UNA NUEVA FORMA DEL TEOREMA DE KANTOROVICH PARA EL MÉTODO DE NEWTON

Leopoldo Paredes Soria 1, Pedro Canales García 2

Facultad de Ciencias 1*, Universidad Nacional de Ingeniería* 1*, e-mail: lpsilf2005@yahoo.com*

Facultad de Ciencias 2*, Universidad Nacional de Ingeniería* 2*, e-mail: pcanales@uni.edu.pe*

Una nueva forma de convergencia de tipo Kantorovich para el método de Newton es establecido para aproximarse localmente a una solución única de la ecuación $F(x) = 0$ definido sobre un espacio de Banach. Se asume que el operador F es dos veces diferenciable Fréchet, y que F', F'' satisface las condiciones de Lipschitz. Nuestra condición de convergencia difiere de los métodos conocidos y por lo tanto tiene un valor teórico y práctico.

Palabras Claves: Operador lineal, diferenciable Fréchet, sucesión convergente y unicidad.

A new Kantorovich-type convergence theorem for Newton's method is established for approximating a locally unique solution of an equation $F(x) = 0$ defined on a Banach space. It is assumed that the operator F is twice Fréchet differentiable, and that F', F'' satisfy Lipschitz conditions. Our convergence condition differs from earlier ones and therefore it has theoretical and practical value.

Keywords: Linear operator, differentiable Fréchet, convergent succession and uniqueness.

1. INTRODUCCIÓN

En este estudio nos preocupamos por el problema de la aproximación de una solución única local x^* de la ecuación

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

donde F es un operador dos veces diferenciable Fréchet definido en un subconjunto convexo Ω, de un espacio de Banach U con valores sobre el espacio de Banach V.

El método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0, \quad x_0 \in \Omega, \tag{2}$$

se ha utilizado por muchos autores (ver [1] - [6] de las referencias dadas) para generar una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ convergente a x^*. En particular las siguientes condiciones son utilizados.

<u>Condición A:</u> (Kantorovich ver [6]). Sea $F : \Omega \subseteq U \to V$ diferenciable Fréchet sobre Ω, $F'(x_0)^{-1} \in L(V,U)$ para algún $x_0 \in \Omega$, donde $L(V,U)$ es el conjunto de operadores lineales acotados de V sobre U, y asumiendo

$$\left\|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(y)]\right\| \leq l\|x-y\|, \ \forall x, y \in \Omega, \tag{3}$$

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F'(x_0)\right\| \leq a \tag{4}$$

y

$$2al \leq 1. \tag{5}$$

Sobre la condición A, uno puede obtener el error estimado, la existencia y la unicidad de la solución sobre las regiones, y saber si x_0 es una condición inicial, es decir, saber si el método de Newton (2), a partir de x_0 converge a x^*. Pero en estos casos cuando se quiere determinar si la iteración de Newton (2) a partir de x_0 converge, una sola condición falla.

Ejemplo: Sean $U = V = \mathbf{R}$, $\Omega = [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$, $x_0 = \sqrt{2}$ y definimos el polinomio real F sobre Ω por:

$$F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \alpha, \quad \alpha = \frac{2^{3/2}}{6} + 0{,}23. \tag{6}$$

Veamos si la condición x_0 determina la convergencia del método de Newton.

Solución Usando (3), se tiene:

$$\begin{aligned}\left\|F'(x_0)^{-1}[F'(x)-F'(y)]\right\| &= \left\|\frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2}{\frac{1}{2}x_0^2}\right\| \\ &\leq \left\|\frac{x+y}{x_0^2}\right\| \|x-y\|,\end{aligned}$$

con $\left\|\frac{x+y}{x_0^2}\right\| \leq \sqrt{2}+1 = 2{,}414213562 = l$.
Donde por (4), se tiene:

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\right\| = \left\|\frac{\frac{1}{6}x_0^3 - \alpha}{\frac{1}{2}x_0^2}\right\| = \left\|\frac{\frac{1}{6}x_0^3 - \frac{2^{3/2}}{6} - 0{,}23}{\frac{1}{2}x_0^2}\right\|$$

$$= \|-0{,}23\| = 0{,}23 = a.$$

Veamos si se satisface (5):

$$2al = 2(0{,}23)(2{,}414213562) = 1{,}110535256 > 1.$$

Entonces sobre la condición A no podemos determinar la convergencia del método de Newton (2) a partir de $x_0 = \sqrt{2}$. ♦
Es decir, tenemos que introducir una nueva condición y un nuevo teorema sobre el método de Newton para que converja con la condición $x_0 = \sqrt{2}$ del ejemplo anterior.

