OPTIMIZACIÓN DE LA INVERSIÓN EN EL COMERCIO INTERNACIONAL

Angela Serrano Sanchez 1, Kriss Gutierrez Anco 2, Naro León Ríos 3, Manuel Flores Farfán 4,

Facultad de Ciencias 1*, Universidad Nacional de Ingeniería* 1*, e-mail: aserranos@uni.pe*

Facultad de Ciencias 2*, Universidad Nacional de Ingeniería* 2*, e-mail: kriss-lady@hotmail.com*

Facultad de Ciencias 3*, Universidad Nacional de Ingeniería* 3*, e-mail: mnrios@uni.pe*

Facultad de Ciencias 4*, Universidad Nacional de Ingeniería* 4*, e-mail: mflores@uni.pe*

Resumen

Hoy en día es indispensable comparar diferentes métodos de resolución para un problema de optimización de los costos en una empresa. Se encontró dos enfoques para tratar el problema, el primero fue minimizar costos abordándolo como un problema de programación lineal, mientras que segundo enfoque fue agotar todos los recursos disponibles para la empresa tratándose como un sistema de ecuaciones lineales no compatible, es decir, de infinitas soluciones. Ambos enfoques examinaron como principal variable el vector de costos dado que el problema no mencionaba ningún dato referente a la ganancia. Varias de las soluciones por el primer enfoque demostraron que la empresa podría no suministrar a ciertos países con el fin de minimizar sus costos.

Palabras Claves:

Optimización, métodos numéricos, soluciones, aproximación, sistema de ecuaciones.

Resumen

Nowadays is so important comparing the approximate solutions obtained in different resolution methods for a cost optimization problem in a company. There were two approaches, first we had to minimize costs by dealing with it as a linear programming problem, while the second approach was to use up all available resources for the company, treating it as a system of non-compatible linear equations, that is, with infinite solutions. Both approaches examined the vector of costs as main variable since the problem did not mention any data regarding profit. Several of the solutions by the first approach demonstrated that the company might not supply certain countries in order to minimize their costs.

Keywords:

optimization, numerical methods, solutions, approximation, system of equations.

1. INTRODUCCIÓN

Historicamente se ha constatado las consecuencias de la sobreproducción en una empresa, tal como pasó en el Crack del 29, donde la producción superó las necesidades reales de consumo , con el fin de evitar esta situación es necesario limitar la cantidad producida tomando en cuenta las condiciones establecidas entre la empresa y sus clientes, tales como : tratados, convenios, etc. Sin embargo, también se debe tener en consideración minimizar los costos de producción y transporte.

En pocas palabras, nos referimos a la optimización de ventas. En busca de la solución a dicho problema se propone un modelo matemático estable y equivalente que cumpla las condiciones iniciales presentadas en el problema. Esto implica el uso de una sistema matricial de ecuaciones lineales cuya solución puede ser hallada mediante métodos numéricos, así mismo se opta por usar la computadora como una herramienta debido a la gran cantidad de datos que se manejan en este tipo de problemas y a su vez tiene como objetivo comparar los resultados de diferentes métodos numéricos.

2. CONCEPTOS PREVIOS

Expondremos conceptos previos relacionados a las herramientas matemáticas usadas en el modelado del problema y ciertos conceptos relacionados a economía que nos proporcionarán una mejor perspectiva del problema:

Conceptos económicos

- **Función de producción:** Muestra la cantidad máxima de un producto o varios ques e pueden optener a partir de las diferentes combinaciones de factores productivos
- **Factores productivos:** Se refieren a los recursos usados en la producción de los bienes y servicios.
- **Costos fijos:** Se refieren a los costos que no dependen de la cantidad producida.
- **Costos variables:** Se refieren a los costos que dependen de la cantidad producida.
- **Costo total:** Es igual a la suma de los costos fijos y los costos variables.

