

PREDIKAATLOGICA: SEMANTIEK



VRIJE
UNIVERSITEIT
BRUSSEL

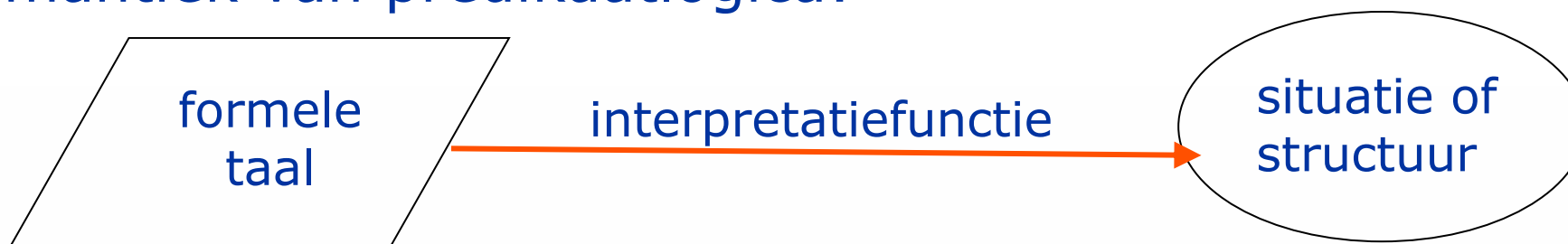
SEMANTIEK

► Inhoud:

- Principe
- Situatie of structuur
- Interpretatiefunctie
- Model
- Bedeling
- Waardering
- Model van een formule
- Gelijkheid tussen termen, universeel geldig, logisch equivalent
- Geldig gevolg
- Theorie en Modelverzameling

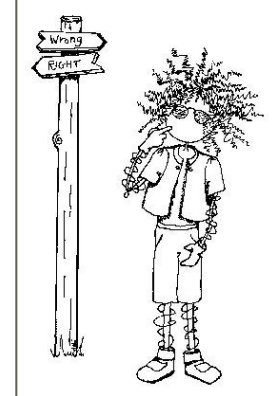
SEMANTIEK - PRINCIPE

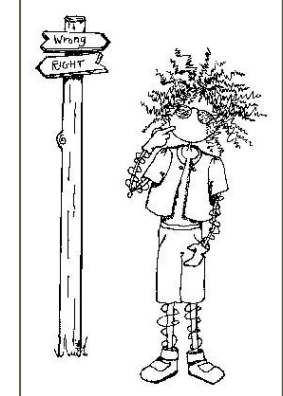
- Drie aspecten zijn belangrijk bij de bestudering van de semantiek van predikaatlogica:



De interpretatiefunctie geeft betekenis aan de bouwstenen van de taal (predikaatletters, functieletters, constanten, variabelen).

Bv. $\forall x P(x, a)$ \longrightarrow Alle mensen jonger dan 25



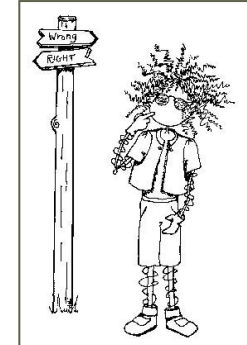


Alle 3 de aspecten zijn essentieel

► vergelijking met natuurlijke taal

- Stel tekst gekend en woordenboek (interpretatiefunctie), maar niet de situatie
 - We kunnen niet weten of wat gezegd wordt waar is
- Stel tekst gekend en de situatie, maar geen woordenboek (interpretatiefunctie)
 - We kunnen niet weten of wat gezegd wordt waar is
- Stel een woordenboek (de interpretatiefunctie) en de situatie, maar niet de tekst
 - We weten niet wat er gezegd werd.

SEMANTIEK: STRUCTUUR



Structuur is te vergelijken met een stukje werkelijkheid

Een **structuur** bestaat uit een **domein** waarop **relaties** en **operaties of functies** gedefinieerd zijn.

► *Voorbeeld:*

domein: de natuurlijke getallen \mathbb{N}

relaties: $<$, $=$

operaties: $+$, $*$

Informeel:

- Relaties tussen de objecten in het domein corresponderen met beweringen (vb. $5 < 10$)
- Operaties op objecten leveren andere objecten op vb. $8 + 2$ is 10)

SEMANTIEK: STRUCTUUR - DEFINITIE



Definitie

Een **structuur** D is een drietal $\langle D, R, O \rangle$ bestaande uit een **niet-lege** verzameling D (het domein), een verzameling R van relaties **op** D en een verzameling O van operaties **op** D .

INTERMEZZO: SPECIALE STRUCTUREN

Speciale structuren:

Relationele structuur: enkel relaties, geen operaties

vb.: lineaire ordeningen, bomen, grafen, ...

Voorbeeld:

$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ met de relatie R 'kleiner dan'

$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$

Operationele structuur: domein met enkel operaties

vb. uit de wiskunde :

groepen : $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, ringen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

SEMANTIEK: INTERPRETATIEFUNCTIE



- Om een formule te kunnen interpreteren is er een interpretatie van variabelen, constanten, predikaatletters en functieletters nodig

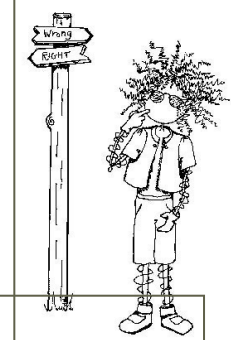
Definitie

Laat $\mathbf{D} = \langle D, \mathbf{R}, \mathbf{O} \rangle$ een structuur zijn.

