Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2019-1

[Cod: CM-334 Curso: Análisis Numérico I]
[Tema: Condicionamiento. Factorización LU]

Laboratorio N° 2

---

1. **Ejecute el siguiente código para calcular el número de condición de una matriz:**

```
import numpy as np
### numero de condicion ######
from numpy import linalg as LA
a = np.array([[1, 0, -1], [0, 1, 0], [1, 0, 1]])
LA.cond(a)
LA.cond(a, 'fro')
LA.cond(a, np.inf)
LA.cond(a, -np.inf)
LA.cond(a, 1)
LA.cond(a, -1)
LA.cond(a, 2)
```

2. **Considere el polinomio de Wilkinson $w(x) = \prod_{r=1}^{20}(x-r) = x^{20} - 210x^{19} + \cdots + 20!$ y lleve a cabo el siguiente experimento numérico:**

```
w_roots=np.arange(1,21)
W=np.poly(w_roots)
perturb=np.zeros_like(W)
perturb[1]=1e-7
W_perturb = W + perturb
perturbed_roots=np.roots(W_perturb)
w_roots = np.sort(w_roots)
perturbed_roots = np.sort(perturbed_roots)
print((LA.norm(perturbed_roots-w_roots)/
    LA.norm(perturb))
```

Grafique las raíces de w y las raíces perturbadas. Finamente mejore el cálculo de los coeficientes del polinomio de Wilkinson usando multiplicación anidada.

3. **Cree un programa que realice el siguiente experimento: Perturbe $w(x)$ reemplazando el coeficiente a_i con $a_i * r_i$, donde r_i es una variable aleatoria de distribución normal centrada en 1 y varianza e^{-10}. Realice 100 experimentos y grafique las raíces perturbadas y exactas. Por ejemplo para crear una matriz 3 de media nula y desv. estandar 0.1 usamos:**

```
mu, sigma = 0, 0.1
s = np.random.normal(mu, sigma, (3,2))
```

4. **Explore la cancelación catastrófica $a - b$, cuando $a \approx b$**

```
print(np.sqrt(1e20+1)-np.sqrt(1e20))
print(1/(np.sqrt(1e20+1)+np.sqrt(1e20)))
```

5. **Analizar si los cálculos que involucran las siguientes funciones están bien condicionados:**

   a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \mapsto x/2$.

   b) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$.

   c) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} : (x_1, x_2) \mapsto x_1 - x_2$.

6. **Sean $x_1, \ldots, x_m$, puntos equiespaciados de $[-1, 1]$. Considere la matriz de Vandermonde**

$m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & |x & |x^2 & |x^3 & |\ldots & |x^{n-1} \end{bmatrix}$$

grafique $\|A\|_\infty$ en escala semilogaritmica, para $n = 1, 2, \ldots, 30$, $m = 2n - 1$

7. Considere A una matriz aleatoria $m \times m$ cuyas entradas son muestras de la distribución normal con media cero y desviación estándar $m^{-1/2}$.

   a) Grafique $\|A\|_2$ para $m = 8, 16, 32, 64,$, ¿se observa algún valor límite?.

   b) Repita el experimento para matrices de tipo triangular superior.

8. Calcule y grafique las sucesiones:

   a) $r_0 = 1$, $r_n = \frac{1}{3} r_{n-1}$

   b) $p_0 = 1, p_1 = \frac{1}{3}$, $p_n = \frac{4}{3} p_{n-1} - \frac{1}{3} p_{n-2}$

   c) $q_0 = 1, q_1 = \frac{1}{3}$, $q_n = \frac{10}{3} q_{n-1} - q_{n-2}$

9. Investigue la propagación de errores de los siguientes esquemas que aproximan $x_n = (1/3^n)_{n \geq 0}$:

   a) $r_0 = 0.99996$, $r_n = \frac{1}{3} r_{n-1}$

   b) $p_0 = 1, p_1 = 0.33332$, $p_n = \frac{4}{3} p_{n-1} - \frac{1}{3} p_{n-2}$

   c) $q_0 = 1, q_1 = 0.33332$, $q_n = \frac{10}{3} q_{n-1} - q_{n-2}$

10. Investigue la propagación de errores de los siguientes esquemas que aproximan $x_n = (1/2^n)_{n \geq 0}$:

   a) $r_0 = 0.994$, $r_n = \frac{1}{2} r_{n-1}$

   b) $p_0 = 1, p_1 = 0.497$, $p_n = \frac{3}{2} p_{n-1} - \frac{1}{2} p_{n-2}$

   c) $q_0 = 1, q_1 = 0.497$, $q_n = \frac{5}{2} q_{n-1} - q_{n-2}$

11. Las integrales exponenciales son las funciones E_n,

$$E_n(x) = \int_1^\infty (e^{xt} t^n)^{-1} dt \quad (n \geq 0, x > 0)$$

   y satisface la relación $nE_{n+1}(x) = e^{-x} - xE_n(x)$. Analice la estabilidad de este esquema.

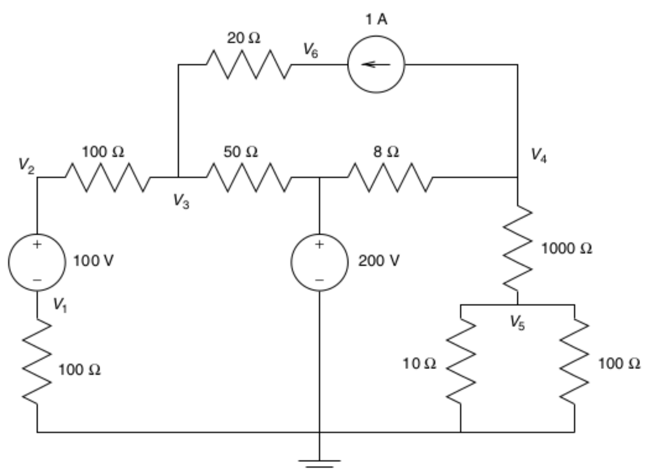
12. Programe el método de factorización LU y aplíquelo la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

13. Programe el método de eliminación gaussiana y aplíquelo para obtener la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1/2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1/2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

14. Considere el circuito DC mostrado en la figura, escriba las ecuaciones para los voltaje sen los nodos V_1, V_2, ..., V_6. Programe la eliminación gaussiana con factorización LU y sustitución para resolver el sistema, es decir si $A = LU$ entonces resolver $Ax = b$ es equivalente a resolver $Ly = b$, $Ux = y$



Uni, 26 de marzo de 2019