

UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA (ICAI)
INGENIERO EN INFORMÁTICA

PROYECTO FIN DE CARRERA

**RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE
SISTEMAS DE ECUACIONES
NO LINEALES**

AUTOR: D^a. CARLOTA SÁEZ CANALES

MADRID, SEPTIEMBRE 2006

Resolución Numérica de Sistemas de Ecuaciones no Lineales

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi madre el apoyo que me ha dado en estos años de carrera, especialmente en este último año, por su comprensión y por hacerme las cosas más fáciles.

También quiero dar las gracias a Lydia, Natalia y Oscar por ser grandes amigos en todos los momentos de mi vida y por ayudarme a seguir adelante.

Agradecer a Francisco Javier Rodríguez Gómez su ayuda para poder realizar este proyecto, su paciencia y comprensión.

También quiero mencionar al Atril, por sus grandes desayunos que me daban fuerzas para hacer este proyecto.

Resumen

Este proyecto consiste principalmente en el estudio de las bases matemáticas, análisis y diseño de los diferentes algoritmos numéricos que resuelven el problema de los sistemas de ecuaciones no lineales. Para el desarrollo de dichos algoritmos se ha empleado el paquete de cálculo numérico, simbólico y gráfico *Mathematica*® debido a las grandes posibilidades de cálculo y representación gráfica que ofrece. Es un sistema de computación numérico y simbólico que incorpora un excelente lenguaje de programación y la capacidad de integrar cálculos, gráficos y texto, en un mismo documento. Principalmente las características que distinguen a *Mathematica* de los programas de análisis convencionales son su versátil interfaz gráfica y su sofisticado lenguaje de programación. Como prueba de todo esto, la aplicación de *Mathematica* en los campos de la Economía, Física, Química, Biología o Lingüística. También se ha desarrollado un interfaz gráfico implementado con GUIkit, que permite desarrollar aplicaciones independientes con cálculos sofisticados y creación de gráficos.

La metodología empleada en este proyecto ha consistido básicamente en detallar la teoría matemática de cada método numérico, su diseño en pseudocódigo, su codificación y su desarrollo en el paquete de cálculo numérico, simbólico y gráfico *Mathematica*, y la resolución práctica de todos los ejemplos y problemas planteados para facilitar la comprensión de los algoritmos estudiados y comprender su aplicación práctica. En la resolución de los problemas se muestra como solución los cálculos más importantes que se

realizan en cada iteración para resolver el problema, un tabla resumen con los datos más importantes que resultan de cada iteración y, por último, la solución aproximada del problema. Además se ha creado una interfaz gráfica para que el usuario pueda resolver los sistemas de ecuaciones no lineales de una forma más fácil.

En matemáticas, los sistemas de ecuaciones no lineales representan sistemas cuyo comportamiento no es expresable como la suma de los comportamientos de sus partes. En particular, el comportamiento de sistemas de ecuaciones no lineales no está sujeto al principio de superposición, como lo es un sistema lineal. La linealidad de un sistema de ecuaciones permite a los investigadores hacer ciertas suposiciones matemáticas y aproximaciones, permitiendo un cálculo más sencillo de los resultados. Como los sistemas no lineales no son iguales a la suma de sus partes, usualmente son difíciles de modelar, y sus comportamientos con respecto a una variable dada, por ejemplo el tiempo, es extremadamente difícil de predecir. Además, los sistemas no lineales son sistemas en los que sus partes o componentes interactúan de tal forma que se da una continua influencia mutua o relación causal que se retroalimenta. Esta influencia mutua puede describirse mediante funciones no lineales.

Las ecuaciones no lineales son de interés en el campo de la ciencia y tecnología debido a que la mayoría de los problemas físicos son implícitamente no lineales en su naturaleza. Una ecuación no lineal es una ecuación de la forma $f(x) = 0$, para algún valor desconocido de x y no puede ser dibujada en un plano mediante una línea. En muchos casos, manipulando una ecuación no lineal algebraicamente, se puede dar una fórmula explícita para la obtención de la solución o soluciones. Por ejemplo para la ecuación de segundo grado, se dispone de una fórmula analítica que da su solución.

Sin embargo, en otras muchas ocasiones es muy difícil, incluso imposible en la mayor parte de los casos, obtener la solución exacta de la ecuación por métodos algebraicos. Algunos ejemplos que no puede ser resueltos de forma exacta son: $x - 2 = \sin(x) - 3$, $\cos(x) + \exp(x) = \sin(x) - 5$. En estos casos, es necesario recurrir a métodos numéricos para obtener una solución aproximada y para dar una estimación del error cometido en tal aproximación, es decir, aproximar la raíz con el grado de precisión deseado.

En este proyecto se han analizado seis métodos numéricos para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, estos métodos son los siguientes:

1. Método del Punto Fijo.
2. Método de Seidel.
3. Método de Newton.
4. Método de Cuasi - Newton.
5. Método de la Máxima Pendiente.
6. Método de Continuación u Homotopía.

Algunos ejemplos de aplicaciones de ecuaciones no lineales son: la relatividad general, la teoría del caos, las ecuaciones de Navier - Stokes de dinámica de fluidos, la óptica no lineal, el sistema del clima de la Tierra, el balanceo de un unicycle robot o la gestión de las organizaciones.

El principal objetivo de este proyecto es diseñar una herramienta que ayude a calcular

soluciones aproximadas a sistemas de ecuaciones no lineales mediante el desarrollo e implementación de diferentes métodos numéricos que resuelven de forma aproximada este tipo de sistemas de ecuaciones. Pero además, también se han conseguido otros objetivos como el estudio de los métodos numéricos que resuelven sistemas de ecuaciones no lineales y de la convergencia de dicho métodos para identificar el mejor método a emplear en cada tipo de problema, determinar el error cometido en la aproximación numérica de las soluciones.

Se ha diseñado un paquete de funciones en el lenguaje *Mathematica* que contiene los algoritmos numéricos que se emplean en la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, de esta forma se pueden abordar problemas del mundo real, que de otro modo sería casi imposible de resolver de forma manual, dado el elevado número de datos a procesar y a la cantidad de cálculos a realizar. Este paquete de funciones se ha creado siguiendo una estructura modular para permitir futuras integraciones con otros sistemas o mejoras.

Abstract

This Project consists mainly on the study of the mathematical basis, analysis and design of the different numerical algorithms that resolves problems of nonlinear equation systems. The packet of numerical calculus, symbolic and graphycal Mathematica is used for the algorithms because the packet has big possibilities of calculus and graphical representations. That is a system of numerical and symbolic computation that has an excelent programming language and capacity of make up calculus, graphics and text on one document. The mainly characteristics that distinguish Mathematica of conventional analitical program are her versatile graphical interface and her sophisticated programmimg language. As a proof of this, the application of Mathematica on fields such as Economy, Phisics, Chemestry, Biology or Language. As well, it has been developed a graphical interface implement with GUIkit, that allows to develop independent applications with sophisticates calculus and creation of graphics.

The methodology used in this Project consists basically on listing the mathematical theory of each numercial methods, its design on pseudocodem, its codification and developing with the packet of numerical calculus, symbolic and graphycal Mathematica, and the practical resolution of every examples and problems proposes to make easy the compresion of the studies algorithms and to comprise its practical application. In the resolution of problems it is shown as a solution the most important calculus that are carried out in such iteration for resolve the problem, a summary table with the most important data that results

in such iteration, and finally, the approximate solution of the problem. As well, a graphical interface is created for the user can resolve the nonlinear equation systems easily.

In mathematics, the nonlinear equation systems represents systems wich behaviour is not exppresable such the sum of the behaviour of its parts. In special, the behaviour of nonlinaer equation systems are not subject to the superposition principle, such as is a linear system. The liniality of the equation systems allows researchers make mathematical suppositions and approximations, permitting a easily calculus of results.

Such the nonlinear systems are not equals to the sum of its parts, usually the systems are dificult of model, and its behaviours with regard to one variable given, for example, the weather, is extremely difficult to predict. As well, the nonlinear systems are systems in that its parts or components interact with a continuous mutual influence. This mutual influence can be described with nonlinear functions.

The nonlinear equations are interested in the field of science and thecnology because the most of physical problems are implicitly nonlinear in her nature. A nonlinear equation is a equation of form $f(x) = 0$, for any unknown value of x and it can not be drawn in a plane with a line. In many cases, manipulating algebraticment a nonlinear equation, can give an explicit formula to obtain the solution or solutions. For example for the second grade equation, exists one analytical formule that gives the solition.

Nevertheless, in other cases is difficult, even impossible in the majority of cases, to obtain the exact solution of the equation whit algebratical methods. Some exaples that can not be resolves in the exact form are: $x - 2 = \text{sen}(x) - 3$, $\cos(x) + \text{Exp}(x) = \text{sen}(x) - 5$. In this cases,

is necessary to recourse to numerical methods to obtain an approximate solution and to give an estimation of the mistake maked on the approximation, it means, to approx the root with the preciosion rank whised.

Six numerical methods are analyzed in this project for resolve nonlinear equation systems, this methods are the followings:

1. Method of fixed point.
2. Method of Seidel
3. Method of Newton.
4. Method of Cuasi - Newton.
5. Method of maximun slope.
6. Method of Continuation or Homotopy.

Some examples of application of nonlinear equation are: the general relativity, the chaos theory, the Navier - Stockes equations of dinamyc fluids, the optics nonlinear, the weather climate system of the Earth or the organization management.

The mainly objective of this project is to design a tool that helps to calculate approximate solutions for nonlinear equations systems by means of developing and implementation of differents numerical methods that resolves this type of equation system with a approximate form. As well, other objetives are achived: the study of numercial methods that resolves nonlinear equation systems and convergence of the methods for identify the best method to

use in each type of problem, determinate the mistake maked on the numerical approximation of solutions.

A packet of functions in Mathematica language is designed and contains the numerical algorithms that are used on the resolution of nonlinear equation systems, on this form problems of the real world can be tackled that on other form will be hardly impossible to resolve with a manual form, given the raise number of dates to process and the lot of calculos to make. This packet of functions is created following a modular structure to allow futures integrations with other systems or improvements.

Índice

Agradecimientos.....	i
Resumen.....	ii
Abstract.....	vi
Índice.....	x
1. Introducción.....	1
2. Objetivos.....	5
3. Método del Punto Fijo.....	7
3.1 Introducción.....	7
3.2 Pseudocódigo.....	11
3.3 Problemas.....	12
4. Método de Seidel.....	41
4.1 Introducción.....	41
4.2 Pseudocódigo.....	41
4.3 Problemas.....	42
5. Método de Newton.....	56
5.1 Introducción.....	56
5.2 Pseudocódigo.....	60
5.3 Problemas.....	62
6. Método de Cuasi- Newton.....	149
6.1 Introducción.....	149
6.2 Pseudocódigo.....	154
6.3 Problemas.....	155
7. Método de la Máxima Pendiente.....	185

7.1 Introducción.....	185
7.2 Pseudocódigo.....	190
7.3 Problemas.....	192
 8. Método de Continuación u Homotopía.....	 210
8.1 Introducción.....	210
8.2 Pseudocódigo.....	215
8.3 Problemas.....	217
 9. Interfaz de Usuario.....	 239
9.1 Ventana inicial.....	239
9.2 Ventana Método del Punto Fijo.....	243
9.3 Ventana Método de Seidel.....	245
9.4 Ventana Método de Newton.....	247
9.5 Ventana Método de Cuasi - Newton.....	250
9.6 Ventana Método de la Máxima Pendiente.....	252
9.7 Ventana Método de Continuación u Homotopia.....	255
 10. Metodología.....	 258
11. Valoración económica.....	270
11.1. Introducción.....	270
11.2. Técnicas de estimación de costes.....	270
11.3. Costes del Proyecto.....	272
12. Conclusiones.....	273
Anexo I. Manual de Instalación y de Usuario.....	279
Manual de Instalación.....	279
Manual de Usuario.....	281
Bibliografía.....	282

CD-ROM con el código de los algoritmos numéricos de *Resolución de Sistemas de Ecuaciones no Lineales* en *Mathematica*[®].

1. Introducción

Este proyecto consiste principalmente en el estudio de las bases matemáticas, análisis y diseño de los diferentes algoritmos numéricos que resuelven el problema de los sistemas de ecuaciones no lineales. Para el desarrollo de dichos algoritmos se ha empleado el paquete de cálculo numérico, simbólico y gráfico *Mathematica*® debido a las grandes posibilidades de cálculo y representación gráfica que ofrece. También se ha desarrollado una interfaz gráfica implementada con GUIkit, que permite desarrollar aplicaciones independientes con cálculos sofisticados y creación de gráficos y que se incluye en la versión de *Mathematica*® 5.2. Por último, se han planteado y resuelto diferentes problemas para facilitar la comprensión de los algoritmos estudiados y comprender su aplicación práctica.

En matemáticas, los sistemas de ecuaciones no lineales representan sistemas cuyo comportamiento no es expresable como la suma de los comportamientos de sus partes. En particular, el comportamiento de sistemas de ecuaciones no lineales no está sujeto al principio de superposición, como lo es un sistema lineal. Un sistema lineal es el que su comportamiento no puede ser la suma de sus partes. La linealidad de un sistema de ecuaciones permite a los investigadores hacer ciertas suposiciones matemáticas y aproximaciones, permitiendo un cálculo más sencillo de los resultados. Como los sistemas no lineales no son iguales a la suma de sus partes, usualmente son difíciles de modelar, y sus comportamientos con respecto a una variable dada, por ejemplo el tiempo, es extremadamente difícil de predecir, además, los sistemas no lineales son sistemas en los que

sus partes o componentes interactúan de tal forma que se da una continua influencia mutua o relación causal que se retroalimenta. Esta influencia mutua puede describirse mediante funciones no lineales.

Las ecuaciones no lineales son de interés en el campo de la ciencia y tecnología debido a que la mayoría de los problemas físicos son implícitamente no lineales en su naturaleza. Una ecuación lineal puede ser descrita usando un operador lineal, L y se puede dibujar en un plano cartesiano mediante una línea. Una ecuación lineal en algún valor desconocido de x tiene la forma $Lx = 0$. Una ecuación no lineal es una ecuación de la forma $f(x) = 0$, para algún valor desconocido de x y no puede ser dibujada en un plano mediante una línea. Para poder resolver cualquier ecuación se necesita decidir en qué espacio matemático se encuentra la solución x . Podría ser que x es un número real, un vector o una función. Las soluciones de ecuaciones lineales pueden ser generalmente descritas como una superposición de otras soluciones de la misma ecuación. Esto hace que las ecuaciones lineales sean más fáciles de resolver. Las ecuaciones no lineales son mucho más complejas, y mucho más difíciles de entender por la falta de soluciones simples superpuestas. Para las ecuaciones no lineales las soluciones generalmente no forman un espacio vectorial y, en general, no pueden ser superpuestas para producir nuevas soluciones. Esto hace el resolver las ecuaciones mucho más difícil que en sistemas lineales.

En muchos casos, manipulando la ecuación algebraicamente, se puede dar una fórmula explícita para la obtención de la solución o soluciones. Por ejemplo, para la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, se dispone de la fórmula

$$x = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \right) / (2a).$$

Sin embargo, en otras muchas ocasiones es muy difícil, incluso imposible en la mayor parte de los casos, obtener la solución exacta de la ecuación por métodos algebraicos. Algunos ejemplos que no puede ser resueltos de forma exacta son: $x - 2 = \sin(x) - 3 \cos(x)$, $e^{2x} - 5$. En estos casos, es necesario recurrir a métodos numéricos para obtener una solución aproximada y para dar una estimación del error cometido en tal aproximación, es decir, aproximar la raíz con el grado de precisión deseado.

La resolución de un sistema de ecuaciones no lineales es un problema que se evita si es posible, normalmente aproximando el sistema no lineal mediante un sistema de ecuaciones lineales. Cuando esto no resulta satisfactorio, hay que abordar el problema directamente aplicando los diferentes métodos disponibles.

En este proyecto se van a analizar seis métodos numéricos para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, estos métodos son los siguientes:

1. Método del Punto Fijo.
2. Método de Seidel.
3. Método de Newton.
4. Método de Cuasi - Newton.
5. Método de la Máxima Pendiente.
6. Método de Continuación u Homotopía.

Algunos ejemplos de aplicaciones de ecuaciones no lineales son: la relatividad

general, la teoría del caos, las ecuaciones de Navier – Stokes de dinámica de fluidos, la óptica no lineal, el sistema del clima de la Tierra, el balanceo de un unicycle robot, la ecuación de transporte de Boltzmann, la ecuación de Kortewg-de Vries, la ecuación no lineal de Schroedinger o la gestión de las organizaciones.

En resumen, el objetivo del presente proyecto consiste en el estudio de los sistemas de ecuaciones no lineales. Para ello, se analizarán los métodos o algoritmos numéricos para la resolución de estos sistemas y se hará un estudio sobre la aplicabilidad de cada método a diferentes tipos de sistemas de ecuaciones no lineales.

2. Objetivos

El principal objetivo de este proyecto es diseñar una herramienta que ayude a calcular soluciones aproximadas a sistemas de ecuaciones no lineales mediante el desarrollo e implementación de diferentes métodos numéricos que resuelven de forma aproximada este tipo de sistemas de ecuaciones.

Pero además, también se desprenden los siguientes sub-objetivos en el desarrollo del software para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales:

1. El estudio de los métodos numéricos que resuelven sistemas de ecuaciones no lineales.
2. Estudiar la convergencia de los métodos para saber cuál es el método más adecuado.
3. Resolución mediante métodos numéricos de los sistemas de ecuaciones no lineales.
4. Determinar el error cometido en la aproximación numérica de las soluciones.
5. Diseñar un paquete de funciones en el lenguaje *Mathematica* que contendrá los algoritmos numéricos que se emplearán en la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales.
6. Aprendizaje y familiarización con el desarrollo e implantación de algoritmos en *Mathematica*.
7. Abordar problemas del mundo real, que de otro modo sería casi imposible de

resolver de forma manual, dado el elevado número de datos a procesar y a la cantidad de cálculos a realizar.

8. Emplear medios informáticos actuales como una herramienta más en el estudio y aprendizaje.
9. Desarrollar una interfaz gráfica de usuario con el paquete GUIKit de *Mathematica*.
10. Desarrollo modular del software lo que permite futuras integraciones con otros sistemas y la inclusión de mejoras o modificaciones.
11. La herramienta debe ofrecer como salida, un archivo de texto, en el que se presente el informe detallado de las operaciones realizadas en las diferentes iteraciones realizadas en cada método, muy útiles en cuanto al estudio y comprensión de los algoritmos.
12. Y por último, desarrollar un software útil para que en casos futuros sea utilizado de forma fácil para poder resolver problemas que necesiten calcular sistemas de ecuaciones no lineales.

3. Método del Punto Fijo

3.1 Introducción

Un sistema de ecuaciones no lineales tiene la forma

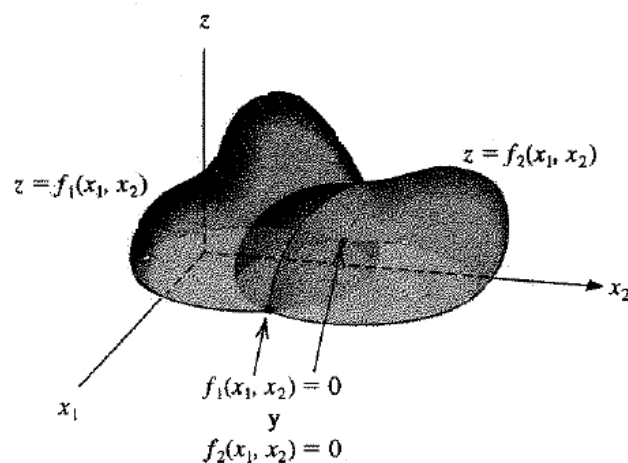
$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1)$$

donde se puede considerar que toda función f_i aplica un vector

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \quad (2)$$

del espacio n – dimensional \mathbb{R}^n en la recta real \mathbb{R} .

En la siguiente figura se muestra una representación geométrica de un sistema no lineal cuando $n = 2$.



Sistema no lineal cuando $n = 2$.

Figura 1

De manera general, un sistema de n ecuaciones no lineales con n incógnitas puede representarse mediante la definición de una función F de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n por medio de :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Si se usa la notación vectorial para representar las variables x_1, x_2, \dots, x_n , el sistema no lineal anterior se escribe como sigue:

$$F(x) = 0. \quad (4)$$

Las funciones f_1, f_2, \dots, f_n son, entonces, las *funciones coordenadas* o componentes de F .

Para poder aplicar el método del *Punto Fijo* en la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales es necesario el estudio de algunos conceptos relacionados con la continuidad y diferenciabilidad de las funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n y de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} .

Definición 1. Sea f una función definida en el conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ con valores en \mathbb{R} . Se dice que la función f tiene un **límite** L en x_0 y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

si, dado cualquier número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

siempre que $x \in D$ y $0 < \|x - x_0\| < \delta$.

En esta definición puede usarse cualquier norma que resulte conveniente; el valor específico de δ dependerá de la norma elegida, pero la existencia y el valor del límite L son independientes de la norma utilizada.

Definición 2. Se dice que la función f de $D \subset \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R} es **continua** en $x_0 \in D$ si existe

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

se tiene $f(x_0)$ y además

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Se dice, además, que f es continua en el conjunto D si f es continua en cada punto del conjunto D , lo que se expresa escribiendo $f \in C(D)$.

Se definen los conceptos de límite y continuidad para funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n a través de sus funciones componentes de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} .

Definición 3. Sea F una función de $D \subset \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R}^n de la forma

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

El límite de F es

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = L = (L_1, L_2, \dots, L_n)^t$$

si y sólo si $\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = L_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

La función F es continua en $x_0 \in D$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x)$ existe y $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$.

Además, F es continua en el conjunto D si lo es en cada x de D . Este concepto se expresa escribiendo $F \in C(D)$.

▼ **Teorema 1.**

Sea f una función de $D \subset \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R} y $x_0 \in D$. Si existen las constantes $\delta > 0$ y $k > 0$ con

$$\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right| \leq K, \text{ para cada } j = 1, 2, \dots, n.$$

siempre que $\|x - x_0\| < \delta$ y $x \in D$, entonces f es continua en x_0 .

Definición 4. Por definición, una función G de $D \subset \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R}^n tiene un **punto fijo** en $p \in D$ si $G(p) = p$.

▼ **Teorema 2.**

Sea $D = \{ \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^t \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ para toda } i = 1, 2, \dots, n \}$ para algún conjunto de constantes a_1, a_2, \dots, a_n y b_1, b_2, \dots, b_n . Suponiendo que G es una función continua de $D \subset \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R}^n con la propiedad de que $G(x) \in D$ siempre que $x \in D$.

Entonces G tiene un **punto fijo** en D .

Y suponiendo, además, que G tiene derivadas parciales continuas y que existe una constante $k < 1$ con

$$\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{K}{n} \text{ siempre que } x \in D, \text{ para toda } j = 1, 2, \dots, n$$

y toda función componente g_i . Entonces la sucesión $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ definida por una $x^{(0)}$ selec-

cionada en D arbitrariamente y generada por

$$x^{(k)} = G(x^{(k-1)}), \quad \text{para cada } k \geq 1,$$

converge en el punto fijo único $p \in D$ y

$$\|x^{(k)} - p\|_{\infty} \leq \frac{K^k}{1-K} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{\infty}.$$

3.2 Pseudocódigo

• Algoritmo 1. Algoritmo del Punto Fijo

El pseudocódigo del algoritmo que resuelve un sistema de ecuaciones no lineales mediante el método del *Punto Fijo* es el siguiente.

Algoritmo del Punto Fijo

Input $(\{f(x_1, \dots, x_m)\}_1^m, \{f_{\text{trans}}(x_1, \dots, x_m)\}_1^m, (x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ \dots \ x_m^{(0)})^T, \text{error})$

(* Se inicializan las variables *)

$p \leftarrow (x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ \dots \ x_m^{(0)})^T$

error_inicial \leftarrow 160

$i \leftarrow 0$

While error_inicial \geq error **do**

(* Se evalúa la función transformada en el punto*)

$$p_sig \leftarrow \begin{pmatrix} f_{\text{trans}1}(p) \\ f_{\text{trans}2}(p) \\ \dots \\ f_{\text{trans}3}(p) \end{pmatrix}$$

(* Cálculo de la norma de la distancia entre los dos puntos *)

error_inicial \leftarrow $\|p_sig - p\|_{\infty}$

$p \leftarrow p_sig$

$i \leftarrow i + 1$

End

Return $(x^{(i)} \equiv (p)^T)$

Output

3.3 Problemas

- **Problema 1.** Aplíquese el método de *Punto Fijo* para sistemas no lineales para aproximar el sistema de ecuaciones no lineales siguiente, iniciando el método en el punto inicial $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0.1, 0.1, -0.1)^T$ e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-5}$.

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 1/2 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 - 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + (10\pi - 3)/3 = 0.$$

Solución

```
Clear[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
ecuaciones = {3 x1 - Cos[x2 * x3] + 1/2,
              x1^2 - 81 (x2 - 0.1)^2 + Sin[x3] + 1.06, Exp[-x1 * x2] + 20 x3 + (10 Pi - 3)/3};
ecuacionestrans = {1/6 (2 Cos[x2 * x3] + 1), 1/9 (Sqrt[x1^2 + Sin[x3] + 1.06] - 0.1,
                  -1/20 (Exp[-x1 * x2] + (10 Pi - 3)/3)};
d = 10.^-5; p = {0.1, 0.1, -0.1};
puntoFijo[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método del *Punto Fijo* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\cos(x_2 x_3) + 3x_1 + \frac{1}{2} \\ x_1^2 - 81(x_2 - 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 \\ 20x_3 + e^{-x_1 x_2} + \frac{1}{3}(-3 + 10\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método del *Punto Fijo*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} (2 \cos((x_2^{(k-1)})(x_3^{(k-1)})) + 1) \\ \frac{1}{9} \sqrt{(x_1^{(k-1)})^2 + \sin((x_3^{(k-1)})) + 1.06} - 0.1 \\ \frac{1}{20} (-e^{-(x_1^{(k-1)})(x_2^{(k-1)})} + \frac{1}{3}(3 - 10\pi)) \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$	
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.100000000000 \\ 0.100000000000 \\ -0.100000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499983333472 \\ 0.00944114960371 \\ -0.523101267286 \end{pmatrix}$	0.423101
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499983333472 \\ 0.00944114960371 \\ -0.523101267286 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499995934919 \\ 0.0000255677467667 \\ -0.523363310909 \end{pmatrix}$	0.00941558
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499995934919 \\ 0.0000255677467667 \\ -0.523363310909 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499999999970 \\ 0.0000123367203634 \\ -0.523598136414 \end{pmatrix}$	0.000234826
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499999999970 \\ 0.0000123367203634 \\ -0.523598136414 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499999999993 \\ 3.41679062543 \times 10^{-8} \\ -0.523598467181 \end{pmatrix}$	0.0000123026
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499999999993 \\ 3.41679062543 \times 10^{-8} \\ -0.523598467181 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500000000000 \\ 1.64870403996 \times 10^{-8} \\ -0.523598774744 \end{pmatrix}$	3.07563×10^{-7}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.500000000000 \\ 1.64870403996 \times 10^{-8} \\ -0.523598774744 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 2.** Sea el sistema de ecuaciones no lineales siguiente.

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0.$$

Aplíquese el método de *Punto Fijo* iniciando el método en el punto inicial $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T$ e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-5}$.

a) $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (0, 0)^T.$

b) $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (0.8, 0.8)^T.$

Solución

a)

```
Clear[ecuaciones, p, d];
ecuaciones = {x1^2 + 10 x1 + x2^2 + 8, x1 x2^2 + x1 - 10 x2 + 8};
```

```
ecuacionestrans = { 1/10 (x1^2 + x2^2 + 8), 1/10 (x1 x2^2 + x1 + 8) };
d = 10.^-5; p = {0.0, 0.0};
puntoFijo[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método del *Punto Fijo* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 10x_1 + x_2^2 + 8 \\ x_1 x_2^2 - 10x_2 + x_1 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método del *Punto Fijo*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \left((x_1^{(k-1)})^2 + (x_2^{(k-1)})^2 + 8 \right) \\ \frac{1}{10} \left((x_1^{(k-1)}) (x_2^{(k-1)})^2 + (x_1^{(k-1)}) + 8 \right) \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$	
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.800000000000 \\ 0.800000000000 \end{pmatrix}$	0.8
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.800000000000 \\ 0.800000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.928000000000 \\ 0.931200000000 \end{pmatrix}$	0.1312
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.928000000000 \\ 0.931200000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.972831744000 \\ 0.973269983232 \end{pmatrix}$	0.0448317
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.972831744000 \\ 0.973269983232 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.989365606239 \\ 0.989435095259 \end{pmatrix}$	0.0165339
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.989365606239 \\ 0.989435095259 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.995782611054 \\ 0.995793653594 \end{pmatrix}$	0.006417
5	$\begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.995782611054 \\ 0.995793653594 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.998318800902 \\ 0.998320562762 \end{pmatrix}$	0.00253619
6	$\begin{pmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.998318800902 \\ 0.998320562762 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999328437427 \\ 0.999328719003 \end{pmatrix}$	0.00100964
7	$\begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999328437427 \\ 0.999328719003 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999731521447 \\ 0.999731566479 \end{pmatrix}$	0.000403084
8	$\begin{pmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999731521447 \\ 0.999731566479 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999892631999 \\ 0.999892639203 \end{pmatrix}$	0.000161111
9	$\begin{pmatrix} x_1^{(9)} \\ x_2^{(9)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999892631999 \\ 0.999892639203 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999957056546 \\ 0.999957057698 \end{pmatrix}$	0.0000644245

10	$\begin{pmatrix} x_1^{(10)} \\ x_2^{(10)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999957056546 \\ 0.999957057698 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999982823218 \\ 0.999982823402 \end{pmatrix}$	0.0000257667
11	$\begin{pmatrix} x_1^{(11)} \\ x_2^{(11)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999982823218 \\ 0.999982823402 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999993129383 \\ 0.999993129412 \end{pmatrix}$	0.0000103062
12	$\begin{pmatrix} x_1^{(12)} \\ x_2^{(12)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999993129383 \\ 0.999993129412 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999997251769 \\ 0.999997251773 \end{pmatrix}$	4.12239×10^{-6}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{13} = \begin{pmatrix} 0.999997251769 \\ 0.999997251773 \end{pmatrix}$$

Solución

b)

```
Clear[ecuaciones, p, d];
ecuaciones = {x1^2 + 10 x1 + x2^2 + 8, x1 x2^2 + x1 - 10 x2 + 8};
ecuacionestrans = {1/10 (x1^2 + x2^2 + 8), 1/10 (x1 x2^2 + x1 + 8)};
d = 10.^-5; p = {0.8, 0.8};
puntoFijo[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método del *Punto Fijo* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 10 x_1 + x_2^2 + 8 \\ x_1 x_2^2 - 10 x_2 + x_1 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método del *Punto Fijo*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \left((x_1^{(k-1)})^2 + (x_2^{(k-1)})^2 + 8 \right) \\ \frac{1}{10} \left((x_1^{(k-1)}) (x_2^{(k-1)})^2 + (x_1^{(k-1)} + 8) \right) \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i		P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.800000000000 \\ 0.800000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.928000000000 \\ 0.931200000000 \end{pmatrix}$	0.1312

1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.928000000000 \\ 0.931200000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.972831744000 \\ 0.973269983232 \end{pmatrix}$	0.0448317
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.972831744000 \\ 0.973269983232 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.989365606239 \\ 0.989435095259 \end{pmatrix}$	0.0165339
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.989365606239 \\ 0.989435095259 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.995782611054 \\ 0.995793653594 \end{pmatrix}$	0.006417
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.995782611054 \\ 0.995793653594 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.998318800902 \\ 0.998320562762 \end{pmatrix}$	0.00253619
5	$\begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.998318800902 \\ 0.998320562762 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999328437427 \\ 0.999328719003 \end{pmatrix}$	0.00100964
6	$\begin{pmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999328437427 \\ 0.999328719003 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999731521447 \\ 0.999731566479 \end{pmatrix}$	0.000403084
7	$\begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999731521447 \\ 0.999731566479 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999892631999 \\ 0.999892639203 \end{pmatrix}$	0.000161111
8	$\begin{pmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999892631999 \\ 0.999892639203 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999957056546 \\ 0.999957057698 \end{pmatrix}$	0.0000644245
9	$\begin{pmatrix} x_1^{(9)} \\ x_2^{(9)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999957056546 \\ 0.999957057698 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999982823218 \\ 0.999982823402 \end{pmatrix}$	0.0000257667
10	$\begin{pmatrix} x_1^{(10)} \\ x_2^{(10)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999982823218 \\ 0.999982823402 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999993129383 \\ 0.999993129412 \end{pmatrix}$	0.0000103062
11	$\begin{pmatrix} x_1^{(11)} \\ x_2^{(11)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999993129383 \\ 0.999993129412 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.999997251769 \\ 0.999997251773 \end{pmatrix}$	4.12239×10^{-6}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0.999997251769 \\ 0.999997251773 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 3.** Sean las ecuaciones siguientes:

$$f_1(x_1, x_2) = 5x_1^2 - x_2^2 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0.$$

Utilizar el método de *Punto Fijo* para aproximar el sistema de ecuaciones no lineales iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-5}$, comenzando por la aproximación inicial:

$$P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (0.5, 0.5)^T.$$

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, d];
ecuaciones = {5 x1^2 - x2^2, x2 - 0.25 (Sin[x1] + Cos[x2])};
```

```

ecuacionestrans = {sqrt(x2^2/5), 0.25 (Sin[x1] + Cos[x2])};
d = 10.^-5; p = {0.5, 0.5};
puntoFijo[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
    
```

Método del *Punto Fijo* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 5x_1^2 - x_2^2 \\ x_2 - 0.25(\cos(x_2) + \sin(x_1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método del *Punto Fijo*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{(x_2^{(k-1)})^2}}{\sqrt{5}} \\ 0.25(\cos(x_2^{(k-1)}) + \sin(x_1^{(k-1)})) \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.500000000000 \\ 0.500000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.223606797750 \\ 0.339252025124 \end{pmatrix}$	0.276393
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.223606797750 \\ 0.339252025124 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.151718117936 \\ 0.291187975613 \end{pmatrix}$	0.0718887
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.151718117936 \\ 0.291187975613 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.130223221540 \\ 0.277260057885 \end{pmatrix}$	0.0214949
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.130223221540 \\ 0.277260057885 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.123994467375 \\ 0.272916126437 \end{pmatrix}$	0.00622875
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.123994467375 \\ 0.272916126437 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.122051802174 \\ 0.271666490106 \end{pmatrix}$	0.00194267
5	$\begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.122051802174 \\ 0.271666490106 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.121492947817 \\ 0.271268513444 \end{pmatrix}$	0.000558854
6	$\begin{pmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.121492947817 \\ 0.271268513444 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.121314967243 \\ 0.271156513360 \end{pmatrix}$	0.000177981
7	$\begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.121314967243 \\ 0.271156513360 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.121264879283 \\ 0.271119846920 \end{pmatrix}$	0.000050088
8	$\begin{pmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.121264879283 \\ 0.271119846920 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.121248481552 \\ 0.271109872001 \end{pmatrix}$	0.0000163977
9	$\begin{pmatrix} x_1^{(9)} \\ x_2^{(9)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.121248481552 \\ 0.271109872001 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.121244020633 \\ 0.271106470504 \end{pmatrix}$	4.46092×10^{-6}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{10} = \begin{pmatrix} 0.121244020633 \\ 0.271106470504 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 4.** Sea el sistema no lineal de ecuaciones siguiente:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 1/2 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 625x_2^2 - 1/4 = 0,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{(-x_1 x_2)} + 20x_3 + (10\pi - 3)/3 = 0.$$

Aplíquese el método de *Punto Fijo* con la aproximación inicial $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (1, 1, 1)^T$ y aplicando el método hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-6}$.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, d];
ecuaciones = { 3 x1 - Cos[x2 * x3] - 1 / 2,
  x1^2 - 625 x2^2 - 1 / 4, Exp[-x1 * x2] + 20 x3 + (10 Pi - 3) / 3 };
ecuacionestrans = { 1/3 (Cos[x2 * x3] + 1 / 2),
  1/25 (Sqrt[x1^2 + 0.3125] - 0.03), -1/20 Exp[-x1 * x2] - (10 Pi - 3) / 60 };
d = 10.^-6; p = {1.0, 1.0, 1.0};
puntoFijo[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método del *Punto Fijo* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\cos(x_2 x_3) + 3x_1 - \frac{1}{2} \\ x_1^2 - 625x_2^2 - \frac{1}{4} \\ 20x_3 + e^{-x_1 x_2} + \frac{1}{3}(-3 + 10\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 1. \\ 1. \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método del *Punto Fijo*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} (\cos((x_2^{(k-1)})(x_3^{(k-1)})) + \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{25} (\sqrt{(x_1^{(k-1)})^2 + 0.3125} - 0.03) \\ -\frac{1}{20} e^{-(x_1^{(k-1)})(x_2^{(k-1)})} + \frac{1}{60} (3 - 10\pi) \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i		P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.000000000000 \\ 1.000000000000 \\ 1.000000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.346767435289 \\ 0.0446257569496 \\ -0.491992747657 \end{pmatrix}$	1.49199
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.346767435289 \\ 0.0446257569496 \\ -0.491992747657 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499919662207 \\ 0.0251134233175 \\ -0.522830993577 \end{pmatrix}$	0.153152
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499919662207 \\ 0.0251134233175 \\ -0.522830993577 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499971267263 \\ 0.0287978577545 \\ -0.522974964963 \end{pmatrix}$	0.00368443
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499971267263 \\ 0.0287978577545 \\ -0.522974964963 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499962197310 \\ 0.0287992338059 \\ -0.522884028376 \end{pmatrix}$	0.0000909366
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499962197310 \\ 0.0287992338059 \\ -0.522884028376 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499962206844 \\ 0.0287989919494 \\ -0.522884007342 \end{pmatrix}$	2.41856×10^{-7}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.499962206844 \\ 0.0287989919494 \\ -0.522884007342 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 5.** Aproximar las soluciones de los siguientes sistemas no lineales, empleando el método de *Punto Fijo* con la aproximación inicial dada, iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-5}$.

