

Capítulo 4

Condicionamiento

4.1. Introducción

El hecho de que los ordenadores pueden representar sólo un número finito de números reales y de forma aproximada tiene una consecuencia inmediata en el cálculo numérico: aún cuando un algoritmo haya sido diseñado teóricamente para producir la respuesta exacta a un problema, su implementación en un ordenador rara vez producirá tal respuesta. La cuestión entonces radica en saber cuándo se puede confiar en la respuesta obtenida. Los algoritmos en los que se puede “confiar” son los algoritmos estables; es decir, son aquellos que *produce una respuesta casi exacta cuando se aplican a datos que son casi exactos*. Este es un concepto difuso, por ahora, pero debemos observar desde un principio que en el cálculo numérico los errores están siempre presentes. Hay errores de muy diversa procedencia, principalmente:

- errores en las mediciones o en las estimaciones previas (posiblemente grandes: a menudo los datos en ingeniería o economía son concidos exactamente con pocos dígitos [18]).

- errores en la forma en la que los ordenadores almacenan los números: palabras de 32 o 64 bits, según sea en simple o doble precisión. Es decir, errores de redondeo (pequeños, comparados con los anteriores).
- errores como resultado de cálculos anteriores si, por ejemplo, los datos proceden de soluciones numéricas a problemas previos.

Hay problemas que son especialmente sensibles a estos tipos de errores. El estudio de cómo éstos afectan a las respuestas calculadas pertenece a una disciplina denominada *Teoría de la perturbación*. En ella se pretende estimar cuánto puede cambiar la solución de un problema cuando los datos de partida son modificados ligeramente. Pero el análisis numérico pretende más: su objetivo es diseñar algoritmos que sean lo más insensibles posible a los errores. Los algoritmos que poseen esta propiedad se dice que son estables. No es una tarea fácil saber si un algoritmo es estable o no. Lo primero que se necesita para ello es una buena definición de estabilidad. Iremos abordando estas cuestiones a lo largo de este tema y el siguiente aplicándolos, a modo de ejemplo, al problema de la resolución de sistemas lineales.

Hay un tercer aspecto importante en Álgebra Lineal Numérica que sólo abordaremos tangencialmente en este curso: la velocidad de los algoritmos. Ésta suele ser medida, en la disciplina que nos ocupa, en **flops** (número de operaciones en punto flotante), pero su análisis, aunque importante porque en determinadas circunstancias la velocidad de los algoritmos puede ser decisivo para decantarse por la utilización de uno u otro, suele ser tedioso y con escaso contenido matemático. Quienes estén interesados el análisis de la velocidad de los principales algoritmos, pueden consultar los libros recomendados en la bibliografía.

4.2. Condicionamiento de un problema

En abstracto podemos ver un problema como una función $f : X \rightarrow Y$ de un espacio vectorial normado de datos en un espacio vectorial normado de resultados. Por ejemplo, el problema de calcular la mitad de un número real se puede ver como la función

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \leadsto & \frac{x}{2} \end{array}$$

Y el problema de calcular las raíces de un polinomio también se puede interpretar de esta forma aunque los espacios X e Y que intervienen son un poco más complicados.

Esta función es casi siempre no lineal (incluso en Álgebra Lineal) pero sí continua. Y lo que se pretende es saber cómo actúa f sobre un punto concreto $x \in X$. Intuitivamente, para un valor $x \in X$, se dice que un problema está *bien condicionado* (en realidad debería decirse *bien condicionado para el valor dado* x , pero se sobreentenderá lo de que es para un valor concreto que siempre se dará previamente) si cualquier pequeña modificación en x produce una pequeña modificación en $f(x)$. Un *problema mal condicionado* es aquel para el que hay pequeñas modificaciones de x que producen grandes modificaciones de $f(x)$.

