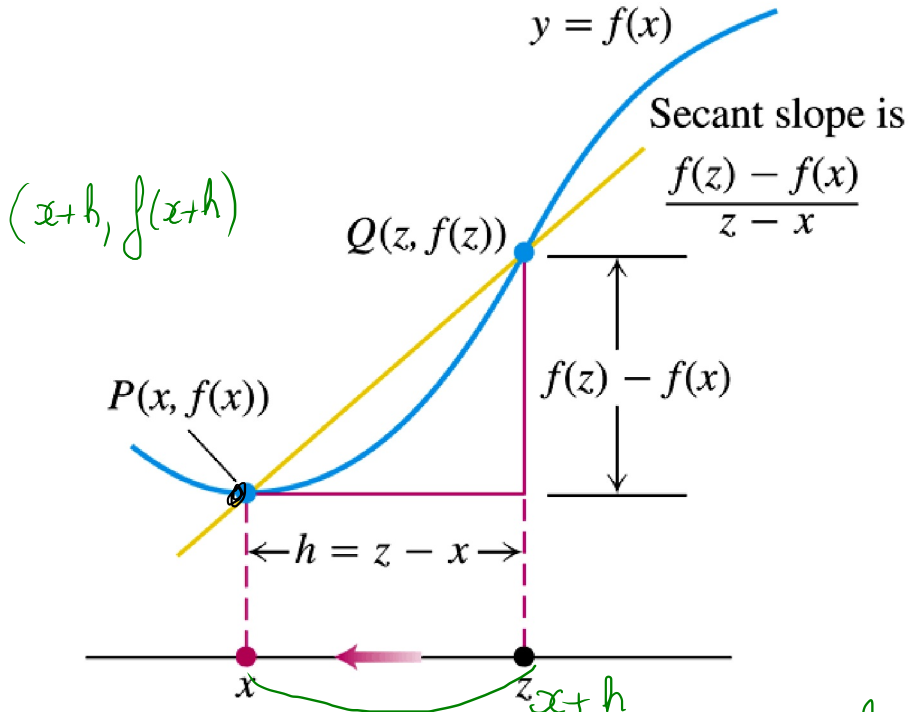


FIGURE 3.5 Derivatives at endpoints are one-sided limits.

[a, b]

Een alternatieve formule voor de afgeleide

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$



$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

Derivative of f at x is

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

Vbn: Bereken de afgeleide en raaklijn van de wortel in 4

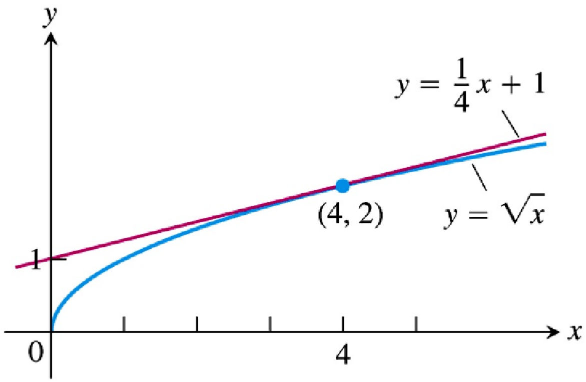


FIGURE 3.2 The curve $y = \sqrt{x}$ and its tangent at (4, 2). The tangent's slope is found by evaluating the derivative at $x = 4$ (Example 2).

$$\lim_{z \to 4} \frac{f(z) - f(4)}{z - 4}$$

$$= \lim_{z \to 4} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{4}}{z - 4}$$

$$= \lim_{z \to 4} \frac{\cancel{\sqrt{z} - \sqrt{4}}}{\cancel{(\sqrt{z} - \sqrt{4})}(\sqrt{z} + \sqrt{4})}$$

12 $$= \lim_{z \to 4} \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$m = \frac{1}{4} \rightarrow \text{raaklyn } (y - 2) = \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

De rechterafgeleide bestaat niet in 0.

Vertikale raaklijn in de oorsprong

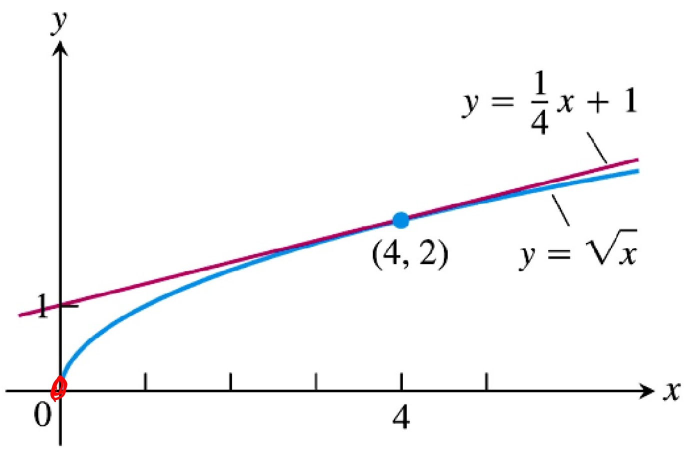


FIGURE 3.2 The curve $y = \sqrt{x}$ and its tangent at (4, 2). The tangent's slope is found by evaluating the derivative at $x = 4$ (Example 2).

