2.6

Continuïteit

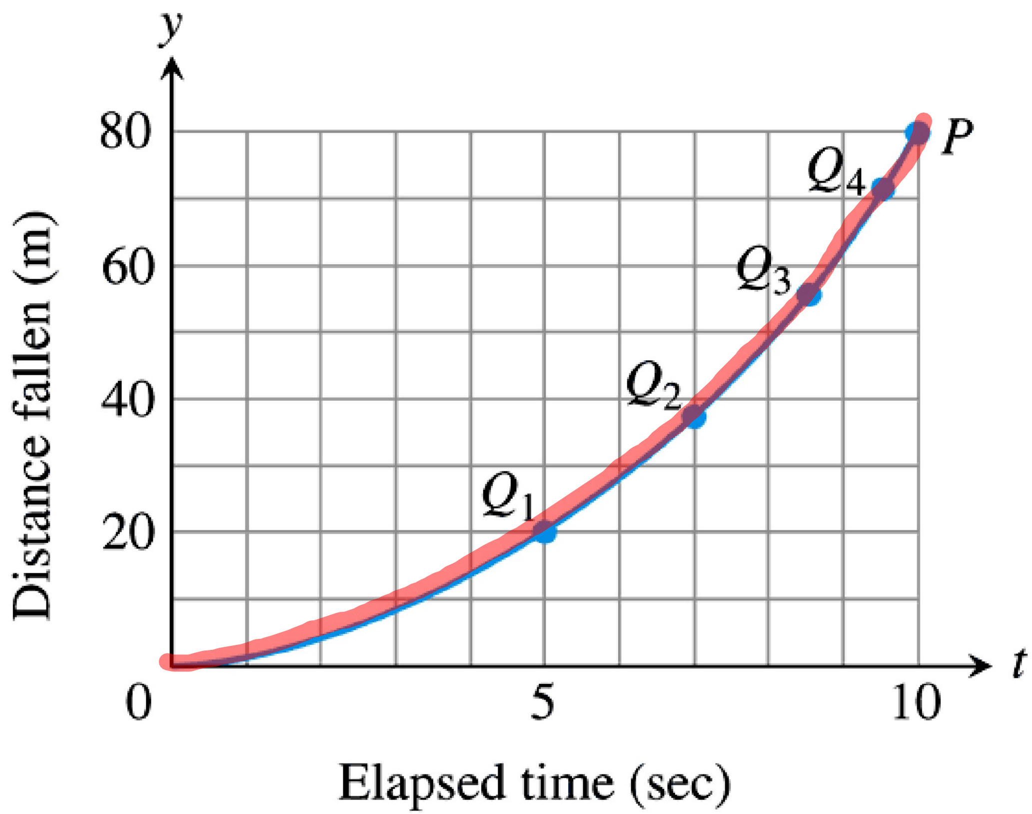


FIGURE 2.49 Connecting plotted points by an unbroken curve from experimental data $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ for a falling object.

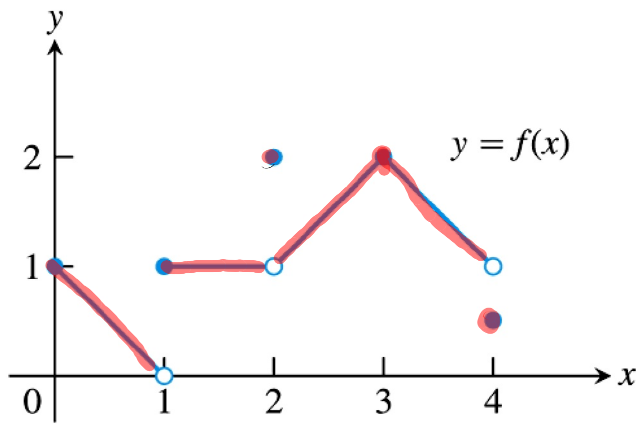


FIGURE 2.50 The function is continuous on [0, 4] except at $x = 1$, $x = 2$, and $x = 4$ (Example 1).

