8. Método de Continuación u Homotopía

8.1 Introducción

Los métodos de ***Continuación***, u ***Homotopía***, para sistemas no lineales consisten en sumergir el problema que debe resolverse dentro de una familia adecuada de problemas.

Específicamente, para resolver un problema de la forma

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{36}$$

cuya solución x^* es desconocida, considérese una familia de problemas que se describen mediante un parámetro λ que toma valores en $[0,\ 1]$. A $\lambda = 0$ le corresponde un problema cuya solución $\boldsymbol{x}(0)$ es conocida, mientras que el problema cuya solución $\boldsymbol{x}(1) \equiv x^*$ se desconoce y corresponde a $\lambda = 1$.

Por ejemplo, suponiendo que $\boldsymbol{x}(0)$ es una aproximación inicial de la solución x^* de $F(x) = 0$.

Definición 7. Se define $G : [0,\ 1] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mediante

$$G(\lambda,\ x) = \lambda F(x) + (1-\lambda)[F(x) - F(x(0))] = F(x) + (\lambda - 1)\ F(x(0)).$$

Se determinarán, para varios valores de λ, una solución de

$$G(\lambda,\ x) = 0. \tag{37}$$

Cuando $\lambda = 0$, la ecuación que resulta es

$$0 = G(0, x) = F(x) - F(x(0)), \tag{38}$$

Resolución Numérica de Sistemas de Ecuaciones no Lineales

de la cual $\boldsymbol{x}(0)$ es una solución. Cuano $\lambda = 1$, la ecuación que resulta es

$$0 = G(1, x) = F(x), \tag{39}$$

de la cual $\boldsymbol{x}(1) = x^*$es una solución.

La función $\boldsymbol{G}$, a través de su parámetro λ, proporciona una familia de funciones que podrían guiar desde el valor conocido $\boldsymbol{x}(0)$ hasta la solución $\boldsymbol{x}(1) = x^*$. Se dice que la función $\boldsymbol{G}$ es una **homotopía** entre la función $G(0, x) = F(x) - F(x(0))$ y la función $G(1, x) = F(x)$.

El problema de **continuación** consiste en lo siguiente.

Determinar una forma de proceder para ir desde la solución conocida $\boldsymbol{x}(0)$ de $\boldsymbol{G}(0,\ x) = 0$ hasta la solución desconocida $\boldsymbol{x}(1) = x^*$ de $\boldsymbol{G}(1,\ x) = 0$ que resuelve el problema $\boldsymbol{F}(x) = 0$.

Suponiendo, en primer lugar, que $\boldsymbol{x}(\lambda)$ es la única solución de la ecuación

$$G(\lambda, x) = 0, \tag{40}$$

para cada $\lambda \in [0, 1]$. El conjunto $\{\boldsymbol{x}(\lambda) \mid 0 \le \lambda \le 1\}$ puede verse como una curva en $\mathbb{R}^n$ parametrizada por λ, que va desde $\boldsymbol{x}(0)$ hasta $\boldsymbol{x}(1) = x^*$. Con el método de **Continuación** se determinan una secuencia de puntos $\{x(\lambda_k)\}_{k=0}^{m}$ a lo largo de esta curva que corresponden a $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \ldots, < \lambda_m = 1$.

Si las funciones $\lambda \longrightarrow \boldsymbol{x}(\lambda)$ y $\boldsymbol{G}$ son diferenciables, entonces derivando la ecuación $\boldsymbol{G}(\lambda, x) = 0$ con respecto a λ se obtiene

$$0 = \frac{\partial G(\lambda,\ x(\lambda))}{\partial \lambda} + \frac{\partial G(\lambda,\ x(\lambda))}{\partial x}\, x'(\lambda), \tag{41}$$

que, despejando $x'(\lambda)$, queda

$$x'(\lambda) = -\left[\frac{\partial G(\lambda,\ x(\lambda))}{\partial x}\right]^{-1}\frac{\partial G(\lambda,\ x(\lambda))}{\partial \lambda}, \tag{42}$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales con condición inicial $\boldsymbol{x}(0)$.

Puesto que

$$G(\lambda,\ x(\lambda)) = F(x(\lambda)) + (\lambda - 1)F(x(0)), \tag{43}$$

se pueden determinar tanto la matriz jacobiana

$$\frac{\partial G}{\partial x}(\lambda,\ x(\lambda)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x(\lambda)) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x(\lambda)) & & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x(\lambda)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x(\lambda)) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x(\lambda)) & \ldots\ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x(\lambda)) \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x(\lambda)) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x(\lambda)) & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x(\lambda)) \end{pmatrix} = J(x(\lambda)) \tag{44}$$

como

$$\frac{\partial G(\lambda, x(\lambda))}{\partial \lambda} = F(x(0)). \tag{45}$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales resulta ser

$$x'(\lambda) = -[J(x(\lambda))]^{-1} F(x(0)), \qquad \text{para } 0 \le \lambda \le 1, \tag{46}$$

con la condición inicial $\boldsymbol{x}(0)$.

El siguiente teorema proporciona condiciones bajo las que el método de **Continuación** puede llevarse a cabo.

