

# BACHELOR THESIS

Wirtschaftswissenschaften B.Sc.

---

## Zeitreihenmodelle mit stochastischer Volatilität

---

Autor

Nick Kirchner  
Falkensteiner Straße 60  
60322 Frankfurt am Main  
kirnickkir@outlook.com  
Matrikelnr.: 6104793

Betreuer

Prof. Dr. Michael Webá  
Chair of Statistics and  
Econometric Methods  
Johann Wolfgang Goethe  
Universität

21. Juli 2021



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>8</b>
<b>I</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Grundlegende Konzepte stochastischer Prozesse</b>	<b>11</b>
2.1	Stochastische Prozesse . . . . .	11
2.2	Stationarität . . . . .	12
2.3	Weißes Rauschen & Martingaldifferenz . . . . .	12
2.4	Autokorrelations- und partielle Autokorrelationsfunktion . . . . .	13
2.5	Der Lag Operator . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Lineare Zeitreihenmodelle</b>	<b>15</b>
3.1	Lineare Prozesse . . . . .	15
3.2	Moving Average Prozesse . . . . .	15
3.3	Autoregressive Modelle . . . . .	16
3.4	ARMA Modelle . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Zeitreihenmodelle mit stochastischer Volatilität</b>	<b>21</b>
4.1	ARCH Modelle . . . . .	21
4.2	GARCH Modell . . . . .	22
4.3	Erweiterungen von GARCH-Modellen . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Modellkonstruktion und Tests</b>	<b>25</b>
<b>II</b>	<b>Praktische Anwendung</b>	<b>28</b>
<b>6</b>	<b>Methoden der Volatilitätsvorhersage</b>	<b>29</b>
6.1	Anwendung und Daten . . . . .	29
6.2	Methodologie . . . . .	30
<b>7</b>	<b>Volatilitätsvorhersage und Volatility Targeting</b>	<b>33</b>
7.1	Prognosenprozess der Zeitreihenmodelle . . . . .	33
7.2	Ergebnisse der Anwendung . . . . .	39
<b>8</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>44</b>
<b>9</b>	<b>Anhang</b>	<b>46</b>



# Abbildungsverzeichnis

3.1	Stationaritätsdreieck eines AR(2) Prozesses . . . . .	19
7.1	Die Autokorrelation (links) und QQ-Diagramm (rechts) der Residuen des GARCH Modells . . . . .	34
7.2	Die Autokorrelation (links) und QQ-Diagramm (rechts) der Residuen des ARMA Modells . . . . .	37
7.3	Die Autokorrelation (links) und QQ-Diagramm (rechts) der Residuen des GARCH Modells der ARMA Residuen . . . . .	38
7.4	Die Renditeverteilungen der Volatility Targeting Strategie auf Basis verschiedener Volatilitätsprognosemodelle . . . . .	40
7.5	QQ-Diagramm der Renditen der Strategie für die Buy&Hold und EGARCH(2,2,1) Volatilitätsprognosen . . . . .	40
7.6	Kumulative Rendite von drei Strategien . . . . .	41
7.7	Rollierte annualisierte Volatilität der letzten 2 Monate (=52 Tage) . . . . .	42
7.8	Drawdown der drei Strategien (links) und deren Exposure (rechts) . . . . .	43
9.1	Realisationen des Weißen Rauschens (links) und die Autokorrelation (rechts) . . . . .	46
9.2	Realisationen(1), die Autokorrelationen (2) und die partiellen Autokorrelationen (3) eines MA(1) Prozesses . . . . .	47
9.3	Realisationen(1), die Autokorrelationen (2) und die partiellen Autokorrelationen (3) eines AR(1) Prozesses . . . . .	47
9.4	Realisationen(1), die Autokorrelationen (2) und die partiellen Autokorrelationen (3) eines ARMA(1) Prozesses . . . . .	48
9.5	Die Autokorrelation (links) und QQ-Diagramm (rechts) der Residuen des EGARCH Modells . . . . .	50
9.6	Die Renditeverteilungen der Volatility Targeting Strategie auf Basis der restlichen Volatilitätsprognosen . . . . .	53
9.7	QQ-Diagramm der Renditen der Volatility Targeting Strategie auf Basis der restlichen Volatilitätsprognosen . . . . .	54
9.8	Rollierte annualisierte Volatilität der letzten 2 Monate (=52 Tage) . . . . .	55
9.9	Drawdowndiagramm der Volatility Targeting Strategie auf Basis der aller Volatilitätsprognosen . . . . .	56



# Tabellenverzeichnis

6.1	Ergebnisse des Augmented Dickey Fuller Tests . . . . .	30
7.1	Ergebnisse des BIC für verschiedene Modellordnungen des GARCH Prozesses	33
7.2	Parameterschätzung und Signifikanztest des GARCH Prozesses . . . . .	33
7.3	Ergebnisse des Ljung-Box und Box-Pierce Test der GARCH Residuen . . .	34
7.4	Parameterschätzung und Signifikanztest des EGARCH Prozesses . . . . .	35
7.5	Ergebnisse des BIC für verschiedene Modellordnungen des ARMA Prozesses	36
7.6	Parameterschätzung und Signifikanztest des ARMA Prozesses . . . . .	36
7.7	Ergebnisse des Ljung-Box und Box-Pierce Test der ARMA Residuen . . . .	37
7.8	Ergebnisse des Engle's Tests der ARMA Residuen . . . . .	37
7.9	Parameterschätzung und Signifikanztest des GARCH Prozesses auf den ARMA Residuen . . . . .	38
7.10	Statistische Momente der Anlagestrategien auf Basis täglicher Renditen . .	39
7.11	Statistische Renditemerkmale der Anlagestrategien . . . . .	42
9.1	Kritische Werte der Dickey-Fuller Verteilung mit Fehlerwahrscheinlichkeit $\alpha$	49
9.2	Kritische Werte der $\chi^2$ Verteilung mit Fehlerwahrscheinlichkeit $\alpha$ . . . . .	49
9.3	Ergebnisse des BIC für verschiedene Modellordnungen des EGARCH Pro- zesses . . . . .	50
9.4	Ergebnisse des Ljung-Box und Box-Pierce Test des EGARCH Prozesses . .	50
9.5	Ergebnisse des BIC für verschiedene Modellordnungen des GARCH Pro- zesses auf den ARMA Residuen . . . . .	51
9.6	Ergebnisse des Ljung-Box und Box-Pierce Test des GARCH Prozesses auf den ARMA Residuen . . . . .	51
9.7	Volatilitäten der Rollierte annualisierten Volatilitäten der letzten 2 Monate (=52 Tage) . . . . .	55
9.8	Verwendete Entwicklungsumgebungen und -pakete . . . . .	56





# Kapitel 1

## Einführung

Diese Arbeit stellt verschiedene Zeitreihenmodelle vor und wendet jene mit einem Fokus auf Prozesse mit stochastischer Volatilität an. Dabei werden zunächst Grundlagen der Zeitreihenanalyse geschaffen, die später verwendeten Modelle definiert und einige wichtige Eigenschaften benannt. Es wird untersucht, wie gut ein Modell in der Lage ist einen gegebenen Datensatz zu beschreiben, Aussagen über zukünftige Realisationen des Marktes zu treffen sowie welche ökonomischen Schlüsse über Organisation und Funktionsweise eines wirtschaftlichen Marktes aus den Befunden geschlossen werden können (vgl. Franke, Härdle, Hafner 2001, S. 140). Aufgrund ihrer spezifischen Erklärungs- und Prognosekraft finden gerade bei der Modellierung von ökonomischen zeitabhängigen Realisationen Zeitreihenmodelle und insbesondere Zeitreihenmodelle mit stochastischer Volatilität für die Finanzwirtschaft Anwendung.

Nach der Einführung in die theoretischen Konzepte der Zeitreihenanalyse wird eine Anwendung der linearen Zeitreihenmodelle und der Zeitreihenmodelle mit stochastischer Volatilität behandelt, um jene genannten empirischen Fragestellungen zu illustrieren.

Dabei werden die Zeitreihenmodelle primär verwendet, um monatliche Aktienvolatilitäten des Deutschen Aktienindex (DAX) zu prognostizieren, welche verwendet werden um Investments in den DAX so zu skalieren, dass ein konstantes Volatilitätsmaß des Investments erreicht wird. Die Rahmenbedingungen für ein Aktieninvestment mit einer ex-post definierten Volatilitätsgröße wird dabei durch die Reduzierung des Investments bei einer relativ gesehen hohen prognostizierten Volatilität und einer Erhöhung des Exposures bei sinkender Volatilitätsprognose veranlasst.

Zur Nutzung dieser Strategie gibt es zwei primäre Wege, die zukünftige Volatilität zu prognostizieren. Zum einen die vom Markt angenommenen zukünftige Volatilität, welche sich aus Optionspreisen und den damit einhergehenden Impliziten Volatilitäten ergeben, die somit die Erwartung des Marktes über die zukünftige Schwankung des Basiswerts widerspiegelt. Die andere Art der Volatilitätsprognose bedient sich statistischer Modelle, welche die Informationen der Vergangenheit zur Aussage über die Zukunft nutzen. Zu dieser Methodik gehören gleitende Mittelwerte und auch Prognosen von Zeitreihenmodelle.

Diese Arbeit beschäftigt sich primär mit dem zweiten Weg und vergleicht die Ergebnisse der Modelle mit stochastischer Volatilität mit anderen historischen Modellen und der

Markterwartung über zukünftige Volatilität. Der Fokus liegt dabei auf dem Erstellungsprozess der verschiedenen Modelle und ihren empirischen Ergebnisvariationen zur Illustration der definierten theoretischen Unterschiede, der Fähigkeit der Modelle zu Prognostizierung von zukünftigen Datenpunkten und der Aussagekraft der Ergebnisse über das Verhalten von DAX-Renditen unter der Berücksichtigung von Eigenschaften der gewählten Zeitreihenmodelle.

Die Anwendung beruht dabei auf der Verwendung der Modelle mit stochastischer Volatilität, wobei die Anpassung der Aktiendaten auf die verschiedenen Modelle ausgeübt und geprüft wird sowie zur Vorhersage von zukünftigen Realisationen genutzt wird. Außerdem lässt die Anwendung den Schluss zu, dass eine Rahmenstruktur der konstanten Aktienschwankung das statistische Verhalten der Aktienrenditen verändert und eine Möglichkeit bietet, um Risiken von extremen Verlusten zu mildern. Somit kann die verwendete Volatility Targeting Strategie als eigene Anlageklasse verstanden werden, da bei der Anwendung von allen Volatilitätsprognosen eine konsistente Veränderung der Renditestruktur von Aktieninvestments beobachtet werden kann.

Durch den Vergleich von drei Modellen mit stochastischer Volatilität hat sich ergeben, dass sich kein nennenswerter Vorteil der Modellierung des Mittelwerts des GARCH Modells durch einen linearen Prozess gezeigt hat. Die Einbeziehung empirischer Beobachtungen in die Auswahl des Modells der bedingten Volatilität hingegen hat sich als vorteilhaft ergeben. Die Ergebnisse zeigen außerdem, dass die Zeitreihenmodelle mit stochastischer Volatilität zu einem signifikant besseren Ergebnis als andere Modelle, welche auf historische Realisation beruhen, kommen.

Dies ist konsistent mit den Ergebnissen vorangegangener Untersuchungen. So ist ein Befund von Pagan, Schwert (1990), dass bei der Vorhersage von Renditenvolatilitäten von Aktien bedingte Heteroskedastizität auftritt und deshalb Modelle der ARCH Familie historischen Durchschnitten vorzuziehen sind und das EGARCH Modell die stärkste Erklärungskraft hat. Außerdem fand Hallerbach (2012) heraus, dass die Anwendung von sogenanntem Volatility Targeting sowohl Rendite als auch risikoadjustierte Rendite eines Aktieninvestments erhöht. Des Weiteren kamen Hocquard, Ng, Papageorgiou (2013) zu dem Ergebnis, dass ein Rahmenprogramm der dynamischen Gewichtung von Aktieninvestments zur Glättung von Volatilität auf Basis von GARCH Prognosen als eine Art Tail-Risk Hedge zu verstehen ist und Value-at-Risk Maße für verschiedene Aktienindizes abnehmen.

# **Teil I**

## **Theoretische Grundlagen**

# Kapitel 2

## Grundlegende Konzepte stochastischer Prozesse

Zunächst werden einige grundlegende Definitionen und Konzepte stochastischer Prozesse zur Betrachtung von Zeitreihen dargestellt. Wobei Zeitreihen als zeitpunktabhängige- und geordnete, endliche Realisationen von den darunter liegenden stochastischen Prozessen zu verstehen sind und somit untersucht und eingeordnet werden können. Dabei können die Eigenschaften des stochastischen Prozesses helfen, Aussagen über die statistischen Momente und Attribute der Zeitreihe zu machen und ggf. Vorhersagen über zukünftige Datenpunkte zu tätigen (vgl. Vogel 2015, S.19).

### 2.1 Stochastische Prozesse

**Definition 1** (vgl. Hassler 2007, S. 27)

Ein univariater stochastischer Prozess  $X$  ist eine Familie von reellwertigen Zufallsvariablen  $X(t; \omega)_t \in T$  für eine Indexmenge  $T$ , wessen Realisation  $t \in T$  als Zeit zu interpretieren ist:

$$X : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t; \omega) \mapsto X(t; \omega)$$

Eine Zufallsvariable bildet hingegen von einer Ergebnismenge  $\Omega$  eines Zufallsexperiment in den reellwertigen Raum und somit die Zahlenwerte der Ereignisse der Ergebnismenge ab. Der stochastische Prozess bildet dabei das Ergebnis eines kartesischen Produktes der Ergebnismenge  $\Omega$  und der Indexmenge  $T$  in den reellwertigen Raum ab.

Ein stochastischer Prozess ist daher bei fixiertem Zeitpunkt eine Zufallsvariable abhängig von der Ergebnismenge  $\Omega$ , während bei einer festen Realisation der Ergebnismenge  $\Omega$   $\omega_0$  von einem Pfad gesprochen wird, bei dem es für jeden Zeitpunkt  $t \in T$  eine Realisation gibt und somit eine Reihe von zu Zeitpunkten korrespondierenden Datenpunkten entsteht, welche oftmals als Zeitreihe tituliert werden. Wenn dabei  $A_t \in T$  wobei  $T \in \mathbb{Z}$  gilt handelt es sich bei dem stochastischen Prozess um einen zeitdiskreten Prozess, wobei in der Realität und dieser Arbeit meist zeitdiskrete Zeitreihen betrachtet werden. In Form von täglichen Preisen des Deutschen Aktienindex (DAX) und den statistischen Momenten der Varianz der täglichen Preise.

## 2.2 Stationarität

**Definition 2** (vgl. Neusser 2006, S. 12)

Ein stochastischer Prozess  $X$  wird dann und nur dann als stationär betitelt, wenn die folgenden drei Eigenschaften zutreffen:

1.  $E(X_t) = \mu$  und  $E(X_t) < \infty$  ist konstant
2.  $Var(X_t) < \infty$  ist konstant
3.  $Cov(X_t, X_{t+h}) < \infty$  ist konstant

Es liegt eine starke Stationarität vor, wenn die Verteilungseigenschaften und statistischen Momente des stochastischen Prozesses lediglich von der zeitlichen Differenz der Komponenten des Prozesses abhängen und sich durch zeitliche Verschiebung nicht ändern. Ein schwach stationärer oder auch kovarianzstationärer genannter Prozess erfüllt dabei die drei oben genannten Eigenschaften und besitzt eine Autokorrelation  $\rho_X(h)$ :

$$\rho_X(h) = \frac{Cov(X_t, X_{t+h})}{Var(X_t)}.$$

## 2.3 Weißes Rauschen & Martingaldifferenz

**Definition 3** (vgl. Neusser 2006, S. 14)

Ein univariater stochastischer Prozess  $Z$  wird Weißes Rauschen genannt, wenn folgende Eigenschaften zutreffen:

1.  $E(Z_t) = 0$
2.  $Var(Z_t) = \sigma^2$  für  $\sigma > 0$
3.  $Cov(Z_t, Z_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^2 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}$

Das Weiße Rauschen stellt einen Grundpfeiler verschiedener Modelle der Zeitreihenanalyse dar. Es handelt sich dabei um einen schwach stationären Prozess, welcher keine Autokorrelation zwischen seinen Innovationen aufweist und als Gaußsches Weißes Rauschen bezeichnet wird, wenn die Innovationen unabhängig voneinander verteilt sind und einer Normalverteilung folgen. Es gilt dann:  $Z_t \sim IID(0, \sigma^2)$  (vgl. Neusser 2015, S.14).

**Definition 4** (vgl. Hassler 2007, S. 31)

Ein diskreter stochastischer Prozess  $Y$  wird Martingaldifferenz genannt, wenn folgende Eigenschaften zutreffen:

1.  $E(|Y_t|) < \infty$
2.  $E(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots) = 0$  für alle  $t \in T$ .

Außerdem gilt für eine Martingaldifferenz, dass  $E(Y_t) = 0$  und  $Cov(Y_t, Y_{t+h}) = 0$  für  $h > 0$  wahr ist, während für  $h = 0$  die Autokovarianz  $Cov(Y_t, Y_{t+h}) = Var(Y_t)$  entspricht und von der Zeit abhängig sein kann und somit keine allgemeine Stationarität vorliegt.

