Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2018-1

[Cod: CM334 Curso: Análisis Numérico I]

[Prof: L. Paredes.]

Solucionario del Examen Final

1a El sistema lineal es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 4 \\ 15 \\ 8 \\ 15 \\ 15 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}$$

1b Por el método de Househoder, se tiene:

$$R = \begin{bmatrix} 1{,}7320508 & 0{,}5773503 & 0{,}5773503 & 0{,}5773503 & 0{,}5773503 & 0 & 0{,}5773503 & 0 & 0{,}5773503 \\ 0 & 1{,}9148542 & 0{,}3481553 & 0{,}3481553 & 0{,}3481553 & 0{,}5222330 & -0{,}1740777 & 0{,}5222330 & -0{,}1740777 \\ 0 & 0 & 1{,}5954481 & -0{,}2849014 & 0{,}3418817 & 0{,}5128226 & 0{,}4558423 & -0{,}1139606 & 0{,}4558423 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}8612592 & 0{,}3453883 & 0{,}5180825 & 0{,}4605177 & 0{,}4221412 & -0{,}0767530 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}8191422 & 0{,}2550199 & 0{,}2266844 & 0{,}3910306 & 0{,}3286924 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}7694183 & -0{,}2482467 & 0{,}2640923 & 0{,}4595206 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}4503388 & 0{,}6380393 & 0{,}3471482 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}7047987 & 0{,}412881 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}3462912 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y la matriz Q es:

$$\begin{bmatrix} 0{,}5773503 & 0 & 0 & 0{,}5773503 & 0{,}5773503 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3481553 & 0{,}5222330 & 0 & -0{,}1740777 & -0{,}1740777 & 0{,}5222330 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5222330 & 0 \\ 0{,}3418817 & -0{,}1139606 & 0{,}6267832 & -0{,}1709409 & -0{,}1709409 & -0{,}1139606 & 0{,}6267832 & 0 & 0 & 0 & -0{,}1139606 & 0 \\ -0{,}1918824 & -0{,}1151295 & 0{,}0959412 & 0{,}3645765 & -0{,}1726941 & -0{,}1151294 & 0{,}0959412 & 0 & 0 & 0{,}5372707 & 0{,}4221413 & 0{,}5372707 \\ -0{,}2776884 & 0{,}4930385 & -0{,}1360106 & -0{,}1870146 & 0{,}4647030 & -0{,}0566711 & 0{,}413699 & 0 & 0 & 0{,}4477017 & -0{,}1586791 & -0{,}102008 \\ -0{,}1056369 & -0{,}1584553 & 0{,}3750110 & 0{,}0211274 & 0{,}0845095 & 0{,}4859298 & -0{,}2693741 & 0{,}5651575 & 0 & 0{,}343320 & -0{,}2218375 & -0{,}1426098 \\ -0{,}2092494 & 0{,}0308729 & -0{,}1420152 & 0{,}4095801 & -0{,}2003307 & 0{,}2270871 & 0{,}3512646 & 0{,}096735 & 0{,}6894941 & -0{,}1818069 & -0{,}0487106 & -0{,}1790626 \\ 0{,}1220885 & 0{,}3473971 & 0{,}0443958 & -0{,}1620447 & 0{,}0399562 & -0{,}2863529 & -0{,}1664842 & 0{,}4628262 & 0{,}3285289 & -0{,}2208691 & -0{,}1831326 & 0{,}5660465 \\ -0{,}2089073 & -0{,}0812417 & 0{,}4642383 & -0{,}2089072 & 0{,}4178145 & -0{,}0232119 & -0{,}2553311 & -0{,}3597847 & 0{,}4642384 & -0{,}0812417 & 0{,}3133609 & -0{,}023212 \\ 0{,}3929006 & 0{,}0458534 & 0{,}1003979 & -0{,}1003980 & -0{,}2925026 & -0{,}1587747 & -0{,}2925027 & -0{,}2799794 & 0{,}3929006 & 0{,}539152 & -0{,}2799793 & -0{,}1587746 \\ -0{,}0377138 & 0{,}2187918 & 0{,}1584325 & 0{,}1584325 & -0{,}1207187 & -0{,}547878 & -0{,}1207187 & 0{,}366800 & -0{,}0377139 & 0{,}0226455 & 0{,}366800 & -0{,}547878 \\ -0{,}2129699 & 0{,}5046041 & 0{,}4073927 & 0{,}4073927 & -0{,}1944228 & 0{,}046974 & -0{,}1944228 & -0{,}3386083 & -0{,}2129699 & -0{,}1157585 & -0{,}3386082 & 0{,}046971 \end{bmatrix}$$

