

Finalmente, nos interesan resultados asintóticos sobre los valores y vectores propios. El siguiente teorema, que se comunica sin demostración, representa un resultado típico.

**Teorema 5.9.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  diagonalizable,  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{x}_n]$  un sistema completo de vectores propios de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$  y  $\|\mathbf{x}_i\|_2 = 1$  para  $i = 1, \dots, n$ . Además definimos

$$\mathbf{X}^{-1} =: \mathbf{Y} =: \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^* \end{bmatrix},$$

o sea,  $\mathbf{y}_1^*, \dots, \mathbf{y}_n^*$  son los vectores propios de la izquierda de  $\mathbf{A}$ :  $\mathbf{y}_i^* \mathbf{A} = \mathbf{y}_i^* \lambda_i$  para  $i = 1, \dots, n$ . Sea  $\lambda_j$  un valor propio simple de  $\mathbf{A}$ . Entonces, para  $\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con  $\|\mathbf{F}\|_2$  suficientemente pequeña existe un valor propio  $\mu_j$  de  $\mathbf{A} + \mathbf{F}$  con un vector propio  $\mathbf{z}_j$ ,  $\|\mathbf{z}_j\|_2 = 1$ , tal que

$$\mu_j = \lambda_j + \frac{\mathbf{y}_j^* \mathbf{F} \mathbf{x}_j}{\|\mathbf{y}_j\|_2 \|\mathbf{x}_j\|_2} \cdot \frac{\|\mathbf{y}_j\|_2 \|\mathbf{x}_j\|_2}{\mathbf{y}_j^* \mathbf{x}_j} + \mathcal{O}(\|\mathbf{F}\|_2^2),$$

$$\mathbf{z}_j = \mathbf{x}_j + \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{\mathbf{y}_j^* \mathbf{F} \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{y}_j\|_2 \|\mathbf{x}_j\|_2} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \mathbf{x}_i \right) \frac{\|\mathbf{y}_j\|_2 \|\mathbf{x}_j\|_2}{\mathbf{y}_j^* \mathbf{x}_j} + \mathcal{O}(\|\mathbf{F}\|_2^2).$$

*Demostración.* Se usa el Teorema de Funciones Implícitas para el problema  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \lambda, \varepsilon) = 0$  con

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_j, \lambda_j, 0) = 0, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \lambda, \varepsilon) = \begin{pmatrix} (\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{F}_0) \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \varepsilon \mathbf{F}_0,$$

con  $\varepsilon$  en una vecindad apropiada de cero, y se representa la solución  $(\mathbf{x}, \lambda)$  como función de  $\varepsilon$ . ■

Obviamente, el factor de amplificación del error decisivo es  $\|\mathbf{y}_j\|_2 \|\mathbf{x}_j\|_2 / |\mathbf{y}_j^* \mathbf{x}_j|$  para un valor propio (este factor puede ser grande para matrices no normales), mientras que para un vector propio, también juega un rol importante la *separación* de los valores propios.

## 5.2. Transformación de similaridad unitaria de una matriz $n \times n$ a una forma de Hessenberg o tridiagonal

La solución del problema de valores propios para una matriz no esparsa siempre empieza con la transformación de la matriz a una forma “condensada”. Esa transformación genera nuevos errores de redondeo. Para que la matriz transformada aun sea usable, los valores propios no deben ser más falsificados que como si la matriz fuera modificada dentro de la exactitud aritmética. Por lo tanto, sólo es practicable la transformación a la forma de Hessenberg. La transformación parte de la matriz  $\mathbf{A}$ , luego determinamos matrices unitarias y hermitianas  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_{n-2}$  tales que  $\mathbf{U}_{n-2} \cdots \mathbf{U}_1 \mathbf{A} \mathbf{U}_1 \cdots \mathbf{U}_{n-2}$  es una matriz del tipo Hessenberg. Ahora, si la matriz  $\mathbf{A}$  es hermitiana, entonces

$$(\mathbf{U}_{n-2} \cdots \mathbf{U}_1 \mathbf{A} \mathbf{U}_1 \cdots \mathbf{U}_{n-2})^* = \mathbf{U}_{n-2} \cdots \mathbf{U}_1 \mathbf{A} \mathbf{U}_1 \cdots \mathbf{U}_{n-2},$$

o sea la matriz del tipo Hessenberg es hermitiana y por lo tanto, tridiagonal.

