

2.6

Continuïteit

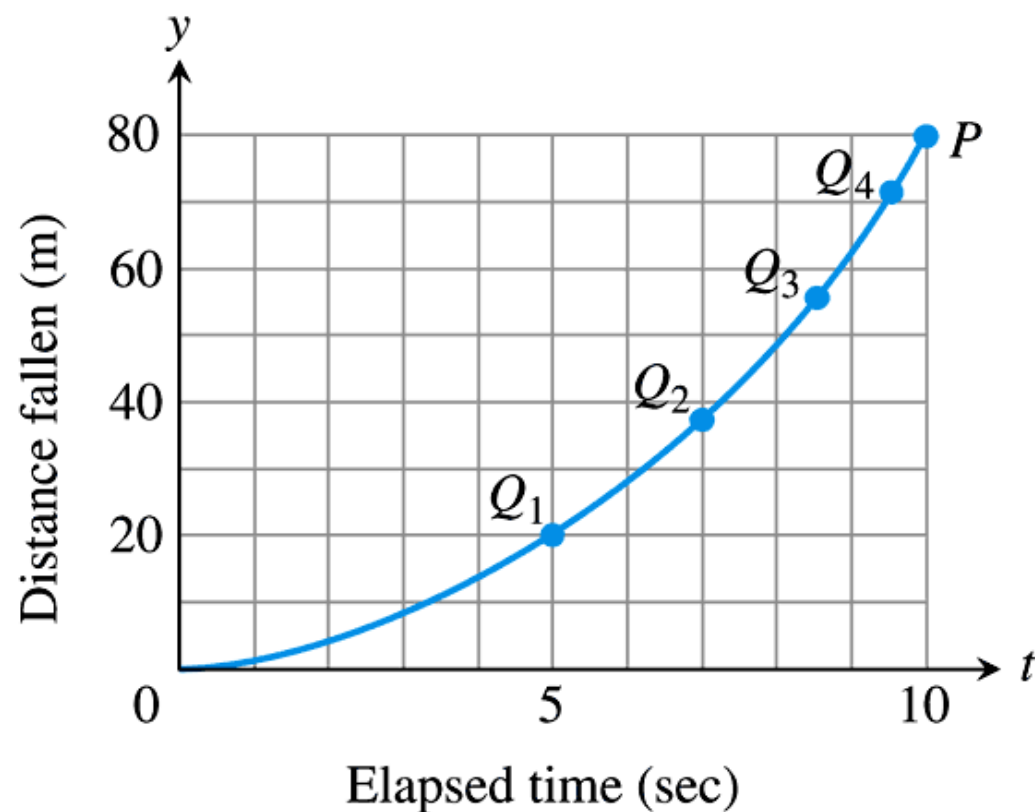


FIGURE 2.49 Connecting plotted points by an unbroken curve from experimental data Q_1, Q_2, Q_3, \dots for a falling object.

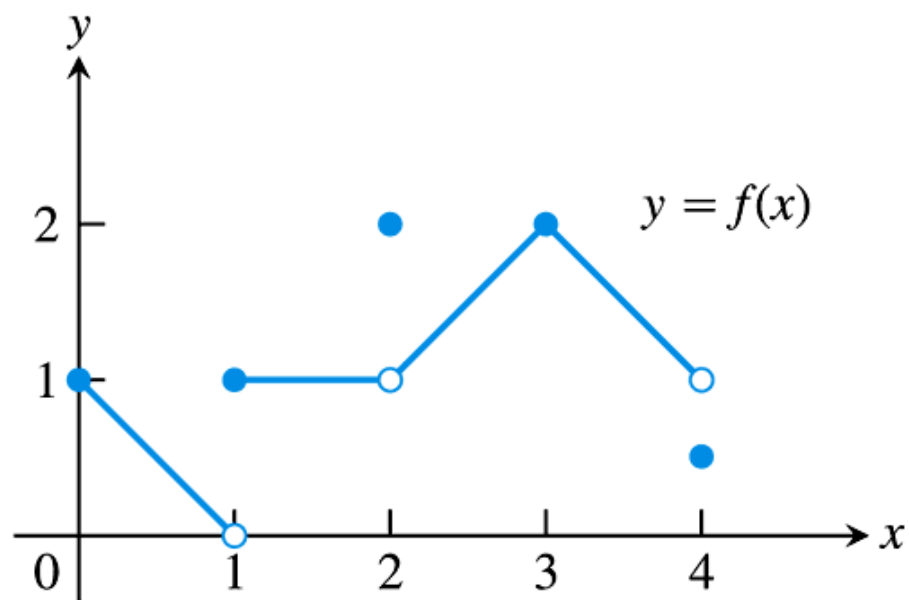
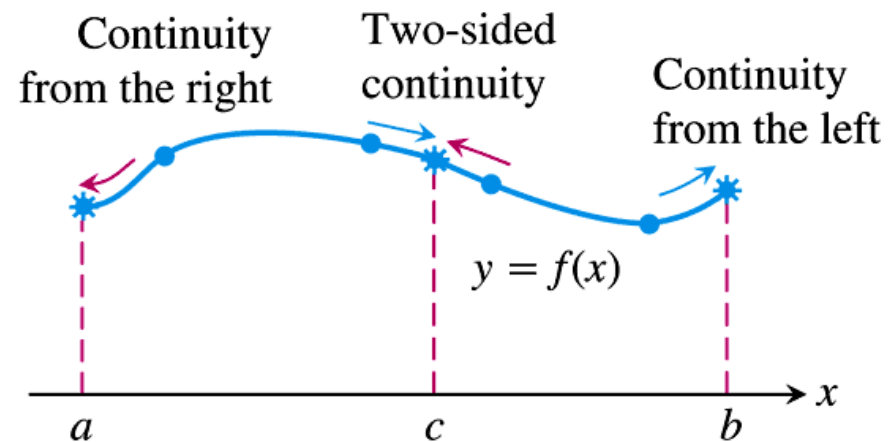


