Ejemplo 4.8 (Tarea 21, Curso 2006). *Sea*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & -d \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

a) *¿Para qué valores de $z = ac + bd$ el método de Jacobi converge para la solución del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{r}$?*

b) *¿Para qué valores de a, b, c, d la matriz $\mathbf{A}$ es irreducible?*

c) *Indicar la fórmula de iteración del método SOR para $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{r}$ en forma explícita (o sea, sin matrices inversas) en la forma $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{B}(\omega)\mathbf{x}_k + \mathbf{v}(\omega)$.*

d) *Sean $a = 0{,}5$, $b = 0{,}4$, $c = 0{,}7$, $d = -0{,}4$ y $\mathbf{r} = (-5, 9, 7)^{\mathrm{T}}$. (La solución exacta es $\tilde{\mathbf{x}} = (2, 5, 10)^{\mathrm{T}}$.) Partiendo de $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, calcular $\mathbf{x}_2$ con el método de Gauss-Seidel.*

e) *Sean $\mathbf{H}_1 := \mathbf{B}(1)$ y $\mathbf{H}$ la matriz de iteración del método de Jacobi. Demostrar que $\mathbf{A}$ es ordenada consistentemente y que $(r_\sigma(\mathbf{H}))^2 = r_\sigma(\mathbf{H}_1)$. Determinar $r_\sigma(\mathbf{H}_1)$ para los valores numéricos de (d).*

f) *Sea $0 < z < 1$. Demostrar que el método SOR aplicado a $\mathbf{A}$ posee un parámetro óptimo $\omega = \omega_{\mathrm{opt}}$, y calcular el valor de ω_{opt} para los valores numéricos de (d). ¿Cuál es el valor del radio espectral correspondiente?*

g) *Partiendo de $\mathbf{x}_0$ especificado en (d), determinar $\tilde{\mathbf{x}}_2$ usando el método SOR y el parámetro ω óptimo.*

Solución sugerida.

a) *En este caso,*

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \\ a & b & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda(\lambda^2 + z),$$

entonces $r_\sigma(\mathbf{J}) < 1$ si y sólo si $|z| < 1$.

b) *P_1 puede ser conectado con P_3 si y sólo si $c \neq 0$, y P_2 con P_3 si y sólo si $d \neq 0$. Lo mismo es válido para los arcos dirigidos $P_3 \to P_1$ y $p_3 \to P_2$, o sea A es irreducible si y sólo si $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.*

c)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\omega) &= (\mathbf{D} - \omega \mathbf{L})^{-1}((1-\omega)\mathbf{D} + \omega \mathbf{U}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\omega a & -\omega b & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & \omega c \\ 0 & 1-\omega & \omega d \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega a & \omega b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & \omega c \\ 0 & 1-\omega & \omega d \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & \omega c \\ 0 & 1-\omega & \omega d \\ \omega(1-\omega)a & \omega(1-\omega)b & 1-\omega+\omega^2 z \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}(\omega) = \omega \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega a & \omega b & 1 \end{bmatrix} \mathbf{r}.$$

d)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & -0{,}4 \\ 0 & 0 & 0{,}19 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 8{,}1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -4{,}3 \\ 8{,}6 \\ 8{,}29 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}803 \\ 5{,}684 \\ 9{,}6751 \end{pmatrix}$$

e) *Puesto que*

$$\det\left(\alpha\mathbf{L} + \frac{1}{\alpha}\mathbf{U} - \lambda\mathbf{I}\right) = -\lambda(\lambda^2 + z)$$

independentemente de α, la matriz $\mathbf{A}$ *es ordenada consistentemente. Usando (a), vemos que $r_\sigma(\mathbf{H}) = \sqrt{0{,}19}$; entonces $(r_\sigma(\mathbf{H}))^2 = r_\sigma(\mathbf{H}_1)$, es decir $r_\sigma(\mathbf{H}_1) = 0{,}19$.*

f) *Según (a), $r_\sigma(\mathbf{H}) < 1$ y todos los valores propios de* $\mathbf{H}$ *son reales. Según (e),* $\mathbf{A}$ *es ordenada consistentemente, entonces existe ω_{opt}. Aquí tenemos*