## 2.4 Autokorrelations- und partielle Autokorrelationsfunktion

Autokorrelationsfunktionen sind ein Instrument zur genaueren Interpretation von Zeitreihen und können nützliche Informationen über die Art des unterliegenden stochastischen Prozesses liefern. Dabei gilt, dass die Autokorrelation eines (schwach) stationären Prozesses nicht vom Zeitpunkt, sondern lediglich der Zeitdifferenz zwischen den Realisationen des Prozesses abhängen (siehe Definition 2). Der Korrelationskoeffizient zwischen zwei Prozessvariablen des Prozesses  $X$  mit Lag  $h$  ist dabei wie folgt definiert und zu interpretieren:

$$\rho_x(h) = \begin{cases} \rho_x(h) = 0 & \text{keine lineare Abhängigkeit} \\ \rho_x(h) = +1 & \text{gleichlaufende lineare Abhängigkeit mit Wahrscheinlichkeit 1} \\ \rho_x(h) = -1 & \text{gegenläufige lineare Abhängigkeit mit Wahrscheinlichkeit 1.} \end{cases}$$

Dabei wird die empirische Autokorrelationsfunktion als Schätzer der Autokorrelationsfunktion des Prozesses verwendet, welche in einem Korrelogramm für verschieden Lags  $h$  abgebildet werden kann (vgl. Vogel 2006, S. 32):

$$\hat{\rho}_x(h) = \frac{\hat{\gamma}_X(h)}{\hat{\gamma}_X(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n-h} (X_t - \bar{X})(X_{t+h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}.$$

Die empirische Autokorrelationsfunktion (ACF) kann dabei Aufschluss geben über die Art des zugrundeliegenden Prozesses, indem der Verlauf der empirischen Autokorrelationsfunktion mit der charaktertypischen ACF des stochastischen Prozesses verglichen wird und so intuitiv über den Sinngehalt einer Modellierung der empirischen Daten mit dem gewählten Prozess entschieden werden kann (in Anhang A ist ein Autokorrelogramm eines Weißen Rausches zu finden).

Die partielle Autokorrelationfunktion (pACF) misst hingegen ausschließlich die lineare Abhängigkeit zwischen  $X_t$  und  $X_{t+h}$  ohne den Einfluss der Realisationen  $X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}$ , welche zwischen den beiden Prozessvariablen liegen.

$$X_{t+h} = \phi_{h,1}X_{t+h-1} + \phi_{h,2}X_{t+h-2} + \dots + \phi_{h,h}X_t + \epsilon_{t+h} \quad (h = 1, 2, \dots)$$

Die partiellen Autokorrelationkoeffizienten lassen sich nun aus der Regression der Prozessvariable  $X_{t+h}$  aus dem Regressionskoeffizienten  $\phi_{h,h}$  ablesen. Er spiegelt somit die Korrelation zwischen  $X_t$  und  $-\phi_{h,1}X_{t+h-1} - \dots - \phi_{h,h-1}X_{t+1}$  wider und es gilt  $-1 \leq \phi_{h,h} \leq +1$ . Durch Multiplikation mit  $X_{t+h-i}$  und der Bildung eines Erwartungswertes erhalten wir eine Regression der Kovarianz zwischen  $X_{t+h}$  und  $X_{t+h-i}$ . Dividiert man nun die daraus entstehende Gleichung durch  $\gamma_x(0)$  - also der Varianz des stationären Prozesses - erhält man das Yule-Walker Gleichungssystem.

$$\gamma_x(i) = \phi_{h,1}\gamma_x(i-1) + \phi_{h,2}\gamma_x(i-2) + \dots + \phi_{h,h}\gamma_x(i-h) \quad (h = 1, 2, \dots)$$

$$\rho_x(i) = \phi_{h,1}\rho_x(i-1) + \phi_{h,2}\rho_x(i-2) + \dots + \phi_{h,h}\rho_x(i-h) \quad (h = 1, 2, \dots)$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems nach  $\phi_{h,h}$  gelingt mit den Werten der Autokorrelationsfunktion und durchgängigem Einsetzen. Dabei ist im allgemeinen Fall der partielle Korrelationskoeffizient  $\phi_{h,h} = \pi_x(h)$  für  $h=1,2,\dots$  wie folgt errechenbar (vgl. Vogel 2006, S. 34, 35).

$$\pi_x(h) = \frac{\begin{vmatrix} \rho_x(0) & \dots & \rho_x(h-2) & \rho_x(1) \\ \rho_x(1) & \dots & \rho_x(0) & \rho_x(2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_x(h-1) & \dots & \rho_x(1) & \rho_x(h) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho_x(0) & \rho_x(1) & \dots & \rho_x(h-1) \\ \rho_x(1) & \rho_x(0) & \dots & \rho_x(h-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_x(h-1) & \rho_x(h-2) & \dots & \rho_x(0) \end{vmatrix}}$$

Die ACF und pACF sind nun zur intuitiven Untersuchung des zugrundeliegenden stochastischen Prozesses empirischer Daten verwendbar. So fällt die ACF eines Autoregressiven Prozess der Ordnung  $p$  exponentiell und schmiegt sich der 0 an, während für die pACF des AR( $p$ ) Prozesses gilt, dass  $\pi_X(h) = 0$  für  $h > p$  auftritt (vgl. Neusser 2006, S.75).

## 2.5 Der Lag Operator

Der Lag Operator  $L$  ermöglicht durch die Anwendung von  $L$  auf die Realisationen einer Zeitreihe eine Verschiebung der komplette Reihe um eine Einheit nach hinten, was beliebig oft hintereinander angewendet werden darf (vgl. Kirchgässner, Wolters, Hassler 2013, S.10, 11).

$$LX_t = X_{t-1}$$

$$L^k X_t = X_{t-k}$$

Der Lag Operator kann auch auf ein Polynom angewendet werden:

$$\alpha(L)X_t = (\varphi_1 L + \varphi_2 L^2 + \dots + \varphi_p L^p)X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \dots + \varphi_p X_{t-p}.$$

Des Weiteren kann der Lag Operator genutzt werden, um den Differenzoperator zwischen zwei Punkten der Zeitreihe zu konstruieren:

$$\delta_k X_t = X_t - X_{t-k} = (1 - L^k)X_t.$$

Außerdem ist festzustellen, dass das Polynom  $\alpha(L)$  dann invertierbar ist, also  $(\alpha(L))^{-1}$  existiert, wenn die Nullstellen  $z$  des Polynoms im Betrag größer als eins sind, was heißt:

$$P(z) = 0 \Rightarrow |z| > 1$$

Gilt dies für die Beträge der Nullstellen, so lässt sich das invertierte Polynom als absolut summierbare Reihenentwicklung darstellen

$$(\alpha(L))^{-1} = \frac{1}{\alpha(L)} = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j L^j \quad \text{mit} \quad \sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j| < \infty.$$

# Kapitel 3

## Lineare Zeitreihenmodelle

In diesem Kapitel wird die lineare Zeitreihenanalyse definiert und Eigenschaften verschiedener linearer Prozesse zur Modellierung von Zeitreihen benannt.

### 3.1 Lineare Prozesse

**Definition 5** (vgl. Franke, Härdle, Hafner 2001 S. 177)

Ein linearer Prozess  $X_t$  hat die Darstellung:

$$X_t = \mu + \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \epsilon_{t-i}$$

Dabei ist  $\epsilon_t$  ein weißes Rauschen und  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |c_i|$  ein absolut summierbarer Filter. Der lineare Prozess  $X_t$  ist schwach stationär mit:

1.  $E(X_t) = \mu$
2.  $Var(X_t) = \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i^2$
3.  $Cov(X_t, X_{t+h}) = \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i c_{i-h}$

Lineare Prozesse sind dabei stationär und werden als kausal bezeichnet, wenn sie einen Erwartungswert von  $E(X_t) = \mu = 0$  besitzen. Somit hat lediglich die Vergangenheit und die Gegenwart Einfluss auf den weiteren Prozessverlauf, nicht aber die Zukunft.

### 3.2 Moving Average Prozesse

Die Moving Average Prozesse der Ordnung  $q$ , im folgenden  $MA(q)$  genannt, sind stochastische Prozesse zur Modellierung von diskreten Zeitreihen. Als lineare Kombination von stationären Prozessen sind  $MA(q)$  Prozesse sowohl stationär als auch kausal.



**Definition 6** (vgl. Franke, Härdle, Hafner 2001, S. 178)

Ein Moving Average Prozess der Ordnung  $q$   $MA(q)$  ist durch folgende stochastische Differenzengleichung gegeben:

$$1. \quad X_t = b_1 \epsilon_{t-1} + \dots + b_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t$$

$$2. \quad X_t = \beta(L) \epsilon_t$$

Dabei stellt  $\epsilon_t$  ein Weißes Rauschen mit  $E(\epsilon_t) = 0$  und  $Var(\epsilon_t) = \sigma^2$  dar.

Die stochastischen Momente sind wie folgt definiert:

$$E(x_t) = 0$$

$$Var(x_t) = \sigma^2(1 + b_1^2 + \dots + b_q^2)$$

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = \begin{cases} 0 & h > q \\ \sum_{i=0}^{q-|h|} b_i b_{i+|h|} \sigma^2 & |h| \leq q \end{cases}$$

$$\rho_x(h) = \begin{cases} 0 & h > q \\ \frac{\sum_{i=0}^{q-|h|} b_i b_{i+|h|}}{\sum_{i=0}^q b_i^2} & |h| \leq q \end{cases}$$

Nun wird ein  $MA(1)$  Prozess betrachtet. Für die Autokorrelation dieses Prozesses gilt:

$$\rho_x(1) = \frac{b_1}{(1 + b_1^2)} \text{ und } \rho_x(h) = 0 \text{ für } h > 1 .$$

Außerdem gilt:

$$\rho_x(1) = \frac{1/b_1}{(1 + 1/b_1^2)} = \frac{b_1}{(1 + b_1^2)} .$$

Die Autokorrelation für den  $MA(1)$  Prozess mit dem Parameter  $b_1$  entspricht der Autokorrelation des  $MA(1)$  Prozesses mit dem Parameter  $\frac{1}{b_1}$  (eine Abbildung der ACF und pACF ist in Anhang A zu finden). Diese Gleichheit der stochastischen Eigenschaften impliziert, dass das Lag-Polynom  $\beta(L)$  invertierbar ist und das existierende  $\beta^{-1}(L)$  multipliziert mit  $\beta(L)$  1 ergibt.

### 3.3 Autoregressive Modelle

**Definition 7** (vgl. Franke, Härdle, Hafner 2001, S. 180)

Ein autoregressiver Prozess der Ordnung  $p$ ,  $AR(p)$ , ist durch folgende stochastische Differenzengleichung gegeben:

$$1. \quad X_t = v + a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

$$2. \quad \alpha(L) X_t = v + \epsilon_t$$

Dabei stellt  $\epsilon_t$  ein Weißes Rauschen mit  $E(\epsilon_t) = 0$  und  $Var(\epsilon_t) = \sigma^2$  dar.

Die Darstellung des Autoregressiven Prozesses mithilfe des in Kapitel 2.1 definierten Lag Operators lässt eine Umformung des AR(p) Prozesses in einen MA( $\infty$ ) zu. Dabei gilt:

$$\alpha(L)\alpha^{-1}(L) = 1$$

$$\alpha^{-1}(L) = a_0 + a_1L + a_2L^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i L^i$$

und demnach:

$$X_t = \alpha^{-1}(L)v + \alpha^{-1}(L)\epsilon_t$$

was in dem MA( $\infty$ ) Prozess resultiert:

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i v + \sum_{i=0}^{\infty} a_i L^i \epsilon_t.$$

Zur Beschreibung der Eigenschaften von Autoregressiven Modellen wird zunächst ein AR(1) Prozess betrachtet:

$$X \sim AR(1)$$

$$X_t = v + a_1 X_{t-1} + \epsilon_t$$

Aufgrund der Korrelation zwischen der aktuellen und vergangenen Realisation kann durch fortgehende Substitution der vorherigen Realisation mit einer Vergangenen die Differenzgleichung des AR(1) Prozesses vereinfacht werden.

$$X_t = v + a_1(v + a_1 X_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t$$

$$X_t = v + a_1 v + a_1^2 X_{t-2} + a_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

$$X_t = (1 + a_1 + \dots + a_1^{t-1})v + a_1^t X_0 + a_1^{t-1} \epsilon_1 + \dots + a_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

Sollte gelten, dass  $a_1 < 1$  und die Zeitreihe in der Theorie bis in die Unendlichkeit zurückgeht und demnach  $t \in T$  unendlich groß ist, lässt sich der Term weiter vereinfachen, da dann  $a_1^t X_0$  gegen 0 und die Summe  $(1 + a_1 + \dots + a_1^{t-1})$  als geometrische Reihe gegen den Wert  $\frac{1}{1-a_1}$  konvergiert (vgl. Hassler 2007, S. 50,51):

$$X_t = \frac{v}{1-a_1} + \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j \epsilon_{t-j}$$

Dabei lassen sich die statistischen Momente eines stationäre AR(1) Prozesses mit  $|a| < 1$  nun durch diese vereinfachte Darstellung benennen.

$$E(X_t) = \mu = \frac{v}{1-a_1}$$

$$Var(X_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_1^{2j} = \frac{\sigma^2}{1-a_1} = \gamma_x(0)$$

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j a_1^{j+h} = a_1^h \gamma_x(0)$$

$$\rho_x(h) = \frac{a_1^h \gamma_x(0)}{\gamma_x(0)} = a_1^h$$

Die Voraussetzung für die oben ausgeführten Vereinfachungen ist allerdings, dass  $|a| < 1$  gilt.

Der allgemeine AR(p) Prozess lässt sich dabei mithilfe des Lag-Polynoms wie folgt umschreiben (siehe Definition). Gilt dabei für das Lag-Polynom, dass es invertierbar ist (alle Nullstellen des Polynoms sind im Betrag größer als 1), ist der Prozess auf folgende Weise umformulierbar:

$$\frac{1}{\alpha(L)} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j L^j \text{ und } X_t = \frac{v + \epsilon_t}{\alpha(L)} = \frac{v}{\alpha(1)} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j \epsilon_{t-j}$$

Der AR(p) Prozess ist dabei dann und nur dann mit einem Erwartungswert  $\mu = \frac{v}{\alpha(1)}$  stationär, wenn gilt

$$\alpha(z) = 0 \Rightarrow |z| > 1 \text{ unter der Bedingung } \alpha(1) = 1 - \sum_{j=1}^p a_j > 0.$$

Vorausgesetzt man setzt  $v = 0$ , so gilt für die Autokovarianz  $\gamma_x(h)$  des Prozesses abhängig von der Differenz  $h$  zwischen den Realisation  $X_t$  und  $X_{t-h}$ :

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E(X_t X_{t+h}) \\ &= E(X_t (a_1 X_{t+h-1} + \dots + a_p X_{t+h-p} + \epsilon_{t+h})) \\ &= a_1 \gamma(h-1) + \dots + a_p \gamma(h-p). \end{aligned}$$

Die Autokovarianz des AR(p) Prozesses ist abhängig von der zeitlichen Differenz  $h$  zwischen zwei Realisationen ist also eine lineare Transformation der Autokovarianz der vorherigen Autkovarianzen. Dabei gilt, dass  $\gamma(0)$  konstant ist und somit die Schlussfolgerung

$$\rho_x(h) = a_1 \rho(h-1) + \dots + a_p \rho(h-p) \text{ für } h > 0$$

zulässig ist. Sowohl Autokovarianz als auch Autokorrelation sind absolut summierbar, wenn der AR(p) Prozess stationär ist und für die Autokorrelation  $\rho(h) \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow \infty$  gilt.

Zur Illustration der Stationaritätsbedingung und der absolut summierbaren Autokorrelationen betrachten wir nun einen AR(2) Prozess, welcher wie folgt definiert ist:

$$X_t = v + a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \epsilon_t,$$

wobei für das Lag-Polynom gilt

$$\alpha(L) = 1 - a_1 L - a_2 L^2.$$

Dabei muss gelten, dass die Nullstellen des Lagpolynoms im Betrag größer als 1 sind, was folgende Bedingungen für die Stationarität des AR(2) Prozesses zur Folge hat:

1.  $1 + a_2 > 0$
2.  $1 + a_1 - a_2 > 0$
3.  $1 - a_1 - a_2 > 0$

Durch die Umstellung dieser drei Bedingungen nach  $a_2$  ist es möglich in einem 2-D Graphen die Stationaritätsbedingungen abzubilden, wobei jede Wertekombination für  $a_1$  und  $a_2$ , die in der abgebildeten Fläche liegt vorliegende Stationarität impliziert (vgl. Hassler 2007, S. 54,55).

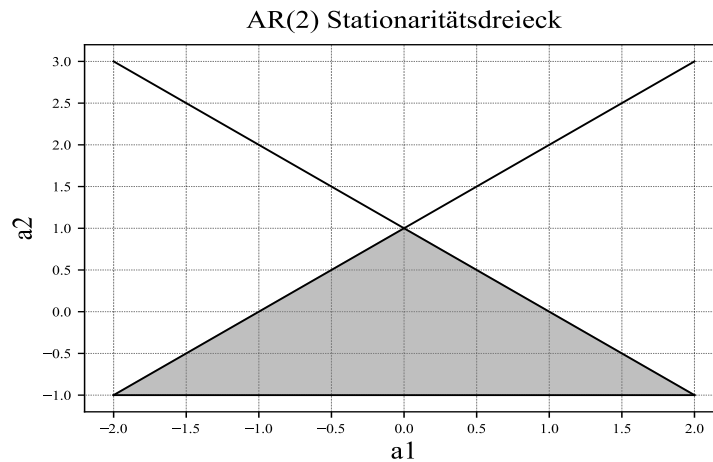


Abbildung 3.1: Stationaritätsdreieck eines AR(2) Prozesses

**Beschreibung:** Alle Kombinationen von  $a_1$  und  $a_2$  im grauen Dreieck erfüllen die Stationaritätsbedingung

Für die Autokorrelationen gilt, dass  $\rho_x(0) = 1$  ist und die oben stehenden Formeln durch sukzessives Einsetzen es ermöglichen, die restlichen Autokorrelationen unter der Symmetrie  $\rho_x(h) = \rho_x(-h)$  zu berechnen:

$$\rho_x(1) = a_1 \rho_x(0) + a_2 \rho_x(-1)$$

$$\rho_x(1) = \frac{a_1}{1 - a_2}$$

$$\rho_x(2) = a_1 \rho_x(1) + a_2 \rho_x(0)$$

$$\rho_x(2) = \frac{a_1^2}{1 - a_2} + a_2$$

$$\rho_x(h) = a_1 \rho_x(h-1) + a_2 \rho_x(h-2) \text{ mit } h \geq 2.$$

So kann die Autokorrelation zwischen jeder der Realisationen des Prozesses berechnet und abgetragen werden. Ein Beispiel für AR(1) Prozesse und ihre Verteilung, Autokorrelation und partielle Autokorrelation ist in Anhang A zu finden.