Para hacer preciso este concepto supongamos, de momento, que $X = \mathbb{F}^n$, $Y = \mathbb{F}^m$ y f es diferenciable en x . Podemos aproximar el valor de $f(x + \delta x)$ por $f(x)$ utilizando el primer término del desarrollo de f en serie de Taylor alrededor de x :

$$f(x + \delta x) \approx f(x) + f'(x)\delta x$$

donde $f'(x)$ es la diferencial de f en x (i. e. la aplicación lineal de \mathbb{F}^n a \mathbb{F}^m representada por la matriz jacobiana de f en las bases canónicas). Así

$$f(x + \delta x) - f(x) \approx f'(x)\delta x$$

Eliendo normas en \mathbb{F}^n y \mathbb{F}^m y usando para $f'(x)$ la correspondiente norma inducida

$$\frac{\|f(x + \delta x) - f(x)\|}{\|\delta x\|} \approx \|f'(x)\|,$$

de modo que $\|f'(x)\|$ nos da una idea aproximada de la razón de los errores absolutos de las soluciones del problema y los datos del mismo. Si este número es muy grande es porque pequeñas modificaciones en el dato del problema produce una modificación muy grande en la solución. Al número $\|f'(x)\|$, que es la norma de la matriz de las derivadas parciales de f en x , se le llama **número de condición (absoluto)** del problema f en x respecto de la norma $\|\cdot\|$; y se representa por $\hat{\kappa}(x)$.

Si lo que se quiere es una idea de la relación entre los errores relativos podemos observar que

$$\frac{\|f(x + \delta x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \approx \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|f'(x)\| \|x\|}{\|f(x)\|},$$

de modo que

$$\left(\frac{\|f(x + \delta x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \right) / \left(\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \right) \approx \frac{\|f'(x)\| \|x\|}{\|f(x)\|}.$$

Y al número $\frac{\|f'(x)\|\|x\|}{\|f(x)\|}$ se le llama **número de condición (relativo)** o simplemente **número de condición** del problema f en x respecto de la norma $\|\cdot\|$; y se representa por $\kappa(x)$. Este número mide la sensibilidad del problema f a las pequeñas perturbaciones de x . Así, si $\kappa(x)$ es pequeño, errores relativos pequeños en el dato producen errores relativos pequeños en la solución; mientras que si $\kappa(x)$ es grande errores relativos pequeños en los datos producen errores relativos grandes en la solución. En este caso, el problema está mal condicionado; y en el anterior el problema está bien condicionado.

Cuando f no es diferenciable se requiere otra caracterización de número de condición que se reduzca a la ya dada si f es diferenciable. La definición precisa es la siguiente:

Número de condición absoluto:

$$\hat{\kappa}(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \frac{\|f(x + \delta x) - f(x)\|}{\|\delta x\|}. \quad (4.1)$$

Número de condición relativo:

$$\kappa(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \left(\frac{\|f(x + \delta x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \right) \bigg/ \left(\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \right) \quad (4.2)$$

Cuando nos refiramos al número de condición de un problema, se deberá entender que es el número de condición relativo. Debe observarse en cualquier caso que

$$\kappa(x) = \frac{\|x\|}{\|f(x)\|} \hat{\kappa}(x) \quad (4.3)$$

Observaciones 4.1 Deberíamos demostrar que las definiciones (4.1) y (4.2) son consistentes. Es decir, que el límite existe y coincide con la norma de la diferencial de f cuando ésta es diferenciable. Lo primero no es difícil. Vamos a hacerlo para el número de condición absoluto. El correspondiente resultado para el número de condición relativo se sigue de (4.3). Para $x \in \mathbb{F}^n$ dado, pongamos

$$\varphi(\delta) = \sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \frac{\|f(x + \delta x) - f(x)\|}{\|\delta x\|}$$

y observemos que si $0 < \delta_1 < \delta_2$ entonces $\{\delta x : \|\delta x\| \leq \delta_1\} \subset \{\delta x : \|\delta x\| \leq \delta_2\}$. Por lo tanto

$$\varphi(\delta_1) = \sup_{\|\delta x\| \leq \delta_1} \frac{\|f(x + \delta x) - f(x)\|}{\|\delta x\|} \leq \sup_{\|\delta x\| \leq \delta_2} \frac{\|f(x + \delta x) - f(x)\|}{\|\delta x\|} = \varphi(\delta_2),$$

de modo que φ es monótona creciente y acotada inferiormente por 0. Por consiguiente, existe el $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \varphi(\delta)$. Notemos que $\delta > 0$, y por lo tanto la convergencia a 0 es siempre por la derecha aunque no se haya hecho explícito en la definición.