La transformacion procede en  $n-2$  pasos. Supongamos que después de  $j-1$  pasos, tenemos la matriz

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{U}_{j-1} \cdots \mathbf{U}_1 \mathbf{A} \mathbf{U}_1 \cdots \mathbf{U}_{j-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{(j)} & \alpha_{12}^{(j)} & \cdots & \alpha_{1,j-1}^{(j)} & \alpha_{1j}^{(j)} & \cdots & \alpha_{1n}^{(j)} \\ \alpha_{21}^{(j)} & \alpha_{22}^{(j)} & \cdots & \alpha_{2,j-1}^{(j)} & \alpha_{2j}^{(j)} & \cdots & \alpha_{2n}^{(j)} \\ 0 & \alpha_{32}^{(j)} & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \alpha_{j,j-1}^{(j)} & \alpha_{jj}^{(j)} & & \alpha_{jn}^{(j)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \alpha_{j+1,j}^{(j)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{nj}^{(j)} & & \alpha_{nn}^{(j)} \end{bmatrix}.$$

Si definimos  $\mathbf{A}_{j+1} := \mathbf{U}_j \mathbf{A}_j \mathbf{U}_j$ , tenemos (ver Teorema 3.6)

$$\mathbf{U}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{U}}_j \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{U}}_j = \mathbf{I} - \beta_k \hat{\mathbf{w}}_j \hat{\mathbf{w}}_j^*,$$

donde se determina  $\hat{\mathbf{U}}_j$  de tal forma que

$$\hat{\mathbf{U}}_j \begin{pmatrix} \alpha_{j+1,j}^{(j)} \\ \vdots \\ \alpha_{nj}^{(j)} \end{pmatrix} = -\exp(i\varphi_j) \sigma_j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El Teorema 3.6 entrega las fórmulas

$$\hat{\mathbf{w}}_j = \begin{pmatrix} \exp(i\varphi_j) (|\alpha_{j+1,j}^{(j)}| + \sigma_j) \\ \alpha_{j+2,j}^{(j)} \\ \vdots \\ \alpha_{nj}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad \sigma_j = \left( \sum_{k=j+1}^n |\alpha_{kj}^{(j)}|^2 \right)^{1/2},$$

$$\alpha_{j+1,j}^{(j)} = \exp(i\varphi_j) |\alpha_{j+1,j}^{(j)}|, \quad \beta_j = \frac{1}{\sigma_j (\sigma_j + |\alpha_{j+1,j}^{(j)}|)}.$$

Puesto que las primeras  $j$  columnas de  $\mathbf{U}_j$  son columnas unitarias, la multiplicación de  $\mathbf{U}_j \mathbf{A}_j$  desde la derecha con  $\mathbf{U}_j$  no cambia los ceros recién generados en la columna  $j$ . La multiplicación de  $\mathbf{A}_j$  desde la izquierda por  $\mathbf{U}_j$  no cambia las primeras  $j$  filas. Por lo tanto, hemos desarrollado completamente la transformación.

Para la ejecución práctica de la transformación, aprovechamos la estructura especial de  $\mathbf{U}_j$ . Sea

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{(j)} & \mathbf{A}_{12}^{(j)} \\ \mathbf{A}_{21}^{(j)} & \mathbf{A}_{22}^{(j)} \end{bmatrix}$$