FIGURE 2.50 The function is continuous on $[0, 4]$ except at $x = 1$, $x = 2$, and $x = 4$ (Example 1).



Definitie van continuïteit in een punt c

- 1) In een inwendig punt: Een functie $f(x)$ is continu in een inwendig punt c van haar domein als:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

- 2) In een eindpunt: Een functie $f(x)$ is continu in een linkereindpunt a of in een rechteindpunt b van haar domein als:

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b)$$

NB: We zeggen dat f rechtscontinu is in a en linkscontinu in b

Continuïteitstest

Een functie $f(x)$ is continu in c dan en slechts dan aan de volgende drie voorwaarden voldaan is:

- 1) $f(c)$ bestaat (dwz c behoort tot het domein van f)
- 2) de limiet van f in c bestaat
- 3) deze limiet is gelijk aan de functiewaarde

Indien c een randpunt is of indien we spreken van rechts of linkscontinuïteit dan moeten we in het bovenstaande de desbetreffende ééNZijdige limiet gebruiken

f is discontinu in c indien f niet continu is in c .
We noemen c dan een discontinuïteitspunt

VB: Ga na waar de volgende functies continu zijn

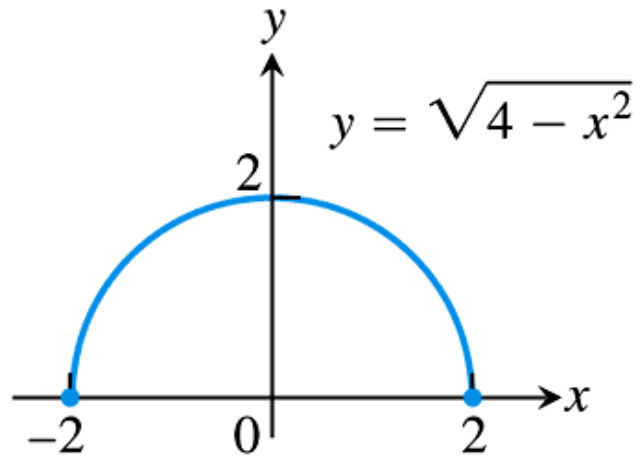


FIGURE 2.52 A function that is continuous at every domain point (Example 2).

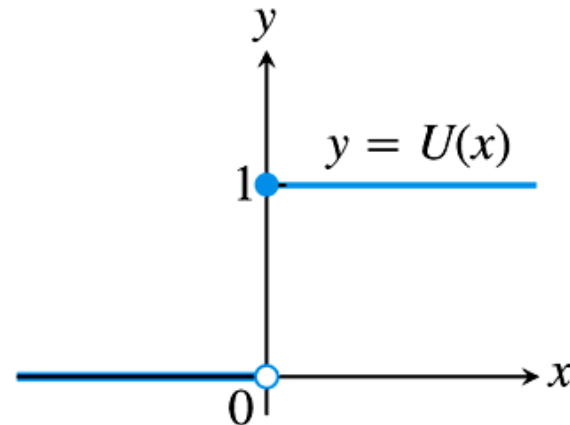


FIGURE 2.53 A function that is right-continuous, but not left-continuous, at the origin. It has a jump discontinuity there (Example 3).