Probamos ahora que cuando f es diferenciable $\hat{\kappa}(x) = \|f'(x)\|$. Recordamos que la diferenciabilidad de f significa que

$$f(x + \delta x) - f(x) = f'(x)\delta x + \|\delta x\|r(\delta x),$$

donde $f'(x)$ es una aplicación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m cuya matriz en las bases canónicas es la matriz jacobiana de f , y $\lim_{\delta x \rightarrow 0} r(\delta x) = 0$. Pongamos, para facilitar la comprensión $f'(x) = J(x)$. Entonces para $\delta > 0$

$$\sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \frac{\|f(x + \delta x) - f(x)\|}{\|\delta x\|} = \sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \left\| \frac{J(x)\delta x}{\|\delta x\|} + r(\delta x) \right\|.$$

El objetivo es demostrar que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \left\| \frac{J(x)\delta x}{\|\delta x\|} + r(\delta x) \right\| = \|J(x)\|,$$

donde $\|J(x)\|$ es la norma de matriz inducida por la norma de vector que estemos considerando. Es decir

$$\|J(x)\| = \sup_{h \neq 0} \frac{\|J(x)h\|}{\|h\|}.$$

(Nótese que las normas en el numerador y denominador en esta expresión son normas de vector en espacios de, posiblemente, dimensiones diferentes). Se puede demostrar, como se hizo en la Sección 2.3.2 de la Lección 2, que para cualquier $\delta > 0$

$$\|J(x)\| = \sup_{h \neq 0} \frac{\|J(x)h\|}{\|h\|} = \sup_{\|h\| \leq \delta} \frac{\|J(x)h\|}{\|h\|},$$

de modo que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|h\| \leq \delta} \frac{\|J(x)h\|}{\|h\|} = \|J(x)\|,$$

porque estamos calculando el límite cuando $\delta \rightarrow 0$ de una cantidad constante: $\|J(x)\|$.

Por lo tanto, lo que queremos demostrar es que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \left\| \frac{J(x)\delta x}{\|\delta x\|} + r(\delta x) \right\| - \sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \frac{\|J(x)\delta x\|}{\|\delta x\|} \right) = 0. \quad (4.4)$$

Ahora bien, sabemos que $\lim_{\delta x \rightarrow 0} r(\delta x) = 0$, lo que implica que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \|r(\delta x)\| =$

0. Para probar (4.4) utilizaremos la definición de límite: Sea $\varepsilon > 0$ un número real. Por una parte

$$\sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \left\| \frac{J(x)\delta x}{\|\delta x\|} + r(\delta x) \right\| \leq \sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \left(\left\| \frac{J(x)\delta x}{\|\delta x\|} \right\| + \|r(\delta x)\| \right) \leq \sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \left\| \frac{J(x)\delta x}{\|\delta x\|} \right\| + \sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \|r(\delta x)\|,$$

de modo que

$$\left| \sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \left\| \frac{J(x)\delta x}{\|\delta x\|} + r(\delta x) \right\| - \sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \frac{\|J(x)\delta x\|}{\|\delta x\|} \right| \leq \sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \|r(\delta x)\|.$$

Como $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \|r(\delta x)\| = 0$, para el ε dado existe un $\eta > 0$ tal que si $0 < \delta < \eta$ entonces $\sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \|r(\delta x)\| < \varepsilon$. Así pues, con este mismo η ,

$$\left| \sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \left\| \frac{J(x)\delta x}{\|\delta x\|} + r(\delta x) \right\| - \sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \frac{\|J(x)\delta x\|}{\|\delta x\|} \right| < \varepsilon,$$

lo que demuestra (4.4).

Ejemplo 4.2 1. Para $x \in \mathbb{R}$ calcular $\frac{x}{2}$.

En este caso $f(x) = \frac{x}{2}$ es una función diferenciable y $f'(x) = \frac{1}{2}$. Así

$$\kappa = \frac{|f'(x)||x|}{|f(x)|} = \frac{1/2}{1/2} = 1.$$

El problema está bien condicionado en cada $x \in \mathbb{C}$.

2. Para $x \in \mathbb{R}^+$ calcular \sqrt{x} .

Ahora $f(x) = \sqrt{x}$ y f es diferenciable para $x > 0$. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Así

$$\kappa = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

El problema está bien condicionado para todo $x > 0$.

