Oplossingen Oefeningen Grondslagen 1: Propositielogica: Afleidingen

Oefening 38

Bewijs met natuurlijke deductie:

a) $p \to (q \to r) \vdash q \to (p \to r)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{q} \qquad \dfrac{\overset{(1)}{p} \quad p \to (q \to r)}{q \to r}\to \mathrm{E}}{r}\to \mathrm{E}}{p \to r}\to \mathrm{I}[-1]}{q \to (p \to r)}\to \mathrm{I}[-2]$$

b) $(p \wedge q) \to r \vdash p \to (q \to r)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{p} \quad \overset{(2)}{q}}{p \wedge q}\wedge \mathrm{I} \qquad (p \wedge q) \to r}{r}\to \mathrm{E}}{q \to r}\to \mathrm{I}[-2]}{p \to (q \to r)}\to \mathrm{I}[-1]$$

c) $\{p \to q, p \to r\} \vdash p \to (q \wedge r)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{p} \quad p \to r}{r}\to \mathrm{E} \qquad \dfrac{\overset{(1)}{p} \quad p \to q}{q}\to \mathrm{E}}{q \wedge r}\wedge \mathrm{I}}{p \to (q \wedge r)}\to \mathrm{I}[-1]$$

c') $p \to (q \wedge r) \vdash p \to q$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{p} \quad p \to (q \wedge r)}{q \wedge r}\to \mathrm{E}}{q}\wedge \mathrm{E}}{p \to q}\to \mathrm{I}[-1]$$

c”) $p \to (q \wedge r) \vdash p \to r$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{p} \qquad p \to (q \wedge r)}{q \wedge r}\ \to \mathrm{E}}{r}\ \wedge\mathrm{E}}{p \to r}\ \to \mathrm{I}[-1]$$

Oefening 39

Bewijs met natuurlijke deductie:

a) $p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$$\dfrac{p \vee (q \wedge r) \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{p}}{p \vee q}\ \vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{\overset{(1)}{p}}{p \vee r}\ \vee\mathrm{I}}{(p \vee q) \wedge (p \vee r)}\ \wedge\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{q \wedge r}}{q}\ \wedge\mathrm{E}}{p \vee q}\ \vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{q \wedge r}}{r}\ \wedge\mathrm{E}}{p \vee r}\ \vee\mathrm{I}}{(p \vee q) \wedge (p \vee r)}\ \wedge\mathrm{I}}{(p \vee q) \wedge (p \vee r)}\ \vee\mathrm{E}[-1,-2]$$

$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$

$$\dfrac{\dfrac{(p \vee q) \wedge (p \vee r)}{(p \vee q)}\ \wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{\overset{(1)}{p}}{p \vee (q \wedge r)}\ \vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{(p \vee q) \wedge (p \vee r)}{(p \vee r)}\ \wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{\overset{(2)}{p}}{p \vee (q \wedge r)}\ \vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{q} \quad \overset{(4)}{r}}{q \wedge r}\ \wedge\mathrm{I}}{p \vee (q \wedge r)}\ \vee\mathrm{I}}{p \vee (q \wedge r)}\ \vee\mathrm{E}[-3,-4]}{p \vee (q \wedge r)}\ \vee\mathrm{E}[-1,-2]$$

b) $p \vee (p \wedge q) \vdash p$

$$\dfrac{p \vee (p \wedge q) \qquad \overset{(1)}{p} \qquad \dfrac{\overset{(2)}{p \wedge q}}{p}\ \wedge\mathrm{E}}{p}\ \vee\mathrm{E}[-1,-2]$$

$p \vdash p \vee (p \wedge q)$

$$\dfrac{p}{p \vee (p \wedge q)}\ \vee\mathrm{I}$$

Oefening 40

Bewijs met natuurlijke deductie:

a) $\vdash p \to \neg\neg p$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{p} \qquad \overset{(2)}{\neg p}}{\neg\neg p}\ \neg \mathrm{I}[-2]}{p \to \neg\neg p}\ \to \mathrm{I}[-1]$$

b) $\neg p \vee q \vdash p \to q$

$$\dfrac{\dfrac{\neg p \vee q \qquad \dfrac{\overset{(2)}{\neg p} \qquad \overset{(1)}{p}}{q}\ \neg \mathrm{E} \qquad \overset{(3)}{q}}{q}\ \vee \mathrm{E}[-2,-3]}{p \to q}\ \to \mathrm{I}[-1]$$

c) $\neg p \to \neg q \vdash q \to p$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p \to \neg q \qquad \overset{(2)}{\neg p}}{\neg q}\ \to \mathrm{E} \qquad \overset{(1)}{q}}{p}\ \neg \mathrm{E} * [-2]}{q \to p}\ \to \mathrm{I}[-1]$$

Oefening 41

Bewijs met natuurlijke deductie:

a) $\{\varphi, \psi, \varphi \to \neg\psi\} \vdash \psi$ zonder derivatiestappen

$\{\varphi, \psi, \varphi \to \neg\psi\} \vdash \neg\psi$ met

$$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \neg\psi}{\neg\psi} \to \mathrm{E}$$

b) $\{\neg\rho \to \psi, \rho \to \sigma, \neg\psi, \neg\sigma\} \vdash \neg\psi$ zonder derivatiestappen

$\{\neg\rho \to \psi, \rho \to \sigma, \neg\psi, \neg\sigma\} \vdash \psi$ met

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\rho \to \sigma \quad \overset{(1)}{\rho}}{\sigma} \to \mathrm{E} \quad \neg\sigma}{\neg\rho} \neg\mathrm{I}[-1] \quad \neg\rho \to \psi}{\psi} \to \mathrm{E}$$

Oefening 42

Toon aan: Een verzameling Γ is syntactisch consistent als en slechts als Γ is semantisch consistent.

$\Rightarrow$
- Stel Γ is syntactisch consistent.
- Dus $\exists\varphi$ zodat $\Gamma \vdash \varphi$
- Dus $\exists\varphi$ zodat $\Gamma \models \varphi$
- Dus $\exists$ waardering w met $w(\Gamma) = 1$ en $w(\varphi) = 1$
- Dus $\exists$ waardering w met $w(\Gamma) = 1$
- Dus Γ is semantisch consistent

$\Leftarrow$
- Stel Γ is semantisch consistent.
- Stel Γ is syntactisch inconsistent.
- Dus $\exists\varphi$ zodat $\Gamma \vdash \varphi$ en $\Gamma \vdash \neg\varphi$
- Dus $\exists\varphi$ zodat $\Gamma \models \varphi$ en $\Gamma \models \neg\varphi$
- Dus $\forall$ waardering w met $w(\Gamma) = 1$ geldt $w(\varphi) = 1$ en $w(\varphi) = 0$. Zo'n waardering bestaat zeker want Γ is semantisch consistent. Contradictie, dus Γ moet syntactisch consistent zijn.