▼ Teorema 5. Convergencia del Método de Continuación

Suponiendo que $F(x)$ es diferenciable con continuidad para $x \in \mathbb{R}^n$. Suponiendo que la matriz jacobiana $J(x)$ es invertible para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y que existe una constante M

tal que $\|J(x)^{-1}\| \le M$, para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Entonces para cualquier $\boldsymbol{x}(0)$ en $\mathbb{R}^n$, existe una única función $\boldsymbol{x}(\lambda)$ tal que

$$G(\lambda, x(\lambda)) = 0,$$

para todo λ en $[0,\ 1]$. Además, $\boldsymbol{x}(\lambda)$ es diferenciable con continuidad y

$$x'(\lambda) = -J(x(\lambda))^{-1} F(x(0)) \text{ para } \lambda \in [0,\ 1].$$

En general, el sistema de ecuaciones diferenciales que se necesitan resolver con el problema de *continuación* es de la forma

$$\begin{aligned} \frac{d x_1}{d\lambda} &= \phi_1(\lambda,\ x_1,\ x_2,\ \ldots.,\ x_n), \\ \frac{d x_2}{d\lambda} &= \phi_2(\lambda,\ x_1,\ x_2,\ \ldots.,\ x_n), \\ &\ \ldots \\ \frac{d x_n}{d\lambda} &= \phi_n(\lambda,\ x_1,\ x_2,\ \ldots.,\ x_n), \end{aligned} \tag{47}$$

donde

$$\begin{pmatrix} \phi_1(\lambda,\ x_1,\ x_2,\ \ldots.,\ x_n) \\ \phi_2(\lambda,\ x_1,\ x_2,\ \ldots.,\ x_n) \\ \ldots \\ \phi_n(\lambda,\ x_1,\ x_2,\ \ldots.,\ x_n) \end{pmatrix} = -J(x_1,\ x_2,\ \ldots.,\ x_n)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x(0)) \\ f_2(x(0)) \\ \ldots \\ f_n(x(0)) \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Para utilizar el método de *Runge - Kutta* de orden 4 en la resolución de este sistema se toma un número entero $n > 0$ y se define $h = \frac{(1-0)}{n}$. Se divide el intervalo $[0,\ 1]$ en n subintervalos cuyos extremos son los nodos

$$\lambda_j = j\,h, \qquad \text{para cada } j = 0, 1, \ \ldots, \ n. \tag{49}$$

Se va a denotar por w_{ij}, para cada $j = 0, 1, ..., n$ e $i = 1, 2, ..., n$, la aproximación de $x_i(\lambda_j)$. De acuerdo con las condiciones iniciales, se toma

$$w_{1,0} = x_1(0), \quad w_{2,0} = x_2(0), \quad w_{n,0} = x_n(0). \tag{50}$$

Suponiendo que se ha calculado ya $w_{1,j}, w_{2,j}, .., w_{n,j}$. Se obtienen las nuevas aproximaciones $w_{1,j+1}, w_{2,j+1}, .., w_{n,j+1}$ mediante las expresiones

$$\begin{aligned}
k_{1,i} &= h\,\phi_i(\lambda_j, w_{1,j}, w_{2,j}, .., w_{n,j}), \quad i = 1, 2, ..., n;\\
k_{2,i} &= h\,\phi_i\left(\lambda_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}k_{1,2}, .., w_{n,j} + \frac{1}{2}k_{1,n}\right),\\
&\quad i = 1, 2, ..., n;\\
k_{3,i} &= h\,\phi_i\left(\lambda_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}k_{2,2}, .., w_{n,j} + \frac{1}{2}k_{2,n}\right),\\
&\quad i = 1, 2, ..., n;\\
k_{4,i} &= h\,\phi_i(\lambda_j + h, w_{1,j} + k_{3,1}, w_{2,j} + k_{3,2}, .., w_{n,j} + k_{3,n}),\\
&\quad i = 1, 2, ..., n;
\end{aligned} \tag{51}$$

y, finalmente

$$w_{i,j+1} = w_{i,j} + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}), \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{52}$$

Utilizando la notación vectorial

$$k_1 = \begin{pmatrix} k_{1,1}\\ k_{1,2}\\ \dots\\ k_{1,n}\end{pmatrix}, \; k_2 = \begin{pmatrix} k_{2,1}\\ k_{2,2}\\ \dots\\ k_{2,n}\end{pmatrix}, \; k_3 = \begin{pmatrix} k_{3,1}\\ k_{3,2}\\ \dots\\ k_{3,n}\end{pmatrix}, \; k_4 = \begin{pmatrix} k_{4,1}\\ k_{4,2}\\ \dots\\ k_{4,n}\end{pmatrix} \; y$$
$$w_j = \begin{pmatrix} w_{1,j}\\ w_{1,j}\\ \dots\\ w_{n,j}\end{pmatrix}. \tag{53}$$

para simplificar la presentación.