## 3.4 ARMA Modelle

**Definition 8** (vgl. Franke, Härdle, Hafner 2001, S. 183)

Ein ARMA( $p, q$ ) Modell ist durch folgende stochastische Differenzgleichung gegeben:

$$1. \quad X_t = v + a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + b_1 X_{t-1} + \dots + b_q X_{t-q} + \epsilon_t$$

$$2. \quad \alpha(L)X_t = v + \beta(L)\epsilon_t$$

Dabei stellt  $\epsilon_t$  ein Weißes Rauschen mit  $E(\epsilon_t) = 0$  und  $Var(\epsilon_t) = \sigma^2$  dar.

Das ARMA(p,q) Modell stellt somit eine Kombination der beiden bereits definierten linearen Prozesse dar. Die beiden Polynome  $\alpha(L)$  und  $\beta(L)$  lassen sich wie folgt umschreiben:

$$\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p \text{ und } \beta(L) = 1 + \beta_1 L + \dots + b_q L^q$$

Für den ARMA(p,q) Prozess gilt wie auch beim AR(p) Prozess, dass Stationarität vorliegt, wenn die Nullstellen des Lag-Polynoms  $\alpha(L)$  im Betrag größer als 1 sind. Somit folgt außerdem, dass die Autokorrelationen absolut summierbar sind, sollte  $h \geq \max(p, q+1)$  wahr sein.

Bei der Betrachtung eines ARMA(1,1) Prozesses wird nun der Fakt, dass ein AR(1) Prozess bei Invertierbarkeit als MA( $\infty$ ) Prozess dargestellt und verwendet werden kann genutzt, um den ARMA(1,1) Prozess umzuformen.

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{\epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1}}{1 - a_1 L} \\ &= \epsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} (a_1^j + b_1 a_1^{j-1}) \epsilon_{t-j} \end{aligned}$$

Der ARMA(1,1) Prozess wurde so zu einem linearen Prozess umgeformt, für den gilt, dass die Parameter  $c_j = a_1^{j-1}(a_1 + b_1)$  entsprechen. Folglich lässt sich die Autokovarianz und Autokorrelation des ARMA(1,1) Prozesses wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t) &= \gamma_x(0) = \sigma^2 \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_1^{2j-2} (a_1 + b_1)^2 \right) \\ &= \sigma^2 \frac{(1 + b_1^2 + 2a_1 b_1)}{1 - a_1^2} \\ \gamma_x(1) &= \sigma^2 \frac{(a_1 + b_1)(1 + a_1 b_1)}{1 - a_1^2} \\ \rho_x(1) &= \sigma^2 \frac{(a_1 + b_1)(1 + a_1 b_1)}{(1 + b_1^2 + 2a_1 b_1)} . \end{aligned}$$

Aufgrund der absoluten Summierbarkeit der Autokorrelationen gilt für die folgenden Autokorrelationen:

$$\rho_x(h) = a_1 \rho_x(h-1) \text{ für } h \geq 2 .$$

Der Moving Average Teil - dargestellt durch  $b_1$  - des ARMA(1,1) Prozesses beeinflusst also lediglich die erste Autokorrelation. Danach verläuft die Autokorrelation des ARMA(1,1) Prozess analog zu der eines AR(1) Prozesses (vgl. Hassler 2007, S. 58). In Anhang A ist dabei eine Verteilung, ACF und pACF für den ARMA(1,1) Prozess abgebildet.

# Kapitel 4

## Zeitreihenmodelle mit stochastischer Volatilität

Die bisher dargestellten Prozesse zur Modellierung von Zeitreihen waren linearer Natur und hatten bei Stationarität konstante Varianzen. Diese Prozesse sind daher nicht geeignet um empirische Zeitreihen mit sich ändernden Regimen und unterschiedlicher Varianz zu modellieren. Gerade bei der Modellierung von ökonomischen Zeitreihen und insbesondere Zeitreihen von Finanzmärkten ist dieses Phänomen der Varianz-Kluster zu beobachten, weshalb Zeitreihenmodelle mit bedingter Heteroskedastizität weite Anwendung in den Wirtschaftswissenschaften finden. Dabei ist die Varianz der zu beobachteten Realisationen nicht konstant sondern abhängig von den Realisationen der vorherigen Perioden (vgl. Kirchgässner, Wolters, Hassler 2013, S. 281).

### 4.1 ARCH Modelle

Der Gedanke hinter der heteroskedastischen Varianz von ARCH Modellen ist, dass die Varianz der momentanen Innovation eine Funktion der quadrierten vorherigen Innovation bildet und somit nicht konstant ist.

**Definition 9** (vgl. Hassler 2007, S.92)

Das Auto-Regressive-Conditional-Heteroscedasticity Modell der Ordnung  $q$  - kurz  $ARCH(q)$  - spezifiziert die Varianz  $\sigma_t^2$  als stochastischen Prozess:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \epsilon_{t-q}^2$$

Mithilfe der zeitabhängigen Varianz lässt sich der Prozess  $X \sim ARCH(q)$  wie folgt abbilden:

$$X_t = \mu + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t = \sigma_t e_t$$

$$e_t \sim N(0, 1)$$

wobei  $\mu$  den Erwartungswert des Prozesses und  $\omega$  die Langzeitvarianz darstellt.

Dabei gilt, dass  $X \sim ARCH(q)$  stationär ist, wenn

$$\sum_{j=1}^q a_j < 1$$

wahr ist, woraus für den Prozess die folgenden stochastischen Momente zu schließen sind (vgl. Hassler 2007, S. 92, 93):

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \mu \\ E(X_t | X_{t-1}, \dots) &= 0 \\ Var(X_t) = E(\sigma_t^2) &= \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_q} = \frac{\omega}{1 - \sum_{j=1}^q \alpha_j} \\ Var(X_t | X_{t-1}, \dots) &= \sigma_t^2 \\ Cov(X_t, X_{t+h}) &= 0. \end{aligned}$$

Außerdem ist der  $ARCH(q)$  Prozess leptokurtisch, was bedeutet, dass die Wölbung der Verteilungsfunktion im Zentrum stärker und die Flanken dicker als bei einer Standardnormalverteilung sind. Dies deckt sich mit Observationen vieler Finanzzeitreihen, welche stark leptokurtisch sind. Für einen  $ARCH(1)$  Prozess ist die Kurtosis größer als 3 und wie folgt definiert, wobei dies der Wert des vierten Moments der Standardnormalverteilung ist (vgl. Franke, Härdle, Hafner 2001, S.208):

$$Kurt(\epsilon_t) = \frac{E(\epsilon_t^4)}{E(\epsilon_t^2)^2} = 3 \frac{1 - \alpha^2}{1 - 3\alpha^2} \geq 3.$$

## 4.2 GARCH Modell

Das GARCH Modell ist die Verallgemeinerung des ARCH Modells und aus der Anpassung des ARCH Modells an die empirischen Eigenschaften von Finanzzeitreihen hervorgegangen. Dabei wird die Observation berücksichtigt, dass die Korrelation der Varianzen weit in die Vergangenheit reicht und somit eine hohe Ordnung  $q$  des  $ARCH(q)$  Modells erfordern würde. Ein stationäres GARCH Modell der Ordnung  $p$  und  $q$  - kurz  $GARCH(p, q)$  - ist eine Umstellung des  $ARCH(\infty)$  Prozesses (vgl Hassler 2007, S. 96,97).

**Definition 10** (vgl. Hassler 2007, S.95)

Das Generalized Auto-Regressive-Conditional-Heteroscedasticity Modell der Ordnung  $p$  und  $q$  - kurz  $GARCH(p, q)$  - spezifiziert die Varianz  $\sigma_t^2$  als stochastischen Prozess:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \epsilon_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$$

Ein solch definierter  $GARCH(p, q)$  Prozess ist dabei stationär, sollte folgende Beziehung gelten:

$$\sum_{j=1}^q \alpha_j + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1.$$

Der bedingte und unbedingte Erwartungswert und die Autokovarianz des  $GARCH(p, q)$  entsprechen den stochastischen Momenten eines  $ARCH(q)$  Prozesses. Die bedingte und unbedingte Varianz des  $GARCH(p, q)$  Prozesses ist wie folgt definiert:

$$Var(X_t) = E(\sigma_t^2) = \frac{\omega}{1 - \sum_{j=1}^q \alpha_j - \sum_{j=1}^p \beta_j}$$

$$Var(X_t | X_{t-1}, \dots) = \sigma_t^2.$$

Für einen  $GARCH(p, q)$  Prozess gilt, dass er vorausgesetzt das vierte statistische Moment ist kleiner als  $\infty$  in ein  $ARMA(m, p)$  Modell umgeschrieben werden kann:

$$\xi = \sigma_t^2(e_t^2 - 1)$$

$$\epsilon_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^m \gamma_j \epsilon_{t-j}^2 - \sum_{i=1}^p \beta_j \xi_{t-i}^2 + \xi_t$$

Der Fehlerterm  $\xi_t$  stellt ein weißes Rauschen mit bedingter Varianz dar. Die Modellordnung des autoregressiven Teil  $m$  ergibt sich dabei aus  $m = \max(p, q)$  und seine Parameter aus  $\gamma_j$  aus  $\gamma_j = \alpha_j + \beta_j$  mit  $\alpha_j = 0$ , wenn  $j > q$  und  $\beta_j = 0$  für den Fall, dass  $j > p$  wahr ist. Wenn das MA-Glied des  $ARMA$  Prozesses invertierbar ist, ist es möglich ihn als  $AR(\infty)$  Prozess wiederzugeben.

Daraus folgt, dass die bedingte Varianz des stationären  $GARCH(p, q)$  Prozesses in einen  $ARCH(\infty)$  Prozess umgewandelt werden kann und bedient somit den stilisierten Fakt, dass Korrelationen der Varianz von Finanzzeitreihen sehr weit in die Vergangenheit reichen.

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \epsilon_{t-i}^2 \text{ und } \sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i| < \infty$$

Dabei gilt, dass  $\gamma_i \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$  und dass die Eigenschaften von  $ARCH$ -Modellen auch für  $GARCH$  Modelle gelten (z.B. Schiefe = 0 und Kurtosis  $> 3$ ). So gilt für einen  $GARCH(1,1)$  Prozess die folgende Kurtosis (vgl. Franke, Härdle, Hafner 2001, S. 221-223):

$$Kurt(\epsilon_t) = \frac{E(\epsilon_t^4)}{E(\epsilon_t^2)^2} = 3 \frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2}{1 - (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha_i^2} \geq 3$$

### 4.3 Erweiterungen von GARCH-Modellen

Die Klasse der  $ARCH$  Modelle erklären Beobachtungen von Aktienrenditen und stellen eine Anpassung stochastischer Prozesse und stilisierte Fakten von Finanzzeitreihen dar. Dies gilt auch für die Erweiterungen des Generalisierten- $ARCH$  Modells. So wird unter anderem unterstellt, dass sowohl negative als auch positive Schocks in den Daten den gleichen Einfluss haben und es somit keinen Unterschied zwischen negativen und positiven Nachrichten für die Höhe und Persistenz des Ausschlags in den Daten gibt, was nicht empirischen Betrachtungen von Finanzzeitreihen entspricht (vgl. Franke, Härdle, Hafner 2001, S. 228). Um Fakten wie jenen im gewählten stochastischen Prozess zu berücksichtigen, gibt es zahlreiche Erweiterungen der standardisierten  $GARCH$ -Modelle, welche nun teilweise vorgestellt werden (vgl. Franke, Härdle, Hafner 2001, S. 228).

#### EGARCH

Die Abkürzung  $EGARCH$  steht für das Exponential- $GARCH$  Modell, welches von Nelson (1991) definiert wurde. In Finanzzeitreihen kann beobachtet werden, dass negative



Renditen in den Daten oft mit hoher Volatilität einhergehen. Dies wird Leverage-Effekt genannt (vgl. Franke, Härdle, Hafner 2001, S.228) und ist der stilisierte Fakt, auf welches das EGARCH Modell angepasst ist. Dabei ist die Varianz des Prozesses wie folgt definiert:

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln \sigma_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^q (\alpha_j |e_{t-j}| + \sum_{j=1}^o \gamma_j e_{t-j})$$

$$\sigma_t^2 = \exp \left[ \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln \sigma_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^q (\alpha_j |e_{t-j}| + \sum_{j=1}^o \gamma_j e_{t-j}) \right].$$

Es ist zwischen zwei Fällen zu unterscheiden:

$$(\alpha_j - \gamma_j) |e_{t-j}| \quad \text{für } e_{t-j} < 0$$

$$(\alpha_j + \gamma_j) e_{t-j} \quad \text{für } e_{t-j} > 0.$$

Wenn  $\gamma_j < 0$  gilt, hat der erste Fall, welcher eine negative vergangene Volatilität impliziert, einen größeren Effekt als der zweite - positive - Fall. Daher werden  $\gamma_j$  auch die "leverage-Parameter" genannt, da ihre Höhe über das Ausmaß des negativen Effekts vorheriger negativer Innovationen bestimmt (vgl. Hassler 2007, S. 101, 102).

### GARCH-M

Die Grundlage des GARCH-in-mean Modells ist die Beobachtung, dass Renditen von Finanzzeitreihen in Regimen hoher Volatilität höher als in Zeiten geringerer Schwankungen sind. Dabei wird das mittlere Niveau des Prozesses  $\mu$  durch die Volatilität der Periode beeinflusst (vgl. Hassler 2007, S. 100).

$$X_t = \mu_t + \epsilon_t$$

$$\mu_t = \theta \sigma_t$$

$$\epsilon_t = \sigma_t e_t$$

Zu beachten ist dabei, dass der Prozess nun nicht mehr stationär ist und keine Martingaldifferenz vorliegt, da zum einen der Erwartungswert nicht mehr konstant ist und zum anderen die Autokovarianz nun nicht mehr 0 beträgt:

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = \theta^2 Cov(\sigma_t, \sigma_{t+h}).$$

Eine Abwandlung des GARCH-M Modells ist das ARMA-GARCH Modell. Dabei wird der Mittelwert  $\mu_t$  des Prozesses durch einen ARMA(p,q) Prozess modelliert. Dies geschieht durch die Anpassung der zu beobachtenden Datenpunkte  $X_t$  auf das ARMA(p,q) Modell, wobei eine Serie von Residuen  $\epsilon_t$  entsteht. Jene Residuen  $\epsilon_t$  werden nun mithilfe eines GARCH(p,q) Prozess modelliert.

# Kapitel 5

## Modellkonstruktion und Tests

### Stationarität

Für die Verwendung der Zeitreihenmodelle werden zunächst die Renditen der Testphase auf Stationarität getestet. Dafür wird der Augmented Dickey Fuller Test angewendet, wobei auf die Existenz einer Einheitswurzel innerhalb der Zeitreihe getestet wird. Der Ausgangspunkt des Testes ist dabei:

$$\Delta X_t = \alpha + \beta t + \gamma X_{t-1} + \delta_1 \Delta X_{t-1} + \dots + \delta_{p-1} \Delta X_{t-p+1} + \epsilon_t .$$

Es wird getestet, ob der Parameter  $\gamma$  gleich 0 ist. Die Testhypothesen sind somit:

$$H_0 : \gamma = 0 \text{ und } H_1 : \gamma \neq 0$$

Demnach wird überprüft, ob die letzte Beobachtung einer Zeitreihe einen Informationsgehalt für die Modellierung der stationären Differenzierung erster Ordnung über die Informationen der vergangenen Differenzen  $\Delta X_{t-h}$  hinaus besitzt. Der kritische Wert des Tests folgt dabei der Dickey-Fuller Verteilung (zu finden in Anhang B). Die Teststatistik ergibt sich aus:

$$DF_\gamma = \frac{\hat{\gamma}}{SE(\hat{\gamma})}.$$

Sollte die Teststatistik kleiner sein als der zum Testniveau  $\alpha$  korrespondierende Wert der Dickey-Fuller Verteilung, ist mit Fehlerwahrscheinlichkeit  $\alpha$  die Nullhypothese zu verwerfen und anzunehmen, dass die Zeitreihe somit stationär ist (vgl. Hamilton 1994, S. 527, 528).

### Parameterschätzung

Zur Parameterschätzung wird die Maximum Likelihood Methode verwendet. Zunächst betrachten wir die Schätzung eines  $X \sim ARMA(p, q)$  Prozesses, wobei die Autokovarianzmatrix des Prozesses wie folgt definiert wird:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_x(0) & \gamma_x(1) & \dots & \gamma_x((p+q)-1) \\ \gamma_x(1) & \gamma_x(0) & \dots & \gamma_x((p+q)-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_x((p+q)-1) & \gamma_x((p+q)-1) & \dots & \gamma_x(0) \end{pmatrix}.$$

Die Schätzung der Likelihood beruht nun darauf, dass  $\epsilon_t \in IID(0, \sigma^2)$  gilt und die Realisationen des stochastische Prozess  $X$  multivariat normalverteilt mit der Dichte

$$p(x|\theta) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} |\Gamma|^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} x^T \Gamma^{-1} x \right)$$

ist, was der Likelihoodfunktion  $L(x|\theta)$  entspricht und der Parametervektor wie folgt

$$\theta = (\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q; \sigma^2)^T$$

definiert ist.

Für einen stochastischen Prozess  $X \sim GARCH(p, q)$  gilt aufgrund der von der Zeit abhängenden Varianz  $\sigma_t^2$  folgende bedingte Likelihood Funktion:

$$L(x|\theta) = -\frac{(n - (p + q))}{2} \sum_{t=(p+q)+1}^n \ln \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=(p+q)+1}^n \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2},$$

bei welcher die Varianz von dem Parametervektor  $\theta$  abhängt. Der Schätzer des Parametervektors  $\hat{\theta}$  des jeweiligen Prozesses  $X$  wird dabei nun ermittelt, indem die Likelihoodfunktion  $L(x|\theta)$  für die gegebenen Beobachtungen maximiert wird (vgl. Franke, Härdle, Hafner 2001, S. 194-196, 220).