3. Para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ calcular $x_1 \cdot x_2$.

$f(x) = x_1 x_2$ es una función de dos variables. $f'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \end{bmatrix}$.

Para la norma ℓ_∞ tenemos que

$$\kappa = \frac{(|x_1| + |x_2|) \cdot \max\{|x_1|, |x_2|\}}{|x_1 x_2|} = \frac{|x_1| + |x_2|}{\min\{|x_1|, |x_2|\}}$$

Este problema está bien condicionado para valores de x_1 y x_2 próximos en valor absoluto, y mal condicionado para valores que difieren mucho en valor absoluto.

4.3. El número de condición para el producto de matrices y vectores

Como viene siendo habitual \mathbb{F} representa el cuerpo de los números reales o complejos.

Analizamos con un poco de detalle el número de condición del siguiente problema: Dada una matriz $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, calcular el producto de Ax para $x \in \mathbb{F}^{n \times 1}$. La función asociada al problema es

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m \\ x & \rightsquigarrow & b = Ax \end{array}$$

Esta función es diferenciable:

$$f(x) = Ax = \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right]_{i=1}^m.$$

Es decir, para $i = 1, \dots, m$

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j,$$

de modo que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij}.$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = A.$$

Y el número de condición relativo para este problema es

$$\kappa = \frac{\|f'(x)\|}{\|f(x)\|/\|x\|} = \frac{\|A\| \|x\|}{\|Ax\|}, \quad (4.5)$$

donde tomamos como norma de A la norma inducida por las normas de x y Ax . Debemos tener en cuenta que estos vectores pueden estar en espacios vectoriales de dimensiones diferentes. Por ser una norma inducida por una norma de vector, es compatible con ella. Es decir, $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ y, en consecuencia

$$\kappa \geq 1.$$

El problema estará bien condicionado para aquellos $x \in \mathbb{F}^n$ para los que κ es próximo a 1; y mal condicionado para aquellos para los que κ es mucho mayor que 1.

Además cuando A es cuadrada y no singular tenemos que $x = A^{-1}Ax$ y

$$\|x\| = \|A^{-1}Ax\| \leq \|A^{-1}\| \|Ax\|.$$

Sustituyendo en (8.10) tenemos que

$$\kappa \leq \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Así que el número de condición de calcular $b = Ax$ con A dada e invertible está acotado por la cantidad $\|A\| \|A^{-1}\|$. ¿Qué número de condición tiene el problema de “resolver el sistema $Ax = b$ ” con A una matriz dada cuadrada e invertible? Nos preguntamos por el problema

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m \\ & & b \rightsquigarrow x = A^{-1}b \end{array}$$

Es el mismo que acabamos de estudiar pero aplicado a la matriz A^{-1} :

$$\kappa \leq \|A^{-1}\| \|A\|.$$

En definitiva tenemos el siguiente resultado

Teorema 4.3 Sea $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ no singular y consideremos el problema de la resolución del sistema lineal $Ax = b$ respecto de b . El número de condición de este problema es

$$\kappa = \|A^{-1}\| \frac{\|b\|}{\|A^{-1}b\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\| = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Definición 4.4 El número $\|A\| \|A^{-1}\|$ recibe el nombre de **número de condición** de la matriz A , si A es cuadrada y no singular, y se denota por $\kappa(A)$. Cumple que $\kappa(A) \geq 1$, y si $\kappa(A)$ es un número próximo a 1 se dice que A es una matriz **bien condicionada**; y si es mucho mayor que 1, que es **mal condicionada**.