La igualdad (48) da $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}(\lambda_0) = w_0$ y, para cada $j = 0, 1, ..., n$.

$$\begin{aligned}
k_1 &= h\begin{pmatrix} \phi_1(\lambda_j, w_{1,j}, w_{2,j}, .., w_{n,j})\\ \phi_2(\lambda_j, w_{1,j}, w_{2,j}, .., w_{n,j})\\ \dots\\ \phi_n(\lambda_j, w_{1,j}, w_{2,j}, .., w_{n,j})\end{pmatrix}\\
&= h[-J(w_{1,j}, .., w_{n,j})]^{-1} F(x(0)) = h[-J(w_j)]^{-1} F(x(0));\\
k_2 &= h\left[-J\left(w_j + \frac{1}{2}k_1\right)\right]^{-1} F(x(0));\\
k_3 &= h\left[-J\left(w_j + \frac{1}{2}k_2\right)\right]^{-1} F(x(0));\\
k_4 &= h[-J(w_j + k_3)]^{-1} F(x(0)).
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&x(\lambda_{j+1}) =\\
&\quad x(\lambda_j) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = w_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).
\end{aligned} \tag{55}$$

Finalmente, $\boldsymbol{x}(\lambda_n) = \boldsymbol{x}(1)$ es la aproximación de x^*.

8.2 Pseudocódigo

- **Algoritmo 7. Método de Continuación u Homotopía para sistemas no lineales.**

El pseudocódigo del algoritmo que resuelve un sistema de ecuaciones no lineales de n ecuaciones con n incógnitas mediante el método de *Continuación u Homotopía* es:

Algoritmo Continuación u Homotopía

Input $\left(\{f(x_1, ..., x_n)\}_1^n, (x_1^{(0)} \; x_2^{(0)} \; ... \; x_n^{(0)})^T, n\right)$

(* Se inicializan las variables *)

$M \leftarrow 4$
$h \leftarrow 1/n$
$p \leftarrow (x_1^{(0)} \; x_2^{(0)} \; ... \; x_m^{(0)})^T$
$F \leftarrow \{f(x_1, ..., x_n)\}_1^n$

$$J(x) \leftarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \ldots\ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \quad (x \equiv (x_1, \ldots, x_n))$$

$$f\_valor \leftarrow \begin{pmatrix} f_1(p_1^{(0)}, \; p_2^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) \\ f_2(p_1^{(0)}, \; p_2^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(p_1^{(0)}, \; p_2^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) \end{pmatrix}$$

For $k = 1, \ldots, n$ **do**
(* Se evalúa la función F y la matriz jacobiana en el punto *)

$$j\_valor \leftarrow \begin{pmatrix} j_{11}(p_1^{(k-1)}, \ldots, p_n^{(k-1)}) & \ldots & j_{1n}(p_1^{(k-1)}, \ldots, p_n^{(k-1)}) \\ j_{21}(p_1^{(k-1)}, \ldots, p_n^{(k-1)}) & \ldots & j_{2n}(p_1^{(k-1)}, \ldots, p_n^{(k-1)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ j_{n1}(p_1^{(k-1)}, \ldots, p_n^{(k-1)}) & \ldots & j_{nn}(p_1^{(k-1)}, \ldots, p_n^{(k-1)}) \end{pmatrix}$$

k1 $\leftarrow h * (\text{j\_valor})^{-1} *$ f_valor
p_aux $\leftarrow p$
p_int $\leftarrow$ p_aux + $\frac{1}{2}$ k1

j_valor $\leftarrow$

$$\begin{pmatrix} j_{11}(p\_int_1^{(k-1)}, \ldots, p\_int_n^{(k-1)}) & \ldots & j_{1n}(p\_int_1^{(k-1)}, \ldots, p\_int_n^{(k-1)}) \\ j_{21}(p\_int_1^{(k-1)}, \ldots, p\_int_n^{(k-1)}) & \ldots & j_{2n}(p\_int_1^{(k-1)}, \ldots, p\_int_n^{(k-1)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ j_{n1}(p\_int_1^{(k-1)}, \ldots, p\_int_n^{(k-1)}) & \ldots & j_{nn}(p\_int_1^{(k-1)}, \ldots, p\_int_n^{(k-1)}) \end{pmatrix}$$

k2 $\leftarrow h * (\text{j\_valor})^{-1} *$ f_valor
p_int $\leftarrow$ p_aux + $\frac{1}{2}$ k2

j_valor $\leftarrow$

$$\begin{pmatrix} j_{11}(p\_int_1^{(k-1)}, \ldots, p\_int_n^{(k-1)}) & \ldots & j_{1n}(p\_int_1^{(k-1)}, \ldots, p\_int_n^{(k-1)}) \\ j_{21}(p\_int_1^{(k-1)}, \ldots, p\_int_n^{(k-1)}) & \ldots & j_{2n}(p\_int_1^{(k-1)}, \ldots, p\_int_n^{(k-1)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ j_{n1}(p\_int_1^{(k-1)}, \ldots, p\_int_n^{(k-1)}) & \ldots & j_{nn}(p\_int_1^{(k-1)}, \ldots, p\_int_n^{(k-1)}) \end{pmatrix}$$

k3 $\leftarrow h * (\text{j\_valor})^{-1} *$ f_valor
p_int $\leftarrow$ p_aux + k3

j_valor $\leftarrow$

$$\begin{pmatrix} j_{11}(p\_int_1^{(k-1)}, \ldots, p\_int_n^{(k-1)}) & \ldots & j_{1n}(p\_int_1^{(k-1)}, \ldots, p\_int_n^{(k-1)}) \\ j_{21}(p\_int_1^{(k-1)}, \ldots, p\_int_n^{(k-1)}) & \ldots & j_{2n}(p\_int_1^{(k-1)}, \ldots, p\_int_n^{(k-1)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ j_{n1}(p\_int_1^{(k-1)}, \ldots, p\_int_n^{(k-1)}) & \ldots & j_{nn}(p\_int_1^{(k-1)}, \ldots, p\_int_n^{(k-1)}) \end{pmatrix}$$

k4 $\leftarrow h * (\text{j\_valor})^{-1} *$ f_valor

(* Cálculo del siguiente punto *)
p1 $\leftarrow$ p_aux + $\frac{1}{6}$ (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4)