- a) $f_1(x_1, x_2, x_3) = 15x_1 - 13 + x_2^2 - 4x_3 = 0$,
 $f_2(x_1, x_2, x_3) = 10x_2 - 11 - x_3 + x_1^2 = 0$,
 $f_3(x_1, x_2, x_3) = 25x_3 - 22 - x_2^3 = 0$
 $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (1, 1, 1)^T$
- b) $f_1(x_1, x_2, x_3) = 1 - x_1 - \cos(x_1 x_2 x_3) = 0$,
 $f_2(x_1, x_2, x_3) = 1 - (1 - x_1)^{1/4} - 0.05x_3^2 - x_2 + 0.15x_3 = 0$,
 $f_3(x_1, x_2, x_3) = 1 + 0.1x_2^2 - 0.01x_2 - x_3 + x_1^2 = 0$,
 $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0, -0.1, 0.5)^T$
- c) $f_1(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 - 2\cos(x_2 x_3) - 1 = 0$,
 $f_2(x_1, x_2, x_3) = 9x_2 + \sqrt{x_1^2} + \sin(x_3) + 1.06 + 0.9 = 0$,
 $f_3(x_1, x_2, x_3) = 60x_3 + 3e^{-x_1 x_2} + 10\pi - 3 = 0$
 $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0, 0, 0)^T$

Solución

a)

```
Clear[ecuaciones, p, d];
ecuaciones = {15 x1 - 13 + x22 - 4 x3, 10 x2 - 11 - x3 + x12, 25 x3 - 22 - x23};
ecuacionestrans = {1/15 (13 - x22 + 4 x3), 1/10 (11 + x3 - x12), 1/25 (22 + x23)};
d = 10.-5; p = {1.0, 1.0, 1.0};
puntoFijo[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método del *Punto Fijo* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2^2 + 15x_1 - 4x_3 - 13 \\ x_1^2 + 10x_2 - x_3 - 11 \\ -x_2^3 + 25x_3 - 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 1. \\ 1. \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método del *Punto Fijo*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} \left(-(x_2^{(k-1)})^2 + 4(x_3^{(k-1)}) + 13 \right) \\ \frac{1}{10} \left(-(x_1^{(k-1)})^2 + (x_3^{(k-1)}) + 11 \right) \\ \frac{1}{25} \left((x_2^{(k-1)})^3 + 22 \right) \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000000000000 \\ 1.000000000000 \\ 1.000000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.066666666667 \\ 1.100000000000 \\ 0.920000000000 \end{pmatrix}$	0.1
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.066666666667 \\ 1.100000000000 \\ 0.920000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.031333333333 \\ 1.078222222222 \\ 0.933240000000 \end{pmatrix}$	0.0353333
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.031333333333 \\ 1.078222222222 \\ 0.933240000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.03802645597 \\ 1.08695915556 \\ 0.930140057375 \end{pmatrix}$	0.00873693

3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.03802645597 \\ 1.08695915556 \\ 0.930140057375 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.03593866824 \\ 1.08526411341 \\ 0.931368829074 \end{pmatrix}$	0.00208779
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.03593866824 \\ 1.08526411341 \\ 0.931368829074 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.03651180803 \\ 1.08581999047 \\ 0.931128884592 \end{pmatrix}$	0.00057314
5	$\begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \\ x_3^{(5)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.03651180803 \\ 1.08581999047 \\ 0.931128884592 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.03636736578 \\ 1.08567721564 \\ 0.931207490160 \end{pmatrix}$	0.000144442
6	$\begin{pmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \\ x_3^{(6)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.03636736578 \\ 1.08567721564 \\ 0.931207490160 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.03640899627 \\ 1.08571501733 \\ 0.931187292947 \end{pmatrix}$	0.0000416305
7	$\begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \\ x_3^{(7)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.03640899627 \\ 1.08571501733 \\ 0.931187292947 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.03639813820 \\ 1.08570436854 \\ 0.931192639933 \end{pmatrix}$	0.0000108581
8	$\begin{pmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \\ x_3^{(8)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.03639813820 \\ 1.08570436854 \\ 0.931192639933 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.03640110559 \\ 1.08570715391 \\ 0.931191133641 \end{pmatrix}$	2.9674×10^{-6}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_9 = \begin{pmatrix} 1.03640110559 \\ 1.08570715391 \\ 0.931191133641 \end{pmatrix}$$

Solución

b)

```
Clear[ecuaciones, p, d];
ecuaciones = {1 - x1 - Cos [ x1 x2 x3 ],
  1 - (1 - x1)1/4 - 0.05 x32 - x2 + 0.15 x3 , 1 + 0.1 x22 - 0.01 x2 - x3 + x12};
ecuacionestrans = {1 - Cos [ x1 x2 x3 ],
  1 - (1 - x1)1/4 - 0.05 x32 + 0.15 x3 , 1 + 0.1 x22 - 0.01 x2 + x12};
d = 10.-5; p = {0.0, -0.1, 0.5};
puntoFijo[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método del *Punto Fijo* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\cos(x_1 x_2 x_3) - x_1 + 1 \\ -0.05 x_3^2 + 0.15 x_3 - x_2 - \sqrt[4]{1 - x_1} + 1 \\ x_1^2 + 0.1 x_2^2 - 0.01 x_2 - x_3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ -0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método del *Punto Fijo*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \cos((x_1^{(k-1)})(x_2^{(k-1)})(x_3^{(k-1)})) \\ -0.05 (x_3^{(k-1)})^2 + 0.15 (x_3^{(k-1)}) - \sqrt[4]{1 - (x_1^{(k-1)})} + 1 \\ (x_1^{(k-1)})^2 + 0.1 (x_2^{(k-1)})^2 - 0.01 (x_2^{(k-1)}) + 1 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.100000000000 \\ 0.500000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.062500000000 \\ 1.002000000000 \end{pmatrix}$	0.502
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.062500000000 \\ 1.002000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.100099800000 \\ 0.999765625000 \end{pmatrix}$	0.0375998
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.100099800000 \\ 0.999765625000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.0999882785034 \\ 1.00000099900 \end{pmatrix}$	0.000235374
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0999882785034 \\ 1.00000099900 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.100000049950 \\ 0.999999882799 \end{pmatrix}$	0.0000117714
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.100000049950 \\ 0.999999882799 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.0999999941399 \\ 1.000000000050 \end{pmatrix}$	1.17701×10^{-7}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0999999941399 \\ 1.000000000050 \end{pmatrix}$$

Solución

c)

```
Clear[ecuaciones, p, d];
ecuaciones = { 6 x1 - 2 Cos[x2 x3] - 1,
  9 x2 + Sqrt[x1^2 + Sin[x3] + 1.06] + 0.9, 60 x3 + 3 Exp[-x1 x2] + 10 Pi - 3};
ecuacionestrans = { 1/3 Cos[x2 x3] + 1/6, -1/9 Sqrt[x1^2 + Sin[x3] + 1.06] - 0.1,
  -1/20 Exp[-x1 * x2] - 10 Pi / 60};
d = 10.^-5; p = {0., 0., 0.};
puntoFijo[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método del *Punto Fijo* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -2 \cos(x_2 x_3) + 6 x_1 - 1 \\ 9 x_2 + \sqrt{x_1^2 + \sin(x_3) + 1.06} + 0.9 \\ 60 x_3 + 3 e^{-x_1 x_2} + 10 \pi - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método del *Punto Fijo*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cos((x_2^{(k-1)})(x_3^{(k-1)})) + \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{9} \sqrt{(x_1^{(k-1)})^2 + \sin((x_3^{(k-1)})) + 1.06} - 0.1 \\ -\frac{1}{20} e^{-(x_1^{(k-1)})(x_2^{(k-1)})} + \frac{1}{60} (3 - 10 \pi) \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500000000000 \\ -0.214395890455 \\ -0.523598775598 \end{pmatrix}$	0.523599
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.500000000000 \\ -0.214395890455 \\ -0.523598775598 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.497901916407 \\ -0.200000000000 \\ -0.529256504414 \end{pmatrix}$	0.0143959

2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.497901916407 \\ -0.200000000000 \\ -0.529256504414 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.498134326654 \\ -0.199567869407 \\ -0.528834138957 \end{pmatrix}$	0.000432131
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.498134326654 \\ -0.199567869407 \\ -0.528834138957 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.498145333572 \\ -0.199604819327 \\ -0.528824817283 \end{pmatrix}$	0.0000369499
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.498145333572 \\ -0.199604819327 \\ -0.528824817283 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.498144712711 \\ -0.199605997698 \\ -0.528825955120 \end{pmatrix}$	1.17837×10^{-6}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.498144712711 \\ -0.199605997698 \\ -0.528825955120 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 6..** Dado el siguiente problema no lineal

$$f_1(x_1, x_2) = -x_1(1 + x_1) + 2x_2 = 18,$$

$$f_2(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 6)^2 = 25.$$

- a) Representar gráficamente las curvas f_1 y f_2 .
 b) Calcular la solución aproximada del sistema empleando el método de *Punto Fijo* comenzando en los puntos

$$P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (2, 11)^T,$$

$$P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (-1.5, 10.5)^T$$

e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 5 \times 10^{-5}$.

Solución

a)

```
<< Graphics`ImplicitPlot`;
```

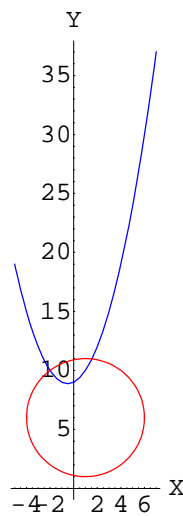
```
Clear[ecuaciones, p, m, d, f, g, g1, g2, g];
f = -x (1 + x) + 2 y - 18;
g = (x - 1)^2 + (y - 6)^2 - 25;
Print["Representación gráfica de la solución",
      "\n\t f_1(x, y) = ", f, "\n\t f_2(x, y) = ", g];
g1 = ImplicitPlot[f == 0, {x, -5, 7},
      PlotStyle -> {{Thickness[0.010], RGBColor[0, 0, 1]}},
      AxesLabel -> {"X", "Y"}, DisplayFunction -> Identity];
g2 = ImplicitPlot[g == 0, {x, -5, 7},
```

```
PlotStyle -> {{Thickness [0.010], RGBColor [1, 0, 0]}},
AxesLabel -> {"X", "Y"}, DisplayFunction -> Identity];
g = Show[g1, g2, AxesLabel -> {"X", "Y"},
AspectRatio -> Automatic, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

Representación gráfica de la solución

$$f_1(x, y) = -x(x+1) + 2y - 18$$

$$f_2(x, y) = (x-1)^2 + (y-6)^2 - 25$$



Solución

b)

```
Clear[ecuaciones, p, d];
ecuaciones = {-x1 (1 + x1) + 2 x2 - 18, (x1 - 1)^2 + (x2 - 6)^2 - 25};
ecuacionestrans = {-0.5 + Sqrt[2 x2 - 17.75], Sqrt[25 - (x1 - 1)^2 + 6]};
d = 10.^-5; p = {2.0, 11.0};
puntoFijo[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método del *Punto Fijo* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_1(x_1 + 1) + 2x_2 - 18 \\ (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 6)^2 - 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2. \\ 11. \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método del *Punto Fijo*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2(x_2^{(k-1)}) - 17.75} - 0.5 \\ \sqrt{25 - ((x_1^{(k-1)}) - 1)^2 + 6} \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.000000000000 \\ 11.000000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.56155281281 \\ 10.8989794856 \end{pmatrix}$	0.438447
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.56155281281 \\ 10.8989794856 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.51195401815 \\ 10.9683657714 \end{pmatrix}$	0.0693863
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.51195401815 \\ 10.9683657714 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.54615042038 \\ 10.9737212511 \end{pmatrix}$	0.0341964
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.54615042038 \\ 10.9737212511 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.54876609259 \\ 10.9700824659 \end{pmatrix}$	0.00363879
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.54876609259 \\ 10.9700824659 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.54698923590 \\ 10.9697943394 \end{pmatrix}$	0.00177686
5	$\begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.54698923590 \\ 10.9697943394 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.54684847479 \\ 10.9699902189 \end{pmatrix}$	0.00019588
6	$\begin{pmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.54684847479 \\ 10.9699902189 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.54694417065 \\ 10.9700057088 \end{pmatrix}$	0.0000956959
7	$\begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.54694417065 \\ 10.9700057088 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.54695173798 \\ 10.9699951785 \end{pmatrix}$	0.0000105303
8	$\begin{pmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.54695173798 \\ 10.9699951785 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.54694659358 \\ 10.9699943457 \end{pmatrix}$	5.1444×10^{-6}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_9 = \begin{pmatrix} 1.54694659358 \\ 10.9699943457 \end{pmatrix}$$

```
Clear[ecuaciones, p, d];
ecuaciones = {-x1 (1 + x1) + 2 x2 - 18, (x1 - 1)^2 + (x2 - 6)^2 - 25};
ecuacionestrans = {-0.5 - Sqrt[2 x2 - 17.75], Sqrt[25 - (x1 - 1)^2 + 6]};
d = 10.^-5; p = {-1.5, 10.5};
puntoFijo[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método del *Punto Fijo* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_1(x_1 + 1) + 2x_2 - 18 \\ (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 6)^2 - 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 10.5 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método del *Punto Fijo*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2(x_2^{(k-1)}) - 17.75} - 0.5 \\ \sqrt{25 - ((x_1^{(k-1)}) - 1)^2} + 6 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.500000000000 \\ 10.500000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.30277563773 \\ 10.3301270189 \end{pmatrix}$	0.802776
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.30277563773 \\ 10.3301270189 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.20594666911 \\ 9.75388772965 \end{pmatrix}$	0.576239
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.20594666911 \\ 9.75388772965 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.82581124573 \\ 9.83691359752 \end{pmatrix}$	0.380135
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.82581124573 \\ 9.83691359752 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.88702097859 \\ 10.1248988840 \end{pmatrix}$	0.287985
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.88702097859 \\ 10.1248988840 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.08107487744 \\ 10.0822922322 \end{pmatrix}$	0.194054
5	$\begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.08107487744 \\ 10.0822922322 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.05389332466 \\ 9.93788999333 \end{pmatrix}$	0.144402
6	$\begin{pmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.05389332466 \\ 9.93788999333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.95800548239 \\ 9.95900689082 \end{pmatrix}$	0.0958878
7	$\begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.95800548239 \\ 9.95900689082 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.97241766549 \\ 10.0311541233 \end{pmatrix}$	0.0721472
8	$\begin{pmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.97241766549 \\ 10.0311541233 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.02062758317 \\ 10.0205389218 \end{pmatrix}$	0.0482099
9	$\begin{pmatrix} x_1^{(9)} \\ x_2^{(9)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.02062758317 \\ 10.0205389218 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.01363068271 \\ 9.98444588416 \end{pmatrix}$	0.036093
10	$\begin{pmatrix} x_1^{(10)} \\ x_2^{(10)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.01363068271 \\ 9.98444588416 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.98959449795 \\ 9.98974060663 \end{pmatrix}$	0.0240362
11	$\begin{pmatrix} x_1^{(11)} \\ x_2^{(11)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.98959449795 \\ 9.98974060663 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99314473956 \\ 10.0077830203 \end{pmatrix}$	0.0180424

12	$\begin{pmatrix} x_1^{(12)} \\ x_2^{(12)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99314473956 \\ 10.0077830203 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00517973698 \\ 10.0051322785 \end{pmatrix}$	0.012035
13	$\begin{pmatrix} x_1^{(13)} \\ x_2^{(13)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00517973698 \\ 10.0051322785 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00341762559 \\ 9.99610995200 \end{pmatrix}$	0.00902233
14	$\begin{pmatrix} x_1^{(14)} \\ x_2^{(14)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00341762559 \\ 9.99610995200 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99740438893 \\ 9.99743449806 \end{pmatrix}$	0.00601324
15	$\begin{pmatrix} x_1^{(15)} \\ x_2^{(15)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99740438893 \\ 9.99743449806 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99828868918 \\ 10.0019453931 \end{pmatrix}$	0.0045109
16	$\begin{pmatrix} x_1^{(16)} \\ x_2^{(16)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99828868918 \\ 10.0019453931 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00129636853 \\ 10.0012829113 \end{pmatrix}$	0.00300768
17	$\begin{pmatrix} x_1^{(17)} \\ x_2^{(17)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00129636853 \\ 10.0012829113 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00085503051 \\ 9.99902739529 \end{pmatrix}$	0.00225552
18	$\begin{pmatrix} x_1^{(18)} \\ x_2^{(18)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00085503051 \\ 9.99902739529 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99935145665 \\ 9.99935858430 \end{pmatrix}$	0.00150357
19	$\begin{pmatrix} x_1^{(19)} \\ x_2^{(19)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99935145665 \\ 9.99935858430 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99957232857 \\ 10.0004863254 \end{pmatrix}$	0.00112774
20	$\begin{pmatrix} x_1^{(20)} \\ x_2^{(20)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99957232857 \\ 10.0004863254 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00032418188 \\ 10.0003207179 \end{pmatrix}$	0.000751853
21	$\begin{pmatrix} x_1^{(21)} \\ x_2^{(21)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00032418188 \\ 10.0003207179 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00021379667 \\ 9.99975684306 \end{pmatrix}$	0.000563875
22	$\begin{pmatrix} x_1^{(22)} \\ x_2^{(22)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00021379667 \\ 9.99975684306 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99983788661 \\ 9.99983964357 \end{pmatrix}$	0.00037591
23	$\begin{pmatrix} x_1^{(23)} \\ x_2^{(23)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99983788661 \\ 9.99983964357 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99989309191 \\ 10.0001215799 \end{pmatrix}$	0.000281936
24	$\begin{pmatrix} x_1^{(24)} \\ x_2^{(24)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99989309191 \\ 10.0001215799 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00008105108 \\ 10.0000801788 \end{pmatrix}$	0.000187959
25	$\begin{pmatrix} x_1^{(25)} \\ x_2^{(25)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00008105108 \\ 10.0000801788 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00005345161 \\ 9.99993921041 \end{pmatrix}$	0.000140968
26	$\begin{pmatrix} x_1^{(26)} \\ x_2^{(26)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00005345161 \\ 9.99993921041 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99995947306 \\ 9.99995991074 \end{pmatrix}$	0.0000939786
27	$\begin{pmatrix} x_1^{(27)} \\ x_2^{(27)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99995947306 \\ 9.99995991074 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99997327359 \\ 10.0000303949 \end{pmatrix}$	0.0000704842
28	$\begin{pmatrix} x_1^{(28)} \\ x_2^{(28)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99997327359 \\ 10.0000303949 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00002026312 \\ 10.0000200447 \end{pmatrix}$	0.0000469895
29	$\begin{pmatrix} x_1^{(29)} \\ x_2^{(29)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00002026312 \\ 10.0000200447 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00001336305 \\ 9.99998480258 \end{pmatrix}$	0.0000352421
30	$\begin{pmatrix} x_1^{(30)} \\ x_2^{(30)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00001336305 \\ 9.99998480258 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99998986835 \\ 9.99998997767 \end{pmatrix}$	0.0000234947

31	$\begin{pmatrix} x_1^{(31)} \\ x_2^{(31)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99998986835 \\ 9.99998997767 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99999331843 \\ 10.0000075987 \end{pmatrix}$	0.000017621
32	$\begin{pmatrix} x_1^{(32)} \\ x_2^{(32)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99999331843 \\ 10.0000075987 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00000506580 \\ 10.0000050112 \end{pmatrix}$	0.0000117474
33	$\begin{pmatrix} x_1^{(33)} \\ x_2^{(33)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00000506580 \\ 10.0000050112 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00000334077 \\ 9.99999620064 \end{pmatrix}$	8.81052×10^{-6}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{34} = \begin{pmatrix} -2.00000334077 \\ 9.99999620064 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 7.** Aproximar las soluciones de los siguientes sistemas no lineales, empleando el método de *Punto Fijo* con la aproximación inicial dada, iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_{\infty} \leq 10^{-5}$.

- a) $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 = 0$,
 $f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - x_2 = 0$,
 $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (0.7, 0.4)^T$
- b) $f_1(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_2^2 = 0$,
 $f_2(x_1, x_2) = 3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0$,
 $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (0.4, 0.7)^T$
- c) $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 - 37 = 0$,
 $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2^2 - 5 = 0$,
 $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_3 + x_1 + x_2 - 3 = 0$
 $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (5, 1, -1)^T$
- d) $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_2 - 2x_3 = 0$,
 $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 8x_2^2 + 10x_3 = 0$,
 $f_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{7x_3x_2} - 1 = 0$
 $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0.5, 0.5, 0.1)^T$

Solución

a)

```
Clear[ecuaciones, p, d];
ecuaciones = {x1^2 + x2^2 - x1, x1^2 - x2^2 - x2};
ecuacionestrans = {Sqrt[x1 - x2^2], Sqrt[-x2 + x1^2]};
d = 10.^-5; p = {0.7, 0.4};
puntoFijo[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método del *Punto Fijo* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_1 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método del *Punto Fijo*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(x_1^{(k-1)})^2 - (x_2^{(k-1)})^2} \\ \sqrt{(x_1^{(k-1)})^2 - (x_2^{(k-1)})^2} \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i		P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.700000000000 \\ 0.400000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.734846922835 \\ 0.300000000000 \end{pmatrix}$	0.1
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.734846922835 \\ 0.300000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.803023612875 \\ 0.489897948557 \end{pmatrix}$	0.189898
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.803023612875 \\ 0.489897948557 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.750348994052 \\ 0.393635585635 \end{pmatrix}$	0.0962624
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.750348994052 \\ 0.393635585635 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.771621681768 \\ 0.411567767494 \end{pmatrix}$	0.0212727
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.771621681768 \\ 0.411567767494 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.776037147647 \\ 0.428756635260 \end{pmatrix}$	0.0171889
5	$\begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.776037147647 \\ 0.428756635260 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.769548500984 \\ 0.416505725371 \end{pmatrix}$	0.0122509
6	$\begin{pmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.769548500984 \\ 0.416505725371 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.772056657064 \\ 0.419164848234 \end{pmatrix}$	0.00265912
7	$\begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.772056657064 \\ 0.419164848234 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.772241857884 \\ 0.420602702657 \end{pmatrix}$	0.00143785
8	$\begin{pmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.772241857884 \\ 0.420602702657 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.771579694135 \\ 0.419231182537 \end{pmatrix}$	0.00137152
9	$\begin{pmatrix} x_1^{(9)} \\ x_2^{(9)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.771579694135 \\ 0.419231182537 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.771896955379 \\ 0.419647520980 \end{pmatrix}$	0.000416338
10	$\begin{pmatrix} x_1^{(10)} \\ x_2^{(10)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.771896955379 \\ 0.419647520980 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.771876229401 \\ 0.419734902937 \end{pmatrix}$	0.000087382

11	$\begin{pmatrix} x_1^{(11)} \\ x_2^{(11)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.771876229401 \\ 0.419734902937 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.771815289209 \\ 0.419592672216 \end{pmatrix}$	0.000142231
12	$\begin{pmatrix} x_1^{(12)} \\ x_2^{(12)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.771815289209 \\ 0.419592672216 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.771853145768 \\ 0.419650054738 \end{pmatrix}$	0.0000573825
13	$\begin{pmatrix} x_1^{(13)} \\ x_2^{(13)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.771853145768 \\ 0.419650054738 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.771846472640 \\ 0.419651312275 \end{pmatrix}$	6.67313×10^{-6}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{14} = \begin{pmatrix} 0.771846472640 \\ 0.419651312275 \end{pmatrix}$$

Solución

b)

```
Clear[ecuaciones, p, d];
ecuaciones = {3 x1^2 - x2^2, 3 x1 x2^2 - x1^3 - 1};
ecuacionestrans = {x2 / Sqrt[3], Sqrt[(1 + x1^3) / (3 x1)]};
d = 10.^-5; p = {0.4, 0.7};
puntoFijo[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método del *Punto Fijo* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 \\ -x_1^3 + 3x_2^2 x_1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método del *Punto Fijo*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(x_2^{(k-1)})}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{(x_1^{(k-1)})^3 + 1}{(x_1^{(k-1)})}} \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$	
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.400000000000 \\ 0.700000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.404145188433 \\ 0.941629792788 \end{pmatrix}$	0.24163

1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.404145188433 \\ 0.941629792788 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.543650214343 \\ 0.937672940468 \end{pmatrix}$	0.139505
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.543650214343 \\ 0.937672940468 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.541365724591 \\ 0.843598161451 \end{pmatrix}$	0.0940748
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.541365724591 \\ 0.843598161451 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.487051625602 \\ 0.844641336143 \end{pmatrix}$	0.0543141
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.487051625602 \\ 0.844641336143 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.487653902791 \\ 0.873763836342 \end{pmatrix}$	0.0291225
5	$\begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.487653902791 \\ 0.873763836342 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.504467786120 \\ 0.873392046155 \end{pmatrix}$	0.0168139
6	$\begin{pmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.504467786120 \\ 0.873392046155 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.504253132956 \\ 0.863476476688 \end{pmatrix}$	0.00991557
7	$\begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.504253132956 \\ 0.863476476688 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.498528376255 \\ 0.863597549558 \end{pmatrix}$	0.00572476
8	$\begin{pmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.498528376255 \\ 0.863597549558 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.498598277709 \\ 0.866878386985 \end{pmatrix}$	0.00328084
9	$\begin{pmatrix} x_1^{(9)} \\ x_2^{(9)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.498598277709 \\ 0.866878386985 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500492470081 \\ 0.866837719240 \end{pmatrix}$	0.00189419
10	$\begin{pmatrix} x_1^{(10)} \\ x_2^{(10)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500492470081 \\ 0.866837719240 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500468990547 \\ 0.865741449200 \end{pmatrix}$	0.00109627
11	$\begin{pmatrix} x_1^{(11)} \\ x_2^{(11)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500468990547 \\ 0.865741449200 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499836058744 \\ 0.865754970393 \end{pmatrix}$	0.000632932
12	$\begin{pmatrix} x_1^{(12)} \\ x_2^{(12)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499836058744 \\ 0.865754970393 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499843865209 \\ 0.866120096701 \end{pmatrix}$	0.000365126
13	$\begin{pmatrix} x_1^{(13)} \\ x_2^{(13)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499843865209 \\ 0.866120096701 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500054670981 \\ 0.866115585789 \end{pmatrix}$	0.000210806
14	$\begin{pmatrix} x_1^{(14)} \\ x_2^{(14)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500054670981 \\ 0.866115585789 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500052066604 \\ 0.865993844080 \end{pmatrix}$	0.000121742
15	$\begin{pmatrix} x_1^{(15)} \\ x_2^{(15)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500052066604 \\ 0.865993844080 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499981778996 \\ 0.865995347290 \end{pmatrix}$	0.0000702876
16	$\begin{pmatrix} x_1^{(16)} \\ x_2^{(16)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499981778996 \\ 0.865995347290 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499982646875 \\ 0.866035924197 \end{pmatrix}$	0.0000405769
17	$\begin{pmatrix} x_1^{(17)} \\ x_2^{(17)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499982646875 \\ 0.866035924197 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500006073963 \\ 0.866035423080 \end{pmatrix}$	0.0000234271
18	$\begin{pmatrix} x_1^{(18)} \\ x_2^{(18)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500006073963 \\ 0.866035423080 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500005784643 \\ 0.866021897037 \end{pmatrix}$	0.000013526
19	$\begin{pmatrix} x_1^{(19)} \\ x_2^{(19)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500005784643 \\ 0.866021897037 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499997975378 \\ 0.866022064071 \end{pmatrix}$	7.80926×10^{-6}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{20} = \begin{pmatrix} 0.499997975378 \\ 0.866022064071 \end{pmatrix}$$

Solución

c)

```
Clear[ecuaciones, p, d];
ecuaciones = { x1^2 + x2 - 37, x1 - x2^2 - 5, x3 + x1 + x2 - 3 };
ecuacionestrans = { Sqrt[37 - x2], Sqrt[x1 - 5], 3 - x1 - x2 };
d = 10.^-5; p = {5.0, 1.0, -1.0};
puntoFijo[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método del *Punto Fijo* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 - 37 \\ -x_2^2 + x_1 - 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5. \\ 1. \\ -1. \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método del *Punto Fijo*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{37 - (x_2^{(k-1)})} \\ \sqrt{(x_1^{(k-1)}) - 5} \\ -(x_1^{(k-1)}) - (x_2^{(k-1)}) + 3 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.000000000000 \\ 1.000000000000 \\ -1.000000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.000000000000 \\ 0 \\ -3.000000000000 \end{pmatrix}$	2.
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.000000000000 \\ 0 \\ -3.000000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.08276253030 \\ 1.000000000000 \\ -3.000000000000 \end{pmatrix}$	1.

2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.08276253030 \\ 1.00000000000 \\ -3.00000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.00000000000 \\ 1.04055875870 \\ -4.08276253030 \end{pmatrix}$	1.08276
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.00000000000 \\ 1.04055875870 \\ -4.08276253030 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.99661915093 \\ 1.00000000000 \\ -4.04055875870 \end{pmatrix}$	0.0422038
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.99661915093 \\ 1.00000000000 \\ -4.04055875870 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.00000000000 \\ 0.998308144277 \\ -3.99661915093 \end{pmatrix}$	0.0439396
5	$\begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \\ x_3^{(5)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.00000000000 \\ 0.998308144277 \\ -3.99661915093 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.00014098632 \\ 1.00000000000 \\ -3.99830814428 \end{pmatrix}$	0.00169186
6	$\begin{pmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \\ x_3^{(6)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.00014098632 \\ 1.00000000000 \\ -3.99830814428 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.00000000000 \\ 1.00007049068 \\ -4.00014098632 \end{pmatrix}$	0.00183284
7	$\begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \\ x_3^{(7)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.00000000000 \\ 1.00007049068 \\ -4.00014098632 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.99999412577 \\ 1.00000000000 \\ -4.00007049068 \end{pmatrix}$	0.0000704956
8	$\begin{pmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \\ x_3^{(8)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.99999412577 \\ 1.00000000000 \\ -4.00007049068 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.00000000000 \\ 0.999997062883 \\ -3.99999412577 \end{pmatrix}$	0.0000763649
9	$\begin{pmatrix} x_1^{(9)} \\ x_2^{(9)} \\ x_3^{(9)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.00000000000 \\ 0.999997062883 \\ -3.99999412577 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.00000024476 \\ 1.00000000000 \\ -3.99999706288 \end{pmatrix}$	2.93712×10^{-6}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{10} = \begin{pmatrix} 6.00000024476 \\ 1.00000000000 \\ -3.99999706288 \end{pmatrix}$$

Solución

d)

```
Clear[ecuaciones, p, d];
```

```
ecuaciones = { x1^2 + 2 x2^2 - x2 - 2 x3, x1^2 - 8 x2^2 + 10 x3, x1^2 / (7 x3 x2) - 1 };
```

```
ecuacionestrans = {sqrt(2*x3 + x2 - 2*x2^2), sqrt((10*x3 + x1^2)/8), x1^2/(7*x2)};
d = 10.^-5; p = {0.5, 0.5, 0.1};
puntoFijo[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método del *Punto Fijo* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 2x_2^2 - x_2 - 2x_3 \\ x_1^2 - 8x_2^2 + 10x_3 \\ \frac{x_1^2}{7x_2x_3} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método del *Punto Fijo*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-2(x_2^{(k-1)})^2 + (x_2^{(k-1)}) + 2(x_3^{(k-1)})} \\ \frac{\sqrt{(x_1^{(k-1)})^2 + 10(x_3^{(k-1)})}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{(x_1^{(k-1)})^2}{7(x_2^{(k-1)})} \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.500000000000 \\ 0.500000000000 \\ 0.100000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.447213595500 \\ 0.395284707521 \\ 0.0714285714286 \end{pmatrix}$	0.104715
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.447213595500 \\ 0.395284707521 \\ 0.0714285714286 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.475017736909 \\ 0.338061701891 \\ 0.0722806322324 \end{pmatrix}$	0.057223
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.475017736909 \\ 0.338061701891 \\ 0.0722806322324 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.504035254506 \\ 0.344319650307 \\ 0.0953510849460 \end{pmatrix}$	0.0290175
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.504035254506 \\ 0.344319650307 \\ 0.0953510849460 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.545811118450 \\ 0.388516792952 \\ 0.105405186123 \end{pmatrix}$	0.0441971
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.545811118450 \\ 0.388516792952 \\ 0.105405186123 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.545377454967 \\ 0.411090263545 \\ 0.109541055488 \end{pmatrix}$	0.0225735

5	$\begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \\ x_3^{(5)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.545377454967 \\ 0.411090263545 \\ 0.109541055488 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.540538587853 \\ 0.417259979400 \\ 0.103361578001 \end{pmatrix}$	0.00617948
6	$\begin{pmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \\ x_3^{(6)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.540538587853 \\ 0.417259979400 \\ 0.103361578001 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.525139366821 \\ 0.407093009177 \\ 0.100034229902 \end{pmatrix}$	0.0153992
7	$\begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \\ x_3^{(7)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.525139366821 \\ 0.407093009177 \\ 0.100034229902 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.525082881781 \\ 0.399392296747 \\ 0.0967737271574 \end{pmatrix}$	0.00770071
8	$\begin{pmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \\ x_3^{(8)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.525082881781 \\ 0.399392296747 \\ 0.0967737271574 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.523365395933 \\ 0.394247591038 \\ 0.0986184099426 \end{pmatrix}$	0.00514471
9	$\begin{pmatrix} x_1^{(9)} \\ x_2^{(9)} \\ x_3^{(9)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.523365395933 \\ 0.394247591038 \\ 0.0986184099426 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529737751010 \\ 0.396877726303 \\ 0.0992528349793 \end{pmatrix}$	0.00637236
10	$\begin{pmatrix} x_1^{(10)} \\ x_2^{(10)} \\ x_3^{(10)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529737751010 \\ 0.396877726303 \\ 0.0992528349793 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529489883747 \\ 0.398928319789 \\ 0.101010630244 \end{pmatrix}$	0.00205059
11	$\begin{pmatrix} x_1^{(11)} \\ x_2^{(11)} \\ x_3^{(11)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529489883747 \\ 0.398928319789 \\ 0.101010630244 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.531659638883 \\ 0.401631958300 \\ 0.100397390810 \end{pmatrix}$	0.00270364
12	$\begin{pmatrix} x_1^{(12)} \\ x_2^{(12)} \\ x_3^{(12)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.531659638883 \\ 0.401631958300 \\ 0.100397390810 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.528970963348 \\ 0.401035515840 \\ 0.100540509352 \end{pmatrix}$	0.00268868
13	$\begin{pmatrix} x_1^{(13)} \\ x_2^{(13)} \\ x_3^{(13)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.528970963348 \\ 0.401035515840 \\ 0.100540509352 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529582443642 \\ 0.400814073727 \\ 0.0996742073289 \end{pmatrix}$	0.000866302
14	$\begin{pmatrix} x_1^{(14)} \\ x_2^{(14)} \\ x_3^{(14)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529582443642 \\ 0.400814073727 \\ 0.0996742073289 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.528070681812 \\ 0.399562203841 \\ 0.0999599789518 \end{pmatrix}$	0.00151176
15	$\begin{pmatrix} x_1^{(15)} \\ x_2^{(15)} \\ x_3^{(15)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.528070681812 \\ 0.399562203841 \\ 0.0999599789518 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529322446405 \\ 0.399759057825 \\ 0.0997014955401 \end{pmatrix}$	0.00125176
16	$\begin{pmatrix} x_1^{(16)} \\ x_2^{(16)} \\ x_3^{(16)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529322446405 \\ 0.399759057825 \\ 0.0997014955401 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.528722460539 \\ 0.399561823700 \\ 0.100125401176 \end{pmatrix}$	0.000599986
17	$\begin{pmatrix} x_1^{(17)} \\ x_2^{(17)} \\ x_3^{(17)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.528722460539 \\ 0.399561823700 \\ 0.100125401176 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529635085822 \\ 0.400125207284 \\ 0.0999478584851 \end{pmatrix}$	0.000912625

18	$\begin{pmatrix} x_1^{(18)} \\ x_2^{(18)} \\ x_3^{(18)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529635085822 \\ 0.400125207284 \\ 0.0999478584851 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.528980681354 \\ 0.399998735777 \\ 0.100151980654 \end{pmatrix}$	0.000654404
19	$\begin{pmatrix} x_1^{(19)} \\ x_2^{(19)} \\ x_3^{(19)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.528980681354 \\ 0.399998735777 \\ 0.100151980654 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529438117100 \\ 0.400209377668 \\ 0.0999362305849 \end{pmatrix}$	0.000457436
20	$\begin{pmatrix} x_1^{(20)} \\ x_2^{(20)} \\ x_3^{(20)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529438117100 \\ 0.400209377668 \\ 0.0999362305849 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.528910906383 \\ 0.399947969380 \\ 0.100056454546 \end{pmatrix}$	0.000527211
21	$\begin{pmatrix} x_1^{(21)} \\ x_2^{(21)} \\ x_3^{(21)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.528910906383 \\ 0.399947969380 \\ 0.100056454546 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529286427230 \\ 0.400048636473 \\ 0.0999225500417 \end{pmatrix}$	0.000375521
22	$\begin{pmatrix} x_1^{(22)} \\ x_2^{(22)} \\ x_3^{(22)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529286427230 \\ 0.400048636473 \\ 0.0999225500417 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.528976288191 \\ 0.399901491381 \\ 0.100039308263 \end{pmatrix}$	0.000310139
23	$\begin{pmatrix} x_1^{(23)} \\ x_2^{(23)} \\ x_3^{(23)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.528976288191 \\ 0.399901491381 \\ 0.100039308263 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529280362652 \\ 0.400032654307 \\ 0.0999588718364 \end{pmatrix}$	0.000304074
24	$\begin{pmatrix} x_1^{(24)} \\ x_2^{(24)} \\ x_3^{(24)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529280362652 \\ 0.400032654307 \\ 0.0999588718364 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529054013269 \\ 0.399957250943 \\ 0.100041012464 \end{pmatrix}$	0.000226349
25	$\begin{pmatrix} x_1^{(25)} \\ x_2^{(25)} \\ x_3^{(25)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529054013269 \\ 0.399957250943 \\ 0.100041012464 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529251991690 \\ 0.400048164850 \\ 0.0999743091457 \end{pmatrix}$	0.000197978
26	$\begin{pmatrix} x_1^{(26)} \\ x_2^{(26)} \\ x_3^{(26)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529251991690 \\ 0.400048164850 \\ 0.0999743091457 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529074394336 \\ 0.399976680909 \\ 0.100026409432 \end{pmatrix}$	0.000177597
27	$\begin{pmatrix} x_1^{(27)} \\ x_2^{(27)} \\ x_3^{(27)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529074394336 \\ 0.399976680909 \\ 0.100026409432 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529213387237 \\ 0.400028719135 \\ 0.0999771551346 \end{pmatrix}$	0.000138993
28	$\begin{pmatrix} x_1^{(28)} \\ x_2^{(28)} \\ x_3^{(28)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529213387237 \\ 0.400028719135 \\ 0.0999771551346 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529090802357 \\ 0.399974743043 \\ 0.100016679458 \end{pmatrix}$	0.000122585
29	$\begin{pmatrix} x_1^{(29)} \\ x_2^{(29)} \\ x_3^{(29)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529090802357 \\ 0.399974743043 \\ 0.100016679458 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529196099584 \\ 0.400016229627 \\ 0.0999838407686 \end{pmatrix}$	0.000105297
30	$\begin{pmatrix} x_1^{(30)} \\ x_2^{(30)} \\ x_3^{(30)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529196099584 \\ 0.400016229627 \\ 0.0999838407686 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529110520812 \\ 0.399982330782 \\ 0.100013267703 \end{pmatrix}$	0.0000855788

31	$\begin{pmatrix} x_1^{(31)} \\ x_2^{(31)} \\ x_3^{(31)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529110520812 \\ 0.399982330782 \\ 0.100013267703 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529185351567 \\ 0.400014159166 \\ 0.0999893965626 \end{pmatrix}$	0.0000748308
32	$\begin{pmatrix} x_1^{(32)} \\ x_2^{(32)} \\ x_3^{(32)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529185351567 \\ 0.400014159166 \\ 0.0999893965626 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529122194984 \\ 0.399989234533 \\ 0.100009722833 \end{pmatrix}$	0.0000631566
33	$\begin{pmatrix} x_1^{(33)} \\ x_2^{(33)} \\ x_3^{(33)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529122194984 \\ 0.399989234533 \\ 0.100009722833 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529174739302 \\ 0.400010550729 \\ 0.0999920830196 \end{pmatrix}$	0.0000525443
34	$\begin{pmatrix} x_1^{(34)} \\ x_2^{(34)} \\ x_3^{(34)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529174739302 \\ 0.400010550729 \\ 0.0999920830196 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529129318200 \\ 0.399991677243 \\ 0.100006613827 \end{pmatrix}$	0.0000454211
35	$\begin{pmatrix} x_1^{(35)} \\ x_2^{(35)} \\ x_3^{(35)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529129318200 \\ 0.399991677243 \\ 0.100006613827 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529167479320 \\ 0.400006870824 \\ 0.0999941646317 \end{pmatrix}$	0.0000381611
36	$\begin{pmatrix} x_1^{(36)} \\ x_2^{(36)} \\ x_3^{(36)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529167479320 \\ 0.400006870824 \\ 0.0999941646317 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529135338713 \\ 0.399993729246 \\ 0.100004789772 \end{pmatrix}$	0.0000321406
37	$\begin{pmatrix} x_1^{(37)} \\ x_2^{(37)} \\ x_3^{(37)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529135338713 \\ 0.399993729246 \\ 0.100004789772 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529162868991 \\ 0.400005016281 \\ 0.0999959271514 \end{pmatrix}$	0.0000275303
38	$\begin{pmatrix} x_1^{(38)} \\ x_2^{(38)} \\ x_3^{(38)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529162868991 \\ 0.400005016281 \\ 0.0999959271514 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529139721136 \\ 0.399995720826 \\ 0.100003510857 \end{pmatrix}$	0.0000231479
39	$\begin{pmatrix} x_1^{(39)} \\ x_2^{(39)} \\ x_3^{(39)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529139721136 \\ 0.399995720826 \\ 0.100003510857 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529159323060 \\ 0.400003742647 \\ 0.0999970856495 \end{pmatrix}$	0.0000196019
40	$\begin{pmatrix} x_1^{(40)} \\ x_2^{(40)} \\ x_3^{(40)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529159323060 \\ 0.400003742647 \\ 0.0999970856495 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529142632645 \\ 0.399996944625 \\ 0.100002489023 \end{pmatrix}$	0.0000166904
41	$\begin{pmatrix} x_1^{(41)} \\ x_2^{(41)} \\ x_3^{(41)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529142632645 \\ 0.399996944625 \\ 0.100002489023 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529156698201 \\ 0.400002627477 \\ 0.0999978801428 \end{pmatrix}$	0.0000140656
42	$\begin{pmatrix} x_1^{(42)} \\ x_2^{(42)} \\ x_3^{(42)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529156698201 \\ 0.400002627477 \\ 0.0999978801428 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529144766378 \\ 0.399997751975 \\ 0.100001775709 \end{pmatrix}$	0.0000119318
43	$\begin{pmatrix} x_1^{(43)} \\ x_2^{(43)} \\ x_3^{(43)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529144766378 \\ 0.399997751975 \\ 0.100001775709 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529154892468 \\ 0.400001865757 \\ 0.0999984847783 \end{pmatrix}$	0.0000101261

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{45} = \begin{pmatrix} 0.529146340907 \\ 0.399998398123 \\ 0.100001283634 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 8.** Dado el siguiente problema no lineal

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_3^2 + 8x_2^2 - 9 = 0.$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = 8x_3x_2 + 4 = 0.$$

Calcular la solución aproximada del sistema empleando el método de *Punto Fijo* comenzando en los puntos $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (1, 1, -1)^T$, e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 5 \times 10^{-4}$.

```
Clear[ecuaciones, p, d];
ecuaciones = {10 x1 - 2 x2^2 + x2 - 2 x3 - 5, 4 x3^2 + 8 x2^2 - 9, 8 x2 x3 + 4};
ecuacionestrans =
  {(2 x2^2 - x2 + 2 x3 + 5) / 10, Sqrt[(-4 x3^2 + 9) / 8], -4 / (8 x2)};
d = 10.^-4; p = {1., 1., -1.};
puntoFijo[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método del *Punto Fijo* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -2x_2^2 + x_2 + 10x_1 - 2x_3 - 5 \\ 8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 \\ 8x_2x_3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 1. \\ -1. \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método del *Punto Fijo*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \left(2(x_2^{(k-1)})^2 - (x_2^{(k-1)}) + 2(x_3^{(k-1)}) + 5 \right) \\ \frac{\sqrt{9 - 4(x_3^{(k-1)})^2}}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2(x_2^{(k-1)})} \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.00000000000 \\ 1.00000000000 \\ -1.00000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.40000000000 \\ 0.790569415042 \\ -0.50000000000 \end{pmatrix}$	0.6
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.40000000000 \\ 0.790569415042 \\ -0.50000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.445943058496 \\ 1.00000000000 \\ -0.632455532034 \end{pmatrix}$	0.209431
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.445943058496 \\ 1.00000000000 \\ -0.632455532034 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.473508893593 \\ 0.961769203084 \\ -0.50000000000 \end{pmatrix}$	0.132456
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.473508893593 \\ 0.961769203084 \\ -0.50000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.488823079692 \\ 1.00000000000 \\ -0.519875244910 \end{pmatrix}$	0.0382308
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.488823079692 \\ 1.00000000000 \\ -0.519875244910 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.496024951018 \\ 0.994919526829 \\ -0.50000000000 \end{pmatrix}$	0.0198752
5	$\begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \\ x_3^{(5)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.496024951018 \\ 0.994919526829 \\ -0.50000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.498481020290 \\ 1.00000000000 \\ -0.502553208091 \end{pmatrix}$	0.00508047
6	$\begin{pmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \\ x_3^{(6)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.498481020290 \\ 1.00000000000 \\ -0.502553208091 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499489358382 \\ 0.999359863372 \\ -0.50000000000 \end{pmatrix}$	0.00255321
7	$\begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \\ x_3^{(7)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.499489358382 \\ 0.999359863372 \\ -0.50000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499808040967 \\ 1.00000000000 \\ -0.500320273333 \end{pmatrix}$	0.000640137
8	$\begin{pmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \\ x_3^{(8)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.499808040967 \\ 1.00000000000 \\ -0.500320273333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499935945333 \\ 0.999919902815 \\ -0.50000000000 \end{pmatrix}$	0.000320273
9	$\begin{pmatrix} x_1^{(9)} \\ x_2^{(9)} \\ x_3^{(9)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.499935945333 \\ 0.999919902815 \\ -0.50000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499975972128 \\ 1.00000000000 \\ -0.500040051800 \end{pmatrix}$	0.0000800972

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{10} = \begin{pmatrix} 0.499975972128 \\ 1.00000000000 \\ -0.500040051800 \end{pmatrix}$$

4. Método de Seidel

4.1 Introducción

El método de **Seidel** es una forma de acelerar la convergencia de la iteración del método del *Punto Fijo*. Consiste en usar las estimaciones más recientes de $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$ en vez de $x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_{i-1}^{(k-1)}$ para calcular $x_i^{(k)}$, igual que en el método de *Gauss-Seidel* para los sistemas lineales.

4.2 Pseudocódigo

- **Algoritmo 2. Método de Seidel para sistemas no lineales**

El pseudocódigo del algoritmo que resuelve un sistema de ecuaciones no lineales de n ecuaciones con n incógnitas mediante el método de *Seidel* es:

Algoritmo de Seidel