De ahora en adelante asumiremos:
Condición B: Sean $f : \Omega \subseteq U \to V$ dos veces diferenciable Fréchet sobre Ω, con $F'(x) \in L(U,V)$, $F''(x) \in L(U, L(U,V))$, $(x \in \Omega)$, $F'(x_0)^{-1}$ existe para algún $x_0 \in \Omega$, y asumimos

$$0 < \left\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\right\| \leq a \text{ y } \left\|F'(x_0)^{-1}F''(x_0)\right\| \leq b, \tag{7}$$

$$\left\|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(x_0)]\right\| \leq c\|x-x_0\|, \ c > 0, \tag{8}$$

$$\left\|F'(x_0)^{-1}[F''(x) - F''(x_0)]\right\| \leq d\|x-x_0\|, \ \forall x \in \Omega, \tag{9}$$

y

$$2ka \leq 1, \tag{10}$$

donde puede ser que

$$k = \text{máx}\{c, b+2ad\}, \quad (c \leq k) \tag{11}$$

ó que, si la función

$$f(t) = t^3 - 2bt^2 - (2d-b^2)t + 2d(b+ad), \tag{12}$$

tiene dos raices positivos k_1 y k_2 tal que:

$$[b, b+2ad] \subseteq [k_1, k_2], \tag{13}$$

entonces $k \geq c$ y

$$k \in [b, b+2ad]. \tag{14}$$

Ejemplo: Sean $U = V = \mathbf{R}$, $\Omega = [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$, $x_0 = \sqrt{2}$ y definimos el polinomio real F sobre Ω por:

$$F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \alpha, \quad \alpha = \frac{2^{3/2}}{6} + 0{,}23.$$

Entonces x_0 determina la convergencia del método de Newton.

Solución Usando (7), se tiene:

$$\begin{aligned}0 < \left\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\right\| &= \left\|\frac{\frac{1}{6}x_0^3 - \frac{2^{3/2}}{6} - 0{,}23}{\frac{1}{2}x_0^2}\right\| \\ &= |-0{,}23| = 0{,}23 \leq a.\end{aligned}$$

Entonces tomamos $a = 0{,}23$, donde

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F''(x_0)\right\| = \left\|\frac{x_0}{\frac{1}{2}x_0^2}\right\| = \sqrt{2} \leq b,$$

sea $b = \sqrt{2}$, luego de (8), se tiene:

$$\left\|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(x_0)]\right\| = \left\|\frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x_0^2}{\frac{1}{2}x_0^2}\right\|$$

$$\leq \left\|\frac{x + x_0}{x_0^2}\right\| \|x - x_0\|,$$

con $\left\|\frac{x + x_0}{x_0^2}\right\| \leq \left\|\frac{\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{2}\right\| = 1{,}914213562$, consideramos $c = 1{,}914213562$, además de (9), se tiene:

$$\left\|F'(x_0)^{-1}[F''(x) - F''(x_0)]\right\| \leq \left\|\frac{2}{x_0^2}\right\| \|x - x_0\| = \|x - x_0\|,$$

hacemos $d = 1$, y de (11), se obtiene:

$$\begin{aligned} k &= \text{máx}\{1{,}914213562, \sqrt{2} + 2(0{,}23)(1)\} \\ &= \text{máx}\{1{,}914213562, 1{,}874213562\} = 1{,}914213562. \end{aligned}$$