(* Cálculo de la norma de la distancia entre los dos puntos*)
error $\leftarrow \| p1 - p \|_\infty$
$p \leftarrow$ p1
End

Return $(x^{(k)} \equiv (p)^T)$
Output

8.3 Problemas

■ **Problema 33.** Sea el sistema no lineal de ecuciaones siguiente:

$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3\,x_1 - \cos(x_2\, x_3) - 1/2 = 0,$
$f_2(x_1, x_{2,}x_3) = x_1^2 - 81\,(x_2 + 0.1)^2 + \operatorname{sen} x_3 + 1.06 = 0,$
$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20\,x_3 + (10\,\pi - 3)/3 = 0.$

Mediante el método de *Continuación u Homotopía* calcúlese la aproximación de la solución, comenzando en el punto inicial

$P_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)^T = (0,\; 0,\; 0)^T$ y realizando $n = 4$ iteraciones.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, m];
ecuaciones = {3 x1 - Cos[x2 * x3] - 1 / 2,
          x1^2 - 81 (x2 + 0.1)^2 + Sin[x3] + 1.06,
          Exp[-x1 * x2] + 20 x3 + (10 Pi - 3) / 3
  };
p = {{0.0}, {0.0}, {0.0}};
m = 4;
continuacionhomotopia[ecuaciones, p, m];
```

Método de *Continuacion Homotopia* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\cos(x_2\, x_3) + 3\,x_1 - \frac{1}{2} \\ x_1^2 - 81\,(x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 \\ 20\,x_3 + e^{-x_1 x_2} + \frac{1}{3}(-3 + 10\,\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1,\, x_2,\, x_3) = \begin{pmatrix} 3 & \sin(x_2\, x_3)\, x_3 & \sin(x_2\, x_3)\, x_2 \\ 2\, x_1 & -162\,(x_2 + 0.1) & \cos(x_3) \\ -e^{-x_1\, x_2}\, x_2 & -e^{-x_1\, x_2}\, x_1 & 20 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.12500000 \\ -0.0042222033 \\ -0.13089969 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 0.12499998 \\ -0.0033117620 \\ -0.13092324 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 0.12499998 \\ -0.0032962448 \\ -0.13092035 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.12499989 \\ -0.0023020676 \\ -0.13093470 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.12499997 \\ -0.0032900474 \\ -0.13092026 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.12499989 \\ -0.0023019179 \\ -0.13093466 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 0.12499976 \\ -0.0012303950 \\ -0.13093902 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 0.12499981 \\ -0.0012233159 \\ -0.13093560 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.12499976 \\ -0.000094776483 \\ -0.13092912 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.24999977 \\ -0.0045074001 \\ -0.26185576 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.12499976 \\ -0.000094768570 \\ -0.13092908 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 0.12499988 \\ 0.0010777262 \\ -0.13091134 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 0.12499993 \\ 0.0010713431 \\ -0.13090777 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.12500020 \\ 0.0022589181 \\ -0.13087879 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = P_2 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.37499970 \\ -0.0034303521 \\ -0.39276344 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.12500020 \\ 0.0022587863 \\ -0.13087875 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 0.12500045 \\ 0.0034455048 \\ -0.13083864 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 0.12500035 \\ 0.0034248117 \\ -0.13083540 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.12500000 \\ 0.0045827692 \\ -0.13078516 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = P_3 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 1.2668609 \times 10^{-8} \\ -0.52359878 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\lVert P_i - P_{i-1} \rVert_\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	

1	$\begin{pmatrix} 0.12499997 \\ -0.0032900474 \\ -0.13092026 \end{pmatrix}$	0.13092
2	$\begin{pmatrix} 0.24999977 \\ -0.0045074001 \\ -0.26185576 \end{pmatrix}$	0.130936
3	$\begin{pmatrix} 0.37499970 \\ -0.0034303521 \\ -0.39276344 \end{pmatrix}$	0.130908
4	$\begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 1.2668609\times 10^{-8} \\ -0.52359878 \end{pmatrix}$	0.130835

La solución aproximada del sistema es:

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 1.2668609\times 10^{-8} \\ -0.52359878 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 34.** Sea el sistema no lineal de ecuciaones siguiente:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 - 37 = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2^2 - 5 = 0,$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_3 + x_1 + x_2 - 3 = 0$$

Mediante el método de *Continuación u Homotopía* calcúlese la aproximación de la solución, comenzando en el punto inicial $P_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)^T = (0, 0, 0)^T$ y realizando $n = 2$ iteraciones.

Solución

