6. Método de Cuasi- Newton

6.1 Introducción

Un punto débil importante del método de *Newton* para resolver sistemas de ecuaciones no lineales está en el hecho de que, en cada iteración, es necesario calcular una matriz jacobiana y resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas con dicha matriz. Para ejemplificar la importancia de esta debilidad, se consideran la cantidad de cálculos necesarios para llevar a cabo una sola iteración del método de *Newton*. La matriz jacobiana asociada a un sistema de n ecuaciones no lineales escritas de la forma $F(x) = 0$, requiere que se determinen y evaluen las n^2 derivadas parciales de las componentes de F. En la mayoría de las situaciones la evaluación exacta de las derivadas parciales resulta complicada y, en muchas aplicaciones, imposible.

Cuando no es práctico efectuar la evaluación exacta, se pueden usar las aproximaciones de diferencia finita a las derivadas parciales. Por ejemplo,

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x^{(i)}) \approx \frac{f_j(x^{(i)} + e_k h - f_j(x^{(i)}))}{h}, \tag{19}$$

donde h es un número pequeño en valor absoluto y e_k es el vector cuya única coordenada no nula es la k – ésima que vale 1. Sin embargo, esta aproximación requiere efectuar al menos n^2 evaluaciones de funciones escalares para aproximar la matriz jacobiana y no disminuye el número de operaciones que hay que realizar, casi siempre es necesario $O(n^3)$ para resolver el sistema lineal que contiene esta matriz jacobiana aproximada. El esfuerzo computacional total para realizar solamente una iteración del método de *Newton* conlleva, en consecuencia,

al menos $n^2 + n$ evaluaciones de funciones escalares (n^2 para evaluar la matriz jacobiana y n para evaluar la función F), junto con un número de operaciones aritméticas de orden $O(n^3)$ para resolver el sistema lineal. Esta cantidad de cálculos es muy grande, excepto en el caso de los valores relativamente pequeños de n y de funciones escalares que se pueden evaluar fácilmente.

El método de ***cuasi-Newton* o de *Broyden*** es una generalización del método de la *secante* para los sistemas de ecuaciones no lineales. El método requiere únicamente n evaluaciones de funciones escalares por iteración y también disminuye el número de operaciones aritméticas a $O(n^2)$. Este método pertenece a una clase de técnicas denominadas *actualizaciones de secante con cambio mínimo,* en los que se sustituye la matriz jacobiana del método de *Newton* por una matriz de aproximaciones que se actualiza en cada iteración. La desventaja de este método es que se pierde la convergencia cuadrática del método de *Newton*, que se reemplaza por una convergencia denominada superlineal, la cual implica que

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\|x^{(i+1)} - p\|}{\|x^{(i)} - p\|} = 0. \tag{20}$$

donde p denota la solución de F(x) = 0 y $p^{(i)}$+ $p^{(i+1)}$ son aproximaciones consecutivas de p.

En la mayoria de las aplicaciones, el descenso en el número de cálculos es una compensación más que aceptable por la reducción a convergencia superlineal.

Una desventaja añadida de los métodos *actualización de secante con cambio mínimo* es que, a diferencia del método de Newton, no se corriguen a si mismos. En el método de Newton, por ejemplo, generalmente los errores de redondeo se van corrigiendo en las sucesivas iteraciones, lo que no ocurre con este método salvo que se incorporen medidas especiales de correción.

Suponiendo que se se dispone de una aproximación inicial $p^{(0)}$ a la solución **p** de **F(x) = 0.** La siguiente aproximación $p^{(1)}$ se calcula como en el método de *Newton* o, si es difícil de determinar exactamente J($p^{(0)}$), se utilizarán las ecuaciones de diferencias dadas por (19) para aproximar las derivadas parciales. Sin embargo, para calcular $p^{(2)}$ se procede de manera diferente al método de *Newton* examinando el método de la *Secante* para una sola ecuación. En el método de la *Secante* se utiliza la aproximación

$$f'(p_1) \approx \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0} \tag{21}$$

como sustituto de la $f'(p_1)$ del método de *Newton*.

En el caso de los sistemas no lineales, $p^{(1)} - p^{(0)}$ es un vector, así que el cociente correspondiente no está definido. Aún así, el método procede de manera semejante al método de *Newton*, en el sentido de que, en vez de la matriz jacobiana $J(p^{(1)})$ del método de *Newton* se emplea una matriz A_1 tal que

$$A_1(p^{(1)} - p^{(0)}) = F(p^{(1)}) - F(p^{(0)}). \tag{22}$$

Todo vector distinto de cero de $\mathbb{R}^n$ puede escribirse como la suma de un múltiplo de $p^{(1)} - p^{(0)}$ y de un múltiplo de un vector del subespacio ortogonal de $p^{(1)} - p^{(0)}$. Por tanto, para definir la matriz A_1 de forma única, se debe especificar cómo actúa esta matriz sobre el subespacio ortogonal de $p^{(1)} - p^{(0)}$. Dado que no se tiene información sobre la variación de $\boldsymbol{F}$ en las direcciones ortogonales a $p^{(1)} - p^{(0)}$, se requiere, simplemente, que no haya variación, o sea, que

$$A_1 z = J(p^{(0)}) z \qquad \text{siempre que} \quad (p^{(1)} - p^{(0)})^t z = 0. \tag{23}$$

Resolución Numérica de Sistemas de Ecuaciones no Lineales

Esta condición especifica que ningún vector ortogonal a $p^{(1)} - p^{(0)}$ se ve afectado por la sustitución de $J(p^{(0)})$, la matriz que se utilizó para calcular $p^{(1)}$, por la matriz A_1 con la que se va a determinar $p^{(2)}$.

Estas condiciones (22 y 23) definen de manera única a A_1 como

$$A_1 = J(p^{(0)}) + \frac{[F(p^{(1)}) - F(p^{(0)}) - J(p^{(0)})(p^{(1)} - p^{(0)})]\,(p^{(1)} - p^{(0)})^t}{\|p^{(1)} - p^{(0)}\|_2^2}. \tag{24}$$

Esta matriz es la que se usa en lugar de $J(p^{(1)})$ para determinar $p^{(2)}$ como:

$$p^{(2)} = p^{(1)} - A_1^{-1} F(p^{(1)}). \tag{25}$$

Una vez que se ha determinado $p^{(2)}$, se repite el procedimiento para determinar $p^{(3)}$, utilizando A_1 en lugar de $A_0 \equiv J(p^{(0)})$ y con $p^{(2)}$ y $p^{(1)}$ en lugar de $p^{(1)}$ y $p^{(0)}$, respectivamente. En general, una vez que se ha determinado $p^{(i)}$, la siguiente aproximación $p^{(i+1)}$ se calcula mediante

$$A_i = A_{i-1} + \frac{y_i - A_{i-1}\, s_i}{\|s_i\|_2^2}\, s_i^{\,t} \tag{26}$$

y

$$p^{(i+1)} = p^{(i)} - A_i^{-1} F(p^{(i)}), \tag{27}$$

donde la notación $s_i = p^{(i)} - p^{(i-1)}$ e $y_i = F(p^{(i)}) - F(p^{(i-1)})$ se introduce en las ecuaciones anteriores para simplificarlas.