discontinuiteit voor

$x = 1$

$x = 2$

en $x = 4$

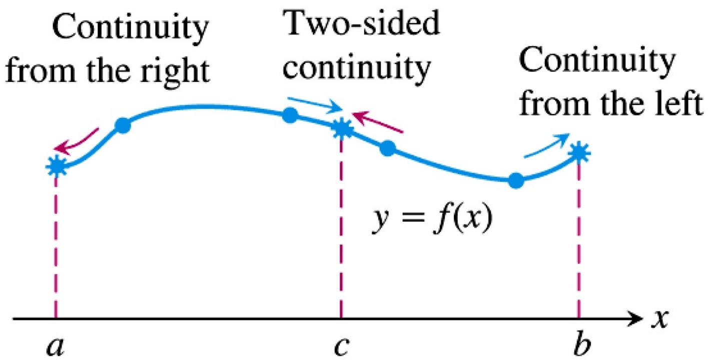
$\lim_{x \to 1} f(x)$ bestaat niet

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$

$f(2) = 2 \neq 1$



$[a, b]$

Definitie van continuïteit in een punt c

1) In een inwendig punt: Een functie f(x) is continu in een inwendig punt c van haar domein als:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

2) In een eindpunt: Een functie f(x) is continu in een linkereindpunt a of in een rechtereindpunt b van haar domein als:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$$

NB: We zeggen dat f rechtscontinu is in a en linkscontinu in b

Continuïteitstest

Een functie f(x) is continu in c dan en slechts dan aan de volgende drie voorwaarden voldaan is:

1) f(c) bestaat (dwz c behoort tot het domein van f)

2) de limiet van f in c bestaat

3) deze limiet is gelijk aan de functiewaarde

Indien c een randpunt is of indien we spreken van rechts of linkscontinuïteit dan moeten we in het bovenstaande de desbetreffende éénzijdige limiet gebruiken

f is discontinu in c indien f niet continu is in c.
We noemen c dan een discontinuïteitspunt

VB: Ga na waar de volgende functies continu zijn

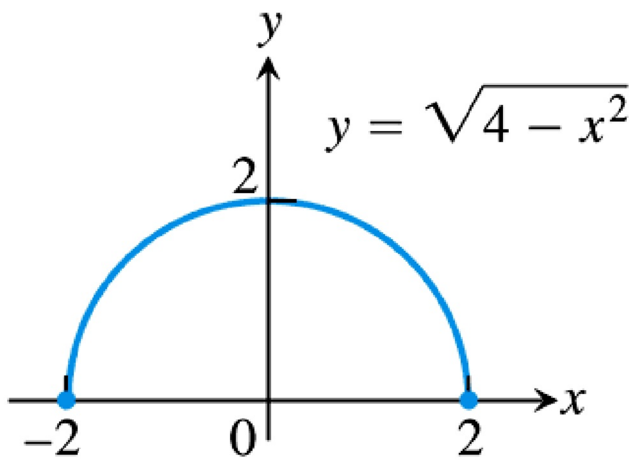


FIGURE 2.52 A function that is continuous at every domain point (Example 2).

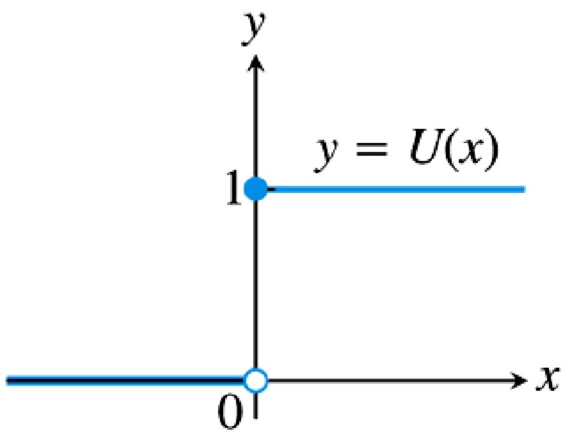


FIGURE 2.53 A function that is right-continuous, but not left-continuous, at the origin. It has a jump discontinuity there (Example 3).