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \underline{\underline{\infty}}$$

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

$x > 0 \Rightarrow |x| = x$

$y = mx + b$

$f'(x) = m$

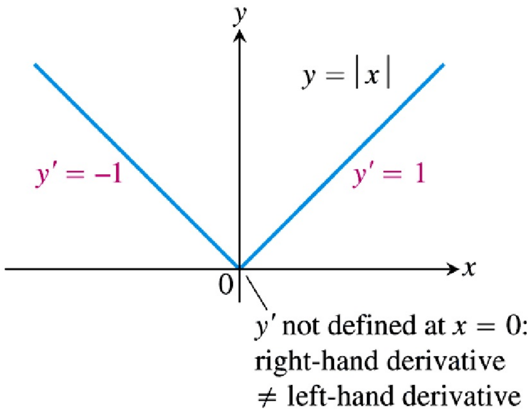
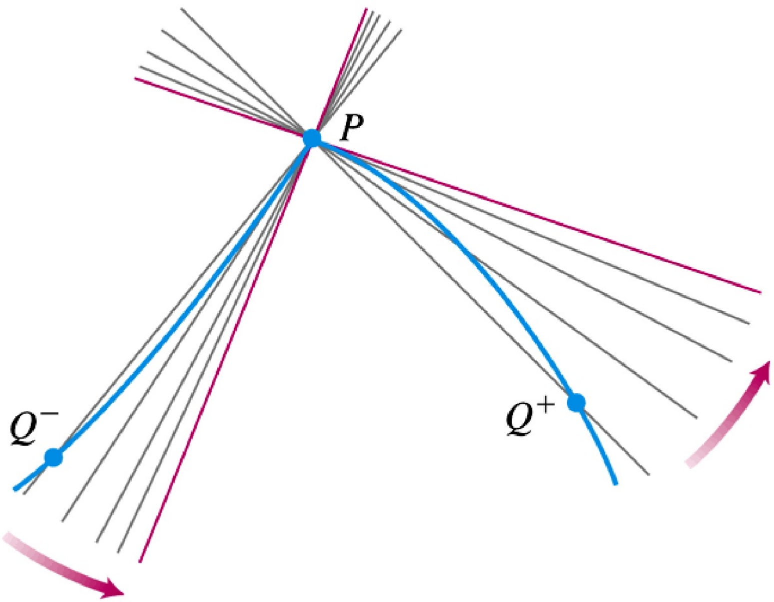


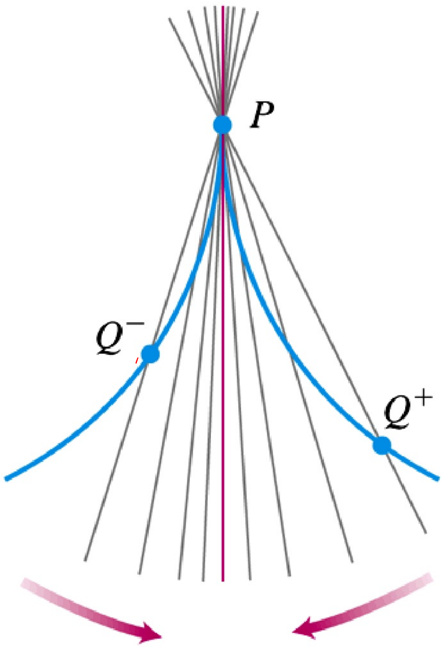
FIGURE 3.6 The function $y = |x|$ is not differentiable at the origin where the graph has a "corner."

Continue functies die geen afgeleiden hebben in P

1. a *corner*, where the one-sided derivatives differ.

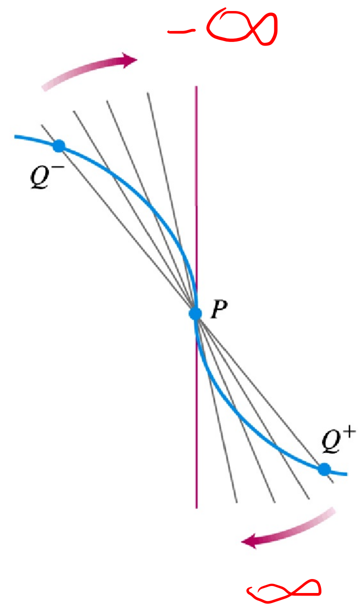


2. a *cusp*, where the slope of PQ approaches ∞ from one side and $-\infty$ from the other.