### Modellordnung

Die optimale Ordnung des jeweiligen Prozesses kann mithilfe verschiedener Gütekriterien bestimmt werden. Das Akaike Informationskriterium (AIC) ist wie folgt definiert (vgl. Akaike 1974):

$$AIC = 2k - 2\ln(\hat{L}),$$

wobei  $k$  die Anzahl der zu bestimmenden Parameter und  $\hat{L}$  der Maximalwert der Likelihood Funktion des Modells annimmt. Das Bayesian Informationskriterium (BIC) lässt sich wie folgt mithilfe der Anzahl von Beobachtungen  $n$  berechnen (vgl. Schwarz 1978):

$$BIC = \ln(n)k - 2\ln(\hat{L}).$$

Dabei wird jene Modellordnung ausgewählt, welche das respektive Informationskriterium minimiert (vgl. Kirchgässner, Wolters, Hassler 2013, S.56).

### Plausibilitätskontrolle

Der Ausgangspunkt der Plausibilitätskontrolle ist, dass die Residuen eines jeden der verwendeten stochastischen Prozesse ein Weißes Rauschen darstellt und somit keine Autokorrelation in den Residuen vorliegen sollte. Dazu kann der Box-Pierce (vgl. Box, Pierce 1970) Test oder der Ljung-Box (vgl. Ljung, Box 1978) Test verwendet werden. Dabei werden bei beiden Tests die folgenden Hypothesen überprüft:

$$H_0 : \hat{\rho}(1) = \hat{\rho}(2) = \dots = \hat{\rho}(h) = 0$$

$$H_1 : \hat{\rho}(k) \neq 0, \text{ für } k = 1, \dots, h.$$

Die Teststatistiken für den Box-Pierce und Ljung-Box Test sind wie folgt definiert:

$$Q_{BP} = T \sum_{k=1}^h \hat{\rho}(k)^2$$

$$Q_{LB} = T(T+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}(k)^2}{T-k}$$

und folgen der Chi-Quadrat Verteilung mit  $h - p - q$  Freiheitsgraden, welche im Anhang B zu finden ist.

Die Nullhypothese wird dabei zum Niveau  $\alpha$  verworfen, wenn die jeweilige Teststatistik

größer als der Wert  $\chi^2_{1-\alpha}(h-p-q)$  ist. Damit also zum Niveau  $\alpha$  keine Autokorrelation der Residuen im Modellergebnis angenommen werden kann, muss die Teststatistik kleiner als der zu  $\alpha$  korrespondierende Wert der Chi-Quadrat Verteilung sein.

Engle's Test auf autoregressive bedingte Heteroskedastizität (ARCH)

Im Zuge der Entwicklung des ARCH Modells stellte Robert F. Engle im Jahre 1982 auch einen statistischen Test zur Untersuchung von ARCH Effekten in Datensätzen auf, welche unter anderem auf Residuen von Regressionen oder linearen stochastischen Prozessen angewendet werden kann.

Die Idee ist, dass die Residuen eines Prozesses ARCH Effekte aufweisen, wenn die Varianz des Prozesses, bedingt durch die Vergangenheit des Prozesses, der Varianz der Residuen und der Varianz der quadrierten Residuen des Prozess gegeben der Vergangenheit entspricht. Es wird getestet, ob die quadrierten Residuen autokorreliert sind und durch eine Regression dargestellt werden können.

$$\epsilon_t^2 = \phi_0 + \phi_1 \epsilon_1^2 + \phi_2 \epsilon_2^2 + \dots + \phi_h \epsilon_h^2$$

Dabei ist die Nullhypothese:

$$H_0 : \phi_0 = \phi_1 = \dots = \phi_h = 0 .$$

Die Teststatistik kann wie folgt berechnet werden:

$$\xi_h = TR_h^2 ,$$

wobei die  $R_h^2$  das Bestimmtheitsmaß der oben stehenden Regression und  $T$  die Anzahl der Residuen der Regression oder des linearen stochastischen Prozesses ist. Die Nullhypothese wird nun zum Niveau  $\alpha$  verworfen, wenn die jeweilige Teststatistik größer als der Wert  $\chi^2_{1-\alpha}(h)$  ist, worauf Autokorrelation der quadrierten Residuen angenommen werden kann und somit ARCH Effekte vorliegen (vgl. Engle 1982).

## Teil II

# Praktische Anwendung

# Kapitel 6

## Methoden der Volatilitätsvorhersage

### 6.1 Anwendung und Daten

Zur Untersuchung und Anwendung der vorgestellten Modelle werden in dieser Arbeit die Vorhersagekraft von Aktienvolatilitäten von verschiedenen stochastischen Prozessen unter Berücksichtigung ihrer speziellen Eigenschaften untersucht. Dabei werden die resultierenden Vorhersagen der Volatilitäten zur Konstruktion von Aktienanlagestrategien mit nach Volatilität kontrolliertem Exposure gegenüber Aktienmarktinvestment verwendet. Dies wird Volatility Targeting oder Constant Volatility Framework genannt und findet sowohl in der Praxis Anwendung als auch steigende akademische Relevanz in den letzten Jahren.

Für die Anwendung des Volatility Targeting mithilfe der vorgestellten stochastischen Prozesse werden tägliche Preisdaten des Deutschen Aktienindex DAX benutzt. Als Datenquelle wird dabei Yahoo! Finance verwendet, wo tägliche Preisdaten seit dem 01.01.1994 für den DAX und des VDAX-NEW heruntergeladen wurden. Aus den täglichen Preisen des DAX werden die täglichen Renditen errechnet:

$$R_{DAX,t} = \left[ \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \right]$$

Es entsteht eine Zeitreihe von DAX Renditen vom 01.01.1994 bis zum 31.12.2018, die somit 24 Jahre abbildet. Dabei wird die Testphase zur Modellschätzung und für In-Sample Tests als die ersten 1260 Handelstage - was ungefähr einem Zeitraum von 5 Jahren entspricht - definiert. Aus der Zeitreihe der Renditen  $R_{t,DAX}$  wird die quadrierte tägliche Rendite als Maß für die täglich realisierte Aktienvarianz verwendet. Die monatliche Varianz ist demzufolge nun als Summe der letzten 21 täglichen Varianzen definiert, während die Summe der letzten 252 täglichen Varianzen die jährliche Varianz abbildet (vgl. Merton 1980).

Zur Verwendung der Zeitreihe in den bereits definierten Zeitreihenmodellen wird zunächst die Stationarität der Renditen geprüft. Dazu wird ein Augmented Dickey Fuller Test angewendet, dessen Ergebnisse sind:

Augmented Dickey Fuller Test	
Test-Statistik	-6.90
Kritischer Wert der DF-Verteilung ( $\alpha = 1\%$ )	-3,43
P-Wert	0,00

Tabelle 6.1: Ergebnisse des Augmented Dickey Fuller Tests

Aufgrund der Verwerfung der Nullhypothese zum Niveau  $\alpha = 5\%$  ist anzunehmen, dass für die Zeitreihe der Renditen  $R$  während der Testphase Stationarität vorliegt.

## 6.2 Methodologie

Die Datenreihe besitzt nun eine Zeitspalte, die Renditen und die quadrierten Renditen, die als Maß für die tägliche Varianz fungiert. Dies ist die Grundlage für die folgenden Berechnungen und Volatilitätsvorhersagen, welche zur Berechnung der Rendite der Volatility Targeting Strategien verwendet werden. Dabei werden sechs verschiedene Prognosemethoden verwendet: einen halbjährlichen Durchschnitt aus der Serie der täglichen Varianzen, eine Methode der exponentiellen Glättung, implizite Volatilitäten aus den Optionsmärkten und ein GARCH, EGARCH und ARMA-GARCH Modell.

### Durchschnittsprognosen

Zur Errechnung des Durchschnitts wird ein einfaches arithmetisches Mittel der letzten 126 Tage - somit ungefähr ein halbes Jahr - definiert:

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \frac{1}{126} \sum_{i=t-126}^t \sigma_i^2.$$

Dies ergibt eine Serie von Varianzprognosen für das erste verwendete Verfahren.

Die exponentielle Glättung ist wie folgt definiert:

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \alpha \hat{\sigma}_t^2 + (1 - \alpha) \sigma_t^2$$

daraus folgt durch sukzessives Einsetzen die Gleichung eines Exponential Weighted Moving Average, welcher abermals für das letzte Halbjahr fortlaufend berechnet wird (vgl. Yu 2002):

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = (1 - \alpha) \sum_{i=t-126}^t (\alpha)^t \sigma_i^2.$$

Dabei wird  $\alpha$  so gewählt, dass die Summe der quadrierten Prognosefehler - die quadrierte Differenz zwischen Prognose und dem tatsächlich beobachteten Wert der Varianz für die Trainingsphase - minimiert wird. Der Glättungsparameter  $\alpha$  wird dabei zunächst für die Trainingsphase errechnet und dann für die Berechnung der jeweiligen in und out-of-sample Varianzvorhersagen verwendet und entspricht  $\alpha = 0.9842$ . Somit wird eine Zeitreihe von Varianzprognosen für den Prognosezeitraum erstellt.

### Prognosen der Zeitreihenmodelle

Die *Python* Libraries Statsmodels und ARCH werden zur Modellkonstruktion und Prognose verwendet, wobei die modellierte Variable  $X_t$  der Modelle nun die stationäre Zeitreihe der Renditen  $R_t$  darstellt. Zuerst geschieht die Schätzung der Modellordnung mithilfe des Bayesian Information Criteria (BIC). Die ARMA und GARCH Modelle werden für jede der 16 Kombinationen für  $p \in \{1, 4\}$  und  $q \in \{1, 4\}$  auf die Testphase angepasst und das jeweilige BIC verglichen und jeweils die Modellordnung mit dem niedrigsten BIC ausgewählt. Das BIC wird dem AIC vorgezogen, da es zu einer sparsameren Modellordnung führt (vgl. Kirchgassner, Wolters, Hassler 2013, S.57).

Nun wird das Modell auf die Testphase angepasst und der Methodik folgend aus Kapitel 2.4 eine Plausibilitätskontrolle durchgeführt. Nach den genannten Schritten und der erfolgreichen Kontrolle wird jeweils eine Prognose für die quadrierte Rendite der nächsten 21 Tage - was einen Monat bildet - berechnet und summiert, was die tägliche Prognose für die Varianz des nächsten Monats konstituiert. Dies passiert für jeden Datenpunkt, der außerhalb der Testphase liegt, wodurch eine Zeitreihe monatlicher Varianzprognosen entsteht.

### Annualisierung der Varianzen

Die resultierenden Zeitreihen der täglichen und monatlichen Varianzen können nun annualisiert werden, wodurch die jeweilige tägliche Prognose für die jährliche Varianz entsteht:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_t^{2(a)} &= 12\hat{\sigma}_t^{2(m)} \\ \hat{\sigma}_t^{2(a)} &= 252\hat{\sigma}_t^{2(d)}.\end{aligned}$$

Dadurch entsteht für die beschriebenen Methodiken eine tägliche Prognose der annualisierten Varianz. Die Wurzel der Varianzprognosen stellt demnach die tägliche Prognose der annualisierten Volatilität dar und wird für die folgenden Berechnungen verwendet.

### Implizite Volatilitäten

Eine implizite Volatilität ist die vom Preis einer Option ausgehende angenommene Volatilität des Basiswerts (oder: Underlyings) der Option und somit die Erwartung des Marktes über die zukünftige Entwicklung der Volatilität des Basiswerts. Dabei wird die Volatilität durch schrittweises Approximation und Auflösung von Optionsbepreisungsmodellen nach der Volatilität ermittelt (vgl. Hull 1995, S.341).

Aus dem Markt für Optionen auf den Deutschen Aktienindex (DAX) und ihren impliziten Volatilitäten wird der VDAX-NEW erstellt. Der VDAX-NEW ist ein Index zur Abbildung der Markterwartungen im Bezug auf die jährliche Volatilität des DAX. Die Zeitreihe des VDAX ist somit zu jedem Zeitpunkt als Prognose für die jährliche Volatilität zu verstehen und wird als Volatilitätsprognose des Optionsmarkts verwendet.

Zur Berechnung des VDAX-NEW werden neben Optionen, dessen Underlying nahe dem Ausführungspreis gehandelt werden auch Optionen verwendet, wo der Preis des Basiswerts weiter weg vom Ausführungspreis liegt. Dabei werden zunächst Subindizes für solche Optionen mit der Laufzeit von 1, 2 und 3 Monaten sowie 1, 2 und 3 Quartalen und den beiden darauf folgenden Halbjahren konstruiert.

Die Varianz jedes Subindizes wird durch die Schwankung eines jeweiligen Portfolios beschrieben, welches so konstruiert ist, dass lediglich die Varianz des Underlyings widerspiegelt. Jene Varianzen der Indizes werden nun so kombiniert, dass die annualisierte



Volatilität des Basiswerts des nächsten Monats durch den VDAX-NEW Index abgebildet wird (vgl. Market Data Analytics, Deutsch Börse Group 2006).

### Volatility Targeting

Die Idee hinter Volatility Targeting ist, die Volatilität eines Portfolios, bestehend aus einer Aktienanlage und einer risikolosen Anlage, möglichst stabil zu halten. Als Maß für die risikolose Anleihe nehmen wir an, dass das Geld gehalten wird, allerdings nicht verzinst wird, da dies eventuelle Veränderungen in der risikolosen Verzinsung ignoriert und somit ein Ergebnis, welches unbeeinflusst von Geldmarktveränderungen ist, produziert. Die Varianz eines Portfolios aus zwei Anlagen  $A$  und  $B$  ist wie folgt definiert:

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_A^2 + (1-w)^2\sigma_B^2 + 2w(1-w)\text{Cov}(A, B),$$

wobei  $w$  der Anteil der Investition in Anlage  $A$  ist. Das hier betrachtete Portfolio besteht lediglich aus der riskanten Anlage - dem DAX - und der Haltung des Geldes ohne Verzinsung. Daher ist die Volatilität des Portfolios und die Gewichtung der Investition in den DAX nun gegeben durch (vgl. Papageorgiou, Reeves, Sherris 2015):

$$\sigma_p = w\sigma_{DAX}$$

$$w = \frac{\sigma_p}{\sigma_{DAX}}.$$

Die Gewichtung der Investition in den DAX hängt somit von der Volatilität des Portfolios und des DAX ab. Die Volatilität des Portfolios und des DAX kann demnach gewählt werden. Die gewählte Portfoliovolatilität ist somit die Zielvolatilität unserer Strategie, während die DAX-Volatilität mithilfe verschiedener bereits beschriebenen Methoden vorhergesagt wird. Die in dieser Arbeit verwendete Zielvolatilität ist 10%, sodass die dynamisch anzupassende Gewichtung wie folgt berechnet wird:

$$w_t = \frac{\sigma_p}{\hat{\sigma}_t^{(a)}}, \text{ mit } \sigma_p = 0.1$$

Das Ziel dieser Anwendung ist nun, die nach den beschriebenen Methodiken entstandenen Volatilitätsvorhersagen zu nutzen, um eine dynamische Gewichtung zwischen DAX und der Haltung des Geldes zu errechnen und die entstehenden Renditen zu untersuchen. Die Rendite dieses Portfolios wird als gewichtete Summe der täglichen Rendite des DAX und der risikolosen Anleihe - welche als 0 angenommen wird - berechnet. Es folgt also:

$$R_t = w_t R_{DAX,t}.$$

# Kapitel 7

## Volatilitätsvorhersage und Volatility Targeting

### 7.1 Prognosenprozess der Zeitreihenmodelle

#### GARCH Modell

Wie in Kapitel 3.2 beschrieben, wird die *Python* Library ARCH zur Modellierung der Renditen verwendet, wobei für jeden der verwendeten GARCH Prozesse ein Mittelwert  $\mu$  von 0 angenommen wird. Zunächst wird die optimale Modellordnung des Prozesses mithilfe des Bayesian Information Criterion approximiert. Der GARCH Prozess wurde auf die stationäre Testphase der Renditen für verschiedene  $p$  und  $q$  angepasst und die Werte des BICs in der folgenden Tabelle abgetragen.

BIC des GARCH Prozesses für verschieden $p$ und $q$				
	q=1	q=2	q=3	q=4
p=1	3841,43	3848,57	3855,71	3862,85
p=2	3843,43	3850,56	3862,84	3864,84
p=3	3842,91	3849,26	3852,79	3859,80
p=4	3850,05	3856,39	3859,46	3864,88

Tabelle 7.1: Ergebnisse des BIC für verschiedene Modellordnungen des GARCH Prozesses

Aus den Ergebnissen des Informationskriteriums lässt sich ablesen, dass die Modellordnung  $p = 1$  und  $q = 1$  zu wählen ist. Das Ergebnis der Anpassung des GARCH(1,1) Prozesses auf die Renditen der Testphase resultiert in folgenden Ergebnissen:

Parameter	Wert	p-Wert (t-Statistik, $\alpha = 0.05$ )
$\mu$	0.0603	0,0024
$\omega$	0.0165	0,0072
$\alpha_1$	0.0817	0,0000
$\beta_1$	0.9090	0,0000

Tabelle 7.2: Parameterschätzung und Signifikanztest des GARCH Prozesses

Jeder der Parameter unterscheidet sich dabei signifikant von 0. Daher kann das GARCH Modell wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} R_t &= 0.0603 + \epsilon_t \\ \epsilon_t &= \sigma_t e_t \\ \sigma_t^2 &= 0.0165 + 0.0817\epsilon_{t-1}^2 + 0.9090\sigma_{t-1}^2 \\ e_t &\sim N(0, 1) \end{aligned}$$

Das Resultat wird nun auf seine Plausibilität getestet. Zunächst wird die quadrierte Autokorrelation der Residuen  $e_t$  abgebildet. Jene indiziert, dass die quadrierten Residuen nicht autokorreliert sind. Außerdem bilden wir die Residuen  $e_t$  in einem QQ-Diagramm ab, welches die Vermutung zulässt, dass  $e_t \sim N(0, 1)$  gilt.