```

Input ( $\{f(x_1, \dots, x_m)\}_1^m, \{f_{\text{trans}}(x_1, \dots, x_m)\}_1^m, (x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ \dots \ x_m^{(0)})^T, \text{error}$ )

(* Se inicializan las variables *)

 $p \leftarrow (x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ \dots \ x_m^{(0)})^T$ 
 $p0 \leftarrow p$ 
 $\text{error\_inicial} \leftarrow 160$ 
 $i \leftarrow 0$ 
 $F \leftarrow \{f(x_1, \dots, x_n)\}_1^n$ 
While  $\text{error\_inicial} \geq \text{error}$  do
  (* Se evalúa la función transformada en el punto comprobando los índices*)

  For  $k = 1, \dots, n$  do
    For  $j = 1, \dots, i$  do
      
$$p \leftarrow \begin{pmatrix} f_{\text{trans}j}(p) \\ f_{\text{trans}j}(p) \\ \dots \\ f_{\text{trans}j}(p) \end{pmatrix}$$

    End
    For  $j = i, \dots, n$  do

```

```

                                
$$p \leftarrow \begin{pmatrix} f_{\text{transj}}(p0) \\ f_{\text{transj}}(p0) \\ \dots \\ f_{\text{transj}}(p0) \end{pmatrix}$$

                                End
                                End
                                p1 ← p
                                (* Cálculo de la norma de la distancia entre los dos puntos *)
                                error_inicial ← || p1 - p0 ||∞

                                p0 ← p1
                                i ← i + 1
                                End

Return (x(i) ≡ (p1)T)
Output

```

4.3 Problemas

- **Problema 9.** Aplíquese el método de *Seidel* para sistemas no lineales para aproximar el sistema de ecuaciones no lineales siguiente, iniciando el método en el punto inicial $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0.1, 0.1, -0.1)^T$ e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_{\infty} \leq 10^{-5}$.
- $$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 1/2 = 0,$$
- $$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 - 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0,$$
- $$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + (10\pi - 3)/3 = 0.$$

Solución

```

Clear[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
ecuaciones = {3 x1 - Cos[x2 * x3] + 1 / 2,
              x1^2 - 81 (x2 - 0.1)^2 + Sin[x3] + 1.06, Exp[-x1 * x2] + 20 x3 +  $\frac{10 \pi - 3}{3}$  };
ecuacionestrans = {  $\frac{1}{6} (2 \text{Cos}[x_2 * x_3] + 1)$ ,  $\frac{1}{9} \left( \sqrt{x_1^2 + \text{Sin}[x_3] + 1.06} \right) - 0.1$ ,
                    -  $\frac{1}{20} \left( \text{Exp}[-x_1 * x_2] + \frac{10 \pi - 3}{3} \right)$  };
d = 10.^-5; p = {0.1, 0.1, -0.1};
seidel[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];

```

Método de *Seidel* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\cos(x_2 x_3) + 3x_1 + \frac{1}{2} \\ x_1^2 - 81(x_2 - 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 \\ 20x_3 + e^{-x_1 x_2} + \frac{1}{3}(-3 + 10\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método de *Seidel*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} (2 \cos((x_2^{(k-1)})(x_3^{(k-1)})) + 1) \\ \frac{1}{9} \sqrt{(x_1^{(k)})^2 + \sin((x_3^{(k-1)})) + 1.06} - 0.1 \\ \frac{1}{20} (-e^{-(x_1^{(k)})(x_2^{(k)})} + \frac{1}{3}(3 - 10\pi)) \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.100000000000 \\ 0.100000000000 \\ -0.100000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499983333472 \\ 0.0222297935586 \\ -0.523046126191 \end{pmatrix}$	0.423046
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.499983333472 \\ 0.0222297935586 \\ -0.523046126191 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499977468262 \\ 0.0000281536619354 \\ -0.523598071793 \end{pmatrix}$	0.0222016
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.499977468262 \\ 0.0000281536619354 \\ -0.523598071793 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499999999964 \\ 3.76220182091 \times 10^{-8} \\ -0.523598774658 \end{pmatrix}$	0.000028116
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.499999999964 \\ 3.76220182091 \times 10^{-8} \\ -0.523598774658 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500000000000 \\ 5.02802799396 \times 10^{-11} \\ -0.523598775597 \end{pmatrix}$	3.75717×10^{-8}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.500000000000 \\ 5.02802799396 \times 10^{-11} \\ -0.523598775597 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 10.** Dado el siguiente problema no lineal

$$f_1(x_1, x_2) = -x_1(1 + x_1) + 2x_2 = 18,$$

$$f_2(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 6)^2 = 25.$$

Calcular la solución aproximada del sistema empleando el método de *Seidel* comenzando en los puntos

$$P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (2, 11)^T,$$

$$P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (-1.5, 10.5)^T$$

e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 5 \times 10^{-5}$, comprobar si se acelera la convergencia respecto al método del *Punto Fijo*.

```
Clear[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
ecuaciones = {-x1 (1 + x1) + 2 x2 - 18, (x1 - 1)^2 + (x2 - 6)^2 - 25};
ecuacionestrans = {-0.5 + Sqrt[2 x2 - 17.75], Sqrt[25 - (x1 - 1)^2 + 6]};
d = 10.^-5; p = {2.0, 11.0};
seidel[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método de *Seidel* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_1 (x_1 + 1) + 2 x_2 - 18 \\ (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 6)^2 - 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2. \\ 11. \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método de *Seidel*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2 (x_2^{(k-1)}) - 17.75} - 0.5 \\ \sqrt{25 - ((x_1^{(k)}) - 1)^2 + 6} \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.000000000000 \\ 11.000000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.56155281281 \\ 10.9683657714 \end{pmatrix}$	0.438447
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.56155281281 \\ 10.9683657714 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.54615042038 \\ 10.9700824659 \end{pmatrix}$	0.0154024
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.54615042038 \\ 10.9700824659 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.54698923590 \\ 10.9699902189 \end{pmatrix}$	0.000838816
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.54698923590 \\ 10.9699902189 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.54694417065 \\ 10.9699951785 \end{pmatrix}$	0.0000450652
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.54694417065 \\ 10.9699951785 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.54694659358 \\ 10.9699949118 \end{pmatrix}$	2.42293×10^{-6}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1.54694659358 \\ 10.9699949118 \end{pmatrix}$$

Con el método del *Punto Fijo* se llega a la solución aproximada realizando 8 iteraciones, en cambio con el método de *Seidel* se consigue sólo con 5 iteraciones.

```
Clear[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
ecuaciones = {-x1 (1 + x1) + 2 x2 - 18, (x1 - 1)2 + (x2 - 6)2 - 25};
ecuacionestrans = {-0.5 - √(2 x2 - 17.75), √(25 - (x1 - 1)2 + 6)};
d = 10.-5; p = {-1.5, 10.5};
seidel[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método de *Seidel* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_1(x_1 + 1) + 2x_2 - 18 \\ (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 6)^2 - 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 10.5 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método de *Seidel*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2(x_2^{(k-1)}) - 17.75} - 0.5 \\ \sqrt{25 - ((x_1^{(k)} - 1)^2 + 6)} \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i		P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.500000000000 \\ 10.500000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.30277563773 \\ 9.75388772965 \end{pmatrix}$	0.802776
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.30277563773 \\ 9.75388772965 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.82581124573 \\ 10.1248988840 \end{pmatrix}$	0.476964
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.82581124573 \\ 10.1248988840 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.08107487744 \\ 9.93788999333 \end{pmatrix}$	0.255264
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.08107487744 \\ 9.93788999333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.95800548239 \\ 10.0311541233 \end{pmatrix}$	0.123069
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.95800548239 \\ 10.0311541233 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.02062758317 \\ 9.98444588416 \end{pmatrix}$	0.0626221

5	$\begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.02062758317 \\ 9.98444588416 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.98959449795 \\ 10.0077830203 \end{pmatrix}$	0.0310331
6	$\begin{pmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.98959449795 \\ 10.0077830203 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00517973698 \\ 9.99610995200 \end{pmatrix}$	0.0155852
7	$\begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00517973698 \\ 9.99610995200 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99740438893 \\ 10.0019453931 \end{pmatrix}$	0.00777535
8	$\begin{pmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99740438893 \\ 10.0019453931 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00129636853 \\ 9.99902739529 \end{pmatrix}$	0.00389198
9	$\begin{pmatrix} x_1^{(9)} \\ x_2^{(9)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00129636853 \\ 9.99902739529 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99935145665 \\ 10.0004863254 \end{pmatrix}$	0.00194491
10	$\begin{pmatrix} x_1^{(10)} \\ x_2^{(10)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99935145665 \\ 10.0004863254 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00032418188 \\ 9.99975684306 \end{pmatrix}$	0.000972725
11	$\begin{pmatrix} x_1^{(11)} \\ x_2^{(11)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00032418188 \\ 9.99975684306 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99983788661 \\ 10.0001215799 \end{pmatrix}$	0.000486295
12	$\begin{pmatrix} x_1^{(12)} \\ x_2^{(12)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99983788661 \\ 10.0001215799 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00008105108 \\ 9.99993921041 \end{pmatrix}$	0.000243164
13	$\begin{pmatrix} x_1^{(13)} \\ x_2^{(13)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00008105108 \\ 9.99993921041 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99995947306 \\ 10.0000303949 \end{pmatrix}$	0.000121578
14	$\begin{pmatrix} x_1^{(14)} \\ x_2^{(14)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99995947306 \\ 10.0000303949 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00002026312 \\ 9.99998480258 \end{pmatrix}$	0.0000607901
15	$\begin{pmatrix} x_1^{(15)} \\ x_2^{(15)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00002026312 \\ 9.99998480258 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99998986835 \\ 10.0000075987 \end{pmatrix}$	0.0000303948
16	$\begin{pmatrix} x_1^{(16)} \\ x_2^{(16)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99998986835 \\ 10.0000075987 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00000506580 \\ 9.99999620064 \end{pmatrix}$	0.0000151975
17	$\begin{pmatrix} x_1^{(17)} \\ x_2^{(17)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.00000506580 \\ 9.99999620064 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.99999746709 \\ 10.0000018997 \end{pmatrix}$	7.59871×10^{-6}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{18} = \begin{pmatrix} -1.99999746709 \\ 10.0000018997 \end{pmatrix}$$

Con el método del *Punto Fijo* se llega a la solución aproximada realizando 33 iteraciones, en cambio con el método de *Seidel* se consigue sólo con 18 iteraciones.

- **Problema 11.** Aproximar las soluciones de los siguientes sistemas no lineales, empleando el método de *Seidel* con la aproximación inicial dada, iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-5}$. Comparar la convergencia con el método del *Punto Fijo*.
- a) $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 = 0$,

- $f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - x_2 = 0,$
 $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (0.7, 0.4)^T$
- b)
 $f_1(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_2^2 = 0,$
 $f_2(x_1, x_2) = 3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0,$
 $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (0.4, 0.7)^T$
- c)
 $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 - 37 = 0,$
 $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2^2 - 5 = 0,$
 $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_3 + x_1 + x_2 - 3 = 0$
 $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (5, 1, -1)^T$
- d)
 $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_2 - 2x_3 = 0,$
 $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 8x_2^2 + 10x_3 = 0,$
 $f_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{7x_3x_2} - 1 = 0$
 $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0.5, 0.5, 0.1)^T$

Solución

a)

```
Clear[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
ecuaciones = {x1^2 + x2^2 - x1, x1^2 - x2^2 - x2};
ecuacionestrans = {Sqrt[x1 - x2^2], Sqrt[-x2 + x1^2]};
d = 10.^-5; p = {0.7, 0.4};
seidel[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método de *Seidel* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_1 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método de *Seidel*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(x_1^{(k)})^2 - (x_2^{(k-1)})^2} \\ \sqrt{(x_1^{(k)})^2 - (x_2^{(k)})^2} \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$	
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.700000000000 \\ 0.400000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.758186601593 \\ 0.395853396857 \end{pmatrix}$	0.0581866

1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.758186601593 \\ 0.395853396857 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.786673895490 \\ 0.382915782338 \end{pmatrix}$	0.0284873
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.786673895490 \\ 0.382915782338 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.808335559959 \\ 0.365129119713 \end{pmatrix}$	0.0216617
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.808335559959 \\ 0.365129119713 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.829623091179 \\ 0.346144074853 \end{pmatrix}$	0.0212875
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.829623091179 \\ 0.346144074853 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.850108783922 \\ 0.330235800227 \end{pmatrix}$	0.0204857
5	$\begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.850108783922 \\ 0.330235800227 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.867057510997 \\ 0.320183781089 \end{pmatrix}$	0.0169487
6	$\begin{pmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.867057510997 \\ 0.320183781089 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.878556796643 \\ 0.315898578348 \end{pmatrix}$	0.0114993
7	$\begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.878556796643 \\ 0.315898578348 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884694665710 \\ 0.315384225093 \end{pmatrix}$	0.00613787
8	$\begin{pmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884694665710 \\ 0.315384225093 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.886940471283 \\ 0.316489556832 \end{pmatrix}$	0.00224581
9	$\begin{pmatrix} x_1^{(9)} \\ x_2^{(9)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.886940471283 \\ 0.316489556832 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.887038695732 \\ 0.317833861157 \end{pmatrix}$	0.0013443
10	$\begin{pmatrix} x_1^{(10)} \\ x_2^{(10)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.887038695732 \\ 0.317833861157 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.886317953082 \\ 0.318833504567 \end{pmatrix}$	0.000999643
11	$\begin{pmatrix} x_1^{(11)} \\ x_2^{(11)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.886317953082 \\ 0.318833504567 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.885526587708 \\ 0.319391371455 \end{pmatrix}$	0.000791365
12	$\begin{pmatrix} x_1^{(12)} \\ x_2^{(12)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.885526587708 \\ 0.319391371455 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884959544969 \\ 0.319613272293 \end{pmatrix}$	0.000567043
13	$\begin{pmatrix} x_1^{(13)} \\ x_2^{(13)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884959544969 \\ 0.319613272293 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884653101842 \\ 0.319643028398 \end{pmatrix}$	0.000306443
14	$\begin{pmatrix} x_1^{(14)} \\ x_2^{(14)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884653101842 \\ 0.319643028398 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884538377982 \\ 0.319593068015 \end{pmatrix}$	0.000114724
15	$\begin{pmatrix} x_1^{(15)} \\ x_2^{(15)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884538377982 \\ 0.319593068015 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884529978360 \\ 0.319529452198 \end{pmatrix}$	0.0000636158
16	$\begin{pmatrix} x_1^{(16)} \\ x_2^{(16)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884529978360 \\ 0.319529452198 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884563268283 \\ 0.319480717288 \end{pmatrix}$	0.0000487349
17	$\begin{pmatrix} x_1^{(17)} \\ x_2^{(17)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884563268283 \\ 0.319480717288 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884601456979 \\ 0.319452706939 \end{pmatrix}$	0.0000381887
18	$\begin{pmatrix} x_1^{(18)} \\ x_2^{(18)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884601456979 \\ 0.319452706939 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884629490427 \\ 0.319441084854 \end{pmatrix}$	0.0000280334
19	$\begin{pmatrix} x_1^{(19)} \\ x_2^{(19)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884629490427 \\ 0.319441084854 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884645014784 \\ 0.319439124922 \end{pmatrix}$	0.0000155244
20	$\begin{pmatrix} x_1^{(20)} \\ x_2^{(20)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884645014784 \\ 0.319439124922 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.884651081736 \\ 0.319437108911 \end{pmatrix}$	6.06695×10^{-6}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{21} = \begin{pmatrix} 0.884651081736 \\ 0.319441328730 \end{pmatrix}$$

Solución

b)

```
Clear[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
ecuaciones = {3 x1^2 - x2^2, 3 x1 x2^2 - x1^3 - 1};
ecuacionestrans = {x2 / Sqrt[3], Sqrt[(1 + x1^3) / (3 x1)]};
d = 10.^-5; p = {0.4, 0.7};
seidel[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método de *Seidel* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 \\ -x_1^3 + 3x_2^2 x_1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método de *Seidel*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(x_2^{(k-1)})}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{\frac{(x_1^{(k)})^3 + 1}{(x_1^{(k)})}}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i		P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.400000000000 \\ 0.700000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.404145188433 \\ 0.937672940468 \end{pmatrix}$	0.237673
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.404145188433 \\ 0.937672940468 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.541365724591 \\ 0.844641336143 \end{pmatrix}$	0.137221
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.541365724591 \\ 0.844641336143 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.487653902791 \\ 0.873392046155 \end{pmatrix}$	0.0537118
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.487653902791 \\ 0.873392046155 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.504253132956 \\ 0.863597549558 \end{pmatrix}$	0.0165992

4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.504253132956 \\ 0.863597549558 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.498598277709 \\ 0.866837719240 \end{pmatrix}$	0.00565486
5	$\begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.498598277709 \\ 0.866837719240 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500468990547 \\ 0.865754970393 \end{pmatrix}$	0.00187071
6	$\begin{pmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500468990547 \\ 0.865754970393 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499843865209 \\ 0.866115585789 \end{pmatrix}$	0.000625125
7	$\begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499843865209 \\ 0.866115585789 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500052066604 \\ 0.865995347290 \end{pmatrix}$	0.000208201
8	$\begin{pmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500052066604 \\ 0.865995347290 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499982646875 \\ 0.866035423080 \end{pmatrix}$	0.0000694197
9	$\begin{pmatrix} x_1^{(9)} \\ x_2^{(9)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499982646875 \\ 0.866035423080 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500005784643 \\ 0.866022064071 \end{pmatrix}$	0.0000231378
10	$\begin{pmatrix} x_1^{(10)} \\ x_2^{(10)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500005784643 \\ 0.866022064071 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499998071815 \\ 0.866026517028 \end{pmatrix}$	7.71283×10^{-6}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 0.499998071815 \\ 0.866026517028 \end{pmatrix}$$

Solución

c)

```
Clear[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
ecuaciones = { x1^2 + x2 - 37, x1 - x2^2 - 5, x3 + x1 + x2 - 3 };
ecuacionestrans = { Sqrt[37 - x2], Sqrt[x1 - 5], 3 - x1 - x2 };
d = 10.^-5; p = { 5.0, 1.0, -1.0 };
seidel[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método de *Seidel* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 - 37 \\ -x_2^2 + x_1 - 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5. \\ 1. \\ -1. \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método de *Seidel*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{37 - (x_2^{(k-1)})} \\ \sqrt{(x_1^{(k)}) - 5} \\ -(x_1^{(k)}) - (x_2^{(k)}) + 3 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.000000000000 \\ 1.000000000000 \\ -1.000000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.000000000000 \\ 1.000000000000 \\ -4.000000000000 \end{pmatrix}$	3.
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.000000000000 \\ 1.000000000000 \\ -4.000000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.000000000000 \\ 1.000000000000 \\ -4.000000000000 \end{pmatrix}$	0.

La solución aproximada del sistema es:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 6.000000000000 \\ 1.000000000000 \\ -4.000000000000 \end{pmatrix}$$

Solución

d)

```
Clear[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
ecuaciones = { x1^2 + 2 x2^2 - x2 - 2 x3, x1^2 - 8 x2^2 + 10 x3, x1^2 / (7 x3 x2) - 1 };
ecuacionestrans = { Sqrt[2 x3 + x2 - 2 x2^2], Sqrt[(10 x3 + x1^2) / 8], x1^2 / (7 x2) };
d = 10.^-5; p = {0.5, 0.5, 0.1};
seidel[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método de *Seidel* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 2x_2^2 - x_2 - 2x_3 \\ x_1^2 - 8x_2^2 + 10x_3 \\ \frac{x_1^2}{7x_2x_3} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método de *Seidel*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-2(x_2^{(k-1)})^2 + (x_2^{(k-1)}) + 2(x_3^{(k-1)})} \\ \frac{\sqrt{(x_1^{(k)})^2 + 10(x_3^{(k-1)})}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{(x_1^{(k)})^2}{7(x_2^{(k)})} \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.500000000000 \\ 0.500000000000 \\ 0.100000000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.447213595500 \\ 0.387298334621 \\ 0.0737711113563 \end{pmatrix}$	0.112702
1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.447213595500 \\ 0.387298334621 \\ 0.0737711113563 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.484603505284 \\ 0.348667404358 \\ 0.0962196369040 \end{pmatrix}$	0.0386309
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.484603505284 \\ 0.348667404358 \\ 0.0962196369040 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.545865148587 \\ 0.396888701257 \\ 0.107251644208 \end{pmatrix}$	0.0612616
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.545865148587 \\ 0.396888701257 \\ 0.107251644208 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.544381031358 \\ 0.413652503526 \\ 0.102346329269 \end{pmatrix}$	0.0167638
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.544381031358 \\ 0.413652503526 \\ 0.102346329269 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.525479185809 \\ 0.403049573163 \\ 0.0978711138794 \end{pmatrix}$	0.0189018
5	$\begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \\ x_3^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.525479185809 \\ 0.403049573163 \\ 0.0978711138794 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.523348721283 \\ 0.395696383428 \\ 0.0988831320244 \end{pmatrix}$	0.00735319

6	$\begin{pmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \\ x_3^{(6)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.523348721283 \\ 0.395696383428 \\ 0.0988831320244 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529444418009 \\ 0.398299935979 \\ 0.100538516128 \end{pmatrix}$	0.0060957
7	$\begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \\ x_3^{(7)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529444418009 \\ 0.398299935979 \\ 0.100538516128 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.531122669667 \\ 0.401166494662 \\ 0.100453941902 \end{pmatrix}$	0.00286656
8	$\begin{pmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \\ x_3^{(8)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.531122669667 \\ 0.401166494662 \\ 0.100453941902 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529344184427 \\ 0.400740671227 \\ 0.0998883480747 \end{pmatrix}$	0.00177849
9	$\begin{pmatrix} x_1^{(9)} \\ x_2^{(9)} \\ x_3^{(9)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529344184427 \\ 0.400740671227 \\ 0.0998883480747 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.528517924223 \\ 0.399720945938 \\ 0.0998307869756 \end{pmatrix}$	0.00101973
10	$\begin{pmatrix} x_1^{(10)} \\ x_2^{(10)} \\ x_3^{(10)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.528517924223 \\ 0.399720945938 \\ 0.0998307869756 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.528988516554 \\ 0.399708756534 \\ 0.100011694612 \end{pmatrix}$	0.000470592
11	$\begin{pmatrix} x_1^{(11)} \\ x_2^{(11)} \\ x_3^{(11)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.528988516554 \\ 0.399708756534 \\ 0.100011694612 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529337289125 \\ 0.400049201939 \\ 0.100058394353 \end{pmatrix}$	0.000348773
12	$\begin{pmatrix} x_1^{(12)} \\ x_2^{(12)} \\ x_3^{(12)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529337289125 \\ 0.400049201939 \\ 0.100058394353 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529232711291 \\ 0.400104862229 \\ 0.100004948396 \end{pmatrix}$	0.000104578
13	$\begin{pmatrix} x_1^{(13)} \\ x_2^{(13)} \\ x_3^{(13)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529232711291 \\ 0.400104862229 \\ 0.100004948396 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529100139352 \\ 0.399999443972 \\ 0.0999811952175 \end{pmatrix}$	0.000132572
14	$\begin{pmatrix} x_1^{(14)} \\ x_2^{(14)} \\ x_3^{(14)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529100139352 \\ 0.399999443972 \\ 0.0999811952175 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529115038580 \\ 0.399964791611 \\ 0.0999954888614 \end{pmatrix}$	0.0000346524
15	$\begin{pmatrix} x_1^{(15)} \\ x_2^{(15)} \\ x_3^{(15)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529115038580 \\ 0.399964791611 \\ 0.0999954888614 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529161695776 \\ 0.399994841981 \\ 0.100005611105 \end{pmatrix}$	0.0000466572
16	$\begin{pmatrix} x_1^{(16)} \\ x_2^{(16)} \\ x_3^{(16)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529161695776 \\ 0.399994841981 \\ 0.100005611105 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529163790303 \\ 0.400011004226 \\ 0.100002362081 \end{pmatrix}$	0.0000161622
17	$\begin{pmatrix} x_1^{(17)} \\ x_2^{(17)} \\ x_3^{(17)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529163790303 \\ 0.400011004226 \\ 0.100002362081 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529148487085 \\ 0.400003397204 \\ 0.0999984797779 \end{pmatrix}$	0.0000153032
18	$\begin{pmatrix} x_1^{(18)} \\ x_2^{(18)} \\ x_3^{(18)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529148487085 \\ 0.400003397204 \\ 0.0999984797779 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.529145463186 \\ 0.399996831080 \\ 0.0999989783686 \end{pmatrix}$	6.56612×10^{-6}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{19} = \begin{pmatrix} 0.529145463186 \\ 0.399996831080 \\ 0.0999989783686 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 12.** Dado el siguiente problema no lineal

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 - 37 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2^2 - 5 = 0.$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$$

Calcular la solución aproximada del sistema empleando el método de *Seidel* comenzando en el punto: $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0, 0, 0)^T$, e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 5 \times 10^{-5}$.

```
Clear[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
ecuaciones = {x1^2 + x2 - 37, x1 - x2^2 - 5, x1 + x2 + x3 - 3};
ecuacionestrans = {Sqrt[-x2 + 37], Sqrt[x1 - 5], 3 - x1 - x2};
d = 10.^-5; p = {0., 0., 0.};
seidel[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
```

Método de *Seidel* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 - 37 \\ -x_2^2 + x_1 - 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

Ecuaciones preparadas para el método de *Seidel*.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{37 - (x_2^{(k-1)})} \\ \sqrt{(x_1^{(k)}) - 5} \\ -(x_1^{(k)}) - (x_2^{(k)}) + 3 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	P_{i+1}	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.08276253030 \\ 1.04055875870 \\ -4.12332128899 \end{pmatrix}$
			6.08276

1	$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.08276253030 \\ 1.04055875870 \\ -4.12332128899 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.99661915093 \\ 0.998308144277 \\ -3.99492729521 \end{pmatrix}$	0.128394
2	$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.99661915093 \\ 0.998308144277 \\ -3.99492729521 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.00014098632 \\ 1.00007049068 \\ -4.00021147700 \end{pmatrix}$	0.00528418
3	$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.00014098632 \\ 1.00007049068 \\ -4.00021147700 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.99999412577 \\ 0.999997062883 \\ -3.99999118866 \end{pmatrix}$	0.000220288
4	$\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.99999412577 \\ 0.999997062883 \\ -3.99999118866 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.00000024476 \\ 1.00000012238 \\ -4.00000036714 \end{pmatrix}$	9.17848×10^{-6}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_5 = \begin{pmatrix} 6.00000024476 \\ 1.00000012238 \\ -4.00000036714 \end{pmatrix}$$

5. Método de Newton

5.1 Introducción

En los métodos del *Punto Fijo* y de *Seidel* es necesario convertir el problema a un problema de punto fijo **convergente**, si se resuelven algebraicamente las ecuaciones iniciales para las variables del problema. Sin embargo, es difícil encontrar una transformación de las ecuaciones para que el problema sea convergente. Con el método de *Newton* se puede obtener la solución de un sistema de ecuaciones no lineales de una forma más general.

Para construir un algoritmo que lleve a un método de *Punto Fijo* apropiado en el caso unidimensional, se obtiene una función ϕ con la propiedad de que

$$g(x) = x - \phi(x) f(x) \quad (5)$$

da una convergencia cuadrática en el punto fijo p de la función g . A partir de esta condición el método de *Newton* evoluciona al seccionar $\phi(x) = \frac{1}{f'(x)}$, suponiendo que $f' \neq 0$.

La aplicación de un procedimiento semejante en el caso n – dimensional incluye una matriz

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \quad (6)$$

donde todos los elementos $a_{ij}(x)$ son una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} . Esto requiere obtener $A(x)$ de modo que

$$\blacksquare \quad G(x) = x - A(x)^{-1} F(x) \quad (7)$$

de la convergencia cuadrática a la solución de $F(x) = 0$, suponiendo que $A(x)$ es no singular en el punto fijo p de G .

▼ **Teorema 3.**

Suponiendo que p es una solución de $G(x) = x$ para alguna función $G = (g_1, g_2, \dots, g_n)^t$ de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n . Si existe un número $\delta > 0$ con las propiedades:

(i) $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ sea continua en

$$N_\delta = \{x / \|x - p\| < \delta\}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(ii) $\frac{\partial^2 g_i(x)}{(\partial x_j \partial x_k)}$ sea continua y $\left| \frac{\partial^2 g_i(x)}{(\partial x_j \partial x_k)} \right| < M$ para alguna constante M y siempre que $x \in N_\delta$ $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, n$.

(iii) $\frac{\partial g_i(p)}{\partial x_k} = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$ y $k = 1, 2, \dots, n$.

entonces existe un número $\hat{\delta} \leq \delta$ tal que la sucesión generada por $x^{(k)} = G(x^{(k-1)})$ converge cuadráticamente a p para cualquier elección de $x^{(0)}$ a condición de que $\|x^{(0)} - p\| < \delta$. Incluso

$$\|x^{(k)} - p\|_\infty \leq \frac{n^2 M}{2} \|x^{(k-1)} - p\|_\infty^2, \quad k \geq 1.$$

Para utilizar el teorema anterior se supone una matriz $A(x)$ de $n \times n$ de funciones de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} en la forma de la ecuación matricial, cuyos elementos específicos se escogerán más adelante. Suponiendo además que $A(x)$ es no singular cerca de una solución p de $F(x) = 0$, y

denotando con $b_{ij}(x)$ el elemento $A(x)^{-1}$ en la i – ésima fila y la j – ésima columna.

Dado que $G(x) = x - (A)^{-1} F(x)$, se tiene:

$$g_i(x) = x_i - \sum_{j=1}^n b_{ij}(x) f_j(x), \quad (8)$$

$$\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_k} = \begin{cases} 1 - \sum_{j=1}^n \left(b_{ij}(x) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(x) f_j(x) \right) & i = k \\ - \sum_{j=1}^n \left(b_{ij}(x) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(x) f_j(x) \right) & i \neq k \end{cases} \quad (9)$$

El teorema implica que se necesita $\frac{\partial g_i(p)}{\partial x_k} = 0$ para toda $i = 1, 2, \dots, n$ y toda $k = 1, 2, \dots, n$. Esto significa que, para toda $i = k$,

$$0 = 1 - \sum_{j=1}^n b_{ij}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p), \quad (10)$$

así que

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) = 1. \quad (11)$$

Cuando $k \neq i$,

$$0 = - \sum_{j=1}^n b_{ij}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(p), \quad (12)$$

así que

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(p) = 0. \quad (13)$$

Al definir la matriz $J(x)$ por medio de

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \quad (14)$$

se requiere que

$$A(p)^{-1} J(p) = I, \text{ la matriz identidad,} \quad (15)$$

De modo que

$$A(p) = J(p) \quad (16)$$

En consecuencia, una elección apropiada de $A(x)$ es $A(x) = J(x)$ dado que entonces se cumple la condición (iii) del teorema.

La función G está definida por

$$G(x) = x - J(x)^{-1} F(x), \quad (17)$$

y el procedimiento de la iteración funcional pasa de seleccionar $x^{(0)}$ a generar para $k \geq 1$

$$x^{(k)} = G(x^{(k-1)}) = x^{(k-1)} - J(x^{(k-1)})^{-1} F(x^{(k-1)}) \quad (18)$$

A esto se le llama método de *Newton* para sistemas no lineales y generalmente se espera que dé una convergencia cuadrática, siempre y cuando se conozca un valor inicial suficientemente preciso y exista $J(p)^{-1}$. A la matriz $J(x)$ se le llama *matriz jacobiana*.

La debilidad del método de *Newton* se debe a la necesidad de calcular e invertir la matriz $J(x)$ en cada paso. En la práctica, el cálculo explícito de $J(x)^{-1}$ se evita efectuando la operación en dos pasos. Primero, encontrando un vector y que satisfaga

$$J(x^{(k-1)}) y = -F(x^{(k-1)}).$$

Una vez hecho esto, se obtiene la nueva aproximación $x^{(k)}$ agregando y a $x^{(k-1)}$.

5.2 Pseudocódigo

• Algoritmo 3. Método de Newton para sistemas 2×2

El pseudocódigo del algoritmo que resuelve un sistema de ecuaciones no lineales de 2 ecuaciones con 2 incógnitas mediante el método de *Newton* es:

Algoritmo Newton 2×2

Input $(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T, n, error)$

(* Se inicializan las variables *)

$$p \leftarrow (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T$$

$$F \leftarrow \{f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\}$$

$$J \leftarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

For $k = 1, \dots, n$ **do**

(* Se evalúa la función F y la matriz jacobiana en el punto *)

$$f_valor \leftarrow \begin{pmatrix} f_1(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}) \\ f_2(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}) \end{pmatrix}$$

$$j_valor \leftarrow \begin{pmatrix} j_{11}(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}) & j_{12}(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}) \\ j_{21}(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}) & j_{22}(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}) \end{pmatrix}$$

(* Cálculo del vector y *)

$$y \leftarrow \frac{-f_valor}{j_valor}$$

$$p \leftarrow p + y$$

End

Return $(x^{(k)} \equiv (p)^T)$

Output

• **Algoritmo 4. Método de Newton para sistemas $n \times n$**

El pseudocódigo del algoritmo que resuelve un sistema de ecuaciones no lineales mediante el método de *Newton* es:

Algoritmo Newton

Input $(\{f(x_1, \dots, x_n)\}_1^n, (x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ \dots \ x_n^{(0)})^T, n, error)$

(* Se inicializan las variables *)

$p \leftarrow (x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ \dots \ x_n^{(0)})^T$

$F \leftarrow \{f(x_1, \dots, x_n)\}_1^n$

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \quad (x \equiv (x_1, \dots, x_n))$$

$p_{ant} \leftarrow p$

For $k = 1, \dots, n$ **do**

(* Se evalúa la función F y la matriz jacobiana en el punto *)

$$f_valor \leftarrow \begin{pmatrix} f_1(p_1^{(k-1)}, p_2^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) \\ f_2(p_1^{(k-1)}, p_2^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) \\ \dots \\ f_n(p_1^{(k-1)}, p_2^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) \end{pmatrix}$$

$$j_valor \leftarrow \begin{pmatrix} j_{11}(p_1^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) & \dots & j_{1n}(p_1^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) \\ j_{21}(p_1^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) & \dots & j_{2n}(p_1^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ j_{n1}(p_1^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) & \dots & j_{nn}(p_1^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) \end{pmatrix}$$

(* Cálculo del vector y *)

$$y \leftarrow \frac{-f_valor}{j_valor}$$

$$p \leftarrow p + y$$

(* Cálculo de la norma de la distancia entre los dos puntos*)

$$error \leftarrow \|p - p_{ant}\|_{\infty}$$

$$p_{ant} \leftarrow p$$

If $(error \leq error_ini)$ **do**

Break

End

End

Return $(x^{(k)} \equiv (p)^T)$

Output

5.3 Problemas

■ **Problema 13.** Considérese el sistema no lineal siguiente,

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad (\text{circunferencia})$$

$$f_2(x, y) = x^2 - y - 0.5x + 0.1 = 0 \quad (\text{parábola}).$$

a) Usar el método de *Newton* comenzando en el punto $P_0 = (p_0, q_0) = (1.2, 0.8)$ y calcular los puntos P_1 y P_2 .

b) Empleando el método de *Newton* y comenzando en el punto $P_0 = (p_0, q_0) = (-0.8, 1.2)$, calcular los puntos P_1 y P_2 .

Solución

```
Clear[f1, f2, p, y1, y2, g1, g2, g];
f1 = x^2 + y^2 - 2;
f2 = x^2 - y - 0.5 x + 0.1;
y1 = Sqrt[2 - x^2];
y2 = x^2 - 0.5 x + 0.1;
p = {1.2, 0.8};
newtonRaphsonNoLineal[f1, f2, p, 2, 0.2];
Print["Representación de las funciones",
      "\n\t f1(x,y) = ", f1, "\n\t f2(x,y) = ", f2];
g1 = Plot[Evaluate[{y1, -y1}, {x, -Sqrt[2], Sqrt[2]}],
          PlotStyle -> {{Thickness[0.010], RGBColor[0, 0, 1]}},
          AxesLabel -> {"X", "Y"}, DisplayFunction -> Identity];
g2 = Plot[Evaluate[{y2}, {x, -Sqrt[2], Sqrt[2]}],
          PlotStyle -> {{Thickness[0.010], RGBColor[1, 0, 0]}},
          AxesLabel -> {"X", "Y"}, DisplayFunction -> Identity];
g = Show[g1, g2, AxesLabel -> {"X", "Y"},
        AspectRatio -> Automatic, DisplayFunction -> $DisplayFunction];

p = {-0.8, 1.2};
newtonRaphsonNoLineal[f1, f2, p, 2, 0.2];
Print["Representación de las funciones",
      "\n\t f1(x, y) = ", f1, "\n\t f2(x, y) = ", f2];
g1 = Plot[Evaluate[{y1, -y1}, {x, -Sqrt[2], Sqrt[2]}],
          PlotStyle -> {{Thickness[0.010], RGBColor[0, 0, 1]}},
          AxesLabel -> {"X", "Y"}, DisplayFunction -> Identity];
g2 = Plot[Evaluate[{y2}, {x, -Sqrt[2], Sqrt[2]}],
          PlotStyle -> {{Thickness[0.010], RGBColor[1, 0, 0]}},
          AxesLabel -> {"X", "Y"}, DisplayFunction -> Identity];
g = Show[g1, g2, AxesLabel -> {"X", "Y"},
        AspectRatio -> Automatic, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

Método de *Newton-Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 2$$

$$f_2(x, y) = x^2 - 0.5x - y + 0.1$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ x^2 - 0.5x - y + 0.1 \end{pmatrix}$$

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x - 0.5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{-4yx - 2x + 1. y} & -\frac{2y}{-4yx - 2x + 1. y} \\ \frac{0.5 - 2x}{-4yx - 2x + 1. y} & \frac{2x}{-4yx - 2x + 1. y} \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.20000 \\ 0.800000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = F(1.2, 0.8) = \begin{pmatrix} 0.0800000 \\ 0.140000 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = J(1.2, 0.8) = \begin{pmatrix} 2.40000 & 1.60000 \\ 1.90000 & -1.00000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} 2.4 & 1.6 \\ 1.9 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.14 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.183824 & 0.294118 \\ 0.349265 & -0.441176 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.14 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0558824 \\ 0.0338235 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0558824 \\ 0.0338235 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.14412 \\ 0.833824 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.14412 \\ 0.833824 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = F(1.14412, 0.833824) = \begin{pmatrix} 0.00426687 \\ 0.00312284 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = J(1.14412, 0.833824) = \begin{pmatrix} 2.28824 & 1.66765 \\ 1.78824 & -1.00000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} 2.28824 & 1.66765 \\ 1.78824 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.00426687 \\ 0.00312284 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.18974 & 0.316419 \\ 0.339299 & -0.434169 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.00426687 \\ 0.00312284 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00179772 \\ -0.0000919057 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1.14412 \\ 0.833824 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.00179772 \\ -0.0000919057 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.14232 \\ 0.833732 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$J(P_i) \Delta P = -F(P_i)$
0	$\begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.4 & 1.6 \\ 1.9 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.14 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 1.14412 \\ 0.833824 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.28824 & 1.66765 \\ 1.78824 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.00426687 \\ 0.00312284 \end{pmatrix}$

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$
0	$\begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0558824 \\ 0.0338235 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.14412 \\ 0.833824 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 1.14412 \\ 0.833824 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00179772 \\ -0.0000919057 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.14232 \\ 0.833732 \end{pmatrix}$

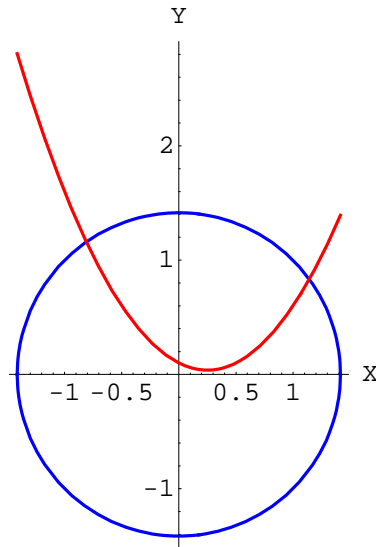
La solución aproximada del sistema es:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1.14232 \\ 0.833732 \end{pmatrix}$$

Representación de las funciones

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 2$$

$$f_2(x,y) = x^2 - 0.5x - y + 0.1$$



Método de *Newton-Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 2$$

$$f_2(x,y) = x^2 - 0.5x - y + 0.1$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ x^2 - 0.5x - y + 0.1 \end{pmatrix}$$

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x - 0.5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{-4yx - 2x + 1. y} & -\frac{2y}{-4yx - 2x + 1. y} \\ \frac{0.5 - 2x}{-4yx - 2x + 1. y} & \frac{2x}{-4yx - 2x + 1. y} \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.800000 \\ 1.200000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = F(-0.8, 1.2) = \begin{pmatrix} 0.0800000 \\ -0.0600000 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = J(-0.8, 1.2) = \begin{pmatrix} -1.60000 & 2.40000 \\ -2.10000 & -1.00000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} -1.6 & 2.4 \\ -2.1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0.08 \\ -0.06 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -0.150602 & -0.361446 \\ 0.316265 & -0.240964 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.08 \\ -0.06 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00963855 \\ -0.039759 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 1.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.00963855 \\ -0.039759 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.809639 \\ 1.16024 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.809639 \\ 1.16024 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = F(-0.809639, 1.16024) = \begin{pmatrix} 0.00167368 \\ 0.0000929017 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = J(-0.809639, 1.16024) = \begin{pmatrix} -1.61928 & 2.32048 \\ -2.11928 & -1.00000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} -1.61928 & 2.32048 \\ -2.11928 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0.00167368 \\ 0.0000929017 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -0.152975 & -0.354975 \\ 0.324196 & -0.247709 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.00167368 \\ 0.0000929017 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000289009 \\ -0.000519589 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -0.809639 \\ 1.16024 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.000289009 \\ -0.000519589 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.80935 \\ 1.15972 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$J(P_i) \Delta P = -F(P_i)$
0	$\begin{pmatrix} -0.8 \\ 1.2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.6 & 2.4 \\ -2.1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.08 \\ -0.06 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} -0.809639 \\ 1.16024 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.61928 & 2.32048 \\ -2.11928 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.00167368 \\ 0.0000929017 \end{pmatrix}$

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$
0	$\begin{pmatrix} -0.8 \\ 1.2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00963855 \\ -0.039759 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.809639 \\ 1.16024 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} -0.809639 \\ 1.16024 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000289009 \\ -0.000519589 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.80935 \\ 1.15972 \end{pmatrix}$

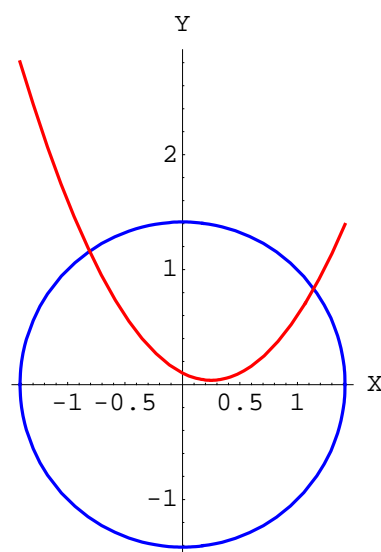
La solución aproximada del sistema es:

$$P_2 = \begin{pmatrix} -0.80935 \\ 1.15972 \end{pmatrix}$$

Representación de las funciones

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 2$$

$$f_2(x, y) = x^2 - 0.5x - y + 0.1$$



■ **Problema 14.** Sean la hipérbola $3x^2 - 2y^2 - 1 = 0$ y la elipse de ecuación $x^2 - 2x + y^2 + 2y - 8 = 0$.