En este caso, obtenemos

$$\mathbf{A}_{j+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{(j)} & \mathbf{A}_{12}^{(j)} \hat{\mathbf{U}}_j \\ \hat{\mathbf{U}}_j \mathbf{A}_{21}^{(j)} & \hat{\mathbf{U}}_j \mathbf{A}_{22}^{(j)} \hat{\mathbf{U}}_j \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}}_j \mathbf{A}_{21}^{(j)} &= \mathbf{A}_{21}^{(j)} - \beta_j \mathbf{w}_j \mathbf{w}_j^* \mathbf{A}_{21}^{(j)} \\ &= \mathbf{A}_{21}^{(j)} - \hat{\mathbf{u}}_j \hat{\mathbf{z}}_j^*, \\ \mathbf{A}_{12}^{(j)} \hat{\mathbf{U}}_j &= \mathbf{A}_{12}^{(j)} - \beta_j \mathbf{A}_{12}^{(j)} \mathbf{w}_j \mathbf{w}_j^* \\ &= \mathbf{A}_{12}^{(j)} - \hat{\mathbf{y}}_j \hat{\mathbf{u}}_j^*, \\ \hat{\mathbf{U}}_j \mathbf{A}_{22}^{(j)} \hat{\mathbf{U}}_j &= (\mathbf{I} - \beta_j \hat{\mathbf{w}}_j \hat{\mathbf{w}}_j^*) (\mathbf{A}_{22}^{(j)} - \beta_j \mathbf{A}_{22}^{(j)} \hat{\mathbf{w}} \hat{\mathbf{w}}^*) \\ &= \mathbf{A}_{22}^{(j)} - \hat{\mathbf{u}}_j (\hat{\mathbf{w}}_j^* \mathbf{A}_{22}^{(j)}) - (\mathbf{A}_{22}^{(j)} \hat{\mathbf{w}}_j) \hat{\mathbf{u}}_j^* + (\hat{\mathbf{w}}_j^* \mathbf{A}_{22}^{(j)} \hat{\mathbf{w}}_j) \hat{\mathbf{u}}_j \hat{\mathbf{u}}_j^* \\ &= \mathbf{A}_{22}^{(j)} - \hat{\mathbf{u}}_j \left( \hat{\mathbf{s}}_j^* - \frac{\gamma_j}{2} \hat{\mathbf{u}}_j^* \right) - \left( \hat{\mathbf{t}}_j - \frac{\gamma_j}{2} \hat{\mathbf{u}}_j \right) \hat{\mathbf{u}}_j^*, \end{aligned}$$

donde definimos

$$\hat{\mathbf{u}}_j := \beta_j \hat{\mathbf{w}}_j, \quad \hat{\mathbf{t}}_j := \mathbf{A}_{22}^{(j)} \hat{\mathbf{w}}_j, \quad \gamma_j := \hat{\mathbf{w}}_j^* \hat{\mathbf{t}}_j, \quad \hat{\mathbf{s}}_j^* := \hat{\mathbf{w}}_j^* \mathbf{A}_{22}^{(j)}, \quad \hat{\mathbf{z}}_j^* := \hat{\mathbf{w}}_j^* \mathbf{A}_{21}^{(j)}, \quad \hat{\mathbf{y}}_j := \mathbf{A}_{12}^{(j)} \hat{\mathbf{w}}_j.$$

Pero, según hipótesis,

$$\mathbf{A}_{21}^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_{j+1,j}^{(j)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{nj}^{(j)} \end{bmatrix},$$

de manera que no hay que calcular  $\hat{\mathbf{U}}_j \mathbf{A}_{21}^{(j)}$  explícitamente:

$$\hat{\mathbf{U}}_j \mathbf{A}_{21}^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\exp(i\varphi_j) \sigma_j \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Además, en el caso  $\mathbf{A}$  hermitiana tomamos en cuenta que

$$\mathbf{A}_{12}^{(j)} \hat{\mathbf{U}}_j = (\hat{\mathbf{U}}_j \mathbf{A}_{21}^{(j)})^*, \quad \hat{\mathbf{t}}_j = \hat{\mathbf{s}}_j,$$

entonces una computación explícita no es necesaria, y el esfuerzo computacional total se reduce a menos que la mitad. Para  $\mathbf{A}$  general, necesitamos  $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$  operaciones; para  $\mathbf{A}$  hermitiana, solo  $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$  operaciones esenciales.

### 5.3. Computación de los valores propios de una matriz tridiagonal hermitiana

Consideremos la matriz  $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  dada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & \\ \gamma_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad \gamma_i = \bar{\beta}_i, \quad i = 1, \dots, n-1; \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.10)$$

Se supone que  $\gamma_i \neq 0$  para  $i = 1, \dots, n-1$ , sino la matriz tridiagonal puede ser particionada en dos matrices tridiagonales de tamaño menor cuyos problemas de valores propios pueden ser estudiados separadamente.