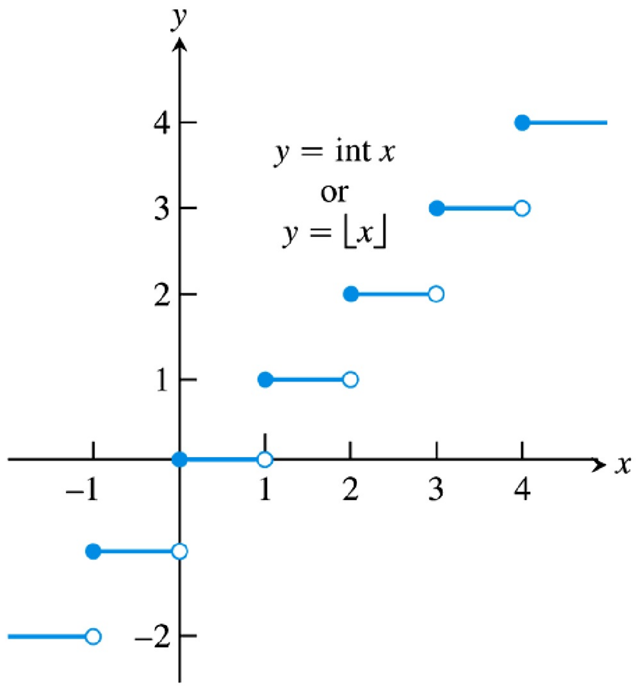


FIGURE 2.54 The greatest integer function is continuous at every noninteger point. It is right-continuous, but not left-continuous, at every integer point (Example 4).

2.4

int(x)