Se pide:

- Representar gráficamente los puntos de corte de ambas curvas.
- Aproximar cada uno de los puntos de corte de abscisa positiva mediante el método de *Newton-Raphson* para sistemas, comenzando a iterar en los puntos

$$P_0 = (x_0, y_0) = (1.5, 1.5),$$

$P_0 = (x_0, y_0) = (2.0, -3.0)$,
y calculando las tres primeras iteraciones en cada caso (puntos P_1 , P_2 , y P_3).

Solución

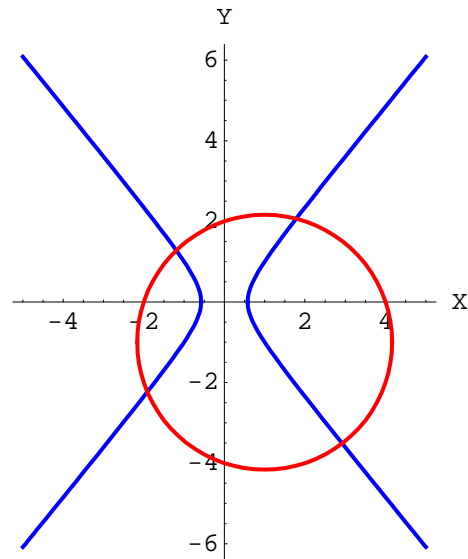
```
<< Graphics`ImplicitPlot`;
```

```
Clear[x, y, f1, f2, p, g1, g2, g, p, l];
f1 = 3 x^2 - 2 y^2 - 1;
f2 = x^2 - 2 x + y^2 + 2 y - 8;
Print["Representación de las funciones",
      "\n\t f1(x, y) = ", f1, "\t (hipérbola)",
      "\n\t f2(x, y) = ", f2, "\t (elipse)"];
g1 = ImplicitPlot[f1 == 0, {x, -5, 5},
      PlotStyle -> {{Thickness[0.010], RGBColor[0, 0, 1]}},
      AxesLabel -> {"X", "Y"}, DisplayFunction -> Identity];
g2 = ImplicitPlot[f2 == 0, {x, -5, 5},
      PlotStyle -> {{Thickness[0.010], RGBColor[1, 0, 0]}},
      AxesLabel -> {"X", "Y"}, DisplayFunction -> Identity];
g = Show[g1, g2, AxesLabel -> {"X", "Y"},
      AxesOrigin -> {0, 0}, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
p = {1.5, 1.5};
l = newtonRaphsonNoLineal[f1, f2, p, 3, 0.2];
Print["\t f1(x, y) = ", f1,
      StringReplace["\n\t f1(aa, bb) = ",
        {"aa" -> ToString[l[[1, 1]], TraditionalForm],
        "bb" -> ToString[l[[2, 1]], TraditionalForm]
      }],
      f1 /. {x -> l[[1, 1]], y -> l[[2, 1]]},
      "\n\t f2(x, y) = ", f2,
      StringReplace["\n\t f2(aa, bb) = ",
        {"aa" -> ToString[l[[1, 1]], TraditionalForm],
        "bb" -> ToString[l[[2, 1]], TraditionalForm]
      }],
      f2 /. {x -> l[[1, 1]], y -> l[[2, 1]]}];
```

Representación de las funciones

$$f_1(x, y) = -1 + 3x^2 - 2y^2 \quad (\text{hipérbola})$$

$$f_2(x, y) = -8 - 2x + x^2 + 2y + y^2 \quad (\text{elipse})$$



Método de *Newton-Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_1(x,y) = -1 + 3x^2 - 2y^2$$

$$f_2(x,y) = -8 - 2x + x^2 + 2y + y^2$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 - 2y^2 \\ -8 - 2x + x^2 + 2y + y^2 \end{pmatrix}$$

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -4y \\ -2 + 2x & 2 + 2y \end{pmatrix}$$

$$J^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2+2y}{12x-8y+20xy} & \frac{4y}{12x-8y+20xy} \\ \frac{2-2x}{12x-8y+20xy} & \frac{6x}{12x-8y+20xy} \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.50000 \\ 1.50000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = F(1.5, 1.5) = \begin{pmatrix} 1.25000 \\ -3.50000 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = J(1.5, 1.5) = \begin{pmatrix} 9.00000 & -6.00000 \\ 1.00000 & 5.00000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} 9. & -6. \\ 1. & 5. \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1.25 \\ -3.5 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0.0980392 & 0.117647 \\ -0.0196078 & 0.176471 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.25 \\ -3.5 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.289216 \\ 0.642157 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.289216 \\ 0.642157 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.78922 \\ 2.14216 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.78922 \\ 2.14216 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = F(1.78922, 2.14216) = \begin{pmatrix} -0.573794 \\ 0.496011 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = J(1.78922, 2.14216) = \begin{pmatrix} 10.7353 & -8.56863 \\ 1.57843 & 6.28431 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} 10.7353 & -8.56863 \\ 1.57843 & 6.28431 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -0.573794 \\ 0.496011 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0.0775947 & 0.1058 \\ -0.0194895 & 0.132553 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.573794 \\ 0.496011 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0079546 \\ -0.0769305 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1.78922 \\ 2.14216 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0079546 \\ -0.0769305 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.78126 \\ 2.06523 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.78126 \\ 2.06523 \end{pmatrix}$$

$$F(P_2) = F(1.78126, 2.06523) = \begin{pmatrix} -0.0116468 \\ 0.00598158 \end{pmatrix}$$

$$J(P_2) = J(1.78126, 2.06523) = \begin{pmatrix} 10.6876 & -8.26091 \\ 1.56252 & 6.13045 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_2) \Delta P = -F(P_2)$:

$$\begin{pmatrix} 10.6876 & -8.26091 \\ 1.56252 & 6.13045 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -0.0116468 \\ 0.00598158 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0.0781672 & 0.105332 \\ -0.0199231 & 0.136273 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.0116468 \\ 0.00598158 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000280345 \\ -0.00104717 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_3 = P_2 + \Delta P$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1.78126 \\ 2.06523 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.000280345 \\ -0.00104717 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.78154 \\ 2.06418 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$J(P_i) \Delta P = -F(P_i)$
0	$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9. & -6. \\ 1. & 5. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1.25 \\ -3.5 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 1.78922 \\ 2.14216 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10.7353 & -8.56863 \\ 1.57843 & 6.28431 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -0.573794 \\ 0.496011 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1.78126 \\ 2.06523 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10.6876 & -8.26091 \\ 1.56252 & 6.13045 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -0.0116468 \\ 0.00598158 \end{pmatrix}$

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$
0	$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.289216 \\ 0.642157 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.78922 \\ 2.14216 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 1.78922 \\ 2.14216 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0079546 \\ -0.0769305 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.78126 \\ 2.06523 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1.78126 \\ 2.06523 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000280345 \\ -0.00104717 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.78154 \\ 2.06418 \end{pmatrix}$

La solución aproximada del sistema es:

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1.78154 \\ 2.06418 \end{pmatrix}$$

$$f_1(x, y) = -1 + 3x^2 - 2y^2$$

$$f_1(1.78154, 2.06418) = -1.95735 \times 10^{-6}$$

$$f_2(x, y) = -8 - 2x + x^2 + 2y + y^2$$

$$f_2(1.78154, 2.06418) = 1.17516 \times 10^{-6}$$

```
p = {2.0, -3.0};
l = newtonRaphsonNoLineal[f1, f2, p, 3, 0.2];
Print["\t f1(x, y) = ", f1,
      StringReplace["\n\t f1(aa, bb) = ",
                    {"aa" -> ToString[l[[1, 1]], TraditionalForm],
                     "bb" -> ToString[l[[2, 1]], TraditionalForm]}],
      f1 /. {x -> l[[1, 1]], y -> l[[2, 1]]},
      "\n\t f2(x, y) = ", f2,
      StringReplace["\n\t f2(aa, bb) = ",
                    {"aa" -> ToString[l[[1, 1]], TraditionalForm],
                     "bb" -> ToString[l[[2, 1]], TraditionalForm]}],
      f2 /. {x -> l[[1, 1]], y -> l[[2, 1]]}];
```

Método de *Newton–Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_1(x, y) = -1 + 3x^2 - 2y^2$$

$$f_2(x, y) = -8 - 2x + x^2 + 2y + y^2$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2. \\ -3. \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 - 2y^2 \\ -8 - 2x + x^2 + 2y + y^2 \end{pmatrix}$$

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -4y \\ -2 + 2x & 2 + 2y \end{pmatrix}$$

$$J^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2+2y}{12x-8y+20xy} & \frac{4y}{12x-8y+20xy} \\ \frac{2-2x}{12x-8y+20xy} & \frac{6x}{12x-8y+20xy} \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.00000 \\ -3.00000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = F(2., -3.) = \begin{pmatrix} -7.00000 \\ -5.00000 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = J(2., -3.) = \begin{pmatrix} 12.0000 & 12.0000 \\ 2.00000 & -4.00000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} 12. & 12. \\ 2. & -4. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -7. \\ -5. \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0.0555556 & 0.166667 \\ 0.0277778 & -0.166667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7. \\ -5. \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.22222 \\ -0.638889 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2. \\ -3. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.22222 \\ -0.638889 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.22222 \\ -3.63889 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.22222 \\ -3.63889 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = F(3.22222, -3.63889) = \begin{pmatrix} 3.66512 \\ 1.90201 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = J(3.22222, -3.63889) = \begin{pmatrix} 19.3333 & 14.5556 \\ 4.44444 & -5.27778 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} 19.3333 & 14.5556 \\ 4.44444 & -5.27778 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3.66512 \\ 1.90201 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0.0316549 & 0.087301 \\ 0.0266568 & -0.115957 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.66512 \\ 1.90201 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.282066 \\ 0.122851 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 3.22222 \\ -3.63889 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.282066 \\ 0.122851 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.94016 \\ -3.51604 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.94016 \\ -3.51604 \end{pmatrix}$$

$$F(P_2) = F(2.94016, -3.51604) = \begin{pmatrix} 0.208500 \\ 0.0946537 \end{pmatrix}$$

$$J(P_2) = J(2.94016, -3.51604) = \begin{pmatrix} 17.6409 & 14.0642 \\ 3.88031 & -5.03208 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_2) \Delta P = -F(P_2)$:

$$\begin{pmatrix} 17.6409 & 14.0642 \\ 3.88031 & -5.03208 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.2085 \\ 0.0946537 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.0351049 & 0.0981148 \\ 0.02707 & -0.123067 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2085 \\ 0.0946537 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0166063 \\ 0.00600469 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_3 = P_2 + \Delta P$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 2.94016 \\ -3.51604 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0166063 \\ 0.00600469 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.92355 \\ -3.51003 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$J(P_i) \Delta P = -F(P_i)$
0	$\begin{pmatrix} 2. \\ -3. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12. & 12. \\ 2. & -4. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -7. \\ -5. \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 3.22222 \\ -3.63889 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 19.3333 & 14.5556 \\ 4.44444 & -5.27778 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3.66512 \\ 1.90201 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 2.94016 \\ -3.51604 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 17.6409 & 14.0642 \\ 3.88031 & -5.03208 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.2085 \\ 0.0946537 \end{pmatrix}$

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$
0	$\begin{pmatrix} 2. \\ -3. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.22222 \\ -0.638889 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3.22222 \\ -3.63889 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 3.22222 \\ -3.63889 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.282066 \\ 0.122851 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.94016 \\ -3.51604 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 2.94016 \\ -3.51604 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0166063 \\ 0.00600469 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.92355 \\ -3.51003 \end{pmatrix}$

La solución aproximada del sistema es:

$$P_3 = \begin{pmatrix} 2.92355 \\ -3.51003 \end{pmatrix}$$

$$f_1(x, y) = -1 + 3x^2 - 2y^2$$

$$f_1(2.92355, -3.51003) = 0.000755194$$

$$f_2(x, y) = -8 - 2x + x^2 + 2y + y^2$$

$$f_2(2.92355, -3.51003) = 0.000311825$$

■ **Problema 15.** Dado el sistema no lineal de ecuaciones,

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 - x_3 + 4 = 0,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 = 0,$$

se pide aplicar el método de *Newton* para sistemas no lineales para calcular la aproximación del sistema en los dos casos siguientes:

a) Iniciando el método en el punto inicial $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (-0.5, -1.5, 1.5)^T$ e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-5}$.

b) Con el punto inicial $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (-1.0, -1.5, 0.5)^T$ e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-5}$.

Solución

a)

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = {2 x1 - 3 x2 + x3 - 4, 2 x1 + x2 - x3 + 4, x1^2 + x2^2 + x3^2 - 4};
p = {-0.5, -1.5, 1.5};
m = 12; d = 10.^-5;
newtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Newton-Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 \end{pmatrix}$$

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.500000 \\ -1.500000 \\ 1.500000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} 1.000000 \\ 0 \\ 0.750000 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 2.000000 & -3.000000 & 1.000000 \\ 2.000000 & 1.000000 & -1.000000 \\ -1.000000 & -3.000000 & 3.000000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} 2.000000 & -3.000000 & 1.000000 \\ 2.000000 & 1.000000 & -1.000000 \\ -1.000000 & -3.000000 & 3.000000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.15 \\ 0.2 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.15 \\ 0.2 \\ -0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.65 \\ -1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.650000 \\ -1.30000 \\ 1.40000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} 4.44089 \times 10^{-16} \\ 2.22045 \times 10^{-16} \\ 0.0725000 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \\ 2.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.30000 & -2.60000 & 2.80000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} 2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \\ 2.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.30000 & -2.60000 & 2.80000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0154255 \\ -0.0308511 \\ -0.0617021 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -0.65 \\ -1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0154255 \\ -0.0308511 \\ -0.0617021 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.665426 \\ -1.33085 \\ 1.3383 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.665426 \\ -1.33085 \\ 1.33830 \end{pmatrix}$$

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} -4.44089 \times 10^{-16} \\ -4.44089 \times 10^{-16} \\ 0.00499689 \end{pmatrix}$$

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \\ 2.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.33085 & -2.66170 & 2.67660 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_2) \Delta P = -F(P_2)$:

$$\begin{pmatrix} 2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \\ 2.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.33085 & -2.66170 & 2.67660 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00123315 \\ -0.0024663 \\ -0.00493261 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_3 = P_2 + \Delta P$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} -0.665426 \\ -1.33085 \\ 1.3383 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.00123315 \\ -0.0024663 \\ -0.00493261 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.666659 \\ -1.33332 \\ 1.33337 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$.

$$P_3 = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.666659 \\ -1.33332 \\ 1.33337 \end{pmatrix}$$

$$F(P_3) = \begin{pmatrix} 4.44089 \times 10^{-16} \\ 2.22045 \times 10^{-16} \\ 0.0000319339 \end{pmatrix}$$

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \\ 2.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.33332 & -2.66663 & 2.66673 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_3) \Delta P = -F(P_3)$:

$$\begin{pmatrix} 2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \\ 2.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.33332 & -2.66663 & 2.66673 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.98281 \times 10^{-6} \\ -0.0000159656 \\ -0.0000319312 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_4 = P_3 + \Delta P$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} -0.666659 \\ -1.33332 \\ 1.33337 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7.98281 \times 10^{-6} \\ -0.0000159656 \\ -0.0000319312 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.666667 \\ -1.33333 \\ 1.33333 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$.

$$P_4 = \begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.666667 \\ -1.33333 \\ 1.33333 \end{pmatrix}$$

$$F(P_4) = \begin{pmatrix} 2.22045 \times 10^{-16} \\ 0 \\ 1.33823 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

$$J(P_4) = \begin{pmatrix} 2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \\ 2.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.33333 & -2.66667 & 2.66667 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_4) \Delta P = -F(P_4)$:

$$\begin{pmatrix} 2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \\ 2.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.33333 & -2.66667 & 2.66667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.34558 \times 10^{-10} \\ -6.69115 \times 10^{-10} \\ -1.33823 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_5 = P_4 + \Delta P$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} -0.666667 \\ -1.33333 \\ 1.33333 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3.34558 \times 10^{-10} \\ -6.69115 \times 10^{-10} \\ -1.33823 \times 10^{-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.666667 \\ -1.33333 \\ 1.33333 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} -0.5 \\ -1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.15 \\ 0.2 \\ -0.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.65 \\ -1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix}$	0.2
1	$\begin{pmatrix} -0.65 \\ -1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0154255 \\ -0.0308511 \\ -0.0617021 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.665426 \\ -1.33085 \\ 1.3383 \end{pmatrix}$	0.0617021

2	$\begin{pmatrix} -0.665426 \\ -1.33085 \\ 1.3383 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00123315 \\ -0.0024663 \\ -0.00493261 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.666659 \\ -1.33332 \\ 1.33337 \end{pmatrix}$	0.00493261
3	$\begin{pmatrix} -0.666659 \\ -1.33332 \\ 1.33337 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7.98281 \times 10^{-6} \\ -0.0000159656 \\ -0.0000319312 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.666667 \\ -1.33333 \\ 1.33333 \end{pmatrix}$	0.0000319312
4	$\begin{pmatrix} -0.666667 \\ -1.33333 \\ 1.33333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3.34558 \times 10^{-10} \\ -6.69115 \times 10^{-10} \\ -1.33823 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.666667 \\ -1.33333 \\ 1.33333 \end{pmatrix}$	1.33823×10^{-9}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_5 = \begin{pmatrix} -0.666667 \\ -1.33333 \\ 1.33333 \end{pmatrix}$$

Solución

b)

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = {2 x1 - 3 x2 + x3 - 4, 2 x1 + x2 - x3 + 4, x12 + x22 + x32 - 4};
p = {-1.0, -1.5, 0.5};
m = 12;
d = 10.-5;
newtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Newton-Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1. \\ -1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 \end{pmatrix}$$

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.00000 \\ -1.50000 \\ 0.500000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} -1.00000 \\ 0 \\ -0.500000 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \\ 2.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} 2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \\ 2.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ -0.25 \\ 0. \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1. \\ -1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.125 \\ -0.25 \\ 0. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.875 \\ -1.75 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.875000 \\ -1.75000 \\ 0.500000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0781250 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \\ 2.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.75000 & -3.50000 & 1.00000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} 2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \\ 2.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.75000 & -3.50000 & 1.00000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0164474 \\ 0.0328947 \\ 0.0657895 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -0.875 \\ -1.75 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0164474 \\ 0.0328947 \\ 0.0657895 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.858553 \\ -1.71711 \\ 0.565789 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.858553 \\ -1.71711 \\ 0.565789 \end{pmatrix}$$

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} -1.11022 \times 10^{-16} \\ 1.11022 \times 10^{-16} \\ 0.00568083 \end{pmatrix}$$

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \\ 2.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.71711 & -3.43421 & 1.13158 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_2) \Delta P = -F(P_2)$:

$$\begin{pmatrix} 2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \\ 2.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.71711 & -3.43421 & 1.13158 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00139949 \\ 0.00279898 \\ 0.00559797 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_3 = P_2 + \Delta P$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} -0.858553 \\ -1.71711 \\ 0.565789 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00139949 \\ 0.00279898 \\ 0.00559797 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.857153 \\ -1.71431 \\ 0.571387 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$.

$$P_3 = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.857153 \\ -1.71431 \\ 0.571387 \end{pmatrix}$$

$$F(P_3) = \begin{pmatrix} -9.99201 \times 10^{-16} \\ 1.11022 \times 10^{-16} \\ 0.0000411302 \end{pmatrix}$$

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \\ 2.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.71431 & -3.42861 & 1.14277 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_3) \Delta P = -F(P_3)$:

$$\begin{pmatrix} 2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \\ 2.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.71431 & -3.42861 & 1.14277 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000102814 \\ 0.0000205629 \\ 0.0000411257 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_4 = P_3 + \Delta P$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} -0.857153 \\ -1.71431 \\ 0.571387 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0000102814 \\ 0.0000205629 \\ 0.0000411257 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.857143 \\ -1.71429 \\ 0.571429 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$.

$$P_4 = \begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.857143 \\ -1.71429 \\ 0.571429 \end{pmatrix}$$

$$F(P_4) = \begin{pmatrix} 1.44329 \times 10^{-15} \\ -1.11022 \times 10^{-16} \\ 2.21986 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

$$J(P_4) = \begin{pmatrix} 2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \\ 2.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.71429 & -3.42857 & 1.14286 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_4) \Delta P = -F(P_4)$:

$$\begin{pmatrix} 2.00000 & -3.00000 & 1.00000 \\ 2.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.71429 & -3.42857 & 1.14286 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.54966 \times 10^{-10} \\ 1.10993 \times 10^{-9} \\ 2.21986 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_5 = P_4 + \Delta P$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} -0.857143 \\ -1.71429 \\ 0.571429 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5.54966 \times 10^{-10} \\ 1.10993 \times 10^{-9} \\ 2.21986 \times 10^{-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.857143 \\ -1.71429 \\ 0.571429 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} -1. \\ -1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.125 \\ -0.25 \\ 0. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.875 \\ -1.75 \\ 0.5 \end{pmatrix}$	0.25
1	$\begin{pmatrix} -0.875 \\ -1.75 \\ 0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0164474 \\ 0.0328947 \\ 0.0657895 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.858553 \\ -1.71711 \\ 0.565789 \end{pmatrix}$	0.0657895

2	$\begin{pmatrix} -0.858553 \\ -1.71711 \\ 0.565789 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.00139949 \\ 0.00279898 \\ 0.00559797 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.857153 \\ -1.71431 \\ 0.571387 \end{pmatrix}$	0.00559797
3	$\begin{pmatrix} -0.857153 \\ -1.71431 \\ 0.571387 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0000102814 \\ 0.0000205629 \\ 0.0000411257 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.857143 \\ -1.71429 \\ 0.571429 \end{pmatrix}$	0.0000411257
4	$\begin{pmatrix} -0.857143 \\ -1.71429 \\ 0.571429 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.54966 \times 10^{-10} \\ 1.10993 \times 10^{-9} \\ 2.21986 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.857143 \\ -1.71429 \\ 0.571429 \end{pmatrix}$	2.21986×10^{-9}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_5 = \begin{pmatrix} -0.857143 \\ -1.71429 \\ 0.571429 \end{pmatrix}$$

- **Problema 16.** Aplicando el método de *Newton* para sistemas no lineales calcular la aproximación del sistema de ecuaciones no lineales siguiente, iniciando el método en el punto inicial $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0.5, 0.1, -0.1)^T$ e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-5}$.

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 1/2 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + (10\pi - 3)/3 = 0.$$

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = {3 x1 - Cos[x2 * x3] - 1 / 2,
              x1^2 - 81 (x2 + 0.1)^2 + Sin[x3] + 1.06,
              Exp[-x1 * x2] + 20 x3 + (10 Pi - 3) / 3
};
p = {0.5, 0.1, -0.1};
m = 12;
d = 10.^-5;
newtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Newton–Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\cos(x_2 x_3) + 3 x_1 - \frac{1}{2} \\ x_1^2 - 81 (x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 \\ 20 x_3 + e^{-x_1 x_2} + \frac{1}{3} (-3 + 10 \pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\cos(x_2 x_3) + 3 x_1 - \frac{1}{2} \\ x_1^2 - 81 (x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 \\ 20 x_3 + e^{-x_1 x_2} + \frac{1}{3} (-3 + 10 \pi) \end{pmatrix}$$

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3 & \sin(x_2 x_3) x_3 & \sin(x_2 x_3) x_2 \\ 2 x_1 & -162 (x_2 + 0.1) & \cos(x_3) \\ -e^{-x_1 x_2} x_2 & -e^{-x_1 x_2} x_1 & 20 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.500000 \\ 0.100000 \\ -0.100000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} 0.0000499996 \\ -2.02983 \\ 8.42320 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 3.00000 & 0.000999983 & -0.000999983 \\ 1.00000 & -32.4000 & 0.995004 \\ -0.0951229 & -0.475615 & 20.0000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} 3.00000 & 0.000999983 & -0.000999983 \\ 1.00000 & -32.4000 & 0.995004 \\ -0.0951229 & -0.475615 & 20.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.000132437 \\ -0.0756424 \\ -0.42296 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.000132437 \\ -0.0756424 \\ -0.42296 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.499868 \\ 0.0243576 \\ -0.52296 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.499868 \\ 0.0243576 \\ -0.522960 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} -0.000316183 \\ -0.442229 \\ 0.000679587 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 3.00000 & 0.00666131 & -0.000310261 \\ 0.999735 & -20.1459 & 0.866345 \\ -0.0240629 & -0.493818 & 20.0000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} 3.00000 & 0.00666131 & -0.000310261 \\ 0.999735 & -20.1459 & 0.866345 \\ -0.0240629 & -0.493818 & 20.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000154114 \\ -0.0219684 \\ -0.000576215 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.499868 \\ 0.0243576 \\ -0.52296 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.000154114 \\ -0.0219684 \\ -0.000576215 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.500022 \\ 0.00238921 \\ -0.523536 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.500022 \\ 0.00238921 \\ -0.523536 \end{pmatrix}$$

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} 0.0000658141 \\ -0.0390915 \\ 0.0000631242 \end{pmatrix}$$

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 3.00000 & 0.000654858 & -2.98851 \times 10^{-6} \\ 1.00004 & -16.5871 & 0.866057 \\ -0.00238636 & -0.499425 & 20.0000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_2) \Delta P = -F(P_2)$:

$$\begin{pmatrix} 3.00000 & 0.000654858 & -2.98851 \times 10^{-6} \\ 1.00004 & -16.5871 & 0.866057 \\ -0.00238636 & -0.499425 & 20.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{x_1} \\ \Delta_{x_2} \\ \Delta_{x_3} \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta_{x_1} \\ \Delta_{x_2} \\ \Delta_{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0000214227 \\ -0.00236128 \\ -0.0000621228 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_3 = P_2 + \Delta P$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.500022 \\ 0.00238921 \\ -0.523536 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0000214227 \\ -0.00236128 \\ -0.0000621228 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.000027929 \\ -0.523598 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$.

$$P_3 = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.500000 \\ 0.0000279290 \\ -0.523598 \end{pmatrix}$$

$$F(P_3) = \begin{pmatrix} 7.63928 \times 10^{-7} \\ -0.000451626 \\ 6.45934 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 3.00000 & 7.65687 \times 10^{-6} & -4.08422 \times 10^{-10} \\ 1.00000 & -16.2045 & 0.866026 \\ -0.0000279286 & -0.499993 & 20.0000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_3) \Delta P = -F(P_3)$:

$$\begin{pmatrix} 3.00000 & 7.65687 \times 10^{-6} & -4.08422 \times 10^{-10} \\ 1.00000 & -16.2045 & 0.866026 \\ -0.0000279286 & -0.499993 & 20.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.54571 \times 10^{-7} \\ -0.0000279251 \\ -7.30415 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_4 = P_3 + \Delta P$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.000027929 \\ -0.523598 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.54571 \times 10^{-7} \\ -0.0000279251 \\ -7.30415 \times 10^{-7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3.90671 \times 10^{-9} \\ -0.523599 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$.

$$P_4 = \begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.500000 \\ 3.90671 \times 10^{-9} \\ -0.523599 \end{pmatrix}$$

$$F(P_4) = \begin{pmatrix} 1.06894 \times 10^{-10} \\ -6.31645 \times 10^{-8} \\ 9.03668 \times 10^{-11} \end{pmatrix}$$

$$J(P_4) = \begin{pmatrix} 3.00000 & 1.07105 \times 10^{-9} & -7.99135 \times 10^{-18} \\ 1.00000 & -16.2000 & 0.866025 \\ -3.90671 \times 10^{-9} & -0.500000 & 20.0000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_4) \Delta P = -F(P_4)$:

$$\begin{pmatrix} 3.00000 & 1.07105 \times 10^{-9} & -7.99135 \times 10^{-18} \\ 1.00000 & -16.2000 & 0.866025 \\ -3.90671 \times 10^{-9} & -0.500000 & 20.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.56313 \times 10^{-11} \\ -3.90671 \times 10^{-9} \\ -1.02186 \times 10^{-10} \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_5 = P_4 + \Delta P$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3.90671 \times 10^{-9} \\ -0.523599 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3.56313 \times 10^{-11} \\ -3.90671 \times 10^{-9} \\ -1.02186 \times 10^{-10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 8.71767 \times 10^{-17} \\ -0.523599 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.000132437 \\ -0.0756424 \\ -0.42296 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499868 \\ 0.0243576 \\ -0.52296 \end{pmatrix}$	0.42296
1	$\begin{pmatrix} 0.499868 \\ 0.0243576 \\ -0.52296 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000154114 \\ -0.0219684 \\ -0.000576215 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500022 \\ 0.00238921 \\ -0.523536 \end{pmatrix}$	0.0219684
2	$\begin{pmatrix} 0.500022 \\ 0.00238921 \\ -0.523536 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0000214227 \\ -0.00236128 \\ -0.0000621228 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.000027929 \\ -0.523598 \end{pmatrix}$	0.00236128
3	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.000027929 \\ -0.523598 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.54571 \times 10^{-7} \\ -0.0000279251 \\ -7.30415 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 3.90671 \times 10^{-9} \\ -0.523599 \end{pmatrix}$	0.0000279251
4	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 3.90671 \times 10^{-9} \\ -0.523599 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3.56313 \times 10^{-11} \\ -3.90671 \times 10^{-9} \\ -1.02186 \times 10^{-10} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 8.71767 \times 10^{-17} \\ -0.523599 \end{pmatrix}$	3.90671×10^{-9}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.500000 \\ 8.71767 \times 10^{-17} \\ -0.523599 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 17.** Mediante el método de *Newton* para sistemas no lineales calcular las aproximaciones P_1 y P_2 , partiendo del punto inicial P_0 para los sistemas no lineales siguientes:

- $f_1(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 20x_1 + 1/4x_2^2 + 8 = 0,$
 $f_2(x_1, x_2) = 1/2x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0,$
 $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (0, 0)^T.$
- $f_1(x_1, x_2) = \text{sen}(4\pi x_1 x_2) - 2x_2 - x_1 = 0,$
 $f_2(x_1, x_2) = ((4\pi - 1)/(4\pi))(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0,$
 $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (0, 0)^T.$
- $f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 1/2 = 0,$
 $f_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0,$
 $f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + (10\pi - 3)/3 = 0,$
 $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0, 0, 0)^T.$
- $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 - 37 = 0,$
 $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2^2 - 5 = 0,$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0,$$

$$P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0, 0, 0)^T$$

Solución

a)

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = {4 x1^2 - 20 x1 + x2^2 / 4 + 8, x1 x2^2 / 2 + 2 x1 - 5 x2 + 8};
p = {0.0, 0.0};
m = 2;
d = 10.^-6;
newtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Newton-Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^2 - 20x_1 + \frac{x_2^2}{4} + 8 \\ \frac{1}{2}x_1x_2^2 - 5x_2 + 2x_1 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^2 - 20x_1 + \frac{x_2^2}{4} + 8 \\ \frac{1}{2}x_1x_2^2 - 5x_2 + 2x_1 + 8 \end{pmatrix}$$

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8x_1 - 20 & \frac{x_2}{2} \\ \frac{x_2^2}{2} + 2 & x_1x_2 - 5 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} 8.00000 \\ 8.00000 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} -20.0000 & 0 \\ 2.00000 & -5.00000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} -20.0000 & 0 \\ 2.00000 & -5.00000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.76 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.76 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.400000 \\ 1.76000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} 1.41440 \\ 0.619520 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -16.8000 & 0.880000 \\ 3.54880 & -4.29600 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} -16.8000 & 0.880000 \\ 3.54880 & -4.29600 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0958936 \\ 0.223423 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.76 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0958936 \\ 0.223423 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.495894 \\ 1.98342 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0. \\ 0. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.76 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.76 \end{pmatrix}$	1.76
1	$\begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.76 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0958936 \\ 0.223423 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.495894 \\ 1.98342 \end{pmatrix}$	0.223423

La solución aproximada del sistema es:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.495894 \\ 1.98342 \end{pmatrix}$$

Solución

b)

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = { Sin[4 * Pi * x1 * x2] - 2 x2 - x1,
  ((4 Pi - 1) / (4 Pi)) (Exp[2 x1] - E) + 4 E (x2)^2 - 2 E * x1};
p = {0.0, 0.0};
m = 2;
d = 10.^-6;
newtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Newton-Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin(4\pi x_1 x_2) - x_1 - 2x_2 \\ 4e x_2^2 - 2e x_1 + \frac{(-e + e^{2x_1})(-1 + 4\pi)}{4\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin(4\pi x_1 x_2) - x_1 - 2x_2 \\ 4e x_2^2 - 2e x_1 + \frac{(-e + e^{2x_1})(-1 + 4\pi)}{4\pi} \end{pmatrix}$$

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4\pi \cos(4\pi x_1 x_2) x_2 - 1 & 4\pi \cos(4\pi x_1 x_2) x_1 - 2 \\ -2e + \frac{e^{2x_1}(-1 + 4\pi)}{2\pi} & 8e x_2 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.58155 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} -1.00000 & -2.00000 \\ -3.59572 & 0 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} -1.00000 & -2.00000 \\ -3.59572 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.439841 \\ 0.219921 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.439841 \\ 0.219921 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.439841 \\ 0.219921 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.439841 \\ 0.219921 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} -0.937560 \\ 0.797033 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -0.0387518 & -3.92250 \\ -4.67277 & 4.78245 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} -0.0387518 & -3.92250 \\ -4.67277 & 4.78245 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0733204 \\ -0.238297 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -0.439841 \\ 0.219921 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0733204 \\ -0.238297 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.513162 \\ -0.0183762 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0. \\ 0. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.439841 \\ 0.219921 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.439841 \\ 0.219921 \end{pmatrix}$	0.439841
1	$\begin{pmatrix} -0.439841 \\ 0.219921 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0733204 \\ -0.238297 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.513162 \\ -0.0183762 \end{pmatrix}$	0.238297

La solución aproximada del sistema es:

$$P_2 = \begin{pmatrix} -0.513162 \\ -0.0183762 \end{pmatrix}$$

Solución

c)

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = {3 x1 - Cos[x2 * x3] - 1 / 2, 4 (x1)2 - 625 (x2)2 + 2 x2 - 1,
              Exp[-x1 * x2] + 20 x3 + (10 Pi - 3) / 3};
p = {0.0, 0.0, 0.0};
m = 2;
d = 10.-6;
newtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Newton-Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\cos(x_2 x_3) + 3 x_1 - \frac{1}{2} \\ 4 x_1^2 - 625 x_2^2 + 2 x_2 - 1 \\ 20 x_3 + e^{-x_1 x_2} + \frac{1}{3} (-3 + 10 \pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\cos(x_2 x_3) + 3 x_1 - \frac{1}{2} \\ 4 x_1^2 - 625 x_2^2 + 2 x_2 - 1 \\ 20 x_3 + e^{-x_1 x_2} + \frac{1}{3} (-3 + 10 \pi) \end{pmatrix}$$

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3 & \sin(x_2 x_3) x_3 & \sin(x_2 x_3) x_2 \\ 8 x_1 & 2 - 1250 x_2 & 0 \\ -e^{-x_1 x_2} x_2 & -e^{-x_1 x_2} x_1 & 20 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} -1.50000 \\ -1.00000 \\ 10.4720 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 3.00000 & 0 & 0 \\ 0 & 2.00000 & 0 \\ 0 & 0 & 20.0000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} 3.00000 & 0 & 0 \\ 0 & 2.00000 & 0 \\ 0 & 0 & 20.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.50000 \\ 1.00000 \\ -10.4720 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -0.523599 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -0.523599 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -0.523599 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.500000 \\ 0.500000 \\ -0.523599 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} 0.0340742 \\ -155.250 \\ -0.221199 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 3.00000 & 0.135517 & -0.129410 \\ 4.00000 & -623.000 & 0 \\ -0.389400 & -0.389400 & 20.0000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} 3.00000 & 0.135517 & -0.129410 \\ 4.00000 & -623.000 & 0 \\ -0.389400 & -0.389400 & 20.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000166687 \\ -0.249196 \\ 0.00621135 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -0.523599 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.000166687 \\ -0.249196 \\ 0.00621135 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.500167 \\ 0.250804 \\ -0.517387 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -0.523599 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -0.523599 \end{pmatrix}$	0.523599
1	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -0.523599 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000166687 \\ -0.249196 \\ 0.00621135 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.500167 \\ 0.250804 \\ -0.517387 \end{pmatrix}$	0.249196

La solución aproximada del sistema es:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.500167 \\ 0.250804 \\ -0.517387 \end{pmatrix}$$

Solución

d)

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = {x1^2 + x2 - 37, x1 - x2^2 - 5, x1 + x2 + x3 - 3};
p = {0.0, 0.0, 0.0};
m = 2;
d = 10.^-6;
newtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Newton-Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 - 37 \\ -x_2^2 + x_1 - 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 - 37 \\ -x_2^2 + x_1 - 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 \end{pmatrix}$$

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 1 & -2x_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} -37.00000 \\ -5.00000 \\ -3.00000 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1.00000 & 0 \\ 1.00000 & 0 & 0 \\ 1.00000 & 1.00000 & 1.00000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1.00000 & 0 \\ 1.00000 & 0 & 0 \\ 1.00000 & 1.00000 & 1.00000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.00000 \\ -37.00000 \\ 39.00000 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5. \\ 37. \\ -39. \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5. \\ 37. \\ -39. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5. \\ 37. \\ -39. \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.00000 \\ 37.00000 \\ -39.00000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} 25.0000 \\ -1369.00 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 10.0000 & 1.00000 & 0 \\ 1.00000 & -74.0000 & 0 \\ 1.00000 & 1.00000 & 1.00000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} 10.0000 & 1.00000 & 0 \\ 1.00000 & -74.0000 & 0 \\ 1.00000 & 1.00000 & 1.00000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25.0000 \\ 1369.00 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.649123 \\ -18.5088 \\ 19.1579 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 5. \\ 37. \\ -39. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.649123 \\ -18.5088 \\ 19.1579 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.35088 \\ 18.4912 \\ -19.8421 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5. \\ 37. \\ -39. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5. \\ 37. \\ -39. \end{pmatrix}$	39.
1	$\begin{pmatrix} 5. \\ 37. \\ -39. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.649123 \\ -18.5088 \\ 19.1579 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4.35088 \\ 18.4912 \\ -19.8421 \end{pmatrix}$	19.1579

La solución aproximada del sistema es:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 4.35088 \\ 18.4912 \\ -19.8421 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 18.** Dado el siguiente problema no lineal

$$f_1(x_1, x_2) = x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12,$$

$$f_2(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25.$$

- Representar gráficamente las curvas f_1 y f_2 .
- Calcular la solución aproximada del sistema empleando el método de *Newton* comenzando en los puntos

$$P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (2, 3)^T,$$

$$P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (-2, -2)^T$$

e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 5 \times 10^{-2}$.

