מבוא למערכות לומדות (236756)

סמסטר חורף תשע"ה

מבחן סוף סמסטר – מועד א'

מרצה: ניר אילון

מתרגל: יובל דגן

הנחיות

1. במבחן זה 28 עמודים כולל עמוד זה.
2. משך המבחן שלוש שעות (180 דקות).
3. כל חומר עזר אסור לשימוש.
4. ניתן לרשום בעפרון או בעט בצבעים כחול או שחור.
5. כל התשובות יכתבו על טופס הבחינה, **ויש להחזירו בתום הבחינה**
6. יש לענות על כל השאלות.
7. **יש לענות אך ורק בתוך משבצות התשובה.**
8. אין חובה למלא את כל משבצת התשובה – לעיתים היא תהייה גדולה רק בהרבה מהנדרש.
9. יש להקיף או לסמן את האפשרות הנכונה, **ולא לבצע סימון כלשהוא על אפשרויות לא נכונות.**
10. אנא כתבו בכתב יד ברור וקריא. **תשובה בכתב יד שאינו קריא לא תיבדק.**
11. **נא לכתוב רק את מה שהתבקשתם—אין צורך בהסברים או פרטים נוספים.**

פינת האנגלית הטובה:

תכונה	**Feature**
תיוג	**Label**
כל המוסיף גורע!	**More is less!**

12. נא לא לתלוש עמודים מטופס הבחינה.

בהצלחה!

דף נוסחאות

1. $\binom{n}{k} \leq n^k$
2. שגיאת הכללה = true error = $L_{\mathcal{D}}^{01}$.
3. $e \approx 2.72$
4. תהא $\mathcal{H}$ מחלקת היפותזות של בעיית למידה כלשהי, ו- S קבוצת אימון שנבחרת באקראי.
נסמן

$$\hat{h} = argmin_{h \in \mathcal{H}} L_D^{01}(h)$$
$$h^* = argmin_{h \in \mathcal{H}} L_S^{01}(h)$$

אזי, לכל $\delta > 0$: בהסתברות של לפחות $1 - \delta$ מתקיים:

$$L_D^{01}(\hat{h}) \leq L_D^{01}(h^*) + O\left(\sqrt{\frac{VCDIM(\mathcal{H}) + \frac{1}{\log(\delta)}}{|S|}}\right)$$

שאלה 1

בכל אחד מהסעיפים הבאים עליכם לסמן "נכון" או "לא נכון". במקומות המיועדים, השיבו **בקצרה** על השאלות המילוליות.
שימו לב: ישנן תשובות נכון/לא נכון שדורשות הסבר מילולי, וכאלה שאינן דורשות הסבר כזה.

1. ידוע שקיים אלגוריתם הפותר ERM מעל מסווגים לינאריים ביחס לשגיאת 0/1 בזמן פולינומיאלי במימד ובמספר הדוגמאות.

☐ נכון

שם האלגוריתם:

☒ לא נכון – נאמר בהרצאה שזה NP-Complete

2. שגיאת ה- hinge מהווה חסם עליון על שגיאת ה- 0/1.

☒ נכון

☐ לא נכון

3. השגיאה הריבועית מהווה חסם עליון על שגיאת ה- 0/1.

☒ נכון

הוכחה קצרה:

Denote $z = \langle w, x \rangle$. The squared loss is defined by $(z - y)^2$.

- If sign(z)=y, then the 01-loss is 0 and the squared loss is nonnegative.
- If $sign(z) \neq y$, then $|z - y| \geq 1$, thus the squared loss is at least 1. And the 01-loss is 1.

☐ לא נכון

דוגמא נגדית:

4. אם K_1 היא פונקצית גרעין (Kernel) וכן K_2 פונקצית גרעין, אז הפונקציה $K_1 + K_2/3$ היא פונקציית גרעין.

☒ נכון

נימוק:

Remember that a function is a kernel if and only if it is a dot product of feature maps, i.e. $K(x,x') = \langle\phi(x),\phi(x')\rangle$ for some ϕ.

Denote by ϕ_1, ϕ_2 the feature maps corresponding to K_1, K_2. The feature map $\phi_3(x) = \left(\phi_1(x) \quad \frac{\phi_2(x)}{\sqrt{3}}\right)$ (i.e. a concatenation) corresponds to the kernel $K_1 + K_2/3$.

☐ לא נכון

נימוק:

5. אלגוריתם ה-backpropagation הוא סוג של ירידת גראדיאנט (gradient descent) ולכן מוביל תמיד לפיתרון אופטימלי באימון כל רשת עיצבית המשתמשת בפונקציית אקטיבציה גזירה כגון סיגמויד (sigmoid).

☐ נכון

☒ לא נכון

נימוק:

פונקציית ההפסד לא קמורה במשקלות, ולא בהכרח כל מינימום מקומי שלה הוא מינימום גלובאלי. ירידת גראדיינט מתכנסת למינימום מקומי.

6. שיטת בייז נאיבית (Naïve Bayes) מעל וקטור מאפיינים בינאריים נותן, כפלט, מפריד ליניארי.

☒ נכון – ראינו את זה בהרצאה

☐ לא נכון

דוגמא נגדית:

7. שיטת k-nearest neighbor תמיד עובדת יותר טוב (מבחינת שגיאת הכללה) ככל ש- k יותר גדול (וכל שאר הפרמטרים נשארים קבועים).