int(2.4) = 2

int(3.99) = 3

Soorten discontinuïteit in het punt x=0

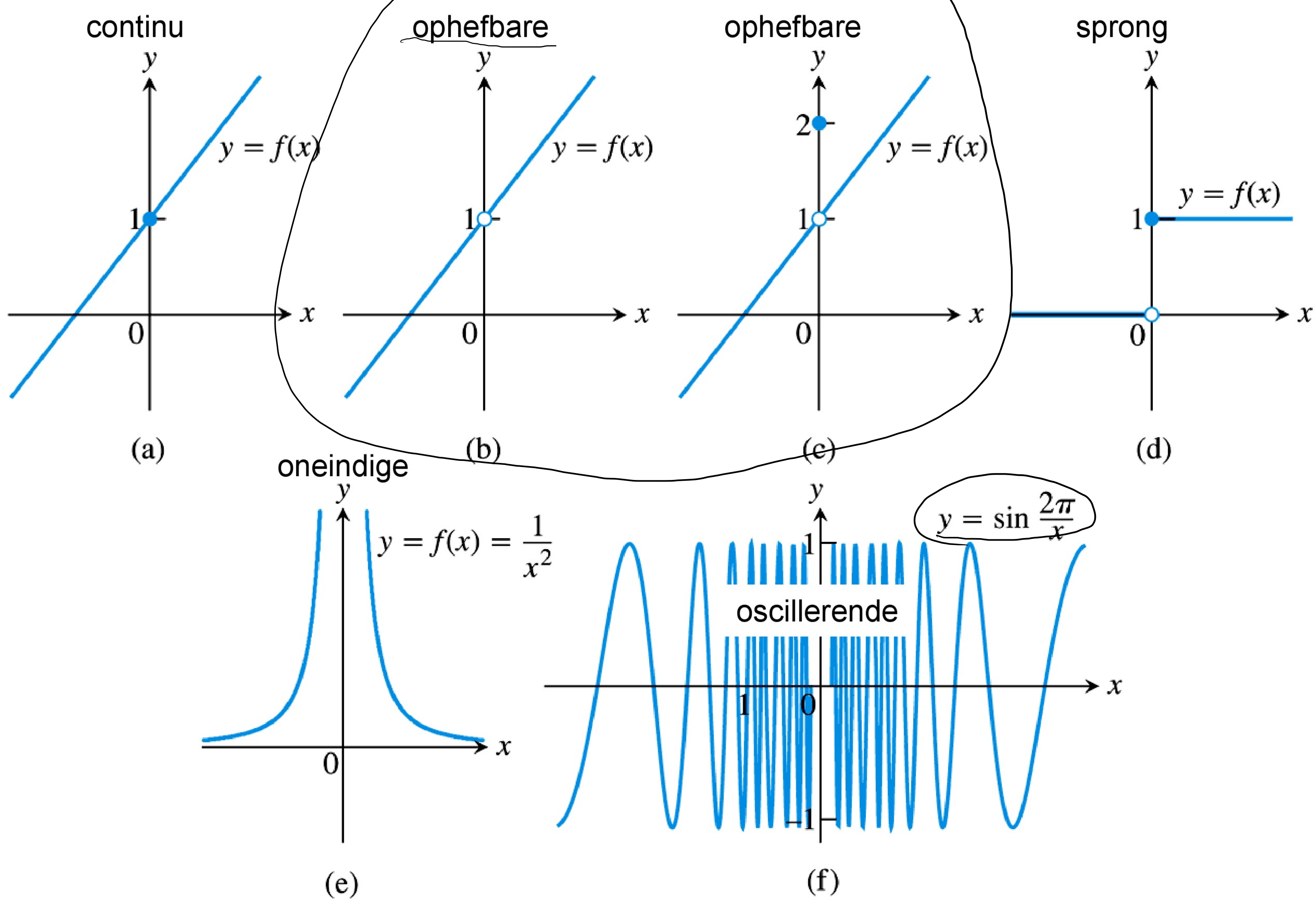


FIGURE 2.55 The function in (a) is continuous at $x = 0$; the functions in (b) through (f) are not.

1. Een functie f is continu in een interval ⟷ f is continu in elk punt van het interval

2. f is een continue functie indien f continu is in elk punt van haar domein

Vbn: constante functie: f(x) = c

identiteitsfunctie: f(x) = x

de functie f(x) = 1/x

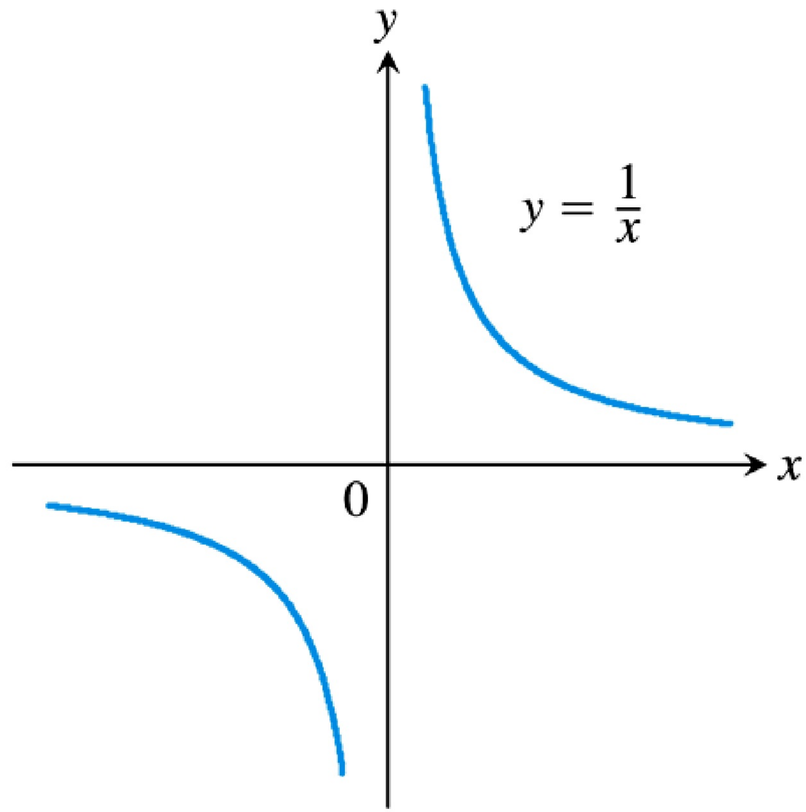


FIGURE 2.56 The function $y = 1/x$ is

Rekenregels voor limieten ➔ rekenregels voor continuiteit

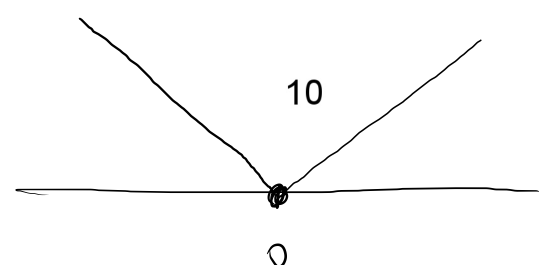
THEOREM 9 Properties of Continuous Functions

If the functions f and g are continuous at $x = c$, then the following combinations are continuous at $x = c$.