**Teorema 5.10.** *Si  $\mathbf{T}$  es una matriz tridiagonal hermitiana de la forma indicada en (5.10) y  $\gamma_i \neq 0$  para  $i = 1, \dots, n-1$ , entonces  $\mathbf{T}$  sólo tiene valores propios reales simples.*

*Demostración.* Tarea. ■

Comentamos si  $\mathbf{T}$  es una matriz real *no* simétrica con  $\beta_i \gamma_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , entonces mediante una transformación de similitud con

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n), \quad \delta_1 := 1, \quad \delta_{i+1} := \delta_i \sqrt{\beta_i / \gamma_i},$$

$\mathbf{T}$  puede ser transformada a una matriz simétrica y tridiagonal  $\hat{\mathbf{T}} := \mathbf{D} \mathbf{T} \mathbf{D}^{-1}$ . Entonces tales matrices  $\mathbf{T}$  también poseen solo valores propios reales y simples.

Para la computación de valores propios de  $\mathbf{T}$ , necesitamos el Teorema de la Ley de Inercia de Sylvester.

**Definición 5.1.** *Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hermitiana. Entonces se define como inercia de  $\mathbf{A}$  al triple  $(m, z, p)$ , donde  $m$ ,  $z$  y  $p$  es el número de valores propios negativos, zero, y positivos, respectivamente.*

**Teorema 5.11** (Ley de Inercia de Sylvester). *Si  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es hermitiana y  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es regular, entonces  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X}$  tienen la misma inercia.*

*Demostración.* Supongamos que

$$\lambda_1(\mathbf{A}) \geq \lambda_2(\mathbf{A}) \geq \dots \geq \lambda_n(\mathbf{A})$$

son los valores propios de  $\mathbf{A}$ , contados con su multiplicidad, y que para algún  $r \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\lambda_r(\mathbf{A})$  es un valor propio de  $\mathbf{A}$  positivo. Definimos el subespacio  $S_0 \subseteq \mathbb{R}^n$  a través de

$$S_0 := \text{span}\{\mathbf{X}^{-1} \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{X}^{-1} \mathbf{q}_r\}, \quad \mathbf{q}_1 \neq 0, \dots, \mathbf{q}_r \neq 0,$$

donde  $\mathbf{A} \mathbf{q}_i = \lambda_i(\mathbf{A}) \mathbf{q}_i$  para  $i = 1, \dots, r$ . Utilizando la caracterización minimax de  $\lambda_r(\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X})$ , donde se supone que

$$\lambda_1(\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X}) \geq \dots \geq \lambda_n(\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X})$$

son los valores propios de  $\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X}$ , obtenemos

$$\lambda_r(\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X}) = \max_{\mathbf{v} \in V_{n-r}} \min \{ R(\mathbf{x}; \mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X}) \mid \mathbf{x} \neq 0, \forall \mathbf{v} \in V : \mathbf{x}^* \mathbf{v} = 0 \}. \quad (5.11)$$

Ahora, escogiendo

$$\tilde{V} := S_0^\perp := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \mathbf{v} \in S_0 : \mathbf{w}^* \mathbf{v} = 0\} \in \mathcal{V}_{n-r},$$

deducimos de (5.11) que

$$\begin{aligned} \lambda_r(\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X}) &\geq \min\{R(\mathbf{x}; \mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X}) \mid \mathbf{x} \neq 0, \forall \mathbf{v} \in \tilde{V} : \mathbf{x}^* \mathbf{v} = 0\} \\ &= \min\{R(\mathbf{x}; \mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X}) \mid \mathbf{x} \neq 0, \mathbf{x} \in S_0\} \\ &\geq \lambda_r(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Si  $\sigma_1(\mathbf{X}) \geq \dots \geq \sigma_n(\mathbf{X})$  son los valores singulares de  $\mathbf{X}$ , podemos demostrar que para cada  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$R(\mathbf{y}, \mathbf{X}^* \mathbf{X}) \geq \sigma_n(\mathbf{X})^2.$$

Entonces, concluimos que

$$\lambda_r(\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X}) \geq \min_{\mathbf{y} \in S_0} \left\{ \frac{\mathbf{y}^*(\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X}) \mathbf{y}}{\mathbf{y}^*(\mathbf{X}^* \mathbf{X}) \mathbf{y}} \right\} \geq \lambda_r(\mathbf{A}) \sigma_n(\mathbf{X})^2. \quad (5.12)$$

Un argumento análogo, con los roles de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X}$  intercambiados muestra que

$$\lambda_r(\mathbf{A}) \geq \lambda_r(\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X}) \sigma_n(\mathbf{X}^{-1})^2 = \frac{\lambda_r(\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X})}{\sigma_1(\mathbf{X})^2}. \quad (5.13)$$