```
Clear[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d, m];
ecuaciones = { x1^2 + x2 - 37, x1 - x2^2 - 5, x3 + x1 + x2 - 3};
p = {{0.0}, {0.0}, {0.0}};
m = 2;
continuacionhomotopia[ecuaciones, p, m];
```


Método de *Continuacion Homotopia* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 - 37 \\ -x_2^2 + x_1 - 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 1 & -2x_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 2.5000000 \\ 18.500000 \\ -19.500000 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 7.2962963 \\ 0.25925926 \\ -6.0555556 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 2.5232448 \\ 0.089658444 \\ -1.1129032 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 3.0538605 \\ 3.0887248 \\ -4.6425853 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 4.1988238 \\ 3.7144267 \\ -6.4132505 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 2.2076836 \\ -0.039348791 \\ -0.66833481 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 1.7539258 \\ -0.10096403 \\ -0.15296178 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 1.8313659 \\ -0.091245116 \\ -0.24012077 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 1.5448774 \\ -0.13180717 \\ 0.086929793 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 6.0193478 \\ 3.6218310 \\ -6.6411788 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\|P_i - P_{i-1}\|_\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 4.1988238 \\ 3.7144267 \\ -6.4132505 \end{pmatrix}$	6.41325
2	$\begin{pmatrix} 6.0193478 \\ 3.6218310 \\ -6.6411788 \end{pmatrix}$	1.82052

La solución aproximada del sistema es:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 6.0193478 \\ 3.6218310 \\ -6.6411788 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 35.** Sea el sistema no lineal de ecuciaones siguiente:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2^2 - 6 = 0,$$

Mediante el método de *Continuación u Homotopía* calcúlese la aproximación de la solución, comenzando en el punto inicial:

a) $P_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)^T = (0, 0)^T$

b) $P_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)^T = (1, 1)^T$

c) $P_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)^T = (3, -2)^T$

y realizando $n = 8$ iteraciones.

Solución

a)

```
Clear[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d, m];
ecuaciones = { x1^2 - x2^2 + 2 x2 , 2 x1 - x2^2 - 6};
p = {{0.0}, {0.0}};
m = 8;
continuacionhomotopia[ecuaciones, p, m];
```

Método de *Continuacion Homotopia* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 \\ -x_2^2 + 2x_1 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2 - 2x_2 \\ 2 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.37500000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 0.37500000 \\ -0.070312500 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 0.37740328 \\ -0.068359839 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.38427976 \\ -0.13574868 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.37734772 \\ -0.068848893 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.38434201 \\ -0.13568857 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 0.40257111 \\ -0.20170068 \end{pmatrix}$$

$k_3 = \begin{pmatrix} 0.40936530 \\ -0.20250708 \end{pmatrix}$

$k_4 = \begin{pmatrix} 0.45067492 \\ -0.27887691 \end{pmatrix}$

$P_2 = P_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.78716267 \\ -0.27267906 \end{pmatrix}$

....

....

Nota: Se han eliminado varias iteraciones. En la tabla final se pueden ver los resultados

Iteración $i = 7$

$k_1 = \begin{pmatrix} -0.20337776 \\ 0.20330965 \end{pmatrix}$

$k_2 = \begin{pmatrix} -0.21524648 \\ 0.21517049 \end{pmatrix}$

$k_3 = \begin{pmatrix} -0.21598197 \\ 0.21590537 \end{pmatrix}$

$k_4 = \begin{pmatrix} -0.23035551 \\ 0.23026892 \end{pmatrix}$

$P_7 = P_6 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 3.6274929 \\ -2.6288570 \end{pmatrix}$

Iteración $i = 8$

$k_1 = \begin{pmatrix} -0.23036255 \\ 0.23027595 \end{pmatrix}$

$k_2 = \begin{pmatrix} -0.24789911 \\ 0.24779981 \end{pmatrix}$

$k_3 = \begin{pmatrix} -0.24934395 \\ 0.24924337 \end{pmatrix}$

$k_4 = \begin{pmatrix} -0.27201858 \\ 0.27190068 \end{pmatrix}$

$P_8 = P_7 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 3.3780150 \\ -2.3794798 \end{pmatrix}$

Tabla de datos.

i	P_i	$\lVert P_i - P_{i-1} \rVert_\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 0.37734772 \\ -0.068848893 \end{pmatrix}$	0.377348
2	$\begin{pmatrix} 0.78716267 \\ -0.27267906 \end{pmatrix}$	0.409815
3	$\begin{pmatrix} 1.3648261 \\ -0.69203276 \end{pmatrix}$	0.577663
4	$\begin{pmatrix} 2.9002566 \\ -2.0132693 \end{pmatrix}$	1.53543
5	$\begin{pmatrix} 2.3338425 \\ -1.4729057 \end{pmatrix}$	0.566414
6	$\begin{pmatrix} 3.8435246 \\ -2.8448121 \end{pmatrix}$	1.50968
7	$\begin{pmatrix} 3.6274929 \\ -2.6288570 \end{pmatrix}$	0.216032
8	$\begin{pmatrix} 3.3780150 \\ -2.3794798 \end{pmatrix}$	0.249478

La solución aproximada del sistema es:

$P_8 = \begin{pmatrix} 3.3780150 \\ -2.3794798 \end{pmatrix}$

Solución

b)