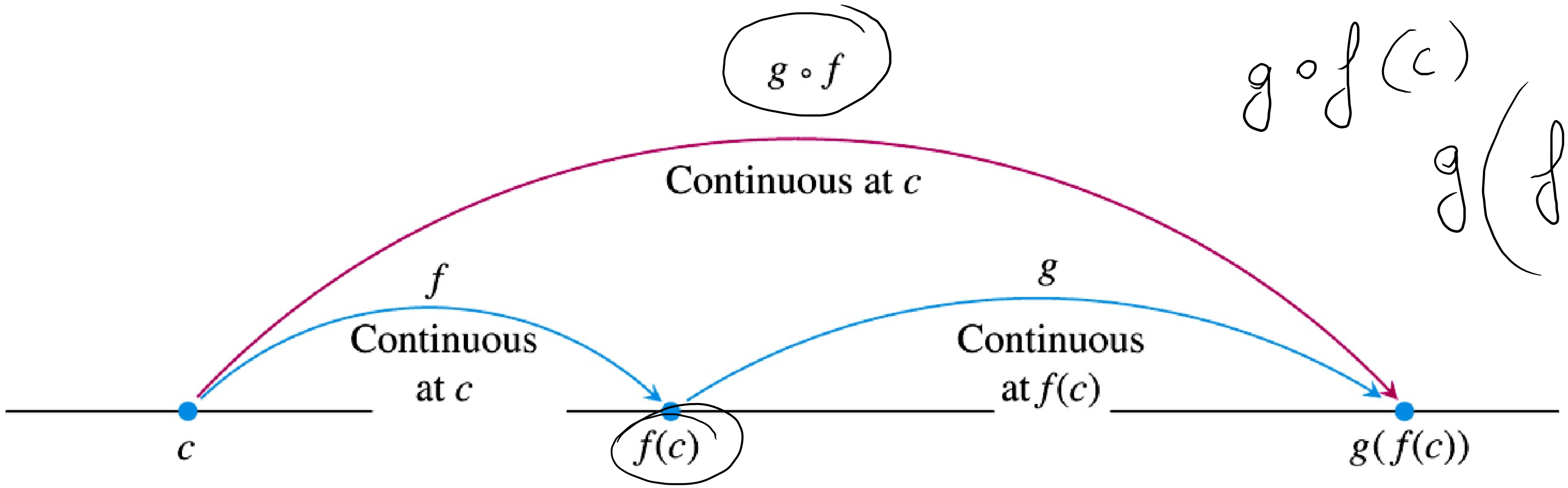
1. *Sums*: $f + g$
2. *Differences*: $f - g$
3. *Products*: $f \cdot g$
4. *Constant multiples*: $k \cdot f$, for any number k
5. *Quotients*: f/g provided $g(c) \neq 0$
6. *Powers*: $f^{r/s}$, provided it is defined on an open interval containing c, where r and s are integers

Veeltermfuncties en rationele functies zijn continu

De absolute waarde functie : f(x) = |x| is continu



De samenstelling van continue functies



$g \circ f(c)$

$g(f(c))$

FIGURE 2.57 Composites of continuous functions are continuous.

f continu in c en g continu in f(c), dan is de samengestelde functie

$g \circ f$ continu in c

Voorbeelden van continue functies:

$$y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$$

$$y = \left| \frac{x-2}{x^2 - 2} \right|$$

De continue uitbreiding van een functie

Indien f(c) niet bestaat maar $\lim_{x\to c} f(x) = L$ dan kunnen we een nieuwe functie F definiëren met $F(x) = \begin{cases} f(x) & voor\ \ x \neq c \\ L & voor\ \ x = c \end{cases}$

F is continu in c. We noemen F de continue uitbreiding van f in c.

