Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2019-1**

[Cod: CM334] **[Curso: Análisis Numérico I]**

Práctica Dirigida N^o 5

1. Se desea resolver por un método iterativo el sistema lineal $Ax = b$ del que se conocen las siguientes características sobre sus coeficientes:

   - $|a_i^i| > \alpha \sum\limits_{j=1 j\neq i}^{n} \left|a_i^j\right|$, $i = 1, 2, \ldots, n$ con $\alpha > 1$
   - $0 < \gamma < |a_i^i|$, $i = 1, 2, \ldots, n$
   - $\|b_\infty\| = \beta$

   donde las constantes α, β y γ son conocidas.

   a) Demuestre que el método de Jacobi es convergente.
   b) Obtener, dependiendo de α, β y γ el número de iteraciones necesarias para obtener un error menor que ε partiendo de $x^{(0)} = 0$.
   c) Realizar 3 iteraciones exactas del método de Jacobi para realizar el sistema

   $$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

   Acotar el error cometido utilizando la $\| * \|_1$ y compararlo con el error real sabiendo que $x = (0{,}5, -0{,}25, 0{,}25)$.

   d) ¿Que se puede decir del sistema anterior sobre la convergencia del método de Gauss-Seidel?

2. Demuestre que el método de Gauss-Seidel es convergente cuando la matriz del sistema es de diagonal dominante y hay al menos una fila con diagonal estrictamente dominante.

3. Dado el sistema lineal

   $$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} x = b$$

   a) Calcular las matriz de iteración de Jacobi y su radio espectral. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para obtener un error menor que 0,001 utilizando la norma 1 o infinito?

   b) Calcular las matriz de iteración de Gauss y su radio espectral. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para obtener un error menor que 0,001 utilizando la norma 1 o infinito?

c) Seleccionar justificadamente el método iterativo más adecuado. Obtener el vector c del método iterativo seleccionado de forma que la solución sea el vector $(1, 1, 1)^T$.

d) Definir el condicionamiento de un sistema lineal y su interpretación.

4. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a & 1 \end{bmatrix}$$

a) Demostrar por inducción que todos los determinantes principales son positivos cuando $a > 2$, y por tanto, aplicando criterio de Silvester, la matriz es definida positiva.

b) Dadas las características de la matriz, seleccionar justificadamente el método de factorización más adecuado. Aplicarlo cuando $A \in M_{3\times3}$.

c) Obtener la matriz de iteración de Jacobi. Demostrar que el método converge cuando $a > 2$, ¿Cómo sería el método cuando $a = 7/4$ y $A \in M_{3\times3}$?

5. Dado el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & a & a \\ b & b & a \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2(b-a) \\ a-b \end{bmatrix}$$

a) ¿Qué relación debe haber entre a y b para que el sistema admita solución única?

b) Calcular las matrices de iteración de Jacobi y de Gauss Seidel.

c) Determinar la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel cuando se toma $a = \dfrac{1}{2}$ y $b = -1$. Obtener asimismo su radio espectral.

d) En caso de converger el método de Jacobi con $a = \dfrac{1}{2}$ y $b = -1$, ¿cuántas iteraciones son necesarias para obtener un error menor que 0,001 utilizando la norma 1? ¿y la infinito?

e) En caso de converger el método de Gauss-Seidel con $a = \dfrac{1}{2}$ y $b = -1$, ¿cuántas iteraciones son necesarias para obtener un error menor que 0,001 utilizando la norma 1? ¿y la infinito?

6. Dado el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

a) Seleccionar el método iterativo más adecuado.

b) Calcular el número de iteraciones para lograr un error (respecto a $\| \circ \|_\infty$ menor que 10^{-5}, partiendo del vector nulo. partiendo del vector nulo

UNI, 16 de mayo del 2019*

*Hecho en LaTeX