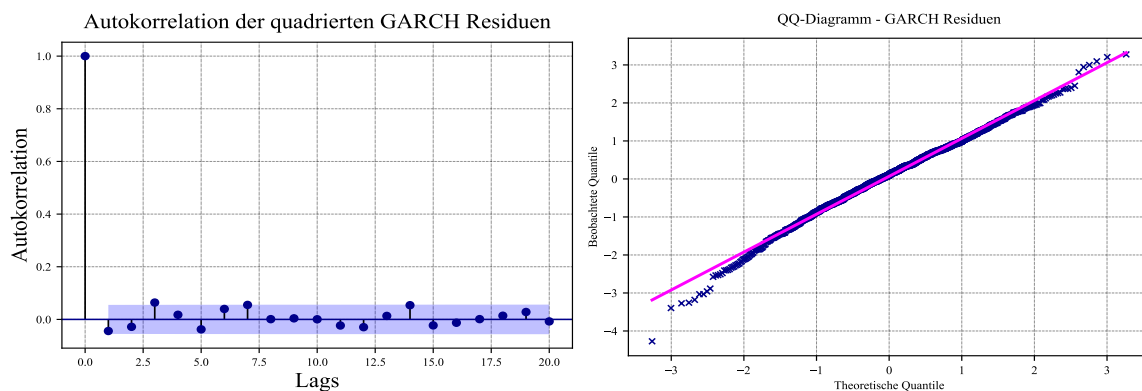


Abbildung 7.1: Die Autokorrelation (links) und QQ-Diagramm (rechts) der Residuen des GARCH Modells

**Beschreibung:** Links ist ein Autokorrelogramm für verschiedene Lags der Residuen des GARCH Prozesses, rechts ein Quantil-Quantil Diagramm der Residuen. Jenes Diagramm plottet die empirischen Quantile der Residuen gegen die theoretischen Quantile der Normalverteilung (vgl. Chambers, Cleveland, Kleiner, Tukey 1983, S.48).

Das empirische Autokorrelogramm (ACF) der Residuen  $e_t$  indiziert bereits, dass keine Autokorrelation in den Residuen vorliegt, während das QQ-Diagramm die Vermutung unterstützt, dass die Residuen normalverteilt sind. Um statistisch zu testen, ob das Ergebnis der Parameterschätzung auf die Testphase sinnvoll ist, wird nun die bereits benannte Plausibilitätskontrolle durchgeführt, wobei die Teststatistiken errechnet werden und der kritische Wert  $\chi^2_{1-\alpha}(h-p-q)$  entspricht. Es wird getestet, ob die Residuen des Prozesses -  $e_t$  - autokorreliert sind, was bedeuten würde, dass  $e_t$  nicht unabhängig identisch normalverteilt ist. Die Nullhypothese postuliert dabei, dass keine Autokorrelation vorliegt.

Plausibilitätskontrolle des GARCH Modells

h	Freiheitsgrade	$Q_{LB}$	$Q_{BP}$	kritischer Wert $\chi^2$ ( $\alpha = 0.05$ )
3	1	0,26	0,27	3,84
5	3	3,06	3,04	7,81
10	8	7,11	7,06	15,51
25	23	23,40	23,10	35,17

Tabelle 7.3: Ergebnisse des Ljung-Box und Box-Pierce Test der GARCH Residuen

Das Befund ist demnach, dass die Nullhypothese der Unkorreliertheit der Residuen des GARCH Modells zum Niveau 5% nicht verworfen wird und daher eine gute Anpassung der Daten an das Modell erreicht wurde. Nach der bereits beschriebenen Methodologie wird nun eine tägliche Prognose der annualisierten Volatilität für die Zeit nach der Testphase erstellt (ca. 1999-2018), welche zur Portfoliokonstruktion verwendet wird.

### EGARCH Modell

Das EGARCH Modell wird von der Methodik her wie das GARCH Modell aufgestellt. Es beginnt also mit der Auswahl der Modellordnung, worauf die die Parameterschätzung folgt und schließlich die Plausibilität des Modells mithilfe des Ljung-Box und Box-Pierce Test überprüft wird. Dabei ist in Anhang C die Tabelle der BIC Werte und die Teststatistiken der beiden Tests zu finden. Die Untersuchung der BIC-Werte veranlasste einen EGARCH(2,2,1) Prozess zu verwenden, wobei die Ordnung des Parameters  $\beta$  gleich 1 gesetzt wurde und die Ordnung der Parameters  $\alpha$  und  $\gamma$  2 ist. Die Schätzung des Prozesses brachte dabei folgendes Ergebnis:

Parameter	Wert	p-Wert (t-Statistik, $\alpha = 0.05$ )
$\omega$	0,0006	0,2290
$\alpha_1$	-0,0759	0,296
$\alpha_2$	0,2638	0,0000
$\gamma_1$	-0,2135	0,0000
$\gamma_2$	0,1511	0,0000
$\beta_1$	0,9797	0,0000

Tabelle 7.4: Parameterschätzung und Signifikanztest des EGARCH Prozesses

Trotz der Insignifikanz von  $\omega$  und  $\alpha_1$  schneidet jenes Modell am besten ab, weshalb sich das EGARCH Modell wie folgt darstellen lässt:

$$\begin{aligned}
 R_t &= \epsilon_t \\
 \epsilon_t &= \sigma_t e_t \\
 \sigma_t^2 &= \exp \left[ 0,0006 + (-0,0759|\epsilon_{t-1}| - 0,2135e_{t-1}) + (0,2638|e_{t-2}| + 0,1511e_{t-1}) + 0,9787\sigma_{t-1}^2 \right] \\
 e_t &\sim N(0,1).
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis der Plausibilitätskontrolle (siehe Anhang C) zeigt außerdem, dass die Nullhypothese - die Residuen des Prozesses des EGARCH Modells sind nicht autokorreliert - zu  $\alpha = 0.05$  nicht verworfen wird und demnach trotz des nicht signifikanten  $\alpha_1$  eine sinnvolle Anpassung gelungen ist. Daraufhin wird der geschätzte Prozess genutzt, um der Methodologie folgend eine Volatilitätsprognose für den Zeitraum außerhalb der Testphase zu erstellen, woraus die Zeitreihe der Volatilitätsprognosen des EGARCH Modells entsteht.

### ARMA-GARCH Modell

Das ARMA-GARCH Modell ist nun eine Kombination eines linearen Prozesses und dem GARCH Prozess als Modell mit stochastischer Volatilität. Die Ausgangslage ist dabei wie in Kapitel 2.3 bereits erwähnt:

$$R_t = \mu_t + \epsilon_t.$$

Wobei  $\mu_t$  den linearen Teil des Kombinationsmodell abbildet. Der Mittelwert des stochastischen Prozesses wird also durch einen ARMA(p,q) Prozess modelliert.

$$\mu_t = v + a_1 R_{t-1} + \dots + a_p R_{t-p} + b_1 \epsilon_{t-1} + \dots + b_q \epsilon_{t-q}$$

Dabei bildet  $X_i$  die Beobachtungen der Renditen. Der Fehlerterm jenes Prozesses  $\epsilon_t = R_t - \mu_t$  wird darauf folgend durch einen GARCH(p,q) Prozess modelliert, sodass gilt:

$$\epsilon_t = \sigma_t e_t \text{ mit } e \sim N(0, 1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \epsilon_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$$

Es wird also entsprechend der Methodik die Zeitreihe der Renditen der Testphase auf das ARMA Modell für verschiedene  $p$  und  $q$  angepasst und des BIC zur Modellauswahl notiert.

BIC des ARMA Prozesses für verschieden  $p$  und  $q$

	q=1	q=2	q=3	q=4
p=1	4231,16	4232,84	4231,83	4236,38
p=2	4234,82	4212,32	4238,94	4242,67
p=3	4234,20	4241,33	4221,74	4223,80
p=4	4240,60	4245,19	4226,44	4230,80

Tabelle 7.5: Ergebnisse des BIC für verschiedene Modellordnungen des ARMA Prozesses

Das Resultat aus Tabelle 6.5 ist demnach, dass ein ARMA(2,2) Prozess zur Modellierung der Renditen angepasst wird, was folgendes Ergebnis der Parameterschätzung bringt:

Parameter	Wert	p-Wert (t-Statistik, $\alpha = 0.05$ )
v	1,6192	0,0000
a <sub>1</sub>	0,5497	0,0000
a <sub>2</sub>	-0,9561	0,0000
b <sub>1</sub>	-0,5514	0,0000
b <sub>2</sub>	0,9098	0,0000

Tabelle 7.6: Parameterschätzung und Signifikanztest des ARMA Prozesses

Die Parameter unterscheiden sich dabei signifikant von 0, weshalb der Mittelwert der Rendite  $\mu_t$  wie folgt dargestellt werden kann:

$$R_t - \epsilon_t = \mu_t = 1,6192 + 0,5497 R_{t-1} - 0,9561 R_{t-2} - 0,5514 \epsilon_{t-1} + 0,9098 \epsilon_{t-2},$$

wobei  $\epsilon_t$  die Residuen der Anpassung des ARMA(2,2) auf die Rendite darstellt und durch einen GARCH(p,q) Prozess modelliert wird.

Die Autokorrelation der quadrierten Residuen  $\epsilon_t$  ist bereits sichtbar. Auch das QQ-Diagramm weist darauf hin, dass die Residuen des ARMA Modells keiner Normalverteilung folgen. Daher ist anzunehmen, dass ARCH Effekte in den Daten vorliegen, was nun näher untersucht wird.

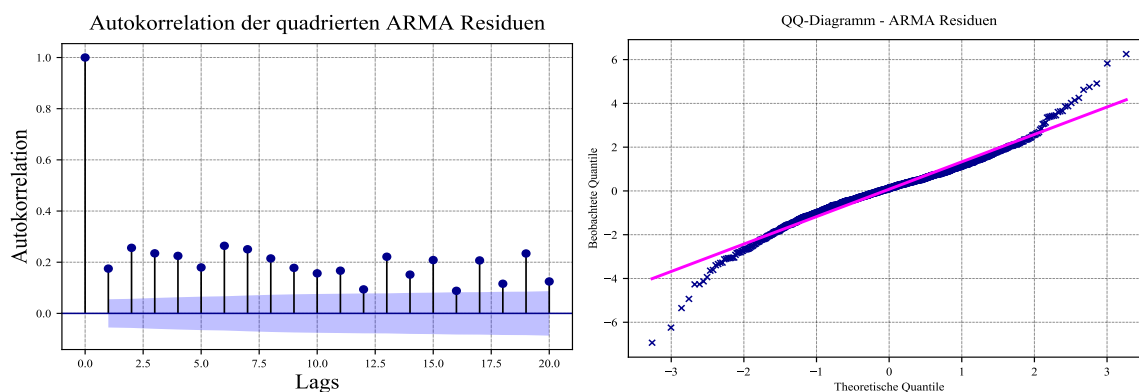


Abbildung 7.2: Die Autokorrelation (links) und QQ-Diagramm (rechts) der Residuen des ARMA Modells

**Beschreibung:** Links ist ein Autokorrelogramm der Residuen des ARMA Prozesses, rechts ein Quantil-Quantil Diagramm der Residuen abgebildet. Jenes Diagramm plottet die empirischen Quantile der Residuen gegen die theoretischen Quantile der Normalverteilung.

Eine Plausibilitätskontrolle für den ARMA(2,2) Prozess wird durchgeführt. Die Ergebnisse sind, dass die Nullhypothese keiner Autokorrelation in den Residuen vorliegt zum Niveau  $\alpha = 0.05$  teilweise abgelehnt wird und daher die intuitive Beobachtung - dass Autokorrelation in den Residuen vorliegt - bestätigt wird. Daher wird ein Engle's Test auf ARCH Effekte nach Beschreibung aus Kapitel 2.4 durchgeführt.

Plausibilitätskontrolle des ARMA Modells

K	Freiheitsgrade	$Q_{LB}$	$Q_{BP}$	kritischer Wert $\chi^2$ ( $\alpha = 0.05$ )
5	1	0,03	0,03	3,84
10	6	4,12	4,10	12,59
15	11	23,22	23,05	19,68
25	21	56,56	60,23	32,67

Tabelle 7.7: Ergebnisse des Ljung-Box und Box-Pierce Test der ARMA Residuen

Das Ergebnis des Engle's Test auf ARCH Effekte zeigt dabei, dass die Nullhypothese verworfen wird und eine bedingte Varianz in den Residuen des ARMA Modells vorliegt und durch einen GARCH(p,q) Prozess modelliert werden kann. Außerdem wird die Vermutung bestätigt, dass die Modellierung der Renditen durch einen ARMA(2,2) Prozess alleine nicht plausibel ist.

Engle's Test for Autoregressive Conditional Heteroscedasticity

Test-Statistik	299,50
Kritischer Wert der $\chi^2_{1-\alpha}$ Verteilung ( $\alpha = 1\%$ )	37,57
P-Wert	0,00

Tabelle 7.8: Ergebnisse des Engle's Tests der ARMA Residuen

Die Residuen des ARMA(2,2) Modells  $\epsilon_t$  werden nun als Zeitreihe gespeichert und auf den GARCH(p,q) Prozess angepasst und abermals die Modellordnung mittels des BIC ermittelt, welche in Anhang C abgedruckt sind. Die Parameter des verwendeten GARCH(1,1) werden daraufhin geschätzt:

Parameter	Wert	p-Wert (t-Statistik, $\alpha = 0.05$ )
$\omega$	0,0139	0,0103
$\alpha_1$	0.0740	0,0000
$\beta_1$	0.9185	0,0000

Tabelle 7.9: Parameterschätzung und Signifikanztest des GARCH Prozesses auf den AR-MA Residuen

Die Parameterschätzung wird dann auch einer Plausibilitätskontrolle unterzogen. Der statistische Ljung-Box und Box-Pierce Test ist im Anhang C niedergeschrieben, während die unten abgebildeten Autokorrelation der quadrierten GARCH Residuen und das QQ-Diagramm indizieren, dass die Residuen des GARCH Prozesses auf die Residuen des ARMA Prozesses nicht autokorreliert und approximativ normalverteilt sind, was die statistischen Tests (siehe Anhang C) bestätigen.

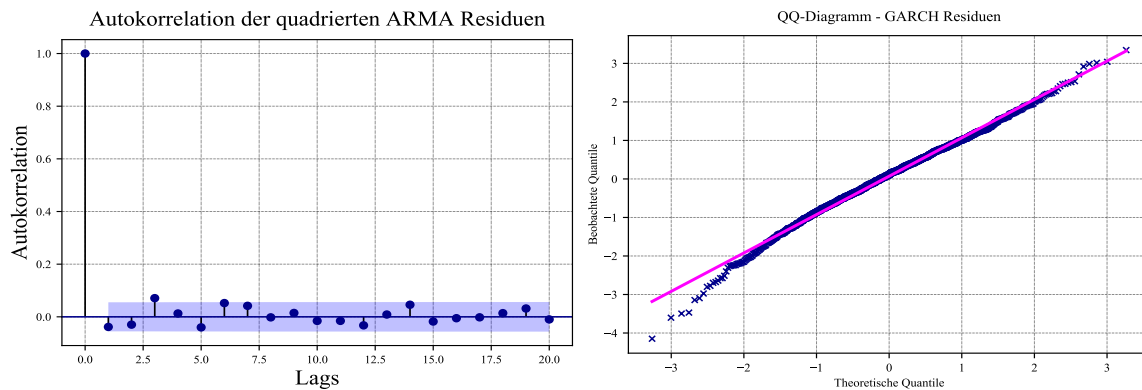


Abbildung 7.3: Die Autokorrelation (links) und QQ-Diagramm (rechts) der Residuen des GARCH Modells der ARMA Residuen

**Beschreibung:** Links ist ein Autokorrelogramm der Residuen des GARCH Prozesses der Residuen des ARMA Prozesses, rechts ein Quantil-Quantil Diagramm. Jenes Diagramm plottet die empirischen Quantile der Residuen gegen die theoretischen Quantile der Standardnormalverteilung.

Gemeinsam mit dem ARMA(2,2) Prozess wird folgendes Modell der Rendite erstellt:

$$R_t = 1,6192 + 0,5497R_{t-1} - 0,9561R_{t-2} - 0,5514\epsilon_{t-1} + 0,9098\epsilon_{t-2} + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t = \sigma_t e_t \text{ mit } e \sim N(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = 0,0139 + 0,0740\epsilon_{t-1}^2 + 0,9185\sigma_{t-1}^2.$$

Gegeben der Methodologie wird nun eine 21-tägige Prognose der quadrierten Renditen zu jedem Zeitpunkt erstellt und aufsummiert. Nach Annualisierung und Berechnung der Wurzel entsteht so eine Prognose der jährlichen Volatilität zu jedem Zeitpunkt, welche daraufhin weiter verwendet werden kann.

## 7.2 Ergebnisse der Anwendung

### Portfoliokonstruktion

Gemeinsam mit den Moving Average Prognosen und dem VDAX-NEW bilden die Zeitreihenmodelle sechs Zeitreihen mit täglichen Prognosen der jährlichen Volatilität, welche als  $\sigma_{i,t}^{(a)}$  mit  $i \in 1, 6$  in die Formel zur Errechnung der dynamischen Gewichtungen einzusetzen sind, sodass gemeinsam mit der Zielvolatilität  $\sigma_p = 10\%$  das Exposure  $w_{i,t}$  auf den DAX zu jedem Zeitpunkt berechnet werden kann. Gemäß der Gleichung

$$R_{i,t} = w_{i,t} R_{DAX,t}$$

kann nun für jede der Volatilitätsprognosemodelle die spezifische Rendite des Portfolios errechnet und analysiert werden.