Solución

a)

```
<< Graphics`ImplicitPlot`;
```

```
Clear[ecuaciones, p, m, d, f, g, g1, g2, g];
f = x (1 - x) + 4 y - 12;
g = (x - 2)^2 + (2 y - 3)^2 - 25;
Print["Representación gráfica de la solución",
      "\n\t f1(x, y) = ", f, "\n\t f2(x, y) = ", g];
g1 = ImplicitPlot[f == 0, {x, -3, 7},
      PlotStyle -> {{Thickness[0.010], RGBColor[0, 0, 1]}},
      AxesLabel -> {"X", "Y"}, DisplayFunction -> Identity];
g2 = ImplicitPlot[g == 0, {x, -3, 7},
      PlotStyle -> {{Thickness[0.010], RGBColor[1, 0, 0]}},
```



```

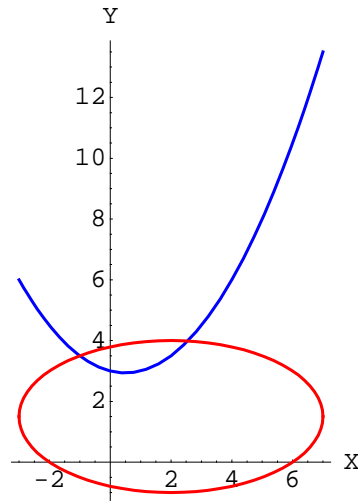
AxesLabel -> {"X", "Y"}, DisplayFunction -> Identity];
g = Show[g1, g2, AxesLabel -> {"X", "Y"},
  AspectRatio -> Automatic, DisplayFunction -> $DisplayFunction];

```

Representación gráfica de la solución

$$f_1(x, y) = (1 - x)x + 4y - 12$$

$$f_2(x, y) = (x - 2)^2 + (2y - 3)^2 - 25$$



Solución

b)

```

Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = {x1 (1 - x1) + 4 x2 - 12, (x1 - 2)^2 + (2 x2 - 3)^2 - 25};
p = {2.0, 3.0};
m = 10;
d = 5 * 10.^-2;
newtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
p = {-2.0, 2.0};
m = 10;
d = 5 * 10.^-2;
newtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];

```

Método de *Newton-Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} (1 - x_1)x_1 + 4x_2 - 12 \\ (x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 - 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2. \\ 3. \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} (1 - x_1)x_1 + 4x_2 - 12 \\ (x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 - 25 \end{pmatrix}$$
$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 - 2x_1 & 4 \\ 2(x_1 - 2) & 4(2x_2 - 3) \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.00000 \\ 3.00000 \end{pmatrix}$$
$$F(P_0) = \begin{pmatrix} -2.00000 \\ -16.0000 \end{pmatrix}$$
$$J(P_0) = \begin{pmatrix} -3.00000 & 4.00000 \\ 0 & 12.0000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} -3.00000 & 4.00000 \\ 0 & 12.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$
$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.11111 \\ 1.33333 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$
$$P_1 = \begin{pmatrix} 2. \\ 3. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.11111 \\ 1.33333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.11111 \\ 4.33333 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.11111 \\ 4.33333 \end{pmatrix}$$
$$F(P_1) = \begin{pmatrix} -1.23457 \\ 8.34568 \end{pmatrix}$$
$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -5.22222 & 4.00000 \\ 2.22222 & 22.6667 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} -5.22222 & 4.00000 \\ 2.22222 & 22.6667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$
$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.482214 \\ -0.320916 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 3.11111 \\ 4.33333 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.482214 \\ -0.320916 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.6289 \\ 4.01242 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.62890 \\ 4.01242 \end{pmatrix}$$

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} -0.232531 \\ 0.644479 \end{pmatrix}$$

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} -4.25779 & 4.00000 \\ 1.25779 & 20.0993 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_2) \Delta P = -F(P_2)$:

$$\begin{pmatrix} -4.25779 & 4.00000 \\ 1.25779 & 20.0993 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0800312 \\ -0.0270564 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_3 = P_2 + \Delta P$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 2.6289 \\ 4.01242 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0800312 \\ -0.0270564 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.54887 \\ 3.98536 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$.

$$P_3 = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.54887 \\ 3.98536 \end{pmatrix}$$

$$F(P_3) = \begin{pmatrix} -0.00640500 \\ 0.00933319 \end{pmatrix}$$

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} -4.09773 & 4.00000 \\ 1.09773 & 19.8829 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_3) \Delta P = -F(P_3)$:

$$\begin{pmatrix} -4.09773 & 4.00000 \\ 1.09773 & 19.8829 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00191791 \\ -0.000363521 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_4 = P_3 + \Delta P$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 2.54887 \\ 3.98536 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.00191791 \\ -0.000363521 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.54695 \\ 3.985 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 2. \\ 3. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.11111 \\ 1.33333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3.11111 \\ 4.33333 \end{pmatrix}$	1.33333
1	$\begin{pmatrix} 3.11111 \\ 4.33333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.482214 \\ -0.320916 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.6289 \\ 4.01242 \end{pmatrix}$	0.482214
2	$\begin{pmatrix} 2.6289 \\ 4.01242 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0800312 \\ -0.0270564 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.54887 \\ 3.98536 \end{pmatrix}$	0.0800312
3	$\begin{pmatrix} 2.54887 \\ 3.98536 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00191791 \\ -0.000363521 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.54695 \\ 3.985 \end{pmatrix}$	0.00191791

La solución aproximada del sistema es:

$$P_4 = \begin{pmatrix} 2.54695 \\ 3.98500 \end{pmatrix}$$

Método de *Newton-Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} (1 - x_1) x_1 + 4 x_2 - 12 \\ (x_1 - 2)^2 + (2 x_2 - 3)^2 - 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2. \\ 2. \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} (1 - x_1) x_1 + 4 x_2 - 12 \\ (x_1 - 2)^2 + (2 x_2 - 3)^2 - 25 \end{pmatrix}$$

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 - 2 x_1 & 4 \\ 2 (x_1 - 2) & 4 (2 x_2 - 3) \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.00000 \\ 2.00000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} -10.0000 \\ -8.00000 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 5.00000 & 4.00000 \\ -8.00000 & 4.00000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} 5.00000 & 4.00000 \\ -8.00000 & 4.00000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.153846 \\ 2.30769 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2. \\ 2. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.153846 \\ 2.30769 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.84615 \\ 4.30769 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.84615 \\ 4.30769 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} -0.0236686 \\ 21.3254 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 4.69231 & 4.00000 \\ -7.69231 & 22.4615 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} 4.69231 & 4.00000 \\ -7.69231 & 22.4615 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.63036 \\ -0.733544 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1.84615 \\ 4.30769 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.63036 \\ -0.733544 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.21579 \\ 3.57415 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.21579 \\ 3.57415 \end{pmatrix}$$

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} -0.397354 \\ 2.54970 \end{pmatrix}$$

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 3.43159 & 4.00000 \\ -6.43159 & 16.5932 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_2) \Delta P = -F(P_2)$:

$$\begin{pmatrix} 3.43159 & 4.00000 \\ -6.43159 & 16.5932 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.203129 \\ -0.0749256 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_3 = P_2 + \Delta P$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} -1.21579 \\ 3.57415 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.203129 \\ -0.0749256 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.01266 \\ 3.49922 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$.

$$P_3 = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.01266 \\ 3.49922 \end{pmatrix}$$

$$F(P_3) = \begin{pmatrix} -0.0412615 \\ 0.0637169 \end{pmatrix}$$

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 3.02533 & 4.00000 \\ -6.02533 & 15.9938 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_3) \Delta P = -F(P_3)$:

$$\begin{pmatrix} 3.02533 & 4.00000 \\ -6.02533 & 15.9938 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.01262 \\ 0.000770471 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_4 = P_3 + \Delta P$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} -1.01266 \\ 3.49922 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.01262 \\ 0.000770471 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.00004 \\ 3.49999 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta_{x_1} \\ \Delta_{x_2} \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} -2. \\ 2. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.153846 \\ 2.30769 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.84615 \\ 4.30769 \end{pmatrix}$	2.30769
1	$\begin{pmatrix} -1.84615 \\ 4.30769 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.63036 \\ -0.733544 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.21579 \\ 3.57415 \end{pmatrix}$	0.733544
2	$\begin{pmatrix} -1.21579 \\ 3.57415 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.203129 \\ -0.0749256 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.01266 \\ 3.49922 \end{pmatrix}$	0.203129
3	$\begin{pmatrix} -1.01266 \\ 3.49922 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.01262 \\ 0.000770471 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.00004 \\ 3.49999 \end{pmatrix}$	0.01262

La solución aproximada del sistema es:

$$P_4 = \begin{pmatrix} -1.00004 \\ 3.49999 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 19.** Aproximar las soluciones de los siguientes sistemas no lineales, empleando el método de *Newton* con la aproximación inicial dada, iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-6}$.

- a) $f_1(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_2^2 = 0$, $f_2(x_1, x_2) = 3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0$,
 $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (1, 1)^T$ y $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (1, -1)^T$.
- b) $f_1(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1x_2) - (\ln 2 + \ln \pi)$,
 $f_2(x_1, x_2) = e^{(x_1-x_2)} + \cos(x_1x_2) = 0$,
 $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (2, 2)^T$.
- c) $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_3 + 6 = 0$,
 $f_2(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0$,
 $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - 2x_1x_3 = 4$,
 $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (-1, -2, 1)^T$.
- d) $f_1(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 - 2\cos(x_2x_3) - 1 = 0$,
 $f_2(x_1, x_2, x_3) = 9x_2 + \sqrt{x_1^2} + \sin(x_3) + 1.06 + 0.9 = 0$,
 $f_3(x_1, x_2, x_3) = 60x_3 + 3e^{-x_1x_2} + 10\pi - 3 = 0$
 $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0, 0, 0)^T$

Solución

a)

```
<< Graphics`ImplicitPlot`;
```

```
Clear[f, g, g1, g2, ecuaciones, p, m, d];  
f = 3 x^2 - y^2;  
g = 3 x * y^2 - x^3 - 1;
```

```

g = 3 x * y^2 - x^3 - 1;
Print["Representación gráfica de la solución",
      "\n\t f1(x, y) = ", f, "\n\t f2(x, y) = ", g];
g1 = ImplicitPlot[f == 0, {x, -2, 2},
  PlotStyle -> {{Thickness[0.010], RGBColor[0, 0, 1]}},
  AxesLabel -> {"X", "Y"}, DisplayFunction -> Identity];
g2 = ImplicitPlot[g == 0, {x, -2, 2},
  PlotStyle -> {{Thickness[0.010], RGBColor[1, 0, 0]}},
  AxesLabel -> {"X", "Y"}, DisplayFunction -> Identity];
g = Show[g1, g2, AxesLabel -> {"X", "Y"},
  AspectRatio -> Automatic, DisplayFunction -> $DisplayFunction];

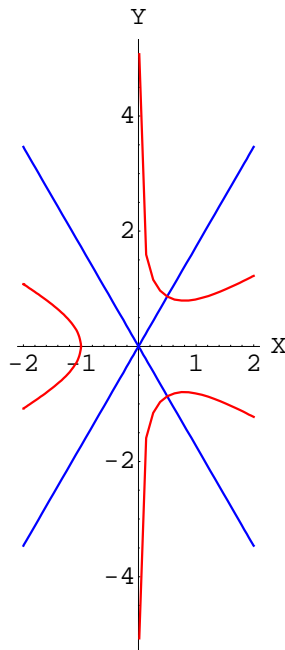
ecuaciones = {3 x12 - x22, 3 x1 x22 - x13 - 1};
p = {1.0, 1.0};
m = 10;
d = 10.-6;
newtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
p = {1.0, -1.0};
m = 10;
d = 10.-6;
newtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];

```

Representación gráfica de la solución

$$f_1(x, y) = 3x^2 - y^2$$

$$f_2(x, y) = -x^3 + 3y^2x - 1$$



Método de *Newton–Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 \\ -x_1^3 + 3x_2^2 x_1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 1. \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 \\ -x_1^3 + 3x_2^2 x_1 - 1 \end{pmatrix}$$

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1 & -2x_2 \\ 3x_2^2 - 3x_1^2 & 6x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000000 \\ 1.000000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} 2.000000 \\ 1.000000 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 6.000000 & -2.000000 \\ 0 & 6.000000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} 6.000000 & -2.000000 \\ 0 & 6.000000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_{x_1} \\ \Delta_{x_2} \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta_{x_1} \\ \Delta_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.388889 \\ -0.166667 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1. \\ 1. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.388889 \\ -0.166667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.611111 \\ 0.833333 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.611111 \\ 0.833333 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} 0.425926 \\ 0.0449246 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 3.66667 & -1.66667 \\ 0.962963 & 3.05556 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} 3.66667 & -1.66667 \\ 0.962963 & 3.05556 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$
$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.107452 \\ 0.0191611 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$
$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.611111 \\ 0.833333 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.107452 \\ 0.0191611 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.503659 \\ 0.852494 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.503659 \\ 0.852494 \end{pmatrix}$$
$$F(P_2) = \begin{pmatrix} 0.0342707 \\ -0.0296667 \end{pmatrix}$$
$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 3.02195 & -1.70499 \\ 1.41922 & 2.57620 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_2) \Delta P = -F(P_2)$:

$$\begin{pmatrix} 3.02195 & -1.70499 \\ 1.41922 & 2.57620 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$
$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00369496 \\ 0.0135512 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_3 = P_2 + \Delta P$$
$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.503659 \\ 0.852494 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.00369496 \\ 0.0135512 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.499964 \\ 0.866046 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$.

$$P_3 = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.499964 \\ 0.866046 \end{pmatrix}$$
$$F(P_3) = \begin{pmatrix} -0.000142677 \\ -1.25763 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$
$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 2.99978 & -1.73209 \\ 1.50021 & 2.59795 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_3) \Delta P = -F(P_3)$:

$$\begin{pmatrix} 2.99978 & -1.73209 \\ 1.50021 & 2.59795 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000358789 \\ -0.0000202346 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_4 = P_3 + \Delta P$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.499964 \\ 0.866046 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0000358789 \\ -0.0000202346 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.866025 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$.

$$P_4 = \begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.500000 \\ 0.866025 \end{pmatrix}$$

$$F(P_4) = \begin{pmatrix} 3.45246 \times 10^{-9} \\ -5.08917 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

$$J(P_4) = \begin{pmatrix} 3.00000 & -1.73205 \\ 1.50000 & 2.59808 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_4) \Delta P = -F(P_4)$:

$$\begin{pmatrix} 3.00000 & -1.73205 \\ 1.50000 & 2.59808 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.49197 \times 10^{-11} \\ 1.96744 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_5 = P_4 + \Delta P$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.866025 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.49197 \times 10^{-11} \\ 1.96744 \times 10^{-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.866025 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 1. \\ 1. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.388889 \\ -0.166667 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.611111 \\ 0.833333 \end{pmatrix}$	0.388889
1	$\begin{pmatrix} 0.611111 \\ 0.833333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.107452 \\ 0.0191611 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.503659 \\ 0.852494 \end{pmatrix}$	0.107452

$$\begin{array}{l} 2 \begin{pmatrix} 0.503659 \\ 0.852494 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.00369496 \\ 0.0135512 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.499964 \\ 0.866046 \end{pmatrix} 0.0135512 \\ 3 \begin{pmatrix} 0.499964 \\ 0.866046 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0000358789 \\ -0.0000202346 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.866025 \end{pmatrix} 0.0000358789 \\ 4 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.866025 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.49197 \times 10^{-11} \\ 1.96744 \times 10^{-9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.866025 \end{pmatrix} 1.96744 \times 10^{-9} \end{array}$$

La solución aproximada del sistema es:

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.500000 \\ 0.866025 \end{pmatrix}$$

Método de *Newton-Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 \\ -x_1^3 + 3x_2^2 x_1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ -1. \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 \\ -x_1^3 + 3x_2^2 x_1 - 1 \end{pmatrix}$$

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1 & -2x_2 \\ 3x_2^2 - 3x_1^2 & 6x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00000 \\ -1.00000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} 2.00000 \\ 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 6.00000 & 2.00000 \\ 0 & -6.00000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} 6.00000 & 2.00000 \\ 0 & -6.00000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.388889 \\ 0.166667 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$
$$P_1 = \begin{pmatrix} 1. \\ -1. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.388889 \\ 0.166667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.611111 \\ -0.833333 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.611111 \\ -0.833333 \end{pmatrix}$$
$$F(P_1) = \begin{pmatrix} 0.425926 \\ 0.0449246 \end{pmatrix}$$
$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 3.66667 & 1.66667 \\ 0.962963 & -3.05556 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} 3.66667 & 1.66667 \\ 0.962963 & -3.05556 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$
$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.107452 \\ -0.0191611 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$
$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.611111 \\ -0.833333 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.107452 \\ -0.0191611 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.503659 \\ -0.852494 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.503659 \\ -0.852494 \end{pmatrix}$$
$$F(P_2) = \begin{pmatrix} 0.0342707 \\ -0.0296667 \end{pmatrix}$$
$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 3.02195 & 1.70499 \\ 1.41922 & -2.57620 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_2) \Delta P = -F(P_2)$:

$$\begin{pmatrix} 3.02195 & 1.70499 \\ 1.41922 & -2.57620 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$
$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00369496 \\ -0.0135512 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_3 = P_2 + \Delta P$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.503659 \\ -0.852494 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.00369496 \\ -0.0135512 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.499964 \\ -0.866046 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$.

$$P_3 = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.499964 \\ -0.866046 \end{pmatrix}$$

$$F(P_3) = \begin{pmatrix} -0.000142677 \\ -1.25763 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 2.99978 & 1.73209 \\ 1.50021 & -2.59795 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_3) \Delta P = -F(P_3)$:

$$\begin{pmatrix} 2.99978 & 1.73209 \\ 1.50021 & -2.59795 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000358789 \\ 0.0000202346 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_4 = P_3 + \Delta P$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.499964 \\ -0.866046 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0000358789 \\ 0.0000202346 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.866025 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$.

$$P_4 = \begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.500000 \\ -0.866025 \end{pmatrix}$$

$$F(P_4) = \begin{pmatrix} 3.45246 \times 10^{-9} \\ -5.08917 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

$$J(P_4) = \begin{pmatrix} 3.00000 & 1.73205 \\ 1.50000 & -2.59808 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_4) \Delta P = -F(P_4)$:

$$\begin{pmatrix} 3.00000 & 1.73205 \\ 1.50000 & -2.59808 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.49197 \times 10^{-11} \\ -1.96744 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_5 = P_4 + \Delta P$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.866025 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.49197 \times 10^{-11} \\ -1.96744 \times 10^{-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.866025 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 1. \\ -1. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.388889 \\ 0.166667 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.611111 \\ -0.833333 \end{pmatrix}$	0.388889
1	$\begin{pmatrix} 0.611111 \\ -0.833333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.107452 \\ -0.0191611 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.503659 \\ -0.852494 \end{pmatrix}$	0.107452
2	$\begin{pmatrix} 0.503659 \\ -0.852494 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00369496 \\ -0.0135512 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.499964 \\ -0.866046 \end{pmatrix}$	0.0135512
3	$\begin{pmatrix} 0.499964 \\ -0.866046 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0000358789 \\ 0.0000202346 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.866025 \end{pmatrix}$	0.0000358789
4	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.866025 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.49197 \times 10^{-11} \\ -1.96744 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.866025 \end{pmatrix}$	1.96744×10^{-9}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.500000 \\ -0.866025 \end{pmatrix}$$

Solución

b)

```
Clear[ecuaciones, p, d, m, d];
ecuaciones = { Log[x1^2 + x2^2] - Sin[x1 * x2] - (Log[2] + Log[Pi]),
               Exp[x1 - x2] + Cos[x1 * x2] };
p = {2.0, 2.0};
m = 10;
d = 10.^-6;
newtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Newton–Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \log(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1 x_2) - \log(\pi) - \log(2) \\ \cos(x_1 x_2) + e^{x_1 - x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2. \\ 2. \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \log(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1 x_2) - \log(\pi) - \log(2) \\ \cos(x_1 x_2) + e^{x_1 - x_2} \end{pmatrix}$$

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2} - \cos(x_1 x_2) x_2 & \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2} - \cos(x_1 x_2) x_1 \\ e^{x_1 - x_2} - \sin(x_1 x_2) x_2 & -\sin(x_1 x_2) x_1 - e^{x_1 - x_2} \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.000000 \\ 2.000000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} 0.998367 \\ 0.346356 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 1.80729 & 1.80729 \\ 2.51360 & 0.513605 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} 1.80729 & 1.80729 \\ 2.51360 & 0.513605 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0313174 \\ -0.521094 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2. \\ 2. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0313174 \\ -0.521094 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.96868 \\ 1.47891 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.96868 \\ 1.47891 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} -0.263765 \\ 0.658308 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 2.08935 & 2.40465 \\ 1.29466 & -2.08095 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} 2.08935 & 2.40465 \\ 1.29466 & -2.08095 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$
$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.138603 \\ 0.230118 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$
$$P_2 = \begin{pmatrix} 1.96868 \\ 1.47891 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.138603 \\ 0.230118 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.83008 \\ 1.70902 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.83008 \\ 1.70902 \end{pmatrix}$$
$$F(P_2) = \begin{pmatrix} -0.0160496 \\ 0.128786 \end{pmatrix}$$
$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 2.29262 & 2.37505 \\ 1.10486 & -1.15420 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_2) \Delta P = -F(P_2)$:

$$\begin{pmatrix} 2.29262 & 2.37505 \\ 1.10486 & -1.15420 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$
$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0545226 \\ 0.0593879 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_3 = P_2 + \Delta P$$
$$P_3 = \begin{pmatrix} 1.83008 \\ 1.70902 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0545226 \\ 0.0593879 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.77556 \\ 1.76841 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$.

$$P_3 = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.77556 \\ 1.76841 \end{pmatrix}$$
$$F(P_3) = \begin{pmatrix} -0.00220154 \\ 0.00717276 \end{pmatrix}$$
$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 2.33388 & 2.33875 \\ 1.00421 & -1.01015 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_3) \Delta P = -F(P_3)$:

$$\begin{pmatrix} 2.33388 & 2.33875 \\ 1.00421 & -1.01015 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$
$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.003092 \\ 0.00402689 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_4 = P_3 + \Delta P$$
$$P_4 = \begin{pmatrix} 1.77556 \\ 1.76841 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.003092 \\ 0.00402689 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.77247 \\ 1.77244 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$.

$$P_4 = \begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.77247 \\ 1.77244 \end{pmatrix}$$
$$F(P_4) = \begin{pmatrix} -8.48201 \times 10^{-6} \\ 0.0000268752 \end{pmatrix}$$
$$J(P_4) = \begin{pmatrix} 2.33663 & 2.33665 \\ 1.00002 & -1.00004 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_4) \Delta P = -F(P_4)$:

$$\begin{pmatrix} 2.33663 & 2.33665 \\ 1.00002 & -1.00004 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$
$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0000116223 \\ 0.0000152522 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_5 = P_4 + \Delta P$$
$$P_5 = \begin{pmatrix} 1.77247 \\ 1.77244 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0000116223 \\ 0.0000152522 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.77245 \\ 1.77245 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 5$.

$$P_5 = \begin{pmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.77245 \\ 1.77245 \end{pmatrix}$$
$$F(P_5) = \begin{pmatrix} -1.20840 \times 10^{-10} \\ 3.81824 \times 10^{-10} \end{pmatrix}$$
$$J(P_5) = \begin{pmatrix} 2.33664 & 2.33664 \\ 1.00000 & -1.00000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_5) \Delta P = -F(P_5)$:

$$\begin{pmatrix} 2.33664 & 2.33664 \\ 1.00000 & -1.00000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.65054 \times 10^{-10} \\ 2.16769 \times 10^{-10} \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_6 = P_5 + \Delta P$$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 1.77245 \\ 1.77245 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.65054 \times 10^{-10} \\ 2.16769 \times 10^{-10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.77245 \\ 1.77245 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 2. \\ 2. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0313174 \\ -0.521094 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.96868 \\ 1.47891 \end{pmatrix}$	0.521094
1	$\begin{pmatrix} 1.96868 \\ 1.47891 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.138603 \\ 0.230118 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.83008 \\ 1.70902 \end{pmatrix}$	0.230118
2	$\begin{pmatrix} 1.83008 \\ 1.70902 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0545226 \\ 0.0593879 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.77556 \\ 1.76841 \end{pmatrix}$	0.0593879
3	$\begin{pmatrix} 1.77556 \\ 1.76841 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.003092 \\ 0.00402689 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.77247 \\ 1.77244 \end{pmatrix}$	0.00402689
4	$\begin{pmatrix} 1.77247 \\ 1.77244 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0000116223 \\ 0.0000152522 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.77245 \\ 1.77245 \end{pmatrix}$	0.0000152522
5	$\begin{pmatrix} 1.77245 \\ 1.77245 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.65054 \times 10^{-10} \\ 2.16769 \times 10^{-10} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.77245 \\ 1.77245 \end{pmatrix}$	2.16769×10^{-10}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_6 = \begin{pmatrix} 1.77245 \\ 1.77245 \end{pmatrix}$$

Solución

c)

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = { x1^3 + x1^2 x2 - x1 x3 + 6,
  Exp[x1] + Exp[x2] - x3, x2^2 - 2 x1 x3 - 4 };
p = {-1.0, -2.0, 1.0};
```

```
m = 10;  
d = 10.^-6;  
newtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Newton-Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2 x_1^2 - x_3 x_1 + 6 \\ -x_3 + e^{x_1} + e^{x_2} \\ x_2^2 - 2 x_1 x_3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1. \\ -2. \\ 1. \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2 x_1^2 - x_3 x_1 + 6 \\ -x_3 + e^{x_1} + e^{x_2} \\ x_2^2 - 2 x_1 x_3 - 4 \end{pmatrix}$$

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3 x_1^2 + 2 x_2 x_1 - x_3 & x_1^2 & -x_1 \\ e^{x_1} & e^{x_2} & -1 \\ -2 x_3 & 2 x_2 & -2 x_1 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.00000 \\ -2.00000 \\ 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} 4.00000 \\ -0.496785 \\ 2.00000 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 6.00000 & 1.00000 & 1.00000 \\ 0.367879 & 0.135335 & -1.00000 \\ -2.00000 & -4.00000 & 2.00000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} 6.00000 & 1.00000 & 1.00000 \\ 0.367879 & 0.135335 & -1.00000 \\ -2.00000 & -4.00000 & 2.00000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.636738 \\ 0.485723 \\ -0.665293 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1. \\ -2. \\ 1. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.636738 \\ 0.485723 \\ -0.665293 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.63674 \\ -1.51428 \\ 0.334707 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.63674 \\ -1.51428 \\ 0.334707 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} -1.89347 \\ 0.0798737 \\ -0.611308 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 12.6590 & 2.67891 & 1.63674 \\ 0.194614 & 0.219967 & -1.00000 \\ -0.669414 & -3.02855 & 3.27348 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} 12.6590 & 2.67891 & 1.63674 \\ 0.194614 & 0.219967 & -1.00000 \\ -0.669414 & -3.02855 & 3.27348 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.171881 \\ -0.153955 \\ 0.0794592 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1.63674 \\ -1.51428 \\ 0.334707 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.171881 \\ -0.153955 \\ 0.0794592 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.46486 \\ -1.66823 \\ 0.414166 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.46486 \\ -1.66823 \\ 0.414166 \end{pmatrix}$$

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} -0.116306 \\ 0.00552485 \\ -0.00361305 \end{pmatrix}$$

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 10.9107 & 2.14581 & 1.46486 \\ 0.231111 & 0.188580 & -1.00000 \\ -0.828333 & -3.33646 & 2.92971 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_2) \Delta P = -F(P_2)$:

$$\begin{pmatrix} 10.9107 & 2.14581 & 1.46486 \\ 0.231111 & 0.188580 & -1.00000 \\ -0.828333 & -3.33646 & 2.92971 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00874949 \\ 0.00404093 \\ 0.00830899 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_3 = P_2 + \Delta P$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} -1.46486 \\ -1.66823 \\ 0.414166 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00874949 \\ 0.00404093 \\ 0.00830899 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.45611 \\ -1.66419 \\ 0.422475 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$.

$$P_3 = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.45611 \\ -1.66419 \\ 0.422475 \end{pmatrix}$$

$$F(P_3) = \begin{pmatrix} -0.000639433 \\ 0.0000104138 \\ -0.000129070 \end{pmatrix}$$

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 10.7848 & 2.12025 & 1.45611 \\ 0.233142 & 0.189344 & -1.00000 \\ -0.844951 & -3.32838 & 2.91221 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_3) \Delta P = -F(P_3)$:

$$\begin{pmatrix} 10.7848 & 2.12025 & 1.45611 \\ 0.233142 & 0.189344 & -1.00000 \\ -0.844951 & -3.32838 & 2.91221 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000646082 \\ -0.0000394195 \\ 0.0000180128 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_4 = P_3 + \Delta P$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} -1.45611 \\ -1.66419 \\ 0.422475 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0000646082 \\ -0.0000394195 \\ 0.0000180128 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.45604 \\ -1.66423 \\ 0.422493 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$.

$$P_4 = \begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.45604 \\ -1.66423 \\ 0.422493 \end{pmatrix}$$

$$F(P_4) = \begin{pmatrix} -1.89278 \times 10^{-8} \\ 6.33712 \times 10^{-10} \\ -7.73657 \times 10^{-10} \end{pmatrix}$$

$$J(P_4) = \begin{pmatrix} 10.7841 & 2.12006 & 1.45604 \\ 0.233157 & 0.189336 & -1.00000 \\ -0.844987 & -3.32846 & 2.91209 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_4) \Delta P = -F(P_4)$:

$$\begin{pmatrix} 10.7841 & 2.12006 & 1.45604 \\ 0.233157 & 0.189336 & -1.00000 \\ -0.844987 & -3.32846 & 2.91209 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.55555 \times 10^{-9} \\ 2.92941 \times 10^{-10} \\ 1.05186 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_5 = P_4 + \Delta P$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} -1.45604 \\ -1.66423 \\ 0.422493 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.55555 \times 10^{-9} \\ 2.92941 \times 10^{-10} \\ 1.05186 \times 10^{-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.45604 \\ -1.66423 \\ 0.422493 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} -1. \\ -2. \\ 1. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.636738 \\ 0.485723 \\ -0.665293 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.63674 \\ -1.51428 \\ 0.334707 \end{pmatrix}$	0.665293
1	$\begin{pmatrix} -1.63674 \\ -1.51428 \\ 0.334707 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.171881 \\ -0.153955 \\ 0.0794592 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.46486 \\ -1.66823 \\ 0.414166 \end{pmatrix}$	0.171881
2	$\begin{pmatrix} -1.46486 \\ -1.66823 \\ 0.414166 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.00874949 \\ 0.00404093 \\ 0.00830899 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.45611 \\ -1.66419 \\ 0.422475 \end{pmatrix}$	0.00874949
3	$\begin{pmatrix} -1.45611 \\ -1.66419 \\ 0.422475 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0000646082 \\ -0.0000394195 \\ 0.0000180128 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.45604 \\ -1.66423 \\ 0.422493 \end{pmatrix}$	0.0000646082
4	$\begin{pmatrix} -1.45604 \\ -1.66423 \\ 0.422493 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.55555 \times 10^{-9} \\ 2.92941 \times 10^{-10} \\ 1.05186 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.45604 \\ -1.66423 \\ 0.422493 \end{pmatrix}$	1.55555×10^{-9}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_5 = \begin{pmatrix} -1.45604 \\ -1.66423 \\ 0.422493 \end{pmatrix}$$

Solución

d)

```
Clear[f, g, g1, g2, ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = { 6 x1 - 2 Cos[x2 x3] - 1, 9 x2 +  $\sqrt{x_1^2 + \text{Sin}[x_3]}$  + 1.06 + 0.9,
              60 x3 + 3 Exp[-x1 x2] + 10 Pi - 3};
p = {0., 0., 0.};
m = 10;
d = 10.-6;
newtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```


Método de *Newton–Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -2 \cos(x_2 x_3) + 6 x_1 - 1 \\ 9 x_2 + \sqrt{x_1^2 + \sin(x_3) + 1.06} + 0.9 \\ 60 x_3 + 3 e^{-x_1 x_2} + 10 \pi - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -2 \cos(x_2 x_3) + 6 x_1 - 1 \\ 9 x_2 + \sqrt{x_1^2 + \sin(x_3) + 1.06} + 0.9 \\ 60 x_3 + 3 e^{-x_1 x_2} + 10 \pi - 3 \end{pmatrix}$$

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \sin(x_2 x_3) x_3 & 2 \sin(x_2 x_3) x_2 \\ \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \sin(x_3) + 1.06}} & 9 & \frac{\cos(x_3)}{2 \sqrt{x_1^2 + \sin(x_3) + 1.06}} \\ -3 e^{-x_1 x_2} x_2 & -3 e^{-x_1 x_2} x_1 & 60 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} -3.00000 \\ 1.92956 \\ 31.4159 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 6.00000 & 0 & 0 \\ 0 & 9.00000 & 0.485643 \\ 0 & 0 & 60.0000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} 6.00000 & 0 & 0 \\ 0 & 9.00000 & 0.485643 \\ 0 & 0 & 60.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.186142 \\ -0.523599 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.186142 \\ -0.523599 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.186142 \\ -0.523599 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.500000 \\ -0.186142 \\ -0.523599 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} 0.00949169 \\ 0.124719 \\ 0.292620 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 6.00000 & -0.101902 & -0.0362269 \\ 0.555556 & 9.00000 & 0.481125 \\ 0.612896 & -1.64631 & 60.0000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} 6.00000 & -0.101902 & -0.0362269 \\ 0.555556 & 9.00000 & 0.481125 \\ 0.612896 & -1.64631 & 60.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00184219 \\ -0.0134645 \\ -0.00522762 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.186142 \\ -0.523599 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.00184219 \\ -0.0134645 \\ -0.00522762 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.498158 \\ -0.199607 \\ -0.528826 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.498158 \\ -0.199607 \\ -0.528826 \end{pmatrix}$$

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} 0.0000788744 \\ -1.26903 \times 10^{-6} \\ -0.0000148414 \end{pmatrix}$$

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 6.00000 & -0.111436 & -0.0420617 \\ 0.555694 & 9.00000 & 0.481561 \\ 0.661426 & -1.65072 & 60.0000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_2) \Delta P = -F(P_2)$:

$$\begin{pmatrix} 6.00000 & -0.111436 & -0.0420617 \\ 0.555694 & 9.00000 & 0.481561 \\ 0.661426 & -1.65072 & 60.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0000131256 \\ 9.2908 \times 10^{-7} \\ 4.1761 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_3 = P_2 + \Delta P$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.498158 \\ -0.199607 \\ -0.528826 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0000131256 \\ 9.2908 \times 10^{-7} \\ 4.1761 \times 10^{-7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.498145 \\ -0.199606 \\ -0.528826 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$.

$$P_3 = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.498145 \\ -0.199606 \\ -0.528826 \end{pmatrix}$$

$$F(P_3) = \begin{pmatrix} 4.09894 \times 10^{-13} \\ 6.80560 \times 10^{-11} \\ 5.61542 \times 10^{-11} \end{pmatrix}$$

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 6.00000 & -0.111435 & -0.0420613 \\ 0.555684 & 9.00000 & 0.481565 \\ 0.661421 & -1.65067 & 60.0000 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_3) \Delta P = -F(P_3)$:

$$\begin{pmatrix} 6.00000 & -0.111435 & -0.0420613 \\ 0.555684 & 9.00000 & 0.481565 \\ 0.661421 & -1.65067 & 60.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.15366 \times 10^{-13} \\ -7.48751 \times 10^{-12} \\ -1.13952 \times 10^{-12} \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_4 = P_3 + \Delta P$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.498145 \\ -0.199606 \\ -0.528826 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.15366 \times 10^{-13} \\ -7.48751 \times 10^{-12} \\ -1.13952 \times 10^{-12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.498145 \\ -0.199606 \\ -0.528826 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.186142 \\ -0.523599 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.186142 \\ -0.523599 \end{pmatrix}$	0.523599
1	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.186142 \\ -0.523599 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00184219 \\ -0.0134645 \\ -0.00522762 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.498158 \\ -0.199607 \\ -0.528826 \end{pmatrix}$	0.0134645
2	$\begin{pmatrix} 0.498158 \\ -0.199607 \\ -0.528826 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0000131256 \\ 9.2908 \times 10^{-7} \\ 4.1761 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.498145 \\ -0.199606 \\ -0.528826 \end{pmatrix}$	0.0000131256
3	$\begin{pmatrix} 0.498145 \\ -0.199606 \\ -0.528826 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.15366 \times 10^{-13} \\ -7.48751 \times 10^{-12} \\ -1.13952 \times 10^{-12} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.498145 \\ -0.199606 \\ -0.528826 \end{pmatrix}$	7.48751×10^{-12}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.498145 \\ -0.199606 \\ -0.528826 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 20.** El sistema de ecuaciones no lineal :

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1 - x_2 + x_3 = x_1 x_4,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = x_2 x_4,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 = x_3 x_4,$$

$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

tiene varias soluciones. Aplíquese el método de *Newton* para aproximarlas tomando como punto inicial el punto P_0 , y aplicando el método hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-5}$.

a) $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)})^T = (0, 1, 1, 1)^T,$

b) $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)})^T = (1, -1, 1, 1)^T.$

c) $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)})^T = (1, 0, 0, 1)^T.$

Solución

a)

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = { 4 x1 - x2 + x3 - x1 x4, -x1 + 3 x2 - 2 x3 - x2 x4,
               x1 - 2 x2 + 3 x3 - x3 x4, x1^2 + x2^2 + x3^2 - 1 };
p = {0.0, 1.0, 1.0, 1.0};
m = 10;
d = 10.^-5;
newtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Newton-Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} -x_4 x_1 + 4x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_2 x_4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_3 x_4 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 1. \\ 1. \\ 1. \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} -x_4 x_1 + 4 x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + 3 x_2 - 2 x_3 - x_2 x_4 \\ x_1 - 2 x_2 + 3 x_3 - x_3 x_4 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 4 - x_4 & -1 & 1 & -x_1 \\ -1 & 3 - x_4 & -2 & -x_2 \\ 1 & -2 & 3 - x_4 & -x_3 \\ 2 x_1 & 2 x_2 & 2 x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 3.00000 & -1.00000 & 1.00000 & 0 \\ -1.00000 & 2.00000 & -2.00000 & -1.00000 \\ 1.00000 & -2.00000 & 2.00000 & -1.00000 \\ 0 & 2.00000 & 2.00000 & 0 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} 3.00000 & -1.00000 & 1.00000 & 0 \\ -1.00000 & 2.00000 & -2.00000 & -1.00000 \\ 1.00000 & -2.00000 & 2.00000 & -1.00000 \\ 0 & 2.00000 & 2.00000 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.00000 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ -0.25 \\ -0.25 \\ 0. \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0. \\ 1. \\ 1. \\ 1. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0. \\ -0.25 \\ -0.25 \\ 0. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0.75 \\ 0.75 \\ 1. \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.750000 \\ 0.750000 \\ 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.125000 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 3.00000 & -1.00000 & 1.00000 & 0 \\ -1.00000 & 2.00000 & -2.00000 & -0.750000 \\ 1.00000 & -2.00000 & 2.00000 & -0.750000 \\ 0 & 1.50000 & 1.50000 & 0 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} 3.00000 & -1.00000 & 1.00000 & 0 \\ -1.00000 & 2.00000 & -2.00000 & -0.750000 \\ 1.00000 & -2.00000 & 2.00000 & -0.750000 \\ 0 & 1.50000 & 1.50000 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ -0.0416667 \\ -0.0416667 \\ 0. \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0. \\ 0.75 \\ 0.75 \\ 1. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0. \\ -0.0416667 \\ -0.0416667 \\ 0. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0.708333 \\ 0.708333 \\ 1. \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \\ x_4^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.708333 \\ 0.708333 \\ 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.11022 \times 10^{-16} \\ -1.11022 \times 10^{-16} \\ 0.00347222 \end{pmatrix}$$

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 3.00000 & -1.00000 & 1.00000 & 0 \\ -1.00000 & 2.00000 & -2.00000 & -0.708333 \\ 1.00000 & -2.00000 & 2.00000 & -0.708333 \\ 0 & 1.41667 & 1.41667 & 0 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_2) \Delta P = -F(P_2)$:

$$\begin{pmatrix} 3.00000 & -1.00000 & 1.00000 & 0 \\ -1.00000 & 2.00000 & -2.00000 & -0.708333 \\ 1.00000 & -2.00000 & 2.00000 & -0.708333 \\ 0 & 1.41667 & 1.41667 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.11022 \times 10^{-16} \\ 1.11022 \times 10^{-16} \\ -0.00347222 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ -0.00122549 \\ -0.00122549 \\ -1.56737 \times 10^{-16} \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_3 = P_2 + \Delta P$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0. \\ 0.708333 \\ 0.708333 \\ 1. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0. \\ -0.00122549 \\ -0.00122549 \\ -1.56737 \times 10^{-16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0.707108 \\ 0.707108 \\ 1. \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$.