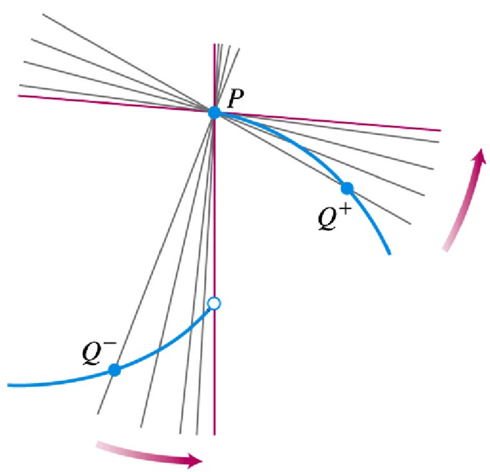


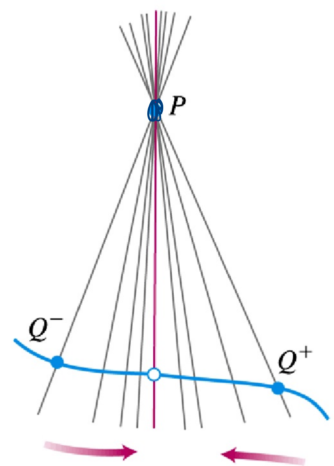
$+\infty$ $-\infty$

3. a *vertical tangent*, where the slope of PQ approaches ∞ from both sides or approaches $-\infty$ from both sides (here, $-\infty$).



Discontinue functies





Stelling

Indien f differentieerbaar is in c dan is f continu in c

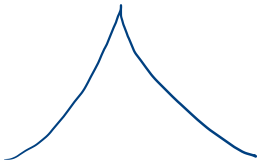
Bewijs **NIET**

$\longrightarrow$ **Continuïteit betekent geen afleidbaarheid !!!**

continu $\Longleftrightarrow$ afleidb

$\Longleftarrow$

$\not\Longrightarrow$

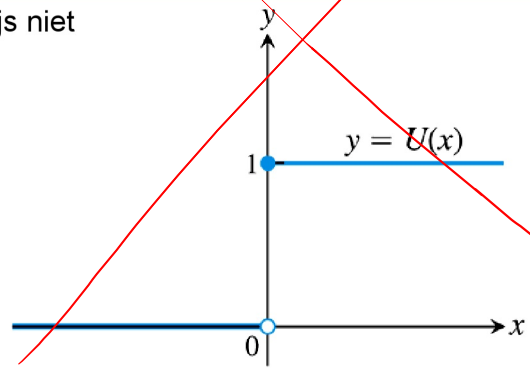


Middelwaardestelling voor afgeleide functies: NIET

THEOREM 2 Darboux's Theorem

Indien a en b 2 punten zijn van een interval waarop f differentieerbaar is, dan neemt de afgeleide functie f' alle waarden tussen f'(a) en f'(b) aan.

Bewijs niet



Een functie U die een sprong maakt kan geen afgeleide van een functie f zijn

Hogere orde afgeleiden

Tot nu toe: y' = dy/dx is de **eerste orde** afgeleide

Afgeleide van afgeleide = **tweede orde** afgeleide:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2 y}{d\,x^2}$$

= snelheid van de verandering van de rico van de raaklijn.

Analoog: **n-de orde** afgeleide = n keer afleiden:

$$y^{(n)} = \frac{d\,y^{(n-1)}}{dx} = \frac{d^n y}{d\,x^n}$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$(y')' = y''$$

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$y'''' = y^{(4)}$$

3.2

Regels voor het afleiden

RULE 1 Derivative of a Constant Function

If f has the constant value $f(x) = c$, then

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0.$$

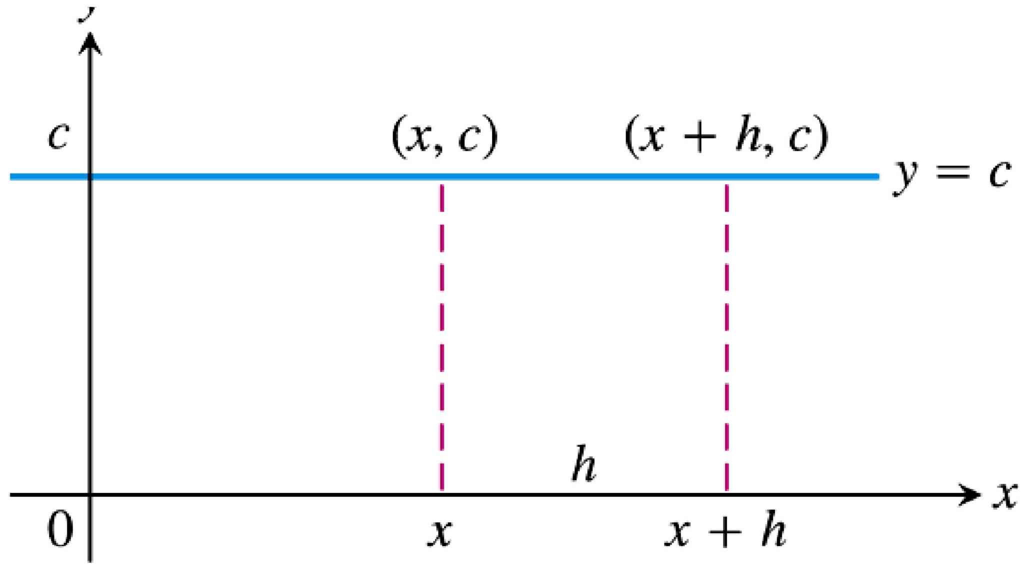


FIGURE 3.8 The rule $(d/dx)(c) = 0$ is another way to say that the values of constant functions never change and that the slope of a horizontal line is zero at every point.

