

# Métodos Iterativos para Resolver Sistemas Lineales

Departamento de Matemáticas, CCIR/ITESM

17 de julio de 2009

## Índice

3.1. Introducción . . . . .	1
3.2. Objetivos . . . . .	1
3.3. Generalidades . . . . .	2
3.4. Método Iterativo: Un ejemplo . . . . .	2
3.5. Ventajas y Desventajas . . . . .	2
3.6. Método Iterativo General . . . . .	3
3.7. Metodo de Jacobi: Idea . . . . .	3
3.8. Convergencia y convergencia en Jacobi . . . . .	5
3.9. Matriz Diagonalmente Dominante . . . . .	5
3.10. Orden conveniente para Jacobi . . . . .	5
3.11. El Método de Gauss-Seidel: Idea . . . . .	6
3.12. Método de Gauss-Seidel: Ejemplos . . . . .	6
3.13. Costo computacional . . . . .	7

### 3.1. Introducción

En esta lectura veremos procedimientos iterativos para resolver un sistema de ecuaciones lineales. El primero de ellos conocido como el procedimiento de Jacobi basado en la idea de punto fijo y un segundo procedimiento conocido como método de Gauss-Seidel el cual es una modificación simple del procedimiento de Jacobi. Introduciremos el concepto de matriz diagonalmente dominante el cual se relaciona con la garantía de convergencia en la aplicación de los métodos vistos. Veremos que en algunos casos es posible replantear el sistema para garantizar la convergencia. Asimismo se comentará en qué situaciones los métodos iterativos son más convenientes a los métodos directos.

### 3.2. Objetivos

Será importante que usted

- Entienda los conceptos:
  - método iterativo,
  - ecuación de recurrencia,
  - convergencia,
  - matriz diagonalmente dominante
- En términos cualitativos
  - Entienda la diferencia entre un método directo y uno iterativo.

- Entienda la conveniencia de usar un método iterativo y uno directo.
- Entienda y mecanice los procedimientos de
  - Método de Jacobi, y
  - Método de Gauss-Seidel.

### 3.3. Generalidades

Un *método iterativo* es un método que **progresivamente** va calculando **aproximaciones** a la solución de un problema. En Matemáticas, en un método iterativo se repite un mismo proceso de mejora sobre una solución aproximada: se espera que lo obtenido sea una *solución más aproximada* que la inicial. El proceso se repite sobre esta nueva *solución* hasta que el resultado más reciente satisfaga ciertos requisitos. A diferencia de los métodos directos, en los cuales se debe terminar el proceso para tener la respuesta, en los métodos iterativos se puede suspender el proceso al término de una iteración y se obtiene una aproximación a la solución.

### 3.4. Método Iterativo: Un ejemplo

Considere el problema de encontrar una raíz a una ecuación cuadrática, por ejemplo:

$$f(x) = x^2 - x - 2 = 0$$

Un método directo para resolverlo es aplicar la fórmula general

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = -1, 2$$

Un método iterativo es el método de Newton que consiste en usar la fórmula de mejora:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^2 - x_i - 2}{2x_i - 1}$$

Si tomamos como primera aproximación  $x_0 = 3$  (para  $i = 0$ ), tendremos

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - x_0 - 2}{2x_0 - 1} = 3 - \frac{3^2 - 3 - 2}{2 \cdot 3 - 1} \approx 2.2$$

Si ahora tomamos como aproximación  $x_1 = 2.2$  y aplicamos de nuevo la fórmula tendremos:

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - x_1 - 2}{2x_1 - 1} = 2.2 - \frac{2.2^2 - 2.2 - 2}{2 \cdot 2.2 - 1} \approx 2.011$$

Si ahora tomamos como aproximación  $x_2 = 2.011$  y aplicamos de nuevo la fórmula tendremos:

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - x_2 - 2}{2x_2 - 1} = 2.011 - \frac{2.011^2 - 2.011 - 2}{2 \cdot 2.011 - 1} \approx 2.00004$$

Etcetera.

### 3.5. Ventajas y Desventajas

Un elemento en contra que tienen los métodos iterativos sobre los métodos directos es que calculan *aproximaciones* a la solución. Los métodos iterativos se usan cuando no se conoce un método para obtener la solución en forma exacta. También se utilizan cuando el método para determinar la solución exacta requiere mucho tiempo de cálculo, cuando una respuesta aproximada es adecuada, y cuando el número de iteraciones es relativamente reducido.

### 3.6. Método Iterativo General

Un *método iterativo* consta de los siguientes pasos.