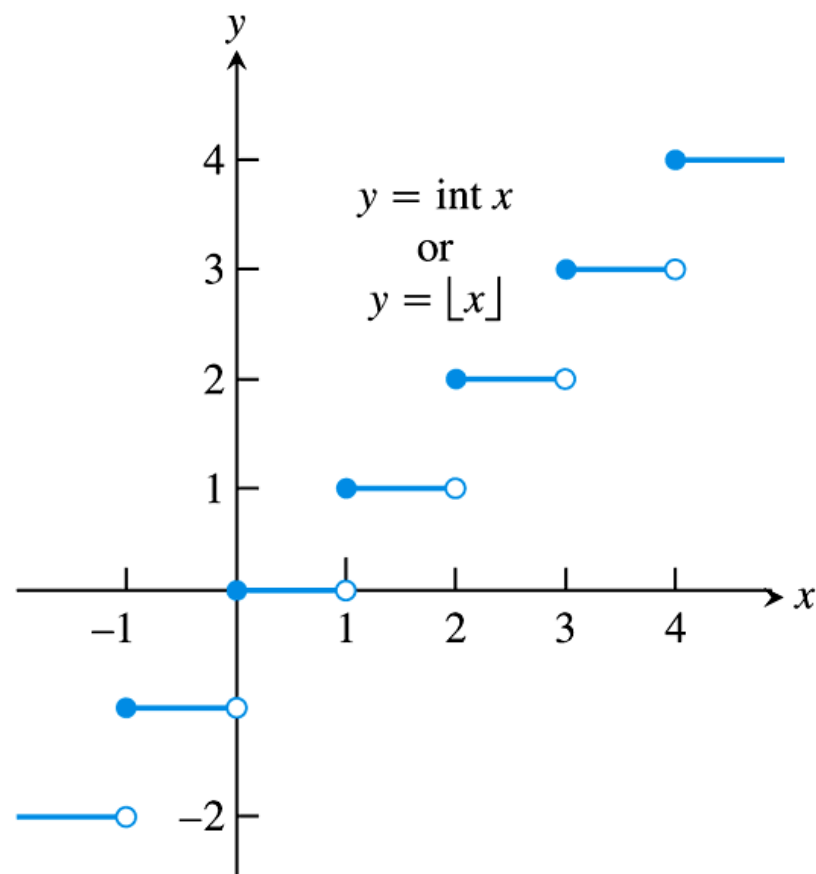


FIGURE 2.54 The greatest integer function is continuous at every noninteger point. It is right-continuous, but not left-continuous, at every integer point (Example 4).