RULE 2 Power Rule for Positive Integers

If n is a positive integer, then

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}.$$

Bewijs niet

$$\frac{d\, x^{3/2}}{dx} = \frac{3}{2} x^{1/2}$$

RULE 3 Constant Multiple Rule

If u is a differentiable function of x, and c is a constant, then

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}.$$

Bewijs **NIET**

Illustratie van voorgaande regel

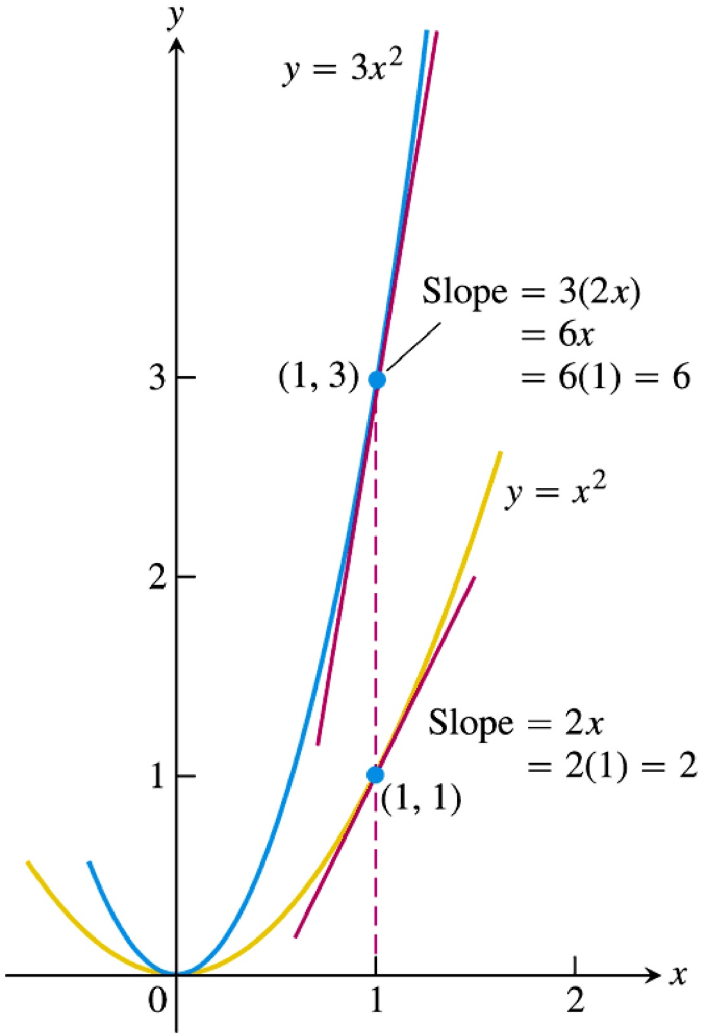


FIGURE 3.9 The graphs of $y = x^2$ and $y = 3x^2$. Tripling the y-coordinates triples the slope (Example 3).

RULE 4 Derivative Sum Rule

If u and v are differentiable functions of x, then their sum $u + v$ is differentiable at every point where u and v are both differentiable. At such points,

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

$(f+g)'$

$f' + g'$

Bewijs **NIET**

Je kunt deze regel uitbreiden naar de optelling van meerdere functies.

RULE 5 Derivative Product Rule

If u and v are differentiable at x, then so is their product uv, and

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Bewijs niet

$$(fg)' = f'g + fg'$$

RULE 6 Derivative Quotient Rule

If u and v are differentiable at x and if $v(x) \neq 0$, then the quotient u/v is differentiable at x, and

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Bewijs niet

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

RULE 7 Power Rule for Negative Integers

If n is a negative integer and $x \neq 0$, then

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Bewijs niet

Heeft de onderstaande functie horizontale raaklijnen ? Zo ja, waar ?

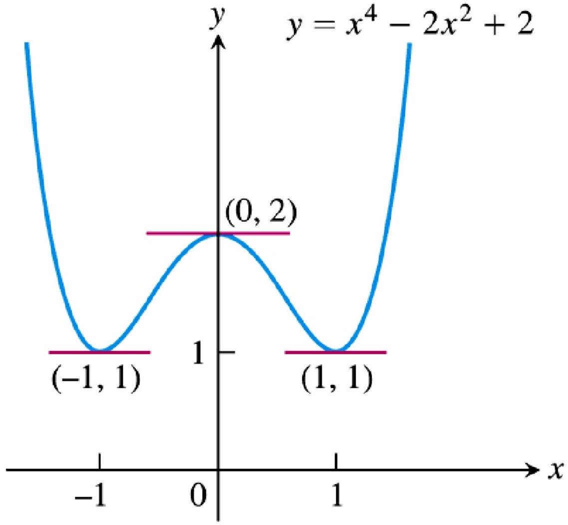


FIGURE 3.10 The curve $y = x^4 - 2x^2 + 2$ and its horizontal tangents (Example 6).