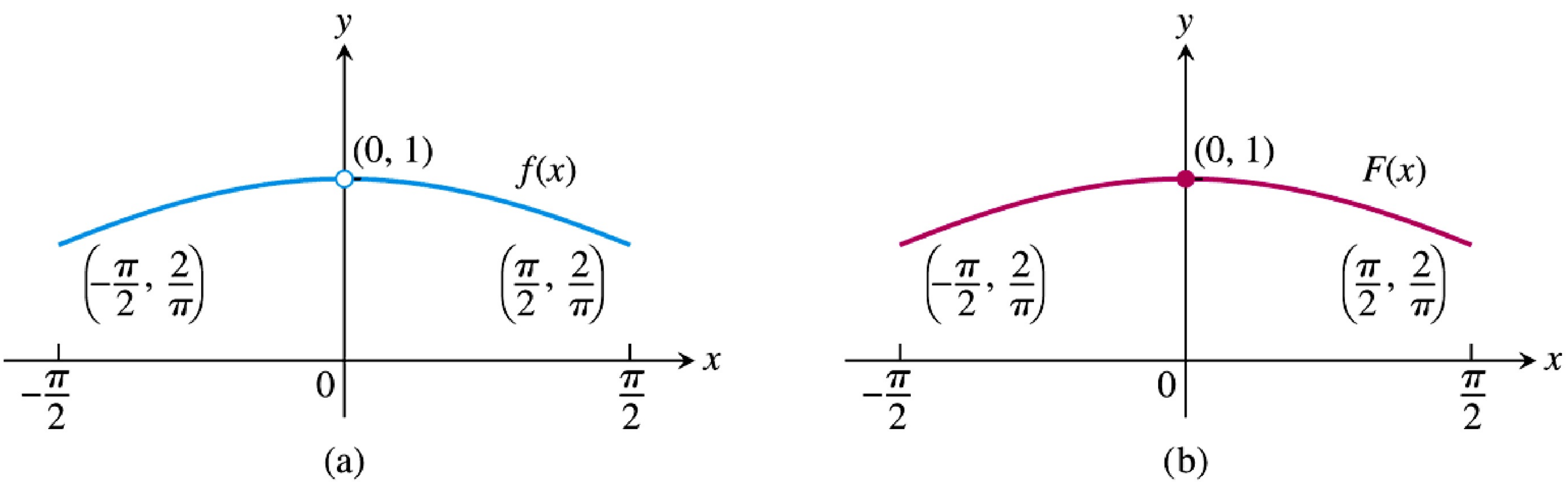


FIGURE 2.59 The graph (a) of $f(x) = (\sin x)/x$ for $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ does not include the point (0, 1) because the function is not defined at $x = 0$. (b) We can remove the discontinuity from the graph by defining the new function $F(x)$ with $F(0) = 1$ and $F(x) = f(x)$ everywhere else. Note that $F(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$.

Vb: De rode functie is de continue uitbreiding van de blauwe

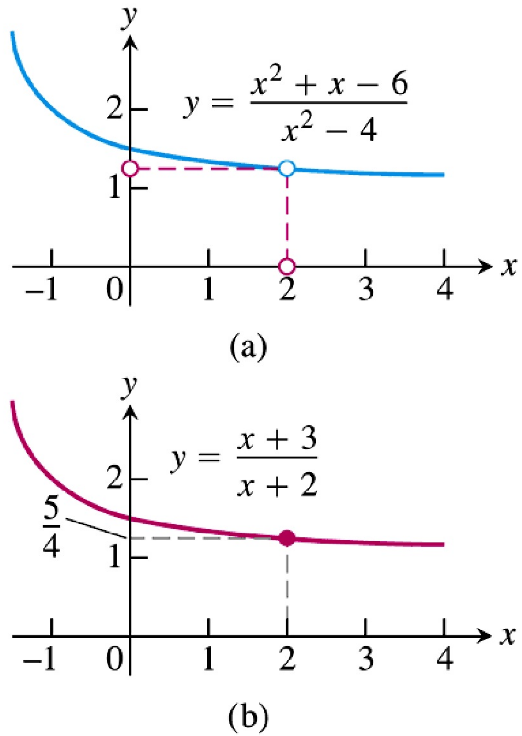


FIGURE 2.60 (a) The graph of $f(x)$ and (b) the graph of its continuous extension $F(x)$ (Example 9).

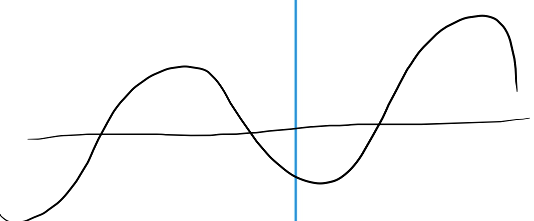
$$y = \frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$