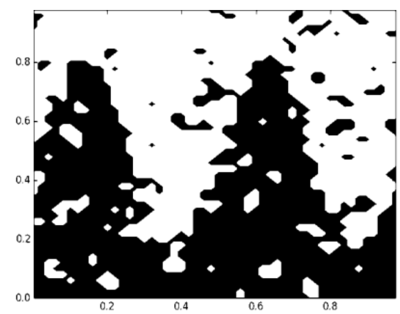
☐ נכון

נימוק:

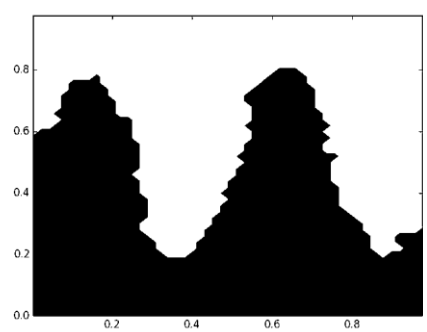
☒ לא נכון

דוגמא נגדית:

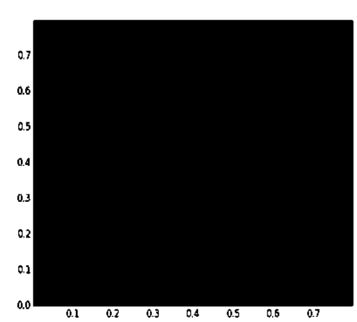
ניקח למשל את המקרה שרוב הדוגמאות מופרדות על ידי פונקציית סינוס (כלומר, מקבלות סיווג לבן אם הן מעל לגרף של סינוס, וסיווג שחור אחרת), וחלק קטן מהדוגמאות לא מקיים את התכונה הזאת (והוא מפוזר אקראית). עבור k=1 נקבל את המסווג המוגדר כך:



ועבור k=20 נקבל את המסווג המוגדר כך:



ועבור k=1000 נקבל את המסווג המוגדר כך:



צפוי שהמסווג בעל שגיאת ההכללה המינימלית יהיה זה שעבורו k=20.

8. שיטת k-nearest neighbor תמיד עובדת יותר טוב (מבחינת שגיאת הכללה) ככל ש- k יקטן יותר (וכל שאר הפרמטרים נשארים קבועים).

☐ נכון

נימוק:

☒ לא נכון

דוגמא נגדית:

ראו דוגמה בסעיף הקודם.

9. הגדלת מחלקת ההיפותזות עבור בעיית למידה נתונה תמיד מגדילה את הסיבוכיות החישובית של CONSISTENT.

☐ נכון

נימוק:

☒ לא נכון

דוגמא נגדית:

במחלקה 3-term-DNF לא ניתן לחשב את consistent ביעילות, ואילו במחלקת conjunctions שמכילה אותה אפשר (לקוח מההרצאה).

10. הקטנת מחלקת ההיפותזות עבור בעייה נתונה (כלומר, הוצאת היפותזות מהמחלקה) יכולה רק להקטין את גודל קבוצת האימון הדרושה לצורך השגת שגיאת הכללה ε באמצעות אלגוריתם CONSISTENT (במיקרה ה- Realizable).

☒ נכון

נימוק:

נימוק קצר: הוקטנה סיבוכיות המחלקה.

נימוק ארוך: יהא m גודל קבוצת האימון הדרוש לצורך השגת שגיאת הכללה ϵ במחלקה הגדולה. אם קבוצת האימון נלקחת באקראי מ- $\mathcal{X}^m$, אזי בהסתברות גבוהה, כל מסווג מהמחלקה הגדולה שהוא עקבי על קבוצת

האימון, הוא בעל שגיאת הכללה של לכל היותר ϵ (ההסתברות היא $\delta - 1$ עבור δ כלשהיא, אולם δ לא הוגדרה בשאלה). בפרט, לאחר הוצאת איברים מהמחלקה, כל מסווג עקבי על קבוצת האימון הוא בעל שגיאת הכללה של לכל היותר ϵ (אנו במקרה ה- Realizable, וקיים לפחות מסווג אחד עקבי).

☐ לא נכון

דוגמא נגדית:

שאלה 2

בשאלה הנוכחית, $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ו- $\mathcal{Y} = \{-1,1\}$. נגדיר לכל $a \in \mathbb{R}$ פונקציה

$$h_a(x) = \begin{cases} +1, & x \geq a \\ -1, & x < a \end{cases}$$

נגדיר את המחלקה

$$\mathcal{H}^{(2)} = \left\{ h_{c_1,a_1,c_2,a_2,b}(x) = \begin{cases} 1, & c_1 h_{a_1}(x) + c_2 h_{a_2}(x) \geq b \\ -1, & otherwise \end{cases} : c_1, c_2, a_1, a_2, b \in \mathbb{R} \right\}$$

1. מהו $VCDIM(\mathcal{H}^{(2)})$? הוכיחו את תשובתכם.
דגשים לפתרון: נסמן את התשובה ב- D. בהוכחה עליכם להראות קבוצת D נקודות ולשכנע שניתן לנתץ אותה (ניתן להיעזר בסימטריות. במהלך ההוכחה אין צורך למצוא את c_1, a_1, c_2, a_2, b מפורשות, אלא להסביר איך מוצאים אותם). הסבירו מדוע לא ניתן לנתץ קבוצות בגודל D+1.

פתרון:

3.

נראה איך לנתץ את {1,3,5}.

כדי להשיג את הסיווג +++, ניקח $c_1 = c_2 = 0, b = -1$. באופן דומה ניתן להשיג את ---.

כדי להשיג את הסיווג --+, ניקח $c_1 = -1, a_1 = 2, c_2 = 0, b = 0$. באופן דומה ניתן להשיג את +--,++-,-++.

כדי להשיג את הסיווג +-+, ניקח $c_1 = -1, a_1 = 2, c_2 = 1, a_2 = 4$. ניתן לראות שהפונקציה $-h_2 + h_4$ תיתן לאיבר 3 ערך קטן מאשר האברים 2,4 ולכן קיים b כנדרש (למשל b=-1). באופן דומה מושג הסיווג -+-.

כעת, נראה שלא ניתן לנתץ קבוצות בגודל 4.

ראשית נשים לב שהמסווגים ב- $\mathcal{H}^{(2)}$ מחלקים את הישר $\mathbb{R}$ ל- 3 קטעים: $(-\infty, a_1), [a_1, a_2), [a_2, \infty)$ כך שבכל קטע ניתן אותו הסיווג לכל הנקודות.

