Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2019-1**

[Cod: CM334] **[Curso: Análisis Numérico I]**

Práctica Dirigida N^o 4

1. Programe y utilice el algoritmo de Householder para determinar la factorización QR de

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Analizar la complejidad computacional de la descomposición QR utilizando la transformación de Householde.

   a) Escriba un algoritmo (pseudo código) para la descomposición QR discutida en clase. Trate de hacerlo lo más eficiente posible, ya que necesitamos analizar su eficiencia aquí.

   b) Si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz completa genérica, ¿cuál es la complejidad de la descomposición QR?

3. Demuestre que si A es diagonalmente dominante y si Q se elige igual que en el método de Jacobi entonces

$$\rho(I - Q^{-1}A) < 1$$

4. Demuestre que si A tiene la propiedad (fila unitaria diagonalmente dominante)

$$a_{ii} = 1 > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (1 \leq i \leq n)$$

   entonces el sistema $Ax = b$ se resuelve (en el limite) mediante la siguiente iteración:

   for $k = 1, 2, 3 \ldots$
      for $i = 1, 2, 3 \ldots n$ do
         $x_i \leftarrow x_i + b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$
      end
   end

5. Demuestre que $\rho(A) < 1$ si y solo si $\lim\limits_{k\to\infty} A^k x = 0$ para todo x.

6. Usando Q igual que el método de Gauss-Seidel, demuestre que si A es diagonalmente dominante, entonces $\|I - Q^{-1}A\|_\infty < 1$

7. Sean A una matriz inversible y f una función de la forma $f(z) = \sum_{j=-m}^{m} c_j z^j$. Demuestre que si λ es un valor propio de A, entonces $f(\lambda)$ es un valor propio de $f(A)$.

8. Demuestre que si A es no singular entonces AA^* es definida positiva.

9. Demuestre que si A es definida positiva entonces sus valores propios son positivos.

10. Demuestre que también lo son A^2, A^3, ... así como también A^{-1}, A^{-2}, ...

11. Demuestre que si $\rho(A) < 1$ entonces $I - A$ es invertible y $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$

12. Programe el método de Gauss-Seidel y pruebelo con los siguientes ejemplos:

$$a)\begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ x + 3y - z = 3 \\ 3x + y - 5z = -1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ 3x + y - 5z = -1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

13. Caracterice a la familia de todas las matrices A no singulares de $n \times n$ para las cuales un paso del algoritmo de Gauss-Seidel resuelve el sistema $Ax = b$, suponiendo que se inicio el proceso con $x = 0$.

14. Use la iteración de Gauss-Seidel en un problema de para el cual

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}96326 & 0{,}81321 \\ 0{,}81321 & 0{,}68654 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0{,}88824 \\ 0{,}74988 \end{bmatrix}$$

con vector inicial $(0{,}33116, 0{,}70000)^T$

15. Resuelva el problema

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

usando la aceleración de Chebyshev del método de Jacobi.

16. Programe y ponga a prueba el método del gradiente conjugado con la matriz de Hilbert $a_{ij} = (1 + i + j)^{-1}$, y $b_i = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.

17. Resuelva el siguiente sistema a partir de $x = 0$ usando $a)$ Jacobi $b)$ Gauss-Seidel $c)$ Gradiente conjugado

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & -1 \\ 4 & 3 & -5 & -1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -27 \\ 14 \\ -17 \\ 12 \end{bmatrix}$$

UNI, 02 de mayo del 2019*

*Hecho en LaTeX