1. inicia con una solución aproximada (Semilla),
2. ejecuta una serie de cálculos para obtener o construir una mejor aproximación partiendo de la aproximación semilla. La fórmula que permite construir la aproximación usando otra se conoce como *ecuación de recurrencia*.
3. se repite el paso anterior pero usando como semilla la aproximación obtenida.

### 3.7. Metodo de Jacobi: Idea

El *método Jacobi* es el método iterativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales más simple y se aplica sólo a sistemas cuadrados, es decir a sistemas con tantas incógnitas como ecuaciones.

1. Primero se determina la ecuación de recurrencia. Para ello se ordenan las ecuaciones y las incógnitas. De la ecuación  $i$  se despeja la incógnita  $i$ . En notación matricial se escribirse como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{B} \mathbf{x} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector de incógnitas.

2. Se toma una aproximación para las soluciones y a ésta se le designa por  $\mathbf{x}_0$
3. Se itera en el ciclo que cambia la aproximación

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{c} + \mathbf{B} \mathbf{x}_i \quad (2)$$

#### Ejemplo 3.1

Partiendo de  $(x = 1, y = 2)$  aplique dos iteraciones del método de Jacobi para resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 5x + 2y = 1 \\ x - 4y = 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

#### Solución

Debemos primeramente despejar de la ecuación la incógnita correspondiente.

$$\begin{aligned} x &= 0.20 + 0.00x - 0.40y \\ y &= 0.00 + 0.25x + 0.00y \end{aligned}$$

Escrito en la notación vectorial quedaría:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.20 \\ 0.00 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00 & -0.40 \\ 0.25 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Aplicamos la primera iteración partiendo de  $x_0 = 1.00$  y  $y_0 = 2.00$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.20 + 0.00(1.00) - 0.40(2.00) = -0.60 \\ y_1 &= 0.00 + 0.25(1.00) + 0.00(2.00) = 0.25 \end{aligned}$$

Aplicamos la segunda iteración partiendo de  $x_1 = -0.60$  y  $y_1 = 0.25$ :

$$\begin{aligned}x_2 &= 0.20 + 0.00(-0.60) - 0.40(0.25) = 0.10 \\y_2 &= 0.00 + 0.25(-0.60) + 0.00(0.25) = -0.15\end{aligned}$$

Aplicamos la siguiente iteración partiendo de  $x_2 = 0.10$  y  $y_1 = -0.15$ :

$$\begin{aligned}x_3 &= 0.20 + 0.00(0.10) - 0.40(-0.15) = 0.26 \\y_3 &= 0.00 + 0.25(0.10) + 0.00(-0.15) = 0.025\end{aligned}$$

Aplicamos la siguiente iteración partiendo de  $x_3 = 0.26$  y  $y_3 = 0.025$ :

$$\begin{aligned}x_4 &= 0.20 + 0.00(0.26) - 0.40(0.025) = 0.190 \\y_4 &= 0.00 + 0.25(0.26) + 0.00(0.025) = 0.065\end{aligned}$$

Aplicamos la siguiente iteración partiendo de  $x_4 = 0.190$  y  $y_4 = 0.065$ :

$$\begin{aligned}x_5 &= 0.20 + 0.00(0.19) - 0.40(0.065) = 0.174 \\y_5 &= 0.00 + 0.25(0.19) + 0.00(0.065) = 0.0475\end{aligned}$$

Aplicamos la siguiente iteración partiendo de  $x_5 = 0.174$  y  $y_5 = 0.0475$ :

$$\begin{aligned}x_6 &= 0.20 + 0.00(0.174) - 0.40(0.0475) = 0.181 \\y_6 &= 0.00 + 0.25(0.174) + 0.00(0.0475) = 0.0435\end{aligned}$$

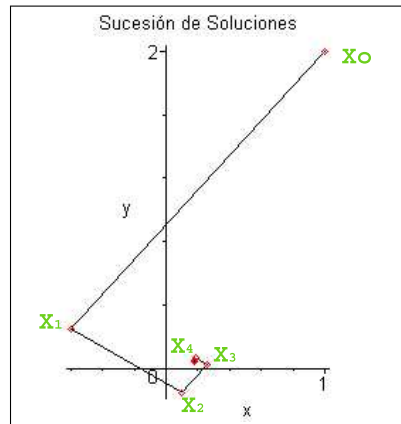
Si uno dispone de una hoja de cálculo como EXCEL es fácil realizar los cálculos anteriores:

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_{i+1}$	$y_{i+1}$	$D_i$
0	1.000	2.000	-0.600	0.250	1.750
1	-0.600	0.250	0.100	-0.150	0.700
2	0.100	-0.150	0.260	0.025	0.175
3	0.260	0.025	0.190	0.065	0.070
4	0.190	0.065	0.174	0.047	0.017
5	0.174	0.047	0.181	0.043	0.007
6	0.181	0.043	0.182	0.045	0.001

donde

$$D_i = \max(|x_i - x_{i+1}|, |y_i - y_{i+1}|)$$

Este  $D_i$  es utilizado como **criterio de paro** en las iteraciones: Cuando  $D_i$  es menos que cierto valor dado (digamos 0.001) uno ya no realiza la siguiente iteración. Si se grafica las aproximaciones obtenidas en el plano  $x - y$  se obtendrá algo como:



### 3.8. Convergencia y convergencia en Jacobi

Uno de los principales problemas de los métodos iterativos es la garantía de que el método va a *converger*, es decir, va a producir una sucesión de aproximaciones cada vez efectivamente más próximas a la solución. En el caso del método de Jacobi no existe una condición exacta para la convergencia. Lo mejor es una condición que garantice la convergencia, pero en caso de no cumplirse puede o no haberla es la siguiente:

Si la matriz de coeficientes original del sistema de ecuaciones es **diagonalmente dominante**, el método de Jacobi seguro converge.

### 3.9. Matriz Diagonalmente Dominante

Una matriz se dice *matriz diagonalmente dominante*, si en cada uno de los renglones, el valor absoluto del elemento de la diagonal principal es mayor que la suma de los valores absolutos de los elementos restantes del mismo renglón. A veces la matriz de un sistema de ecuaciones no es diagonalmente dominante pero cuando se cambian el orden de las ecuaciones y las incógnitas el nuevo sistema puede tener matriz de coeficientes diagonalmente dominante.

#### Ejemplo 3.2

Son matrices diagonalmente dominantes:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & -3 \\ 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -9 \end{bmatrix}$$

#### Ejemplo 3.3

No son matrices diagonalmente dominantes:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & -10 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & -7 \\ 3 & -10 & 20 \end{bmatrix}$$

### 3.10. Orden conveniente para Jacobi

En ciertas ocasiones al aplicar Jacobi la matriz no es diagonalmente dominante y por tanto no existirá garantía de convergencia. Sin embargo, en algunos casos será posible reordenar las incógnitas en otra manera de forma que la nueva matriz de coeficientes sea diagonalmente dominante. Esto se puede detectar revisando todos los posibles ordenamientos de las incógnitas y ver cómo es la matriz resultante. Claro que esto conlleva un buen número de pruebas pues el número posible de ordenamientos en  $n$  variables es  $(n-1)!$  pero cuando  $n$  es reducido es sencillo. Veamos algunos ejemplos.

#### Ejemplo 3.4

Indique cuál es el orden conveniente para aplicar Jacobi al sistema:

$$\begin{array}{rrcrcl} 3x & + & 12y & - & z & = & -2 \\ 11x & - & 4y & + & 3z & = & -3 \\ -3x & - & 2y & - & 12z & = & -2 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 12 & -1 \\ 11 & -4 & 3 \\ -3 & -2 & -12 \end{bmatrix}$$

#### Solución

Con el orden  $y \rightarrow x \rightarrow z$  el sistema y su matriz de coeficientes quedan:

$$\begin{array}{rrcrcl} 12y & + & 3x & - & z & = & -2 \\ - & 4y & + & 11x & + & 3z & = & -3 \\ - & 2y & - & 3x & - & 12z & = & -2 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 12 & 3 & -1 \\ -4 & 11 & 3 \\ -2 & -3 & -12 \end{bmatrix}$$

la matriz de coeficientes es diagonalmente dominante  $\square$

### 3.11. El Método de Gauss-Seidel: Idea

El *método de Gauss-Seidel* es muy semejante al método de Jacobi. Mientras que en el de Jacobi se utiliza el valor de las incógnitas para determinar una nueva aproximación, en el de Gauss-Seidel se va utilizando los valores de las incógnitas recién calculados en la misma iteración, y no en la siguiente. Por ejemplo, en el método de Jacobi se obtiene en el primer cálculo  $x_{i+1}$ , pero este valor de  $x$  no se utiliza sino hasta la siguiente iteración. En el método de Gauss-Seidel en lugar de eso se utiliza de  $x_{i+1}$  en lugar de  $x_i$  en forma inmediata para calcular el valor de  $y_{i+1}$  de igual manera procede con las siguientes variables; siempre se utilizan las variables recién calculadas.