Soorten discontinuïteit in het punt $x=0$

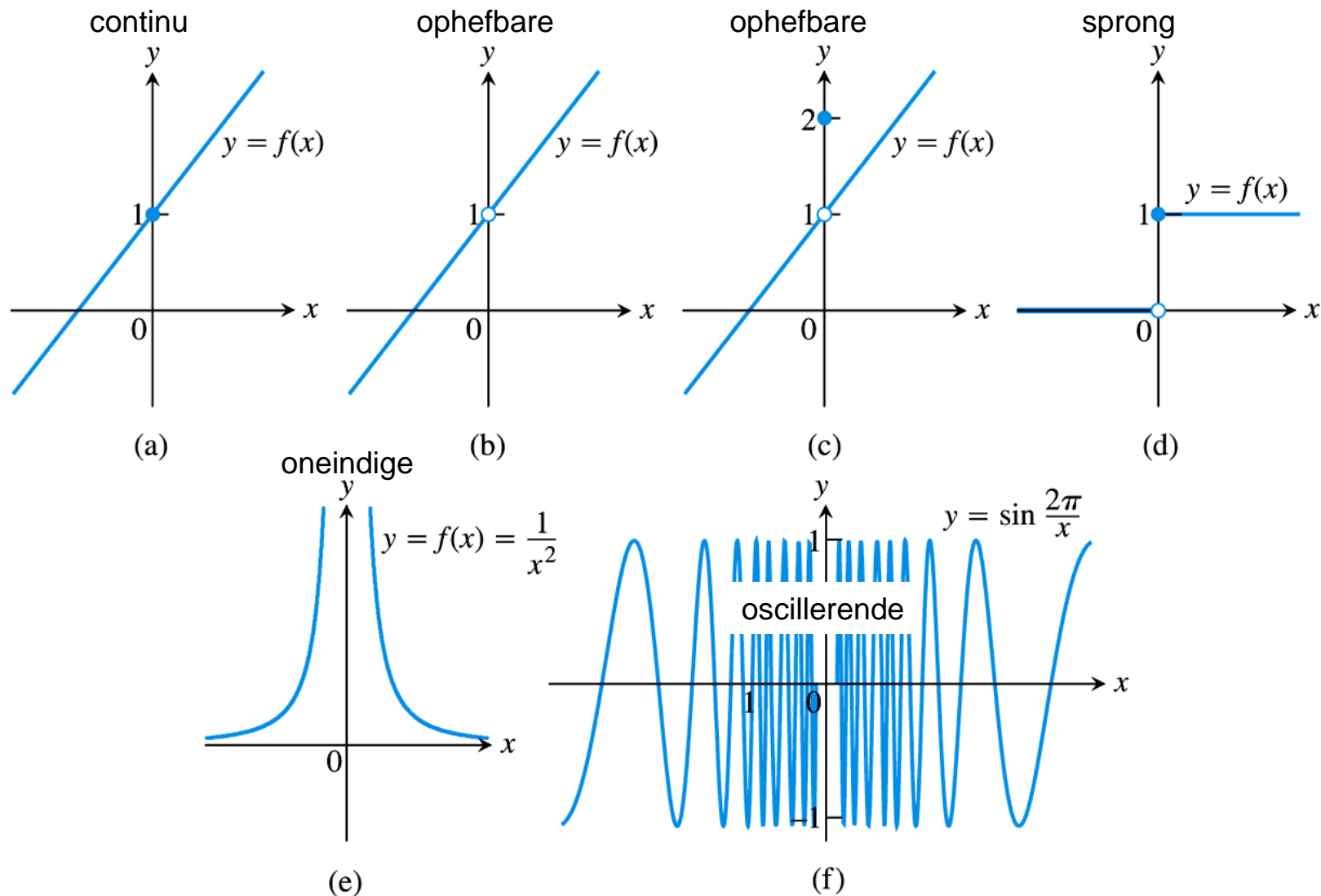


FIGURE 2.55 The function in (a) is continuous at $x = 0$; the functions in (b) through (f) are not.

1. Een functie f is continu in een interval $\leftrightarrow f$ is continu in elk punt van het interval

2. f is een continue functie indien f continu is in elk punt van haar domein

Vbn: constante functie: $f(x) = c$

identiteitsfunctie: $f(x) = x$

de functie $f(x) = 1/x$

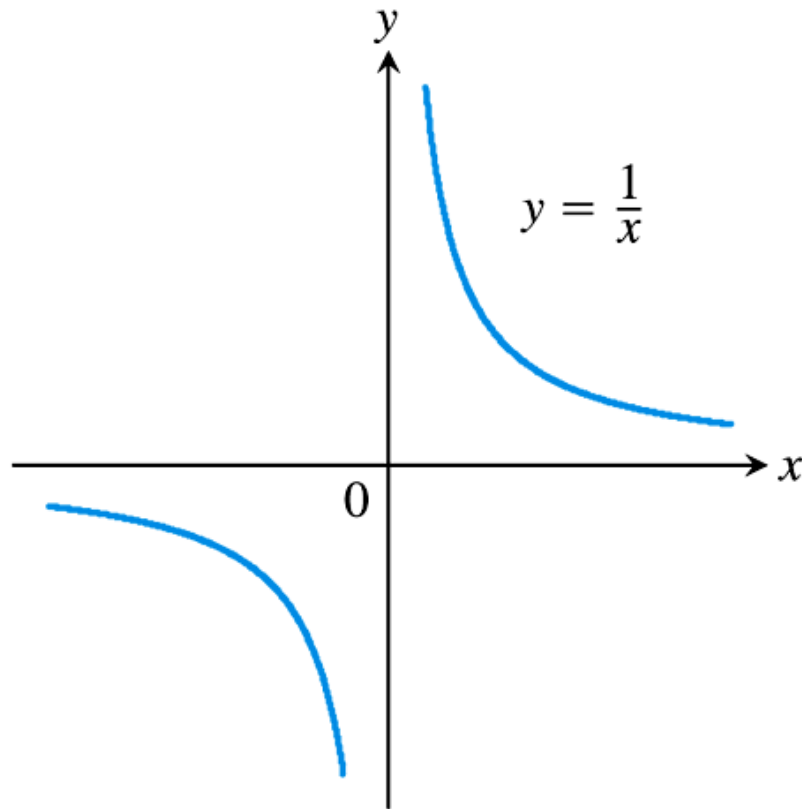


FIGURE 2.56 The function $y = 1/x$ is

THEOREM 9 Properties of Continuous Functions

If the functions f and g are continuous at $x = c$, then the following combinations are continuous at $x = c$.

1. *Sums:* $f + g$
2. *Differences:* $f - g$
3. *Products:* $f \cdot g$
4. *Constant multiples:* $k \cdot f$, for any number k
5. *Quotients:* f/g provided $g(c) \neq 0$
6. *Powers:* $f^{r/s}$, provided it is defined on an open interval containing c , where r and s are integers