ניקח קבוצה, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ כך שבלי הגבלת הכלליות $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. את הסיווג +-+- לא ניתן להשיג על ידי חלוקה של הישר $\mathbb{R}$ ל-3 חלקים.

2. עבור $k \in \mathbb{N}$ כלשהו, נגדיר את המחלקה:

$$\mathcal{H}_+^{(k)} = \left\{ h_{c_1,a_1,\ldots,c_k,a_k,b}(x) = \begin{cases} 1, & c_1 h_{a_1}(x) + \cdots + c_k h_{a_k}(x) \geq b \\ -1, & otherwise \end{cases} : a_1, \ldots, a_k, b \in \mathbb{R}, c_1, \ldots, c_k \geq 0 \right\}$$

שימו לב שכאן $c_1, \ldots, c_k$ הם אי שליליים.

מהו מימד ה- VC של $\mathcal{H}_+^{(k)}$? הוכיחו (אותם הדגשים של הסעיף הקודם תקפים גם כאן).

פתרון:

.1

ראשית ניתן לנתץ את הקבוצה {1}:

אם ניקח $c_i = 0$ לכל i ו- $b = -1$ אז נקבל את הסיווג +, ועל ידי לקיחת $\forall i, c_i = 0$ ו- $b = 1$ נקבל את הסיווג -.

לא ניתן לנתץ קבוצות מגודל 2:

ניתן לראות שפונקציות מהצורה $ch_a(x)$ עבור $c \geq 0$ הן מונוטוניות עולות. ולכן גם סכום של כמה פונקציות מהצורה הנ"ל הוא מונוטוני עולה.

ניקח קבוצה מגודל 2, $\{x_1, x_2\}$ ובה"כ $x_1 < x_2$. מתקיים שלכל מסווג $h_{c_1,a_1,\ldots,c_k,a_k,b}$:

$c_1 h_{a_1}(x_1) + \cdots + c_k h_{a_k}(x_2) \leq c_1 h_{a_1}(x_2) + \cdots + c_k h_{a_k}(x_2)$. ובפרט לא ייתכן כי x_1 יקבל את הסיווג + ו- x_2 את הסיווג - .

3. נגדיר $\mathcal{H} = \{s \cdot h_a(x) : s \in \{\pm 1\}, a \in \mathbb{R}\}$.
עבור משימת סיווג כלשהי, נלקחו קבוצת אימון וקבוצת מבחן באקראי, המסומנות S_{train}, S_{test}. השתמשו ב- Adaboost עם T איטרציות ולומד חלש שבהינתן התפלגות $\mathcal{D}$, מחזיר את $argmin_{h \in \mathcal{H}} L_{\mathcal{D}}^{01}(h)$. נלמדה היפותזה $\hat{h}$, והתקיים ש- $L_{S_{test}}^{01}(\hat{h})$ גבוה מדי. הוצעו כמה הצעות לשיפור:

א. הגדלת S_{train}
ב. הקטנת S_{train}
ג. הגדלת T
ד. הקטנת T
ה. שינוי הלומד החלש כך שיחזיר את $argmin_{h \in \mathcal{H}^{(2)}} L_{\mathcal{D}}^{01}(h)$ (כלומר החלפת $\mathcal{H}$ ב- $\mathcal{H}^{(2)}$)

אילו מההצעות שהוצעו הן בעלות פוטנציאל להוריד את $L_{S_{test}}^{01}(\hat{h})$ בצורה משמעותית כאשר הן מבוצעות לבדן, בכל אחד מהמקרים הבאים?

i. $L_{S_{train}}^{01}(\hat{h})$ קטן מאוד, ו- $L_{S_{test}}^{01}(\hat{h})$ גדול.

סמנו את כל התשובות הנכונות:
כאן ההכללה לא טובה.
☒ א ☐ ב ☐ ג ☒ ד ☐ ה

ii. $L_{S_{train}}^{01}(\hat{h})$ ו- $L_{S_{test}}^{01}(\hat{h})$ שניהם גדולים ובעלי ערך כמעט זהה.

סמנו את כל התשובות הנכונות:
כאן לא הצליחו למצוא מסווג עם שגיאה נמוכה על קבוצת האימון.
☐ א ☐ ב ☒ ג ☐ ד ☒ ה

שאלה 3

1. נתונים $x_1, \dots, x_m$ משתנים מקריים בלתי תלויים מהתפלגות $Poisson(\lambda)$. התפלגות זו מוגדרת עבור פרמטר $\lambda > 0$ מעל הערכים הטבעיים $\{0,1,2,\dots\}$, כאשר הסיכוי לערך x הוא
$$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$
חשבו משערך MLE ל- λ (ביטוי של $x_1, \dots, x_m$), והראו את צעדי החישוב:

תשובה סופית: $$\hat{\lambda} = \left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i\right]$$ חישוב: חישוב MLE רגיל.

2. נתונה בעיית פרדיקציה שבה $\mathcal{X} = \{0,1,2,\dots\}^2$ ו- $\mathcal{Y} = \{0,1\}$. הוחלט לפתור אותה באמצעות שיטת בייז נאיבית, תחת ההנחה שלכל $i = 1,2$: $x[i]$ מתפלג $Poisson(\lambda_0)$ בהינתן ש $y = 0$, ואחרת $x[i]$ מתפלג $Poisson(\lambda_1)$.
   a. תחת ההנחה בשאלה זו, חשבו את ההסתברות הבאה (כפונקציה של λ_0, λ_1):
$$\Pr[(x[1] = 5 \wedge x[2] = 3)|\ y = 1] = \left[\frac{\lambda_1^5 e^{-\lambda_1} \lambda_1^3 e^{-\lambda_1}}{5!\,3!} = \frac{\lambda_1^8 e^{-2\lambda_1}}{5!\,3!}\right]$$

   b. נתונה קבוצת האימון הבאה $(x_1 = (0,2), y_1 = 0), (x_2 = (2,4), y_2 = 1)$
איזו פרדיקציה מתאימה ל- $x = (2,2)$ אם משתמשים בשיטת MLE לשיערוך λ_0, λ_1, ובנוסף מניחים ש- $\Pr(y = 1) = 0.5$? הראו את החישובים בפתרון.