### 3.12. Método de Gauss-Seidel: Ejemplos

#### Ejemplo 3.5

Partiendo de  $(x = 1, y = 2)$  aplique dos iteraciones del método de Gauss-Seidel para resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 5x + 2y = 1 \\ x - 4y = 0 \end{bmatrix}$$

#### Solución

Debemos primeramente despejar de la ecuación la incógnita correspondiente.

$$\begin{aligned} x &= 0.20 + 0.00x - 0.40y \\ y &= 0.00 + 0.25x + 0.00y \end{aligned}$$

Aplicamos la primera iteración partiendo de  $x_0 = 1.00$  y  $y_0 = 2.00$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.20 + 0.00(+1.000) - 0.40(2.00) = -0.600 \\ y_1 &= 0.00 + 0.25(-0.600) + 0.00(2.00) = -0.15 \end{aligned}$$

Aplicamos la segunda iteración partiendo de  $x_1 = -0.600$  y  $y_1 = -0.15$ :

$$\begin{aligned} x_2 &= 0.20 + 0.00(-0.600) - 0.40(-0.15) = 0.26 \\ y_2 &= 0.00 + 0.25(0.26) + 0.00(-0.15) = 0.065 \end{aligned}$$

Aplicamos la tercera iteración partiendo de  $x_2 = 0.26$  y  $y_2 = 0.065$ :

$$\begin{aligned} x_2 &= 0.20 + 0.00(0.26) - 0.40(0.065) = 0.174 \\ y_2 &= 0.00 + 0.25(0.174) + 0.00(0.174) = 0.0435 \quad \square \end{aligned}$$

#### Ejemplo 3.6

Partiendo de  $(x = 1, y = 2, z = 0)$  aplique dos iteraciones del método de Gauss-Seidel para resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 10x + 0y - z = -1 \\ 4x + 12y - 4z = 8 \\ 4x + 4y + 10z = 4 \end{bmatrix}$$

#### Solución

Debemos primeramente despejar de la ecuación la incógnita correspondiente.

$$\begin{aligned} x &= -0.10 + 0.00x + 0.00y + 0.10z \\ y &= 0.66 - 0.33x + 0.00y + 0.33z \\ z &= 0.40 - 0.40x - 0.40y + 0.00z \end{aligned}$$

Aplicamos la primera iteración partiendo de  $x_0 = 1.00$ ,  $y_0 = 2.00$ , y  $z = 0.00$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.10 + 0.00(1.00) + 0.00(2.00) + 0.10(0.00) = -0.1 \\ y_1 &= 0.66 - 0.33(-0.10) + 0.00(2.00) + 0.33(0.00) = 0.70 \\ z_1 &= 0.40 - 0.40(-0.10) - 0.40(0.70) + 0.00(0.00) = 0.16 \end{aligned}$$

Aplicamos la segunda iteración partiendo de  $x_1 = -0.10$  y  $y_1 = 0.70$  y  $z_1 = 0.16$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.10 + 0.00(-0.10) + 0.00(0.70) + 0.10(0.16) = -0.084 \\ y_1 &= 0.66 - 0.33(-0.084) + 0.00(0.70) + 0.33(0.16) = 0.748 \\ z_1 &= 0.40 - 0.40(-0.084) - 0.40(0.748) + 0.00(0.16) = 0.134 \end{aligned}$$

Aplicamos la tercera iteración partiendo de  $x_1 = -0.084$  y  $y_1 = 0.748$  y  $z_1 = 0.134$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.10 + 0.00(-0.084) + 0.00(0.748) + 0.10(0.134) = -0.086 \\ y_1 &= 0.66 - 0.33(-0.086) + 0.00(0.748) + 0.33(0.134) = 0.740 \quad \square \\ z_1 &= 0.40 - 0.40(-0.086) - 0.40(0.740) + 0.00(0.134) = 0.138 \end{aligned}$$

### 3.13. Costo computacional

Es difícil estimar el costo computacional de un método iterativo, pues de antemano se desconoce cuántas iteraciones requiera para obtener una respuesta que satisfaga al usuario. Generalmente se procede a calcular el costo computacional **por iteración**. En el caso del método de Jacobi la relación de recurrencia utilizada es:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{c} + \mathbf{B} \mathbf{x}_i$$

No es difícil estimar el costo computacional que involucra: el producto de la matriz  $\mathbf{B}$ ,  $n \times n$  por el vector  $\mathbf{x}_i$  toma  $n \times (2n - 1)$  FLOPs, y la suma de dos vectores en  $\mathbb{R}^n$  toma  $n$  FLOPs lo cual da un total de  $2n^2$  FLOPs en cada iteración del método de Jacobi.

Utilizando esta información podemos concluir que si el algoritmo toma  $m$  iteraciones entonces el total de FLOPs será de:

$$2mn^2$$

Por ello es que el método de Jacobi se prefiere en problemas donde  $n$  es grande, cuando se puede garantizar la convergencia y cuando el número de iteraciones esperado es bajo.