Veeltermfuncties en rationale functies zijn continu

De absolute waarde functie : $f(x) = |x|$ is continu

De samenstelling van continue functies

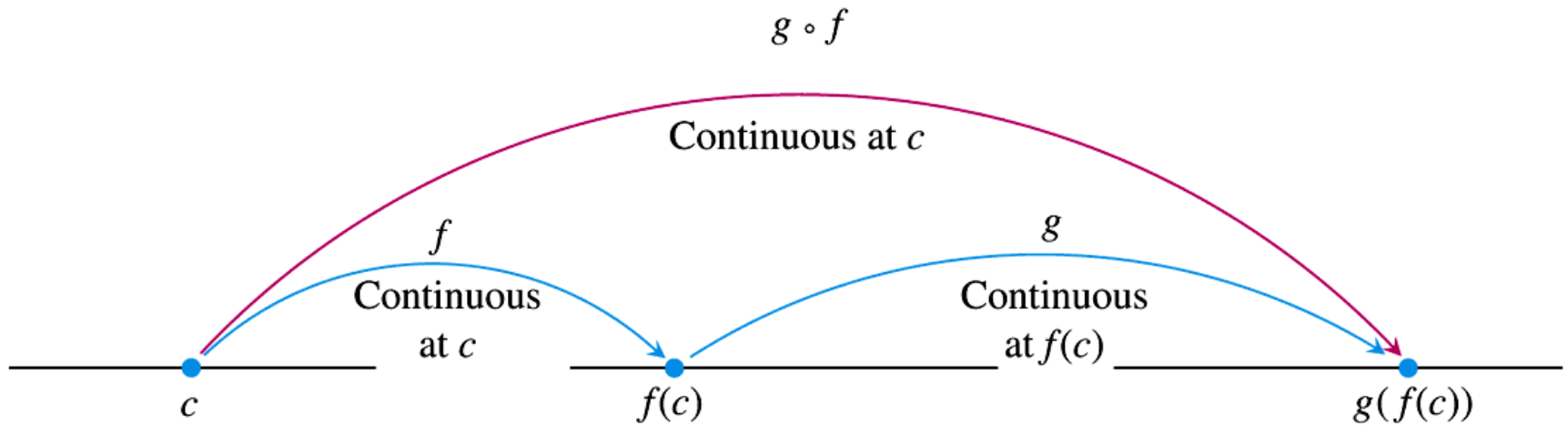


FIGURE 2.57 Composites of continuous functions are continuous.

f continu in c en g continu in $f(c)$, dan is de samengestelde functie $g \circ f$ continu in c

Voorbeelden van continue functies:

$$y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$$

$$y = \left| \frac{x-2}{x^2-2} \right|$$

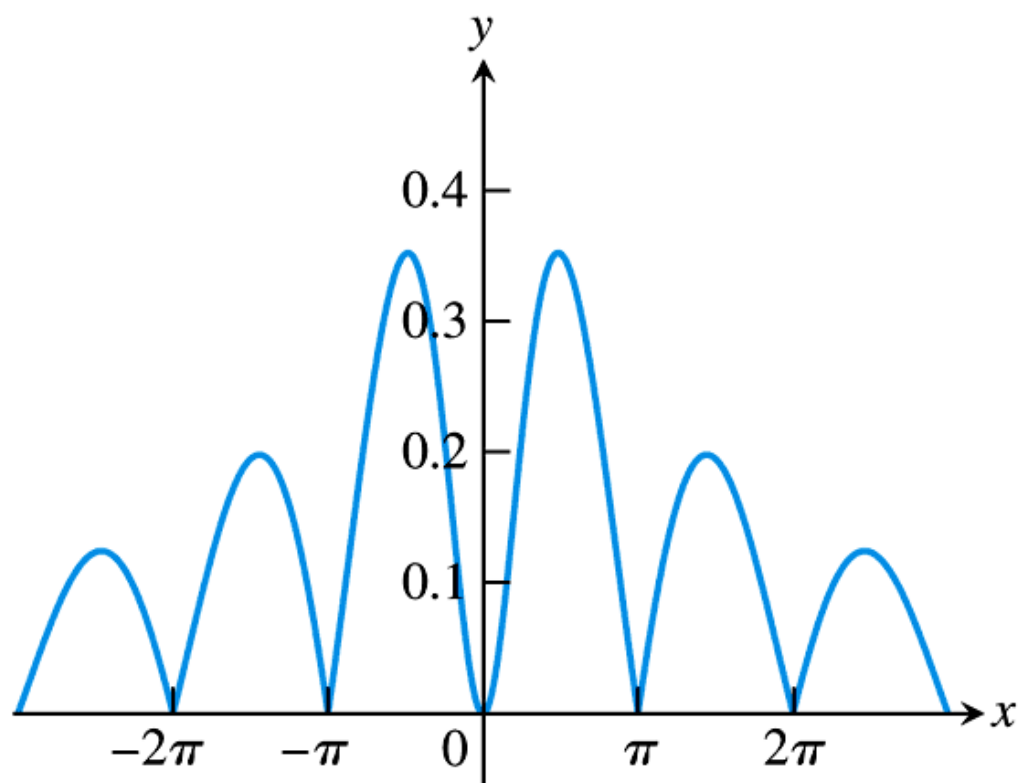


FIGURE 2.58 The graph suggests that $y = |(x \sin x)/(x^2 + 2)|$ is continuous (Example 8d).

De continue uitbreiding van een functie

Indien $f(c)$ niet bestaat maar $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ dan kunnen we een nieuwe functie F definiëren met

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{voor } x \neq c \\ L & \text{voor } x = c \end{cases}$$

F is continu in c . We noemen F de continue uitbreiding van f in c .