Een **interpretatiefunctie** I kent aan

- ▶ elke individuele constante c uit de predikaat logische taal een welbepaald object uit D toe via een nul-plaatsige operatie, $I(c) \in \mathbf{O}$
- ▶ elke predikaatletter P een relatie uit \mathbf{R} van dezelfde plaatsigheid toe, $I(P) \in \mathbf{R}$
- ▶ elke functieletter f een operatie uit \mathbf{O} van dezelfde plaatsigheid toe, $I(f) \in \mathbf{O}$

SEMANTIEK: MODEL



Definitie

Een paar (\mathbf{D}, I) met \mathbf{D} een structuur en I een interpretatiefunctie heet een **model**

Een (on)eindig model is een model met een (on)eindig domein.

► Voorbeeld:

$$\mathbf{D} = \langle \mathbb{N}, \{\geq\}, \{0\} \rangle$$

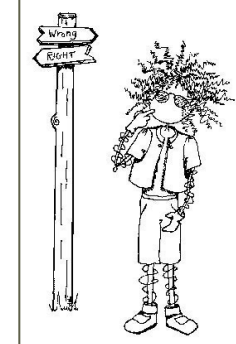
$$I(R) = \geq$$

$$I(c_1) = 0$$

$$I(\forall x R(x, c_1)) = \forall x (x \geq 0)$$

Dus in dit model is de zin $\forall x R(x, c_1)$ waar

SEMANTIEK: BEDELING



Definitie

Een **bedeling** b is een functie die aan **elke variabele** x een object uit het domein toekent, dus $b(x) \in D$.

- Voorbeeld: Model $M = (\langle D, \mathbf{R}, \mathbf{O} \rangle, I)$ met
 $D = \mathbf{N}$, $\mathbf{R} = \{<\}$, $\mathbf{O} = \{0, +, \cdot\}$
 I : $I(P) = <$, $I(f) = +$, $I(g) = \cdot$, $I(a) = 0$
 b : $b(x_i) = i$ ($i = 1, 2, 3, \dots$)

$$Px_1x_2 \wedge Pf(a, x_9)g(x_5, x_9) \xrightarrow{b, I} 1 < 2 \text{ en } 9 < 45$$

Opm: bedeling is gedefinieerd voor alle variabelen, niet enkel voor vrije variabelen !

NOTATIE - AFSPRAKEN



Notatie:

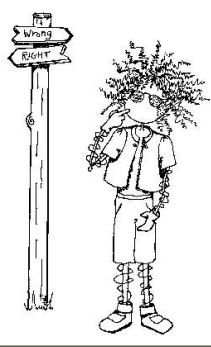
$\langle \mathbf{N}, \{<,=\}, \{0,1,+, \cdot\} \rangle$ ook als $\langle \mathbf{N}, <,=, 0,1,+, \cdot \rangle$ wanneer duidelijk is wat de relaties zijn en wat de operaties zijn.

Zo ook: P i.p.v. $I(P)$ en f i.p.v. $I(f)$

$b[x \mapsto d]$ is de bedeling b waarbij d aan de variabele x wordt toebedeeld.

► Vben: $b: b(x_i) = i \ (i = 1,2,3,\dots)$
 $b[x_1 \mapsto 10](x_1) = 10$
 $b[x_1 \mapsto 10](x_2) = 2$

WAARDERING VAN TERMEN



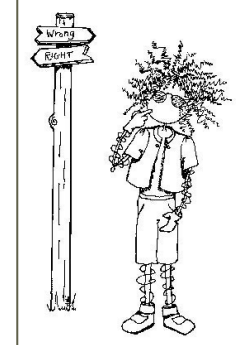
Definitie

Laat $M = (\mathbf{D}, I)$ een model zijn en b een bedeling.

Dan is de **semantische waardering** $V_{M,b}$ **van termen** als volgt gedefinieerd:

- ▶ $V_{M,b}(x) = b(x)$ voor variabelen x
- ▶ $V_{M,b}(a) = I(a)$ voor constanten a
- ▶ $V_{M,b}(f(t_1, \dots, t_k)) = I(f)(V_{M,b}(t_1), \dots, V_{M,b}(t_k))$

WAARDERING VAN TERMEN



Voorbeeld

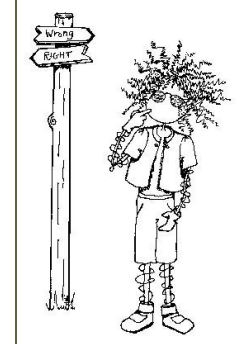
Laat M een model zijn met $\mathbf{D} = \langle \mathbf{N}, 0, + \rangle$ en $I(f) = '+'$, $I(a) = 0$

b een bedeling waarbij $b(x) = 1$

Dan geldt:

$$\begin{aligned} V_{M,b}(f(a,x)) &= I(f)(V_{M,b}(a), V_{M,b}(x)) \\ &= I(f)(I(a), b(x)) \\ &= +(0,1) = 1 \end{aligned}$$

WAARDERING VAN FORMULES



Net als in propositielogica is de interpretatie (semantiek) van een formule een waarheidswaarde: waar (1) of onwaar(0)

Definitie

Laat $M = (D, I)$ een model zijn en b een bedeling.