```
Clear[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d, m];
ecuaciones = { x1^2 - x2^2 + 2 x2, 2 x1 - x2^2 - 6};
p = {{1.0}, {1.0}};
m = 8;
continuacionhomotopia[ecuaciones, p, m];
```

Método de *Continuacion Homotopia* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 \\ -x_2^2 + 2x_1 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 1. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2 - 2x_2 \\ 2 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.12500000 \\ -0.43750000 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.030800821 \\ -0.43942505 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.029226983 \\ -0.43795011 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.067715537 \\ -0.43552088 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.97044332 \\ 0.56203813 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.067733504 \\ -0.43549802 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 0.16163366 \\ -0.43819665 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 0.15965720 \\ -0.44568405 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.25769419 \\ -0.47102615 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 1.1317782 \\ 0.11632387 \end{pmatrix}$$

....

....

Nota: Se han eliminado varias iteraciones. En la tabla final se pueden ver los resultados

Iteración $i = 7$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.41362262 \\ 0.36106659 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.51650642 \\ 0.45288133 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.55087494 \\ 0.48378958 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.88564861 \\ 0.78450886 \end{pmatrix}$$

$$P_7 = P_6 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 2.3583257 \\ -1.5078962 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 8$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.92748662 \\ 0.82232890 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 41.959215 \\ -37.973475 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.020312488 \\ 0.016239007 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.96911505 \\ 0.85918874 \end{pmatrix}$$

$$P_8 = P_7 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 16.021860 \\ -13.880055 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\lVert P_i - P_{i-1} \rVert_\infty$
0	$\begin{pmatrix} 1.0000000 \\ 1.0000000 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 0.97044332 \\ 0.56203813 \end{pmatrix}$	0.437962
2	$\begin{pmatrix} 1.1317782 \\ 0.11632387 \end{pmatrix}$	0.445714
3	$\begin{pmatrix} 1.5441207 \\ -0.46093098 \end{pmatrix}$	0.577255
4	$\begin{pmatrix} 2.5882426 \\ -1.5929921 \end{pmatrix}$	1.13206
5	$\begin{pmatrix} 3.2842844 \\ -2.3187540 \end{pmatrix}$	0.725762
6	$\begin{pmatrix} 2.9306647 \\ -2.0110491 \end{pmatrix}$	0.35362
7	$\begin{pmatrix} 2.3583257 \\ -1.5078962 \end{pmatrix}$	0.572339
8	$\begin{pmatrix} 16.021860 \\ -13.880055 \end{pmatrix}$	13.6635

La solución aproximada del sistema es:

$$P_8 = \begin{pmatrix} 16.021860 \\ -13.880055 \end{pmatrix}$$

Solución

c)

```
Clear[ecuaciones, p, d, m];
ecuaciones = { x1^2 - x2^2 + 2 x2, 2 x1 - x2^2 - 6};
p = {{3.0}, {-2.0}};
m = 8;
continuacionhomotopia[ecuaciones, p, m];
```

Método de *Continuacion Homotopia* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 + 2\,x_2 \\ -x_2^2 + 2\,x_1 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3. \\ -2. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2\,x_1 & 2 - 2\,x_2 \\ 2 & -2\,x_2 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.29166667 \\ 0.27083333 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.33886779 \\ 0.31581736 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.34807302 \\ 0.32467067 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.43764125 \\ 0.41045139 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 2.6494684 \\ -1.6729565 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.43921783 \\ 0.41197593 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.64545752 \\ 0.61041357 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.83155172 \\ 0.79075263 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 1.8880415 \\ -1.8567607 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 2.3986026 \\ -1.4466986 \end{pmatrix}$$

....

......

Nota:Se han eliminado varias iteraciones.En la tabla final se pueden ver los resultados

Iteración $i = 7$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.045269325 \\ -0.036327495 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 0.045423087 \\ -0.036417585 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 0.045423629 \\ -0.036417780 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.045579030 \\ -0.036508458 \end{pmatrix}$$

$$P_7 = P_6 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} -5.0552307 \\ 5.5992770 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 8$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.045579030 \\ -0.036508458 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 0.045736090 \\ -0.036599727 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 0.045736652 \\ -0.036599926 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.045895413 \\ -0.036691792 \end{pmatrix}$$

$$P_8 = P_7 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} -5.0094940 \\ 5.5626771 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\lVert P_i - P_{i-1} \rVert_\infty$
0	$\begin{pmatrix} 3.0000000 \\ -2.0000000 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 2.6494684 \\ -1.6729565 \end{pmatrix}$	0.350532
2	$\begin{pmatrix} 2.3986026 \\ -1.4466986 \end{pmatrix}$	0.250866
3	$\begin{pmatrix} 1.2050556 \\ -0.32396323 \end{pmatrix}$	1.19355

4	$\begin{pmatrix} 1.9623856 \\ -1.0674512 \end{pmatrix}$	0.75733
5	$\begin{pmatrix} -5.1457715 \\ 5.6719328 \end{pmatrix}$	7.10816
6	$\begin{pmatrix} -5.1006543 \\ 5.6356948 \end{pmatrix}$	0.0451172
7	$\begin{pmatrix} -5.0552307 \\ 5.5992770 \end{pmatrix}$	0.0454236
8	$\begin{pmatrix} -5.0094940 \\ 5.5626771 \end{pmatrix}$	0.0457367

La solución aproximada del sistema es:

$$P_8 = \begin{pmatrix} -5.0094940 \\ 5.5626771 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 36.** Sea el sistema no lineal de ecuaciones siguiente:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3\,x_1 - \cos(x_2\,x_3) - 1/2 = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = 4\,x_1^2 - 625\,x_2^2 + 2\,x_2 - 1 = 0,$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{(-x_1\,x_2)} + 20\,x_3 + (10\,\pi - 3)/3 = 0.$$

Aplíquese el método de *Continuación u Homotopía* con la aproximación inicial $P_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)^T = (1, 1, 1)^T$ y aplicando el método con n = 4 iteraciones.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, d];
ecuaciones = { 3 x1 - Cos[x2 * x3] - 1 / 2,
   4 x1^2 - 625 x2^2 + 2 x2 - 1, Exp[-x1 * x2] + 20 x3 + (10 Pi - 3) / 3 };
p = {{1.0}, {1.0}, {1.0}};
m = 4;
continuacionhomotopia[ecuaciones, p, m];
```