Luego de (10), se tiene:

$$\begin{aligned} 2ka &= 2(1{,}914213562)(0{,}23) \\ &= 0{,}880538239 < 1, \end{aligned}$$

o, de (12), si la función:

$$\begin{aligned} f(t) &= t^3 - 2\sqrt{2}t^2 - (2(1) - \sqrt{2}^2)t + 2(1)(\sqrt{2} + 0{,}23(1)) \\ &= t^3 - 2{,}828427125t^2 + 3{,}28847125, \end{aligned}$$

resolviendo se tiene dos raices reales positivos $k_1 = 1{,}73123$ y $k_2 = 2{,}03199$ de (13), se obtiene:

$$[\sqrt{2}; \sqrt{2} + 0{,}46] \nsubseteq [1{,}73123; 2{,}03199]$$

$$[1{,}414213562; 1{,}874213562] \nsubseteq [1{,}73123; 2{,}03199]$$

entonces $k = 1,914213562 \geq c = 1,914213562$ y de (14), se tiene:

$$1,914213562 \quad \notin \quad [1,414213562; 1,874213562]. \blacklozenge$$

Así, cumplido (12) vemos que la condición B determina la convergencia del método de Newton (2) a partir de $x_0 = \sqrt{2}$ con la primera parte, ya que la segúnda parte no satisface.

2. ANÁLISIS DE CONVERGENCIA

En el análisis de convergencia necesitamos los lemas:

Lema 1: Sean a, k constantes positivos dados. Definimos el polinomio real p sobre $[0, \infty\rangle$ por:

$$p(t) = \frac{k}{2}t^2 - t + a \tag{15}$$

y la sucesión $\{t_n\}_{n\geq 0}$ por

$$t_0 = 0, \tag{16}$$

$$t_{n+1} = t_n - \frac{p(t_n)}{p'(t_n)}. \tag{17}$$

Asumimos

$$2ka \leq 1. \tag{18}$$

Entonces la ecuación

$$p(t) = 0, \tag{19}$$

tiene dos raices positivas r_1, r_2 con $r_1 \leq r_2$ y la sucesión $\{t_n\}_{n\geq 0}$ generado por (16)-(17) es tal que:

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} < \cdots < r_1,$$

con $\lim_{n\to\infty} t_n = r_1$.

Prueba: Usando (15) y (18) deducimos que la ecuación

$$p(t) = \frac{k}{2}t^2 - t + a = 0$$

tiene dos raices positivos

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2ka}}{k} \text{ y } r_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2ka}}{k} \tag{20}$$

con $r_1 \leq r_2$. Además, la función $t - \frac{p(t)}{p'(t)}$ es creciente sobre $[0, r_1]$, siendo $p'(t) < 0$, $p''(t) > 0$ y $p(t) > 0$ sobre $[0, r_1]$. Donde:

$$S = \{n \in \mathbf{N}/t_n \text{ es creciente con } t_n \leq r_1, \forall n \geq 0\},$$

por inducción matemática, tenemos:

Para $n = 0$, se tiene, como $p(t_0) > 0$ y $p'(t_0) < 0$, entonces $-\dfrac{p(t_0)}{p'(t_0)} > 0$, luego

$$t_0 < t_0 + a = t_0 - \frac{p(t_0)}{p'(t_0)} = t_1 < r_1.$$

Por la hipótesis inductiva con $n = m$, tenemos:

$$t_m < t_{m+1} < r_1.$$

Luego para $n = m + 1$, tenemos

$$t_{m+1} < t_{m+1} - \frac{p(t_{m+1})}{p'(t_{m+1})} = t_{m+2} < r_1 - \frac{p(r_1)}{p'(r_1)} = r_1,$$

así, $S = \mathbf{N}$

Por tanto,

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n < r_1 \text{ con } \lim_{n\to\infty} t_n = r_1. \blacksquare$$

A continuación definimos los conjuntos

$$\overline{B}(x_0, s) = \{x \in V / \|x - x_0\| \le s\} \quad \text{y}$$

$$B(x_0, s) = \{x \in U / \|x - x_0\| < s\}.$$

Lema 2: Sea $x \in B\left(x_0, \dfrac{1}{c}\right)$, entonces las siguientes estimaciones son verdaderos:

$$\left\|F'(x)^{-1}F'(x_0)\right\| \le \frac{1}{1 - c\|x - x_0\|} \tag{21}$$

y

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F''(x)\right\| \le b + d\|x - x_0\|. \tag{22}$$

