Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2019-1**

[Cod: CM334] **[Curso: Análisis Numérico I]**

Práctica Dirigida N^o 4

1. Supongamos que usamos una computadora con aritmética de punto flotante que tiene una precisión de 4 dígitos decimales con el redondeo. Resuelva el siguiente sistema lineal usando la eliminación de Gauss con pivote fila:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

¿Cuáles son el error absoluto y el error relativo?

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$, $n_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$ y $b \in \mathbb{R}^N$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{bmatrix}, \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$$

donde $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $1 \leq i, j \leq m$, $b_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $1 \leq i \leq m$.

a) Considere la solución del sistema lineal algebraico $Ax = b$. Utilice una estructuración correspondiente del vector de solución $x \in \mathbb{R}^N$ y proporcione una variante de bloque de eliminación de Gauss.

b) Dar una variante de bloque de la descomposición de LR para matrices tridiagonal por bloques $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, i.e., $A_{ij} = 0$ para $|i-j| \geq 2$, $1 \leq i, j \leq m$.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $N = n_1 + n_2$, $1 \leq i \leq 2$ una matriz por bloques definida positiva simétrica de la forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix}$$

Demuestre que $S = A_22 - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12}$ es también definida positiva simétrica.

4. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se denomina matriz de Toeplitz simétrica normalizada, si

$$A_{ij} = r_{|i-j|}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

donde $r_0 = 1$ y $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)^T \in \mathbb{R}^n$ tal que A es definida positiva. La solución del sistema algebraico lineal $Ax = -r$, se conoce como el problema de Yule-Walker, que desempeña un papel importante en los algoritmos para la reconstrucción de señales ruidosas. Considere una partición de la matriz A tal como

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A} & P_{n-1}\tilde{r} \\ \tilde{r}^T & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, $\tilde{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})^T$ y

$$P_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilice una partición correspondiente del lado derecho y del vector de solución. Desarrolle un algoritmo recursivo para el problema de Yule-Walker que calcula la solución para la dimensión n, siempre que se conozca la solución para la dimensión $n-1$.

5. Suponga que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es semidefinida positiva de rango r con $r < n$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

   a) Existe una matriz triangular superior R con elementos diagonales no negativos tal que $A = R^T R$.

   b) Existe una matriz de permutación P tal que $P^T AP$ tiene una descomposición de Cholesky única de la forma

   $$P^T AP = T^T R, \quad R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   donde R_{11} es una matriz triangular superior $r \times r$ con elementos diagonales positivos.

6. Demuestre que si Q es unitaria si y solo si sus filas constituyen un conjunto ortonormal.

7. Sea A una matriz de $m \times n$, b un vector $m \times 1$ y $\alpha > 0$. Utilizando la norma euclidiana, defina:

$$F(x) = \|Ax - b\|_2^2 + \alpha\|x\|_2^2.$$

Demuestre que $F(x)$ alcanza un mínimo cuando x es solución de la ecuación

$$(A^T A + \alpha I)x = A^T b$$

Demuestre que cuando x se define de esa manera,

$$F(x + h) = F(x) + (Ah)^T + \alpha h^T h$$

8. Demuestre que si Q es unitaria, entonces para todo x y todo y

$$\|x\|_2 = \|Qx\|_2 = \quad y \quad \langle x, y\rangle = \langle Qx, Qy\rangle$$

9. Programe el algoritmo de Gram-Schmidt y el algoritmo modificado de Gram-Schmidt y pruébelos para ver cual es mejor. La primera prueba podría comprender una matriz de 20×10 con elementos aleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo $[0, 1]$. La segunda prueba podría comprende una matriz de 20×10 con elementos generados por una función elemental, como por ejemplo

$$a_{ij} = \left(\frac{2i - 2j}{19}\right)^{j-1}$$

En cada caso genere a partir de A una matriz B cuyas columnas deberán ser ortonormales. Examine $B^T B$ para ver cuan próxima es a la matriz identidad.

10. Encuentre un polinomio de grado 3 que ajuste

x	0	2	4	6	9	11	12	15	17	19
y	5	6	7	6	9	8	7	10	12	12

11. Encuentre un polinomio de grado 4 que ajuste

x	6	7	11	15	17	21	23	29	29	37	39
y	29	21	29	14	21	15	7	7	13	0	3

12. Encuentre una función potencia $y = ax^n$ que ajuste

x	2.5	3.5	5	6	7.5	10	12.5	15	17.5	20
y	13	11	8.5	8.2	7	6.2	5.2	4.8	4.6	4.3

13. Encuentre una función exponencial $y = ae^{bx}$ que ajuste

x	0.4	0.8	1.2	1.6	2	2.3
y	800	975	1500	1950	2900	3600

14. Encuentre una función $y = axe^{bx}$ que ajuste

x	0.1	0.2	0.4	0.6	0.9	1.3	1.5	1.7	1.8
y	0.75	1.25	1.45	1.25	0.85	0.55	0.35	0.28	0.18

15. Encuentre una función $k = \dfrac{ac^2}{b + c^2}$ que ajuste

c	0.5	0.8	1.5	2.5	4
k	1.1	2.4	5.3	7.6	8.9

16. Encuentre una función $x = e^{\frac{y-b}{a}}$ que ajuste

x	1	2	3	4	5
y	0.5	2	2.9	3.5	4

UNI, 26 de abril del 2019*

*Hecho en LaTeX