$$P_3 = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \\ x_4^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.707108 \\ 0.707108 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.22045 \times 10^{-16} \\ 2.22045 \times 10^{-16} \\ 3.00365 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 3.00000 & -1.00000 & 1.00000 & 0 \\ -1.00000 & 2.00000 & -2.00000 & -0.707108 \\ 1.00000 & -2.00000 & 2.00000 & -0.707108 \\ 0 & 1.41422 & 1.41422 & 0 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_3) \Delta P = -F(P_3)$:

$$\begin{pmatrix} 3.00000 & -1.00000 & 1.00000 & 0 \\ -1.00000 & 2.00000 & -2.00000 & -0.707108 \\ 1.00000 & -2.00000 & 2.00000 & -0.707108 \\ 0 & 1.41422 & 1.41422 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2.22045 \times 10^{-16} \\ -2.22045 \times 10^{-16} \\ -3.00365 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.06195 \times 10^{-6} \\ -1.06195 \times 10^{-6} \\ 3.14018 \times 10^{-16} \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_4 = P_3 + \Delta P$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.707108 \\ 0.707108 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1.06195 \times 10^{-6} \\ -1.06195 \times 10^{-6} \\ 3.14018 \times 10^{-16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.707107 \\ 0.707107 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0. \\ 1. \\ 1. \\ 1. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0. \\ -0.25 \\ -0.25 \\ 0. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0. \\ 0.75 \\ 0.75 \\ 1. \end{pmatrix}$	0.25
1	$\begin{pmatrix} 0. \\ 0.75 \\ 0.75 \\ 1. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0. \\ -0.0416667 \\ -0.0416667 \\ 0. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0. \\ 0.708333 \\ 0.708333 \\ 1. \end{pmatrix}$	0.0416667
2	$\begin{pmatrix} 0. \\ 0.708333 \\ 0.708333 \\ 1. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0. \\ -0.00122549 \\ -0.00122549 \\ -1.56737 \times 10^{-16} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0. \\ 0.707108 \\ 0.707108 \\ 1. \end{pmatrix}$	0.00122549
3	$\begin{pmatrix} 0. \\ 0.707108 \\ 0.707108 \\ 1. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0. \\ -1.06195 \times 10^{-6} \\ -1.06195 \times 10^{-6} \\ 3.14018 \times 10^{-16} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0. \\ 0.707107 \\ 0.707107 \\ 1. \end{pmatrix}$	1.06195×10^{-6}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.707107 \\ 0.707107 \\ 1.00000 \end{pmatrix}$$

Solución

b)

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = { 4 x1 - x2 + x3 - x1 x4, -x1 + 3 x2 - 2 x3 - x2 x4,
               x1 - 2 x2 + 3 x3 - x3 x4, x12 + x22 + x32 - 1 };
p = {1.0, -1.0, 1.0, 1.0};
m = 10;
d = 10.-5;
newtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Newton–Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} -x_4 x_1 + 4 x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + 3 x_2 - 2 x_3 - x_2 x_4 \\ x_1 - 2 x_2 + 3 x_3 - x_3 x_4 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ -1. \\ 1. \\ 1. \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} -x_4 x_1 + 4 x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + 3 x_2 - 2 x_3 - x_2 x_4 \\ x_1 - 2 x_2 + 3 x_3 - x_3 x_4 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 4 - x_4 & -1 & 1 & -x_1 \\ -1 & 3 - x_4 & -2 & -x_2 \\ 1 & -2 & 3 - x_4 & -x_3 \\ 2 x_1 & 2 x_2 & 2 x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00000 \\ -1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} 5.00000 \\ -5.00000 \\ 5.00000 \\ 2.00000 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 3.00000 & -1.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.00000 & 2.00000 & -2.00000 & 1.00000 \\ 1.00000 & -2.00000 & 2.00000 & -1.00000 \\ 2.00000 & -2.00000 & 2.00000 & 0 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} 3.00000 & -1.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.00000 & 2.00000 & -2.00000 & 1.00000 \\ 1.00000 & -2.00000 & 2.00000 & -1.00000 \\ 2.00000 & -2.00000 & 2.00000 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.333333 \\ 0.333333 \\ -0.333333 \\ 3.33333 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1. \\ -1. \\ 1. \\ 1. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.333333 \\ 0.333333 \\ -0.333333 \\ 3.33333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.666667 \\ -0.666667 \\ 0.666667 \\ 4.33333 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.666667 \\ -0.666667 \\ 0.666667 \\ 4.33333 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} 1.11111 \\ -1.11111 \\ 1.11111 \\ 0.333333 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -0.333333 & -1.00000 & 1.00000 & -0.666667 \\ -1.00000 & -1.33333 & -2.00000 & 0.666667 \\ 1.00000 & -2.00000 & -1.33333 & -0.666667 \\ 1.33333 & -1.33333 & 1.33333 & 0 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} -0.333333 & -1.00000 & 1.00000 & -0.666667 \\ -1.00000 & -1.33333 & -2.00000 & 0.666667 \\ 1.00000 & -2.00000 & -1.33333 & -0.666667 \\ 1.33333 & -1.33333 & 1.33333 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0833333 \\ 0.0833333 \\ -0.0833333 \\ 1.45833 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.666667 \\ -0.666667 \\ 0.666667 \\ 4.33333 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0833333 \\ 0.0833333 \\ -0.0833333 \\ 1.45833 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.583333 \\ -0.583333 \\ 0.583333 \\ 5.79167 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \\ x_4^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.583333 \\ -0.583333 \\ 0.583333 \\ 5.79167 \end{pmatrix}$$

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} 0.121528 \\ -0.121528 \\ 0.121528 \\ 0.0208333 \end{pmatrix}$$

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} -1.79167 & -1.00000 & 1.00000 & -0.583333 \\ -1.00000 & -2.79167 & -2.00000 & 0.583333 \\ 1.00000 & -2.00000 & -2.79167 & -0.583333 \\ 1.16667 & -1.16667 & 1.16667 & 0 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_2) \Delta P = -F(P_2)$:

$$\begin{pmatrix} -1.79167 & -1.00000 & 1.00000 & -0.583333 \\ -1.00000 & -2.79167 & -2.00000 & 0.583333 \\ 1.00000 & -2.00000 & -2.79167 & -0.583333 \\ 1.16667 & -1.16667 & 1.16667 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00595238 \\ 0.00595238 \\ -0.00595238 \\ 0.206207 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_3 = P_2 + \Delta P$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.583333 \\ -0.583333 \\ 0.583333 \\ 5.79167 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.00595238 \\ 0.00595238 \\ -0.00595238 \\ 0.206207 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.577381 \\ -0.577381 \\ 0.577381 \\ 5.99787 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$.

$$P_3 = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \\ x_4^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.577381 \\ -0.577381 \\ 0.577381 \\ 5.99787 \end{pmatrix}$$

$$F(P_3) = \begin{pmatrix} 0.00122743 \\ -0.00122743 \\ 0.00122743 \\ 0.000106293 \end{pmatrix}$$

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} -1.99787 & -1.00000 & 1.00000 & -0.577381 \\ -1.00000 & -2.99787 & -2.00000 & 0.577381 \\ 1.00000 & -2.00000 & -2.99787 & -0.577381 \\ 1.15476 & -1.15476 & 1.15476 & 0 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_3) \Delta P = -F(P_3)$:

$$\begin{pmatrix} -1.99787 & -1.00000 & 1.00000 & -0.577381 \\ -1.00000 & -2.99787 & -2.00000 & 0.577381 \\ 1.00000 & -2.00000 & -2.99787 & -0.577381 \\ 1.15476 & -1.15476 & 1.15476 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0000306824 \\ 0.0000306824 \\ -0.0000306824 \\ 0.00212574 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_4 = P_3 + \Delta P$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.577381 \\ -0.577381 \\ 0.577381 \\ 5.99787 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0000306824 \\ 0.0000306824 \\ -0.0000306824 \\ 0.00212574 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.57735 \\ -0.57735 \\ 0.57735 \\ 6. \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$.

$$P_4 = \begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \\ x_4^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.577350 \\ -0.577350 \\ 0.577350 \\ 6.00000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_4) = \begin{pmatrix} 6.52227 \times 10^{-8} \\ -6.52227 \times 10^{-8} \\ 6.52227 \times 10^{-8} \\ 2.82422 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

$$J(P_4) = \begin{pmatrix} -2.00000 & -1.00000 & 1.00000 & -0.577350 \\ -1.00000 & -3.00000 & -2.00000 & 0.577350 \\ 1.00000 & -2.00000 & -3.00000 & -0.577350 \\ 1.15470 & -1.15470 & 1.15470 & 0 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_4) \Delta P = -F(P_4)$:

$$\begin{pmatrix} -2.00000 & -1.00000 & 1.00000 & -0.577350 \\ -1.00000 & -3.00000 & -2.00000 & 0.577350 \\ 1.00000 & -2.00000 & -3.00000 & -0.577350 \\ 1.15470 & -1.15470 & 1.15470 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.15283 \times 10^{-10} \\ 8.15283 \times 10^{-10} \\ -8.15283 \times 10^{-10} \\ 1.12969 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_5 = P_4 + \Delta P$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.57735 \\ -0.57735 \\ 0.57735 \\ 6. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8.15283 \times 10^{-10} \\ 8.15283 \times 10^{-10} \\ -8.15283 \times 10^{-10} \\ 1.12969 \times 10^{-7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.57735 \\ -0.57735 \\ 0.57735 \\ 6. \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 1. \\ -1. \\ 1. \\ 1. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.333333 \\ 0.333333 \\ -0.333333 \\ 3.33333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.666667 \\ -0.666667 \\ 0.666667 \\ 4.33333 \end{pmatrix}$	3.33333
1	$\begin{pmatrix} 0.666667 \\ -0.666667 \\ 0.666667 \\ 4.33333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0833333 \\ 0.0833333 \\ -0.0833333 \\ 1.45833 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.583333 \\ -0.583333 \\ 0.583333 \\ 5.79167 \end{pmatrix}$	1.45833
2	$\begin{pmatrix} 0.583333 \\ -0.583333 \\ 0.583333 \\ 5.79167 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00595238 \\ 0.00595238 \\ -0.00595238 \\ 0.206207 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.577381 \\ -0.577381 \\ 0.577381 \\ 5.99787 \end{pmatrix}$	0.206207
3	$\begin{pmatrix} 0.577381 \\ -0.577381 \\ 0.577381 \\ 5.99787 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0000306824 \\ 0.0000306824 \\ -0.0000306824 \\ 0.00212574 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.57735 \\ -0.57735 \\ 0.57735 \\ 6. \end{pmatrix}$	0.00212574
4	$\begin{pmatrix} 0.57735 \\ -0.57735 \\ 0.57735 \\ 6. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8.15283 \times 10^{-10} \\ 8.15283 \times 10^{-10} \\ -8.15283 \times 10^{-10} \\ 1.12969 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.57735 \\ -0.57735 \\ 0.57735 \\ 6. \end{pmatrix}$	1.12969×10^{-7}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.577350 \\ -0.577350 \\ 0.577350 \\ 6.00000 \end{pmatrix}$$

Solución

c)

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = { 4 x1 - x2 + x3 - x1 x4, -x1 + 3 x2 - 2 x3 - x2 x4,
               x1 - 2 x2 + 3 x3 - x3 x4, x12 + x22 + x32 - 1 };
p = {1.0, 0.0, 0.0, 1.0};
m = 10;
d = 10.-5;
newtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Newton–Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} -x_4 x_1 + 4 x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + 3 x_2 - 2 x_3 - x_2 x_4 \\ x_1 - 2 x_2 + 3 x_3 - x_3 x_4 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 0. \\ 0. \\ 1. \end{pmatrix}$$

La función vectorial y la matriz jacobiana son:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} -x_4 x_1 + 4 x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + 3 x_2 - 2 x_3 - x_2 x_4 \\ x_1 - 2 x_2 + 3 x_3 - x_3 x_4 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 4 - x_4 & -1 & 1 & -x_1 \\ -1 & 3 - x_4 & -2 & -x_2 \\ 1 & -2 & 3 - x_4 & -x_3 \\ 2 x_1 & 2 x_2 & 2 x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00000 \\ 0 \\ 0 \\ 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} 3.00000 \\ -1.00000 \\ 1.00000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 3.00000 & -1.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.00000 & 2.00000 & -2.00000 & 0 \\ 1.00000 & -2.00000 & 2.00000 & 0 \\ 2.00000 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_0) \Delta P = -F(P_0)$:

$$\begin{pmatrix} 3.00000 & -1.00000 & 1.00000 & -1.00000 \\ -1.00000 & 2.00000 & -2.00000 & 0 \\ 1.00000 & -2.00000 & 2.00000 & 0 \\ 2.00000 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.9848 \times 10^{-17} \\ 0.25 \\ -0.25 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.9848 \times 10^{-17} \\ 0.25 \\ -0.25 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_1 = P_0 + \Delta P$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1. \\ 0. \\ 0. \\ 1. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5.9848 \times 10^{-17} \\ 0.25 \\ -0.25 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 0.25 \\ -0.25 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.250000 \\ -0.250000 \\ 3.50000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} -4.44089 \times 10^{-16} \\ -0.625000 \\ 0.625000 \\ 0.125000 \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 0.500000 & -1.00000 & 1.00000 & -1.0000 \\ -1.00000 & -0.500000 & -2.00000 & -0.250000 \\ 1.00000 & -2.00000 & -0.500000 & 0.250000 \\ 2.00000 & 0.500000 & -0.500000 & 0 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_1) \Delta P = -F(P_1)$:

$$\begin{pmatrix} 0.500000 & -1.00000 & 1.00000 & -1.0000 \\ -1.00000 & -0.500000 & -2.00000 & -0.250000 \\ 1.00000 & -2.00000 & -0.500000 & 0.250000 \\ 2.00000 & 0.500000 & -0.500000 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.170732 \\ 0.216463 \\ -0.216463 \\ -0.518293 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_2 = P_1 + \Delta P$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1. \\ 0.25 \\ -0.25 \\ 3.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.170732 \\ 0.216463 \\ -0.216463 \\ -0.518293 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.829268 \\ 0.466463 \\ -0.466463 \\ 2.98171 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \\ x_4^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.829268 \\ 0.466463 \\ -0.466463 \\ 2.98171 \end{pmatrix}$$

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} -0.0884890 \\ 0.112191 \\ -0.112191 \\ 0.122862 \end{pmatrix}$$

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 1.01829 & -1.00000 & 1.00000 & -0.829268 \\ -1.00000 & 0.0182927 & -2.00000 & -0.466463 \\ 1.00000 & -2.00000 & 0.0182927 & 0.466463 \\ 1.65854 & 0.932927 & -0.932927 & 0 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_2) \Delta P = -F(P_2)$:

$$\begin{pmatrix} 1.01829 & -1.00000 & 1.00000 & -0.829268 \\ -1.00000 & 0.0182927 & -2.00000 & -0.466463 \\ 1.00000 & -2.00000 & 0.0182927 & 0.466463 \\ 1.65854 & 0.932927 & -0.932927 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0103077 \\ -0.0566853 \\ 0.0566853 \\ 0.0173469 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_3 = P_2 + \Delta P$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.829268 \\ 0.466463 \\ -0.466463 \\ 2.98171 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0103077 \\ -0.0566853 \\ 0.0566853 \\ 0.0173469 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.818961 \\ 0.409778 \\ -0.409778 \\ 2.99905 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$.

$$P_3 = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \\ x_4^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.818961 \\ 0.409778 \\ -0.409778 \\ 2.99905 \end{pmatrix}$$

$$F(P_3) = \begin{pmatrix} 0.000178807 \\ 0.000983313 \\ -0.000983313 \\ 0.00653269 \end{pmatrix}$$

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 1.00095 & -1.00000 & 1.00000 & -0.818961 \\ -1.00000 & 0.000945783 & -2.00000 & -0.409778 \\ 1.00000 & -2.00000 & 0.000945783 & 0.409778 \\ 1.63792 & 0.819556 & -0.819556 & 0 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_3) \Delta P = -F(P_3)$:

$$\begin{pmatrix} 1.00095 & -1.00000 & 1.00000 & -0.818961 \\ -1.00000 & 0.000945783 & -2.00000 & -0.409778 \\ 1.00000 & -2.00000 & 0.000945783 & 0.409778 \\ 1.63792 & 0.819556 & -0.819556 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00245967 \\ -0.00152762 \\ 0.00152762 \\ 0.000942714 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_4 = P_3 + \Delta P$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.818961 \\ 0.409778 \\ -0.409778 \\ 2.99905 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.00245967 \\ -0.00152762 \\ 0.00152762 \\ 0.000942714 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.816501 \\ 0.408251 \\ -0.408251 \\ 3.00000 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$.

$$P_4 = \begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \\ x_4^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.816501 \\ 0.408251 \\ -0.408251 \\ 3.00000 \end{pmatrix}$$

$$F(P_4) = \begin{pmatrix} 2.31877 \times 10^{-6} \\ 1.44011 \times 10^{-6} \\ -1.44011 \times 10^{-6} \\ 0.0000107172 \end{pmatrix}$$

$$J(P_4) = \begin{pmatrix} 1.00000 & -1.00000 & 1.00000 & -0.816501 \\ -1.00000 & 3.06909 \times 10^{-6} & -2.00000 & -0.408251 \\ 1.00000 & -2.00000 & 3.06909 \times 10^{-6} & 0.408251 \\ 1.63300 & 0.816501 & -0.816501 & 0 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema lineal $J(P_4) \Delta P = -F(P_4)$:

$$\begin{pmatrix} 1.00000 & -1.00000 & 1.00000 & -0.816501 \\ -1.00000 & 3.06909 \times 10^{-6} & -2.00000 & -0.408251 \\ 1.00000 & -2.00000 & 3.06909 \times 10^{-6} & 0.408251 \\ 1.63300 & 0.816501 & -0.816501 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.31288 \times 10^{-6} \\ -2.25001 \times 10^{-6} \\ 2.25001 \times 10^{-6} \\ 3.06908 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

El siguiente punto de la iteración es:

$$P_5 = P_4 + \Delta P$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.816501 \\ 0.408251 \\ -0.408251 \\ 3. \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4.31288 \times 10^{-6} \\ -2.25001 \times 10^{-6} \\ 2.25001 \times 10^{-6} \\ 3.06908 \times 10^{-6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.816497 \\ 0.408248 \\ -0.408248 \\ 3. \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix}$	$P_{i+1} = P_i + \Delta P$	$\ P_{i+1} - P_i\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 1. \\ 0. \\ 0. \\ 1. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5.9848 \times 10^{-17} \\ 0.25 \\ -0.25 \\ 2.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1. \\ 0.25 \\ -0.25 \\ 3.5 \end{pmatrix}$	2.5
1	$\begin{pmatrix} 1. \\ 0.25 \\ -0.25 \\ 3.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.170732 \\ 0.216463 \\ -0.216463 \\ -0.518293 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.829268 \\ 0.466463 \\ -0.466463 \\ 2.98171 \end{pmatrix}$	0.518293
2	$\begin{pmatrix} 0.829268 \\ 0.466463 \\ -0.466463 \\ 2.98171 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0103077 \\ -0.0566853 \\ 0.0566853 \\ 0.0173469 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.818961 \\ 0.409778 \\ -0.409778 \\ 2.99905 \end{pmatrix}$	0.0566853
3	$\begin{pmatrix} 0.818961 \\ 0.409778 \\ -0.409778 \\ 2.99905 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00245967 \\ -0.00152762 \\ 0.00152762 \\ 0.000942714 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.816501 \\ 0.408251 \\ -0.408251 \\ 3. \end{pmatrix}$	0.00245967
4	$\begin{pmatrix} 0.816501 \\ 0.408251 \\ -0.408251 \\ 3. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4.31288 \times 10^{-6} \\ -2.25001 \times 10^{-6} \\ 2.25001 \times 10^{-6} \\ 3.06908 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.816497 \\ 0.408248 \\ -0.408248 \\ 3. \end{pmatrix}$	4.31288×10^{-6}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.816497 \\ 0.408248 \\ -0.408248 \\ 3.00000 \end{pmatrix}$$

6. Método de Cuasi- Newton

6.1 Introducción

Un punto débil importante del método de *Newton* para resolver sistemas de ecuaciones no lineales está en el hecho de que, en cada iteración, es necesario calcular una matriz jacobiana y resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas con dicha matriz. Para ejemplificar la importancia de esta debilidad, se consideran la cantidad de cálculos necesarios para llevar a cabo una sola iteración del método de *Newton*. La matriz jacobiana asociada a un sistema de n ecuaciones no lineales escritas de la forma $F(x) = 0$, requiere que se determinen y evalúen las n^2 derivadas parciales de las componentes de F . En la mayoría de las situaciones la evaluación exacta de las derivadas parciales resulta complicada y, en muchas aplicaciones, imposible.

Cuando no es práctico efectuar la evaluación exacta, se pueden usar las aproximaciones de diferencia finita a las derivadas parciales. Por ejemplo,

$$\left| \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x^{(i)}) \approx \frac{f_j(x^{(i)} + e_k h) - f_j(x^{(i)})}{h} \right., \quad (19)$$

donde h es un número pequeño en valor absoluto y e_k es el vector cuya única coordenada no nula es la k – ésima que vale 1. Sin embargo, esta aproximación requiere efectuar al menos n^2 evaluaciones de funciones escalares para aproximar la matriz jacobiana y no disminuye el número de operaciones que hay que realizar, casi siempre es necesario $O(n^3)$ para resolver el sistema lineal que contiene esta matriz jacobiana aproximada. El esfuerzo computacional total para realizar solamente una iteración del método de *Newton* conlleva, en consecuencia,

al menos $n^2 + n$ evaluaciones de funciones escalares (n^2 para evaluar la matriz jacobiana y n para evaluar la función F), junto con un número de operaciones aritméticas de orden $O(n^3)$ para resolver el sistema lineal. Esta cantidad de cálculos es muy grande, excepto en el caso de los valores relativamente pequeños de n y de funciones escalares que se pueden evaluar fácilmente.

El método de **cuasi-Newton** o de **Broyden** es una generalización del método de la *secante* para los sistemas de ecuaciones no lineales. El método requiere únicamente n evaluaciones de funciones escalares por iteración y también disminuye el número de operaciones aritméticas a $O(n^2)$. Este método pertenece a una clase de técnicas denominadas *actualizaciones de secante con cambio mínimo*, en los que se sustituye la matriz jacobiana del método de *Newton* por una matriz de aproximaciones que se actualiza en cada iteración. La desventaja de este método es que se pierde la convergencia cuadrática del método de *Newton*, que se reemplaza por una convergencia denominada superlineal, la cual implica que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|x^{(i+1)} - p\|}{\|x^{(i)} - p\|} = 0. \quad (20)$$

donde p denota la solución de $F(x) = 0$ y $p^{(i)}$, $p^{(i+1)}$ son aproximaciones consecutivas de p .

En la mayoría de las aplicaciones, el descenso en el número de cálculos es una compensación más que aceptable por la reducción a convergencia superlineal.

Una desventaja añadida de los métodos *actualización de secante con cambio mínimo* es que, a diferencia del método de *Newton*, no se corrigen a si mismos. En el método de *Newton*, por ejemplo, generalmente los errores de redondeo se van corrigiendo en las sucesivas iteraciones, lo que no ocurre con este método salvo que se incorporen medidas

especiales de corrección.

Suponiendo que se dispone de una aproximación inicial $p^{(0)}$ a la solución \mathbf{p} de $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. La siguiente aproximación $p^{(1)}$ se calcula como en el método de *Newton* o, si es difícil de determinar exactamente $J(p^{(0)})$, se utilizarán las ecuaciones de diferencias dadas por (19) para aproximar las derivadas parciales. Sin embargo, para calcular $p^{(2)}$ se procede de manera diferente al método de *Newton* examinando el método de la *Secante* para una sola ecuación. En el método de la *Secante* se utiliza la aproximación

$$f'(p_1) \approx \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0} \quad (21)$$

como sustituto de la $f'(p_1)$ del método de *Newton*.

En el caso de los sistemas no lineales, $p^{(1)} - p^{(0)}$ es un vector, así que el cociente correspondiente no está definido. Aún así, el método procede de manera semejante al método de *Newton*, en el sentido de que, en vez de la matriz jacobiana $J(p^{(1)})$ del método de *Newton* se emplea una matriz A_1 tal que

$$A_1(p^{(1)} - p^{(0)}) = F(p^{(1)}) - F(p^{(0)}). \quad (22)$$

Todo vector distinto de cero de \mathbb{R}^n puede escribirse como la suma de un múltiplo de $p^{(1)} - p^{(0)}$ y de un múltiplo de un vector del subespacio ortogonal de $p^{(1)} - p^{(0)}$. Por tanto, para definir la matriz A_1 de forma única, se debe especificar cómo actúa esta matriz sobre el subespacio ortogonal de $p^{(1)} - p^{(0)}$. Dado que no se tiene información sobre la variación de F en las direcciones ortogonales a $p^{(1)} - p^{(0)}$, se requiere, simplemente, que no haya variación, o sea, que

$$A_1 z = J(p^{(0)}) z \quad \text{siempre que} \quad (p^{(1)} - p^{(0)})^t z = 0. \quad (23)$$

Esta condición especifica que ningún vector ortogonal a $p^{(1)} - p^{(0)}$ se ve afectado por la sustitución de $J(p^{(0)})$, la matriz que se utilizó para calcular $p^{(1)}$, por la matriz A_1 con la que se va a determinar $p^{(2)}$.

Estas condiciones (22 y 23) definen de manera única a A_1 como

$$A_1 = J(p^{(0)}) + \frac{[F(p^{(1)}) - F(p^{(0)}) - J(p^{(0)})(p^{(1)} - p^{(0)})] (p^{(1)} - p^{(0)})^t}{\|p^{(1)} - p^{(0)}\|_2^2}. \quad (24)$$

Esta matriz es la que se usa en lugar de $J(p^{(1)})$ para determinar $p^{(2)}$ como:

$$p^{(2)} = p^{(1)} - A_1^{-1} F(p^{(1)}). \quad (25)$$

Una vez que se ha determinado $p^{(2)}$, se repite el procedimiento para determinar $p^{(3)}$, utilizando A_1 en lugar de $A_0 \equiv J(p^{(0)})$ y con $p^{(2)}$ y $p^{(1)}$ en lugar de $p^{(1)}$ y $p^{(0)}$, respectivamente. En general, una vez que se ha determinado $p^{(i)}$, la siguiente aproximación $p^{(i+1)}$ se calcula mediante

$$A_i = A_{i-1} + \frac{y_i - A_{i-1} s_i}{\|s_i\|_2^2} s_i^t \quad (26)$$

y

$$p^{(i+1)} = p^{(i)} - A_i^{-1} F(p^{(i)}), \quad (27)$$

donde la notación $s_i = p^{(i)} - p^{(i-1)}$ e $y_i = F(p^{(i)}) - F(p^{(i-1)})$ se introduce en las ecuaciones anteriores para simplificarlas.

Si el método se aplica como se ha descrito anteriormente, el número de evaluaciones de funciones escalares disminuye de $n^2 + n$ a n (las necesarias para calcular $F(p^{(i)})$), pero sigue requiriendo del orden de $O(n^3)$ para resolver el sistema lineal asociado de n ecuaciones con n incógnitas

$$A_i y_i = -F(p^{(i)}). \quad (28)$$

Esta manera de usar el método no compensaría la reducción a convergencia superlineal de la convergencia cuadrática del método de *Newton*. La mejora significativa se consigue usando la siguiente fórmula de inversión matricial.

▼ **Fórmula de Sherman - Morrison.**

Si A es una matriz invertible y si x e y son vectores tales que $y^t = A^{-1} x \neq -1$, entonces $A + x y^t$ es invertible y

$$(A + x y^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} x y^t A^{-1}}{1 + y^t A^{-1} x}.$$

Esta fórmula permite calcular A_i^{-1} directamente a partir de A_{i-1}^{-1} , con lo que se prescinde de realizar la inversión matricial en cada iteración. Al utilizar $A = A_{i-1}^{-1}$, $x = \frac{y_i - A_{i-1} s_i}{\|s_i\|_2^2}$, e $y = s_i$ la ecuación (26) junto con la ecuación de la *Fórmula de Sherman - Morrison* implican que

$$\begin{aligned} A_i^{-1} &= \left(A_{i-1} + \frac{y_i - A_{i-1} s_i}{\|s_i\|_2^2} s_i^t \right)^{-1} \\ &= A_{i-1}^{-1} - \frac{A_{i-1}^{-1} \left(\frac{y_i - A_{i-1} s_i}{\|s_i\|_2^2} s_i^t \right) A_{i-1}^{-1}}{1 + s_i^t A_{i-1}^{-1} \left(\frac{y_i - A_{i-1} s_i}{\|s_i\|_2^2} \right)} \\ &= A_{i-1}^{-1} - \frac{(A_{i-1}^{-1} y_i - s_i) s_i^t A_{i-1}^{-1}}{\|s_i\|_2^2 + s_i^t A_{i-1}^{-1} y_i - \|s_i\|_2^2} \\ &= A_{i-1}^{-1} - \frac{(s_i - A_{i-1}^{-1} y_i) s_i^t A_{i-1}^{-1}}{s_i^t A_{i-1}^{-1} y_i} \end{aligned} \quad (29)$$

En este cálculo intervienen exclusivamente la multiplicación de matrices y vectores en cada paso; por tanto, sólo se requieren $O(n^2)$ cálculos aritméticos. El cálculo de A_i se omite, y se prescinde de la resolución del sistema lineal (28).

6.2 Pseudocódigo

• Algoritmo 5. Método de Cuasi - Newton para sistemas no lineales

El pseudocódigo del algoritmo que resuelve un sistema de ecuaciones no lineales de n ecuaciones con n incógnitas mediante el método de *Cuasi - Newton* es:

Algoritmo Cuasi - Newton

Input $(\{f(x_1, \dots, x_n)\}_1^n, (x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ \dots \ x_n^{(0)})^T, n, error)$

(* Se inicializan las variables *)

$$p \leftarrow (x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ \dots \ x_n^{(0)})^T$$

$$F \leftarrow \{f(x_1, \dots, x_n)\}_1^n$$

$$f_valor \leftarrow \begin{pmatrix} f_1(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}) \\ f_2(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}) \\ \dots \\ f_n(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}) \end{pmatrix}$$

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \quad (x \equiv (x_1, \dots, x_n))$$

$$A \leftarrow J(x)^{-1}$$

$$s \leftarrow A \cdot f_valor$$

$$p_sig \leftarrow p - s$$

$$p \leftarrow p_sig$$

$$error \leftarrow \| p_sig - p \|_\infty$$

For $k = 2, \dots, n$ **do**

(* Se evalúa la función F *)

$$w \leftarrow f_valor$$

$$f_valor \leftarrow \begin{pmatrix} f_1(p_1^{(k-1)}, p_2^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) \\ f_2(p_1^{(k-1)}, p_2^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) \\ \dots \\ f_n(p_1^{(k-1)}, p_2^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) \end{pmatrix}$$

$$y \leftarrow f_valor - w$$

$$s \leftarrow -A \cdot w$$

```

A_sig ← A + (  $\frac{1}{s^t A y}$  * (( s - A y) (st A)) )

(* Cálculo del siguiente punto *)
p_sig ← p - A_sig . f_valor

A ← A_sig

(* Cálculo de la norma de la distancia entre los dos puntos*)
error ← || p_sig - p ||∞

If (error ≤ error_ini) do
    Break
End

p ← p_sig

End

Return (x(k) ≡ (p)T)
Output

```

6.3 Problemas

■ **Problema 21.** Sea el sistema no lineal de ecuaciones siguiente:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 1/2 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + (10\pi - 3)/3 = 0.$$

Mediante el método de *Cuasi Newton* calcúlese la aproximación de la solución, comenzando en el punto inicial

$$P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0.1, 0.1, -0.1)^T$$

e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_{\infty} \leq 10^{-5}$.

Solución

```

Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = {3 x1 - Cos[x2 * x3] - 1 / 2,
              x12 - 81 (x2 + 0.1)2 + Sin[x3] + 1.06,
              Exp[-x1 * x2] + 20 x3 + (10 Pi - 3) / 3
};
p = {0.1, 0.1, -0.1};
m = 12;
d = 10.-5;
cuasinewtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];

```

Método de Cuasi-Newton para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\cos(x_2 x_3) + 3x_1 - \frac{1}{2} \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 \\ 20x_3 + e^{-x_1 x_2} + \frac{1}{3}(-3 + 10\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3 & \sin(x_2 x_3) x_3 & \sin(x_2 x_3) x_2 \\ 2x_1 & -162(x_2 + 0.1) & \cos(x_3) \\ -e^{-x_1 x_2} x_2 & -e^{-x_1 x_2} x_1 & 20 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} -1.1999500 \\ -2.2698334 \\ 8.4620253 \end{pmatrix}$$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0.333333 & 0.0000102385 & 0.000016157 \\ 0.00210861 & -0.0308688 & 0.00153584 \\ 0.00166052 & -0.000152758 & 0.0500077 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_1 . $P_1 = P_0 - A_0^{-1} * F(P_0)$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.10000000 \\ 0.10000000 \\ -0.10000000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.39986967 \\ 0.080533151 \\ 0.42152047 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.49986967 \\ 0.019466849 \\ -0.52152047 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} -0.00033944646 \\ -0.34438793 \\ 0.031882378 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = F(P_1) - F(P_0) = \begin{pmatrix} 1.1996106 \\ 1.9254455 \\ -8.4301430 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 0.39986967 \\ -0.080533151 \\ -0.42152047 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.33337810 & 0.000011104966 & 8.9673439 \times 10^{-6} \\ -0.0020207098 & -0.030948482 & 0.0021968158 \\ 0.0010238994 & -0.00016503843 & 0.050109587 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_2 . $P_2 = P_1 - A_1 * F(P_1)$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.49986967 \\ 0.019466849 \\ -0.52152047 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.00011670253 \\ 0.010729009 \\ 0.0016541025 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.49998638 \\ 0.0087378393 \\ -0.52317457 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} -0.000030424728 \\ -0.14738354 \\ 0.0041247527 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = F(P_2) - F(P_1) = \begin{pmatrix} 0.00030902173 \\ 0.19700438 \\ -0.027757625 \end{pmatrix}$$

$$s_2 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 0.00011670253 \\ -0.010729009 \\ -0.0016541025 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.33338820 & 0.000068121639 & -9.2972649 \times 10^{-6} \\ -0.0059534545 & -0.053140268 & 0.0093056886 \\ 0.00082514415 & -0.0012865794 & 0.050468859 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_3 . $P_3 = P_2 - A_2 * F(P_2)$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.49998638 \\ 0.0087378393 \\ -0.52317457 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.000020221603 \\ 0.0078705657 \\ 0.00039776709 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.50000660 \\ 0.00086727356 \\ -0.52357234 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$.

$$F(P_3) = \begin{pmatrix} 0.000019894274 \\ -0.014081267 \\ 0.000095133748 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = F(P_3) - F(P_2) = \begin{pmatrix} 0.000050319003 \\ 0.13330228 \\ -0.0040296189 \end{pmatrix}$$

$$s_3 = P_3 - P_2 = \begin{pmatrix} 0.000020221603 \\ -0.0078705657 \\ -0.00039776709 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0.33338283 & 0.000025855527 & 1.2133979 \times 10^{-7} \\ -0.0066634584 & -0.058721580 & 0.010549431 \\ 0.00080340526 & -0.0014574679 & 0.050506940 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_4 . $P_4 = P_3 - A_3 * F(P_3)$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.50000660 \\ 0.00086727356 \\ -0.52357234 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6.2683424 \times 10^{-6} \\ 0.00082774528 \\ 0.000025343892 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.50000033 \\ 0.000039528275 \\ -0.52359769 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$.

$$F(P_4) = \begin{pmatrix} 9.8636682 \times 10^{-7} \\ -0.00063921175 \\ 2.0404339 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$y_4 = F(P_4) - F(P_3) = \begin{pmatrix} -0.000018907908 \\ 0.013442055 \\ -0.000093093314 \end{pmatrix}$$

$$s_4 = P_4 - P_3 = \begin{pmatrix} -6.2683424 \times 10^{-6} \\ -0.00082774528 \\ -0.000025343892 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0.33338120 & 2.6524561 \times 10^{-6} & 4.8972458 \times 10^{-6} \\ -0.0068587733 & -0.061511385 & 0.011123659 \\ 0.00079801933 & -0.0015343986 & 0.050522775 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_5 . $P_5 = P_4 - A_4 * F(P_4)$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.50000033 \\ 0.000039528275 \\ -0.52359769 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3.2715067 \times 10^{-7} \\ 0.000039334731 \\ 1.0846811 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 1.9354398 \times 10^{-7} \\ -0.52359877 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 5$.

$$F(P_5) = \begin{pmatrix} 4.7006390 \times 10^{-9} \\ -3.1290522 \times 10^{-6} \\ 1.3994331 \times 10^{-8} \end{pmatrix}$$

$$y_5 = F(P_5) - F(P_4) = \begin{pmatrix} -9.8166618 \times 10^{-7} \\ 0.00063608269 \\ -2.0264396 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$s_5 = P_5 - P_4 = \begin{pmatrix} -3.2715067 \times 10^{-7} \\ -0.000039334731 \\ -1.0846811 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0.33338104 & 2.0305293 \times 10^{-7} & 5.3953303 \times 10^{-6} \\ -0.0068787533 & -0.061814004 & 0.011185196 \\ 0.00079744751 & -0.0015430594 & 0.050524536 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_6 . $P_6 = P_5 - A_5 * F(P_5)$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 1.9354398 \times 10^{-7} \\ -0.52359877 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.5665441 \times 10^{-9} \\ 1.9354344 \times 10^{-7} \\ 5.5391192 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 5.3466189 \times 10^{-13} \\ -0.52359878 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$F(P_i)$	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0.10000000 \\ 0.10000000 \\ -0.10000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.1999500 \\ -2.2698334 \\ 8.4620253 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 0.49986967 \\ 0.019466849 \\ -0.52152047 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.000339446 \\ -0.344388 \\ 0.0318824 \end{pmatrix}$	0.42152
2	$\begin{pmatrix} 0.49998638 \\ 0.0087378393 \\ -0.52317457 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00033944646 \\ -0.34438793 \\ 0.031882378 \end{pmatrix}$	0.010729
3	$\begin{pmatrix} 0.50000660 \\ 0.00086727356 \\ -0.52357234 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.000030424728 \\ -0.14738354 \\ 0.0041247527 \end{pmatrix}$	0.00787057
4	$\begin{pmatrix} 0.50000033 \\ 0.000039528275 \\ -0.52359769 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000019894274 \\ -0.014081267 \\ 0.000095133748 \end{pmatrix}$	0.000827745
5	$\begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 1.9354398 \times 10^{-7} \\ -0.52359877 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.8636682 \times 10^{-7} \\ -0.00063921175 \\ 2.0404339 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$	0.0000393347
6	$\begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 5.3466189 \times 10^{-13} \\ -0.52359878 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4.7006390 \times 10^{-9} \\ -3.1290522 \times 10^{-6} \\ 1.3994331 \times 10^{-8} \end{pmatrix}$	1.93543×10^{-7}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 5.3466189 \times 10^{-13} \\ -0.52359878 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 22.** Sea el sistema de ecuaciones no lineales siguiente.

$$f_1(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 20x_1 + 1/4x_2^2 + 8 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2) = 1/2x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0.$$

Aplíquese el método de *Cuasi Newton* iniciando el método en el punto inicial $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (0, 0)^T$ e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-5}$.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = {4 x1^2 - 20 x1 + 1/4 x2^2 + 8, 1/2 x1 x2^2 + 2 x1 - 5 x2 + 8};
p = {0., 0.};
m = 12;
d = 10.^-5;
cuasinewtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Cuasi-Newton* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^2 - 20x_1 + \frac{x_2^2}{4} + 8 \\ \frac{1}{2}x_1x_2^2 - 5x_2 + 2x_1 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8x_1 - 20 & \frac{x_2}{2} \\ \frac{x_2^2}{2} + 2 & x_1x_2 - 5 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} 8.00000000 \\ 8.00000000 \end{pmatrix}$$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} -0.05 & 0. \\ -0.02 & -0.2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_1 . $P_1 = P_0 - A_0^{-1} * F(P_0)$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.40000000 \\ -1.76000000 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.40000000 \\ 1.76000000 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} 1.4144000 \\ 0.61952000 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = F(P_1) - F(P_0) = \begin{pmatrix} -6.5856000 \\ -7.3804800 \end{pmatrix}$$
$$s_1 = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 0.40000000 \\ 1.7600000 \end{pmatrix}$$
$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.051318185 & -0.0084058166 \\ -0.022836782 & -0.21808962 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_2 . $P_2 = P_1 - A_1 * F(P_1)$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.40000000 \\ 1.7600000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.077792012 \\ -0.16741123 \end{pmatrix}$$
$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.47779201 \\ 1.9274112 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} 0.28602909 \\ 0.20600602 \end{pmatrix}$$
$$y_2 = F(P_2) - F(P_1) = \begin{pmatrix} -1.1283709 \\ -0.41351398 \end{pmatrix}$$
$$s_2 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 0.077792012 \\ 0.16741123 \end{pmatrix}$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.056620702 & -0.033621257 \\ -0.039464683 & -0.29716148 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_3 . $P_3 = P_2 - A_2 * F(P_2)$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.47779201 \\ 1.9274112 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.023121349 \\ -0.072505101 \end{pmatrix}$$
$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.50091336 \\ 1.9999163 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$.

$$F(P_3) = \begin{pmatrix} -0.014694116 \\ 0.0039879863 \end{pmatrix}$$
$$y_3 = F(P_3) - F(P_2) = \begin{pmatrix} -0.30072321 \\ -0.20201803 \end{pmatrix}$$
$$s_3 = P_3 - P_2 = \begin{pmatrix} 0.023121349 \\ 0.072505101 \end{pmatrix}$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} -0.056115716 & -0.030918285 \\ -0.039902570 & -0.29950530 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_4 . $P_4 = P_3 - A_3 * F(P_3)$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.50091336 \\ 1.9999163 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.00070126913 \\ -0.00060809004 \end{pmatrix}$$
$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.50021209 \\ 2.0005244 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$.

$$F(P_4) = \begin{pmatrix} -0.0028688097 \\ -0.0012490081 \end{pmatrix}$$
$$y_4 = F(P_4) - F(P_3) = \begin{pmatrix} 0.011825306 \\ -0.0052369944 \end{pmatrix}$$
$$s_4 = P_4 - P_3 = \begin{pmatrix} -0.00070126913 \\ 0.00060809004 \end{pmatrix}$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} -0.059072114 & 0.00052001246 \\ -0.047138803 & -0.22255529 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_5 . $P_5 = P_4 - A_4 * F(P_4)$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.50021209 \\ 2.0005244 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.00016881715 \\ 0.00041320562 \end{pmatrix}$$
$$P_5 = \begin{pmatrix} 0.50004328 \\ 2.0001112 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 5$.

$$F(P_5) = \begin{pmatrix} -0.00058117897 \\ -0.00027173274 \end{pmatrix}$$
$$y_5 = F(P_5) - F(P_4) = \begin{pmatrix} 0.0022876307 \\ 0.00097727535 \end{pmatrix}$$
$$s_5 = P_5 - P_4 = \begin{pmatrix} -0.00016881715 \\ -0.00041320562 \end{pmatrix}$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} -0.065479166 & -0.019467391 \\ -0.063605474 & -0.27392462 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_6 . $P_6 = P_5 - A_5 * F(P_5)$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0.50004328 \\ 2.0001112 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.000043345042 \\ 0.00011140045 \end{pmatrix}$$
$$P_6 = \begin{pmatrix} 0.49999993 \\ 1.9999998 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 6$.

$$F(P_6) = \begin{pmatrix} 9.3066080 \times 10^{-7} \\ 4.7618543 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$y_6 = F(P_6) - F(P_5) = \begin{pmatrix} 0.00058210963 \\ 0.00027220893 \end{pmatrix}$$

$$s_6 = P_6 - P_5 = \begin{pmatrix} -0.000043345042 \\ -0.00011140045 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} -0.065430487 & -0.019313566 \\ -0.063473992 & -0.27350915 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_7 . $P_7 = P_6 - A_6 * F(P_6)$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 0.49999993 \\ 1.9999998 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7.0090428 \times 10^{-8} \\ -1.8931383 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 2.0000000 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$F(P_i)$	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8.0000000 \\ 8.0000000 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 0.40000000 \\ 1.7600000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.4144 \\ 0.61952 \end{pmatrix}$	1.76
2	$\begin{pmatrix} 0.47779201 \\ 1.9274112 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.4144000 \\ 0.61952000 \end{pmatrix}$	0.167411
3	$\begin{pmatrix} 0.50091336 \\ 1.9999163 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.28602909 \\ 0.20600602 \end{pmatrix}$	0.0725051
4	$\begin{pmatrix} 0.50021209 \\ 2.0005244 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.014694116 \\ 0.0039879863 \end{pmatrix}$	0.000701269
5	$\begin{pmatrix} 0.50004328 \\ 2.0001112 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0028688097 \\ -0.0012490081 \end{pmatrix}$	0.000413206
6	$\begin{pmatrix} 0.49999993 \\ 1.9999998 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00058117897 \\ -0.00027173274 \end{pmatrix}$	0.0001114
7	$\begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 2.0000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.3066080 \times 10^{-7} \\ 4.7618543 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$	1.89314×10^{-7}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_7 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 2.0000000 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 23.** Sea el sistema de ecuaciones no lineales siguiente.