Prueba: Si $x \in B(x_0, \dfrac{1}{c})$, entonces

$$\|x - x_0\| < \frac{1}{c}$$

luego de (8)

$$\left\|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(x_0)]\right\| \le c\|x - x_0\| < 1.$$

Se sigue que

$$-\left\|F'(x_0)^{-1}F'(x)\right\| + 1 \le \left\|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(x_0)]\right\|$$

$$\le c\|x - x_0\|$$

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F'(x)\right\| \ge 1 - c\|x - x_0\|,$$

y

$$\left\|F'(x)^{-1}F'(x_0)\right\| \le \frac{1}{1 - c\|x - x_0\|}.$$

Como por (9)

$$\left\|F'(x_0)^{-1}[F''(x) - F''(x_0)]\right\| \le d\|x - x_0\|.$$

Tenemos:

$$-b + \left\|F'(x_0)^{-1}F''(x)\right\| \le \left\|F'(x_0)^{-1}[F''(x) - F''(x_0)]\right\|$$

y usando la desigualdad en (7)

$$\begin{aligned} -b + \left\|F'(x_0)^{-1}F''(x)\right\| &\le d\|x - x_0\| \\ \left\|F'(x_0)^{-1}F''(x)\right\| &\le b + d\|x - x_0\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ahora podemos probar el siguiente resultado semilocal relativo a la convergencia del método de Newton (2).

Teorema: Sean F el operador definido en (1) y p el polinomio definido en (15). Supongamos que $B\left(x_0, \dfrac{1}{c}\right) \subseteq \Omega$ y que la condición B se cumple. Entonces la sucesión de Newton $\{x_n\}_{n\ge0}$ generado por (2) está bien definido se encuentra en $\overline{B}(x_0, r_1)$, $\forall n \ge 0$, y converge hacia una solución $x^* \in \overline{B}(x_0, r_1)$ de la ecuació $F(x) = 0$, que es única en $\overline{B}(x_0, r_2)$ si $r_1 < r_2$. Si $r_1 = r_2$ la solución x^* es única en $\overline{B}(x_0, r_1)$. Además las siguientes estimaciones se cumplen para todo $n \ge 0$.

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le t_{n+1} - t_n \tag{23}$$

y

$$\|x_n - x^*\| \le r_1 - t_n = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2^n} (r_2 - t_n) \tag{24}$$

donde r_1 y r_2 son raices de la ecuación cuadrática $p(t) = 0$ dado por (20).

Prueba: Sea $F(x) = 0$.

Donde

$$p(t) = \frac{l}{2}t^2 - t + a$$

con

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2la}}{l}, \quad r_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2la}}{l}.$$

Además Ω es un conjunto convexo con $B\left(x_0, \frac{1}{c}\right) \subseteq \Omega$, considerando (2)

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F'(x_n), \quad \forall n \geq 0, \quad x_0 \in B,$$

sea

$$S = \{n \in \mathbf{N} / \|x_{n+1} - x_n\| < t_{n+1} - t_n, \quad \forall n \geq 0\},$$

veamos que $S = \mathbf{N}$, usaremos inducción matemática, se tiene:

Para $n = 0$, usando la definición de x_1:

$$x_1 = x_0 - F'(x_0)^{-1}F'(x_0),$$

entonces usando la condición B,

$$\|x_1 - x_0\| = \left\|-F'(x_0)^{-1}F(x_0)\right\| \leq a = t_1 - t_0 < r_1.$$

De ello se deduce que $x_1 \in \overline{B}(x_0, r_1)$ y (23) es válido.

