Fernando Revilla

Tiempo, aritmética y conjetura de Goldbach & Docencia matemática

Teorema de los círculos de Gershgorin

Publicado el enero 4, 2017 por Fernando Revilla

Demostramos el teorema de los círculos de Gershgorin y damos ejemplos de aplicación.

Enunciado

Sea $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$. Para cada $i=1,2,\ldots,n$ consideremos los círculos cerrados del plano complejo

$$D_i=D(a_{ii},r_i)=\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{ii}|\leq r_i\}\text{ con }r_i=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\,.$$

A tales círculos se les llama *círculos de Gershgorin*. Cada círculo D_i tiene su centro en el elemento a_{ii} de la diagonal principal y su radio es la suma de los módulos de los restantes elementos de la fila i.

1. Demostrar el teorema de los círculos de Gershgorin:
   Cada valor propio de A pertenece a algún círculo de Gershgorin.
2. Aplicar el teorema a la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$.
3. Idem para la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$.
4. Idem para la matriz $A=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^{n\times n}$.
5. Deducir un teorema parecido al de Gershgorin que involucre elementos de columnas.

Solución

1. Sea λ un valor propio de A y sea $0\neq x=(x_j)$ un vector propio asociado a λ. Llamemos x_i a la coordenada de x de mayor módulo. Claramente $|x_i|>0$ pues en otro caso sería $x=0$. Se verifica $Ax=\lambda x$, es decir

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

o bien,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j=\lambda x_i\quad\forall i=1,\ldots,n.$$

De forma equivalente $\sum_{j\neq i}a_{ij}x_j=\lambda x_i-a_{ii}x_i$ y dividiendo ambos miembros entre x_i y tomando módulos

$$|\lambda-a_{ii}|=\left|\frac{\sum_{j\neq i}a_{ij}x_j}{x_i}\right|\leq\sum_{j\neq i}\left|\frac{a_{ij}x_j}{x_i}\right|\leq\sum_{j\neq i}|a_{ij}|=r_i.$$

Es decir, $\lambda\in D(a_{ii},r_i)$.

2. Hallemos sus valores propios: $\chi(\lambda)=\lambda^2-3=0,\ \lambda=\pm\sqrt{3}$. Los círculos de Gershgorin son $D_1=D(1,2)$,

$D_2 = D(-1,1)$. Con un sencillo gráfico podemos verificar que $-\sqrt{3} \in D_2$ y que $\sqrt{3} \in D_1$. En éste caso, ocurre además que $-\sqrt{3} \notin D_1$ y $\sqrt{3} \notin D_2$.

3. Sus valores propios: $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda = \pm i$. Los círculos de Gershgorin son $D_1 = D(1,1)$, $D_2 = D(-1,2)$. Con un sencillo gráfico podemos verificar que $-i \in D_2$, $i \in D_2$. Sin embargo, D_1 no contiene a ningún valor propio de A. Nótese que el teorema de Gershgorin asegura que todo valor propio pertenece a algún círculo, pero puede que algún círculo no contenga valores propios.
4. Sus valores propios son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y sus círculos de Gershgorin

$$D_1(\lambda_1, 0) = \{\lambda_1\},\ D_2(\lambda_2, 0) = \{\lambda_2\},\ \ldots\ ,\ D_n(\lambda_n, 0) = \{\lambda_2\}$$

con lo cual, $\lambda_i \in D_i(\lambda_i, 0)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.
5. Dado que toda matriz A y su traspuesta A^T tienen los mismos valores propios, el teorema de Greshgorin sigue siendo válido si consideramos los discos

$$D'_i = D(a_{ii}, r'_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r'_i\} \text{ con } r'_i = \sum_{j \neq i} |a_{ji}|\,.$$

Es decir, cada círculo D'_i tiene su centro en el elemento a_{ii} de la diagonal principal y su radio es la suma de los módulos de los restantes elementos de la columna i.

Esta entrada fue publicada en Álgebra. Guarda el enlace permanente.

Fernando Revilla
Funciona con WordPress.