Conceptos Matemáticos

Se discutira la idea escencial de los métodos númericos que se usaran para la resolución de este problema:

Método de Gauss Algunos de los métodos númericos que se estudian para la solución de un sistema lineal se basan en el método de la eliminación de Gauss, la idea es llevar una matriz regular $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a una matriz triangular superior, para luego hallar la solución al sistema de manera recurrente, sin tener que hallar la inversa de A, la cual conllevaria a más pasos.

Con el fin de obtener esta matriz triangular superior se le multiplica a la matriz original iterativamente una matriz de la forma $I - \alpha e_j^T$ donde I es la matriz identidad, e_j el vector cuyas componentes son nulas excepto en la posición j que es 1 y α un vector adecuado talque las componentes debajo de la posición A_{jj} sean ceros. Para reducir los errores, se opta por un modificación de este método, con pivotación, es decir que en cada paso del algoritmo se lleve al mayor elemento en valor absoluto de la columna a la posición A_{jj}.

Método de LU

Este método busca expresar una matriz cuadrada regular como producto de una matriz triangular inferior L y otra triangular superior U, así el problema puede ser desarrollado, resolviendo los sistemas $Ly = b$ y $Ux = y$. Una forma de conseguir esta factorización LU la constituye la propia eliminación de Gauss, pues este método procedía reduciendo a la matriz a una triangular superior mediante unas permutaciones y unas transformaciones por matrices elementales triangulares inferiores, tomando de esta factorización los elementos adecuados podemos obtener: $PA = LU$.

Factorización LDL^T

En caso de que la matriz A sea simétrica y regular, y además todas las submatrices principales son regulares, existe una matriz triangular inferior unitaria única, L, y otra diagonal también única, $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$, tales que $A = LDL^T$. En caso de que la matriz A no sea simétrica siempre puede obtenerse una matriz simétrica a partir de esta multiplicandola por su transpuesta

Factorización de Cholesky

Si la matriz no solo es simétrica sino que además es definida positiva admite una descomposición de la forma: $A = G^T G$, donde G es una matriz triangular superior.

Sistemas Lineales Indeterminados

Son aquellos sistemas lineales que poseen infinitas soluciones, en este tipo de sistemas, la solución génerica consiste en expresar algunas variables como función lineal del resto, este tipo de problemas suelen darse cuando la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $n > m$ con rango$(A) = m$.

A continuación definiremos algunos conceptos de programación lineal

Sea el problema de programación lineal en forma estandarizada:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{sujeto} \quad & Ax = b, \quad x \geq 0 \\ & A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \;\; x \in \mathbb{R}^n, \;\; b \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Donde $c^T x$ es llamado función objetivo, $Ax = b$ las restricciones y x la variable de decisión

Un importante resultado acerca de la relación entre los puntos extremos y las soluciones factibles optimas del sistema es dado por el siguiente teorema

Teorema fundamental de la programación lineal:

Dado el politopo:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \;\; Ax = b, \;\; x \geq 0\},$$

no vacio, el valor mínimo de $c^T x$, para $x \in P$, se alcanza en un punto extremo de P, y si $c^T x$ no está acotada inferiormente en P este puede tomar valores de $-\infty$

Es decir que si existiese al menos una solución factible en el conjunto soluciones para los valores de x donde la función objetivo es mínima, se puede encontrar una solución factible en un punto extremo.

3. ANÁLISIS

Variables a usar

x =Cantidad de productos exportados al país A

y =Cantidad de productos exportados al país B

z =Cantidad de productos exportados al país C

u =Cantidad de productos exportados al país D

v =Cantidad de productos exportados al país E

w =Cantidad de productos exportados al país F

Planteamiento de las ecuaciones del problema

$$\begin{aligned} x + y + z + u + v + w &= 170 \\ 2x + y + 3z + 2u + v + w &= 320 \\ x + y + z &= 70 \\ x + y + v + w &= 70 \end{aligned}$$

Planteamiento de la solución El problema puede ser planteado de la siguiente manera:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{\overline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 170 \\ 320 \\ 70 \\ 70 \end{bmatrix}}_{b}$$

Se observa que $A \in \mathbb{R}^{4\times 6}$, y cuyo rango es 4, por ello este problema es un sistema lineal indeterminado. Ya que el rango es 4 esto significa que cuatro de las seis variables pueden ser puestas en función de las otras dos restantes.