$$y' = 4x^3 - 4x$$
$$= 4x(x^2 - 1)$$
$$= 4x(x-1)(x+1) = 0$$

$x = 0$ of $x = 1$ of $x = -1$

3.3

Afgeleiden als snelheid van verandering

Fysische betekenis: Snelheid en versnelling

Positie van deeltje gegeven door s = f(t)

De ogenblikkelijke snelheid: afgeleide van positie naar de tijd =

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t)$$

Versnelling: afgeleide van de snelheid naar de tijd = v'(t) = s''(t)

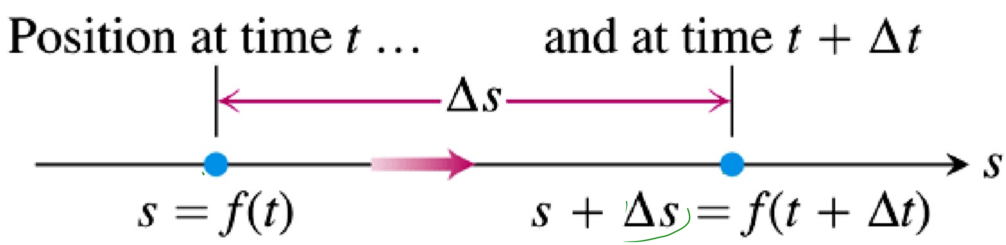


FIGURE 3.12 The positions of a body moving along a coordinate line at time t and shortly later at time $t + \Delta t$.

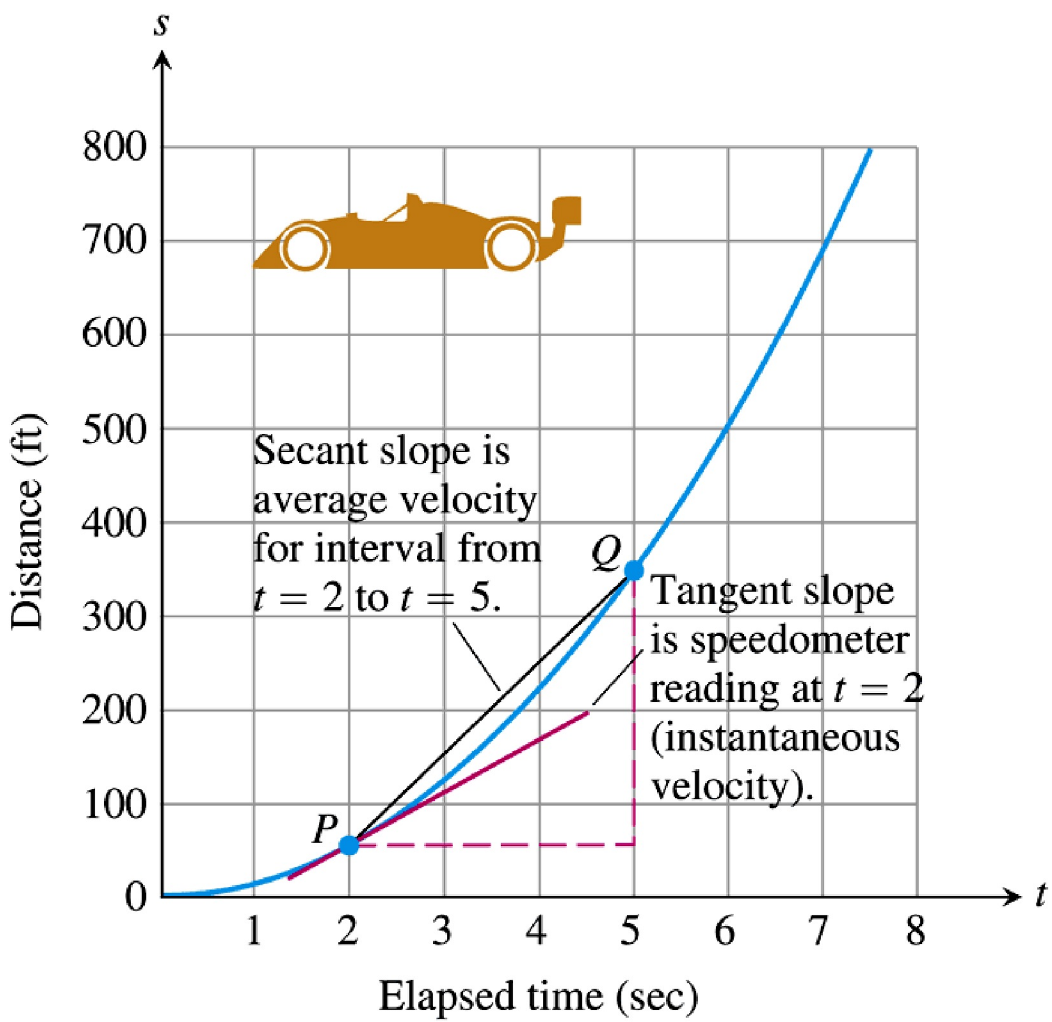


FIGURE 3.13 The time-to-distance graph for Example 2. The slope of the tangent line at P is the instantaneous velocity at $t = 2$ sec.