Si el método se aplica como se ha descrito anteriormente, el número de evaluaciones de funciones escalares disminuye de $n^2 + n$ a n (las necesarias para calcular $F(p^{(i)})$), pero sigue requiriendo del orden de O(n^3) para resolver el sistema lineal asociado de n ecuaciones con n incógnitas

$$A_i\, y_i = -F\,(p^{(i)}). \tag{28}$$

Esta manera de usar el método no compensaría la reducción a convergencia superlineal de la convergencia cuadrática del método de *Newton*. La mejora significativa se consigue usando la siguien fórmula de invesión matricial.

▼ **Fórmula de Sherman - Morrison.**

Si A es una matriz invertible y si **x** e **y** son vectores tales que $y^t = A^{-1}\,x \neq -1$, entonces $A + x\,y^t$ es invertible y

$$(A + x\,y^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\,x\,y^t\,A^{-1}}{1+y^t\,A^{-1}\,x}.$$

Esta fórmula permite calcular A_i^{-1} directamente a partir de A_i^{-1}, con lo que se prescinde de realizar la inversión matricial en cada iteración. Al utilizar $A = A_{i-1}{}^{-1}$, $x = \frac{y_i - A_{i-1}\,s_i}{\|s_i\|_2^2}$, e $y = s_i$ la ecuación (26) junto con la ecuación de la *Fórmula de Sherman - Morrison* implican que

$$\begin{aligned} A_i^{-1} &= \left(A_{i-1} + \frac{y_i - A_{i-1}\,s_i}{\|s_i\|_2^2}\,s_i{}^t\right)^{-1} \\ &= A_{i-1}^{-1} - \frac{A_{i-1}^{-1}\left(\frac{y_i - A_{i-1}\,s_i}{\|s_i\|_2^2}\,s_i{}^t\right)A_{i-1}^{-1}}{1 + s_i^t\,A_{i-1}^{-1}\left(\frac{y_i - A_{i-1}\,s_i}{\|s_i\|_2^2}\right)} \\ &= A_{i-1}^{-1} - \frac{(A_{i-1}^{-1}\,y_i - s_i)\,s_i{}^t\,A_{i-1}^{-1}}{\|s_i\|_2^2 + s_i^t\,A_{i-1}^{-1}\,y_i - \|s_i\|_2^2} \\ &= A_{i-1}^{-1} - \frac{(s_i - A_{i-1}^{-1}\,y_i)\,s_i{}^t\,A_{i-1}^{-1}}{s_i^t\,A_{i-1}^{-1}\,y_i} \end{aligned} \tag{29}$$

En este cálculo intervienen exclusivamente la multiplicación de matrices y vectores en cada paso; por tanto, sólo se requieren $O(n^2)$ cálculos aritméticos. El cálculo de A_i se omite, y se prescinde de la resolución del sistema lineal (28).

6.2 Pseudocódigo

● **Algoritmo 5. Método de Cuasi - Newton para sistemas no lineales**

El pseudocódigo del algoritmo que resuelve un sistema de ecuaciones no lineales de n ecuaciones con n incognitas mediante el método de *Cuasi - Newton* es:

Algoritmo Cuasi - Newton

Input $\left(\{f(x_1, \ldots, x_n)\}_1{}^n,\ (x_1^{(0)}\ \ x_2^{(0)}\ \ \ldots\ \ x_n^{(0)})^T,\ n,\ error\right)$

(* Se inicializan las variables *)

$p \leftarrow (x_1^{(0)}\ \ x_2^{(0)}\ \ \ldots\ \ x_m^{(0)})^T$
$F \leftarrow \{f(x_1, \ldots, x_n)\}_1{}^n$

$$f\_valor \leftarrow \begin{pmatrix} f_1\,(p_1^{(0)},\ p_2^{(0)},\ \ldots,\ p_n^{(0)}) \\ f_2\,(p_1^{(0)},\ p_2^{(0)},\ \ldots,\ p_n^{(0)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n\,(p_1^{(0)},\ p_2^{(0)},\ \ldots,\ p_n^{(0)}) \end{pmatrix}$$

$$J\,(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \ldots\ \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \quad (x \equiv (x_1, \ldots, x_n))$$

$A \leftarrow J\,(x)^{-1}$
$s \leftarrow A\,.\,f\_valor$
$p\_sig \leftarrow p - s$
$p \leftarrow p\_sig$

$error \leftarrow \|\ p\_sig - p\ \|_\infty$

For $k = 2, \ldots, n$ **do**
(* Se evalúa la función F *)

$w \leftarrow f\_valor$

$$f\_valor \leftarrow \begin{pmatrix} f_1\,(p_1^{(k-1)},\ p_2^{(k-1)},\ \ldots,\ p_n^{(k-1)}) \\ f_2\,(p_1^{(k-1)},\ p_2^{(k-1)},\ \ldots,\ p_n^{(k-1)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n\,(p_1^{(k-1)},\ p_2^{(k-1)},\ \ldots,\ p_n^{(k-1)}) \end{pmatrix}$$

$y \leftarrow f\_valor - w$
$s \leftarrow -A\,.\,w$

$A\_sig \leftarrow A + \left(\frac{1}{s^t A y} * ((s - A y)(s^t A))\right)$

(* Cálculo del siguiente punto *)
$p\_sig \leftarrow p - A\_sig . f\_valor$

$A \leftarrow A\_sig$

(* Cálculo de la norma de la distancia entre los dos puntos*)
$error \leftarrow \| p\_sig - p \|_\infty$

If (error $\leq$ error_ini) **do**
Break
End

$p \leftarrow p\_sig$
End

Return $(x^{(k)} \equiv (p)^T)$
Output

6.3 Problemas

■ **Problema 21.** Sea el sistema no lineal de ecuaciones siguiente:

$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3\,x_1 - \cos(x_2\, x_3) - 1/2 = 0,$

$f_2(x_1, x_{2,} x_3) = x_1^2 - 81\,(x_2 + 0.1)^2 + \operatorname{sen} x_3 + 1.06 = 0,$

$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20\,x_3 + (10\,\pi - 3)/3 = 0.$

Mediante el método de *Cuasi Newton* calcúlese la aproximación de la solución, comenzando en el punto inicial

$P_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)^T = (0.1,\ 0.1, -0.1)^T$

e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-5}$.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = {3 x1 - Cos[x2 * x3] - 1 / 2,
           x1^2 - 81 (x2 + 0.1)^2 + Sin[x3] + 1.06,
           Exp[-x1 * x2] + 20 x3 + (10 Pi - 3) / 3
  };
p = {0.1, 0.1, -0.1};
m = 12;
d = 10.^-5;
cuasinewtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```


