Oplossingen Oefeningen Grondslagen 1: Predikaatlogica: Semantiek

November 13, 2013

Oefening 54

a) Voorbeeld: $D = (\mathbb{N}, \{\}, \{=\})$ met $I(A_1^2 == \text{en } I(a_1) = 0$

b) Voorbeeld: $D = (\{$ wagens$\}, \{$aaneenschakeling, mix goede stukken$\}, \{$rijdt sneller dan, maakt meer botsingen dan$\})$ met $I(f_1^2) =$ mix goede stukken, $I(f_2^2) =$ aaneenschakeling, $I(A_1^2) =$ rijdt sneller dan, $I(A_2^2) =$ maakt meer botsingen

Oefening 55

a) $V_{\mathbb{N},b}(f_1^2(z, f_2^2(x, f_1^2(y, f_1^1(y)))))$

$= I(f_1^2)(V_{\mathbb{N},b}(z), V_{\mathbb{N},b}(f_2^2(x, f_1^2(y, f_1^1(y)))))$

$= +(b(z), I(f_2^2)(V_{\mathbb{N},b}(x), V_{\mathbb{N},b}(f_1^2(y, f_1^1(y)))))$

$= +(16, *(b(x), I(f_1^2)(V_{\mathbb{N},b}(y), V_{\mathbb{N},b}(f_1^1(y)))))$

$= +(16, *(4, +(b(y), I(f_1^1)(V_{\mathbb{N},b}(y)))))$

$= +(16, *(4, +(5, (\lambda x.x + 1)(b(y)))))$

$= +(16, *(4, +(5, (\lambda x.x + 1)(5))))$

$= +(16, *(4, +(5, 6))) = +(16, 44) = 60$

b) Het model is niet krachtig genoeg om deze formule te kunnen waarderen. De interpretatie van A_1^1 ontbreekt.

c) $V_{\mathbb{N},b}(\forall x(A_1^2(f_1^2(z, x), z) \to \forall x(A_1^2(y, f_2^2(x, z))))) = 1$

$\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N} : V_{\mathbb{N},b[x\to d]}(A_1^2(f_1^2(z, x), z) \to \forall x(A_1^2(y, f_2^2(x, z)))) = 1$

$\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N} : (V_{\mathbb{N},b[x\to d]}(A_1^2(f_1^2(z, x), z)) = 0 \text{ of } V_{\mathbb{N},b[x\to d]}(\forall x(A_1^2(y, f_2^2(x, z)))) = 1)$

$\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N} : (16 + d \neq 16 \text{ of } V_{\mathbb{N},b[x\to d]}\forall x(A_1^2(y, f_2^2(x, z)))) = 1)$

$\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N} : (16 + d \neq 16 \text{ of } \forall e \in \mathbb{N} : V_{\mathbb{N},b[x\to d][x\to e]}(A_1^2(y, f_2^2(x, z)))) = 1)$

$\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N} : (16 + d \neq 16 \text{ of } \forall e \in \mathbb{N} : 5 = e * 16)$

Beide vergelijkingen zijn vals in het domein, bijgevolg geldt:

$V_{\mathbb{N},b}(\forall x(A_1^2(f_1^2(z, x), z) \to \forall x(A_1^2(y, f_2^2(x, z))))) = 0$

Oefening 56

a) Kies $b(x_1) = b(x_3), b(x_2) = 2$ dan $\mathbb{N}, b \models \varphi$

   Kies $b(x_1) = 0, b(x_2) = b(x_3) = 1$ dan $\mathbb{N}, b \not\models \varphi$

b) Kies $b(x_1) = 2, b(x_2) = 6, b(x_3) = \textit{willekeurig}$ dan $\mathbb{N}, b \models \varphi$

   Kies $b(x_1) = 2, b(x_2) = 2, b(x_3) = 5$ dan $\mathbb{N}, b \not\models \varphi$

c) Kies $b(x_1) = b(x_2) = 1$ dan $\mathbb{N}, b \models \varphi$

   We kunnen geen bedeling b vinden zodat $\mathbb{N}, b \not\models \varphi$

d) We kunnen geen bedeling b vinden zodat $\mathbb{N}, b \models \varphi$

   Voor elke bedeling b geldt dus $\mathbb{N}, b \not\models \varphi$

Oefening 57

a) Geen model, deze formule heeft zelfs geen modellen

b) Elk model is een model van deze formule

c) Geen model, de waarheid is afhankelijk van de keuze van de bedeling b

Oefening 58

We gebruiken de volgende bewering $V_{\mathbb{N},b}[t/x]t' = V_{\mathbb{N},b[x \to V_{\mathbb{N},b}(t)]}(t')$

Eerste manier: doe eerste de substitutie

$V_{\mathbb{N},b}([f_1^2(x, f_2^2(a_1, x))/x] f_2^2(f_1^2(x, a_1), f_2^2(x, y)))$

$= V_{\mathbb{N},b}(f_2^2(f_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a_1, x)), a_1), f_2^2(f_1^2(x, f_2^2(a_1, x)), y)))$

$= ...$

$= 267$

Tweede manier: werkt eerst de bedeling uit

$V_{\mathbb{N},b}(t) = V_{\mathbb{N},b}(f_1^2(x, f_2^2(a_1, x))) = 14$

Neem $b' = b[x \to 14]$, dan is

$V_{\mathbb{N},b'}(t') = V_{\mathbb{N},b'}(f_2^2(f_1^2(x, a_1), f_2^2(x, y)))$

$= ...$

$= 267$

Oefening 59

a) Neen. Neem $D = \mathbb{N}$ en $I(R) =$ is het product van priemgetallen

b) Neen. Deze formule is alleen waar voor symmetrische relaties

c) Ja. Deze formule is waar in ieder model

d) Ja. Want $\forall x(R(x) \land A(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \Rightarrow \nexists x \neg A(x)$