Indien de snelheid positief is beweegt men in de positieve s-richting (voorwaarts).
Indien de snelheid negatief is beweegt men in de negatieve s-richting (achterwaarts).

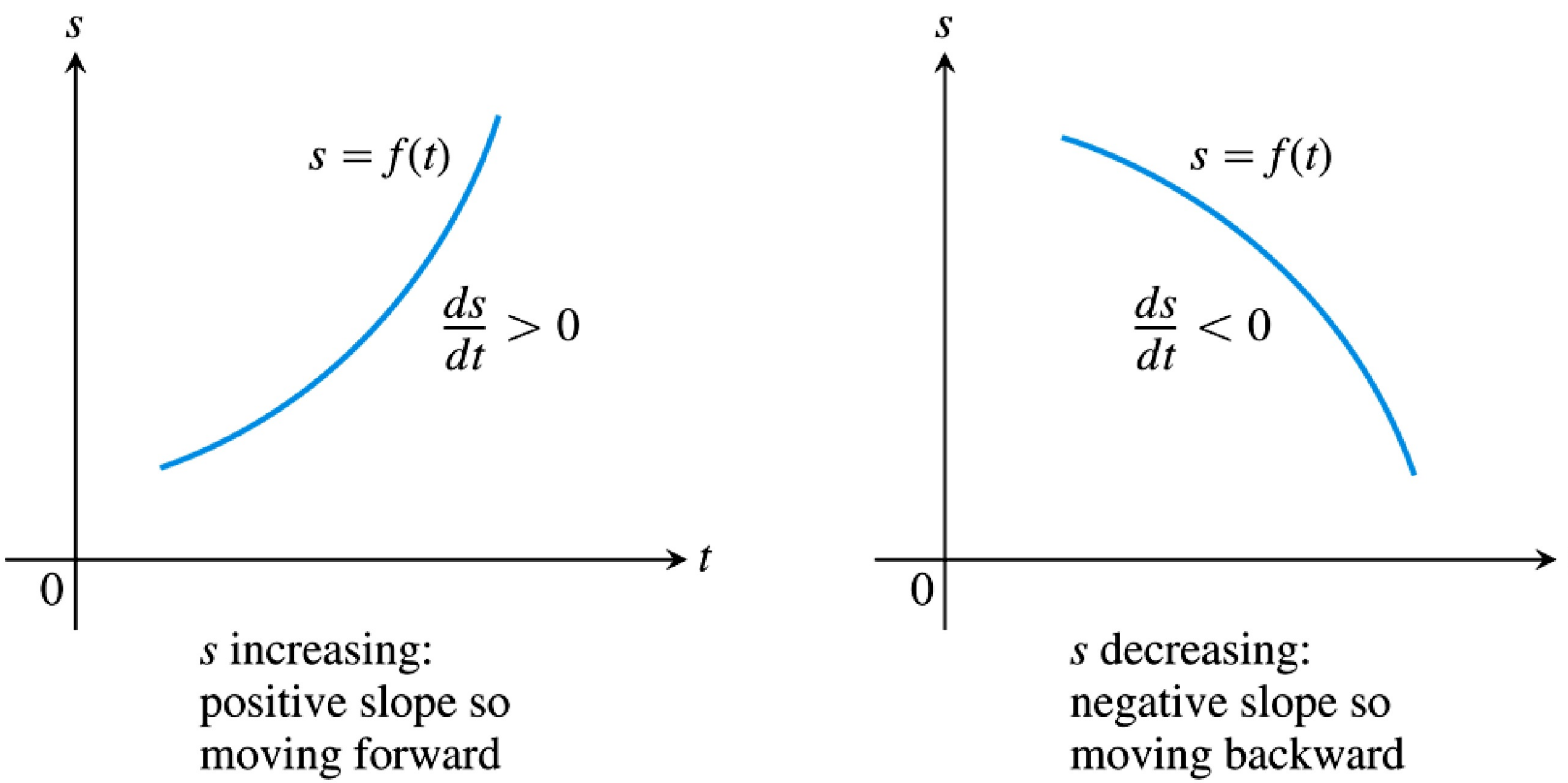
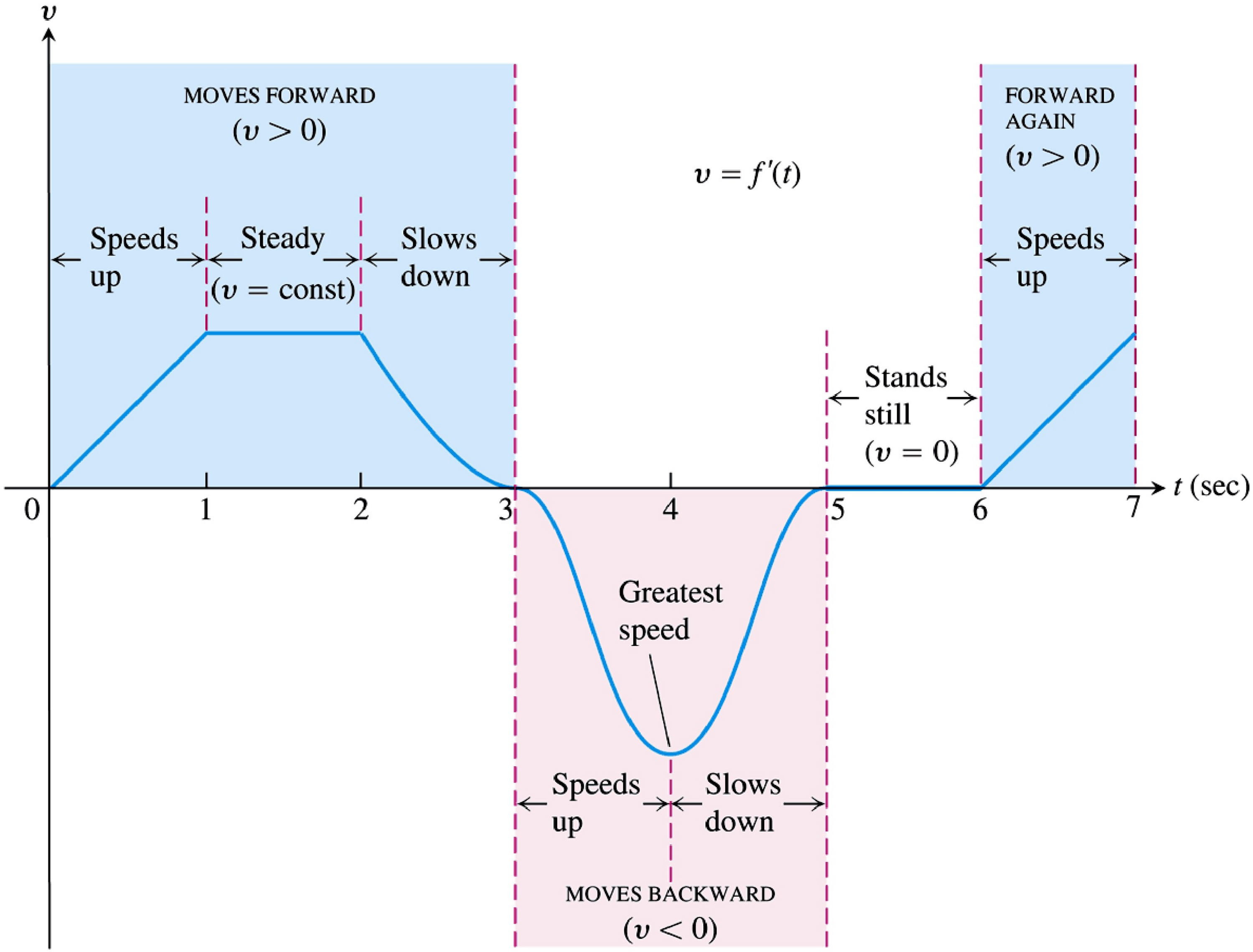