Método de *Cuasi-Newton* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\cos(x_2\, x_3) + 3\, x_1 - \frac{1}{2} \\ x_1^2 - 81\,(x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 \\ 20\, x_3 + e^{-x_1 x_2} + \frac{1}{3}(-3 + 10\,\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3 & \sin(x_2\, x_3)\, x_3 & \sin(x_2\, x_3)\, x_2 \\ 2\, x_1 & -162\,(x_2 + 0.1) & \cos(x_3) \\ -e^{-x_1 x_2}\, x_2 & -e^{-x_1 x_2}\, x_1 & 20 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} -1.1999500 \\ -2.2698334 \\ 8.4620253 \end{pmatrix}$$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0.333333 & 0.0000102385 & 0.000016157 \\ 0.00210861 & -0.0308688 & 0.00153584 \\ 0.00166052 & -0.000152758 & 0.0500077 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_1. $\quad P_1 = P_0 - A_0^{-1} * F(P_0)$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.10000000 \\ 0.10000000 \\ -0.10000000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.39986967 \\ 0.080533151 \\ 0.42152047 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.49986967 \\ 0.019466849 \\ -0.52152047 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} -0.00033944646 \\ -0.34438793 \\ 0.031882378 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = F(P_1) - F(P_0) = \begin{pmatrix} 1.1996106 \\ 1.9254455 \\ -8.4301430 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 0.39986967 \\ -0.080533151 \\ -0.42152047 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.33337810 & 0.000011104966 & 8.9673439\times 10^{-6} \\ -0.0020207098 & -0.030948482 & 0.0021968158 \\ 0.0010238994 & -0.00016503843 & 0.050109587 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_2. $P_2 = P_1 - A_1 * F(P_1)$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.49986967 \\ 0.019466849 \\ -0.52152047 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.00011670253 \\ 0.010729009 \\ 0.0016541025 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.49998638 \\ 0.0087378393 \\ -0.52317457 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} -0.000030424728 \\ -0.14738354 \\ 0.0041247527 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = F(P_2) - F(P_1) = \begin{pmatrix} 0.00030902173 \\ 0.19700438 \\ -0.027757625 \end{pmatrix}$$

$$s_2 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 0.00011670253 \\ -0.010729009 \\ -0.0016541025 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.33338820 & 0.000068121639 & -9.2972649\times 10^{-6} \\ -0.0059534545 & -0.053140268 & 0.0093056886 \\ 0.00082514415 & -0.0012865794 & 0.050468859 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_3. $P_3 = P_2 - A_2 * F(P_2)$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.49998638 \\ 0.0087378393 \\ -0.52317457 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.000020221603 \\ 0.0078705657 \\ 0.00039776709 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.50000660 \\ 0.00086727356 \\ -0.52357234 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$.

$$F(P_3) = \begin{pmatrix} 0.000019894274 \\ -0.014081267 \\ 0.000095133748 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = F(P_3) - F(P_2) = \begin{pmatrix} 0.000050319003 \\ 0.13330228 \\ -0.0040296189 \end{pmatrix}$$

$$s_3 = P_3 - P_2 = \begin{pmatrix} 0.000020221603 \\ -0.0078705657 \\ -0.00039776709 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0.33338283 & 0.000025855527 & 1.2133979\times 10^{-7} \\ -0.0066634584 & -0.058721580 & 0.010549431 \\ 0.00080340526 & -0.0014574679 & 0.050506940 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_4. $P_4 = P_3 - A_3 * F(P_3)$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.50000660 \\ 0.00086727356 \\ -0.52357234 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6.2683424\times 10^{-6} \\ 0.00082774528 \\ 0.000025343892 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.50000033 \\ 0.000039528275 \\ -0.52359769 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$.

$$F(P_4) = \begin{pmatrix} 9.8636682\times 10^{-7} \\ -0.00063921175 \\ 2.0404339\times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$y_4 = F(P_4) - F(P_3) = \begin{pmatrix} -0.000018907908 \\ 0.013442055 \\ -0.000093093314 \end{pmatrix}$$

$$s_4 = P_4 - P_3 = \begin{pmatrix} -6.2683424\times 10^{-6} \\ -0.00082774528 \\ -0.000025343892 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0.33338120 & 2.6524561\times 10^{-6} & 4.8972458\times 10^{-6} \\ -0.0068587733 & -0.061511385 & 0.011123659 \\ 0.00079801933 & -0.0015343986 & 0.050522775 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_5. $\quad P_5 = P_4 - A_4 * F(P_4)$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.50000033 \\ 0.000039528275 \\ -0.52359769 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3.2715067\times 10^{-7} \\ 0.000039334731 \\ 1.0846811\times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 1.9354398\times 10^{-7} \\ -0.52359877 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 5$.

$$F(P_5) = \begin{pmatrix} 4.7006390\times 10^{-9} \\ -3.1290522\times 10^{-6} \\ 1.3994331\times 10^{-8} \end{pmatrix}$$

$$y_5 = F(P_5) - F(P_4) = \begin{pmatrix} -9.8166618\times 10^{-7} \\ 0.00063608269 \\ -2.0264396\times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$s_5 = P_5 - P_4 = \begin{pmatrix} -3.2715067\times 10^{-7} \\ -0.000039334731 \\ -1.0846811\times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0.33338104 & 2.0305293\times 10^{-7} & 5.3953303\times 10^{-6} \\ -0.0068787533 & -0.061814004 & 0.011185196 \\ 0.00079744751 & -0.0015430594 & 0.050524536 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_6. $\quad P_6 = P_5 - A_5 * F(P_5)$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 1.9354398\times 10^{-7} \\ -0.52359877 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.5665441\times 10^{-9} \\ 1.9354344\times 10^{-7} \\ 5.5391192\times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 5.3466189\times 10^{-13} \\ -0.52359878 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$F(P_i)$	$\|P_i - P_{i-1}\|_\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0.10000000 \\ 0.10000000 \\ -0.10000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.1999500 \\ -2.2698334 \\ 8.4620253 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 0.49986967 \\ 0.019466849 \\ -0.52152047 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.000339446 \\ -0.344388 \\ 0.0318824 \end{pmatrix}$	0.42152
2	$\begin{pmatrix} 0.49998638 \\ 0.0087378393 \\ -0.52317457 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00033944646 \\ -0.34438793 \\ 0.031882378 \end{pmatrix}$	0.010729
3	$\begin{pmatrix} 0.50000660 \\ 0.00086727356 \\ -0.52357234 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.000030424728 \\ -0.14738354 \\ 0.0041247527 \end{pmatrix}$	0.00787057
4	$\begin{pmatrix} 0.50000033 \\ 0.000039528275 \\ -0.52359769 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000019894274 \\ -0.014081267 \\ 0.000095133748 \end{pmatrix}$	0.000827745
5	$\begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 1.9354398\times 10^{-7} \\ -0.52359877 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.8636682\times 10^{-7} \\ -0.00063921175 \\ 2.0404339\times 10^{-6} \end{pmatrix}$	0.0000393347
6	$\begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 5.3466189\times 10^{-13} \\ -0.52359878 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4.7006390\times 10^{-9} \\ -3.1290522\times 10^{-6} \\ 1.3994331\times 10^{-8} \end{pmatrix}$	1.93543×10^{-7}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 5.3466189\times 10^{-13} \\ -0.52359878 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 22.** Sea el sistema de ecuaciones no lineales siguiente.

$$f_1(x_1, x_2) = 4\,x_1^2 - 20\,x_1 + 1/4\,x_2^2 + 8 = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2) = 1/2\,x_1\,x_2^2 + 2\,x_1 - 5\,x_2 + 8 = 0.$$