Luego

$$Q * b = \begin{bmatrix} 25{,}980762 \\ 16{,}189222 \\ 15{,}270717 \\ 22{,}411863 \\ 14{,}513469 \\ 5{,}8786943 \\ 9{,}4498422 \\ 14{,}410877 \\ 8{,}0777467 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad x = \begin{bmatrix} 3{,}9999836 \\ 3{,}0000095 \\ 7{,}9999937 \\ 9{,}0000093 \\ 4{,}9999968 \\ 0{,}9999891 \\ 1{,}9999942 \\ 6{,}9999896 \\ 6{,}0000442 \end{bmatrix} \quad \boxdot$$

2a Sean x, y: números enteros. Donde:

$$\begin{array}{rcl} x+y & = & 40 \\ xy & = & 256 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x+y-40 & = & 0 \\ xy-256 & = & 0 \end{array} \boxdot$$

2b Sea

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{bmatrix}$$

Luego

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x-y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{x-y} \\ 0 & \dfrac{1}{x-y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$J(x,y)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{x-y} \\ 0 & \frac{1}{x-y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{x-y} & -\dfrac{1}{x-y} \\ -\dfrac{y}{x-y} & \frac{1}{x-y} \end{bmatrix} \boxdot$$

2c Por el método de Jacobi:

$$x_{k+1} = x_k - D_k^{-1} f(x_k)$$

Simplificando se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 - y_k \\ \dfrac{256}{x_k} \end{bmatrix}$$

La tabla es:

k	$x1(k)$	$x2(k)$
0	1	0
1	40	256
2	−216	6,4
3	33,6	−1,1851851
4	41,185185	7,6190476
5	32,380953	6,2158273
	⋮	
25	32,000001	7,9999982

La solución es $x = [32{,}000001\ 7{,}9999982]^T$. $\boxdot$

3a La matriz es:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}80 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}70 & 0{,}30 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}60 \end{bmatrix}$$

3b Sea

$$y = \begin{bmatrix} 1000000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego $A^3y + b_1A^2y + b_2Ay + b_3yI = 0$. Donde:

$$\begin{array}{lclclclcl} 587000 & + & 670000b_1 & + & 800000b_2 & + & 1000000b_3 & = & 0 \\ 238000 & + & 180000b_1 & + & 100000b_2 & & & = & 0 \\ 175000 & + & 150000b_1 & + & 100000b_2 & & & = & 0 \end{array}$$

Resolviendo se tiene: $b_1 = -2{,}1$, $b_2 = 1{,}4$ y $b_3 = -0{,}3$.
El polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 2{,}1\lambda^2 + 1{,}4\lambda - 0{,}3. \boxdot$$

3c Por el método de potencia, se tiene la tabla siguiente:

k	$x1(k)$	$x2(k)$	$x3(k)$	$\lambda_1(k)$
0	400000	300000	300000	
1	1	0,8292683	0,6097561	410000
2	1	0,8408551	0,5344418	410000
3	1	0,8309695	0,4940711	1,0268293
4	1	0,8171516	0,4721733	1,0216152
5	1	0,8060858	0,4601199	1,015601
	⋮			
23	1	0,7777824	0,4444456	1,0000017

Donde el valor y vector propios son $\lambda_1 = 1{,}0000017$ y $x_1 = [1\ 0{,}7777824\ 0{,}4444456]^T$. $\boxdot$

Por el método de potencia inversa, se tiene la tabla siguiente:

k	$x1(k)$	$x2(k)$	$x3(k)$	$\lambda_3(k)$
0	400000	300000	300000	
1	1	0,5	1	1
2	0,7222222	$-0{,}0555556$	1	0,6666667
3	0,5555556	$-0{,}5555556$	1	0,6000000
4	0,4958848	$-0{,}9403292$	1	0,5555556
5	0,4176153	-1	0,8250449	0,4367885
	$\vdots$			
49	0,4999505	-1	0,5000445	0,49999901