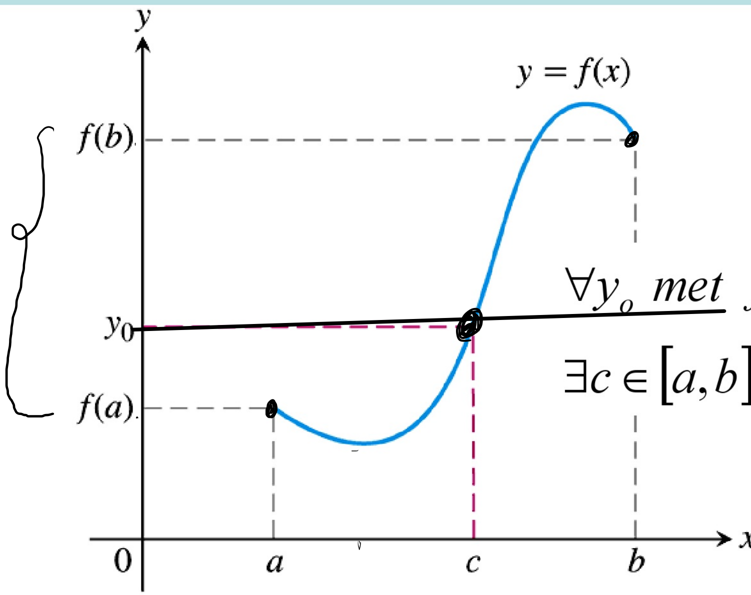
$$= \frac{x+3}{x+2}$$

De tussenwaardestelling voor continue functies

Een functie y = f(x) , die continu is op een gesloten interval [a,b]

neemt op dit interval elke waarde aan tussen f(a) en f(b)





$$\forall y_o \text{ met } f(a) < y_o < f(b) \text{ geldt}$$

$$\exists c \in [a,b] \text{ zodat } f(c) = y_o$$

De continuïteitseis in de vorige stelling is cruciaal !

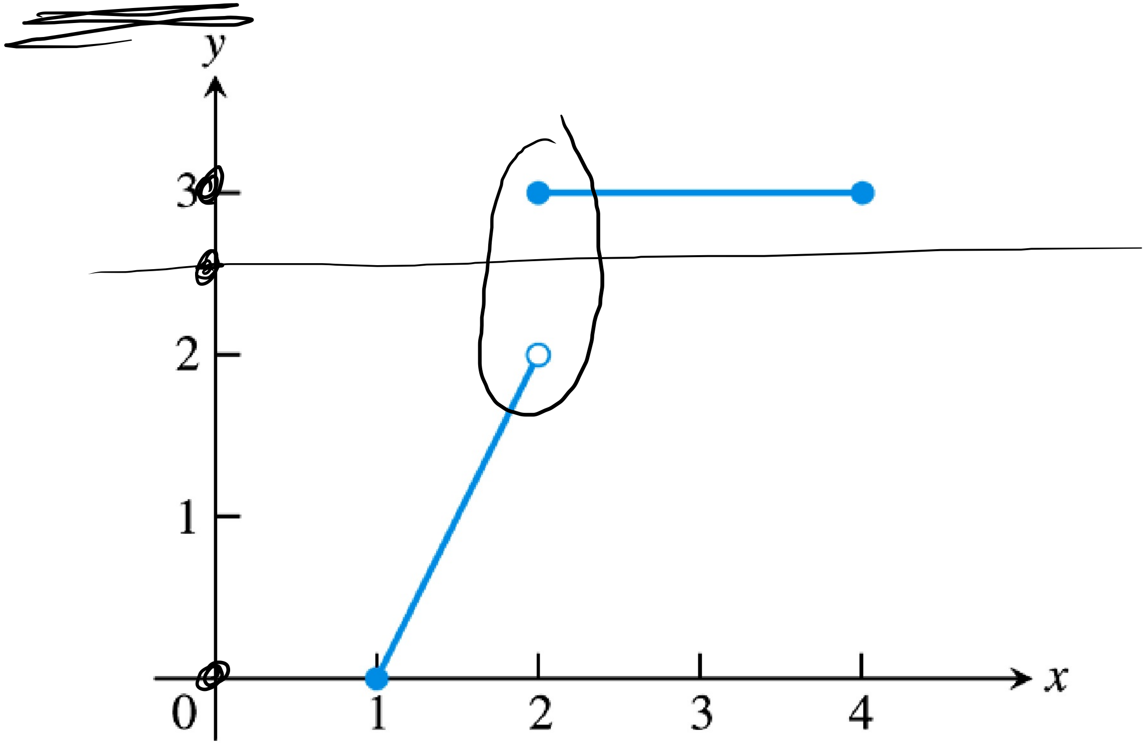


FIGURE 2.61 The function

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 1 \le x < 2 \\ 3, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

does not take on all values between $f(1) = 0$ and $f(4) = 3$; it misses all the values between 2 and 3.