De **waarheidswaarden van formules** zijn als volgt gedefinieerd:

- ▶ $V_{M,b}(P(t_1, \dots, t_m)) = 1$ desda $I(P)(V_{M,b}(t_1), \dots, V_{M,b}(t_m))$ geldt
- ▶ $V_{M,b}(\neg \varphi) = 1$ desda $V_{M,b}(\varphi) = 0$
idem als in propositielogica voor $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ en $\varphi \leftrightarrow \psi$.
- ▶ $V_{M,b}(\exists x \varphi) = 1$ desda er is een $d \in D$ zodat $V_{M,b[x \mapsto d]}(\varphi) = 1$
- ▶ $V_{M,b}(\forall x \varphi) = 1$ desda voor alle $d \in D$ geldt $V_{M,b[x \mapsto d]}(\varphi) = 1$

INTUITIEF

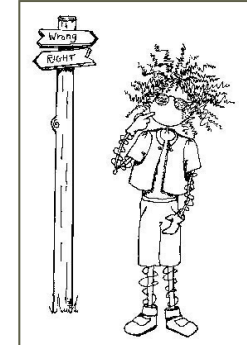
Een **atomaire formule** is waar in een structuur, als het feit dat wordt uitgedrukt inderdaad **waar is in de structuur**

- ▶ Voorbeeld: $I(P) = '<'$, $b(x)=2$ en $b(y)=7$ dan is Pxy waar in $\langle N, < \rangle$ nl, $2 < 7$ geldt in N

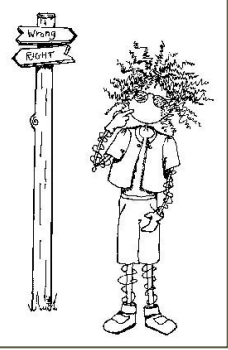
Eén formule φ kan **in verschillende structuren heel verschillende beweringen** uitdrukken.

Bij gegeven φ en één structuur D kunnen verschillende interpretatiefuncties aan φ een andere waarheidswaarde geven

- ▶ Voorbeeld: $\forall x \forall y (f(x,y) = f(y,x))$ is waar op Q en N zowel met $I(f) = '+'$ als met $I(f) = \cdot$ maar onwaar met $I(f) = -$



MODEL VAN EEN FORMULE



Notatie

- ▶ $V_{M,b}(\varphi) = 1$ φ is waar in M onder b
- ▶ $V(\varphi)$ ipv $V_{M,b}(\varphi)$ als geen verwarring mogelijk
- ▶ $V_{M,b}(\varphi) = 1$ $M, b \models \varphi$ of $M \models \varphi[b]$
- ▶ $V_{M,b}(\varphi) = 0$ $M, b \not\models \varphi$ of $M \not\models \varphi[b]$

Definitie

Een paar $M=(\mathbf{D}, I)$ met structuur \mathbf{D} en interpretatiefunctie I heet **een model van een formule φ als voor iedere bedeling b geldt:**

$$V_{M,b}(\varphi) = 1$$

SEMANTIEK - VOORBEELD

Voorbeeld

M model met $\mathbf{D} = \langle Q, < \rangle$ en $I(R) = '<'$.

b een bedeling waarbij $b(x_1) = 4$

Dan $V_{M,b}(\forall y(Rx_1y \rightarrow \exists z(Rx_1z \wedge Rzy))) = 1$ (waar)

desda voor alle $q \in Q$: $V_{M,b[y \mapsto q]}(Rx_1y \rightarrow \exists z(Rx_1z \wedge Rzy)) = 1$

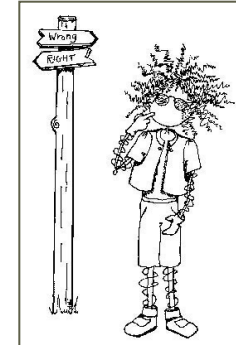
desda voor alle $q \in Q$: als $V_{M,b[y \mapsto q]}(Rx_1y) = 1$ dan $V_{M,b[y \mapsto q]}(\exists z(Rx_1z \wedge Rzy)) = 1$

desda voor alle $q \in Q$: als $4 < q$,
dan is er een $q' \in Q$: $V_{M,b[y \mapsto q, z \mapsto q']}((Rx_1z \wedge Rzy)) = 1$

desda voor alle $q \in Q$: als $4 < q$,
dan is er een $q' \in Q$: $V_{M,b[y \mapsto q, z \mapsto q']} (Rx_1z) = 1$
en $V_{M,b[y \mapsto q, z \mapsto q']} (Rzy) = 1$

desda voor alle $q \in Q$ als $4 < q$,
dan is er een $q' \in Q$ met $4 < q'$ en $q' < q$

- ▶ $V_{M,b}(P(t_1, \dots, t_m)) = 1$ desda $I(P)(V_{M,b}(t_1), \dots, V_{M,b}(t_m))$ geldt
- ▶ $V_{M,b}(\neg \varphi) = 1$ desda $V_{M,b}(\varphi) = 0$
idem als in propositielogica voor $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ en $\varphi \leftrightarrow \psi$.
- ▶ $V_{M,b}(\exists x \varphi) = 1$ desda er is een $d \in D$ zodat $V_{M,b[x \mapsto d]}(\varphi) = 1$
- ▶ $V_{M,b}(\forall x \varphi) = 1$ desda voor alle $d \in D$ geldt $V_{M,b[x \mapsto d]}(\varphi) = 1$



GELIJKHEID VAN TERMEN

De **gelijkheidsrelatie** (“=”) is niet standaard gedefinieerd in de taal:

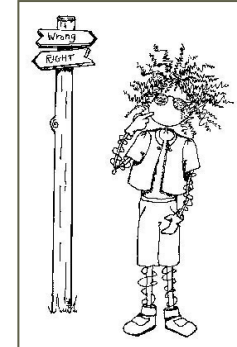
Indien nodig: expliciet te definiëren; alsook de semantiek ervan.