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_1^2 x_2 - x_1 x_3 + 6 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0.$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - 2 x_1 x_3 - 4 = 0$$

Aplíquese el método de *Cuasi Newton* iniciando el método en el punto inicial $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (-1, -2, 1)^T$ e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-6}$.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones =
  {x1^3 + x1^2 x2 - x1 x3 + 6, Exp[x1] + Exp[x2] - x3, x2^2 - 2 x1 x3 - 4};
p = {-1., -2., 1};
m = 11;
d = 10.^-6;
cuasinewtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Cuasi-Newton* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2 x_1^2 - x_3 x_1 + 6 \\ -x_3 + e^{x_1} + e^{x_2} \\ x_2^2 - 2 x_1 x_3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1. \\ -2. \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3 x_1^2 + 2 x_2 x_1 - x_3 & x_1^2 & -x_1 \\ e^{x_1} & e^{x_2} & -1 \\ -2 x_3 & 2 x_2 & -2 x_1 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} 4.0000000 \\ -0.49678528 \\ 2.0000000 \end{pmatrix}$$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0.16714 & 0.268907 & 0.0508832 \\ -0.0566605 & -0.627449 & -0.285394 \\ 0.0538193 & -0.985991 & -0.019905 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_1 . $P_1 = P_0 - A_0^{-1} * F(P_0)$

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1.0000000 \\ -2.0000000 \\ 1.0000000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.63673833 \\ -0.48572277 \\ 0.66529279 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1.6367383 \\ -1.5142772 \\ 0.33470721 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} -1.8934664 \\ 0.079873675 \\ -0.61130823 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = F(P_1) - F(P_0) = \begin{pmatrix} -5.8934664 \\ 0.57665895 \\ -2.6113082 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} -0.63673833 \\ 0.48572277 \\ -0.66529279 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.13063097 & 0.30761641 & 0.016948919 \\ -0.030727708 & -0.65494452 & -0.26129036 \\ 0.034955507 & -0.96598994 & -0.037438346 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_2 . $P_2 = P_1 - A_1 * F(P_1)$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1.6367383 \\ -1.5142772 \\ 0.33470721 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.23313592 \\ 0.16559801 \\ -0.12045788 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1.4036024 \\ -1.6798752 \\ 0.45516509 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} 0.56411230 \\ -0.023057640 \\ 0.099722438 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = F(P_2) - F(P_1) = \begin{pmatrix} 2.4575787 \\ -0.10293131 \\ 0.71103067 \end{pmatrix}$$

$$s_2 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 0.23313592 \\ -0.16559801 \\ 0.12045788 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.10828747 & 0.27175067 & -0.0070565193 \\ -0.021471687 & -0.64008677 & -0.25134587 \\ 0.022437366 & -0.98608403 & -0.050887600 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_3 . $P_3 = P_2 - A_2 * F(P_2)$

$$P_3 = \begin{pmatrix} -1.4036024 \\ -1.6798752 \\ 0.45516509 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.054116669 \\ -0.022418375 \\ 0.030319329 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} -1.4577191 \\ -1.6574569 \\ 0.42484576 \end{pmatrix}$$

....

....

Nota: Se han eliminado varias iteraciones. En la tabla final se pueden ver los resultados

Iteración $i = 6$.

$$F(P_6) = \begin{pmatrix} -0.000033783397 \\ 4.3150610 \times 10^{-7} \\ -9.9292832 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$y_6 = F(P_6) - F(P_5) = \begin{pmatrix} -0.0010724581 \\ 6.0574834 \times 10^{-6} \\ -0.00043231324 \end{pmatrix}$$

$$s_6 = P_6 - P_5 = \begin{pmatrix} -0.00012944703 \\ 0.00015704500 \\ -6.5087361 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0.10571545 & 0.49488871 & 0.044110192 \\ -0.013434126 & -1.0563685 & -0.34474168 \\ 0.025056559 & -1.0384105 & -0.061653279 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_7 . $P_7 = P_6 - A_6 * F(P_6)$

$$P_7 = \begin{pmatrix} -1.4560465 \\ -1.6642271 \\ 0.42249274 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3.7958620 \times 10^{-6} \\ 3.4210587 \times 10^{-6} \\ -6.8240327 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$P_7 = \begin{pmatrix} -1.4560427 \\ -1.6642305 \\ 0.42249343 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 7$.

$$F(P_7) = \begin{pmatrix} 8.9224981 \times 10^{-7} \\ -1.3598257 \times 10^{-8} \\ 2.3733420 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$y_7 = F(P_7) - F(P_6) = \begin{pmatrix} 0.000034675647 \\ -4.4510435 \times 10^{-7} \\ 0.000010166617 \end{pmatrix}$$

$$s_7 = P_7 - P_6 = \begin{pmatrix} 3.7958620 \times 10^{-6} \\ -3.4210587 \times 10^{-6} \\ 6.8240327 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0.10404363 & 0.47766499 & 0.039412566 \\ -0.012079802 & -1.0424157 & -0.34093616 \\ 0.024684143 & -1.0422473 & -0.062699729 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_8 . $P_8 = P_7 - A_7 * F(P_7)$

$$P_8 = \begin{pmatrix} -1.4560427 \\ -1.6642305 \\ 0.42249343 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9.5691449 \times 10^{-8} \\ -7.7518975 \times 10^{-8} \\ 2.1316378 \times 10^{-8} \end{pmatrix}$$

$$P_8 = \begin{pmatrix} -1.4560428 \\ -1.6642305 \\ 0.42249340 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$F(P_i)$	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} -1.0000000 \\ -2.0000000 \\ 1.0000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4.0000000 \\ -0.49678528 \\ 2.0000000 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} -1.6367383 \\ -1.5142772 \\ 0.33470721 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.89347 \\ 0.0798737 \\ -0.611308 \end{pmatrix}$	0.665293
2	$\begin{pmatrix} -1.4036024 \\ -1.6798752 \\ 0.45516509 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.8934664 \\ 0.079873675 \\ -0.61130823 \end{pmatrix}$	0.233136
3	$\begin{pmatrix} -1.4577191 \\ -1.6574569 \\ 0.42484576 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.56411230 \\ -0.023057640 \\ 0.099722438 \end{pmatrix}$	0.0541167
4	$\begin{pmatrix} -1.4573983 \\ -1.6619153 \\ 0.42271835 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00027155345 \\ -0.0014560223 \\ -0.014225217 \end{pmatrix}$	0.00445848
5	$\begin{pmatrix} -1.4559170 \\ -1.6643842 \\ 0.42249925 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0093840223 \\ -0.00010193191 \\ -0.0058993987 \end{pmatrix}$	0.00246883
6	$\begin{pmatrix} -1.4560465 \\ -1.6642271 \\ 0.42249274 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0010386747 \\ -5.6259773 \times 10^{-6} \\ 0.00042238396 \end{pmatrix}$	0.000157045
7	$\begin{pmatrix} -1.4560427 \\ -1.6642305 \\ 0.42249343 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.000033783397 \\ 4.3150610 \times 10^{-7} \\ -9.9292832 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$	3.79586×10^{-6}
8	$\begin{pmatrix} -1.4560428 \\ -1.6642305 \\ 0.42249340 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8.9224981 \times 10^{-7} \\ -1.3598257 \times 10^{-8} \\ 2.3733420 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$	9.56914×10^{-8}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_8 = \begin{pmatrix} -1.4560428 \\ -1.6642305 \\ 0.42249340 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 24.** Sea el sistema no lineal de ecuaciones siguiente:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 1/2 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{(-x_1 x_2)} + 20x_3 + (10\pi - 3)/3 = 0.$$

Aplíquese el método de *Cuasi Newton* con la aproximación inicial $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0, 0, 0)^T$ y aplicando el método hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-5}$.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = { 3 x1 - Cos[x2 * x3] - 1 / 2,
  4 x1^2 - 625 x2^2 + 2 x2 - 1, Exp[-x1 * x2] + 20 x3 + (10 Pi - 3) / 3 };
d = 10.^-5;
p = {0.0, 0.0, 0.0};
m = 12;
cuasinewtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Cuasi-Newton* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\cos(x_2 x_3) + 3x_1 - \frac{1}{2} \\ 4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 \\ 20x_3 + e^{-x_1 x_2} + \frac{1}{3}(-3 + 10\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3 & \sin(x_2 x_3) x_3 & \sin(x_2 x_3) x_2 \\ 8x_1 & 2 - 1250x_2 & 0 \\ -e^{-x_1 x_2} x_2 & -e^{-x_1 x_2} x_1 & 20 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} -1.50000000 \\ -1.00000000 \\ 10.471976 \end{pmatrix}$$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0.333333 & 0. & 0. \\ 0. & 0.5 & 0. \\ 0. & 0. & 0.05 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_1 . $P_1 = P_0 - A_0^{-1} * F(P_0)$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.50000000 \\ -0.50000000 \\ 0.52359878 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 0.50000000 \\ -0.52359878 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} 0.034074174 \\ -155.25000 \\ -0.22119922 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = F(P_1) - F(P_0) = \begin{pmatrix} 1.5340742 \\ -154.25000 \\ -10.693175 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 0.50000000 \\ -0.52359878 \end{pmatrix}$$

$A_1 =$

$$\begin{pmatrix} 0.33338311 & 0.000074671256 & -7.8195557 \times 10^{-6} \\ -0.34021992 & -0.010329875 & 0.053441620 \\ -0.000048474318 & -0.000072711477 & 0.050007614 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_2 . $P_2 = P_1 - A_1 * F(P_1)$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 0.50000000 \\ -0.52359878 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.00023122871 \\ 1.5802991 \\ 0.00022516001 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.50023123 \\ -1.0802991 \\ -0.52382394 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} 0.15658007 \\ -731.56349 \\ 0.71218906 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = F(P_2) - F(P_1) = \begin{pmatrix} 0.12250590 \\ -576.31349 \\ 0.93338828 \end{pmatrix}$$

$$s_2 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 0.00023122871 \\ -1.5802991 \\ -0.00022516001 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.33324435 & 0.000070458556 & 0.000013977716 \\ 0.090248461 & 0.0027383079 & -0.014175515 \\ 0.0050200777 & 0.000081159901 & 0.049211456 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_3 . $P_3 = P_2 - A_2 * F(P_2)$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.50023123 \\ -1.0802991 \\ -0.52382394 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.00064447181 \\ -1.9992106 \\ -0.023539715 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.49958676 \\ 0.91891155 \\ -0.50028422 \end{pmatrix}$$

....

....

Nota: Se han eliminado varias iteraciones. En la tabla final se pueden ver los resultados

Iteración $i = 10$.

$$F(P_{10}) = \begin{pmatrix} 0.0011160823 \\ -5.3749283 \\ 0.00099511573 \end{pmatrix}$$

$$y_{10} = F(P_{10}) - F(P_9) = \begin{pmatrix} -0.0016566050 \\ 8.4151117 \\ -0.0015409534 \end{pmatrix}$$

$$s_{10} = P_{10} - P_9 = \begin{pmatrix} 0.000059694684 \\ -0.055798137 \\ -0.0013888404 \end{pmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 0.33704107 & 0.000073447929 & 0.000022024267 \\ -0.65297008 & -0.0067540471 & 0.028417241 \\ -0.013201957 & -0.00015843129 & 0.050289560 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_{11} . $P_{11} = P_{10} - A_{10} * F(P_{10})$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 0.49996902 \\ 0.094348299 \\ -0.52124522 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.000018589872 \\ 0.035602029 \\ 0.00088686628 \end{pmatrix}$$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 0.49998761 \\ 0.058746270 \\ -0.52213209 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 11$.

$$F(P_{11}) = \begin{pmatrix} 0.00043321741 \\ -2.0395097 \\ 0.00038851313 \end{pmatrix}$$

$$y_{11} = F(P_{11}) - F(P_{10}) = \begin{pmatrix} -0.00068286487 \\ 3.3354186 \\ -0.00060660260 \end{pmatrix}$$

$$s_{11} = P_{11} - P_{10} = \begin{pmatrix} 0.000018589872 \\ -0.035602029 \\ -0.00088686628 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0.33715269 & 0.000074602296 & 0.000016956222 \\ -1.0520154 & -0.010880849 & 0.046535249 \\ -0.023159275 & -0.00026140674 & 0.050741656 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_{12} . $P_{12} = P_{11} - A_{11} * F(P_{11})$

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0.49998761 \\ 0.058746270 \\ -0.52213209 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6.0850991 \times 10^{-6} \\ 0.021753924 \\ 0.00054282238 \end{pmatrix}$$

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0.49999369 \\ 0.036992346 \\ -0.52267491 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$F(P_i)$	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.5000000 \\ -1.0000000 \\ 10.471976 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 0.50000000 \\ -0.52359878 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0340742 \\ -155.25 \\ -0.221199 \end{pmatrix}$	0.523599
2	$\begin{pmatrix} 0.50023123 \\ -1.0802991 \\ -0.52382394 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.034074174 \\ -155.25000 \\ -0.22119922 \end{pmatrix}$	1.5803
3	$\begin{pmatrix} 0.49958676 \\ 0.91891155 \\ -0.50028422 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.15658007 \\ -731.56349 \\ 0.71218906 \end{pmatrix}$	1.99921
4	$\begin{pmatrix} 0.50970676 \\ 5.9713714 \\ -0.36857038 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.10258215 \\ -525.91285 \\ 0.098158298 \end{pmatrix}$	5.05246
5	$\begin{pmatrix} 0.47746396 \\ 0.79729393 \\ -0.50602980 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.6183251 \\ -22273.816 \\ 2.1482287 \end{pmatrix}$	5.17408
6	$\begin{pmatrix} 0.48230959 \\ 0.70355047 \\ -0.50830770 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.012681619 \\ -395.79203 \\ 0.034776583 \end{pmatrix}$	0.0937435
7	$\begin{pmatrix} 0.49882332 \\ 0.37483057 \\ -0.51428842 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.010196232 \\ -308.02695 \\ 0.018069454 \end{pmatrix}$	0.32872
8	$\begin{pmatrix} 0.49964924 \\ 0.24762963 \\ -0.51737005 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.014992813 \\ -87.066262 \\ 0.015672164 \end{pmatrix}$	0.127201
9	$\begin{pmatrix} 0.49990932 \\ 0.15014644 \\ -0.51985638 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0071433695 \\ -37.831414 \\ 0.0081946310 \end{pmatrix}$	0.0974832

$$\begin{array}{ll}
 10 & \begin{pmatrix} 0.49996902 \\ 0.094348299 \\ -0.52124522 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0027726873 \\ -13.790040 \\ 0.0025360692 \end{pmatrix} & 0.0557981 \\
 11 & \begin{pmatrix} 0.49998761 \\ 0.058746270 \\ -0.52213209 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0011160823 \\ -5.3749283 \\ 0.00099511573 \end{pmatrix} & 0.035602 \\
 12 & \begin{pmatrix} 0.49999369 \\ 0.036992346 \\ -0.52267491 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.00043321741 \\ -2.0395097 \\ 0.00038851313 \end{pmatrix} & 0.0217539
 \end{array}$$

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0.49999369 \\ 0.036992346 \\ -0.52267491 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 25.** Dado el siguiente problema no lineal

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 - 37 = 0,$$

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2^2 - 5 = 0.$$

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$$

Calcular la solución aproximada del sistema empleando el método de *Cuasi Newton* comenzando en el punto:

$$P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0, 0, 0)^T,$$

e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 5 \times 10^{-5}$.

Solución

```

Clear[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d];
ecuaciones = {x1^2 + x2 - 37, x1 - x2^2 - 5, x1 + x2 + x3 - 3};
d = 10.^-5;
p = {0.0, 0.0, 0.0};
m = 12;
cuasinewtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
    
```

Método de *Cuasi-Newton* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 - 37 \\ -x_2^2 + x_1 - 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 1 & -2x_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} -37.0000000 \\ -5.0000000 \\ -3.0000000 \end{pmatrix}$$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0. & 1. & 0. \\ 1. & 0. & 0. \\ -1. & -1. & 1. \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_1 . $P_1 = P_0 - A_0^{-1} * F(P_0)$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5.0000000 \\ -37.0000000 \\ 39.0000000 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 5.0000000 \\ 37.0000000 \\ -39.0000000 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} 25.000000 \\ -1369.0000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = F(P_1) - F(P_0) = \begin{pmatrix} 62.000000 \\ -1364.0000 \\ 3.0000000 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 5.0000000 \\ 37.0000000 \\ -39.0000000 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1.8773389 & -0.086880424 & 0.96337129 \\ 1.0342830 & 0.019848072 & -0.017592609 \\ 0.84305588 & 0.067032352 & 0.054221324 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_2 . $P_2 = P_1 - A_1 * F(P_1)$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 5.0000000 \\ 37.000000 \\ -39.000000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 72.005828 \\ -1.3149348 \\ -70.690893 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -67.005828 \\ 38.314935 \\ 31.690893 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} 4491.0959 \\ -1540.0401 \\ -1.7053026 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$$

$$y_2 = F(P_2) - F(P_1) = \begin{pmatrix} 4466.0959 \\ -171.04005 \\ -1.7053026 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$$

$$s_2 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} -72.005828 \\ 1.3149348 \\ 70.690893 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.015443498 & 0.017736688 & 0.34103124 \\ -0.0011736178 & -0.038332685 & 0.32850961 \\ 0.016617116 & 0.020595997 & 0.33045915 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_3 . $P_3 = P_2 - A_2 * F(P_2)$

$$P_3 = \begin{pmatrix} -67.005828 \\ 38.314935 \\ 31.690893 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -96.673441 \\ 53.763040 \\ 42.910401 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 29.667613 \\ -15.448105 \\ -11.219508 \end{pmatrix}$$

.....

.....

Nota: Se han eliminado varias iteraciones. En la tabla final se pueden ver los resultados

Iteración $i = 10$.

$$F(P_{10}) = \begin{pmatrix} 75.340243 \\ -85.146029 \\ -3.5527137 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

$$y_{10} = F(P_{10}) - F(P_9) = \begin{pmatrix} -110.35308 \\ -94.943726 \\ 7.1054274 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

$$s_{10} = P_{10} - P_9 = \begin{pmatrix} -4.7944161 \\ 9.8729439 \\ -5.0785278 \end{pmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} -0.023503588 & 0.077815667 & 0.35197622 \\ 0.16673706 & -0.29778579 & 0.23573419 \\ -0.14323347 & 0.21997012 & 0.41228959 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_{11} . $P_{11} = P_{10} - A_{10} * F(P_{10})$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 10.140922 \\ 9.5019446 \\ -16.642867 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8.3964610 \\ 37.917288 \\ -29.520827 \end{pmatrix}$$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 18.537383 \\ -28.415343 \\ 12.877960 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 11$.

$$F(P_{11}) = \begin{pmatrix} 278.21922 \\ -793.89436 \\ -2.1316282 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$$

$$y_{11} = F(P_{11}) - F(P_{10}) = \begin{pmatrix} 202.87898 \\ -708.74833 \\ -1.7763568 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$$

$$s_{11} = P_{11} - P_{10} = \begin{pmatrix} 8.3964610 \\ -37.917288 \\ 29.520827 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0.024649010 & -0.0047911153 & 0.32425254 \\ -0.032593066 & 0.044169191 & 0.35049776 \\ 0.0079440555 & -0.039378075 & 0.32524970 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_{12} . $P_{12} = P_{11} - A_{11} * F(P_{11})$

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 18.537383 \\ -28.415343 \\ 12.877960 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10.661468 \\ -44.133689 \\ 33.472221 \end{pmatrix}$$

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 7.8759151 \\ 15.718345 \\ -20.594260 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$F(P_i)$	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -37.000000 \\ -5.000000 \\ -3.000000 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 5.0000000 \\ 37.000000 \\ -39.000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 25. \\ -1369. \\ 0. \end{pmatrix}$	39.
2	$\begin{pmatrix} -67.005828 \\ 38.314935 \\ 31.690893 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 25.000000 \\ -1369.0000 \\ 0 \end{pmatrix}$	72.0058
3	$\begin{pmatrix} 29.667613 \\ -15.448105 \\ -11.219508 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4491.0959 \\ -1540.0401 \\ -1.7053026 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$	96.6734
4	$\begin{pmatrix} 49.640098 \\ -24.159488 \\ -22.480610 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 827.71915 \\ -213.97634 \\ -1.1652901 \times 10^{-12} \end{pmatrix}$	19.9725
5	$\begin{pmatrix} 18.834135 \\ -12.101120 \\ -3.7330147 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2402.9798 \\ -539.04078 \\ -1.4210855 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$	30.806
6	$\begin{pmatrix} 13.615493 \\ -12.445404 \\ 1.8299106 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 305.62352 \\ -132.60298 \\ 1.5987212 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$	5.56293
7	$\begin{pmatrix} -8.9418766 \\ -31.210731 \\ 43.152608 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 135.93625 \\ -146.27258 \\ 1.0658141 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$	41.3227
8	$\begin{pmatrix} 16.237302 \\ -5.9507478 \\ -7.2865541 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11.746425 \\ -988.05163 \\ 5.6843419 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$	50.4392
9	$\begin{pmatrix} 14.935338 \\ -0.37099930 \\ -11.564339 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 220.69922 \\ -24.174097 \\ -3.1974423 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$	5.57975

10	$\begin{pmatrix} 10.140922 \\ 9.5019446 \\ -16.642867 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 185.69332 \\ 9.7976976 \\ -1.0658141 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$	9.87294
11	$\begin{pmatrix} 18.537383 \\ -28.415343 \\ 12.877960 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 75.340243 \\ -85.146029 \\ -3.5527137 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$	37.9173
12	$\begin{pmatrix} 7.8759151 \\ 15.718345 \\ -20.594260 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 278.21922 \\ -793.89436 \\ -2.1316282 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$	44.1337

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 7.8759151 \\ 15.718345 \\ -20.594260 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 26.** Dado el siguiente problema no lineal

$$f_1(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_2^2 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2) = 3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0.$$

Calcular la solución aproximada del sistema empleando el método de *Cuasi Newton* comenzando en el punto:

$$P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (1, 1)^T,$$

e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 5 \times 10^{-6}$.

Solución

```
Clear[ecuaciones, m, p, d];
ecuaciones = {3 x1^2 - x2^2, 3 x1 x2^2 - x1^3 - 1};
d = 10.^-6;
p = {1.0, 1.0};
m = 12;
cuasinewtonSistemasNoLineal[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de *Cuasi-Newton* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 \\ -x_1^3 + 3x_2^2x_1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 1. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1 & -2x_2 \\ 3x_2^2 - 3x_1^2 & 6x_1x_2 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 0$

$$F(P_0) = \begin{pmatrix} 2.0000000 \\ 1.0000000 \end{pmatrix}$$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0.166667 & 0.055556 \\ 0. & 0.166667 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_1 . $P_1 = P_0 - A_0^{-1} * F(P_0)$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1.0000000 \\ 1.0000000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.3888889 \\ 0.1666667 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.6111111 \\ 0.8333333 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$.

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} 0.42592593 \\ 0.044924554 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = F(P_1) - F(P_0) = \begin{pmatrix} -1.5740741 \\ -0.95507545 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} -0.3888889 \\ -0.1666667 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.19859170 & 0.079879390 \\ 0.0032529266 & 0.16914509 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_2 . $P_2 = P_1 - A_1 * F(P_1)$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.61111111 \\ 0.83333333 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.088173899 \\ 0.0089842734 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.52293721 \\ 0.82434906 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$.

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} 0.14083861 \\ -0.076916050 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = F(P_2) - F(P_1) = \begin{pmatrix} -0.28508732 \\ -0.12184060 \end{pmatrix}$$

$$s_2 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} -0.088173899 \\ -0.0089842734 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.26193264 & 0.11080236 \\ -0.033174631 & 0.15136120 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\text{Cálculo de } P_3. \quad P_3 &= P_2 - A_2 * F(P_2) \\ P_3 &= \begin{pmatrix} 0.52293721 \\ 0.82434906 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.028367749 \\ -0.016314374 \end{pmatrix} \\ P_3 &= \begin{pmatrix} 0.49456946 \\ 0.84066343 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Iteración $i = 3$.

$$\begin{aligned}F(P_3) &= \begin{pmatrix} 0.027081850 \\ -0.072412185 \end{pmatrix} \\ y_3 &= F(P_3) - F(P_2) = \begin{pmatrix} -0.11375676 \\ 0.0045038649 \end{pmatrix} \\ s_3 &= P_3 - P_2 = \begin{pmatrix} -0.028367749 \\ 0.016314374 \end{pmatrix} \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 0.25373143 & 0.11010910 \\ -0.13777191 & 0.14251952 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cálculo de } P_4. \quad P_4 &= P_3 - A_3 * F(P_3) \\ P_4 &= \begin{pmatrix} 0.49456946 \\ 0.84066343 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.0011017241 \\ -0.014051268 \end{pmatrix} \\ P_4 &= \begin{pmatrix} 0.49567119 \\ 0.85471470 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Iteración $i = 4$.

$$\begin{aligned}F(P_4) &= \begin{pmatrix} 0.0065325540 \\ -0.035462661 \end{pmatrix} \\ y_4 &= F(P_4) - F(P_3) = \begin{pmatrix} -0.020549296 \\ 0.036949524 \end{pmatrix} \\ s_4 &= P_4 - P_3 = \begin{pmatrix} 0.0011017241 \\ 0.014051268 \end{pmatrix} \\ A_4 &= \begin{pmatrix} 0.22064925 & 0.15253000 \\ -0.22542377 & 0.25491446 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cálculo de } P_5. \quad P_5 &= P_4 - A_4 * F(P_4) \\ P_5 &= \begin{pmatrix} 0.49567119 \\ 0.85471470 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.0039677166 \\ -0.010512538 \end{pmatrix} \\ P_5 &= \begin{pmatrix} 0.49963890 \\ 0.86522724 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Iteración $i = 5$.

$$F(P_5) = \begin{pmatrix} 0.00029892374 \\ -0.0026130772 \end{pmatrix}$$

$$y_5 = F(P_5) - F(P_4) = \begin{pmatrix} -0.0062336302 \\ 0.032849584 \end{pmatrix}$$

$$s_5 = P_5 - P_4 = \begin{pmatrix} 0.0039677166 \\ 0.010512538 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0.21640932 & 0.16185083 \\ -0.23477381 & 0.27546909 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_6 . $P_6 = P_5 - A_5 * F(P_5)$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0.49963890 \\ 0.86522724 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.00035823882 \\ -0.00079000147 \end{pmatrix}$$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0.49999714 \\ 0.86601724 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 6$.

$$F(P_6) = \begin{pmatrix} 5.5633653 \times 10^{-6} \\ -0.000025491707 \end{pmatrix}$$

$$y_6 = F(P_6) - F(P_5) = \begin{pmatrix} -0.00029336038 \\ 0.0025875855 \end{pmatrix}$$

$$s_6 = P_6 - P_5 = \begin{pmatrix} 0.00035823882 \\ 0.00079000147 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0.21598585 & 0.16293201 \\ -0.23598083 & 0.27855081 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_7 . $P_7 = P_6 - A_6 * F(P_6)$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 0.49999714 \\ 0.86601724 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2.9518069 \times 10^{-6} \\ -8.4135833 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 0.50000009 \\ 0.86602566 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 7$.

$$F(P_7) = \begin{pmatrix} -1.5392563 \times 10^{-7} \\ 7.9492530 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$y_7 = F(P_7) - F(P_6) = \begin{pmatrix} -5.7172909 \times 10^{-6} \\ 0.000026286632 \end{pmatrix}$$

$$s_7 = P_7 - P_6 = \begin{pmatrix} 2.9518069 \times 10^{-6} \\ 8.4135833 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0.21756925 & 0.15961396 \\ -0.23174163 & 0.26966745 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P_8 . $P_8 = P_7 - A_7 * F(P_7)$

$$P_8 = \begin{pmatrix} 0.50000009 \\ 0.86602566 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9.3391695 \times 10^{-8} \\ 2.5003645 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$P_8 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 0.86602541 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$F(P_i)$	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 1.00000000 \\ 1.00000000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.00000000 \\ 1.00000000 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 0.61111111 \\ 0.83333333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.425926 \\ 0.0449246 \end{pmatrix}$	0.388889
2	$\begin{pmatrix} 0.52293721 \\ 0.82434906 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.42592593 \\ 0.044924554 \end{pmatrix}$	0.0881739
3	$\begin{pmatrix} 0.49456946 \\ 0.84066343 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.14083861 \\ -0.076916050 \end{pmatrix}$	0.0283677
4	$\begin{pmatrix} 0.49567119 \\ 0.85471470 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.027081850 \\ -0.072412185 \end{pmatrix}$	0.0140513
5	$\begin{pmatrix} 0.49963890 \\ 0.86522724 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0065325540 \\ -0.035462661 \end{pmatrix}$	0.0105125
6	$\begin{pmatrix} 0.49999714 \\ 0.86601724 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.00029892374 \\ -0.0026130772 \end{pmatrix}$	0.000790001
7	$\begin{pmatrix} 0.50000009 \\ 0.86602566 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.5633653 \times 10^{-6} \\ -0.000025491707 \end{pmatrix}$	8.41358×10^{-6}
8	$\begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 0.86602541 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.5392563 \times 10^{-7} \\ 7.9492530 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$	2.50036×10^{-7}

La solución aproximada del sistema es:

$$P_8 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 0.86602541 \end{pmatrix}$$

7. Método de la Máxima Pendiente

7.1 Introducción

La ventaja del método de *Newton* y de *cuasi - Newton* en la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales es su rapidez de convergencia cuando se dispone de una solución aproximada suficientemente precisa. La necesidad de disponer de dicha aproximación inicial lo suficientemente precisa para asegurar la convergencia es, por tanto, una debilidad de estos métodos. El método de la **Máxima Pendiente** converge a la solución generalmente sólo de manera lineal, pero es de *naturaleza global*, esto es, a partir de casi cada valor inicial se produce convergencia, aunque estos valores iniciales sean deficientes. En consecuencia, con él se logran aproximaciones iniciales suficientemente exactas para las técnicas que tienen como base el método de *Newton*, del mismo modo que el método de la *bisección* se utiliza en una sola ecuación.

El método de la **Máxima Pendiente** determina un mínimo local para una función de varias variables de la forma $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. El método es de gran utilidad independientemente de su aplicación como primer método para resolver los sistemas no lineales.

La conexión entre el problema de minimizar una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} y la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales reside en el hecho de que un sistema lineal de la forma

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

tiene una solución en $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ justo cuando la función g definida por

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n [f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2 \quad (31)$$

alcanza su valor mínimo cero en \mathbf{p} .

En el método de la **Máxima Pendiente** para encontrar un mínimo local de una función cualquiera g de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} puede describirse de manera intuitiva como sigue:

- Evaluar la función g en una aproximación inicial $\mathbf{p}^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)})^t$.
- Determinar una dirección que, desde $\mathbf{p}^{(0)}$, se origine una disminución del valor de g .
- Desplazar una cantidad apropiada hacia esta dirección y llamar al nuevo vector $\mathbf{p}^{(1)}$.
- Repetir los tres pasos anteriores sustituyendo $\mathbf{p}^{(0)}$ por $\mathbf{p}^{(1)}$.

Antes de describir cómo seleccionar la dirección correcta y la distancia apropiada que se recorre en dicha dirección, es preciso repasar algunos resultados del cálculo infinitesimal.

▼ Teorema 4. Teorema de los Valores Extremos

Este teorema establece que una función diferenciable de una sola variable puede tener un *mínimo relativo* sólo cuando su derivada sea cero.

Para extender este resultado a las funciones de varias variables se necesita la siguiente definición.

Definición 5. Si $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se define el **gradiente** de g en $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$, que se denota con $\nabla g(x)$ y se define por medio de:

$$\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \frac{\partial g}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \right)^t$$

El *gradiente* de una función de varias variables es el análogo a la derivada de una función de varias variables en el sentido de que una función de varias variables diferenciable puede tener un *mínimo local* en un punto x sólo cuando su *gradiente* en x es el vector cero.

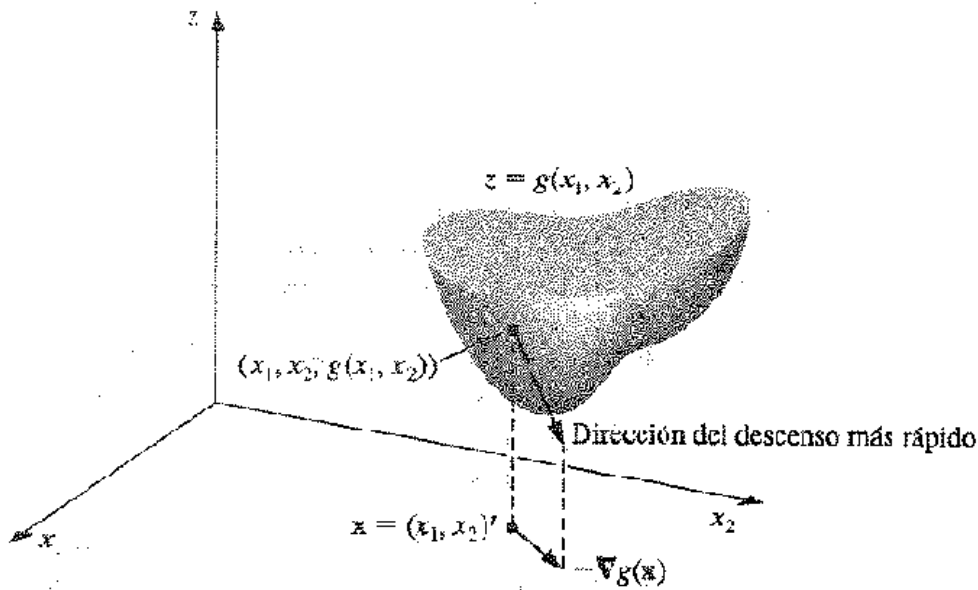
El *gradiente* tiene otra propiedad muy importante en relación con la minimización de las funciones de varias variables. Supóngase que $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t$ es un vector unitario de \mathbb{R}^n ; es decir,

$$\|\mathbf{v}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 = 1 \quad (32)$$

Definición 6. La **derivada direccional** de g en x en la dirección de \mathbf{v} está definida por

$$D_{\mathbf{v}} g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [g(x + h\mathbf{v}) - g(x)] = \mathbf{v} \nabla g(x).$$

La derivada direccional de g en x en la dirección de \mathbf{v} mide la variación de los valores de la función g con respecto a los cambios de su variable en la dirección de \mathbf{v} .



Cuando g es una función de dos variables

Figura 2

Un resultado estándar del cálculo infinitesimal de las funciones de varias variables establece que si la función g es diferenciable, la dirección en la que se obtiene la derivada direccional de mayor tamaño se obtiene cuando v es paralelo al gradiente $\nabla g(x)$, siempre y cuando $\nabla g(x) \neq 0$. En consecuencia, la dirección de la máxima disminución de los valores de g desde x es la dirección dada por $-\nabla g(x)$.

Puesto que el objetivo es reducir $g(x)$ a su valor mínimo de cero, dada la aproximación inicial $p^{(0)}$, se toma

$$p^{(1)} = p^{(0)} - \alpha z^{(0)} \quad (33)$$

para alguna constante $\alpha > 0$, donde $z^{(0)}$ es el vector unitario en la dirección del gradiente, es decir, $z^{(0)} = \frac{\nabla g(p^{(0)})}{\|\nabla g(p^{(0)})\|_2}$.

El problema, entonces, se reduce a escoger un valor de α de manera que $g(p^{(1)})$ sea

significativamente menor que $g(p^{(0)})$. Si se quiere determinar una elección apropiada del valor de α , considerense la función de una sola variable

$$h(\alpha) = g(p^{(0)} - \alpha z^{(0)}). \quad (34)$$

El valor de α que minimiza h es el valor que se requiere en la ecuación (33).

Para obtener directamente un valor mínimo de h se requiere derivar h , y luego resolver un problema de cálculo de raíces para determinar los puntos críticos de h . Este procedimiento es generalmente demasiado costoso en términos de cálculos necesarios. Por ello se seleccionan tres puntos $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ que, se espera, estén cerca de donde $h(\alpha)$ alcanza su valor mínimo. A continuación, se construye el polinomio de segundo grado $P(x)$ que interpola h en α_1 , α_2 y α_3 . Tomamos un valor $\hat{\alpha}$ en $[\alpha_1, \alpha_3]$ tal que $P(\hat{\alpha})$ sea el mínimo de $P(x)$ en $[\alpha_1, \alpha_3]$ y usando $P(\hat{\alpha})$ como aproximación del valor mínimo de $h(\alpha)$.

Entonces $\hat{\alpha}$ es el valor que se utiliza para determinar la nueva iteración en la búsqueda del valor mínimo de g :

$$p^{(1)} = p^{(0)} - \hat{\alpha} z^{(0)}. \quad (35)$$

Como ya se dispone de $g(p^{(0)})$, para reducir el esfuerzo computacional en lo posible el primer punto que se escoge es $\alpha_1 = 0$. A continuación, se toma un punto α_3 tal que $h(\alpha_3) < h(\alpha_1)$. (Dado que α_1 no es el mínimo de h , dicho número α_3 si existe). Finalmente se decide que α_2 sea igual a $\frac{\alpha_3}{2}$.

El punto $\hat{\alpha}$ donde se alcanza el valor mínimo de $P(x)$ en $[\alpha_1, \alpha_3]$ es el único punto crítico de P o el punto extremo derecho del intervalo α_3 porque, por suposición, $P(\alpha_3) = h(\alpha_3) < h(\alpha_1) = P(\alpha_1)$. Dado que $P(x)$ es un polinomio de segundo grado dicho punto crítico se puede determinar fácilmente.

7.2 Pseudocódigo

• Algoritmo 6. Método de la Máxima Pendiente para sistemas no lineales

El pseudocódigo del algoritmo que resuelve un sistema de ecuaciones no lineales de n ecuaciones con n incógnitas mediante el método de la Máxima Pendiente es:

Algoritmo Máxima Pendiente

Input $(\{f(x_1, \dots, x_n)\}_1^n, (x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ \dots \ x_n^{(0)})^T, n, error)$

(* Se inicializan las variables *)

$p \leftarrow (x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ \dots \ x_n^{(0)})^T$
 $F \leftarrow \{f(x_1, \dots, x_n)\}_1^n$

For $k = 1, \dots, n$ **do**

$g \leftarrow \sum_{i=1}^n F^2$

$g0 \leftarrow \begin{pmatrix} g_1(p_1^{(k-1)}, p_2^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) + \\ g_2(p_1^{(k-1)}, p_2^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) + \\ \dots \dots \dots + \\ g_n(p_1^{(k-1)}, p_2^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) \end{pmatrix}$

$gradiente \leftarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} (x \equiv (x_1, \dots, x_n))$

$z \leftarrow \begin{pmatrix} gradiente_1(p_1^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) \\ gradiente_2(p_1^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) \\ \dots \dots \dots \\ gradiente_n(p_1^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) \end{pmatrix}$

$z0 \leftarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n z^2}$

If $(z0 = 0)$ **do**
Break

End

$z \leftarrow \frac{z}{z0}$

$\alpha_1 \leftarrow 0$

$\alpha_3 \leftarrow 1$

$g1 \leftarrow g0$

$p3 \leftarrow p - \alpha_3 \cdot z$