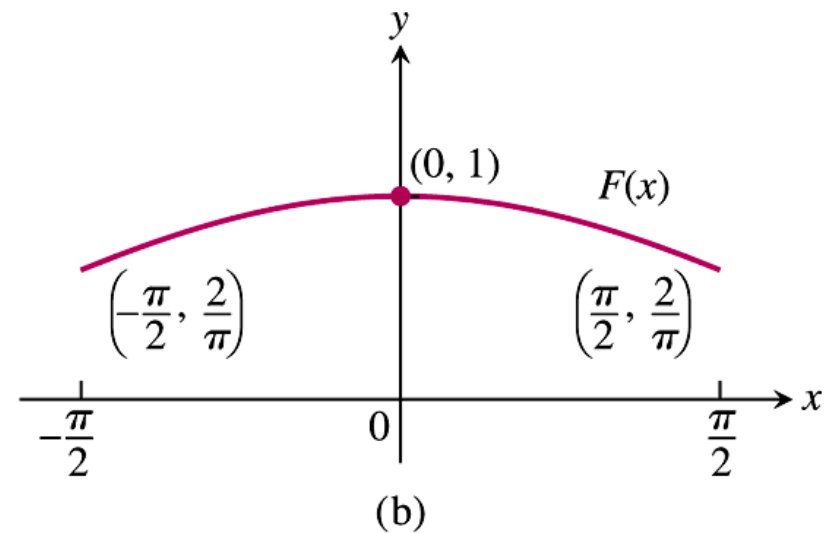
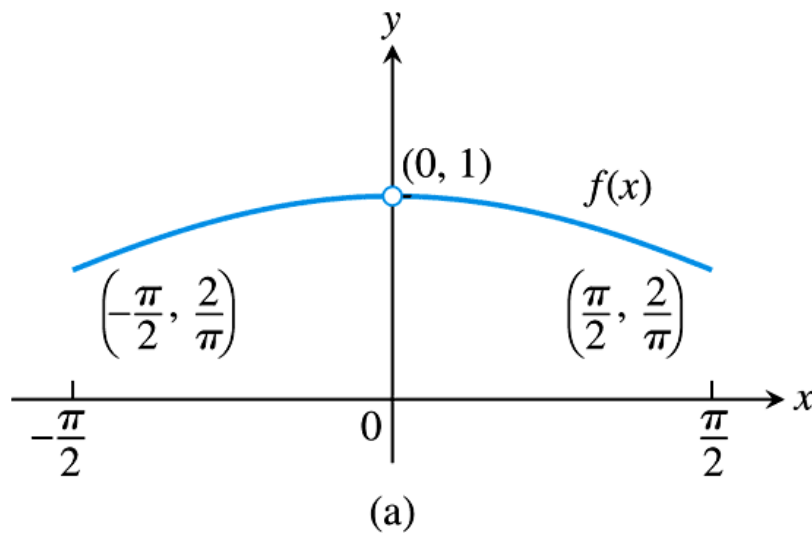
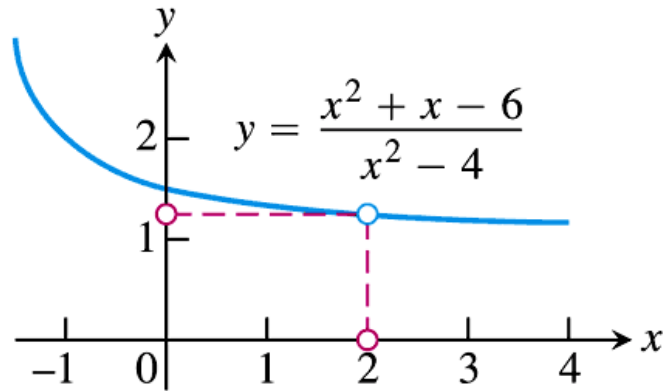
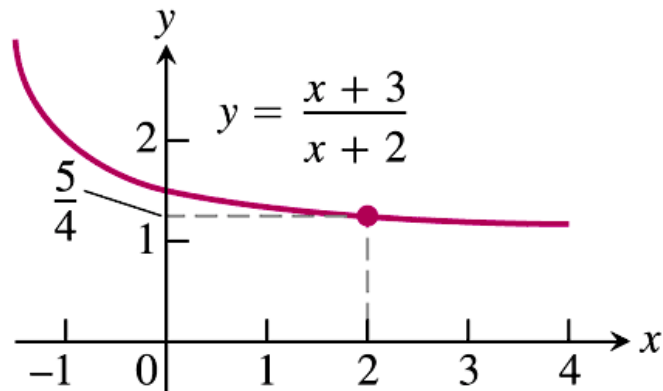


FIGURE 2.59 The graph (a) of $f(x) = (\sin x)/x$ for $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ does not include the point $(0, 1)$ because the function is not defined at $x = 0$. (b) We can remove the discontinuity from the graph by defining the new function $F(x)$ with $F(0) = 1$ and $F(x) = f(x)$ everywhere else. Note that $F(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Vb: De rode functie is de continue uitbreiding van de blauwe



(a)