Voorbeeld definitie gelijkheid tussen termen:

$$V_{M,b}(t_1=t_2) = 1 \text{ desda } V_{M,b}(t_1) = V_{M,b}(t_2)$$

Gelijkheid hier is gebaseerd op de
identiteit tussen objecten in het domein

$$V_{M,b}(f(a,x)) = V_{M,b}(f(x,a)) \text{ als } f \text{ een commutatieve functie}$$





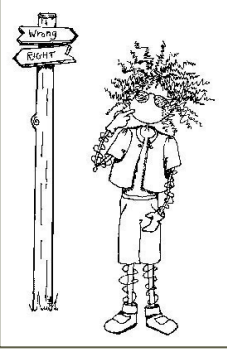
Eigenschap van de waarheidsfunctie:

Waarheidswaarde van een formule hangt af van de structuur ***D***, de interpretatiefunctie ***I*** en van het effect van de bedeling ***b*** op de **vrije** variabelen in die formule (en **dus niet van de bedeling van de gebonden variabelen**).

Dit is gebaseerd op de volgende bewering:

Bewering:

Als een formule φ vrije variabelen x_1, \dots, x_k bevat en er zijn 2 bedelingen b_1 en b_2 met $b_1(x_i) = b_2(x_i)$, voor $i = 1, \dots, k$, dan geldt $V_{M,b_1}(\varphi) = V_{M,b_2}(\varphi)$



Gevolg:

- ▶ Voor zinnen (gesloten formules) zijn er geen vrije variabelen, dus doet de bedeling er niet toe.
- ▶ Voor zinnen spreken we dus over waarheid en onwaarheid in een model.

SUBSTITUTIE – EIGENSCHAPPEN



Bewering

Substitutie

Voor alle termen t, t' geldt:

$$V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t')$$

Links: eerst substitueren en dan de waarde van t' bepalen

Rechts: waarde van t' berekenen en we bedelen de waardering van t aan x

Dus wat betreft de waardering is substitutie in een term hetzelfde als substitutie in de bedeling.

SUBSTITUTIE – EIGENSCHAPPEN

- ▶ $V_{M,b}(x) = b(x)$ voor variabelen x
- ▶ $V_{M,b}(a) = I(a)$ voor constanten a
- ▶ $V_{M,b}(f(t_1, \dots, t_k)) = I(f)(V_{M,b}(t_1), \dots, V_{M,b}(t_k))$

$$V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b}[x \mapsto V_{M,b}(t)](t')$$

Voorbeeld:

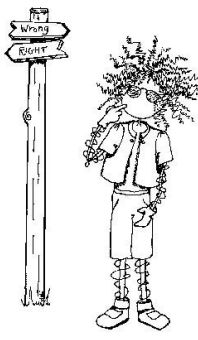
Als $t' = f(x,y)$ en $t = a$ dan

$$\begin{aligned} V_{M,b}([a/x]f(x,y)) &= V_{M,b}(f(a,y)) \\ &= I(f)(V_{M,b}(a), V_{M,b}(y)) \\ &= I(f)(I(a), b(y)) \end{aligned}$$

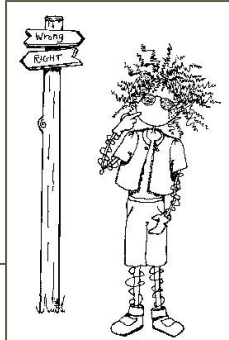
Anderzijds:

$$\begin{aligned} V_{M,b}[x \mapsto V_{M,b}(a)](f(x,y)) &= I(f)(V_{M,b}[x \mapsto V_{M,b}(a)](x), V_{M,b}[x \mapsto V_{M,b}(a)](y)) \\ &= I(f)(V_{M,b}(a), b(y)) \\ &= I(f)(I(a), b(y)) \end{aligned}$$

Bewijs later.



GELDIG GEVOLG



Definitie

Geldig gevolg:

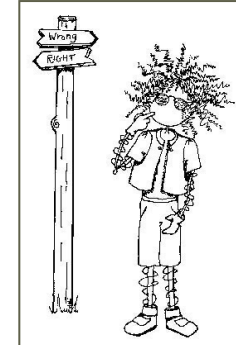
Laat Σ een verzameling formules zijn en ψ een formule, dan ψ volgt uit Σ ,

$\Sigma \models \psi$, desda:

voor elk model M en elke bedeling b geldt:
als voor elke $\varphi \in \Sigma$ geldt dat $V_{M,b}(\varphi) = 1$
dan ook $V_{M,b}(\psi) = 1$

- Opmerking: oneindig veel mogelijkheden voor M en b !!

SEMANTIEK



Def. Een formule ψ heet **universeel geldig** als $\models \psi$

► Intuïtief: Een universeel geldige formule is **waar in alle modellen M en onder iedere bedeling b**

Def. Twee formules ϕ en ψ heten **logisch equivalent** als

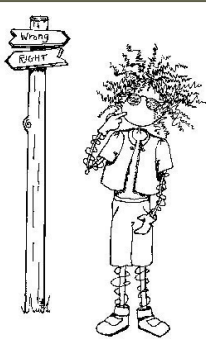
$$\models \phi \leftrightarrow \psi$$

Voorbeelden:

$$\forall x (Rx \rightarrow Px), \exists x Rx \models \exists x Px$$

$$\models Ta \rightarrow \exists x Tx$$

$$\models \forall x Rx \leftrightarrow \neg \exists x \neg Rx$$



Definitie

$\{\varphi \mid \varphi \text{ is een zin en } V_M(\varphi) = 1\}$ is een **theorie voor een model M**

Notatie $Th(M)$

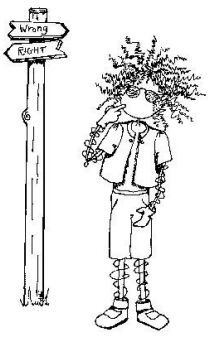
- Intuïtief: De verzameling van ware zinnen is een theorie voor M
- We kunnen een theorie ook weergeven door axioma's

Definitie

Axiomaverzameling voor een model M

Een formuleverzameling Σ axiomatiseert een theorie $Th(M)$ als voor alle zinnen φ geldt: $\varphi \in Th(M)$ desda $\Sigma \models \varphi$

- Een goede axiomatisering geeft de essentiële kenmerken van het model weer.