Por la hipótesis inductiva para $n = m$, se cumple:

$$\begin{aligned} \|x_m - x_{m-1}\| &= \left\|-F'(x_{m-1})^{-1}F(x_{m-1})\right\| \\ &\leq a_{m-1} = t_m - t_{m-1} < r_1, \end{aligned}$$

entonces

$$x_m \in \overline{B}(x_{m-1}, r_1) \subset \overline{B}(x_0, r_1).$$

Luego para $n = m + 1$, se tiene:

$$\begin{aligned} \|x_{m+1} - x_m\| &= \left\|-F'(x_m)^{-1}F(x_m)\right\| \\ &\leq a_m = t_{m+1} - t_m < r_1, \end{aligned}$$

por hipótesis inductiva ya que $x_m \in \overline{B}(x_0, r_1)$, se tiene

$$x_{m+1} \in \overline{B}(x_m, r_1) \subset \overline{B}(x_0, r_1),$$

y $S = \mathbf{N}$. por lo tanto

$$\|x_{m+1} - x_n\| \leq \|t_{n+1} - t_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Ahora, de (2): $-F(x_i) - F'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = 0$, luego

$$\begin{aligned} F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1}) &= F'(x_0)^{-1}[F(x_{i+1}) - 0] \\ &= F'(x_0)^{-1}[(x_i - x_{i+1})F'(x_i) + \\ &\quad F(x_{i+1}) - F(x_i)] \end{aligned}$$

haciendo $w = x_i + t(x_{i+1} - x_i)$ donde si $t \to 0$ entonces $w \to x_i$ y si $t \to 1$ entonces $w \to x_{i+1}$, tenemos:

$$\begin{aligned} F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1}) &= F'(x_0)^{-1}\Big[\, x_{i+1}F'(w)\big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \\ &\quad wF'(w)\big|_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} F'(w)dw\Big] \\ &= F'(x_0)^{-1}\Big[x_{i+1}F'(w)\big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \\ &\quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} wF''(w)dw\Big] \\ &= F'(x_0)^{-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - w)F''(w)dw\right], \end{aligned}$$

volviendo a la variable inicial de t y donde $z = x_{i+1} - x_i$, obtenemos:

$$\begin{aligned} F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1}) = F'(x_0)^{-1}\Big\{z^2\Big[\int_0^1 F''(x_i + tz)(1 - t)dt \\ -\frac{1}{2}F''(x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)\Big]\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1}) &= F'(x_0)^{-1}\Big\{z^2\Big[\int_0^1 G(t)(1 - t)dt + \\ &\quad \frac{1}{2}F''(x_0)\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{25}$$

con $G(t) = F''(x_i + tz) - F''(x_0)$. Usando inducción matemática para

$$S = \{n \in \mathbf{N} / \|x_{n+1} - x_0\| \leq t_{n+1} - t_0 < r_1, \ \forall n \geq 0\}.$$

Para $n = 0$ se tiene:

$$\|x_1 - x_0\| \leq t_1 - t_0 = t_1 \leq r_1.$$

Luego por la hipótesis inductivo cuando $n = m$ se tiene:

$$\|x_m - x_0\| \leq t_m - t_0 = t_m < r_1,$$

como $n = m + 1$ se tiene:

$$\begin{aligned} \|x_{m+1} - x_0\| &\leq \|x_{m+1} - x_m\| + \|x_m - x_0\| \\ &\leq t_{m+1} - t_m + t_m - t_0 \\ &\leq t_{m+1} - t_0 \leq t_{m+1} < r_1, \end{aligned}$$

luego $S = \mathbf{N}$.
Por tanto, $\|x_{n+1} - x_0\| < t_{n+1} - t_0 < r_1$, y

$$\begin{aligned} \|x_{i+1} - x_0\| &\leq \|x_i - t(x_{i+1} - x_i) - x_0\| \\ &\leq \|x_i - x_0\| - t(\|x_{i+1} - x_0\| - \|x_i - x_0\|) \\ &\leq t_i - t(t_{i+1} - t_i) < r_1. \end{aligned}$$