Fijaremos dos parametros y hallaremos los coeficientes de las cuatro variables restantes.
Elegiremos como parametros a v y w, pues estas tienen las columnas asociadas a A iguales, lo cual llevara a una cantidad menor de cálculos.
Expresamos $x,\ \ y,\ \ z$ y u como:

$$\overline{x} = \overline{x}_1 v + \overline{x}_2 w + \overline{x_3}$$

donde:
$\overline{x}_1 = [x_1, y_1, z_1, u_1]^T$
$\overline{x}_2 = [x_2, y_2, z_2, u_2]^T$
$\overline{x}_3 = [x_3, y_3, z_3, u_3]^T$
El objetivo es hallar los vectores: $[x_i, y_i, z_i, u_i]$ para $i \in \{1, 2, 3\}$.
Si la matriz A es descompuesta en A_l y A_r, donde A_l esta compuesta por las cuatro primeras columnas de A y A_r por las dos restantes, es decir $A = [A_l|A_r]$.
Sustituyendo estas nuevas variables en la ecuación inicial tenemos:

$$A_l\overline{x}_1 v + A_r e_1 v + A_l\overline{x}_2 w + A_r e_2 w + A_l\overline{x}_3 = b$$

Donde $[e_1, e_2]$ e la base canónica de $\mathbb{R}^2$.
Ya que v y w pueden tomar cualquier valor, tenemos que:

$$\begin{aligned} A_l\overline{x}_1 =& -A_r e_1 \\ A_l\overline{x}_2 =& -A_r e_2 \\ A_l\overline{x}_3 =& b \end{aligned}$$

De esto ultimo observamos que $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$.
Por lo tanto tendriamos dos sistemas lineales, con la misma matriz A asociada, el cual tienen una única solución pues A_l es regular y cuadrada, pudiendo usar los métodos númericos ya mencionados y evaluarlos.
La solución exacta de $\overline{x}_1$ y $\overline{x}_2$ resulta ser:

$$\begin{aligned} x =& -1 \\ y =& 0 \\ z =& 1 \\ u =& -1 \end{aligned}$$

desde que la matriz $A_r e_1 = A_r e_2$
La solución exacta de $\overline{x}_3$ y resulta ser:

$$\begin{aligned} x =& 50 \\ y =& 20 \\ z =& 0 \\ u =& 100 \end{aligned}$$

Con los coeficientes hallados, y debido a las restricciones: $x, y, z, u, v, w \geq 0$, tenemos que los valores de los parámetros estan acotados por el intervalo [0,50] por lo tanto el menor valor de u es 50.
Obtenemos que la solución cuando u es mínimo también esta parametrizada, pues las variables estaban en función de dos parametros, sin embargo en (**??**), observamos que este sistema define una cierta region en $\mathbb{R}^2$ para las variables v y w, ya que en el problema se especifica los costos de producción para cada país, y sin embargo se desconoce las ganancias en cada uno de estos, podemos asumir en que los ingresos

por año de la empresa con cada país sea constante, es decir que sus ingresos por cada producto en lo paises A, B, C, D, E, F sean: $[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_6]$, con el fin de que las ganancias obtenidas por la empresa sea una función lineal de la cantidad producida por la empresa, siendo esta:

$$\begin{aligned}(\lambda_1 - 2)x + (\lambda_2 - 1)y + (\lambda_3 - 3)z + (\lambda_4 - 2)u \\ +(\lambda_5 - 1)v + (\lambda_6 - 1)w\end{aligned}$$

Y gracias al Teorema Fundamental de la Programación Lineal nos asegura que podemos encontrar una solución óptima en alguna punto extremo de la region en (??), en el caso para $u = 50$, los posibles extremos son cuando $v = 0$ y $w = 50$ ó $v = 50$ y $w = 0$, así la solución que más le convendria a la empresa se encontraria en alguno de estos puntos.
Hallando los coeficientes se puede hallar la solución de los parametros de la exportación actual y estos son:

$$v = 10, \quad w = 20$$

4. OBSERVACIONES

A continuación se muestran las gráficas de la norma del vector residuo vs los métodos utilizados.