Definitie

Modelverzameling voor de zin φ , $MOD(\varphi)$, is

$$\{M \mid V_M(\varphi) = 1\}$$

Modelverzameling voor de verzameling zinnen Σ , $MOD(\Sigma)$, is

$$\{M \mid V_M(\varphi) = 1 \text{ voor alle } \varphi \in \Sigma\}$$

MOD is verzameling van modellen die de zin, resp. een verzameling zinnen, waar maakt.

PREDIKAATLOGICA: SEMANTISCHE TABLEAUS



VRIJE
UNIVERSITEIT
BRUSSEL

SEMANTISCHE TABLEAUS

Zoals in de propositielogica kunnen we semantische tableaux gebruiken om de geldigheid van een gevolgtrekking te testen

Hoofdidee:

- ▶ zoeken van een tegenvoorbeeld voor $\varphi_1, \dots, \varphi_n \circ \psi$

Let op: tegenvoorbeeld in predikaatlogica is

- ▶ Er bestaat een **model** en een **bedeling** die $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ waar maakt en ψ onwaar
 - ▶ Dus structuur (domein), interpretatiefunctie en bedeling nodig.

SEMANTISCHE TABLEAUS

- ▶ Regels en techniek van de propositielogica zijn uitgebreid naar de predikaatlogica:
 - ▶ Bijkomende reductieregels voor de kwantoren \forall en \exists
 - ▶ Gaandeweg construeren van een domein D
 - ▶ Bijhouden van de interpretatiefunctie I en de bedeling b
 - ▶ De reductieregels voor de connectieven blijven van kracht
- ▶ In deze cursus:
 - ▶ geen functieletters in de formules
 - ▶ Gevolgtrekkingen zonder constanten en zonder vrije variabelen (anders veel ingewikkelder).

SEMANTISCHE TABLEAUS

Voorbeeld

► Geldige gevolgtrekking:

$$\forall x(Ax \rightarrow Bx), \forall x(Bx \rightarrow Cx) / \forall x(Ax \rightarrow Cx)$$

$$\varphi_1 = Ax \rightarrow Bx, \varphi_2 = Bx \rightarrow Cx$$

Nodig: Minstens 1 element in het domein die de bewering onwaar maakt

Universele formules moeten waar zijn voor elk element in het domein, dus ook voor d_1

$$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, \forall x(Ax \rightarrow Cx)$$

$$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Ad_1 \rightarrow Cd_1 \quad (1) D = \{d_1\}$$

$$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Ad_1 \circ Cd_1 \quad (1) D = \{d_1\}$$

$$\forall x\varphi_1, \forall x\varphi_2, Ad_1 \rightarrow Bd_1, Ad_1 \circ Cd_1 \quad (1) D = \{d_1\}$$

$$(2) \forall x\varphi_1: \{d_1\}$$

Constructie van het domein

Blijft staan als herinnering

SEMANTISCHE TABLEAUS

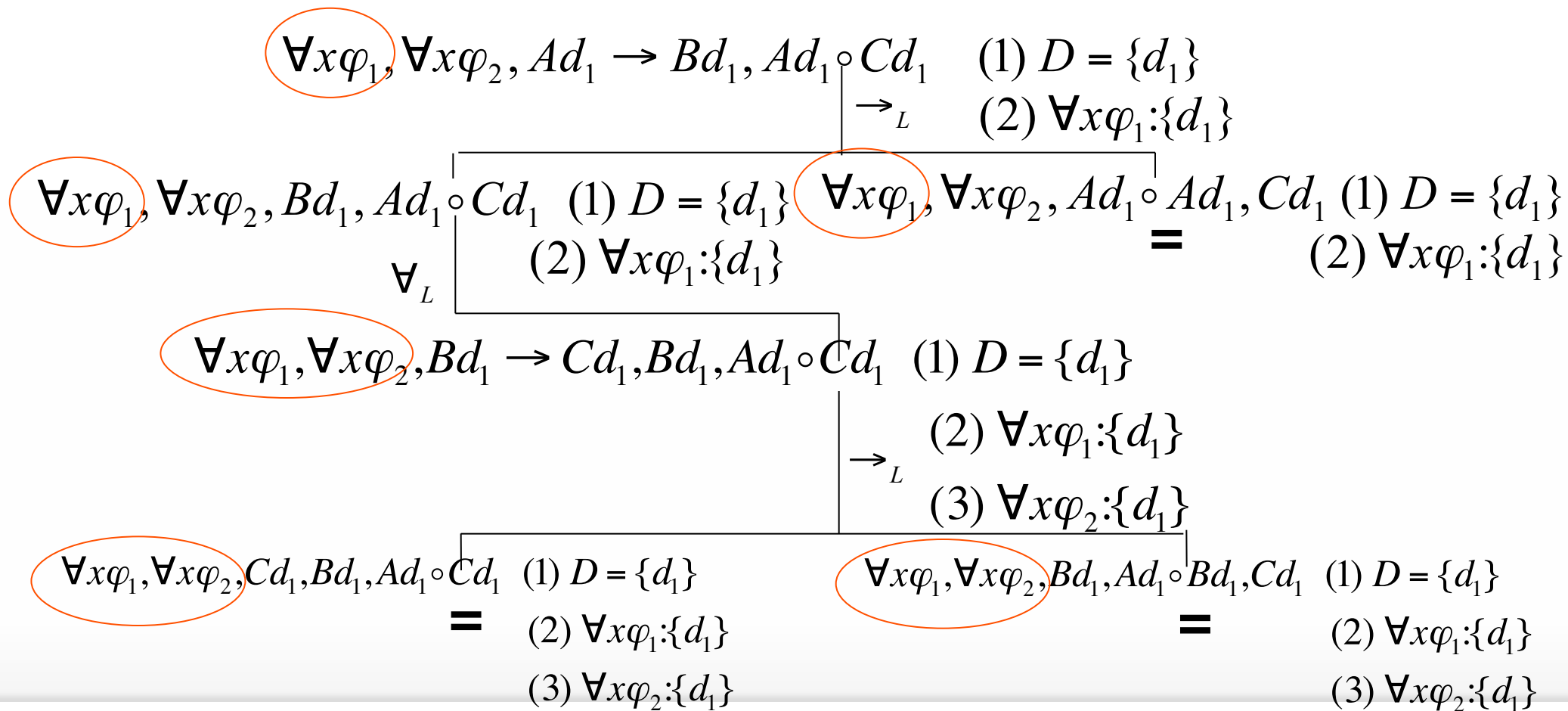
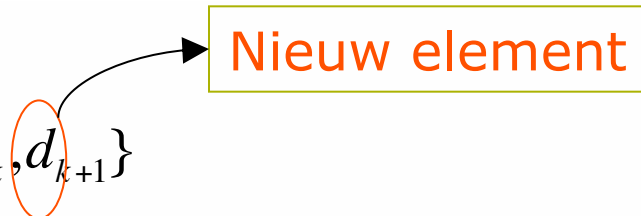