Debe notarse que a normas diferentes, para una misma matriz, los números de condición pueden ser diferentes, pero la equivalencia de normas garantiza que “no son muy diferentes”. Particularmente notable es el número de condición respecto de la norma espectral o de operador:

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2.$$

Recordemos que $\|A\|_2 = \sigma_1$ es el mayor valor singular de A y que el mayor valor singular de A^{-1} es $1/\sigma_n$. Es decir, $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n}$, y así

$$\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}.$$

Es muy importante notar que el condicionamiento de una matriz depende de la relación entre su primer y último valor singular. Desde luego, si A es singular, entonces $\kappa_2(A) = +\infty$, y A está muy mal condicionada, pero A puede estar cerca de ser singular y estar muy bien condicionada. Por ejemplo, para

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-7} & 10^{-10} \\ 10^{-10} & 10^{-7} \end{bmatrix}$$

es una matriz casi singular porque $\sigma_n = 0,0999 \cdot 10^{-6}$, pero

$$\kappa_2(A) = 1,00200200200200,$$

de forma que está muy bien condicionada: sus columnas (y filas) son “muy” linealmente independientes: la primera componente de la primera columna es 10^3 veces

más grande que la de la segunda columnas; y lo mismo pasa con las segundas componentes pero al revés. El número de condición no sólo depende del último valor singular, que nos mide la distancia al conjunto de las matrices singulares, sino de su relación con el primero. En este ejemplo, $\sigma_1 = 0,1001 \cdot 10^{-6}$ y σ_1/σ_2 es casi 1.

En conclusión, una matriz no singular A puede estar cerca del conjunto de matrices singulares pero estar muy bien condicionada. Así, si los elementos de A son muy pequeños en valor absoluto (como en el ejemplo de más arriba), su determinante será muy pequeño (en valor absoluto) y su último valor singular será muy pequeño porque el producto de los valores singulares es el valor absoluto del determinante de la matriz. Consecuentemente, A está cerca de alguna matriz singular. Sin embargo, A puede ser una matriz bien condicionada porque puede suceder que σ_1 sea también muy pequeño y muy parecido a σ_n . Su número de condición nos da una idea de si sus columnas son muy linealmente independientes o no. Un sistema de vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ son “casi linealmente dependientes” si se pueden encontrar escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, no todos “pequeños” de forma que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ es “casi” cero. Obsérvense las comillas. Son conceptos imprecisos, pero que nos hacen intuir que cuanto más cerca estén las columnas de una matriz de ser ortogonales, mejor condicionada estará dicha matriz. Lo que sí se puede probar rigurosamente es que no hay matrices mejor condicionadas (en la norma espectral) que las unitarias. En efecto, si U es unitaria entonces todos sus valores singulares son iguales a 1 y en consecuencia $\kappa_2(U) = 1$.

Terminamos esta sección con un resultado que nos ofrece otra interpretación interesante del número de condición de una matriz.

Corolario 4.5 *Sea $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ una matriz no singular. Entonces*

$$\frac{1}{\kappa_2(A)} = \min \left\{ \frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} : A + \delta A \text{ singular} \right\}.$$

Es decir, $\frac{1}{\kappa_2(A)}$ es la distancia relativa de A al conjunto de las matrices singulares. Cualquier error relativo en A menor que esta cantidad nos asegura que la correspondiente matriz es no-singular. Pero si el error relativo en A es mayor que $\frac{1}{\kappa_2(A)}$ la matriz obtenida podría ser singular. Es decir, $\frac{1}{\kappa_2(A)}$ es el menor error relativo posible para que la perturbación en A produzca una matriz singular.

Demostración.- Por una parte

$$\frac{1}{\kappa_2(A)} = \frac{1}{\|A\|_2} \frac{1}{\|A^{-1}\|_2} = \frac{\sigma_n}{\|A\|}.$$

Y por otra parte,

$$\sigma_n = \min_{\text{rang}(A+\delta A) < n} \|A + \delta A - A\|_2.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{\kappa_2(A)} = \min_{\text{rang}(A+\delta A) < n} \frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} = \min \left\{ \frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} : A + \delta A \text{ singular} \right\}. \quad \blacksquare$$

Podemos extender el concepto de número de condición a las matrices rectangulares de rango completo usando A^\dagger en lugar de A^{-1} . Es decir,