פתרון: ראשית נשערך: $\lambda_0 = \frac{0+2}{2} = 1$. $\lambda_1 = \frac{2+4}{2} = 3$.   הפרדיקציה y=1 ניתנת אם"ם $\Pr(y = 1 \| x = (2,2)) > \Pr(y = 0 \| x = (2,2))$ וזה אם"ם $\Pr(x = (2,2) \| y = 1)\Pr(y = 1) > \Pr(x = (2,2) \| y = 0)\Pr(y = 0)$.   וזה אם"ם $3^2 e^{-3} > 1^2 e^{-1}$. וזה אם"ם $e^2 < 3^2$ וזה נכון, ולכן הפרדיקציה היא 1.

שאלה 4

הערה: במהלך השאלה אין צורך להתייחס להסתברות השגיאה, δ. ניתן להחשיבה כקבוע (O(1)).

רופאת ילדים מעוניינת לנבא את הסיכוי להופעת אפילפסיה עד גיל 12, בהינתן התיק הרפואי של הילד/ה בגיל 4. כל תיק כזה כולל d מאפיינים בינאריים (מספרים ב- $\{0,1\}$) שהרופאה סבורה שקשורים שמחלת האפילפסיה.

1. בשלב הראשון, הרופאה מנסה לבצע למידת PAC באמצעות ERM. לשם כך היא מחליטה על מחלקת ההיפותזות $\mathcal{H}_k = \{h: \{0,1\}^d \to \{0,1\}: h \text{ depends on } \leq k \text{ input coordinates}\}$. במילים – זו מחלקת הפונקציות הבינאריות שהפלט שלהן תלוי לכל היותר ב- k משתנים. לדוגמא, הפונקציה
$x \mapsto x[1] \vee x[2] \vee x[7]$ שייכת ל $\mathcal{H}_3$ בעוד שהפונקציה הבאה לא שייכת ל $\mathcal{H}_5$:
$x \mapsto (x[3] \wedge x[7] \wedge x[9] \wedge x[11]) \vee (x[4] \wedge x[1] \wedge x[13])$
רישמו חסם עליון טוב ככל שתוכלו למספר הדוגמאות שלהן תיזדקק הרופאה כדי למצוא היפותזה ששגיאת ההכללה שלה לכל היותר ε מעל שגיאת ההכללה האופטימלית במחלקה. יש לבטא את החסם כפונקציה של d, k, ε. (מותר לכתוב חסם אסימפטוטי למשל (...)O).

תשובה (אין צורך להסביר): בכיתה ראינו שמספר הדוגמאות חסום על ידי $O(\frac{\log(\mathcal{H}_k)}{\epsilon^2})$. למי שלא זכר, ניתן דף הנוסחאות ממנו נובע ש- $\epsilon = O(\sqrt{\frac{VCDIM(\mathcal{H}_k)}{\lvert S \rvert}})$ ומכאן נובע ש- $\lvert S \rvert = O\left(\frac{VCDIM(\mathcal{H}_k)}{\epsilon^2}\right) = O\left(\frac{\log(\mathcal{H}_k)}{\epsilon^2}\right)$. כעת, $\lvert \mathcal{H}_k \rvert = \binom{d}{k} 2^{2^k} \leq d^k 2^{2^k}$, ולכן התשובה: $$O\left(\frac{k \cdot log(d) + 2^k}{\epsilon^2}\right)$$

2. לרופאה לא היו מספיק דוגמאות כדי לבצע את הרעיון שבסעיף הקודם, עבור k, ε שנראו לה מתאימים. מתמחה א' הציע לרופאה לוותר על $d/2$ מאפיינים כלשהם. מתמחה ב' הציע לרופאה להחליף את k ב- k/2. איזו מבין שתי ההצעות צפויה להוריד בצורה יותר משמעותית את כמות הדוגמאות הדרושות?

תשובה: ☐ מתמחה א' ☒ מתמחה ב' הסבר קצר: נובע מהסעיף הקודם (יש לספק הסבר כלשהו).

3. נסמן ב- $\mathcal{H}_k'$ את קבוצת כל הפונקציות הבינאריות שמקבלות k משתנים בינאריים, כלומר, קבוצת הפונקציות מ- $\{0,1\}^k$ ל- $\{0,1\}$.

הרופאה החליטה לא להקשיב למתמחים, ובמקום זאת ללכת בדרך דו שלבית.

- שלב א': להפעיל שיטת feature selection לבחירת k מאפיינים.
- שלב ב': ללמוד באמצעות ERM פונקציה בינארית מעל $\mathcal{H}_k'$.

לשם בחירת המאפיינים, היא השתמשה בפונקציה בשם voodoo_selector הפועלת כך:

- קלט: $S, k, magic$.
  - S היא קבוצה של בדיוק 666 דוגמאות מתויגות
  - k הוא מספר המאפיינים הדרושים
  - $magic$ הוא פרמטר מספרי בתחום $\{1,2,\dots,k^3\}$ המשפיע על הפלט של voodoo_selector בצורה מסתורית.
- פלט: k אינדקסים של מאפיינים טובים (בתקווה).

הרופאה כתבה קוד שמנסה את כל הערכים האפשריים של $magic$. עזרו לה להשלים את הקוד, וענו על השאלה שמופיעה מיד אחריו.

הערה: המשיכו להניח שהרופאה שואפת לקבל שגיאת הכללה של ε מעל שגיאת ההכללה של הפיתרון האופטימלי ב- $\mathcal{H}_k$ (בהנחה ש- voodoo_selector טוב).