### Renditenanalyse

Zunächst betrachten wir einige statistische Merkmale der Renditeergebnisse der Volatilitätsstrategie auf Basis der sechs verschiedenen Volatilitätsprognosen und der Buy&Hold Strategie, welche zu jedem Zeitpunkt komplett im DAX investiert ist und somit durch die Zeitreihe  $R_{DAX,t}$  gegeben ist. Jene sind in Tabelle 6.10 abgetragen und in Anhang D definiert:

Merkmal	Buy&Hold	VDAX	GARCH(1,1)	EGARCH(2,2,1)	SMA	EWMA	ARMA-GARCH
Stichprobe	5069	5069	5069	5069	5069	5069	5069
Mittelwert	0,0245%	0,0249%	0,0172%	0,0307%	0,0134%	0,0144%	0,0128%
Standardabweichung	1,4747%	0,5405%	0,5803%	0,5753%	0,6432%	0,732%	0,6079%
Skewness	0,0821	-0,0270	-0,1159	0,0529	-0,1955	-0,1277	-0,1590
Excess Kurtosis	4,6737	0,3060	-0,2148	0,0751	1,6204	3,2335	0,1837
Spannweite	19,8942%	4,3192%	3,865%	4,4576%	7,4051%	10,2851%	4,9769%

Tabelle 7.10: Statistische Momente der Anlagestrategien auf Basis täglicher Renditen

Die statistischen Momente der verschiedenen Strategien zeigen bereits, dass die Volatility Targeting Strategie auf Basis des EGARCH(2,2,1) und VDAX-NEW Modells die höchsten täglichen Durchschnittsrendite und niedrigsten Durchschnittsvolatilitäten aufweisen. Um weitere statistische Gegebenheiten zu visualisieren, ist die Betrachtung einiger Verteilungen der Renditen nützlich.



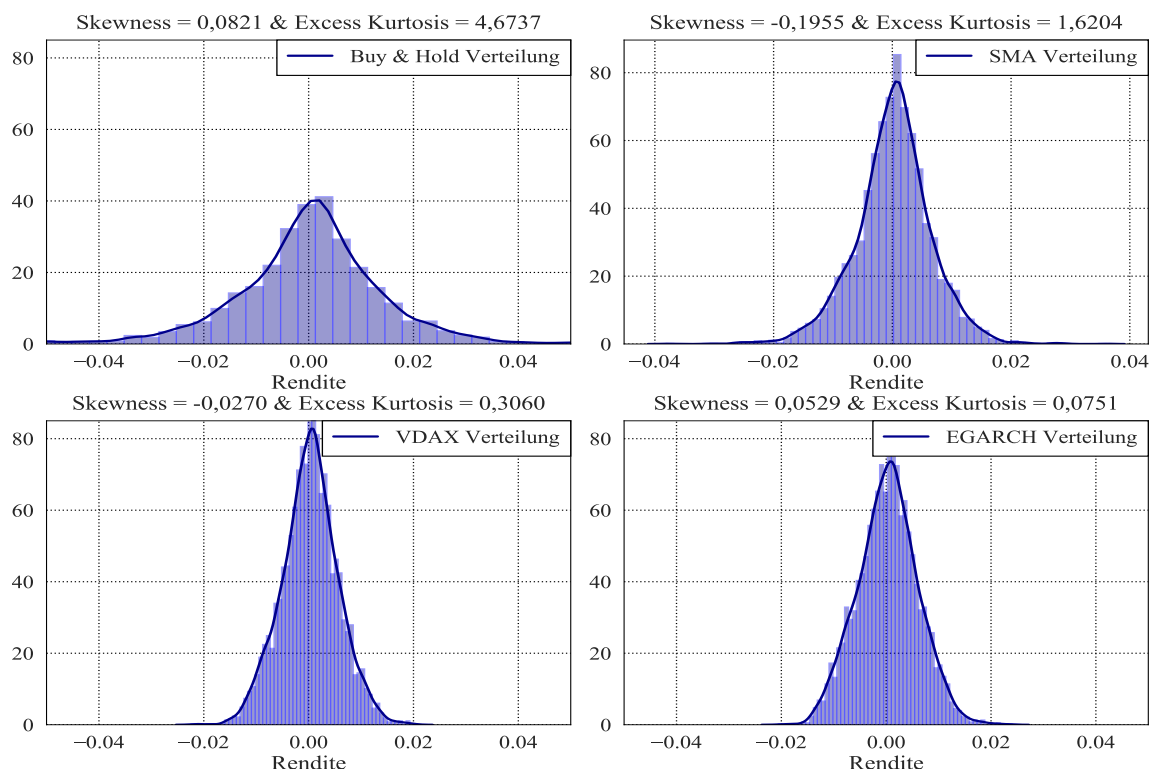


Abbildung 7.4: Die Renditeverteilungen der Volatility Targeting Strategie auf Basis verschiedener Volatilitätsprognosemodelle

Die Betrachtung der verschiedenen Modelle zusammen mit den statistischen Momenten lässt dabei den Schluss zu, dass die Strategien signifikant andere Renditeverteilungen aufweisen als die simple Buy&Hold-Strategie. Das wichtigste Merkmal, welches sich bei jeder Renditeverteilung aller Prognosemodelle zeigt, ist, dass die Excess Kurtosis im Gegensatz zur Verteilung der DAX Renditen deutlich näher an der Excess Kurtosis einer Normalverteilung liegt. Je erfolgreicher die Prognose dabei ist, desto stärker scheint sich dieses Merkmal zu manifestieren. Zur weiteren Betrachtung liegt nun ein Quantil-Quantil-Diagramm vor, welches die beobachteten Quantile der Renditeverteilung mit den theoretischen Quantilen einer Normalverteilung in Bezug setzt.

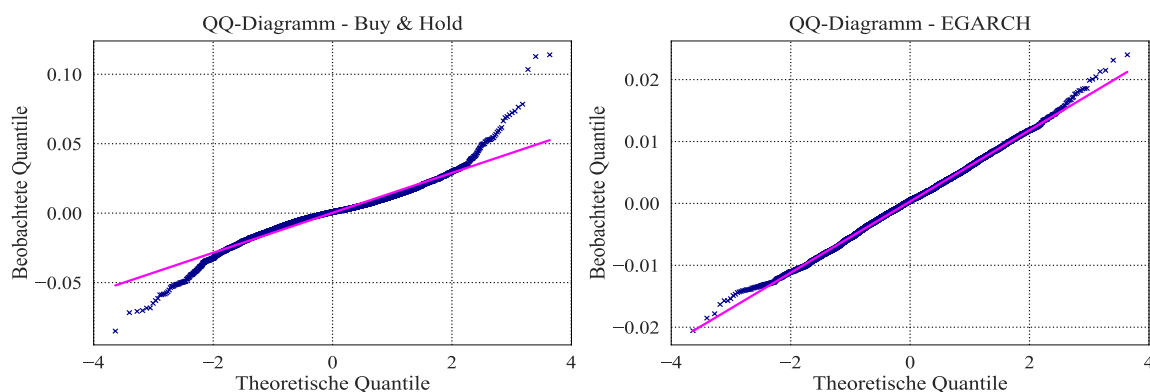


Abbildung 7.5: QQ-Diagramm der Renditen der Strategie für die Buy&Hold und EGARCH(2,2,1) Volatilitätsprognosen

**Beschreibung:** Abgebildet sind Quantil-Quantil Diagramme der Renditereihen der Buy and Hold Strategie und der Strategie auf Basis von EGARCH Prognosen. Jene Diagramme plotten die empirischen Quantile der Residuen gegen die theoretischen Quantile der Normalverteilung.

Die QQ-Diagramme zeigen, dass die Quantile der Renditeverteilung der Buy&Hold Strategie nicht der Normalverteilung entsprechen und zu viele Extremwerte für die positiven und negativen Renditen vorliegen. Die Verteilung ist somit leptokurtisch. Die Quantile der Renditeverteilung der Strategie auf Basis der EGARCH(2,2,1) Prognosen hingegen entsprechen wesentlich eher denen einer Normalverteilung und weisen wesentlich weniger Ausreißer auf. Diese Schlussfolgerung scheint in begrenzten Maßen für jede der verwendeten Prognosemodelle zuzutreffen, da sowohl Spannweite als auch Kurtosis im Vergleich zur Buy & Hold Strategie für jede Strategie gesunken ist (siehe Anhang E für die restlichen QQ-Diagramme).

Zur weiteren Analyse werden die kumulativen Renditen der einzelnen Strategien betrachtet.

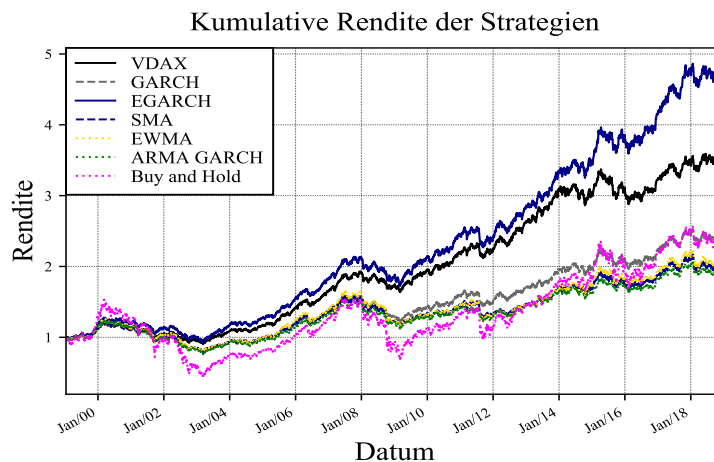


Abbildung 7.6: Kumulative Rendite von drei Strategien

**Beschreibung:** *Abgebildet ist die Entwicklung einer Geldeinheit bei Investition mit der Strategie auf Basis der jeweiligen Volatilitätsprognose.*

Es zeigt sich, wie aus vorheriger statistischer Betrachtung vermutet, dass die kumulative Rendite der Strategie basierend auf dem EGARCH(2,2,1) Modell am höchsten ist und außerdem mit einer durchschnittlichen Volatilität von 9,13% dem Volatilitätsziel von 10% nahe ist. Die Strategie basierend auf den impliziten Volatilitäten schneidet ähnlich gut ab, auch wenn sie die Volatilität etwas zu überschätzen scheint, da die durchschnittliche Volatilität am kleinsten ist. Allgemein lässt sich jedoch festhalten, dass die dynamische Anpassung eines Investment in den DAX basierend auf Volatilitätsprognosen zu verbesserten risikoadjustierten Renditen führt, da für jede Methodik die Volatilität niedriger bei ähnlich hohen oder höheren Renditen ist und demnach eine höhere Sharpe Ratio vorliegt.

Strategie	Buy&Hold	VDAX	GARCH(1,1)	EGARCH(2,2,1)	SMA	EWMA	ARMA-GARCH
Durchschnittliches Exposure $\bar{\sigma}$	100%	47,61%	53,45%	52,28%	53,29%	57,49%	54,94%
Jährliche Rendite $\bar{r}$	5,62%	7,49%	5,95%	8,72%	5,21%	5,27%	5,15%
Jährliche Volatilität $\bar{\sigma}$	23,41%	8,58%	9,21%	9,13%	10,21%	11,62%	9,65%
Sharpe Ratio	0,24	0,87	0,64	0,96	0,51	0,45	0,53
Jährliche Downside Volatilität $\bar{\sigma}_D$	16,97%	5,37%	5,74%	5,44%	7,11%	8,33%	6,27%
Sortino Ratio	0,33	1,40	1,04	1,60	0,73	0,63	0,82
Maximaler Draw-down	-72,68%	-25,70%	-36,95%	-28,21%	-35,78%	-37,18%	-38,27%

Tabelle 7.11: Statistische Renditemerkmale der Anlagestrategien

Nun wird die Volatilität der Portfolios weiter untersucht. So ist zu beobachten, dass die Buy&Hold Strategie sehr starken Schwankungen ausgesetzt ist mit einer durchschnittlichen jährliche Volatilität der Renditenvolatilität von 36,91%, während die SMA Strategie eine durchschnittliche Volatilität der Renditenvolatilität von 17,45% und die EGARCH Strategie von 7,5% aufweist. Das Ziel der Strategie, Volatilität zu glätten, ist somit gelungen und es kann den Daten entnommen werden, dass dabei Strategien mit stochastischer Volatilität als Prognosebasis eine bessere Glättung von Aktienvolatilitäten erreichen. Dies ist konsistent mit den Ergebnissen der anderen Prognosemodelle, welche in Anhang E zu finden sind.

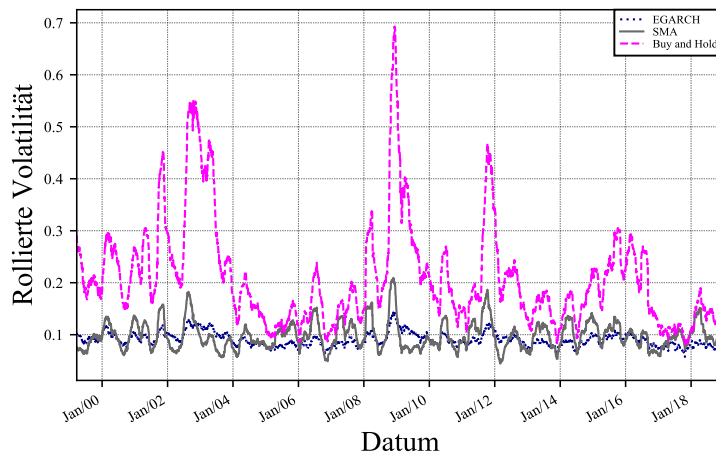


Abbildung 7.7: Rollierte annualisierte Volatilität der letzten 2 Monate (=52 Tage)

Die weitere Betrachtung gilt der Untersuchung des negativen Renditeverhaltens und der Drawdown Perioden der Anlagestrategien. So ist zu sehen, dass die Schwankungen der negativen Renditen für jede der Strategien deutlich kleiner ist als die Volatilität der negativen Renditen der Buy&Hold Strategie. Dies korrespondiert mit der Beobachtung, dass die Spannweite der Renditen niedriger ist und bestätigt die Vermutung, dass durch Reduzierung des Exposures in Zeiten hoher Schwankung hohe Verluste vermieden werden können und gibt damit empirische Indizien für die Existenz des Leverage-Effekts (die Drawdownanalyse der restlichen Strategien sind in Anhang E abgebildet).

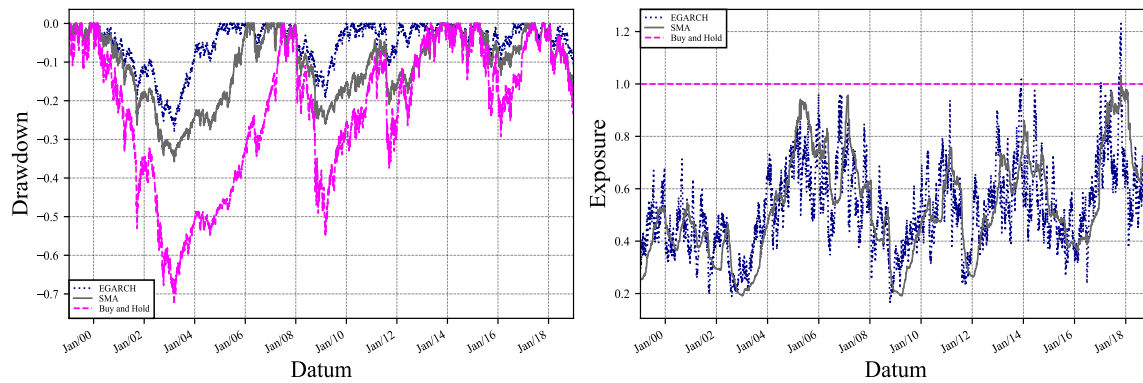


Abbildung 7.8: Drawdown der drei Strategien (links) und deren Exposure (rechts)

**Beschreibung:** Links abgebildet ist die Wertentwicklung einer Geldeinheit im Vergleich zum maximalen Wert den die Geldeinheit zu jedem Zeitpunkt einmal erreicht hatte. Das Exposure gibt die jeweilige Gewichtung des Investments in den DAX an.

Die Abbildung zeigt, dass die Phasen anhaltender Verluste mit Phasen niedrigem Exposures bei beiden Prognosemodellen einhergehen. So ist zu sehen, dass der lange Drawdown bis Mitte 2003 mit kontinuierlich kleinem Exposure einhergeht, während die Erholungsphase des DAX bis Ende 2007 von tendenziell steigender Investition in den DAX geprägt ist. Dabei ist dem Exposure außerdem zu entnehmen, dass die Strategie auf Basis der EGARCH Prognose deutlich frequenter das Exposure anpasst. Jene schnelle Anpassungen nach oben und unten scheinen dabei trendunabhängig den Drawdown weiter zu reduzieren und somit mitverantwortlich für die gute Performance der Strategie zu sein. Wie bereits definiert unterscheidet das EGARCH-Modell zwischen negativen und positiven vorherigen Realisationen bei der Vorhersage der zukünftigen Realisationen. Dies bildet ein weiteres empirisches Argument für die Existenz des Leverage-Effekts, da von den gewählten Modellen das EGARCH(2,2,1) Modell die besten Ergebnisse aufweist.

# Kapitel 8

## Fazit und Ausblick

Diese Arbeit befasste sich mit Zeitreihenmodellen univariater, stochastischer Prozesse und wendete die vorgestellten Modelle auf die Modellierung von Aktienvolatilitäten des Deutschen Aktienindex (DAX) an. Der Fokus liegt dabei auf der Benutzung und Untersuchung von Zeitreihenmodellen mit stochastischer Volatilität, welche zeitabhängige und bedingte Heteroskedastizität aufweisen, während die genannten linearen Zeitreihenmodelle bei Stationarität zeitunabhängige Varianzen besitzen.

Die empirische Untersuchung von Aktienrendite zeigt dabei allerdings, dass sich die Varianzen der Renditen stark ändern. So stellt Cont (2000) fest, dass die Renditezeitreihen sowohl Volatilitäts-Kluster als auch eine negative Korrelation zwischen hohen Volatilitäten und Renditen (Leverage-Effekt) aufweisen. Somit sind empirische Grundlagen für die Modellierung von Aktienvolatilitäten durch Zeitreihenmodelle mit stochastischer Volatilität gegeben.

Es wurde dabei die Modellierung von Aktienvolatilitäten durch drei verschiedene Abwandlungen des ARCH-Modells mit einem Einbezug eines ARMA Modells mit besonderem Fokus auf den Prozess der Schätzung der Modellordnung und der zu verwendenden Parameter bearbeitet. Jene Prognosen wurden gemeinsam mit zwei Durchschnittsmodellen und der Markterwartung eingesetzt, um ein Aktienportfolio mit möglichst konstanter Volatilität zu konstruieren.