Combinando (5.12) y (5.13), concluimos que  $\lambda_r(\mathbf{A})$  y  $\lambda_r(\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X})$  tienen el mismo signo, por lo tanto,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X}$  tienen el mismo número de valores propios positivos. Aplicando este resultado a  $-\mathbf{A}$ , concluimos que  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{X}^* \mathbf{A} \mathbf{X}$  tienen el mismo número de valores propios negativos, y obviamente, el mismo número de valores propios zero (debidamente contados con su multiplicidad). ■

El Teorema 5.11 implica que las matrices  $\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}$  y  $\mathbf{X}^*(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I})\mathbf{X}$  tienen los mismos números de valores propios positivos, cero, y negativos, es decir,  $\mathbf{A}$  tiene los mismos números de valores propios  $> \mu$ ,  $= \mu$ ,  $< \mu$  ( $\mu \in \mathbb{R}$ ). Queremos aplicar este resultado ahora a la matriz  $\mathbf{T}$  con

$$\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \text{donde } \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \xi_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

donde se debe cumplir que

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{T} - \mu \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{Q} = \text{diag}(q_1, \dots, q_n), \quad q_i \in \mathbb{R},$$

o sea

$$\mathbf{T} - \mu \mathbf{I} = (\mathbf{X}^*)^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \bar{\xi}_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \bar{\xi}_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \xi_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, los  $q_i$  son cuocientes de subdeterminantes principales sucesivos de  $\mathbf{T} - \mu \mathbf{I}$ . Obviamente,

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha_1 - \mu, \\ q_1 \xi_1 &= \beta_1 \quad (\implies q_1 \bar{\xi}_1 = \gamma_1 = \bar{\beta}_1), \\ q_2 + q_1 |\xi_1|^2 &= \alpha_2 - \mu, \\ q_2 \xi_2 &= \beta_2, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

En general, tenemos

$$\begin{aligned} q_k + q_{k-1} |\xi_{k-1}|^2 &= \alpha_k - \mu, \quad q_k \xi_k = \beta_k, \quad k = 1, \dots, n, \\ \xi_0 &:= 0, \quad q_0 := 1, \quad \beta_n := 0. \end{aligned}$$

Dado que  $\beta_k \neq 0$  para  $k = 1, \dots, n-1$ , el valor  $\xi_k$  existe para  $q_k \neq 0$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , es decir,  $\xi_k = \beta_k / q_k$  para  $k = 1, \dots, n-1$ . Si sucede que  $q_k = 0$ , remplazamos este valor por  $\varepsilon \ll 1$ , es decir remplazamos  $\alpha_k$  por  $\alpha_k + \varepsilon$ . Debido al Teorema 4.7, eso cambia los valores propios sólo en  $\varepsilon$ . Entonces, siempre se calcula

$$q_k = \alpha_k - \mu - \frac{(\beta_{k-1})^2}{q_{k-1}}, \quad k = 1, \dots, n, \quad q_0 := 1, \quad \beta_0 := 0. \quad (5.14)$$

Según el Teorema 5.11, sabemos que

$$\#\{k \mid q_k < 0, 1 \leq k \leq n\} = \#\{\lambda \mid \lambda \text{ es valor propio de } \mathbf{T}, \lambda < \mu\}.$$

Este resultado lo podemos aprovechar directamente para crear un *método de bisección* para calcular valores propios arbitrarios  $\lambda_j$  de  $\mathbf{T}$ . Partiendo de la enumeración  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  y, por ejemplo, de la inclusión trivial

$$[a_0, b_0] := [-\|\mathbf{T}\|_\infty, \|\mathbf{T}\|_\infty], \quad (5.15)$$

la cual incluye todos los valores propios de  $\mathbf{T}$ , ponemos para  $s \in \mathbb{N}_0$ :

$$\mu_s := \frac{a_s + b_s}{2}, \quad (5.16)$$

$$m := \#\{q_k \mid q_k < 0, \text{ calculados de (5.14) con } \mu = \mu_s\}, \quad (5.17)$$

$$a_{s+1} := \begin{cases} a_s & \text{si } m \geq j, \\ \mu_s & \text{sino,} \end{cases} \quad b_{s+1} := \begin{cases} \mu_s & \text{si } m \geq j, \\ b_s & \text{sino.} \end{cases} \quad (5.18)$$

Para este método sabemos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mu_s = \lambda_j. \quad (5.19)$$

Este método es muy robusto y extremadamente eficiente.