Tableau is gesloten!

SEMANTISCHE TABLEAUS - REGELS

Extra reductieregels:

$$\begin{array}{ll} \forall_R : & \Phi \circ \forall x \varphi, \Psi \\ & | \\ & \Phi \circ [d_{k+1}/x] \varphi, \Psi \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \quad D = \{d_1, \dots, d_k\} \\ (2) \quad \dots\dots \\ (1) \quad D = \{d_1, \dots, d_k, d_{k+1}\} \\ (2) \quad \dots \text{idem} \dots \end{array}$$



- Om $\forall x \varphi$ onwaar te maken, moet **er minstens 1 object** in D zijn zodat $[d/x] \varphi$ onwaar is. We voeren daarom d_{k+1} in
- Achtereenvolgens toepassen van \forall_R zorgt dat het domein langzamerhand wordt opgebouwd.

SEMANTISCHE TABLEAUS - REGELS

$\forall_L :$

$$\begin{array}{c} \Phi, \forall x \varphi \circ \Psi \\ | \\ \Phi, \forall x \varphi, [d_1/x]\varphi, \dots, [d_k/x]\varphi \circ \Psi \end{array}$$

(1) $\{d_1, \dots, d_k\}$

(2) $\dots\dots$

(1) $\{d_1, \dots, d_k\}$

(2) $\forall x \varphi : \{d_1, \dots, d_k\}$
 $\dots \text{idem} \dots$

Om $\forall x \varphi$ waar te maken, moet $[d/x] \varphi$ waar zijn **voor alle** objecten die tijdens de constructie in het domein terecht komen.

► Dit vereist het “invullen” voor elk object uit het geconstrueerde domein.

Moet ook terug gebeuren als er later nog nieuwe elementen aan het domein worden toegevoegd !!!

SEMANTISCHE TABLEAUS

$$\begin{array}{lcl}
 \exists_L : & \begin{array}{c} \Phi, \exists x \varphi \circ \Psi \\ | \\ \Phi, [d_{k+1}/x] \varphi \circ \Psi \end{array} & \begin{array}{l} (1) \quad \{d_1, \dots, d_k\} \\ (2) \quad \dots\dots \\ (1) \quad \{d_1, \dots, d_k, d_{k+1}\} \\ (2) \quad \dots \text{idem} \dots \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \exists_R : & \begin{array}{c} \Phi \circ \exists x \varphi, \Psi \\ | \\ \Phi \circ [d_1/x] \varphi, \dots, [d_k/x] \varphi, \exists x \varphi, \Psi \end{array} & \begin{array}{l} (1) \quad \{d_1, \dots, d_k\} \\ (2) \quad \dots\dots \\ (1) \quad \{d_1, \dots, d_k\} \\ (2) \quad \exists x \varphi : \{d_1, \dots, d_k\} \\ \dots \text{idem} \dots \end{array}
 \end{array}$$

SEMANTISCHE TABLEAUS -VB 9.2

$\forall x (Ax \rightarrow \forall y By) / \forall x \forall y (Ax \rightarrow By)$

$\varphi \equiv Ax \rightarrow \forall y By$

$\forall x \varphi \circ \forall x \forall y (Ax \rightarrow By)$

$\forall x \varphi \circ \forall y (Ad_1 \rightarrow By) \quad (1) D = \{d_1\}$

$\forall x \varphi \circ Ad_1 \rightarrow Bd_2 \quad (1) D = \{d_1, d_2\}$

$\forall x \varphi, Ad_1 \circ Bd_2 \quad (1) D = \{d_1, d_2\}$

$\forall x \varphi, Ad_1 \rightarrow \forall y By, Ad_2 \rightarrow \forall y By, Ad_1 \circ Bd_2 \quad *$