Aplíquese el método de *Cuasi Newton* iniciando el método en el punto inicial $P_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)^T = (0, 0)^T$ e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \le 10^{-5}$.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = {4 x1^2 - 20 x1 + 1 / 4 x2^2 + 8, 1 / 2 x1 x2^2 + 2 x1 - 5 x2 + 8};
p = {0., 0.};
m = 12;
d = 10.^-5;
cuasinewtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Cuasi–Newton* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^2 - 20x_1 + \frac{x_2^2}{4} + 8 \\ \frac{1}{2}x_1 x_2^2 - 5x_2 + 2x_1 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8x_1 - 20 & \frac{x_2}{2} \\ \frac{x_2^2}{2} + 2 & x_1 x_2 - 5 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} 8.0000000 \\ 8.0000000 \end{pmatrix}$$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} -0.05 & 0. \\ -0.02 & -0.2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_1. $\quad P_1 = P_0 - A_0^{-1} * F(P_0)$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.40000000 \\ -1.7600000 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.40000000 \\ 1.7600000 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} 1.4144000 \\ 0.61952000 \end{pmatrix}$$

( )

Resolución Numérica de Sistemas de Ecuaciones no Lineales

$$y_1 = F(P_1) - F(P_0) = \begin{pmatrix} -6.5856000 \\ -7.3804800 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 0.40000000 \\ 1.7600000 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.051318185 & -0.0084058166 \\ -0.022836782 & -0.21808962 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_2. $\quad P_2 = P_1 - A_1 * F(P_1)$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.40000000 \\ 1.7600000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.077792012 \\ -0.16741123 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.47779201 \\ 1.9274112 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} 0.28602909 \\ 0.20600602 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = F(P_2) - F(P_1) = \begin{pmatrix} -1.1283709 \\ -0.41351398 \end{pmatrix}$$

$$s_2 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 0.077792012 \\ 0.16741123 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.056620702 & -0.033621257 \\ -0.039464683 & -0.29716148 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_3. $\quad P_3 = P_2 - A_2 * F(P_2)$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.47779201 \\ 1.9274112 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.023121349 \\ -0.072505101 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.50091336 \\ 1.9999163 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$.

$$F(P_3) = \begin{pmatrix} -0.014694116 \\ 0.0039879863 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = F(P_3) - F(P_2) = \begin{pmatrix} -0.30072321 \\ -0.20201803 \end{pmatrix}$$

$$s_3 = P_3 - P_2 = \begin{pmatrix} 0.023121349 \\ 0.072505101 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0.056115716 & -0.030918285 \\ -0.039902570 & -0.29950530 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_4. $P_4 = P_3 - A_3 * F(P_3)$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.50091336 \\ 1.9999163 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.00070126913 \\ -0.00060809004 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.50021209 \\ 2.0005244 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$.

$$F(P_4) = \begin{pmatrix} -0.0028688097 \\ -0.0012490081 \end{pmatrix}$$

$$y_4 = F(P_4) - F(P_3) = \begin{pmatrix} 0.011825306 \\ -0.0052369944 \end{pmatrix}$$

$$s_4 = P_4 - P_3 = \begin{pmatrix} -0.00070126913 \\ 0.00060809004 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -0.059072114 & 0.00052001246 \\ -0.047138803 & -0.22255529 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_5. $P_5 = P_4 - A_4 * F(P_4)$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.50021209 \\ 2.0005244 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.00016881715 \\ 0.00041320562 \end{pmatrix}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.50004328 \\ 2.0001112 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 5$.

$$F(P_5) = \begin{pmatrix} -0.00058117897 \\ -0.00027173274 \end{pmatrix}$$

$$y_5 = F(P_5) - F(P_4) = \begin{pmatrix} 0.0022876307 \\ 0.00097727535 \end{pmatrix}$$

$$s_5 = P_5 - P_4 = \begin{pmatrix} -0.00016881715 \\ -0.00041320562 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -0.065479166 & -0.019467391 \\ -0.063605474 & -0.27392462 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_6. $P_6 = P_5 - A_5 * F(P_5)$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0.50004328 \\ 2.0001112 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.000043345042 \\ 0.00011140045 \end{pmatrix}$$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0.49999993 \\ 1.9999998 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 6$.

$$F(P_6) = \begin{pmatrix} 9.3066080 \times 10^{-7} \\ 4.7618543 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

( )

$$y_6 = F(P_6) - F(P_5) = \begin{pmatrix} 0.00058210963 \\ 0.00027220893 \end{pmatrix}$$

$$s_6 = P_6 - P_5 = \begin{pmatrix} -0.000043345042 \\ -0.00011140045 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} -0.065430487 & -0.019313566 \\ -0.063473992 & -0.27350915 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_7. $P_7 = P_6 - A_6 * F(P_6)$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 0.49999993 \\ 1.9999998 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7.0090428 \times 10^{-8} \\ -1.8931383 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 2.0000000 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$F(P_i)$	$\|P_i - P_{i-1}\|_\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8.0000000 \\ 8.0000000 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 0.40000000 \\ 1.7600000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.4144 \\ 0.61952 \end{pmatrix}$	1.76
2	$\begin{pmatrix} 0.47779201 \\ 1.9274112 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.4144000 \\ 0.61952000 \end{pmatrix}$	0.167411
3	$\begin{pmatrix} 0.50091336 \\ 1.9999163 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.28602909 \\ 0.20600602 \end{pmatrix}$	0.0725051
4	$\begin{pmatrix} 0.50021209 \\ 2.0005244 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.014694116 \\ 0.0039879863 \end{pmatrix}$	0.000701269
5	$\begin{pmatrix} 0.50004328 \\ 2.0001112 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0028688097 \\ -0.0012490081 \end{pmatrix}$	0.000413206
6	$\begin{pmatrix} 0.49999993 \\ 1.9999998 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00058117897 \\ -0.00027173274 \end{pmatrix}$	0.0001114
7	$\begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 2.0000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.3066080 \times 10^{-7} \\ 4.7618543 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$	1.89314×10^{-7}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_7 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 2.0000000 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 23.** Sea el sistema de ecuaciones no lineales siguiente.

$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_1^2 x_2 - x_1 x_3 + 6 = 0,$

$f_2(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0.$

$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - 2 x_1 x_3 - 4 = 0$

Aplíquese el método de *Cuasi Newton* iniciando el método en el punto inicial $P_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)^T = (-1, -2, 1)^T$ e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-6}$.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones =
  {x1^3 + x1^2 x2 - x1 x3 + 6, Exp[x1] + Exp[x2] - x3, x2^2 - 2 x1 x3 - 4 };
p = {-1., -2., 1};
m = 11;
d = 10.^-6;
cuasinewtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Cuasi-Newton* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2 x_1^2 - x_3 x_1 + 6 \\ -x_3 + e^{x_1} + e^{x_2} \\ x_2^2 - 2 x_1 x_3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1. \\ -2. \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3 x_1^2 + 2 x_2 x_1 - x_3 & x_1^2 & -x_1 \\ e^{x_1} & e^{x_2} & -1 \\ -2 x_3 & 2 x_2 & -2 x_1 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} 4.0000000 \\ -0.49678528 \\ 2.0000000 \end{pmatrix}$$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0.16714 & 0.268907 & 0.0508832 \\ -0.0566605 & -0.627449 & -0.285394 \\ 0.0538193 & -0.985991 & -0.019905 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_1. $\quad P_1 = P_0 - A_0^{-1} * F(P_0)$