**Ejemplo 5.5.** Queremos determinar el valor propio  $\lambda_2$  de

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix},$$

$s$	$\mu$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$m$	
0	1,5	-0,500000	3,500000	2,357143	1,681818	1	$\Rightarrow \lambda_2 > 1,5$
1	1,75	-0,750000	2,583333	1,701613	-0,039100	2	$\Rightarrow \lambda_2 < 1,75$
2	1,625	-0,625000	2,975000	2,030462	0,942511	1	$\Rightarrow \lambda_2 > 1,625$
3	1,6875	-0,687500	2,767045	1,866915	0,491712	1	$\Rightarrow \lambda_2 > 1,6875$
4	1,71875	-0,718750	2,672554	1,784555	0,237975	1	$\Rightarrow \lambda_2 > 1,71875$
5	1,734375	-0,734375	2,627327	1,743165	0,102603	1	$\Rightarrow \lambda_2 > 1,734375$
6	1,7421875	-0,742187	2,605181	1,722410	0,032577	1	$\Rightarrow \lambda_2 > 1,7421875$
7	1,74609375	-0,746094	2,594220	1,712017	-0,003050	2	$\Rightarrow \lambda_2 < 1,74609375$
8	1,744140625	-0,744141	2,599691	1,717215	0,014816	1	$\Rightarrow \lambda_2 > 1,744140625$

CUADRO 5.1. Ejemplo 5.5 (método de bisección).

empezando con  $[a_0, b_0] := [1, 2]$ . El método de bisección entrega la información del Cuadro 5.1.

**Ejemplo 5.6** (Tarea 30, Curso 2006). Se considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 8 \\ -6 & 17 & 2 \\ 8 & 2 & 20 \end{bmatrix}.$$

- Transformar  $\mathbf{A}$  a forma tridiagonal y aplicar el método de bisección para demostrar que  $\mathbf{A}$  es definida positiva.
- Usando el método de bisección, determinar el valor propio más pequeño hasta un error del valor absoluto  $\leq 0,5$ .

Solución sugerida.

- La transformación de la matriz a forma tridiagonal necesita un paso, es decir  $\mathbf{T} = \mathbf{A}_2 = \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_1$  con  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$ . Sabemos que

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \hat{\mathbf{P}}_1 & \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{I} - \beta_1 \hat{\mathbf{w}}_1 \hat{\mathbf{w}}_1^*.$$

Aquí

$$\sigma_1 = \sqrt{36 + 64} = 10, \quad \beta_1 = \frac{1}{10(10+6)} = \frac{1}{160}, \quad \hat{\mathbf{w}}_1 = \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6 & 0,8 \\ 0 & 0,8 & 0,6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 17 & 2 \\ 0 & 2 & 20 \end{bmatrix}.$$

Aplicando el Teorema de Gershgorin, vemos que  $\mathbf{T}$  solo tiene valores propios no negativos; dado que  $\mathbf{T}$  es regular, 0 no es valor propio; entonces los valores propios de  $\mathbf{T}$  (y los de  $\mathbf{A}$ ) son positivos.

- El valor propio más pequeño es  $\lambda_1$ , entonces  $j = 1$ . El valor propio está contenido en el intervalo  $[a_0 := 0, b_0 := 32]$ . Obtenemos la siguiente tabla.

$k$	$a_k$	$b_k$	$\mu_k$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$m$
0	0	32	16	-6	16,6	3,76	1
1	0	16	8	2	-41	12,097	1
2	0	8	4	6	-3,6	17,09	1
3	0	4	2	8	2,5	16,4	0
4	2	4	3	7	-2/7	31	1
5	2	3	2,5	7,5	1,16	13,5	0

Entonces sabemos que  $\lambda_1 \in [2,5,3]$ .

**Ejemplo 5.7** (Certamen 2, Curso 2010). Se considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 16 \end{bmatrix}.$$

- Demostrar sin calcular el polinomio característico que  $\mathbf{A}$  tiene tres valores propios reales distintos.
- Transformar  $\mathbf{A}$  unitariamente a forma tridiagonal simétrica.
- Determinar números  $\alpha_i, \beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , tales que  $\alpha_i \leq \lambda_i \leq \beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , donde  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  son los valores propios de  $\mathbf{A}$ , y  $|\beta_i - \alpha_i| \leq 0,25$ , mediante el método de bisección.