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^\dagger\|.$$

Y si $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ con $m \geq n$ y $\text{rang } A = n$ seguiríamos teniendo

$$\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}.$$

4.4. La condición de los sistemas de ecuaciones lineales

En la sección anterior hemos considerado los problemas de calcular Ax y $A^{-1}b$ para x y b , respectivamente, y suponiendo que A es una matriz fija. En ambos casos hemos visto que el número de condición de estos problemas está acotado inferiormente por 1 y superiormente por $\kappa(A)$. Hemos visto también que este número es importante para analizar la independencia lineal de las columnas de la matriz A . Se trata ahora de mostrar que $\kappa(A)$ es, en efecto, el número de condición de un problema. Es lógico pensar que dicho problema debe tener relación con la ecuación $Ax = b$ porque en el caso particular en que $b = 0$ la solución del sistema es, en aritmética exacta, $x = 0$. Si el problema está mal condicionado entonces el error absoluto en el resultado puede ser grande en comparación con el error absoluto en la perturbación en A . Es decir, si una ligera perturbación en A produce una solución x , de $Ax = 0$, con alguna componente muy grande respecto de dicha perturbación debe ser debido

a que las columnas de A están cerca de ser linealmente independientes. Esto justifica nuestra intuición sobre el significado de $\kappa(A)$ en relación a la dependencia lineal de las columnas de A expuesta en la sección anterior.

Se trata de estudiar el sistema $Ax = b$ cuando b es un vector dado y A sólo se conoce aproximadamente. Es decir, el problema

$$\begin{array}{ccc} f & : & \text{Gl}_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}^n \\ & & A \rightsquigarrow A^{-1}b \end{array} \quad (4.6)$$

con $b \in \mathbb{F}^n$ un vector dado fijo y A invertible. Recordemos que $\text{Gl}_n(\mathbb{F})$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{F}^{n \times n}$.

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente resultado

Teorema 4.6 (a) Sea $b \in \mathbb{F}^n$ un vector no nulo y consideremos el problema de hallar la solución del sistema $Ax = b$ a partir de $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, invertible. El número de condición de este problema es

$$\kappa = \|A\| \|A^{-1}\| = \kappa(A).$$

cualquiera que sea la norma de vector en \mathbb{F}^n y siendo la norma en $\mathbb{F}^{n \times n}$ la norma de operador inducida por la norma de \mathbb{F}^n .

(b) En las mismas condiciones de (a), $\kappa(A)$ también es el número de condición del problema:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{f} & : & \text{Gl}_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}^{n \times n} \\ & & A \rightsquigarrow A^{-1} \end{array} \quad (4.7)$$

que consiste en calcular la inversa de A para matrices invertibles de orden n .

Demostración.— Las demostraciones de ambos resultados son parecidas. Las iremos haciendo en paralelo.

En primer lugar probaremos que las funciones f y \tilde{f} , (4.6) y (4.7), que definen los dos problemas son diferenciables. En consecuencia, si κ y $\tilde{\kappa}$ son los números de condición de los problemas definidos por f y \tilde{f} , entonces

$$\kappa = \frac{\|f'(A)\| \|A\|}{\|f(A)\|} \quad \text{y} \quad \tilde{\kappa} = \frac{\|\tilde{f}'(A)\| \|A\|}{\|\tilde{f}(A)\|}.$$

Teniendo en cuenta que la diferencial $f'(A) : \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}^n$ es una aplicación lineal, la norma para $f'(A)$ es la norma de operador inducida por las normas que se hayan considerado en $\mathbb{F}^{n \times n}$ y \mathbb{F}^n ; i.e.,

$$\|f'(A)\| = \max_{\|X\|=1} \|f'(A)(X)\|.$$

(Recuérdese que, a su vez, la norma en $\mathbb{F}^{n \times n}$ es la inducida por la de \mathbb{F}^n). Y de la misma forma, $\tilde{f}'(A) : \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}^{n \times n}$ es una aplicación lineal de modo que la norma para $\tilde{f}'(A)$ es la norma de operador inducida por las norma de $\mathbb{F}^{n \times n}$:

$$\|\tilde{f}'(A)\| = \max_{\|X\|=1} \|\tilde{f}'(A)(X)\|.$$

Un cálculo elemental muestra que es equivalente demostrar que $\kappa = \tilde{\kappa} = \kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ y que

$$\|f'(A)\| = \|A^{-1}\| \|A^{-1}b\| \quad \text{y} \quad \|\tilde{f}'(A)\| = \|A^{-1}\|^2$$

Así pues, el objetivo es probar que $\|A^{-1}\| \|A^{-1}b\|$ es una cota superior alcanzable del conjunto $\{\|f'(A)(X)\| : \|X\| = 1\}$. Y que $\|A^{-1}\|^2$ es una cota superior alcanzable del conjunto $\{\|\tilde{f}'(A)(X)\| : \|X\| = 1\}$.