De (7), (9), (15), (22), (23) y (25) tenemos:

$$\begin{aligned} \left\|F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1})\right\| &= \left\| \left[\int_0^1 G(t)(1-t)dt + \frac{1}{2}F''(x_0) \right] z^2 F'(x_0)^{-1} \right\| \\ &\leq \int_0^1 \left\|G(t)F'(x_0)^{-1}\right\| (1-t)\|z\|^2 dt + \frac{1}{2}\left\|F'(x_0)^{-1}F''(x_0)\right\| \|z\|^2 \\ &\leq \left\{ \int_0^1 d\left(\|x_i - x_0\| + t\|z\|\right)(1-t)dt + \frac{1}{2}b \right\} \|z\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left[b + d\|x_i - x_0\| + \frac{d}{3}\|z\|\right]\|z\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\|F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1})\right\| &\leq \left[b + dt_i + \frac{d}{3}(t_{i+1} - t_i)\right]\frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2} \\ &\leq \frac{1}{2}\left[b + \frac{2}{3}dt_i + \frac{d}{3}t_{i+1}\right](t_{i+1} - t_i)^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left[b + dr_1\right](t_{i+1} - t_i)^2 \\ &\leq \frac{k}{2}\left(t_{i+1}^2 - 2t_it_{i+1} + t_i^2\right) \\ &\leq \frac{k}{2}t_{i+1}^2 - kr_1t_{i+1} + \frac{k}{2}r_1^2 \\ &\leq \frac{k}{2}t_{i+1}^2 - t_{i+1} + \frac{1}{2k}, \text{ con } 0 < r_1 < \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Luego

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1})\right\| \leq \frac{k}{2}t_{i+1}^2 - t_{i+1} + a = p(t_{i+1}). \tag{26}$$

Por (2), (17), (21) y (26) obtenemos

$$\|x_{i+2} - x_{i+1}\| \leq -\frac{p(t_{i+1})}{p'(t_{i+1})} = t_{i+2} - t_{i+1},$$

donde se aprecia (23), $\forall n \geq 0$.

Por el lema (1) y la estimación (23) se desprende que $\{x_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach U, por lo que converge a algún límite $x^* \in \overline{B}(x_0, r_1)$ (donde $\overline{B}(x_0, r_1)$ es un conjunto cerrado).

Por (2) y la continuidad de F, tenemos $F(x^*) = 0$. Para probar la unicidad sea $y \in B(x_0, r_2)$ tal que $F(y) = 0$. Usando (2) obtenemos:

$$\begin{aligned} y - x_{n+1} &= y - x_n + F'(x_n)^{-1}F(x_n) \\ &= F'(x_n)^{-1}F(x_n) \\ &= F'(x_n)^{-1}F(x_n).F'(x_0)^{-1}F'(x_0) \\ &= F'(x_n)^{-1}F'(x_0).F'(x_0)^{-1}F'(x_n), \end{aligned}$$

Se concluye:

$$y - x_{n+1} = \left\{ \int_0^1 [F''(x_n + t(y - x_n)) - F''(x_0)](1-t)dt + \int_0^1 F''(x_0)(1-t)dt \right\} F'(x_0)^{-1}(y - x_n)^2. \quad (27)$$

Como en (25) y (26) tenemos $\|y - x_0\| \leq r_1 - t_0$ si $y \in \overline{B}(x_0, r_1)$, y

$$\|y - x_n\| \leq \lambda(r_2 - t_n),\ a < \lambda < 1,$$

si $y \in B(x_0, r_2)$. Es decir, como en (25) y (27) tenemos $\|y - x_n\| \leq r_1 - t_n$ si $y \in \overline{B}(x_0, r_1)$ $(n \geq 0)$, y $\|y - x_n\| \leq \lambda^{2^n}(r_2 - t_n)$ si $y \in B(x_0, r_2)$ $(n \geq 0)$. Donde

$$S = \left\{ n \in \mathbf{N} / \|y - x_n\| \leq \lambda^{2^n}(r_2 - t_n),\ \forall n \geq 0 \right\}.$$

Veamos por inducción matemática.

Cuando $n = 0$:

$$\|y - x_0\| \leq (r_1 - t_0) \leq \lambda(r_2 - t_0) = \lambda^{2^0}(r_2 - t_0).$$

Por la hipótesis inductiva para $n = m$:

$$\|y - x_m\| \leq \lambda^{2^m}(r_2 - t_0).$$

Luego $n = m + 1$:

$$\|y - x_{m+1}\| \leq \lambda^{2^m}(r_1 - t_0) \leq \lambda^{2^{m+1}}(r_2 - t_0),$$

entonces $S = \mathbf{N}$, por lo tanto

$$\|y - x_n\| \leq \lambda^{2^n}(r_2 - t_n), \quad \text{si } y \in B(x_0, r_2), \quad (n \geq 0),$$

y $F^*(x^*) = 0$ se deduce que:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = y,$$

en ambos casos.