Input: k, ε

Output: A hypothesis

מותר לכתוב ביטויים אסימפטוטיים, למשל $\Theta(\ldots)$. אין חובה למלא את כל המשבצות הריקות.

$$\begin{bmatrix} m_1 = \Theta\left(\frac{2^k}{\epsilon^2}\right) \\ m_2 = \Theta\left(\frac{\log(k)}{\epsilon^2}\right) \end{bmatrix}$$

$m = [m_1 + m_2]$

$[\mathrm{min\_err} = \infty]$

obtain sample $S = ((x_1, y_1), \ldots, (x_{m+666}, y_{m+666}))$

for $magic = 1 \ldots k^3$:

$\quad (f[1], \ldots, f[k]) = voodoo\_selector\big(\big((x_{m+1}, y_{m+1}), \ldots, (x_{m+666}, y_{m+666})\big), k, magic\big)$

$\quad$ define $x_i' = \big(x_i[f[1]], \ldots, x_i[f[k]]\big)$ for all $i = 1 \ldots m$

$\quad h = ERM\Big(\mathcal{H}_k', \Big(\big(x'_{[1]}, y_{[1]}\big), \ldots, \big(x'_{[m_1]}, y_{[m_1]}\big)\Big)\Big)$

$\quad err = L^{01}\Big(h, \Big(\big(x'_{[m_1+1]}, y_{[m_1+1]}\big), \ldots, \big(x'_{[m]}, y_{[m]}\big)\Big)\Big)$

$$\begin{bmatrix} \textit{if } err < \mathrm{min\_err}: \\ \quad min\_err = \mathrm{err} \\ \quad best\_h = h \end{bmatrix}$$

end for

return $[best\_h]$

נא לכתוב הצדקה לאיתחול של m:

הערה: אין צורך לכתוב את כל הנימוק הזה במבחן.

אנו מניחים ש- voodoo_selector "טוב", כלומר, באחת האיטרציות, קיים מסווג, h_1, שהוא פונקציה של f[1],...,f[k] ובעל שגיאת הכללה הקרובה לשגיאת ההכללה האופטימלית של $\mathcal{H}_k$ (ונניח, שהוא בעל שגיאת הכללה של לכל היותר $\epsilon/3$ מעל השגיאה האופטימלית). עבור איטרציה זו, נמצא מסווג h_2 (המוחזר מחישוב ה- ERM), מבין קבוצת הפונקציות הבינאריות במשתנים f[1],...,f[k]. נרצה ששגיאת ההכללה של h_2 תהייה לכל היותר $\epsilon/3$ מעל שגיאת ההכללה של h_1. נבחר את m_1 כתלות בגודל המחלקה $\mathcal{H}_k'$ (שהוא 2^{2^k}) ו- $\epsilon/3$.

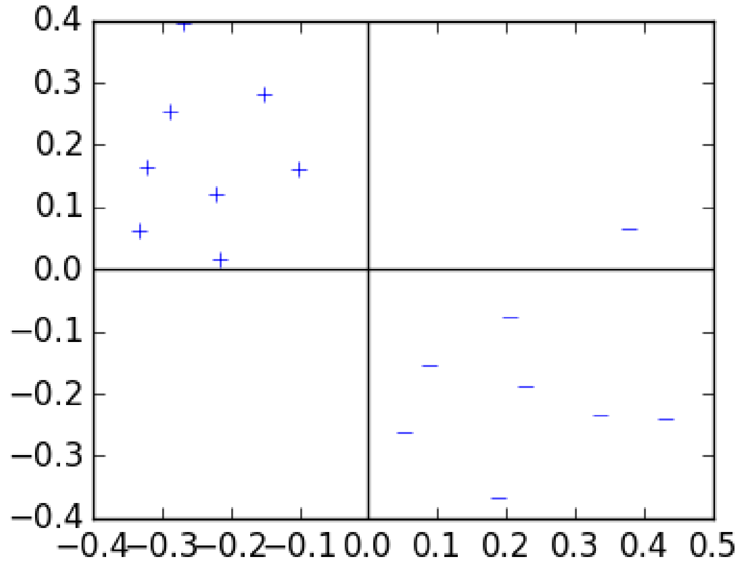
בעזרת ה- validation set, m_2, נמצא מסווג, שנסמנו h_3 (זהו המסווג best_h שנחזיר בסוף). נרצה שיהיה בעל שגיאת הכללה של לכל היותר $\epsilon/3$ מעל שגיאת ההכללה של h_2. נבחר את m_2 כתלות במספר המסווגים שעליהם עושים validation, כלומר k^3 (בשלב ה- validation אנו בוחרים מסווג מתוך קבוצה של k^3 מסווגים), וכתלות ב- $\epsilon/3$.

שאלה 5

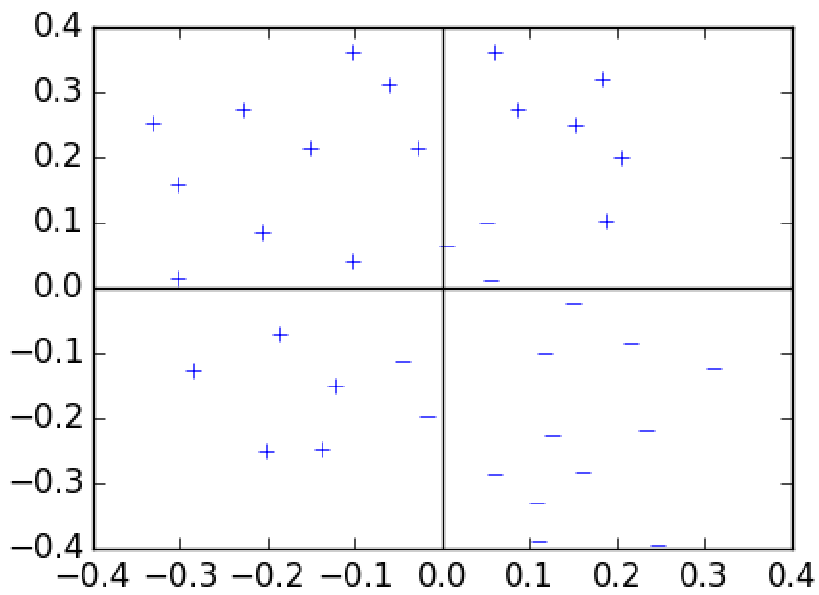
ליוסי היו שתי בעיות סיווג בינארי שונות, שעבור שתיהן $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$.