Toepassing: Het zoeken van nulpunten

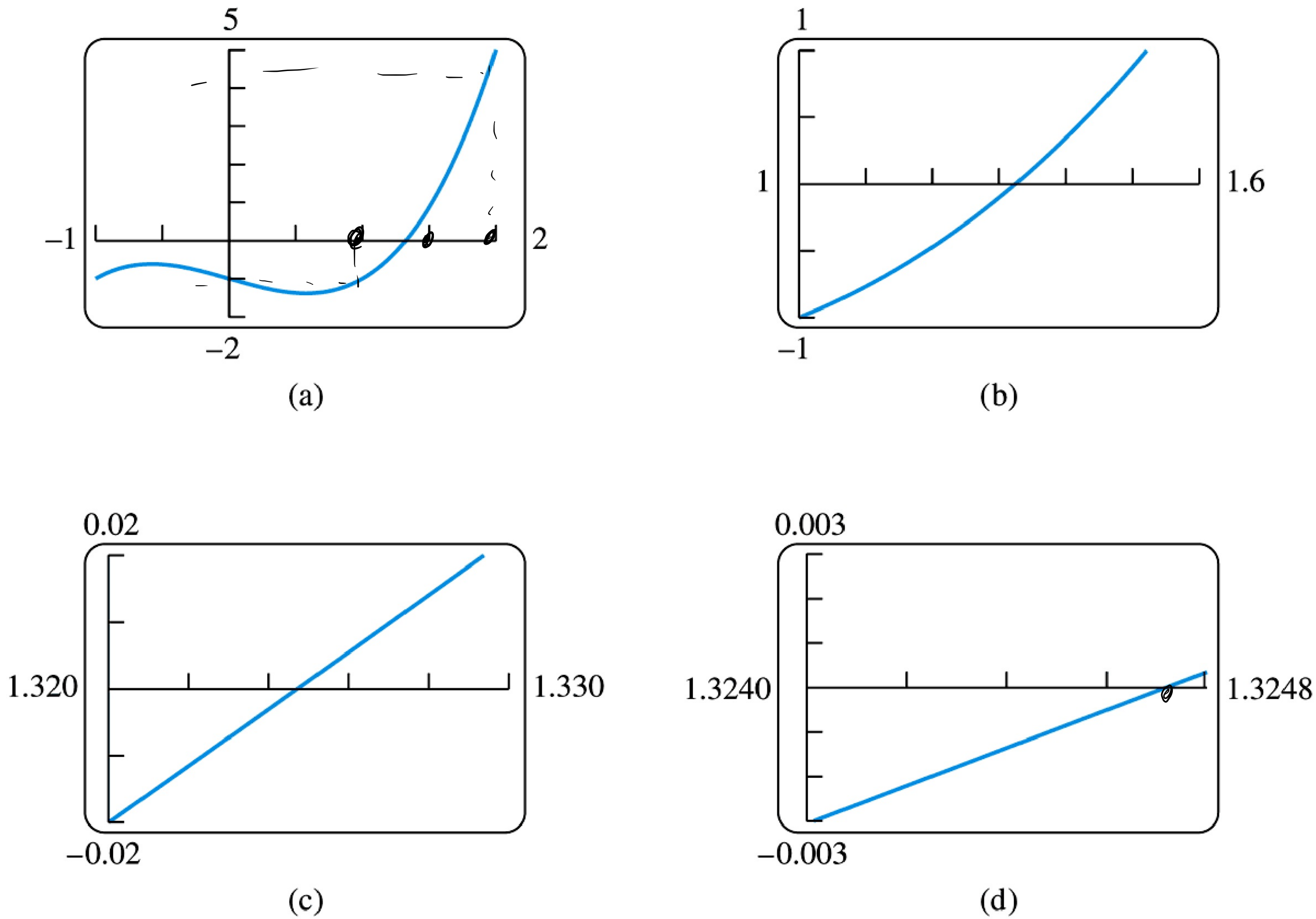


FIGURE 2.62 Zooming in on a zero of the function $f(x) = x^3 - x - 1$. The zero is near $x = 1.3247$.