Veamos que, en efecto, f y \tilde{f} son diferenciables. Podemos escribir \tilde{f} a partir de las siguientes funciones:

$$g_1 : \begin{array}{ccc} \text{Gl}_n(\mathbb{F}) & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ X & \leadsto & \det X = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)} \end{array}$$

$$g_2 : \begin{array}{ccc} \text{Gl}_n(\mathbb{F}) & \longrightarrow & \mathbb{F}^{n \times n} \\ X & \leadsto & \text{Adj}(X) = [(-1)^{i+j} \det X [j|i]] \end{array}$$

Como g_1 no se anula en $\text{Gl}_n(\mathbb{F})$ y g_1 y g_2 son funciones diferenciables en los elementos de la matriz X , también $\tilde{f} = g_2/g_1$ es diferenciable. Ahora bien, para b fijo $f(X) = \tilde{f}(X)b$, de modo que f es diferenciable.

Veamos ahora que $\|f'(A)(X)\| \leq \|A^{-1}\| \|A^{-1}b\|$ para toda matriz $X \in \mathbb{F}^n$. Recordemos que $f'(A)(X)$ es la derivada direccional de f en la dirección de X :

$$\begin{aligned} f'(A)(X) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(A + tX)^{-1}b - A^{-1}b}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[(I_n + tA^{-1}X)^{-1}A^{-1} - A^{-1}]b}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[(I_n + tA^{-1}X)^{-1} - I_n]A^{-1}b}{t} = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(I_n + tA^{-1}X)^{-1} - I_n}{t} \right) A^{-1}b \end{aligned}$$

Pero para t suficientemente pequeño se tiene que $\|tA^{-1}X\| < 1$ de modo que, por la Proposición 2.15 del Capítulo 2, concluimos que $I_n + tA^{-1}X$ es invertible y

$$(I_n + tA^{-1}X)^{-1} = I_n - tA^{-1}X + t^2(A^{-1}X)^2 - t^3(A^{-1}X)^3 + \dots$$

En consecuencia

$$\frac{(I_n + tA^{-1}X)^{-1} - I_n}{t} = -A^{-1}X + t(A^{-1}X)^2 - t^2(A^{-1}X)^3 + \dots = -A^{-1}X(I_n + tA^{-1}X)^{-1}$$

Por lo tanto

$$f'(A)(X) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} (-A^{-1}X)(I_n + tA^{-1}X)^{-1} \right) A^{-1}b = -A^{-1}XA^{-1}b.$$

Exactamente igual se demuestra que $\tilde{f}'(A)(X) = -A^{-1}XA^{-1}$.

Probamos ahora que $\|A\|^{-1}\|A^{-1}b\|$ es una cota superior de $\{\|f'(A)(X)\| : \|X\| = 1\}$. Sea $X \in \mathbb{F}^{n \times n}$ una matriz de norma 1. Entonces, por la compatibilidad de las normas

$$\|f'(A)(X)\| = \|A^{-1}XA^{-1}b\| \leq \|A^{-1}\| \|X\| \|A^{-1}b\| = \|A^{-1}\| \|A^{-1}b\|$$

porque $\|X\| = 1$. De la misma forma

$$\|\tilde{f}'(A)(X)\| = \|A^{-1}XA^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \|X\| \|A^{-1}\| = \|A^{-1}\|^2,$$

de modo que $\|A^{-1}\|^2$ es una cota superior del conjunto $\{\|\tilde{f}'(A)(X)\| : \|X\| = 1\}$. Por lo tanto

$$\|\tilde{f}'(A)\| = \max_{\|X\|=1} \|A^{-1}XA^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|^2. \quad (4.8)$$

Debemos encontrar ahora una matriz B de norma 1 tal que $\|f'(A)(B)\| = \|A^{-1}BA^{-1}b\| = \|A^{-1}\| \|A^{-1}b\|$. Si esta matriz B , además de tener norma 1, cumpliera que $BA^{-1}b = y$ siendo y un vector tal que $\|A^{-1}y\| = \|A^{-1}\| \|y\|$ y $\|y\| = \|A^{-1}b\|$, entonces tendríamos asegurada la igualdad, porque en tal caso

$$\|A^{-1}BA^{-1}b\| = \|A^{-1}y\| = \|A^{-1}\| \|y\| = \|A^{-1}\| \|A^{-1}b\| \quad (4.9)$$