Neben der Illustrierung des Prognoseprozesses lag der Fokus der Arbeit darauf, empirisch angenommene stilisierte Fakten durch die Ergebnisse des Volatility Targetings zu bestätigen und Unterschiede zwischen den verschiedenen Zeitreihenmodellen mit stochastischer Volatilität zu zeigen. Außerdem wird untersucht, warum die Strategie, gegeben den verschiedenen Prognosemodellen, positive Implikationen für Aktieninvestoren hat. Die Ergebnisse von Perchet, de Carvalho, Heckel, Moulin (2015), dass Volatility Targeting aufgrund von Volatilitäts-Klustern, leptokurtischer Renditeverteilung und der negativen Korrelation zwischen Volatilität und Rendite zu besseren risikoadjustierten Renditen führt, konnten unterstützt werden. Des Weiteren wurde gezeigt, dass die Strategie gerade in Zeiten von Verlusten des Aktienmarktes in der Lage ist jene durch niedriges Exposure zu mitigieren.

Eine weitere Untersuchung ist im Hinblick auf die Inkorporation von weiteren Progno-

semodellen (z.B. TGARCH, GJR-GARCH), verschiedenen Märkten aus verschiedenen Ländern und mit Einbezug von Transaktionskosten möglich. Außerdem wäre eine Vergleichsstudie zwischen Volatility Targeting Strategien auf Basis von Volatilitätsprognosen von Zeitreihenmodellen mit stochastischer Volatilität und des Marktes mit traditionellen Strategien zur Reduzierung des Risikos eines Portfolios (z.B. Aktien 60%/Anleihen 40% oder CPPI Algorithmus) sinnvoll.

# Kapitel 9

## Anhang

### Anhang A

Die Autokorrelation des weißen Rauschens zeigt den typischen Verlauf, wobei zusehen ist, dass ab Lag  $h = 1$  keine Autokorrelation in den Realisationen auftritt.

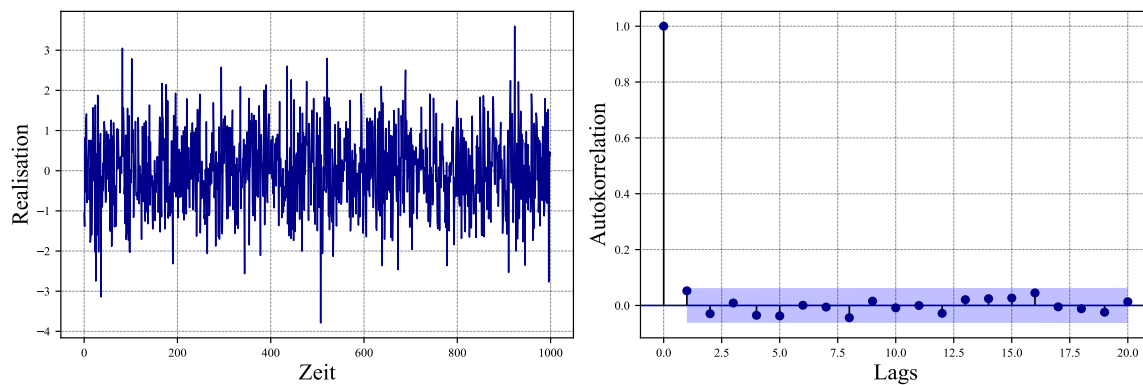


Abbildung 9.1: Realisationen des Weißen Rauschens (links) und die Autokorrelation (rechts)

Die Autokorrelogramme der MA(1) Prozesse zeigen den Abbruch der Autokorrelation nach dem ersten Lag, während die partielle Autokorrelation gegen null alternierend oder aus dem negativen konvergiert.

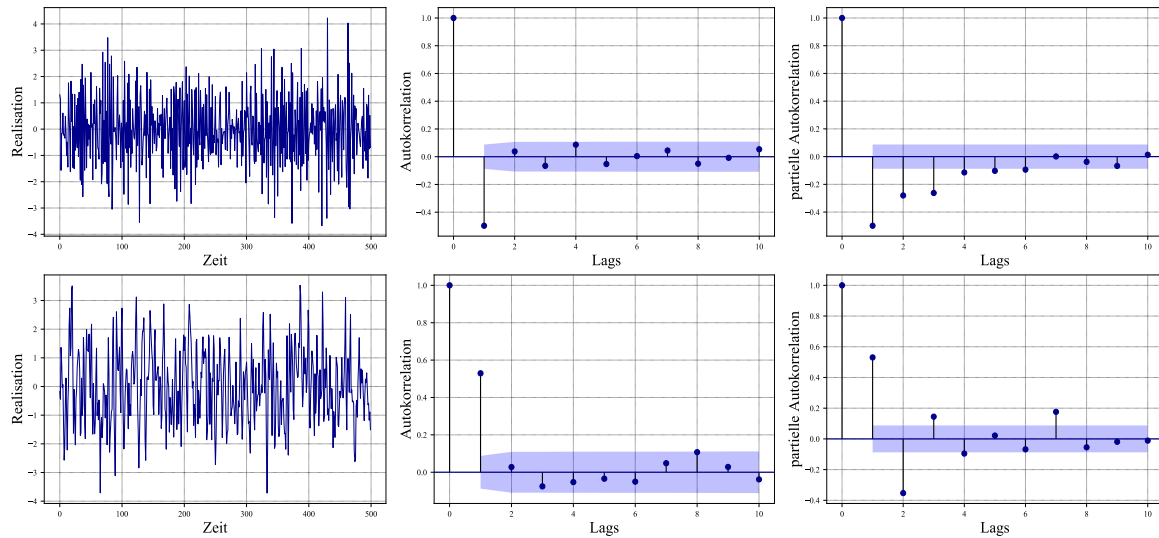


Abbildung 9.2: Realisationen(1), die Autokorrelationen (2) und die partiellen Autokorrelationen (3) eines MA(1) Prozesses

**Beschreibung:** Es wurden zwei MA(1) Prozesse definiert. Zunächst ein Prozess, bei dem  $\beta_1 = 0.7$  gilt. Bei dem anderen Prozesse gilt, dass  $\beta_1 = -0.7$  wahr ist.

Das Autokorrelogramm zeigt, dass die Autokorrelation für den Fall  $a_1 > 0$  gegen null aus dem positiven konvergiert, während für den Fall  $a_1 < 0$  eine alternierende Konvergenz vorliegt. Für die partiellen Autokorrelation des AR(1) Prozesses ist zu beobachten, dass der Abbruch der Autokorrelation nach dem ersten Lag auftritt.

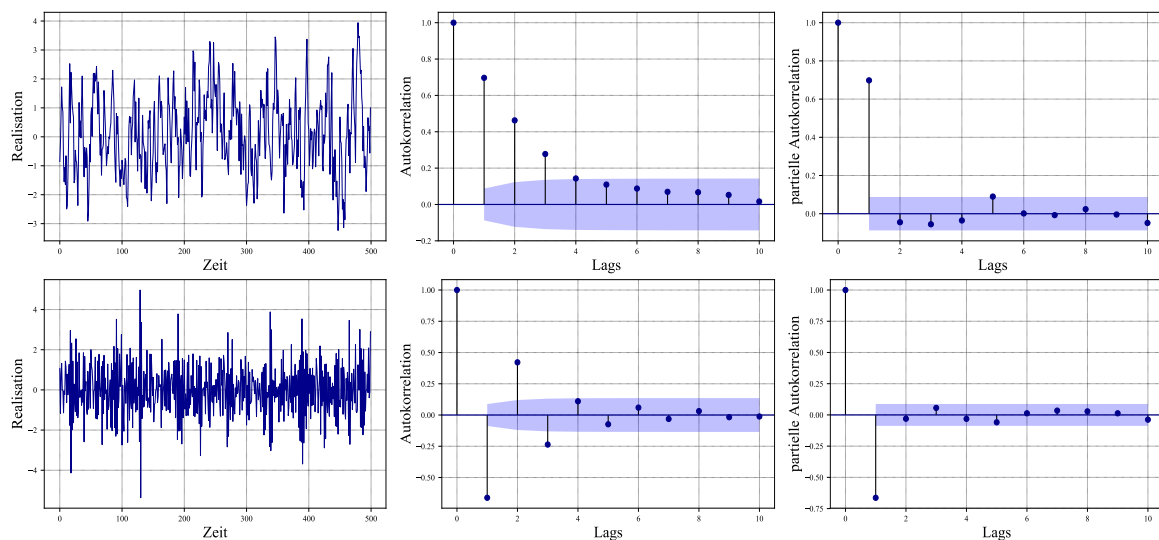


Abbildung 9.3: Realisationen(1), die Autokorrelationen (2) und die partiellen Autokorrelationen (3) eines AR(1) Prozesses

**Beschreibung:** Es wurden zwei AR(1) Prozesse definiert. Zunächst ein Prozess, bei dem  $\alpha_1 = 0.7$  gilt. Bei dem anderen Prozesse gilt, dass  $\alpha_1 = -0.7$  wahr ist.



Für den Fall eines positiven Parameters und eines negativen Parameter  $a_1$  oder  $b_1$  ist beim ARMA(1,1) Prozess zu erkennen, dass die Autokorrelation vom Negativen aus alternierend gegen null konvergiert, wenn  $a_1 < 0$  gilt und die Autokorrelation aus dem Positiven gegen null konvergiert, wenn  $b_1 < 0$  wahr ist. Für den erstenen

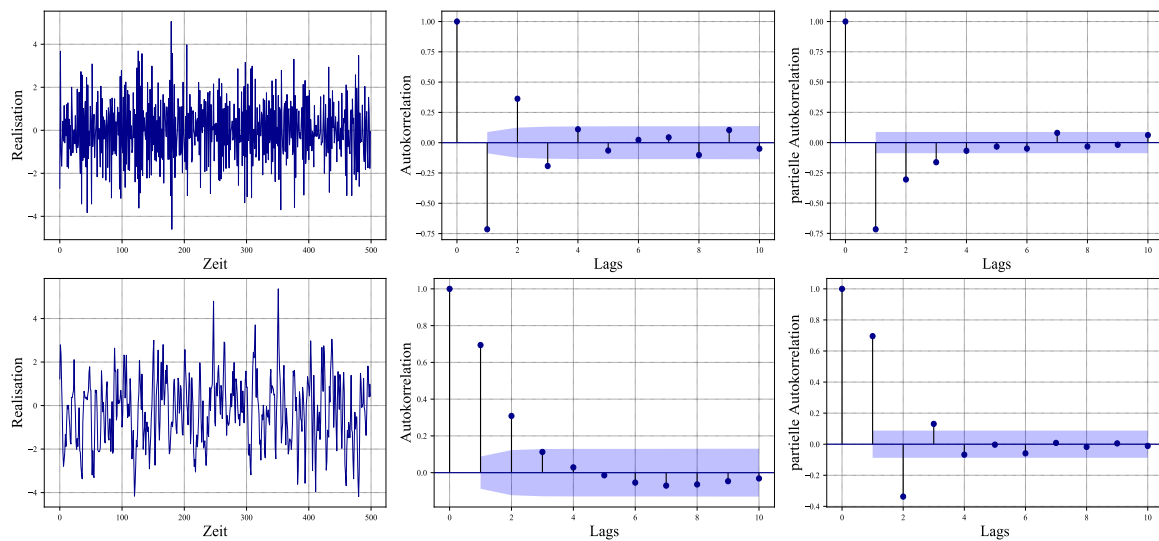


Abbildung 9.4: Realisationen(1), die Autokorrelationen (2) und die partiellen Autokorrelationen (3) eines ARMA(1) Prozesses

**Beschreibung:** Es wurden zwei ARMA(1,1) Prozesse definiert. Die beiden ARMA(1,1) Prozesse haben je einen positiven und einen negativen Parameter. So gilt beim zweiten Prozess  $\alpha_1 = -0.5$  und  $\beta_1 = 0.5$  und beim dritten Prozess  $\alpha_1 = 0.5$  und  $\beta_1 = -0.5$ .

**Anhang B****Dickey-Fuller Verteilungstabelle**

Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Ordnung

Beobachtungen	1%	2,5%	5%	10%
25	-3,75	-3,33	-3,00	-2,62
50	-3,58	-3,22	-2,93	-2,60
250	-3,46	-3,14	-2,87	-2,57
>500	-3,44	-3,12	-2,86	-2,57

Tabelle 9.1: Kritische Werte der Dickey-Fuller Verteilung mit Fehlerwahrscheinlichkeit  $\alpha$ **Chi-Quadrat Verteilungstabelle**

Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Ordnung

Freiheitsgrade	80%	90%	95%	99%
1	1,64	2,71	3,84	6,63
2	2,22	4,61	5,99	9,21
3	4,64	6,25	7,81	11,34
6	8,56	10,64	12,59	16,81
7	9,80	12,02	14,07	18,48
8	11,03	13,36	15,51	20,09
10	13,44	15,99	18,31	23,21
11	14,63	17,28	19,68	24,73
15	19,31	22,31	25,00	30,58
20	25,04	28,41	31,41	37,57
22	27,30	30,81	33,92	40,29
23	28,43	32,01	35,17	41,64
50	58,16	63,17	67,50	76,15

Tabelle 9.2: Kritische Werte der  $\chi^2$  Verteilung mit Fehlerwahrscheinlichkeit  $\alpha$ **Anhang C****Modellordnung und Plausibilitätskontrolle des EGARCH Modells**

Für die Bestimmung der Modellordnung des EGARCH Prozesses wurde  $q = 1$  gesetzt, während das BIC für jeder der Kombination für  $p$  und  $o$  abgetragen ist.

BIC des EGARCH Prozesses für verschiedene  $p$  und  $o$ 

	$o=1$	$o=2$	$o=3$	$o=4$
$p=1$	3840.24	3834.15	3837.76	3838.3
$p=2$	3834.26	3829.16	3833.54	3834.65
$p=3$	3834.93	3830.24	3834.89	3836.77
$p=4$	3841.15	3835.92	3840.34	3842.14

Tabelle 9.3: Ergebnisse des BIC für verschiedene Modellordnungen des EGARCH Prozesses

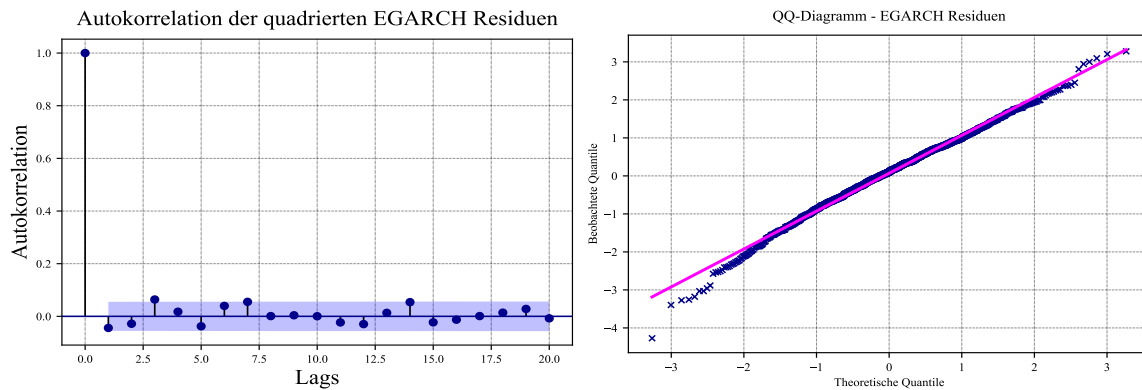


Abbildung 9.5: Die Autokorrelation (links) und QQ-Diagramm (rechts) der Residuen des EGARCH Modells

Die Autokorrelation und das QQ-Diagramm der Residuen des EGARCH Prozesses indizieren ein weißes Rauschen.

Plausibilitätskontrolle des EGARCH Modells

$h$	Freiheitsgrade	$Q_{LB}$	$Q_{BP}$	kritischer Wert $\chi^2$ ( $\alpha = 0.05$ )
3	1	0,13	0,13	3,84
5	3	0,48	0,48	7,81
10	8	4,84	4,82	15,51
25	23	22,56	22,27	35,17

Tabelle 9.4: Ergebnisse des Ljung-Box und Box-Pierce Test des EGARCH Prozesses

Die Plausibilität wird zudem mit dem Ljung-Box und Box-Pierce Test überprüft und herausgefunden, dass die Nullhypothese - dass die Residuen nicht autokorreliert sind - nicht verworfen wird.

### Modellordnung und Plausibilitätskontrolle des ARMA-GARCH Modells

Für die Bestimmung der Modellordnung des GARCH Prozesses auf die Residuen des ARMA Prozesses wurde das BIC für jeder der Kombination für  $p$  und  $q$  abgetragen.

BIC des GARCH Prozesses für verschieden  $p$  und  $q$ 

	q=1	q=2	q=3	q=4
p=1	3845,27	3852,41	3859,55	3866,69
p=2	3847,70	3854,83	3866,68	3869,11
p=3	3847,80	3853,40	3855,03	3861,87
p=4	3854,94	3860,54	3862,14	3868,18

Tabelle 9.5: Ergebnisse des BIC für verschiedene Modellordnungen des GARCH Prozesses auf den ARMA Residuen

Die Plausibilität wird zudem mit dem Ljung-Box und Box-Pierce Test überprüft und herausgefunden, dass die Nullhypothese - dass die Residuen nicht autokorreliert sind - nicht verworfen wird.

Plausibilitätskontrolle des GARCH Prozesses

h	Freiheitsgrade	$Q_{LB}$	$Q_{BP}$	kritischer Wert $\chi^2$ ( $\alpha = 0.05$ )
3	1	1,77	1,76	3,84
5	3	2,25	2,24	7,81
10	8	8,22	8,18	15,51
25	23	20,42	20,23	35,17

Tabelle 9.6: Ergebnisse des Ljung-Box und Box-Pierce Test des GARCH Prozesses auf den ARMA Residuen

## Anhang D

### Statistische Momente

- Stichprobe: Die Anzahl von Datenpunkten.
- Mittelwert: Arithmetisches Mittel der Renditen.
- Standardabweichung: Mittlere tägliche Volatilität der Renditen.
- Skewness: Schiefe der Renditeverteilung. Maß für die Asymmetrie der Renditeverteilung.
- Kurtosis: Maß für die Wölbung der Renditeverteilung und die Gleichmäßigkeit der Renditeverteilung.
- Spannweite: Differenz zwischen der größten und niedrigsten Rendite der Verteilung.