Donde el valor y vector propios son $\lambda_3 = 0{,}4999901$ y $x_3 = [0{,}4999505 \;\; -1 \;\; 0{,}5000495]^T$. $\boxdot$

Por el método de potencia inversa desplazada con $\overline{\lambda} = 1{,}3333334$, se tiene la tabla siguiente:

k	$x1(k)$	$x2(k)$	$x3(k)$	$\lambda_2(k)$
0	400000	300000	300000	
1	-1	$-0{,}8017241$	$-0{,}5689655$	0,5463578
2	1	0,8022646	0,4965423	0,5680286
3	-1	$-0{,}7942052$	$-0{,}466638$	0,5823971
4	1	0,7873539	0,4540108	0,5907591
5	-1	$-0{,}7829771$	$-0{,}4986007$	0,5978839
	$\vdots$			
18	1	0,7777781	0,4444446	0,6000000

Donde el valor y vector propios son $\lambda_2 = 0{,}6000000$ y $x_2 = [1 \;\; 0{,}7777781 \;\; 0{,}4444446]^T$. $\boxdot$

4a Sea la interpolación de Lagrange de orden cuatro.

$$f(x) \approx f(x_0)L_{4,0}(x) + f(x_1)L_{4,1}(x) + f(x_2)L_{4,2}(x) + f(x_3)L_{4,3}(x) + f(x_4)L_{4,4}(x)$$

Donde consideramos $x_0 = 8$, $x_1 = 10$, $x_2 = 12$, $x_3 = 14$ y $x_4 = 16$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0{,}0236\frac{(x-10)(x-12)(x-14)(x-16)}{(8-10)(8-12)(8-14)(8-16)} + 0{,}0475\frac{(x-8)(x-12)(x-14)(x-16)}{(10-8)(10-12)(10-14)(10-16)} + \\
&\quad 0{,}0830\frac{(x-8)(x-10)(x-14)(x-16)}{(12-8)(12-10)(12-14)(12-16)} + 0{,}1736\frac{(x-8)(x-10)(x-12)(x-16)}{(14-8)(14-10)(14-12)(14-16)} + \\
&\quad 0{,}2020\frac{(x-8)(x-10)(x-12)(x-14)}{(16-8)(16-10)(16-12)(16-14)} \\
&= 0{,}0236\frac{(x^4-52x^3+1004x^2-8528x+26880)}{384} + 0{,}0475\frac{(x^4-50x^3+920x^2-7360x+21504)}{-96} + \\
&\quad 0{,}0830\frac{(x^4-48x^3+844x^2-6432x+17920)}{64} + 0{,}01736\frac{(x^4-46x^3+876x^2-7496x+34560)}{-96} + \\
&\quad 0{,}2020\frac{(x^4-44x^3+716x^2-5104x+13440)}{384} \\
&= -6{,}454 + x(2{,}3914 + x[-0{,}3255625 + x\{0{,}01933125 - 0{,}00041875x\}])
\end{aligned}$$

4b Evaluando cuando $x = 13$, tenemos $f(13) = 0{,}124975$. $\boxdot$

4c Sea la tabla de la interpolación de Newton

x_k	y_k	D.D. Orden 1	D.D. Orden 2	D.D. Orden 3	D.D. Orden 4
8	0,0236				
10	0,0475	0,01195			
12	0,0830	0,01775	0,0014500		
14	0,1736	0,04530	0,0068875	0,00090625	
16	0,2020	0,01420	$-0{,}0077750$	$-0{,}00244375$	$-0{,}00041875$

El polinomio de grado 4 es:

$$f(x) = 0{,}0236 + (x-8)[0{,}01195 + (x-10)\{0{,}00145 + (x-12)[0{,}00090625 - (x-14)0{,}00041875]\}]$$

4d Evaluando cuando $x = 13$, tenemos $f(13) = 0{,}124975$. $\boxdot$

28 de Junio del 2018