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1.0000000 \\ -2.0000000 \\ 1.0000000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.63673833 \\ -0.48572277 \\ 0.66529279 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1.6367383 \\ -1.5142772 \\ 0.33470721 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} -1.8934664 \\ 0.079873675 \\ -0.61130823 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = F(P_1) - F(P_0) = \begin{pmatrix} -5.8934664 \\ 0.57665895 \\ -2.6113082 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} -0.63673833 \\ 0.48572277 \\ -0.66529279 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.13063097 & 0.30761641 & 0.016948919 \\ -0.030727708 & -0.65494452 & -0.26129036 \\ 0.034955507 & -0.96598994 & -0.037438346 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_2. $\quad P_2 = P_1 - A_1 * F(P_1)$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1.6367383 \\ -1.5142772 \\ 0.33470721 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.23313592 \\ 0.16559801 \\ -0.12045788 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1.4036024 \\ -1.6798752 \\ 0.45516509 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} 0.56411230 \\ -0.023057640 \\ 0.099722438 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = F(P_2) - F(P_1) = \begin{pmatrix} 2.4575787 \\ -0.10293131 \\ 0.71103067 \end{pmatrix}$$

$$s_2 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 0.23313592 \\ -0.16559801 \\ 0.12045788 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.10828747 & 0.27175067 & -0.0070565193 \\ -0.021471687 & -0.64008677 & -0.25134587 \\ 0.022437366 & -0.98608403 & -0.050887600 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_3. $P_3 = P_2 - A_2 * F(P_2)$

$$P_3 = \begin{pmatrix} -1.4036024 \\ -1.6798752 \\ 0.45516509 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.054116669 \\ -0.022418375 \\ 0.030319329 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} -1.4577191 \\ -1.6574569 \\ 0.42484576 \end{pmatrix}$$

....

....

Nota: Se han eliminado varias iteraciones. En la tabla final se pueden ver los resultados

Iteración $i = 6$.

$$F(P_6) = \begin{pmatrix} -0.000033783397 \\ 4.3150610 \times 10^{-7} \\ -9.9292832 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$y_6 = F(P_6) - F(P_5) = \begin{pmatrix} -0.0010724581 \\ 6.0574834 \times 10^{-6} \\ -0.00043231324 \end{pmatrix}$$

$$s_6 = P_6 - P_5 = \begin{pmatrix} -0.00012944703 \\ 0.00015704500 \\ -6.5087361 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0.10571545 & 0.49488871 & 0.044110192 \\ -0.013434126 & -1.0563685 & -0.34474168 \\ 0.025056559 & -1.0384105 & -0.061653279 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_7. $P_7 = P_6 - A_6 * F(P_6)$

$$P_7 = \begin{pmatrix} -1.4560465 \\ -1.6642271 \\ 0.42249274 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3.7958620 \times 10^{-6} \\ 3.4210587 \times 10^{-6} \\ -6.8240327 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$P_7 = \begin{pmatrix} -1.4560427 \\ -1.6642305 \\ 0.42249343 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 7$.

$$F(P_7) = \begin{pmatrix} 8.9224981 \times 10^{-7} \\ -1.3598257 \times 10^{-8} \\ 2.3733420 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$y_7 = F(P_7) - F(P_6) = \begin{pmatrix} 0.000034675647 \\ -4.4510435 \times 10^{-7} \\ 0.000010166617 \end{pmatrix}$$

$$s_7 = P_7 - P_6 = \begin{pmatrix} 3.7958620 \times 10^{-6} \\ -3.4210587 \times 10^{-6} \\ 6.8240327 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0.10404363 & 0.47766499 & 0.039412566 \\ -0.012079802 & -1.0424157 & -0.34093616 \\ 0.024684143 & -1.0422473 & -0.062699729 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_8. $P_8 = P_7 - A_7 * F(P_7)$

$$P_8 = \begin{pmatrix} -1.4560427 \\ -1.6642305 \\ 0.42249343 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9.5691449 \times 10^{-8} \\ -7.7518975 \times 10^{-8} \\ 2.1316378 \times 10^{-8} \end{pmatrix}$$

$$P_8 = \begin{pmatrix} -1.4560428 \\ -1.6642305 \\ 0.42249340 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$F(P_i)$	$\lVert P_i - P_{i-1} \rVert_\infty$
0	$\begin{pmatrix} -1.0000000 \\ -2.0000000 \\ 1.0000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4.0000000 \\ -0.49678528 \\ 2.0000000 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} -1.6367383 \\ -1.5142772 \\ 0.33470721 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.89347 \\ 0.0798737 \\ -0.611308 \end{pmatrix}$	0.665293
2	$\begin{pmatrix} -1.4036024 \\ -1.6798752 \\ 0.45516509 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.8934664 \\ 0.079873675 \\ -0.61130823 \end{pmatrix}$	0.233136
3	$\begin{pmatrix} -1.4577191 \\ -1.6574569 \\ 0.42484576 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.56411230 \\ -0.023057640 \\ 0.099722438 \end{pmatrix}$	0.0541167
4	$\begin{pmatrix} -1.4573983 \\ -1.6619153 \\ 0.42271835 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00027155345 \\ -0.0014560223 \\ -0.014225217 \end{pmatrix}$	0.00445848
5	$\begin{pmatrix} -1.4559170 \\ -1.6643842 \\ 0.42249925 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0093840223 \\ -0.00010193191 \\ -0.0058993987 \end{pmatrix}$	0.00246883
6	$\begin{pmatrix} -1.4560465 \\ -1.6642271 \\ 0.42249274 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0010386747 \\ -5.6259773 \times 10^{-6} \\ 0.00042238396 \end{pmatrix}$	0.000157045
7	$\begin{pmatrix} -1.4560427 \\ -1.6642305 \\ 0.42249343 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.000033783397 \\ 4.3150610 \times 10^{-7} \\ -9.9292832 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$	3.79586×10^{-6}
8	$\begin{pmatrix} -1.4560428 \\ -1.6642305 \\ 0.42249340 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8.9224981 \times 10^{-7} \\ -1.3598257 \times 10^{-8} \\ 2.3733420 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$	9.56914×10^{-8}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_8 = \begin{pmatrix} -1.4560428 \\ -1.6642305 \\ 0.42249340 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 24.** Sea el sistema no lineal de ecuaciones siguiente:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 1/2 = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 625 x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0,$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{(-x_1 x_2)} + 20 x_3 + (10\pi - 3)/3 = 0.$$