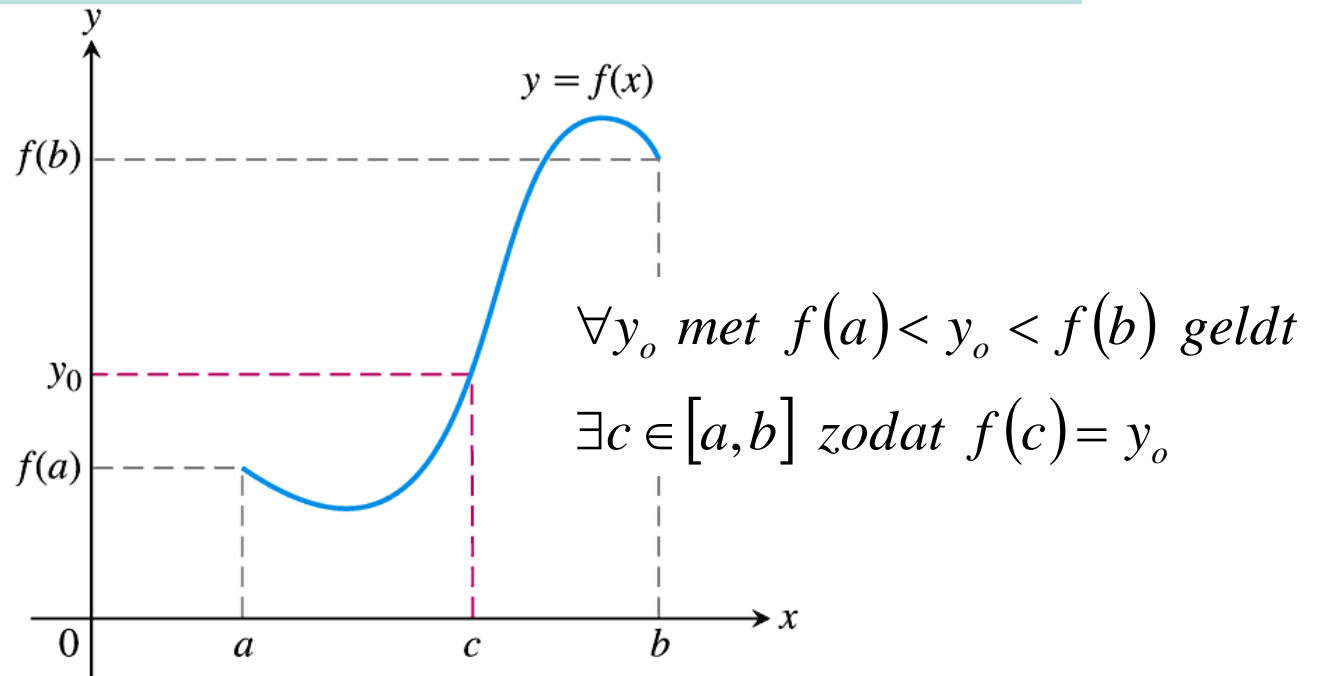


(b)

FIGURE 2.60 (a) The graph of $f(x)$ and (b) the graph of its continuous extension $F(x)$ (Example 9).

De tussenwaardestelling voor continue functies

Een functie $y = f(x)$, die continu is op een gesloten interval $[a, b]$ neemt op dit interval elke waarde aan tussen $f(a)$ en $f(b)$



De continuïteitseis in de vorige stelling is cruciaal !

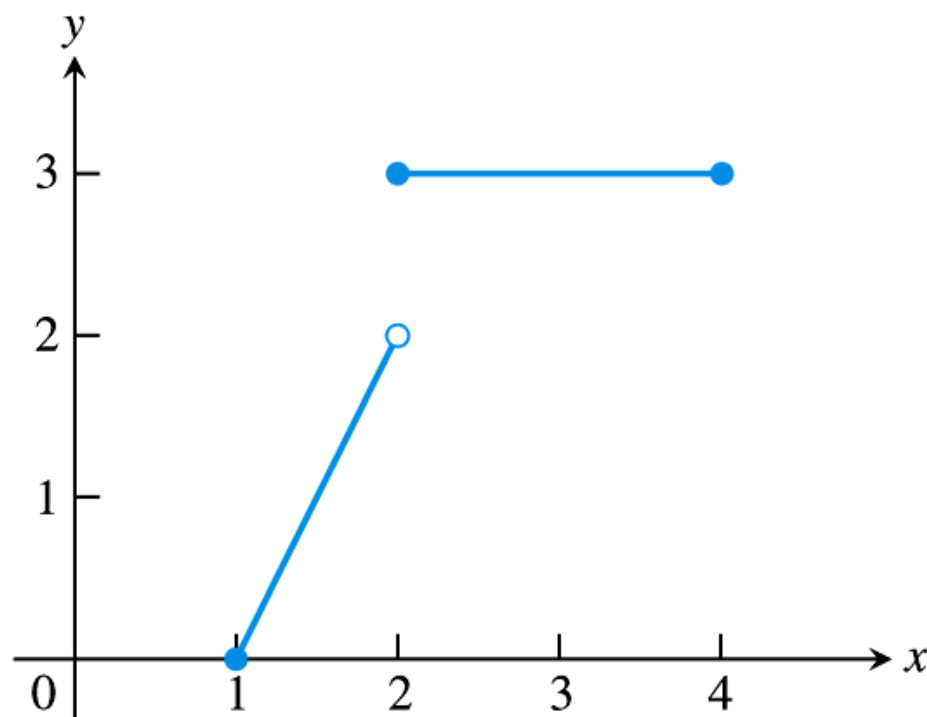
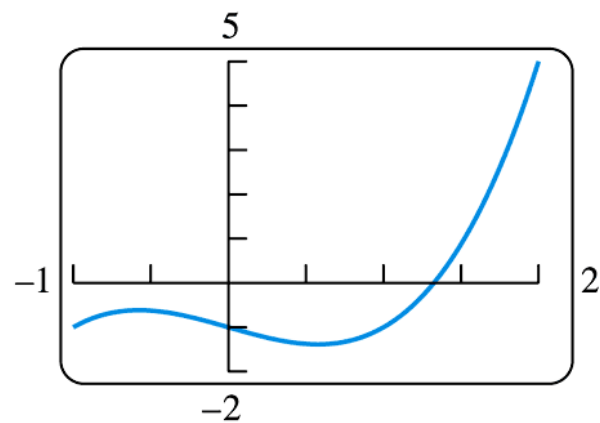