$*: (1) D = \{d_1, d_2\}$
 $(2) \forall x \varphi: \{d_1, d_2\}$

$\forall x \varphi, \forall y By, Ad_2 \rightarrow \forall y By, Ad_1 \circ Bd_2 \quad *$ $\forall x \varphi, Ad_2 \rightarrow \forall y By, Ad_1 \circ Ad_1, Bd_2 \quad *$

$\forall x \varphi, \forall y By, Ad_1 \circ Bd_2 \quad *$ $\forall x \varphi, \forall y By, Ad_1 \circ Ad_2, Bd_2 \quad *$

$\forall x \varphi, \forall y By, Bd_1, Bd_2, Ad_1 \circ Bd_2 \quad **$ $\forall x \varphi, \forall y By, Bd_1, Bd_2, Ad_1 \circ Ad_2, Bd_2 \quad **$

$** : (1) D = \{d_1, d_2\}$
 $(2) \forall x \varphi: \{d_1, d_2\}$
 $\forall y By: \{d_1, d_2\}$

Dit tableau sluit.

SEMANTISCHE TABLEAUS -VB 9.4

$$\varphi_1 \equiv Ax \wedge Bx$$

$$\varphi_2 \equiv Bx \wedge Cx$$

* : (1) $D = \{d_1\}$

(2) $\exists x\varphi_1:\{d_1\}$

$$\neg\exists x(Ax \wedge Bx), \neg\exists x(Bx \wedge Cx) \circ \neg\exists x(Ax \wedge Cx)$$

$$\exists x(Ax \wedge Cx) \circ \exists x(Ax \wedge Bx), \exists x(Bx \wedge Cx)$$

$$Ad_1 \wedge Cd_1 \circ \exists x(Ax \wedge Bx), \exists x(Bx \wedge Cx) \quad D = \{d_1\}$$

$$Ad_1, Cd_1 \circ \exists x(Ax \wedge Bx), \exists x(Bx \wedge Cx) \quad D = \{d_1\}$$

$$Ad_1, Cd_1 \circ Ad_1 \wedge Bd_1, \exists x(Ax \wedge Bx), \exists x(Bx \wedge Cx) \quad *$$

$$Ad_1, Cd_1 \circ Ad_1, \exists x\varphi_1, \exists x\varphi_2 \quad * \qquad Ad_1, Cd_1 \circ Bd_1, \exists x\varphi_1, \exists x\varphi_2 \quad *$$

** : (1) $D = \{d_1\}$

(2) $\exists x\varphi_1:\{d_1\}$

$\exists x\varphi_2:\{d_1\}$

$$Ad_1, Cd_1 \circ Bd_1, Bd_1 \wedge Cd_1, \exists x\varphi_1, \exists x\varphi_2 \quad **$$

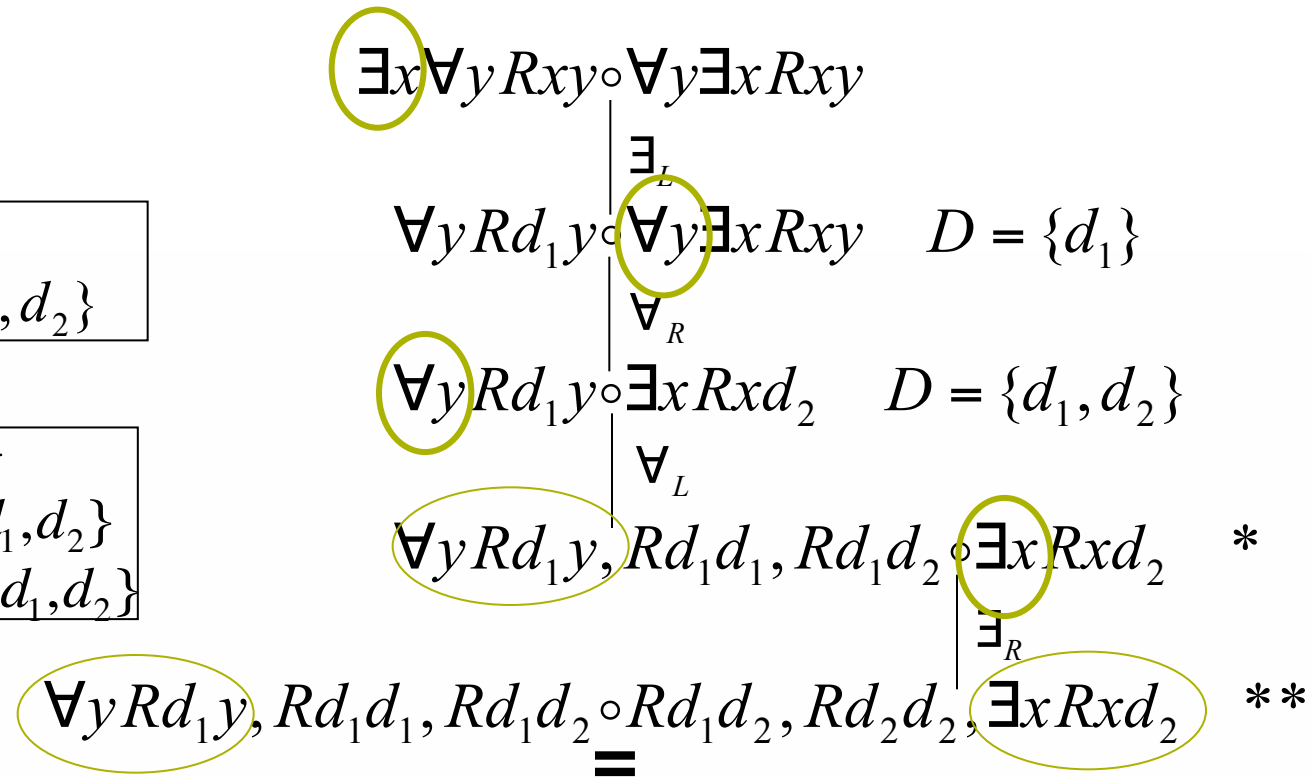
$$Ad_1, Cd_1 \circ Bd_1, \exists x\varphi_1, \exists x\varphi_2 \quad ** \qquad Ad_1, Cd_1 \circ Cd_1, \dots$$

Tegenvoorbeeld!