Aplíquese el método de *Cuasi Newton* con la aproximación inicial $P_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)^T = (0, 0, 0)^T$ y aplicando el método hasta que $\lVert P_{i+1} - P_i \rVert_\infty \le 10^{-5}$.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = { 3 x1 - Cos[x2 * x3] - 1 / 2,
   4 x1^2 - 625 x2^2 + 2 x2 - 1, Exp[-x1 * x2] + 20 x3 + (10 Pi - 3) / 3 };
d = 10.^-5;
p = {0.0, 0.0, 0.0};
m = 12;
cuasinewtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Cuasi–Newton* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\cos(x_2 x_3) + 3x_1 - \frac{1}{2} \\ 4x_1^2 - 625 x_2^2 + 2x_2 - 1 \\ 20 x_3 + e^{-x_1 x_2} + \frac{1}{3}(-3 + 10\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3 & \sin(x_2 x_3) x_3 & \sin(x_2 x_3) x_2 \\ 8 x_1 & 2 - 1250 x_2 & 0 \\ -e^{-x_1 x_2} x_2 & -e^{-x_1 x_2} x_1 & 20 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} -1.5000000 \\ -1.0000000 \\ 10.471976 \end{pmatrix}$$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0.333333 & 0. & 0. \\ 0. & 0.5 & 0. \\ 0. & 0. & 0.05 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_1. $P_1 = P_0 - A_0^{-1} * F(P_0)$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.50000000 \\ -0.50000000 \\ 0.52359878 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 0.50000000 \\ -0.52359878 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} 0.034074174 \\ -155.25000 \\ -0.22119922 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = F(P_1) - F(P_0) = \begin{pmatrix} 1.5340742 \\ -154.25000 \\ -10.693175 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 0.50000000 \\ -0.52359878 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.33338311 & 0.000074671256 & -7.8195557 \times 10^{-6} \\ -0.34021992 & -0.010329875 & 0.053441620 \\ -0.000048474318 & -0.000072711477 & 0.050007614 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_2. $P_2 = P_1 - A_1 * F(P_1)$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 0.50000000 \\ -0.52359878 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.00023122871 \\ 1.5802991 \\ 0.00022516001 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.50023123 \\ -1.0802991 \\ -0.52382394 \end{pmatrix}$$

Resolución Numérica de Sistemas de Ecuaciones no Lineales

Iteración $i = 2$.

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} 0.15658007 \\ -731.56349 \\ 0.71218906 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = F(P_2) - F(P_1) = \begin{pmatrix} 0.12250590 \\ -576.31349 \\ 0.93338828 \end{pmatrix}$$

$$s_2 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 0.00023122871 \\ -1.5802991 \\ -0.00022516001 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.33324435 & 0.000070458556 & 0.000013977716 \\ 0.090248461 & 0.0027383079 & -0.014175515 \\ 0.0050200777 & 0.000081159901 & 0.049211456 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_3. $P_3 = P_2 - A_2 * F(P_2)$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.50023123 \\ -1.0802991 \\ -0.52382394 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.00064447181 \\ -1.9992106 \\ -0.023539715 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.49958676 \\ 0.91891155 \\ -0.50028422 \end{pmatrix}$$

....

....

Nota: Se han eliminado varias iteraciones. En la tabla final se pueden ver los resultados

Iteración $i = 10$.

$$F(P_{10}) = \begin{pmatrix} 0.0011160823 \\ -5.3749283 \\ 0.00099511573 \end{pmatrix}$$

$$y_{10} = F(P_{10}) - F(P_9) = \begin{pmatrix} -0.0016566050 \\ 8.4151117 \\ -0.0015409534 \end{pmatrix}$$

$$s_{10} = P_{10} - P_9 = \begin{pmatrix} 0.000059694684 \\ -0.055798137 \\ -0.0013888404 \end{pmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 0.33704107 & 0.000073447929 & 0.000022024267 \\ -0.65297008 & -0.0067540471 & 0.028417241 \\ -0.013201957 & -0.00015843129 & 0.050289560 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_{11}. $P_{11} = P_{10} - A_{10} * F(P_{10})$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 0.49996902 \\ 0.094348299 \\ -0.52124522 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.000018589872 \\ 0.035602029 \\ 0.00088686628 \end{pmatrix}$$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 0.49998761 \\ 0.058746270 \\ -0.52213209 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 11$.

$$F(P_{11}) = \begin{pmatrix} 0.00043321741 \\ -2.0395097 \\ 0.00038851313 \end{pmatrix}$$

$$y_{11} = F(P_{11}) - F(P_{10}) = \begin{pmatrix} -0.00068286487 \\ 3.3354186 \\ -0.00060660260 \end{pmatrix}$$

$$s_{11} = P_{11} - P_{10} = \begin{pmatrix} 0.000018589872 \\ -0.035602029 \\ -0.00088686628 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0.33715269 & 0.000074602296 & 0.000016956222 \\ -1.0520154 & -0.010880849 & 0.046535249 \\ -0.023159275 & -0.00026140674 & 0.050741656 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_{12}. $P_{12} = P_{11} - A_{11} * F(P_{11})$

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0.49998761 \\ 0.058746270 \\ -0.52213209 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6.0850991 \times 10^{-6} \\ 0.021753924 \\ 0.00054282238 \end{pmatrix}$$

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0.49999369 \\ 0.036992346 \\ -0.52267491 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$F(P_i)$	$\|P_i - P_{i-1}\|_\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.5000000 \\ -1.0000000 \\ 10.471976 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 0.50000000 \\ -0.52359878 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0340742 \\ -155.25 \\ -0.221199 \end{pmatrix}$	0.523599
2	$\begin{pmatrix} 0.50023123 \\ -1.0802991 \\ -0.52382394 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.034074174 \\ -155.25000 \\ -0.22119922 \end{pmatrix}$	1.5803
3	$\begin{pmatrix} 0.49958676 \\ 0.91891155 \\ -0.50028422 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.15658007 \\ -731.56349 \\ 0.71218906 \end{pmatrix}$	1.99921
4	$\begin{pmatrix} 0.50970676 \\ 5.9713714 \\ -0.36857038 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.10258215 \\ -525.91285 \\ 0.098158298 \end{pmatrix}$	5.05246
5	$\begin{pmatrix} 0.47746396 \\ 0.79729393 \\ -0.50602980 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.6183251 \\ -22273.816 \\ 2.1482287 \end{pmatrix}$	5.17408
6	$\begin{pmatrix} 0.48230959 \\ 0.70355047 \\ -0.50830770 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.012681619 \\ -395.79203 \\ 0.034776583 \end{pmatrix}$	0.0937435
7	$\begin{pmatrix} 0.49882332 \\ 0.37483057 \\ -0.51428842 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.010196232 \\ -308.02695 \\ 0.018069454 \end{pmatrix}$	0.32872
8	$\begin{pmatrix} 0.49964924 \\ 0.24762963 \\ -0.51737005 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.014992813 \\ -87.066262 \\ 0.015672164 \end{pmatrix}$	0.127201
9	$\begin{pmatrix} 0.49990932 \\ 0.15014644 \\ -0.51985638 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0071433695 \\ -37.831414 \\ 0.0081946310 \end{pmatrix}$	0.0974832

10	$\begin{pmatrix} 0.49996902 \\ 0.094348299 \\ -0.52124522 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0027726873 \\ -13.790040 \\ 0.0025360692 \end{pmatrix}$	0.0557981
11	$\begin{pmatrix} 0.49998761 \\ 0.058746270 \\ -0.52213209 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0011160823 \\ -5.3749283 \\ 0.00099511573 \end{pmatrix}$	0.035602
12	$\begin{pmatrix} 0.49999369 \\ 0.036992346 \\ -0.52267491 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.00043321741 \\ -2.0395097 \\ 0.00038851313 \end{pmatrix}$	0.0217539

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0.49999369 \\ 0.036992346 \\ -0.52267491 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 25.** Dado el siguiente problema no lineal

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1{}^2 + x_2 - 37 = 0,$$
$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2{}^2 - 5 = 0.$$
$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$$

Calcular la solución aproximada del sistema empleando el método de *Cuasi Newton* comenzando en el punto:

$$P_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3{}^{(0)}\right)^T = (0,\ 0,\ 0)^T,$$

e iterando hasta que $||P_{i+1} - P_i||_\infty \leq 5 \times 10^{-5}$.