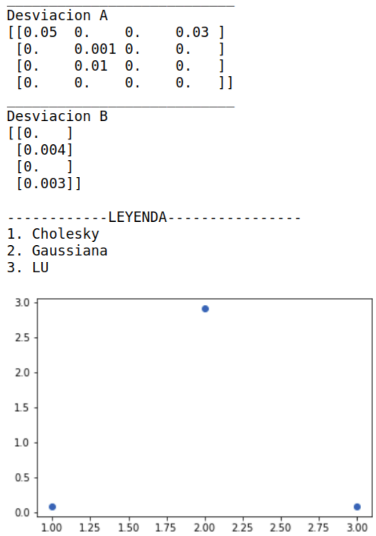

Figura 1: Desviación 1 Sistema 1

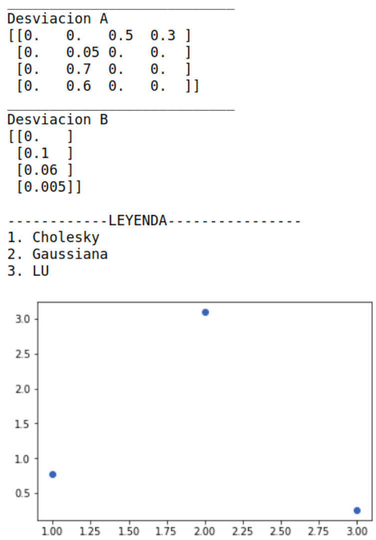

Figura 2: Desviación 2 Sistema 2

```
Desviacion A
[[0.    0.001 0.4   0.    ]
 [0.    0.    0.    0.    ]
 [0.    0.1   0.    0.    ]
 [0.    0.    0.1   0.    ]]
Desviacion B
[[0.5]
 [0. ]
 [0.6]
 [0.1]]
------------LEYENDA----------------
1. Cholesky
2. Gaussiana
3. LU
```

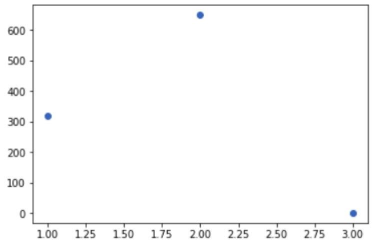

Figura 3: Desviación 3 Sistema 1

```
Desviacion A
[[0.  0.  0.  0. ]
 [0.3 0.  0.  0. ]
 [0.5 0.1 0.  0. ]
 [0.  0.  0.2 0. ]]
Desviacion B
[[0.]
 [0.]
 [0.]
 [0.]]
------------LEYENDA----------------
1. Cholesky
2. Gaussiana
3. LU
```

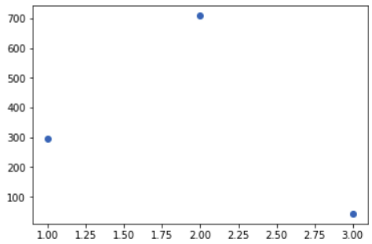

Figura 4: Desviación 4 Sistema 2

5. CONCLUSIONES

- Podemos notar gracias a las gráficas encontradas que el problema que pequeñas desviaciones generas grandes errores, residuos en los métodos de Cholesky y Gauss.
- Así también, en este problema el método de factorización LU con pivoteo en cada iteración produce menos error y por lo tanto es la opción más adecuada para este problema.

1. I.K. Argyros, *Newton-like methods under mild differentiability conditions with error analysis,* Bull. Austral. Math. Soc. **37** (1988), 131-147.

2.