Finalmente las estimaciones

$$\|x_n - x^*\| \leq r_1 - t_n = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2^n} (r_2 - t_n).$$

siguen utilizando técnicas estándar mejoradas (17) y (23) ([2], [3], [6]). ■

3. OBSERVACIONES

Observación 1: La convergencia del método de Newton's (2) puede ser establecido independientemente usando las condiciones A y B. En particular podemos usar ambos de ellos para determinar la región factible más pequeña donde se localiza la solución y la mayor región donde la solución es única.

Consideremos el polinomio q dado por:

$$q(t) = \frac{l}{2}t^2 - t + a,$$

donde si

$$r_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2la}}{l}$$

entonces $r_3, r_4 \geq r_1$ satisface $p(r_3, r_4) \leq 0$, con las raices denotadas por r_3 y r_4 $(r_3 \leq r_4)$. Entonces siendo $c \leq l$ dado por (15) tenemos $p(r_3) \leq 0$ y $p(r_4) \leq 0$. Donde $r_1 \leq r_3 \leq r_4 \leq r_2$. Notese que el teorema usa simplemente un polinomio cuadratico p y la condición (10) en lugar de un polinomio cúbico y de la condición (27) en [3], [5] lo cual es mas complicado obtener.

Observación 2: Extendiendo el resultado obtenido en el teorema (2,3) para incluir el caso Hölder. Asumimos, de (9) en la condición B, el F satisface

$$\left\|F'(x_0)^{-1}[F''(x) - F''(x_0)]\right\| \leq d_0\|x - x_0\|^q, \ \forall x \in D, \quad q \in [0,1], \quad \text{con } d_0 \geq 0 \qquad (28)$$

Para $q = 0$, si

$$\begin{aligned}\|F'(x_0)^{-1}F''(x)\| - \|F'(x_0)^{-1}F''(x_0)\| &\leq \|F'(x_0)^{-1}[F''(x) - F''(x_0)]\| \\ &\leq d_0\end{aligned}$$

entonces por (9)

$$\|F'(x_0)^{-1}F''(x)\| \quad \leq \quad d_0 + \|F'(x_0)^{-1}F''(x_0)\|$$

esto es

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F''(x)\right\| \quad \leq \quad d_0 + b,$$

y dados en la situación del teorema de Kantorovich [6, Teorema XVIII.1.6]. Si $q = 1$ en (28) se obtiene (9). Además si $q \in (0,1)$, entonces F'' es q-Hölder continuas en Ω. Sea a, b, c dados como antes. Asumiendo que existen $k_0 \geq c$ tal que $b + d_0 r_1^q \geq k_0$, donde r_1 es dado por (20), y por la condición (10) donde k es reemplazado por k_0.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo construye las hipótesis del teorema de Kantorovich que es muy aplicado en el Análisis Numérico, y en otras ramas afines con un enfoque diferente.

---

1. I.K. Argyros, *Newton-like methods under mild differentiability conditions with error analysis,* Bull. Austral. Math. Soc. **37** (1988), 131-147.
2. I.K. Argyros and F. Szidarovszky, *The Theory and Applications of Iteration Methods,* C.R.C. Press, Boca Raton, Fla., 1993.
3. J.M. Gutiérrez, *A new semilocal convergence theorem for Newton's method,* J. Comput. Appl. Math. **79** (1997), 131-145.
4. J.M. Gutiérrez, M.A. Hernández, and M.A. Salanova, *Accessibility of solutions by Newton's method,* Internat. J. Comput. Math **57** (1995), 239-247.
5. Z. Huang, *A note on the Kantorovick theorem for Newton iteration,* J. Comput. Appl. Math. **47** (1993) 211-217.
6. L.V. Kantorovich and G.P. Akilov, *Functional Analysis,* Pergamon Press, Oxford, 1982.