### Renditemerkmale

- Exposure: Gewicht des Portfolios, welches in den DAX investiert ist.
- Durchschnittliche jährliche Rendite: Die endgültig erzielte kumulative Rendite  $CR$  wird mit  $(1 + CR)^{\left(\frac{252}{5069}\right)} - 1$  in eine annualisierte Rendite umgerechnet.
- Durchschnittliche jährliche Volatilität: Die annualisierte Standardabweichung der Renditeserie.

- Sharpe Ratio: Rendite Risiko Kennzahl. Durchschnittliche jährliche Rendite durch die Volatilität geteilt.
- Durchschnittliche jährliche Downside Volatilität: Standardabweichung der negativen Renditen.
- Sortino Ratio: Rendite Risiko Kennzahl. Durchschnittliche jährliche Rendite durch die Downside Volatilität geteilt.
- Drawdown: Verlust eines Investments seit dem Höchststand.

## Anhang E

Unten abgetragen sind die Renditeverteilungen der Strategie auf Basis der restlichen Volatilitätsprognosen, welche den gemachten Schluss unterstützen, dass die Renditeverteilung nicht so leptokurtisch ist, wie die Renditeverteilung des DAX.

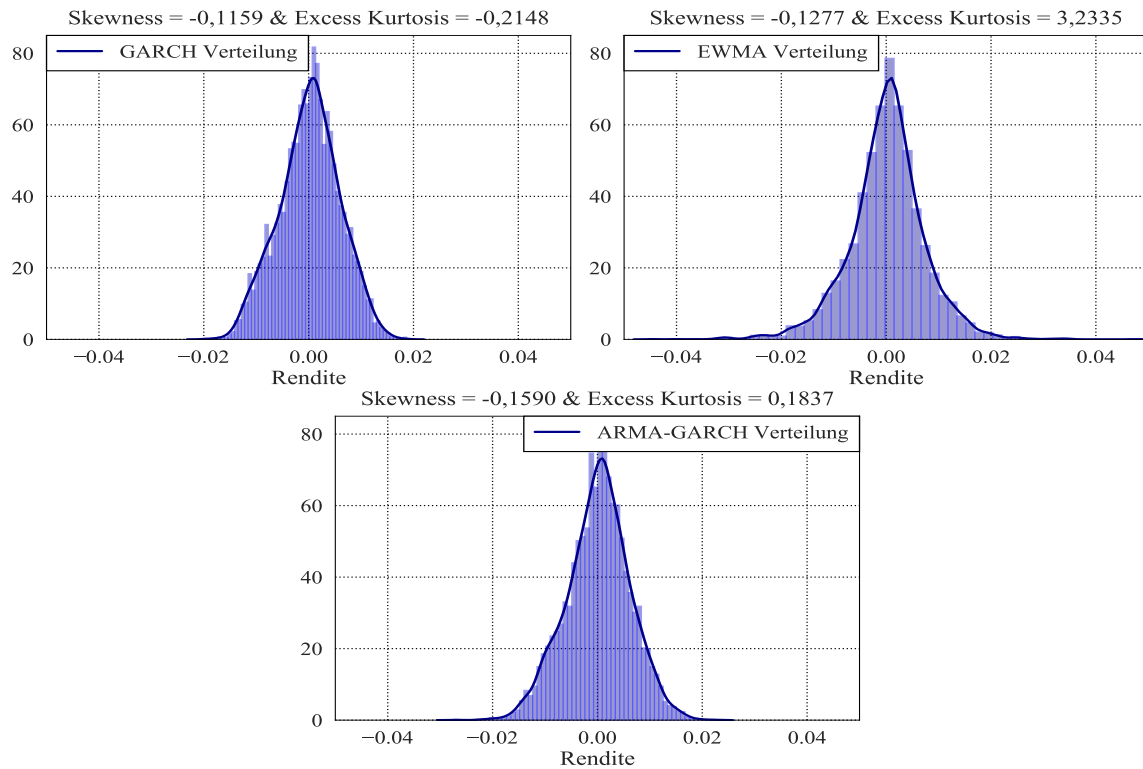


Abbildung 9.6: Die Renditeverteilungen der Volatility Targeting Strategie auf Basis der restlichen Volatilitätsprognosen

Abgebildet sind die QQ-Diagramme der Rendite der Strategie auf Basis der restlichen Modelle. Dabei ist zu sehen, dass die Renditen auf Basis Zeitreihenmodelle gerade im Vergleich zu denen auf Basis der Durchschnittsmodelle deutlich näher einer Normalverteilung sind.

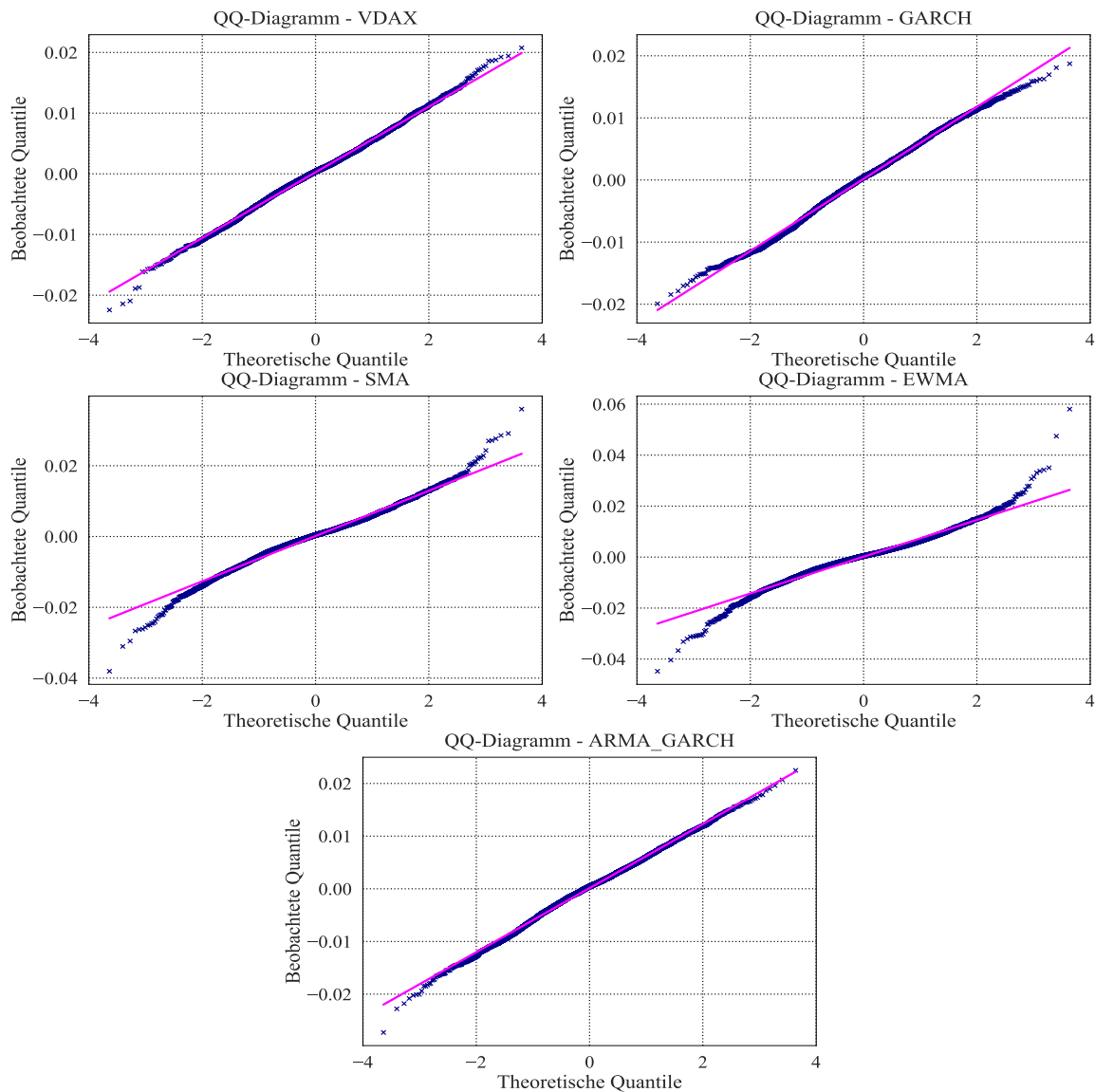


Abbildung 9.7: QQ-Diagramm der Renditen der Volatility

Targeting Strategie auf Basis der restlichen Volatilitätsprognosen

**Beschreibung:** *Abgebildet sind Quantil-Quantil Diagramme der Renditereihen der Strategie auf Basis der übrigen Prognosemodelle. Jene Diagramme plotten die empirischen Quantile der Residuen gegen die theoretischen Quantile der Normalverteilung.*

Für alle Renditeergebnissen ist die rollierte Volatilität abgetragen, wobei der Schluss unterstützt wird, dass jedes Modell die Schwankung der Renditevolatilität abnimmt.

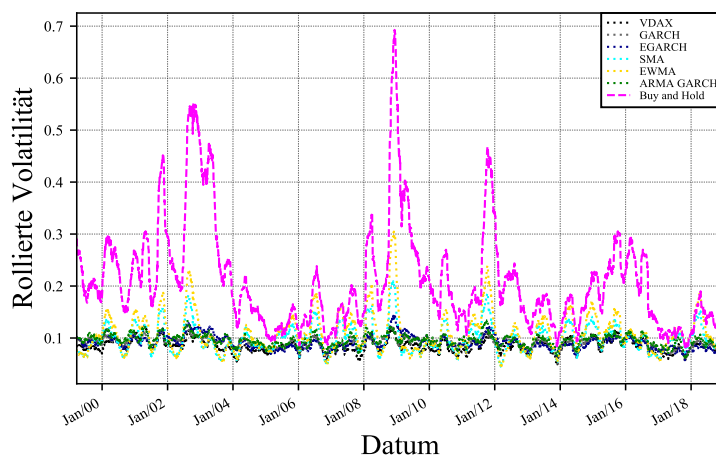


Abbildung 9.8: Rollierte annualisierte Volatilität der letzten 2 Monate (=52 Tage)

Jener Schluss wird außerdem durch die Standardabweichung der jährlichen rollierten Volatilität gestützt.

Strategie	Buy&Hold	VDAX	GARCH(1,1)	EGARCH(2,2,1)	SMA	EWMA	ARMA-GARCH
Standardabweichung der jährlichen rollierten Volatilität der Rendite $\bar{\sigma}$	36,90%	8,95%	7,72%	7,52%	17,45%	22,20%	9,23%

Tabelle 9.7: Volatilitäten der Rollierte annualisierten Volatilitäten der letzten 2 Monate (=52 Tage)



Das unten abgebildete Diagramm zeigt den Drawdown der Strategie auf Basis jedes Prognosemodells. Demnach ist die gemachte Folgerung, dass die EGARCH und VDAX-NEW basierte Strategien die besten statistischen Merkmale aufweisen zu unterstützen.

Die Renditen scheinen im ähnlichen Maße für die anderen Modelle zu sinken und fallen. Es ist allerdings bei genauerer Betrachtung zu sehen, dass ein Performancevorteil für die Strategie auf Basis des GARCH und ARMA-GARCH besteht.

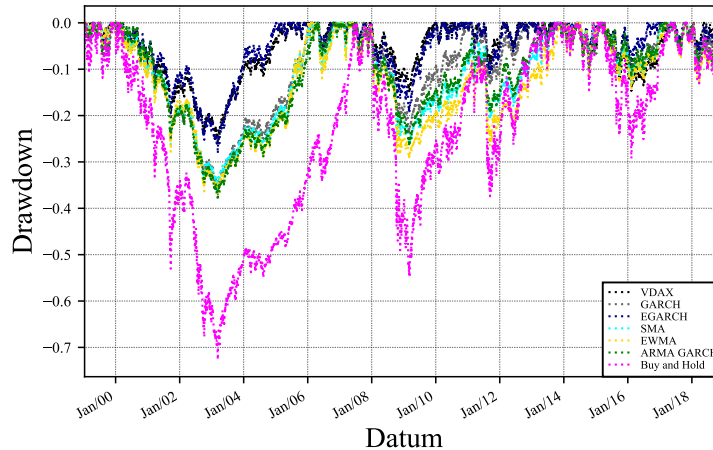


Abbildung 9.9: Drawdowndiagramm der Volatility Targeting Strategie auf Basis der aller Volatilitätsprognosen

## Anhang F

Zur Durchführung der Berechnungen wurde die Programmiersprache *Python* mit verschiedenen Paketen und Microsoft Excel verwendet. Die Entwicklungsumgebung und die Verwendeten Pakete sind dabei unten abgetragen. Dabei wurden zwei Umgebungen verwendet. Die *.py*-Dateien wurden in der Spyder Entwicklungsoberfläche geschrieben sowie ausgeführt und beinhalten fast alle Berechnungen und Prognosen, während die *.ipynb*-Dateien Noetbooks der Jupyter Oberfläche darstellen, welche zumeist für Graphikerstellungen genutzt wurde. Ein Excel-Sheet wurde außerdem verwendet um aus den Volatilitätsprognosen die Aktiengewichtungen und die daraus resultierenden Renditen sowie kumulativen Renditen zu berechnen.

Umgebung	Pakete
Spyder 3.3.3	Numpy 1.15.4
Jupyter Notebook 5.7.4	Pandas 0.24.1
Microstoft Excel 2016	Matplotlib 3.0.3
	Seaborn 0.9.0
	ARCH 4.7.0
	Statsmodels 0.9.0
	Scipy 1.1.0

Tabelle 9.8: Verwendete Entwicklungsumgebungen und -pakete

# Literaturverzeichnis

- [1] Chambers, Cleveland, Kleiner, Tukey (1983). *Graphical Methods for Data Analysis*. CRC Press Taylor Francis Group.
- [2] Franke, Härdle, Hafner (2001). *Einführung in die Statistik der Finanzmärkte*. Springer Heidelberg New York Dordrecht London.
- [3] Hamilton (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- [4] Hassler (2007). *Stochastische Integration und Zeitreihenmodellierung*. Springer Heidelberg New York Dordrecht London.
- [5] Hull (1995). *Options, Futures and other derivatives*. Pearson Education, Inc.
- [6] Kirchgässner, Wolters, Hassler (2013). *Introduction to Modern Time Series Analysis*. Springer Heidelberg New York Dordrecht London.
- [7] Neusser (2006). *Zeitreihenanalyse in den Wirtschaftswissenschaften*. Vieweg+Teubner GWV Fachverlage GmbH.
- [8] Vogel (2015). *Prognose von Zeitreihen. Eine Einführung für Wirtschaftswissenschaftler*. Springer Gabler.

## Fachaufsätze

- [9] Akaike (1974). *A new look at the statistical model identification*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-19, Seiten 716-723.
- [10] Box, Pierce (1970). *Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 65, Seiten 1509-1526.
- [11] Cont (2000). *Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues*. Quantitative Finance, Vol. 1, Seiten 223-236.
- [12] Engle (1982). *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. Econometrica, Vol. 50, Seiten 987-1008.
- [13] Hallerbach (2012). *A Proof of the Optimality of Volatility Weighting over Time*. The Journal of Investment Strategies, Vol. 1, Seiten 87-99.
- [14] Hocquard, Ng, Papageorgiou (2013). *Constant Volatility Framework for Managing Tail Risk*. The Journal of Portfolio Management, Vol. 39, Seiten 28-40.
- [15] Ljung, Box (1978). *On a Measure of a Lack of Fit in Time Series Models*. Biometrika, Vol. 65, Seiten 297-303.

- [16] Merton (1980). *On estimating the expected return on the market*. Journal of Financial Economics, Vol. 8, Seiten 323-361.
- [17] Nelson (1991). *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*. Econometrica, Vol. 59, Seiten 347-370.
- [18] Pagan, Schwert (1990). *Alternative models for conditional stock volatility*. Journal of Econometrics, Vol. 45, Seiten 267-290.
- [19] Papageorgiou, Reeves, Sherris (2015). *Equity Investing with Targeted Constant Volatility Exposure*. FIRN Research Paper No. 2614828.
- [20] Perchet, de Carvalho, Heckel, Moulin (2015). *Predicting the Success of Volatility Targeting Strategies: Application to Equities and Other Asset Classes*. The Journal of Alternative Investments, Vol. 18, Seiten 21-38.
- [21] Schwarz (1978). *Estimating the dimension of a model*. The Annals of Statistics, Vol. 6, Seiten 461-464.
- [22] Yu (2002). *Forecasting volatility in the New Zealand stock market*. Applied Financial Economics, Vol. 12, Seiten 193-202.

## Sonstige Quellen

- [23] Market Data Analytics Group (2006). *VDAX-NEW. Der neue Volatilitätsindex der Deutschen Börse*. Deutsche Börse AG.
- [24] ARCH Library, read the docs,  
<https://arch.readthedocs.io/en/latest/index.html>
- [25] DAX Zeitreihe,  
<https://de.finance.yahoo.com/quote/%5EGDAXI/history?p=%5EGDAXI>
- [26] VDAX-NEW Zeitreihe,  
<https://de.finance.yahoo.com/quote/V1X.DE/history?p=V1X.DE>

# Ehrenwörtliche Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe. Wörtlich übernommene Sätze oder Satzteile sind als Zitat belegt, andere Anlehnungen, hinsichtlich Aussage und Umfang, unter Quellenangabe kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen und ist nicht veröffentlicht. Sie wurde nicht, auch nicht auszugsweise, für eine andere Prüfungs- oder Studienleistung verwendet. Zudem versichere ich, dass die von mir abgegebenen schriftlichen (gebundenen) Versionen der vorliegenden Arbeit mit der abgegebenen elektronischen Version auf einem Datenträger inhaltlich übereinstimmen.

**Ort und Datum:** Frankfurt am Main

**Unterschrift:**