Método de *Continuacion Homotopia* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\cos(x_2\,x_3) + 3\,x_1 - \frac{1}{2} \\ 4\,x_1^2 - 625\,x_2^2 + 2\,x_2 - 1 \\ 20\,x_3 + e^{-x_1\,x_2} + \frac{1}{3}\,(-3 + 10\,\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 1. \\ 1. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3 & \sin(x_2\,x_3)\,x_3 & \sin(x_2\,x_3)\,x_2 \\ 8\,x_1 & 2 - 1250\,x_2 & 0 \\ -e^{-x_1\,x_2}\,x_2 & -e^{-x_1\,x_2}\,x_1 & 20 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.023047325 \\ -0.12434646 \\ -0.37570934 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.057232431 \\ -0.13283327 \\ -0.37665824 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.057923995 \\ -0.13343597 \\ -0.37670686 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.091811028 \\ -0.14399854 \\ -0.37775486 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.94247147 \\ 0.86651942 \\ 0.62330093 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.091815412 \\ -0.14400626 \\ -0.37775484 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.12165758 \\ -0.15726512 \\ -0.37882670 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.12226079 \\ -0.15858062 \\ -0.37889289 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.14539514 \\ -0.17663369 \\ -0.37993097 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.82163025 \\ 0.70779751 \\ 0.24444677 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.14539799 \\ -0.17667092 \\ -0.37993216 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.16053067 \\ -0.20193739 \\ -0.38087962 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.16066141 \\ -0.20614071 \\ -0.38097967 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.16690218 \\ -0.24938372 \\ -0.38191896 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = P_2 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.66251619 \\ 0.50076238 \\ -0.13648152 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.16688575 \\ -0.24983376 \\ -0.38193621 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.16474080 \\ -0.33296470 \\ -0.38324352 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.16351017 \\ -0.37455541 \\ -0.38419885 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.15301950 \\ -0.99905078 \\ -0.39731006 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = P_3 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.49978166 \\ 0.056774915 \\ -0.52217002 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\lVert P_i - P_{i-1}\rVert_\infty$
0	$\begin{pmatrix} 1.0000000 \\ 1.0000000 \\ 1.0000000 \end{pmatrix}$	

1	$\begin{pmatrix} 0.94247147 \\ 0.86651942 \\ 0.62330093 \end{pmatrix}$	0.376699
2	$\begin{pmatrix} 0.82163025 \\ 0.70779751 \\ 0.24444677 \end{pmatrix}$	0.378854
3	$\begin{pmatrix} 0.66251619 \\ 0.50076238 \\ -0.13648152 \end{pmatrix}$	0.380928
4	$\begin{pmatrix} 0.49978166 \\ 0.056774915 \\ -0.52217002 \end{pmatrix}$	0.443987

La solución aproximada del sistema es:

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.49978166 \\ 0.056774915 \\ -0.52217002 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 37.** Sea el sistema no lineal de ecuaciones siguiente:

$$f_1(x_1, x_2) = 4\,x_1{}^2 - 20\,x_1 + 1/4\,x_2{}^2 + 8 = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2) = 1/2\,x_1\,x_2^2 + 2\,x_1 - 5\,x_2 + 8 = 0.$$