FIGURE 3.14 For motion $s = f(t)$ along a straight line, $v = ds/dt$ is positive when s increases and negative when s decreases.



De versnelling a is de afgeleide van de snelheid naar de tijd: $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

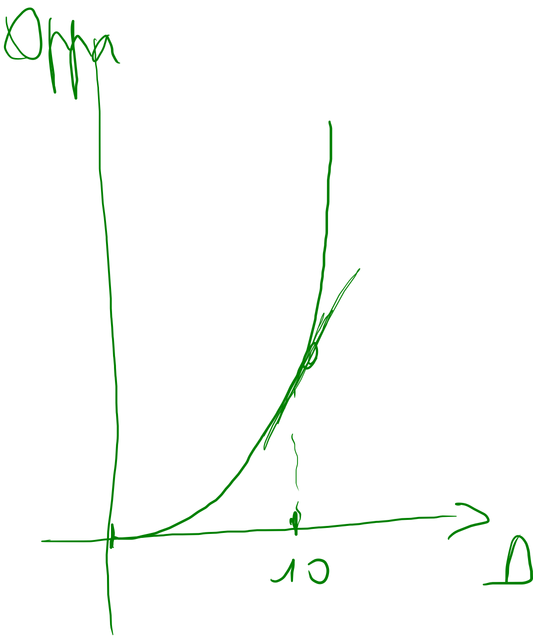
Analoog

De ogenblikkelijke snelheid van verandering van f met x:

De ogenblikkelijke snelheid van verandering van f met x in x_o wordt gegeven door de afgeleide van f naar x

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = f'(x_o)$$

Vb: Hoe snel verandert de oppervlakte van een cirkel met de lengte van de diameter D als de D=10m ?