SEMANTISCHE TABLEAUS -VB 9.5

*: (1) $D = \{d_1, d_2\}$
 (2) $\forall y R d_1 y : \{d_1, d_2\}$

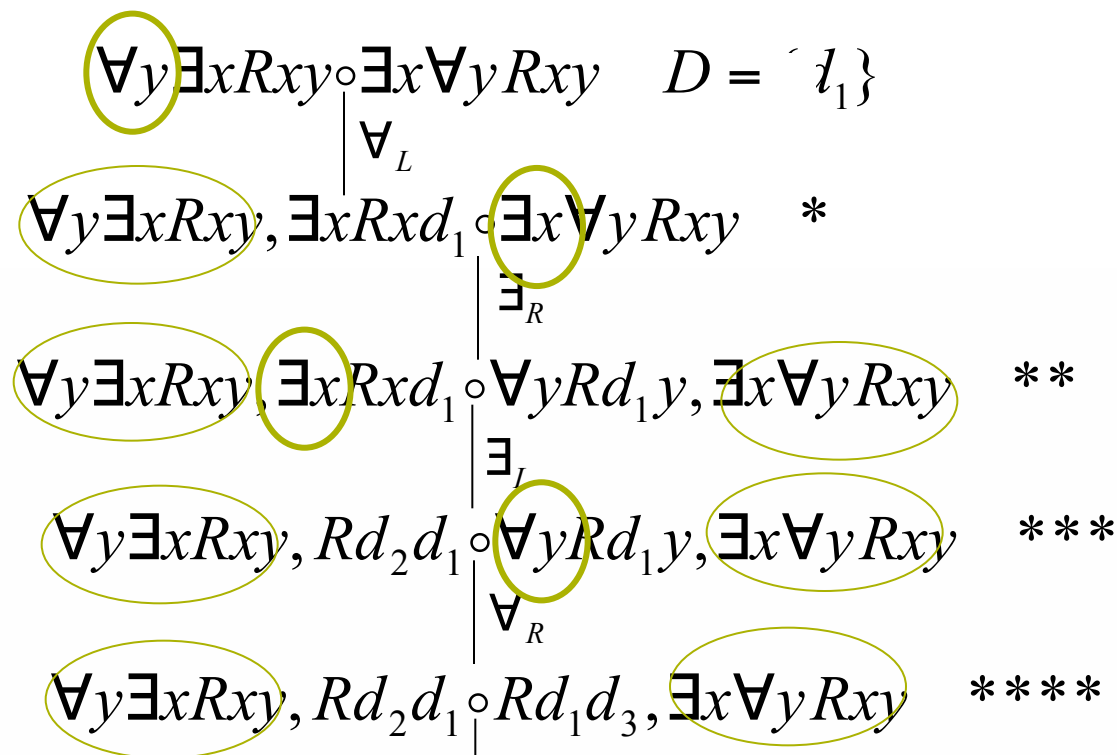
** : (1) $D = \{d_1, d_2\}$
 (2) $\forall y R d_1 y : \{d_1, d_2\}$
 $\exists x R x d_2 : \{d_1, d_2\}$



SEMANTISCHE TABLEAUS -VB 9.6

Domein mag niet leeg zijn!

- *: (1) $D = \{d_1\}$
 (2) $\forall y \exists x Rxy : \{d_1\}$
- ** : (1) $D = \{d_1\}$
 (2) $\forall y \exists x Rxy : \{d_1\}$
 $\exists x \forall y Rxy : \{d_1\}$
- ***: (1) $D = \{d_1, d_2\}$
 (2) $\forall y \exists x Rxy : \{d_1\}$
 $\exists x \forall y Rxy : \{d_1\}$
- ****: (1) $D = \{d_1, d_2, d_3\}$
 (2) $\forall y \exists x Rxy : \{d_1\}$
 $\exists x \forall y Rxy : \{d_1\}$



Dit wordt een oneindig diepe tak, want we moeten de formules terug invullen voor d_2 en d_3 !
 Dit tableau sluit niet.

SEMANTISCHE TABLEAUS: SAMENVATTING

► Mogelijkheden:

1. Het tableau **sluit**, gevolgtrekking is **geldig**.

2. Er is een **niet-sluitende tak**. Deze kan:

2.1 **eindig afbreken**, of

2.2 **oneindig doorlopen**

In beide gevallen: tegenvoorbeeld; gevolgtrekking is **niet geldig**

Oneindige tak: tegenvoorbeeld met een oneindig domein.

PREDIKAATLOGICA & BESLISBAARHEID

De predikaatlogica is **niet beslisbaar** (stelling van Church 1936):

Er bestaat geen algoritme om voor **iedere willekeurige** formule te bepalen of deze afleidbaar is of niet uit een formuleverzameling.

► Sommige fragmenten van de predikaatlogica zijn wel beslisbaar

Semantische tableaux zijn wel **adequaat** voor de predikaatlogica:

Een sequent heeft een gesloten tableau dan en slechts dan als de corresponderende gevolgtrekking geldig is.

► Zo'n gesloten tableau wordt gevonden wanneer men zorgt voor **fair scheduling** van de reductieregels (d.w.z. ze moeten allemaal aan de beurt komen).