Solución sugerida.

- Puesto que  $\mathbf{A}$  es simétrica, sus valores propios son reales. Los círculos de Gershgorin son

$$\mathcal{K}_1 = [-17, -3], \quad \mathcal{K}_2 = [-2, 6], \quad \mathcal{K}_3 = [11, 21].$$

Dado que  $\mathcal{K}_i \cap \mathcal{K}_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ , cada uno de los círculos contiene exactamente un valor propio, es decir  $\lambda_i \in \mathcal{K}_i$  para  $i = 1, 2, 3$ .

- Siguiendo el procedimiento canónico, determinamos

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{U}}_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

tal que  $\hat{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{I} - \beta_1 \hat{\mathbf{w}} \hat{\mathbf{w}}^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ; con

$$\sigma_1 = \sqrt{s^2 + (-4)^2} = 5$$

se tiene aquí

$$\hat{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 3 + \sigma_1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \frac{1}{5 \cdot (5+3)} = \frac{1}{40}; \quad \hat{\mathbf{U}}_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

y la matriz tridiagonal deseada

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6 & 0,8 \\ 0 & 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6 & 0,8 \\ 0 & 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -5 & 0 \\ -5 & 10 & 7 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

c) El método de bisección, aplicado a la matriz  $\mathbf{T}$ , requiere de la computación sucesiva de las cantidades

$$\begin{aligned} q_0 &= 1, \quad \beta_0 = 0; \\ q_1 &= \alpha_1 - \mu - \frac{\beta_0^2}{q_0} = -10 - \mu, \\ q_2 &= \alpha_2 - \mu - \frac{\beta_1^2}{q_1} = 10 - \mu - \frac{25}{q_1}, \\ q_3 &= \alpha_3 - \mu - \frac{\beta_2^2}{q_2} = 8 - \mu - \frac{49}{q_2}, \end{aligned}$$

donde el valor  $\mu$  se ajusta según lo especificado en (5.16)–(5.18). Se recomienda empezar la iteración con un intervalo cuya longitud sea una potencia de 2. Así obtenemos los resultados

$s$	$a$	$b$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$m$
0	-19.0000	-3.0000	1.0000	-4.0000	31.2500	1
1	-19.0000	-11.0000	5.0000	20.0000	20.5500	0
2	-15.0000	-11.0000	3.0000	14.6667	17.6591	0
3	-13.0000	-11.0000	2.0000	9.5000	14.8421	0
4	-12.0000	-11.0000	1.5000	4.8333	9.3621	0
5	-11.5000	-11.0000	1.2500	1.2500	-19.9500	1
6	-11.5000	-11.2500				

para  $j = 1$ , por lo tanto,  $\lambda_1 \in [-11.5, -11.25]$ ,

$s$	$a$	$b$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$m$
0	-2.0000	6.0000	-12.0000	10.0833	1.1405	1
1	2.0000	6.0000	-14.0000	7.7857	-2.2936	2
2	2.0000	4.0000	-13.0000	8.9231	-0.4914	2
3	2.0000	3.0000	-12.5000	9.5000	0.3421	1
4	2.5000	3.0000	-12.7500	9.2108	-0.0699	2
5	2.5000	2.7500				

para  $j = 2$ , por lo tanto,  $\lambda_2 \in [2.5, 2.75]$ , y

$s$	$a$	$b$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$m$
0	8.0000	24.0000	-26.0000	-5.0385	1.7252	2
1	16.0000	24.0000	-30.0000	-9.1667	-6.6545	3
2	16.0000	20.0000	-28.0000	-7.1071	-3.1055	3
3	16.0000	18.0000	-27.0000	-6.0741	-0.9329	3
4	16.0000	17.0000	-26.5000	-5.5566	0.3183	2
5	16.5000	17.0000	-26.7500	-5.8154	-0.3241	3
6	16.5000	16.7500				

para  $j = 3$ , por lo tanto,  $\lambda_3 \in [16.5, 16.75]$ . (Los valores exactos son  $\lambda_1 = -11.3301$ ,  $\lambda_2 = 2.7080$  y  $\lambda_3 = 16.6221$ .)