Parece que los requerimientos son excesivos, pero en realidad no lo son porque tenemos todos los elementos necesarios para poder decir exactamente qué matriz B y qué vector y debemos escoger. En primer lugar, como la norma en $\mathbb{F}^{n \times n}$ es la

norma inducida por la norma de \mathbb{F}^n , existe un vector no nulo y_1 tal que $\|A^{-1}y_1\| = \|A^{-1}\|\|y_1\|$. Nótese que cualquiera que sea el número α , también αy_1 cumple la misma propiedad:

$$\|A^{-1}(\alpha y_1)\| = |\alpha| \|A^{-1}y_1\| = |\alpha| \|A^{-1}\| \|y_1\| = \|A^{-1}\| \|\alpha y_1\|$$

En particular, si

$$y = \frac{\|A^{-1}b\|}{\|y_1\|} y_1$$

Tenemos que $\|y\| = \|A^{-1}b\|$ y $\|A^{-1}y\| = \|A^{-1}\|\|y\|$.

Con este vector y formamos el vector $y_0 = \frac{1}{\|y\|}y$ de modo que $\|y_0\| = 1$. Pongamos $x = A^{-1}b$ y $x_0 = \frac{1}{\|x\|}x$. Estos vectores cumplen que $\|y_0\| = \|x_0\| = 1$. Por el Ejercicio 2.8 de la Lección 2, existe un vector z_0 tal que si $B = y_0 z_0^*$ entonces $Bx_0 = y_0$ y $\|B\| = 1$. Tal vector z_0 es

$$z_0 = \frac{z_1}{x_0^* z_1}$$

siendo z_1 un vector para el que $|z_1^* x_0| = \|z_1\|' \|x_0\|$ ($\|\cdot\|'$ la norma dual de $\|\cdot\|$), que siempre existe (ver Ejercicio 2.8 de la Lección 2). Así pues, $\|B\| = 1$ y

$$BA^{-1}b = Bx = \|x\| Bx_0 = \|x\| y_0 = \|A^{-1}b\| y_0 = \|y\| y_0 = y.$$

En definitiva, existe un vector y tal que $\|y\| = \|A^{-1}b\|$ y $\|A^{-1}y\| = \|A^{-1}\|\|y\|$. Y para este vector y existe una matriz B tal que $\|B\| = 1$ y $BA^{-1}b = y$. Por lo tanto, se cumple (4.9) y $\|f'(A)(B)\| = \|A^{-1}\|\|A^{-1}b\|$. Esto es, $\|f'(A)\| = \|A^{-1}\|\|A^{-1}b\|$ y $\kappa = \kappa(A)$ tal y como se deseaba demostrar.

Para concluir, debemos demostrar que $\|\tilde{f}'(A)\| = \|A^{-1}\|^2$. Para ello observamos que, debido a que la norma en $\mathbb{F}^{n \times n}$ es la inducida por la de \mathbb{F}^n , existe un vector b de norma 1 tal que $\|A^{-1}b\| = \|A^{-1}\|$. Para este vector b , y de acuerdo con lo que hemos demostrado más arriba, existe una matriz B de norma 1 tal que $\|A^{-1}BA^{-1}b\| = \|A^{-1}\|\|A^{-1}b\| = \|A^{-1}\|^2$. En consecuencia,

$$\|A^{-1}\|^2 = \|A^{-1}BA^{-1}b\| \leq \|A^{-1}BA^{-1}\| \|b\| = \|A^{-1}BA^{-1}\| \leq \|\tilde{f}'(A)\|$$

porque $\|\tilde{f}'(A)\| = \max_{\|X\|=1} \|A^{-1}XA^{-1}\|$. Teniendo en cuenta (4.8) concluimos que $\|\tilde{f}'(A)\| = \|A^{-1}\|^2$ y consecuentemente $\tilde{\kappa} = \kappa(A)$. ■