Solución

```
Clear[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
ecuaciones = {x1^2 + x2 - 37, x1 - x2^2 - 5, x1 + x2 + x3 - 3};
d = 10.^-5;
p = {0.0, 0.0, 0.0};
m = 12;
cuasinewtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Cuasi-Newton* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 - 37 \\ -x_2^2 + x_1 - 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 1 & -2x_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} -37.000000 \\ -5.0000000 \\ -3.0000000 \end{pmatrix}$$

$$A_0{}^{-1} = \begin{pmatrix} 0. & 1. & 0. \\ 1. & 0. & 0. \\ -1. & -1. & 1. \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_1. $\quad P_1 = P_0 - A_0{}^{-1} * F(P_0)$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5.0000000 \\ -37.000000 \\ 39.000000 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 5.0000000 \\ 37.000000 \\ -39.000000 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} 25.000000 \\ -1369.0000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = F(P_1) - F(P_0) = \begin{pmatrix} 62.000000 \\ -1364.0000 \\ 3.0000000 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 5.0000000 \\ 37.000000 \\ -39.000000 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1.8773389 & -0.086880424 & 0.96337129 \\ 1.0342830 & 0.019848072 & -0.017592609 \\ 0.84305588 & 0.067032352 & 0.054221324 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_2. $P_2 = P_1 - A_1 * F(P_1)$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 5.0000000 \\ 37.000000 \\ -39.000000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 72.005828 \\ -1.3149348 \\ -70.690893 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -67.005828 \\ 38.314935 \\ 31.690893 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} 4491.0959 \\ -1540.0401 \\ -1.7053026 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$$

$$y_2 = F(P_2) - F(P_1) = \begin{pmatrix} 4466.0959 \\ -171.04005 \\ -1.7053026 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$$

$$s_2 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} -72.005828 \\ 1.3149348 \\ 70.690893 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.015443498 & 0.017736688 & 0.34103124 \\ -0.0011736178 & -0.038332685 & 0.32850961 \\ 0.016617116 & 0.020595997 & 0.33045915 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_3. $P_3 = P_2 - A_2 * F(P_2)$

$$P_3 = \begin{pmatrix} -67.005828 \\ 38.314935 \\ 31.690893 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -96.673441 \\ 53.763040 \\ 42.910401 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 29.667613 \\ -15.448105 \\ -11.219508 \end{pmatrix}$$

......

.....

Nota: Se han eliminado varias iteraciones.En la tabla final se pueden ver los resultados

Iteración $i = 10$.

$$F(P_{10}) = \begin{pmatrix} 75.340243 \\ -85.146029 \\ -3.5527137 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

$$y_{10} = F(P_{10}) - F(P_9) = \begin{pmatrix} -110.35308 \\ -94.943726 \\ 7.1054274 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

$$s_{10} = P_{10} - P_9 = \begin{pmatrix} -4.7944161 \\ 9.8729439 \\ -5.0785278 \end{pmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} -0.023503588 & 0.077815667 & 0.35197622 \\ 0.16673706 & -0.29778579 & 0.23573419 \\ -0.14323347 & 0.21997012 & 0.41228959 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_{11}. $P_{11} = P_{10} - A_{10} * F(P_{10})$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 10.140922 \\ 9.5019446 \\ -16.642867 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8.3964610 \\ 37.917288 \\ -29.520827 \end{pmatrix}$$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 18.537383 \\ -28.415343 \\ 12.877960 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 11$.

$$F(P_{11}) = \begin{pmatrix} 278.21922 \\ -793.89436 \\ -2.1316282 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$$

$$y_{11} = F(P_{11}) - F(P_{10}) = \begin{pmatrix} 202.87898 \\ -708.74833 \\ -1.7763568 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$$

$$s_{11} = P_{11} - P_{10} = \begin{pmatrix} 8.3964610 \\ -37.917288 \\ 29.520827 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0.024649010 & -0.0047911153 & 0.32425254 \\ -0.032593066 & 0.044169191 & 0.35049776 \\ 0.0079440555 & -0.039378075 & 0.32524970 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_{12}. $\quad P_{12} = P_{11} - A_{11} * F(P_{11})$

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 18.537383 \\ -28.415343 \\ 12.877960 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10.661468 \\ -44.133689 \\ 33.472221 \end{pmatrix}$$

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 7.8759151 \\ 15.718345 \\ -20.594260 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$F(P_i)$	$\lVert P_i - P_{i-1} \rVert_\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -37.000000 \\ -5.0000000 \\ -3.0000000 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 5.0000000 \\ 37.000000 \\ -39.000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 25. \\ -1369. \\ 0. \end{pmatrix}$	39.
2	$\begin{pmatrix} -67.005828 \\ 38.314935 \\ 31.690893 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 25.000000 \\ -1369.0000 \\ 0 \end{pmatrix}$	72.0058
3	$\begin{pmatrix} 29.667613 \\ -15.448105 \\ -11.219508 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4491.0959 \\ -1540.0401 \\ -1.7053026 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$	96.6734
4	$\begin{pmatrix} 49.640098 \\ -24.159488 \\ -22.480610 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 827.71915 \\ -213.97634 \\ -1.1652901 \times 10^{-12} \end{pmatrix}$	19.9725
5	$\begin{pmatrix} 18.834135 \\ -12.101120 \\ -3.7330147 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2402.9798 \\ -539.04078 \\ -1.4210855 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$	30.806
6	$\begin{pmatrix} 13.615493 \\ -12.445404 \\ 1.8299106 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 305.62352 \\ -132.60298 \\ 1.5987212 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$	5.56293
7	$\begin{pmatrix} -8.9418766 \\ -31.210731 \\ 43.152608 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 135.93625 \\ -146.27258 \\ 1.0658141 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$	41.3227
8	$\begin{pmatrix} 16.237302 \\ -5.9507478 \\ -7.2865541 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11.746425 \\ -988.05163 \\ 5.6843419 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$	50.4392
9	$\begin{pmatrix} 14.935338 \\ -0.37099930 \\ -11.564339 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 220.69922 \\ -24.174097 \\ -3.1974423 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$	5.57975
10	$\begin{pmatrix} 10.140922 \\ 9.5019446 \\ -16.642867 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 185.69332 \\ 9.7976976 \\ -1.0658141 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$	9.87294
11	$\begin{pmatrix} 18.537383 \\ -28.415343 \\ 12.877960 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 75.340243 \\ -85.146029 \\ -3.5527137 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$	37.9173
12	$\begin{pmatrix} 7.8759151 \\ 15.718345 \\ -20.594260 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 278.21922 \\ -793.89436 \\ -2.1316282 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$	44.1337

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 7.8759151 \\ 15.718345 \\ -20.594260 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 26.** Dado el siguiente problema no lineal

$$f_1(x_1, x_2) = 3\,x_1^2 - x_2^2 = 0,$$
$$f_1(x_1, x_2) = 3\,x_1\,x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0.$$

Calcular la solución aproximada del sistema empleando el método de *Cuasi Newton* comenzando en el punto:

$$P_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)^T = (1, 1)^T,$$

e iterando hasta que $\lVert P_{i+1} - P_i \rVert_\infty \le 5 \times 10^{-6}$.

Solución