Aplíquese el método de *Continuación u Homotopía* con la aproximación inicial $P_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)^T = (1, 0)^T$ y aplicando el método con n = 6 iteraciones.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, d];
ecuaciones = { 4 x1^2 - 20 x1 + 1 / 4 x2^2 + 8, 1 / 2 x1 x2^2 + 2 x1 - 5 x2 + 8};
p = {{1.0}, {0.0}};
m = 6;
continuacionhomotopia[ecuaciones, p, m];
```

Método de *Continuacion Homotopia* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4\,x_1^2 - 20\,x_1 + \frac{x_2^2}{4} + 8 \\ \frac{1}{2}\,x_1\,x_2^2 - 5\,x_2 + 2\,x_1 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8\,x_1 - 20 & \frac{x_2}{2} \\ \frac{x_2^2}{2} + 2 & x_1\,x_2 - 5 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.11111111 \\ 0.28888889 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.10540694 \\ 0.29911158 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.10553749 \\ 0.29936470 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.10020766 \\ 0.30889480 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.89446539 \\ 0.29912271 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.10021091 \\ 0.30888086 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.095227914 \\ 0.31761021 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.095314666 \\ 0.31786191 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.090604488 \\ 0.32576730 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.79914863 \\ 0.61672144 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.090607837 \\ 0.32575365 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.086162938 \\ 0.33274159 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.086224208 \\ 0.33298636 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.082000914 \\ 0.33904890 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = P_2 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.71291813 \\ 0.94943118 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.082004333 \\ 0.33903601 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.078006147 \\ 0.34410677 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.078052511 \\ 0.34434574 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.074252618 \\ 0.34844406 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = P_3 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.63485575 \\ 1.2934954 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 5$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.074256025 \\ 0.34843225 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.070663231 \\ 0.35152371 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.070700697 \\ 0.35176085 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.067296876 \\ 0.35389356 \end{pmatrix}$$

$$P_5 = P_4 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.56414229 \\ 1.6449778 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 6$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.067300177 \\ 0.35388294 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.064095682 \\ 0.35505169 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.064127458 \\ 0.35529045 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.061107990 \\ 0.35556504 \end{pmatrix}$$

$$P_6 = P_5 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.49999988 \\ 1.9999999 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\lVert P_i - P_{i-1} \rVert_\infty$
0	$\begin{pmatrix} 1.0000000 \\ 0 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 0.89446539 \\ 0.29912271 \end{pmatrix}$	0.299123

2	$\begin{pmatrix} 0.79914863 \\ 0.61672144 \end{pmatrix}$	0.317599
3	$\begin{pmatrix} 0.71291813 \\ 0.94943118 \end{pmatrix}$	0.33271
4	$\begin{pmatrix} 0.63485575 \\ 1.2934954 \end{pmatrix}$	0.344064
5	$\begin{pmatrix} 0.56414229 \\ 1.6449778 \end{pmatrix}$	0.351482
6	$\begin{pmatrix} 0.49999988 \\ 1.9999999 \end{pmatrix}$	0.355022

La solución aproximada del sistema es:

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0.49999988 \\ 1.9999999 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 38.** Sea el sistema de ecuaciones no lineales siguiente.

$$f_1(x_1, x_2) = \text{sen}(4\pi x_1 x_2) - 2x_2 - x_1 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2) = ((4\pi - 1)/(4\pi))(e^{2x_1} - e) + 4e x_2^2 - 2e x_1 = 0.$$

Aplíquese el método de *la Continuación u Homotopía* iniciando el método en el punto inicial $P_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)^T = (0,\ 0)^T$ realizando 4 iteraciones.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = {
   Sin[4 * Pi * x1 * x2] - 2 x2 - x1,
   ((4 Pi - 1) / (4 Pi)) (Exp[2 x1] - E) + 4 E (x2)^2 - 2 E * x1};
p = {{0.0}, {0.0}};
m = 4;
continuacionhomotopia[ecuaciones, p, m];
```

Método de *Continuacion Homotopia* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin(4\pi x_1 x_2) - x_1 - 2x_2 \\ 4e x_2^2 - 2e x_1 + \frac{(-e+e^{2x_1})(-1+4\pi)}{4\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4\pi\cos(4\pi x_1 x_2)x_2 - 1 & 4\pi\cos(4\pi x_1 x_2)x_1 - 2 \\ -2e + \frac{e^{2x_1}(-1+4\pi)}{2\pi} & 8e x_2 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.10996031 \\ 0.054980154 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.10053454 \\ 0.024458033 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.10250307 \\ 0.032964556 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.097271662 \\ 0.017345574 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} -0.10221787 \\ 0.031195151 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.097343701 \\ 0.018034131 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.094437044 \\ 0.012042947 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.094527591 \\ 0.013019181 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.092140623 \\ 0.0092541796 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} -0.19678680 \\ 0.044097246 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.092137501 \\ 0.0092825391 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.090121763 \\ 0.0070812789 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.090147096 \\ 0.0073385003 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.088391533 \\ 0.0058151466 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = P_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} -0.28696459 \\ 0.051420120 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.088390071 \\ 0.0058176348 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.086848148 \\ 0.0047996081 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.086864795 \\ 0.0048898916 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.085500431 \\ 0.0041479274 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = P_3 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} -0.37385066 \\ 0.056310880 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\|P_i - P_{i-1}\|_\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} -0.10221787 \\ 0.031195151 \end{pmatrix}$	0.102218
2	$\begin{pmatrix} -0.19678680 \\ 0.044097246 \end{pmatrix}$	0.0945689
3	$\begin{pmatrix} -0.28696459 \\ 0.051420120 \end{pmatrix}$	0.0901778
4	$\begin{pmatrix} -0.37385066 \\ 0.056310880 \end{pmatrix}$	0.0868861

La solución aproximada del sistema es:

$$P_4 = \begin{pmatrix} -0.37385066 \\ 0.056310880 \end{pmatrix}$$