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-(r_\sigma(\mathbf{H}))^2}} = \frac{20}{19} = 1{,}0526, \quad r_\sigma(\mathbf{H}_{\omega_{\text{opt}}}) = 0{,}0526.$$

g)

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} -4{,}5789 \\ 9 \\ 8{,}795 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1{,}4583 \\ 5{,}2968 \\ 10{,}0485 \end{pmatrix}.$$

Se reconoce la gran ganancia en velocidad de convergencia usando $\omega = \omega_{\text{opt}}$. Pero en la práctica, se recomienda *sobreestimar* ω, dado que en el lado izquierdo de ω_{opt} la tangente es vertical (como ilustra la Figura 4.3). Entonces, necesitamos una cota superior de $r_\sigma(\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}))$. Veremos en el Capítulo 5 como nos podemos conseguir una tal cota.

Sin demostración comunicamos el siguiente teorema.

Definición 4.7. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *simétrica y definida positiva. Un sistema* $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1}\}$ *de vectores se llama* **A**-ortogonal *si para* $0 \leqslant j, k \leqslant n-1$,

$$\mathbf{p}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{p}_k = \kappa_k \delta_{jk}, \quad \kappa_j > 0, \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & si\ j \neq k, \\ 1 & si\ j = k. \end{cases}$$

Pero, para la solución del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, la determinación de los ejes principales de $\mathbf{A}$, es decir, de sus vectores propios, significaria un esfuerzo computacional altamente exagerado. Demostraremos ahora que la minimización a lo largo de direcciones **A**-ortogonales, tambien llamadas **A**-*conjugadas*, también entrega un método finito.

Ejemplo 4.10. *Consideramos el sistema* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *con*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.41}$$

con la solución exacta $\mathbf{x}^* = (2,1)^{\mathrm{T}}$*; la matriz* $\mathbf{A}$ *es simétrica y definida positiva. Un ejemplo de direcciones* $\mathbf{A}$ *ortogonales son*

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La Figura 4.4 muestra las elipses concéntricas $f(\mathbf{x}) = c$*, donde* f *es definida por* (4.39) *y* $c = -3, -2, -1, 0, \dots$*; el mínimo es* $f(\mathbf{x}^*) = -3{,}5$.

Ejemplo 4.11. *Continuamos considerando el sistema del Ejemplo 4.10, partiendo de*

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - 2\sqrt{0{,}7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}67332005 \end{pmatrix}.$$

En este caso, obtenemos de (4.42) *con* $k = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{(1,0)\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - 2\sqrt{0{,}7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}{(1,0) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \\ &= \frac{(1,0)\begin{pmatrix} 2\sqrt{0{,}7} - 1 - 3 \\ -6\sqrt{0{,}7} + 3 - 1 \end{pmatrix}}{(1,0)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}} = \frac{2\sqrt{0{,}7} - 4}{2} = \sqrt{0{,}7} - 2 = -1{,}16333997347, \end{aligned}$$

entonces

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - 2\sqrt{0{,}7} \end{pmatrix} - (\sqrt{0{,}7} - 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{0{,}7} \\ 1 - 2\sqrt{0{,}7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}16333997347 \\ -0{,}673320053068 \end{pmatrix}.$$

Luego calculamos

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sqrt{5} \frac{(1,2)\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{0{,}7} \\ 1 - 2\sqrt{0{,}7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}{(1,2) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = -\sqrt{\frac{7}{2}}, \\ \mathbf{x}_2 &= \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{0{,}7} \\ 1 - 2\sqrt{0{,}7} \end{pmatrix} - \left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^*. \end{aligned}$$

La Figura 4.4 muestra $\mathbf{x}_0$ *y* $\mathbf{x}_1$.