FIGURE 2.61 The function

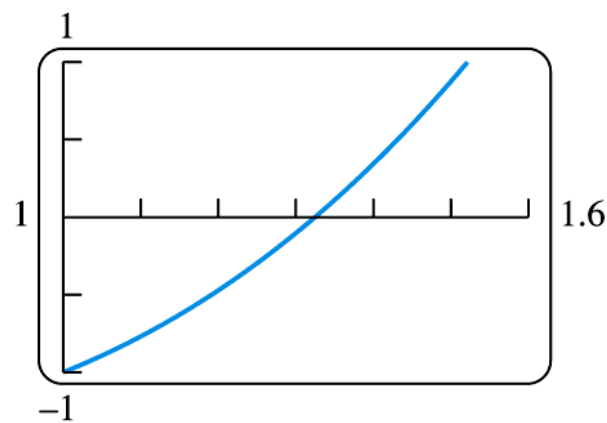
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 1 \leq x < 2 \\ 3, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

does not take on all values between $f(1) = 0$ and $f(4) = 3$; it misses all the values between 2 and 3.

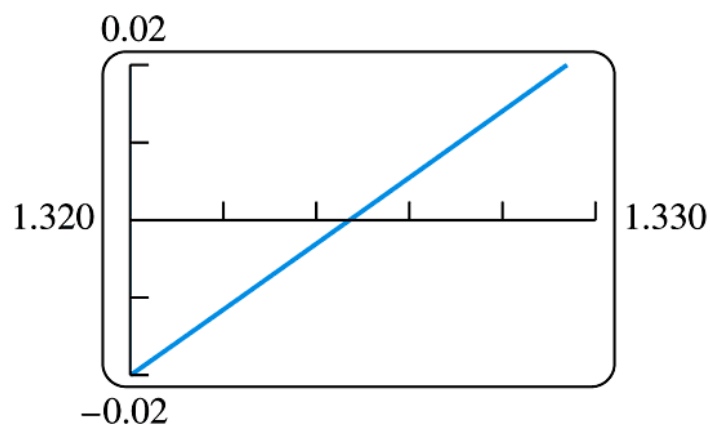
Toepassing: Het zoeken van nulpunten



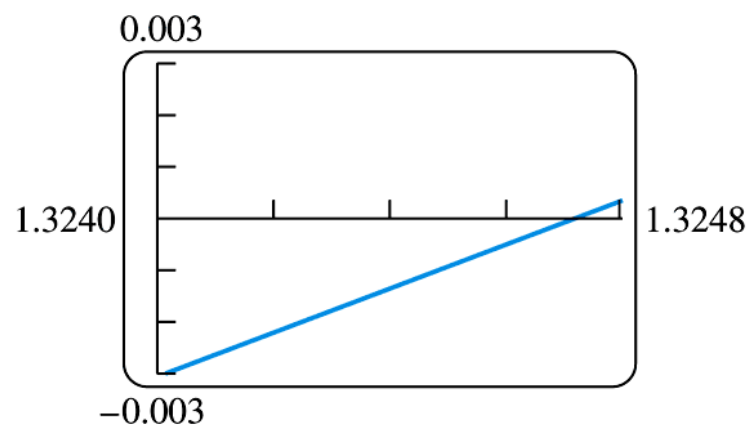
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 2.62 Zooming in on a zero of the function $f(x) = x^3 - x - 1$. The zero is near $x = 1.3247$.