$$Opp = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}D^2$$

$$Opp(D)$$

$$Opp'(D) = \frac{\pi}{4}2D = \frac{\pi D}{2}$$

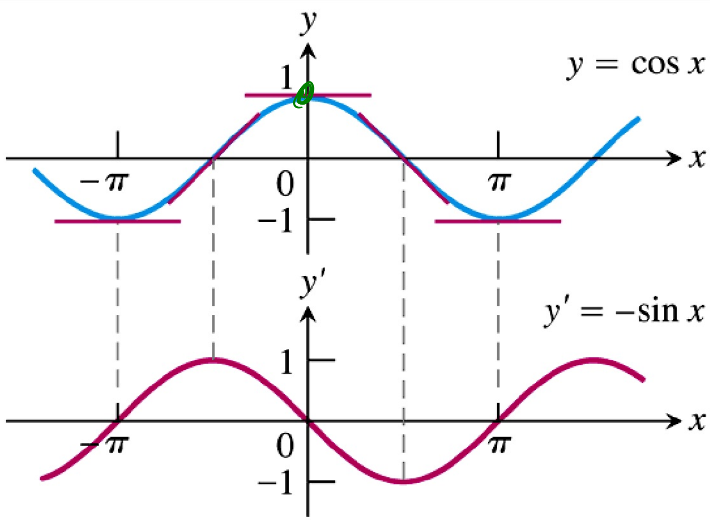
$$Opp'(10m) = \frac{\pi}{2}10m = 5\pi\, m = 5\pi\frac{m^2}{m}$$

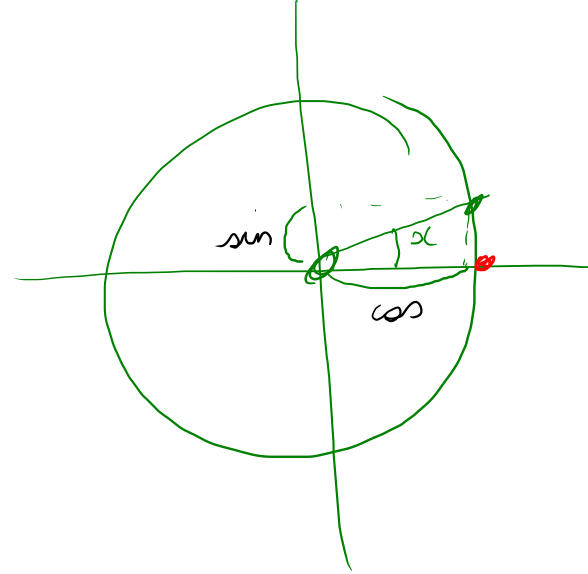
3.4

Afgeleiden van Trigonometrische Functies

The derivative of the sine function is the cosine function:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$$

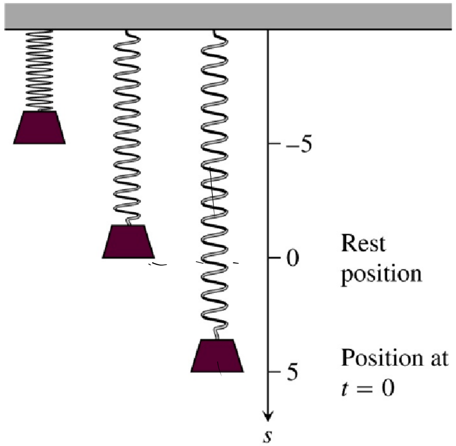




The derivative of the cosine function is the negative of the sine function:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

Een trillende massa aan een veer. Bereken snelheid en versnelling !



$$s(t) = 5\cos(t)$$

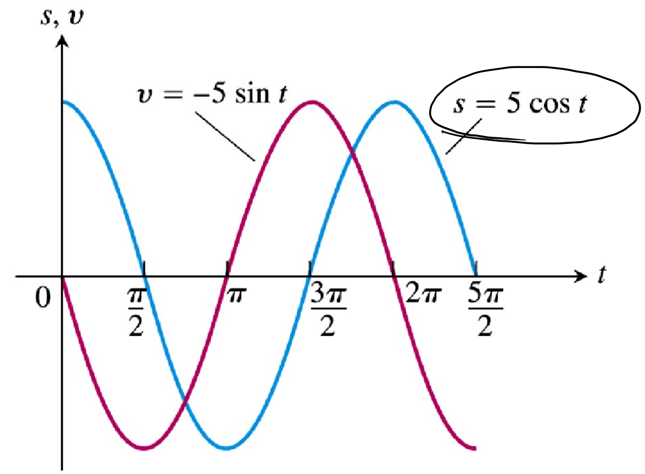


FIGURE 3.24 A body hanging from a vertical spring and then displaced oscillates above and below its rest position. Its motion is described by trigonometric functions (Example 3).

Te kennen afgeleiden

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\sin x$	$\cos x$
x	1	$\cos x$	$-\sin x$
x^a	$a.x^{a-1}$	$\tan x$	$\sec^2 x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cot x$	$-\csc^2 x$
e^x	e^x	$\mathrm{Bgsin}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x.\ln a$	$\mathrm{Bgcos}\, x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathrm{Bgtan}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x.\ln a}$	$\mathrm{Bgcot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$