בכל אחת מהבעיות, הוא אסף דוגמאות למידה באקראי.

בעייה א' עוסקת בחיזוי העדפת כריכים של סטודנטים. הדוגמאות נראות כך:



בעייה ב' עוסקת בחיזוי העדפת קורסים של סטודנטים. הדוגמאות נראות כך:



ניזכר בהגדרות הבאות:

$$L_S^{hinge}(w) = \frac{1}{|S|}\sum_{(x,y)\in S} \max\{0,1-\langle w,x\rangle y\}$$

$$L_{S,\lambda}^{hinge}(w) = \frac{\lambda}{2}\left||w|\right|^2 + L_S^{hinge}$$

$$L_S^{01}(w) = \frac{1}{|S|}\sum_{(x,y)\in S} \begin{cases} 1, & sign(\langle w,x\rangle) \neq y \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

בכל אחת משתי הבעיות, יוסי חילק את הדוגמאות לשתי קבוצות שוות בגודלן: קבוצת אימון S_{train} וקבוצת מבחן S_{test}. הוא ניסה למצוא $w \in \mathbb{R}^2$ שממזער את $L_{S_{train},\lambda}^{hinge}$.

לשם כך, השתמש ב- sub gradient descent, עם גודל צעד η. כלומר הוא ביצע:

- $w^{(0)} \leftarrow random \in \mathbb{R}^2$
- $for\ t = 1, \dots, 250$
  - $\mathrm{w}^{(t)} \leftarrow w^{(t-1)} - \eta\nabla L_{S_{train},\lambda}(w^{(t-1)})$

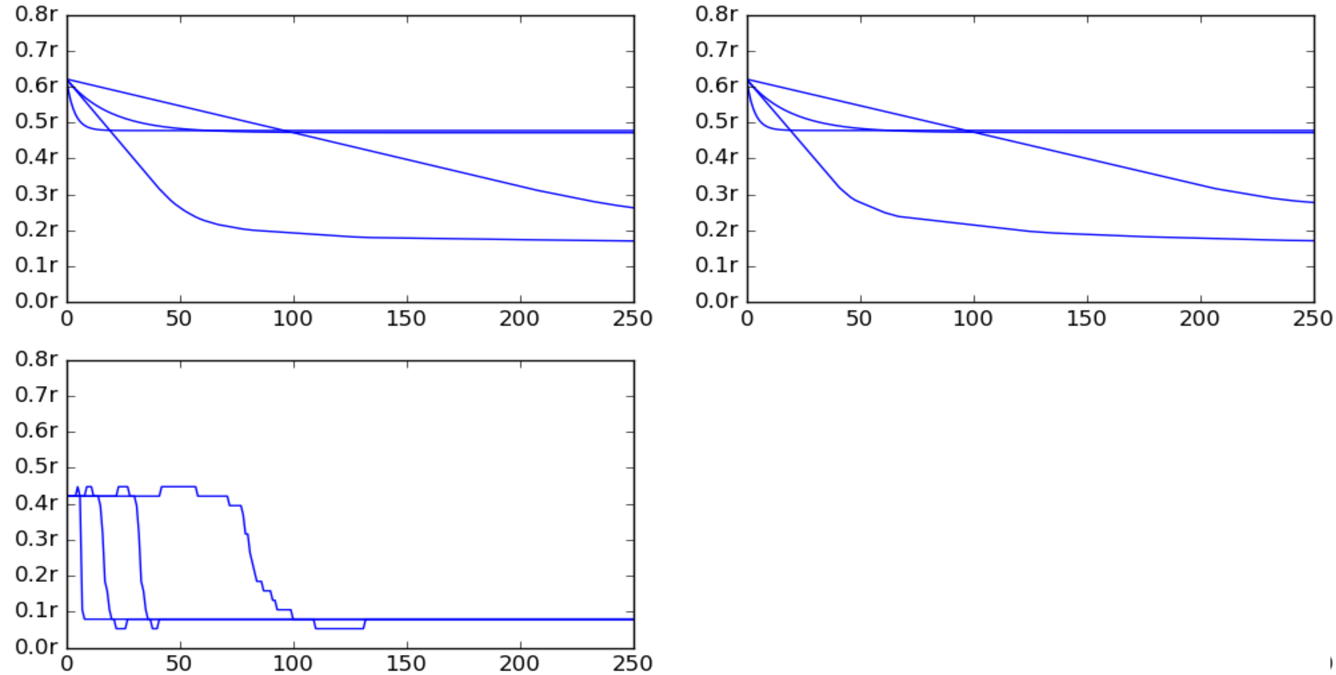
לכל אחת משתי בעיות הסיווג ביצע 4 הרצות, כך שבכל הרצה הוא השתמש בפרמטרים שונים.

הפרמטרים בהם השתמש:

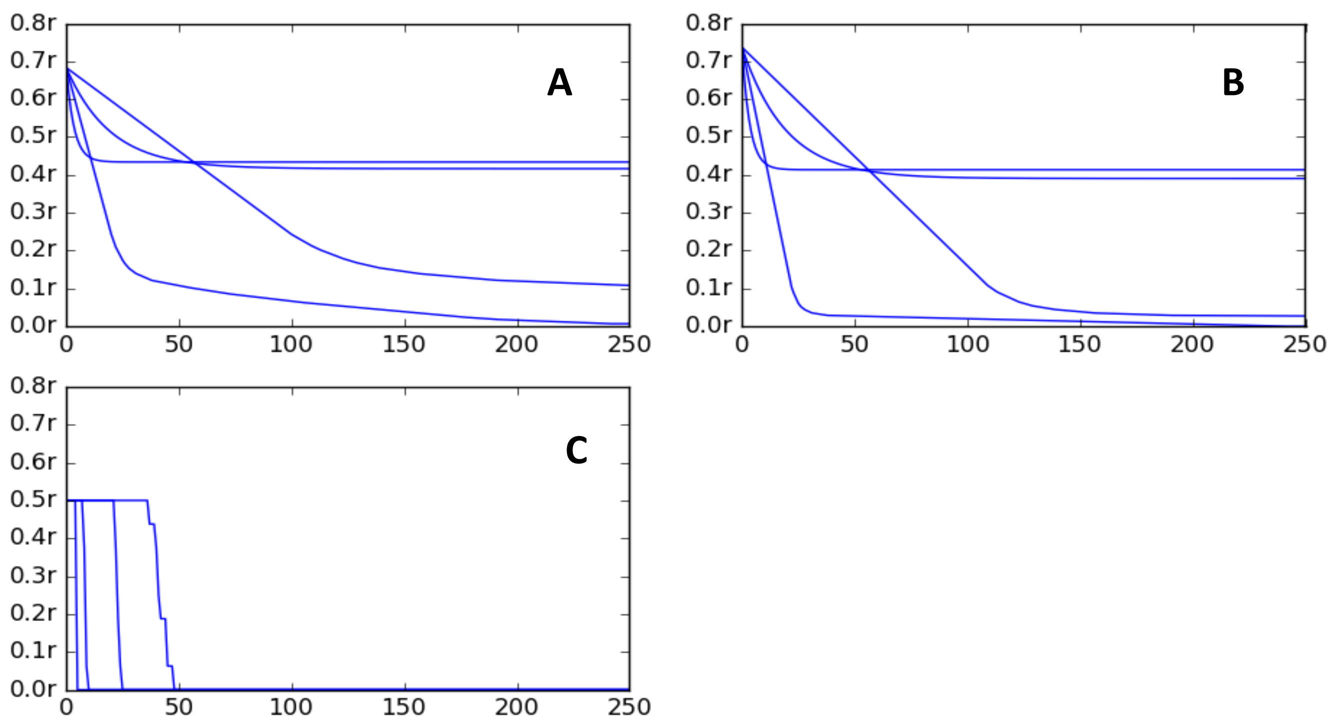
- $\lambda = 0, \eta = 0.1$
- $\lambda = 0.5, \eta = 0.1$
- $\lambda = 0, \eta = 0.5$
- $\lambda = 0.5, \eta = 0.5$

יוסי הדפיס שני דוחות, כאשר אחד הדוחות מתייחס לבעיית חיזוי הכריכים, והאחר לבעיית חיזוי הקורסים. לא ידוע איזה דו"ח מתייחס לאיזו בעיה (הסברים עבור הדוחות יינתנו בהמשך).

דו"ח ראשון:



דו"ח שני:



נשים לב שכל דו"ח מכיל 3 תרשימים:

- אחד התרשימים מחשב את $L_{S_{train}}^{hinge}(w^{(t)})$ כפונקציה של t.
- תרשים אחר מחשב את $L_{S_{test}}^{hinge}(w^{(t)})$ כפונקציה של t.
- תרשים אחר מחשב את $L_{S_{train}}^{01}(w^{(t)})$ כפונקציה של t.

כל תרשים מכיל 4 גרפים. הגרפים השונים מתייחסים להרצות עם ערכים שונים לפרמטרים λ ו- η.

המספר r הנמצא בציר האנכי הוא קבוע מספרי חיובי כלשהו, הזהה בכל התרשימים

ענו על השאלות הבאות:

1. לאיזו בעיה מתייחס הדו"ח הראשון? נמקו.

☐ בעיית הכריכים ☒ בעיית הקורסים

נימוק:

בעיית הכריכים ניתנת להפרדה ליניארית, ולכן שם השגיאות שואפות ל- 0, ואילו בעיית הקורסים לא ניתנת להפרדה.

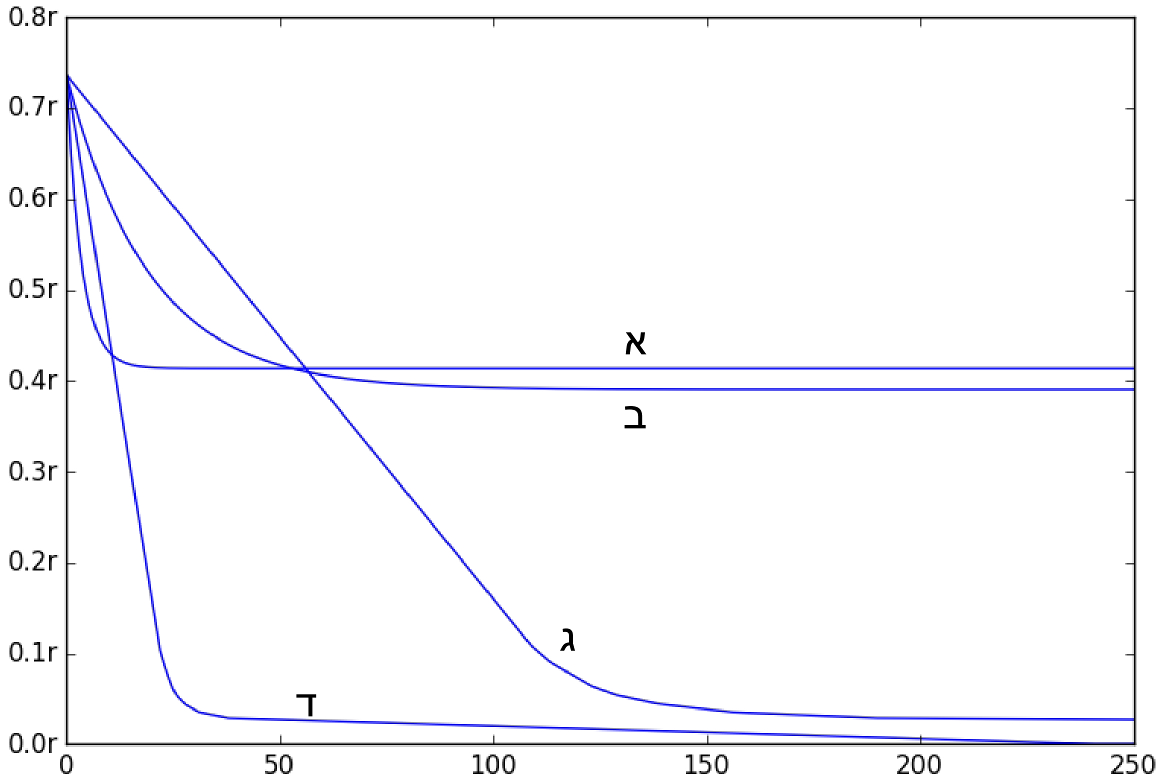
2. נביט בדו"ח השני. התאימו בין התרשימים, לפונקציות שהם מתייחסים אליהן, ונמקו:

$L_{S_{train}}^{hinge}(w^{(t)})$ מתייחס לתרשים	☐ C	☒ B	☐ A
$L_{S_{test}}^{hinge}(w^{(t)})$ מתייחס לתרשים	☐ C	☐ B	☒ A
$L_{S_{train}}^{01}(w^{(t)})$ מתייחס לתרשים	☒ C	☐ B	☐ A

נימוק:

$L_{S_{test}}^{hinge}(w^{(t)})$ לרוב גדול יותר מ- $L_{S_{train}}^{hinge}(w^{(t)})$, שמהווה חסם עליון על $L_{S_{train}}^{01}(w^{(t)})$.

3. נביט בדו"ח השני, בתרשים B. לשם הנוחות, עותק מוגדל שלו נמצא כאן:



הגרפים השונים מסומנים באותיות א, ב, ג, ד. התאימו בין ערכי הפרמטרים השונים לגרפים השונים.

$\lambda = 0, \eta = 0.1$ א ☐   ב ☐   ג ☒   ד ☐

$\lambda = 0.5, \eta = 0.1$ א ☐   ב ☒   ג ☐   ד ☐

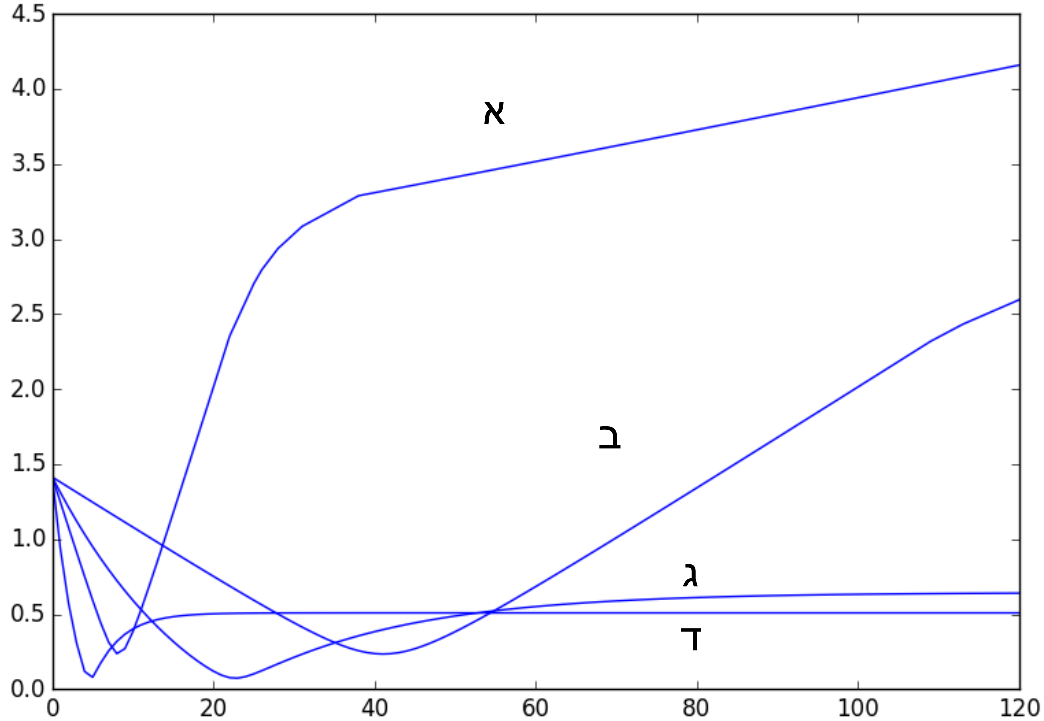
$\lambda = 0, \eta = 0.5$ א ☐   ב ☐   ג ☐   ד ☒

$\lambda = 0.5, \eta = 0.5$ א ☒   ב ☐   ג ☐   ד ☐

עבור η גדול, השינוי בהתחלה מהיר יותר לעומת η קטן.

עבור $\lambda = 0$, בסופו של דבר שגיאת ה- hinge יורדת ל- 0, מה שלא קרה עבור $\lambda = 0.5$ מפני שהשוליים גדולים במקרה זה.

4. נמצא תרשים נוסף בדו"ח השני:



הוא מתאר את הנורמה של $w^{(t)}$ כתלות ב- t. התאימו בין ערכי הפרמטרים השונים לגרפים השונים שבתרשים זה:

$\lambda = 0, \eta = 0.1$ א ☐ ב ☒ ג ☐ ד ☐

$\lambda = 0.5, \eta = 0.1$ א ☐ ב ☐ ג ☒ ד ☐

$\lambda = 0, \eta = 0.5$ א ☒ ב ☐ ג ☐ ד ☐

$\lambda = 0.5, \eta = 0.5$ א ☐ ב ☐ ג ☐ ד ☒

עבור η, ההסבר זהה לזה של הסעיף הקודם.

עבור $\lambda = 0$ הנורמה ממשיכה לגדול, ועבור $\lambda = 0.5$ הרגולריזציה מונעת זאת.