```
Clear[ecuaciones, m, p, d];
ecuaciones = {3 x1^2 - x2^2, 3 x1 x2^2 - x1^3 - 1};
d = 10.^-6;
p = {1.0, 1.0};
m = 12;
cuasinewtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Cuasi~Newton* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3\,x_1^2 - x_2^2 \\ -x_1^3 + 3\,x_2^2\,x_1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 1. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6\,x_1 & -2\,x_2 \\ 3\,x_2^2 - 3\,x_1^2 & 6\,x_1\,x_2 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} 2.0000000 \\ 1.0000000 \end{pmatrix}$$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0.166667 & 0.0555556 \\ 0. & 0.166667 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_1. $\quad P_1 = P_0 - A_0^{-1} * F(P_0)$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1.0000000 \\ 1.0000000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.38888889 \\ 0.16666667 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.61111111 \\ 0.83333333 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} 0.42592593 \\ 0.044924554 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = F(P_1) - F(P_0) = \begin{pmatrix} -1.5740741 \\ -0.95507545 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} -0.38888889 \\ -0.16666667 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.19859170 & 0.079879390 \\ 0.0032529266 & 0.16914509 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_2. $\quad P_2 = P_1 - A_1 * F(P_1)$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.61111111 \\ 0.83333333 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.088173899 \\ 0.0089842734 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.52293721 \\ 0.82434906 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} 0.14083861 \\ -0.076916050 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = F(P_2) - F(P_1) = \begin{pmatrix} -0.28508732 \\ -0.12184060 \end{pmatrix}$$

$$s_2 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} -0.088173899 \\ -0.0089842734 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.26193264 & 0.11080236 \\ -0.033174631 & 0.15136120 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_3. $\quad P_3 = P_2 - A_2 * F(P_2)$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.52293721 \\ 0.82434906 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.028367749 \\ -0.016314374 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.49456946 \\ 0.84066343 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$.

$$F(P_3) = \begin{pmatrix} 0.027081850 \\ -0.072412185 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = F(P_3) - F(P_2) = \begin{pmatrix} -0.11375676 \\ 0.0045038649 \end{pmatrix}$$

$$s_3 = P_3 - P_2 = \begin{pmatrix} -0.028367749 \\ 0.016314374 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0.25373143 & 0.11010910 \\ -0.13777191 & 0.14251952 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_4. $\quad P_4 = P_3 - A_3 * F(P_3)$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.49456946 \\ 0.84066343 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.0011017241 \\ -0.014051268 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.49567119 \\ 0.85471470 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$.

$$F(P_4) = \begin{pmatrix} 0.0065325540 \\ -0.035462661 \end{pmatrix}$$

$$y_4 = F(P_4) - F(P_3) = \begin{pmatrix} -0.020549296 \\ 0.036949524 \end{pmatrix}$$

$$s_4 = P_4 - P_3 = \begin{pmatrix} 0.0011017241 \\ 0.014051268 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0.22064925 & 0.15253000 \\ -0.22542377 & 0.25491446 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_5. $\quad P_5 = P_4 - A_4 * F(P_4)$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.49567119 \\ 0.85471470 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.0039677166 \\ -0.010512538 \end{pmatrix}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.49963890 \\ 0.86522724 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 5$.

$$F(P_5) = \begin{pmatrix} 0.00029892374 \\ -0.0026130772 \end{pmatrix}$$

$$\left(\quad \right)$$

$$y_5 = F(P_5) - F(P_4) = \begin{pmatrix} -0.0062336302 \\ 0.032849584 \end{pmatrix}$$

$$s_5 = P_5 - P_4 = \begin{pmatrix} 0.0039677166 \\ 0.010512538 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0.21640932 & 0.16185083 \\ -0.23477381 & 0.27546909 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_6. $P_6 = P_5 - A_5 * F(P_5)$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0.49963890 \\ 0.86522724 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.00035823882 \\ -0.00079000147 \end{pmatrix}$$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0.49999714 \\ 0.86601724 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 6$.

$$F(P_6) = \begin{pmatrix} 5.5633653 \times 10^{-6} \\ -0.000025491707 \end{pmatrix}$$

$$y_6 = F(P_6) - F(P_5) = \begin{pmatrix} -0.00029336038 \\ 0.0025875855 \end{pmatrix}$$

$$s_6 = P_6 - P_5 = \begin{pmatrix} 0.00035823882 \\ 0.00079000147 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0.21598585 & 0.16293201 \\ -0.23598083 & 0.27855081 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_7. $P_7 = P_6 - A_6 * F(P_6)$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 0.49999714 \\ 0.86601724 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2.9518069 \times 10^{-6} \\ -8.4135833 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 0.50000009 \\ 0.86602566 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 7$.

$$F(P_7) = \begin{pmatrix} -1.5392563 \times 10^{-7} \\ 7.9492530 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$y_7 = F(P_7) - F(P_6) = \begin{pmatrix} -5.7172909 \times 10^{-6} \\ 0.000026286632 \end{pmatrix}$$

$$s_7 = P_7 - P_6 = \begin{pmatrix} 2.9518069 \times 10^{-6} \\ 8.4135833 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0.21756925 & 0.15961396 \\ -0.23174163 & 0.26966745 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_8. $P_8 = P_7 - A_7 * F(P_7)$

$$P_8 = \begin{pmatrix} 0.50000009 \\ 0.86602566 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9.3391695 \times 10^{-8} \\ 2.5003645 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$P_8 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 0.86602541 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$F(P_i)$	$\|P_i - P_{i-1}\|_\infty$
0	$\begin{pmatrix} 1.0000000 \\ 1.0000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.0000000 \\ 1.0000000 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 0.61111111 \\ 0.83333333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.425926 \\ 0.0449246 \end{pmatrix}$	0.388889
2	$\begin{pmatrix} 0.52293721 \\ 0.82434906 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.42592593 \\ 0.044924554 \end{pmatrix}$	0.0881739
3	$\begin{pmatrix} 0.49456946 \\ 0.84066343 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.14083861 \\ -0.076916050 \end{pmatrix}$	0.0283677
4	$\begin{pmatrix} 0.49567119 \\ 0.85471470 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.027081850 \\ -0.072412185 \end{pmatrix}$	0.0140513
5	$\begin{pmatrix} 0.49963890 \\ 0.86522724 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0065325540 \\ -0.035462661 \end{pmatrix}$	0.0105125
6	$\begin{pmatrix} 0.49999714 \\ 0.86601724 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.00029892374 \\ -0.0026130772 \end{pmatrix}$	0.000790001
7	$\begin{pmatrix} 0.50000009 \\ 0.86602566 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.5633653 \times 10^{-6} \\ -0.000025491707 \end{pmatrix}$	8.41358×10^{-6}
8	$\begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 0.86602541 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.5392563 \times 10^{-7} \\ 7.9492530 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$	2.50036×10^{-7}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_8 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 0.86602541 \end{pmatrix}$$