```

g3 ←  $\begin{pmatrix} g_1(p_3^{(k-1)}, p_3^{(k-1)}, \dots, p_3^{(k-1)}) + \\ g_2(p_3^{(k-1)}, p_3^{(k-1)}, \dots, p_3^{(k-1)}) + \\ \dots + \\ g_n(p_3^{(k-1)}, p_3^{(k-1)}, \dots, p_3^{(k-1)}) \end{pmatrix}$ 
While (g3 ≥ g1) do
     $\alpha_3 \leftarrow \frac{\alpha_3}{2}$ 

    p3 ← p -  $\alpha_3 \cdot z$ 
    g3 ←  $\begin{pmatrix} g_1(p_3^{(k-1)}, p_3^{(k-1)}, \dots, p_3^{(k-1)}) + \\ g_2(p_3^{(k-1)}, p_3^{(k-1)}, \dots, p_3^{(k-1)}) + \\ \dots + \\ g_n(p_3^{(k-1)}, p_3^{(k-1)}, \dots, p_3^{(k-1)}) \end{pmatrix}$ 
If ( $\alpha_3 < \text{error}/2$ ) do
    Break
End
End

 $\alpha_2 \leftarrow \frac{\alpha_3}{2}$ 
p2 ← p -  $\alpha_2 \cdot z$ 
g2 ←  $\begin{pmatrix} g_1(p_2^{(k-1)}, p_2^{(k-1)}, \dots, p_2^{(k-1)}) + \\ g_2(p_2^{(k-1)}, p_2^{(k-1)}, \dots, p_2^{(k-1)}) + \\ \dots + \\ g_n(p_2^{(k-1)}, p_2^{(k-1)}, \dots, p_2^{(k-1)}) \end{pmatrix}$ 

h1 ←  $\frac{g_2 - g_1}{\alpha_2}$ 
h2 ←  $\frac{g_3 - g_2}{\alpha_3 - \alpha_2}$ 
h3 ←  $\frac{h_2 - h_1}{\alpha_3}$ 

 $\alpha_0 \leftarrow 0.5 \frac{\alpha_2 - h_1}{h_3}$ 
p0 ← p -  $\alpha_0 \cdot z$ 
g0 ←  $\begin{pmatrix} g_1(p_0^{(k-1)}, p_0^{(k-1)}, \dots, p_0^{(k-1)}) + \\ g_2(p_0^{(k-1)}, p_0^{(k-1)}, \dots, p_0^{(k-1)}) + \\ \dots + \\ g_n(p_0^{(k-1)}, p_0^{(k-1)}, \dots, p_0^{(k-1)}) \end{pmatrix}$ 
If (g0 ≤ g3) do
     $\alpha \leftarrow \alpha_0$ 
Else
     $\alpha \leftarrow \alpha_3$ 
End

(* Cálculo del siguiente punto y g *)
p1 ← p -  $\alpha \cdot z$ 
g ←  $\begin{pmatrix} g_1(p_1^{(k-1)}, p_1^{(k-1)}, \dots, p_1^{(k-1)}) + \\ g_2(p_1^{(k-1)}, p_1^{(k-1)}, \dots, p_1^{(k-1)}) + \\ \dots + \\ g_n(p_1^{(k-1)}, p_1^{(k-1)}, \dots, p_1^{(k-1)}) \end{pmatrix}$ 

(* Cálculo de la norma de la distancia entre los dos puntos *)
error ←  $\|p - p_1\|_\infty$ 

```

```

        If (error ≤ error_ini) do
            Break
        End
        p ← p1
    End

Return (x(k) ≡ (p)T)
Output

```

7.3 Problemas

■ **Problema 27.** Sea el sistema no lineal de ecuaciones siguiente:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 1/2 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + (10\pi - 3)/3 = 0.$$

Mediante el método de la *Máxima Pendiente* calcúlese la aproximación de la solución, comenzando en el punto inicial

$$P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0.0, 0.0, 0.0)^T$$

e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-5}$.

Solución

```

Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = {3 x1 - Cos[x2 * x3] - 1 / 2,
              x1^2 - 81 (x2 + 0.1)^2 + Sin[x3] + 1.06,
              Exp[-x1 * x2] + 20 x3 + (10 Pi - 3) / 3
              };
p = {0.0, 0.0, 0.0};
m = 12;
d = 10.^-5;
maximapendiente[ecuaciones, p, m, d];

```

Método de la *Máxima Pendiente* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\cos(x_2 x_3) + 3x_1 - \frac{1}{2} \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 \\ 20x_3 + e^{-x_1 x_2} + \frac{1}{3}(-3 + 10\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$. Siendo $g_x = g(P_0 - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} -0.0214514 \\ -0.0193062 \\ 0.999583 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 0 \quad g_1 = 111.97477$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \quad g_2 = 2.5355746$$

$$\alpha_3 = 1 \quad g_3 = 93.564865$$

$$h_1 = -218.87839$$

$$h_2 = 182.05858$$

$$h_3 = 400.93697$$

$$\alpha_0 = 0.52295860$$

Cálculo de P_1 . $P_1 = P_0 - \alpha_0 * z$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0.52295860 * \begin{pmatrix} -0.021451362 \\ -0.019306226 \\ 0.99958347 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.011218174 \\ 0.010096357 \\ -0.52274077 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$. Siendo $g_x = g(P_1 - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} -0.506566 \\ 0.862197 \\ -0.00272543 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 0 \quad g_1 = 2.3276167$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{8} \quad g_2 = 1.9473462$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{4} \quad g_3 = 1.2740584$$

$$h_1 = -3.0421633$$

$$h_2 = -5.3863024$$

$$h_3 = -9.3765564$$

$$\alpha_0 = -0.099721780$$

Cálculo de P_2 . $P_2 = P_1 - \alpha_0 * z$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.011218174 \\ 0.010096357 \\ -0.52274077 \end{pmatrix} - (-0.099721780) * \begin{pmatrix} -0.50656615 \\ 0.86219679 \\ -0.0027254284 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.13785971 \\ -0.20545284 \\ -0.52205942 \end{pmatrix}$$

....

....

Nota: Se han eliminado varias iteraciones. En la tabla final se pueden ver los resultados

Iteración $i = 11$. Siendo $g_x = g(P_{10} - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} -0.767783 \\ -0.105224 \\ 0.632011 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 & g_1 &= 0.21743968 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{128} & g_2 &= 0.19963276 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{64} & g_3 &= 0.20237438 \\ h_1 &= -2.2792858 \\ h_2 &= 0.35092709 \\ h_3 &= 168.33362 \\ \alpha_0 &= 0.010676394 \end{aligned}$$

Cálculo de P_{11} . $P_{11} = P_{10} - \alpha_0 * z$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 0.34574628 \\ -0.0090339826 \\ -0.52094100 \end{pmatrix} - 0.010676394 * \begin{pmatrix} -0.76778282 \\ -0.10522430 \\ 0.63201059 \end{pmatrix}$$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 0.35394344 \\ -0.0079105665 \\ -0.52768860 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 12$. Siendo $g_x = g(P_{11} - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} -0.638911 \\ 0.0514848 \\ -0.767556 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 & g_1 &= 0.19825170 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{128} & g_2 &= 0.18086861 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{64} & g_3 &= 0.19322688 \\ h_1 &= -2.2250355 \\ h_2 &= 1.5818578 \\ h_3 &= 243.64117 \\ \alpha_0 &= 0.0084724641 \end{aligned}$$

Cálculo de P_{12} . $P_{12} = P_{11} - \alpha_0 * z$

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0.35394344 \\ -0.0079105665 \\ -0.52768860 \end{pmatrix} - 0.0084724641 * \begin{pmatrix} -0.63891083 \\ 0.051484847 \\ -0.76755603 \end{pmatrix}$$

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0.35935658 \\ -0.0083467701 \\ -0.52118551 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$g(P_i)$	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$		
1	$\begin{pmatrix} 0.011218174 \\ 0.010096357 \\ -0.52274077 \end{pmatrix}$	2.3276167	0.522741
2	$\begin{pmatrix} 0.13785971 \\ -0.20545284 \\ -0.52205942 \end{pmatrix}$	1.2740584	0.215549
3	$\begin{pmatrix} 0.26695943 \\ 0.0055110205 \\ -0.55849445 \end{pmatrix}$	1.0681309	0.210964
4	$\begin{pmatrix} 0.27273377 \\ -0.0081175097 \\ -0.52200607 \end{pmatrix}$	0.46830873	0.0364884
5	$\begin{pmatrix} 0.30868928 \\ -0.020402628 \\ -0.53311162 \end{pmatrix}$	0.38108714	0.0359555
6	$\begin{pmatrix} 0.31430818 \\ -0.014704639 \\ -0.52092340 \end{pmatrix}$	0.31883720	0.0121882
7	$\begin{pmatrix} 0.32426667 \\ -0.0085254888 \\ -0.52843083 \end{pmatrix}$	0.28702361	0.00995849
8	$\begin{pmatrix} 0.33080876 \\ -0.0096784838 \\ -0.52066235 \end{pmatrix}$	0.26157926	0.00776848
9	$\begin{pmatrix} 0.33980857 \\ -0.0085919751 \\ -0.52808019 \end{pmatrix}$	0.23848640	0.00899981

$$\begin{array}{l} 10 \begin{pmatrix} 0.34574628 \\ -0.0090339826 \\ -0.52094100 \end{pmatrix} \quad 0.21743968 \quad 0.00713919 \\ 11 \begin{pmatrix} 0.35394344 \\ -0.0079105665 \\ -0.52768860 \end{pmatrix} \quad 0.19825170 \quad 0.00819715 \\ 12 \begin{pmatrix} 0.35935658 \\ -0.0083467701 \\ -0.52118551 \end{pmatrix} \quad 0.18076240 \quad 0.00650309 \end{array}$$

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0.35935658 \\ -0.0083467701 \\ -0.52118551 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 28.** Dado el siguiente problema no lineal

$$f_1(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_2^2 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2) = 3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0.$$

Calcular la solución aproximada del sistema empleando el método de *la Máxima Pendiente* comenzando en el punto:

$$P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (1, 1)^T,$$

e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 0.05$.

Solución

```
Clear[ecuaciones, m, p, d];
ecuaciones = {3 x1^2 - x2^2, 3 x1 x2^2 - x1^3 - 1};
d = 0.05;
p = {1.0, 1.0};
m = 12;
maximapendiente[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de la *Máxima Pendiente* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 \\ -x_1^3 + 3x_2^2x_1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 1. \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$. Siendo $g_x = g(P_0 - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} 0.986394 \\ 0.164399 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 0 \quad g_1 = 5.00000000$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{1}{2} & g_2 &= 0.027823883 \\ \alpha_3 &= 1 & g_3 &= 1.4305648 \\ h_1 &= -9.9443522 \\ h_2 &= 2.8054818 \\ h_3 &= 12.749834 \\ \alpha_0 &= 0.63997967\end{aligned}$$

Cálculo de P_1 . $P_1 = P_0 - \alpha_0 * z$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1.0000000 \\ 1.0000000 \end{pmatrix} - 0.63997967 * \begin{pmatrix} 0.98639392 \\ 0.16439899 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.36872794 \\ 0.89478799 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$. Siendo $g_x = g(P_1 - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} -0.953737 \\ 0.300642 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0 & g_1 &= 0.18131486 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{16} & g_2 &= 0.055627387 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{8} & g_3 &= 0.0020652593 \\ h_1 &= -2.0109996 \\ h_2 &= -0.85699404 \\ h_3 &= 9.2320449 \\ \alpha_0 &= 0.14016410\end{aligned}$$

Cálculo de P_2 . $P_2 = P_1 - \alpha_0 * z$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.36872794 \\ 0.89478799 \end{pmatrix} - 0.14016410 * \begin{pmatrix} -0.95373696 \\ 0.30064233 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.50240762 \\ 0.85264873 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$. Siendo $g_x = g(P_2 - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} 0.336393 \\ -0.941722 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0 & g_1 &= 0.0018778891 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{128} & g_2 &= 0.00034772833 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{64} & g_3 &= 0.00011818906 \\ h_1 &= -0.19586058 \\ h_2 &= -0.029381027 \\ h_3 &= 10.654691 \\ \alpha_0 &= 0.013097534\end{aligned}$$

Cálculo de P_3 . $P_3 = P_2 - \alpha_0 * z$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.50240762 \\ 0.85264873 \end{pmatrix} - 0.013097534 * \begin{pmatrix} 0.33639266 \\ -0.94172182 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.49800170 \\ 0.86498296 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$g(P_i)$	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 1. \\ 1. \end{pmatrix}$		
1	$\begin{pmatrix} 0.36872794 \\ 0.89478799 \end{pmatrix}$	0.18131486	0.631272
2	$\begin{pmatrix} 0.50240762 \\ 0.85264873 \end{pmatrix}$	0.0018778891	0.13368
3	$\begin{pmatrix} 0.49800170 \\ 0.86498296 \end{pmatrix}$	0.000049941580	0.0123342

La solución aproximada del sistema es:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.49800170 \\ 0.86498296 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 29.** Sea el sistema de ecuaciones no lineales siguiente.

$$f_1(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 20x_1 + 1/4x_2^2 + 8 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2) = 1/2x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0.$$

Aplíquese el método de la *Máxima Pendiente* iniciando el método en el punto inicial $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (0, 0)^T$ e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-3}$.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = {4 x1^2 - 20 x1 + 1 / 4 x2^2 + 8, 1 / 2 x1 x2^2 + 2 x1 - 5 x2 + 8};
p = {0., 0.};
m = 12;
d = 10.^-3;
maximapendiente[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de la *Máxima Pendiente* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^2 - 20x_1 + \frac{x_2^2}{4} + 8 \\ \frac{1}{2}x_1x_2^2 - 5x_2 + 2x_1 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$. Siendo $g_x = g(P_0 - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} -0.963518 \\ -0.267644 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 0 \quad g_1 = 128.00000$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4} \quad g_2 = 78.052191$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} \quad g_3 = 69.362062$$

$$h_1 = -199.79124$$

$$h_2 = -34.760519$$

$$h_3 = 330.06143$$

$$\alpha_0 = 0.42765765$$

Cálculo de P_1 . $P_1 = P_0 - \alpha_0 * z$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0.42765765 * \begin{pmatrix} -0.96351791 \\ -0.26764386 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.41205580 \\ 0.11445995 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$. Siendo $g_x = g(P_1 - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} 0.219477 \\ -0.975618 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 0 \quad g_1 = 68.331716$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \quad g_2 = 37.708968$$

$$\alpha_3 = 1 \quad g_3 = 30.400880$$

$$h_1 = -61.245494$$

$$h_2 = -14.616176$$

$$h_3 = 46.629319$$

$$\alpha_0 = 0.90672732$$

Cálculo de P_2 . $P_2 = P_1 - \alpha_0 * z$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.41205580 \\ 0.11445995 \end{pmatrix} - 0.90672732 * \begin{pmatrix} 0.21947696 \\ -0.97561768 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.21305005 \\ 0.99907915 \end{pmatrix}$$

....

....

Nota: Se han eliminado varias iteraciones. En la tabla final se pueden ver los resultados

Iteración $i = 11$. Siendo $g_x = g(P_{10} - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} -0.991476 \\ -0.130288 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 0 \quad g_1 = 0.094572826$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{128} \quad g_2 = 0.056358058$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{64} \quad g_3 = 0.050221940$$

$$h_1 = -4.8914903$$

$$h_2 = -0.78542310$$

$$h_3 = 262.78830$$

$$\alpha_0 = 0.013213153$$

Cálculo de P_{11} . $P_{11} = P_{10} - \alpha_0 * z$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 0.48036371 \\ 1.9381709 \end{pmatrix} - 0.013213153 * \begin{pmatrix} -0.99147625 \\ -0.13028754 \end{pmatrix}$$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 0.49346423 \\ 1.9398924 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 12$. Siendo $g_x = g(P_{11} - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} 0.128357 \\ -0.991728 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 0 \quad g_1 = 0.048714444$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{64} \quad g_2 = 0.029799005$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{32} \quad g_3 = 0.025321504$$

$$h_1 = -1.2105881$$

$$h_2 = -0.28656006$$

$$h_3 = 29.568897$$

$$\alpha_0 = 0.028283133$$

Cálculo de P_{12} . $P_{12} = P_{11} - \alpha_0 * z$

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0.49346423 \\ 1.9398924 \end{pmatrix} - 0.028283133 * \begin{pmatrix} 0.12835716 \\ -0.99172801 \end{pmatrix}$$

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0.48983389 \\ 1.9679416 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$g(P_i)$	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0. \\ 0. \end{pmatrix}$		
1	$\begin{pmatrix} 0.41205580 \\ 0.11445995 \end{pmatrix}$	68.331716	0.412056
2	$\begin{pmatrix} 0.21305005 \\ 0.99907915 \end{pmatrix}$	29.900339	0.884619
3	$\begin{pmatrix} 0.43001490 \\ 1.0468405 \end{pmatrix}$	15.081622	0.216965
4	$\begin{pmatrix} 0.34915086 \\ 1.5154867 \end{pmatrix}$	6.6372618	0.468646
5	$\begin{pmatrix} 0.45719044 \\ 1.5337223 \end{pmatrix}$	3.2594559	0.10804
6	$\begin{pmatrix} 0.42403332 \\ 1.7618942 \end{pmatrix}$	1.5149149	0.228172
7	$\begin{pmatrix} 0.47660783 \\ 1.7694624 \end{pmatrix}$	0.75130795	0.0525745
8	$\begin{pmatrix} 0.46166580 \\ 1.8797549 \end{pmatrix}$	0.36833775	0.110292
9	$\begin{pmatrix} 0.48759235 \\ 1.8832549 \end{pmatrix}$	0.18677298	0.0259266
10	$\begin{pmatrix} 0.48036371 \\ 1.9381709 \end{pmatrix}$	0.094572826	0.054916
11	$\begin{pmatrix} 0.49346423 \\ 1.9398924 \end{pmatrix}$	0.048714444	0.0131005
12	$\begin{pmatrix} 0.48983389 \\ 1.9679416 \end{pmatrix}$	0.025059163	0.0280492

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0.48983389 \\ 1.9679416 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 30.** Sea el sistema de ecuaciones no lineales siguiente.

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_1^2 x_2 - x_1 x_3 + 6 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0.$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - 2x_1x_3 - 4 = 0$$

Aplíquese el método de la *Máxima Pendiente* iniciando el método en el punto inicial $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0, 0, 0)^T$ e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 10^{-3}$.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones =
  {x1^3 + x1^2 x2 - x1 x3 + 6, Exp[x1] + Exp[x2] - x3, x2^2 - 2 x1 x3 - 4};
p = {0., 0., 0.};
m = 11;
d = 10.^-3;
maximapendiente[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de la *Máxima Pendiente* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2 x_1^2 - x_3 x_1 + 6 \\ -x_3 + e^{x_1} + e^{x_2} \\ x_2^2 - 2x_1 x_3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$. Siendo $g_x = g(P_0 - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} 0.57735 \\ 0.57735 \\ -0.57735 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 0 \quad g_1 = 56.000000$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \quad g_2 = 51.950093$$

$$\alpha_3 = 1 \quad g_3 = 44.681337$$

$$h_1 = -8.0998132$$

$$h_2 = -14.537512$$

$$h_3 = -6.4376990$$

$$\alpha_0 = -0.37909225$$

Cálculo de P_1 . $P_1 = P_0 - \alpha_0 * z$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - -0.37909225 * \begin{pmatrix} 0.57735027 \\ 0.57735027 \\ -0.57735027 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} -0.57735027 \\ -0.57735027 \\ 0.57735027 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$. Siendo $g_x = g(P_1 - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} 0.870989 \\ 0.488866 \\ -0.0488764 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 0 \quad g_1 = 44.681337$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \quad g_2 = 26.822977$$

$$\alpha_3 = 1 \quad g_3 = 3.7672550$$

$$h_1 = -35.716720$$

$$h_2 = -46.111444$$

$$h_3 = -10.394724$$

$$\alpha_0 = -1.4680216$$

Cálculo de P_2 . $P_2 = P_1 - \alpha_0 * z$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -0.57735027 \\ -0.57735027 \\ 0.57735027 \end{pmatrix} - -1.4680216 * \begin{pmatrix} 0.87098854 \\ 0.48886610 \\ -0.048876375 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1.4483388 \\ -1.0662164 \\ 0.62622664 \end{pmatrix}$$

....

....

Nota: Se han eliminado varias iteraciones. En la tabla final se pueden ver los resultados.

Iteración $i = 10$. Siendo $g_x = g(P_9 - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} 0.197815 \\ 0.792089 \\ 0.577464 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 0 \quad g_1 = 0.076466169$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{1}{512} & g_2 &= 0.076202907 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{256} & g_3 &= 0.076139470 \\ h_1 &= -0.13479007 \\ h_2 &= -0.032479521 \\ h_3 &= 26.191500 \\ \alpha_0 &= 0.0035497268\end{aligned}$$

Cálculo de P_{10} . $P_{10} = P_9 - \alpha_0 * z$

$$P_{10} = \begin{pmatrix} -1.6018808 \\ -1.2159095 \\ 0.76653403 \end{pmatrix} - 0.0035497268 * \begin{pmatrix} 0.19781530 \\ 0.79208850 \\ 0.57746421 \end{pmatrix}$$

$$P_{10} = \begin{pmatrix} -1.6025830 \\ -1.2187212 \\ 0.76448419 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 11$. Siendo $g_x = g(P_{10} - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} -0.979351 \\ 0.134292 \\ 0.151118 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0 & g_1 &= 0.076136123 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{1024} & g_2 &= 0.075875516 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{512} & g_3 &= 0.075812047 \\ h_1 &= -0.26686133 \\ h_2 &= -0.064992483 \\ h_3 &= 103.35685 \\ \alpha_0 &= 0.0017792520\end{aligned}$$

Cálculo de P_{11} . $P_{11} = P_{10} - \alpha_0 * z$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} -1.6025830 \\ -1.2187212 \\ 0.76448419 \end{pmatrix} - 0.0017792520 * \begin{pmatrix} -0.97935138 \\ 0.13429208 \\ 0.15111754 \end{pmatrix}$$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} -1.6008405 \\ -1.2189601 \\ 0.76421531 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$g(P_i)$	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$		
1	$\begin{pmatrix} -0.57735027 \\ -0.57735027 \\ 0.57735027 \end{pmatrix}$	44.681337	0.57735
2	$\begin{pmatrix} -1.4483388 \\ -1.0662164 \\ 0.62622664 \end{pmatrix}$	3.7672550	0.870989
3	$\begin{pmatrix} -1.6104162 \\ -1.1248900 \\ 0.63275609 \end{pmatrix}$	0.50260503	0.162077
4	$\begin{pmatrix} -1.6136071 \\ -1.2043419 \\ 0.76672218 \end{pmatrix}$	0.087293876	0.133966
5	$\begin{pmatrix} -1.6056229 \\ -1.2031066 \\ 0.76777778 \end{pmatrix}$	0.078795780	0.00798413
6	$\begin{pmatrix} -1.6047705 \\ -1.2134686 \\ 0.77025559 \end{pmatrix}$	0.077600212	0.010362
7	$\begin{pmatrix} -1.6028310 \\ -1.2134452 \\ 0.76968974 \end{pmatrix}$	0.077169875	0.00193956
8	$\begin{pmatrix} -1.6036305 \\ -1.2157250 \\ 0.76688219 \end{pmatrix}$	0.076799239	0.00280755
9	$\begin{pmatrix} -1.6018808 \\ -1.2159095 \\ 0.76653403 \end{pmatrix}$	0.076466169	0.0017497
10	$\begin{pmatrix} -1.6025830 \\ -1.2187212 \\ 0.76448419 \end{pmatrix}$	0.076136123	0.0028117
11	$\begin{pmatrix} -1.6008405 \\ -1.2189601 \\ 0.76421531 \end{pmatrix}$	0.075808948	0.00174251

La solución aproximada del sistema es:

$$P_{11} = \begin{pmatrix} -1.6008405 \\ -1.2189601 \\ 0.76421531 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 31.** Sea el sistema de ecuaciones no lineales siguiente.

$$f_1(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1 x_2) - (\ln 2 + \ln \pi),$$

$$f_2(x_1, x_2) = e^{(x_1 - x_2)} + \cos(x_1 x_2) = 0.$$

Aplíquese el método de la *Máxima Pendiente* iniciando el método en el punto inicial $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (2, 2)^T$. e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 0.05$.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, d, m];
ecuaciones =
  { Log[x1^2 + x2^2] - Sin[x1 * x2] - (Log [2] + Log [Pi]) ,
    Exp[x1 - x2] + Cos[x1 * x2] };
p = {2.0, 2.0};
m = 10;
d = 0.05;
maximapendiente[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de la *Máxima Pendiente* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \log(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1 x_2) - \log(\pi) - \log(2) \\ \cos(x_1 x_2) + e^{x_1 - x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2. \\ 2. \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$. Siendo $g_x = g(P_0 - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} 0.803444 \\ 0.595381 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 0 \quad g_1 = 1.1166993$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4} \quad g_2 = 0.061876723$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} \quad g_3 = 0.30301513$$

$$h_1 = -4.2192905$$

$$h_2 = 0.96455364$$

$$h_3 = 10.367688$$

$$\alpha_0 = 0.32848270$$

Cálculo de P_1 . $P_1 = P_0 - \alpha_0 * z$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2.0000000 \\ 2.0000000 \end{pmatrix} - 0.32848270 * \begin{pmatrix} 0.80344369 \\ 0.59538075 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1.7360826 \\ 1.8044277 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$. Siendo $g_x = g(P_1 - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} -0.919329 \\ 0.393489 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 0 \quad g_1 = 0.0044813455$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{64} \quad g_2 = 0.0022525436$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{32} \quad g_3 = 0.0014992209$$

$$h_1 = -0.14264333$$

$$h_2 = -0.048212650$$

$$h_3 = 3.0217816$$

$$\alpha_0 = 0.031415020$$

Cálculo de P_2 . $P_2 = P_1 - \alpha_0 * z$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1.7360826 \\ 1.8044277 \end{pmatrix} - 0.031415020 * \begin{pmatrix} -0.91932918 \\ 0.39348934 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1.7648117 \\ 1.7921312 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$g(P_i)$	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 2. \\ 2. \end{pmatrix}$		
1	$\begin{pmatrix} 1.7360826 \\ 1.8044277 \end{pmatrix}$	0.0044813455	0.263917
2	$\begin{pmatrix} 1.7648117 \\ 1.7921312 \end{pmatrix}$	0.0014992209	0.028729

La solución aproximada del sistema es:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1.7648117 \\ 1.7921312 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 32.** Sea el sistema de ecuaciones no lineales siguiente.

$$f_1(x_1, x_2) = \sin(4\pi x_1 x_2) - 2x_2 - x_1 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2) = ((4\pi - 1)/(4\pi))(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0.$$

Aplíquese el método de la *Máxima Pendiente* iniciando el método en el punto inicial $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (0, 0)^T$. e iterando hasta que $\|P_{i+1} - P_i\|_\infty \leq 0.005$.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = {
  Sin[4 * Pi * x1 * x2] - 2 x2 - x1,
  ((4 Pi - 1) / (4 Pi)) (Exp[2 x1] - E) + 4 E (x2)^2 - 2 E * x1};
p = {0.0, 0.0};
m = 2;
d = 0.005;
maximapendiente[ecuaciones, p, m, d];
```

Método de la *Máxima Pendiente* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin(4\pi x_1 x_2) - x_1 - 2x_2 \\ 4e x_2^2 - 2e x_1 + \frac{(-e + e^{2x_1})(-1 + 4\pi)}{4\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$. Siendo $g_x = g(P_0 - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} 1. \\ 0. \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 0 \quad g_1 = 2.5012856$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4} \quad g_2 = 0.40421324$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} \quad g_3 = 0.55793456$$

$$h_1 = -8.3882892$$

$$h_2 = 0.61488529$$

$$h_3 = 18.006349$$

$$\alpha_0 = 0.35792588$$

Cálculo de P_1 . $P_1 = P_0 - \alpha_0 * z$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0.35792588 * \begin{pmatrix} 1.00000000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} -0.35792588 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$. Siendo $g_x = g(P_1 - \alpha_x * z)$

$$z = \begin{pmatrix} 0.0531923 \\ -0.998584 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 0 \quad g_1 = 0.13938957$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{32} \quad g_2 = 0.032290159$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{16} \quad g_3 = 0.0042365080$$

$$h_1 = -3.4271812$$

$$\begin{aligned}h_2 &= -0.89771682 \\h_3 &= 40.471430 \\\alpha_0 &= 0.057965747\end{aligned}$$

Cálculo de P_2 . $P_2 = P_1 - \alpha_0 * z$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -0.35792588 \\ 0 \end{pmatrix} - 0.057965747 * \begin{pmatrix} 0.053192294 \\ -0.99858429 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -0.36100921 \\ 0.057883685 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$g(P_i)$	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0. \\ 0. \end{pmatrix}$		
1	$\begin{pmatrix} -0.35792588 \\ 0 \end{pmatrix}$	0.13938957	0.357926
2	$\begin{pmatrix} -0.36100921 \\ 0.057883685 \end{pmatrix}$	0.0033164212	0.0578837

La solución aproximada del sistema es:

$$P_2 = \begin{pmatrix} -0.36100921 \\ 0.057883685 \end{pmatrix}$$

8. Método de Continuación u Homotopía

8.1 Introducción

Los métodos de *Continuación*, u *Homotopía*, para sistemas no lineales consisten en sumergir el problema que debe resolverse dentro de una familia adecuada de problemas.

Específicamente, para resolver un problema de la forma

$$F(x) = 0 \quad (36)$$

cuya solución x^* es desconocida, considérese una familia de problemas que se describen mediante un parámetro λ que toma valores en $[0, 1]$. A $\lambda = 0$ le corresponde un problema cuya solución $x(0)$ es conocida, mientras que el problema cuya solución $x(1) \equiv x^*$ se desconoce y corresponde a $\lambda = 1$.

Por ejemplo, suponiendo que $x(0)$ es una aproximación inicial de la solución x^* de $F(x) = 0$.

Definición 7. Se define $G: [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mediante

$$G(\lambda, x) = \lambda F(x) + (1 - \lambda)[F(x) - F(x(0))] = F(x) + (\lambda - 1)F(x(0)).$$

Se determinarán, para varios valores de λ , una solución de

$$G(\lambda, x) = 0. \quad (37)$$

Cuando $\lambda = 0$, la ecuación que resulta es

$$0 = G(0, x) = F(x) - F(x(0)), \quad (38)$$

de la cual $\mathbf{x}(0)$ es una solución. Cuando $\lambda = 1$, la ecuación que resulta es

$$\boxed{0 = G(1, x) = F(x)}, \quad (39)$$

de la cual $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^*$ es una solución.

La función \mathbf{G} , a través de su parámetro λ , proporciona una familia de funciones que podrían guiar desde el valor conocido $\mathbf{x}(0)$ hasta la solución $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^*$. Se dice que la función \mathbf{G} es una **homotopía** entre la función $G(0, x) = F(x) - F(x(0))$ y la función $G(1, x) = F(x)$.

El problema de **continuación** consiste en lo siguiente.

Determinar una forma de proceder para ir desde la solución conocida $\mathbf{x}(0)$ de $G(0, x) = 0$ hasta la solución desconocida $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^*$ de $G(1, x) = 0$ que resuelve el problema $F(x) = 0$.

Suponiendo, en primer lugar, que $\mathbf{x}(\lambda)$ es la única solución de la ecuación

$$\boxed{G(\lambda, x) = 0}, \quad (40)$$

para cada $\lambda \in [0, 1]$. El conjunto $\{\mathbf{x}(\lambda) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ puede verse como una curva en \mathbb{R}^n parametrizada por λ , que va desde $\mathbf{x}(0)$ hasta $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^*$. Con el método de **Continuación** se determinan una secuencia de puntos $\{\mathbf{x}(\lambda_k)\}_{k=0}^m$ a lo largo de esta curva que corresponden a $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m = 1$.

Si las funciones $\lambda \rightarrow \mathbf{x}(\lambda)$ y \mathbf{G} son diferenciables, entonces derivando la ecuación $G(\lambda, x) = 0$ con respecto a λ se obtiene

$$\boxed{0 = \frac{\partial G(\lambda, x(\lambda))}{\partial \lambda} + \frac{\partial G(\lambda, x(\lambda))}{\partial x} x'(\lambda)}, \quad (41)$$

que, despejando $x'(\lambda)$, queda

$$x'(\lambda) = - \left[\frac{\partial G(\lambda, x(\lambda))}{\partial x} \right]^{-1} \frac{\partial G(\lambda, x(\lambda))}{\partial \lambda}, \quad (42)$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales con condición inicial $x(0)$.

Puesto que

$$G(\lambda, x(\lambda)) = F(x(\lambda)) + (\lambda - 1)F(x(0)), \quad (43)$$

se pueden determinar tanto la matriz jacobiana

$$\frac{\partial G}{\partial x}(\lambda, x(\lambda)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x(\lambda)) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x(\lambda)) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x(\lambda)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x(\lambda)) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x(\lambda)) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x(\lambda)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x(\lambda)) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x(\lambda)) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x(\lambda)) \end{pmatrix} = J(x(\lambda)) \quad (44)$$

como

$$\frac{\partial G(\lambda, x(\lambda))}{\partial \lambda} = F(x(0)). \quad (45)$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales resulta ser

$$x'(\lambda) = - [J(x(\lambda))]^{-1} F(x(0)), \quad \text{para } 0 \leq \lambda \leq 1, \quad (46)$$

con la condición inicial $x(0)$.

El siguiente teorema proporciona condiciones bajo las que el método de **Continuación** puede llevarse a cabo.

▼ Teorema 5. Convergencia del Método de Continuación

Suponiendo que $F(x)$ es diferenciable con continuidad para $x \in \mathbb{R}^n$. Suponiendo que la matriz jacobiana $J(x)$ es invertible para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y que existe una constante M

tal que $\|J(x)^{-1}\| \leq M$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces para cualquier $x(0)$ en \mathbb{R}^n , existe una única función $x(\lambda)$ tal que

$$G(\lambda, x(\lambda)) = 0,$$

para todo λ en $[0, 1]$. Además, $x(\lambda)$ es diferenciable con continuidad y

$$x'(\lambda) = -J(x(\lambda))^{-1} F(x(0)) \text{ para } \lambda \in [0, 1].$$

En general, el sistema de ecuaciones diferenciales que se necesitan resolver con el problema de *continuación* es de la forma

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\lambda} = \phi_1(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{d\lambda} = \phi_2(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ \frac{dx_n}{d\lambda} = \phi_n(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (47)$$

donde

$$\begin{pmatrix} \phi_1(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \phi_2(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ \phi_n(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} = -J(x_1, x_2, \dots, x_n)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x(0)) \\ f_2(x(0)) \\ \dots \\ f_n(x(0)) \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Para utilizar el método de *Runge - Kutta* de orden 4 en la resolución de este sistema se toma un número entero $n > 0$ y se define $h = \frac{(1-0)}{n}$. Se divide el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos cuyos extremos son los nodos

$$\lambda_j = jh, \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, n. \quad (49)$$

Se va a denotar por w_{ij} , para cada $j = 0, 1, \dots, n$ e $i = 1, 2, \dots, n$, la aproximación de $x_i(\lambda_j)$. De acuerdo con las condiciones iniciales, se toma

$$w_{1,0} = x_1(0), \quad w_{2,0} = x_2(0), \quad w_{n,0} = x_n(0). \quad (50)$$

Suponiendo que se ha calculado ya $w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{n,j}$. Se obtienen las nuevas aproximaciones $w_{1,j+1}, w_{2,j+1}, \dots, w_{n,j+1}$ mediante las expresiones

$$\begin{aligned} k_{1,i} &= h \phi_i(\lambda_j, w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{n,j}), \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ k_{2,i} &= h \phi_i\left(\lambda_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2} k_{1,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2} k_{1,2}, \dots, w_{n,j} + \frac{1}{2} k_{1,n}\right), \\ &\quad i = 1, 2, \dots, n; \\ k_{3,i} &= h \phi_i\left(\lambda_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2} k_{2,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2} k_{2,2}, \dots, w_{n,j} + \frac{1}{2} k_{2,n}\right), \\ &\quad i = 1, 2, \dots, n; \\ k_{4,i} &= h \phi_i(\lambda_j + h, w_{1,j} + k_{3,1}, w_{2,j} + k_{3,2}, \dots, w_{n,j} + k_{3,n}), \\ &\quad i = 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (51)$$

y, finalmente

$$w_{i,j+1} = w_{i,j} + \frac{1}{6} (k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (52)$$

Utilizando la notación vectorial

$$\begin{aligned} k_1 &= \begin{pmatrix} k_{1,1} \\ k_{1,2} \\ \dots \\ k_{1,n} \end{pmatrix}, \quad k_2 = \begin{pmatrix} k_{2,1} \\ k_{2,2} \\ \dots \\ k_{2,n} \end{pmatrix}, \quad k_3 = \begin{pmatrix} k_{3,1} \\ k_{3,2} \\ \dots \\ k_{3,n} \end{pmatrix}, \quad k_4 = \begin{pmatrix} k_{4,1} \\ k_{4,2} \\ \dots \\ k_{4,n} \end{pmatrix} \quad y \\ w_j &= \begin{pmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \dots \\ w_{n,j} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (53)$$

para simplificar la presentación.

La igualdad (48) da $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(\lambda_0) = \mathbf{w}_0$ y, para cada $j = 0, 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h \begin{pmatrix} \phi_1(\lambda_j, w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{n,j}) \\ \phi_2(\lambda_j, w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{n,j}) \\ \dots \\ \phi_n(\lambda_j, w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{n,j}) \end{pmatrix} \\
 &= h [-J(w_{1,j}, \dots, w_{n,j})]^{-1} F(x(0)) = h [-J(w_j)]^{-1} F(x(0)); \\
 k_2 &= h \left[-J \left(w_j + \frac{1}{2} k_1 \right) \right]^{-1} F(x(0)); \\
 k_3 &= h \left[-J \left(w_j + \frac{1}{2} k_2 \right) \right]^{-1} F(x(0)); \\
 k_4 &= h [-J(w_j + k_3)]^{-1} F(x(0)).
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 x(\lambda_{j+1}) &= \\
 x(\lambda_j) + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) &= w_j + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (55)
 \end{aligned}$$

Finalmente, $\mathbf{x}(\lambda_n) = \mathbf{x}(1)$ es la aproximación de x^* .

8.2 Pseudocódigo

• Algoritmo 7. Método de Continuación u Homotopía para sistemas no lineales.

El pseudocódigo del algoritmo que resuelve un sistema de ecuaciones no lineales de n ecuaciones con n incógnitas mediante el método de *Continuación u Homotopía* es:

Algoritmo Continuación u Homotopía

Input $(\{f(x_1, \dots, x_n)\}_1^n, (x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ \dots \ x_n^{(0)})^T, n)$

(* Se inicializan las variables *)

$M \leftarrow 4$

$h \leftarrow 1 / n$

$p \leftarrow (x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ \dots \ x_m^{(0)})^T$

$F \leftarrow \{f(x_1, \dots, x_n)\}_1^n$

$$J(x) \leftarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \quad (x \equiv (x_1, \dots, x_n))$$

$$f_valor \leftarrow \begin{pmatrix} f_1(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}) \\ f_2(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}) \\ \dots \\ f_n(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}) \end{pmatrix}$$

For $k = 1, \dots, n$ **do**

(* Se evalúa la función F y la matriz jacobiana en el punto *)

$$j_valor \leftarrow \begin{pmatrix} j_{11}(p_1^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) & \dots & j_{1n}(p_1^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) \\ j_{21}(p_1^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) & \dots & j_{2n}(p_1^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ j_{n1}(p_1^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) & \dots & j_{nn}(p_1^{(k-1)}, \dots, p_n^{(k-1)}) \end{pmatrix}$$

$$k1 \leftarrow h * (j_valor)^{-1} * f_valor$$

$$p_aux \leftarrow p$$

$$p_int \leftarrow p_aux + \frac{1}{2} k1$$

$$j_valor \leftarrow$$

$$\begin{pmatrix} j_{11}(p_int_1^{(k-1)}, \dots, p_int_n^{(k-1)}) & \dots & j_{1n}(p_int_1^{(k-1)}, \dots, p_int_n^{(k-1)}) \\ j_{21}(p_int_1^{(k-1)}, \dots, p_int_n^{(k-1)}) & \dots & j_{2n}(p_int_1^{(k-1)}, \dots, p_int_n^{(k-1)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ j_{n1}(p_int_1^{(k-1)}, \dots, p_int_n^{(k-1)}) & \dots & j_{nn}(p_int_1^{(k-1)}, \dots, p_int_n^{(k-1)}) \end{pmatrix}$$

$$k2 \leftarrow h * (j_valor)^{-1} * f_valor$$

$$p_int \leftarrow p_aux + \frac{1}{2} k2$$

$$j_valor \leftarrow$$

$$\begin{pmatrix} j_{11}(p_int_1^{(k-1)}, \dots, p_int_n^{(k-1)}) & \dots & j_{1n}(p_int_1^{(k-1)}, \dots, p_int_n^{(k-1)}) \\ j_{21}(p_int_1^{(k-1)}, \dots, p_int_n^{(k-1)}) & \dots & j_{2n}(p_int_1^{(k-1)}, \dots, p_int_n^{(k-1)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ j_{n1}(p_int_1^{(k-1)}, \dots, p_int_n^{(k-1)}) & \dots & j_{nn}(p_int_1^{(k-1)}, \dots, p_int_n^{(k-1)}) \end{pmatrix}$$

$$k3 \leftarrow h * (j_valor)^{-1} * f_valor$$

$$p_int \leftarrow p_aux + k3$$

$$j_valor \leftarrow$$

$$\begin{pmatrix} j_{11}(p_int_1^{(k-1)}, \dots, p_int_n^{(k-1)}) & \dots & j_{1n}(p_int_1^{(k-1)}, \dots, p_int_n^{(k-1)}) \\ j_{21}(p_int_1^{(k-1)}, \dots, p_int_n^{(k-1)}) & \dots & j_{2n}(p_int_1^{(k-1)}, \dots, p_int_n^{(k-1)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ j_{n1}(p_int_1^{(k-1)}, \dots, p_int_n^{(k-1)}) & \dots & j_{nn}(p_int_1^{(k-1)}, \dots, p_int_n^{(k-1)}) \end{pmatrix}$$

```

k4 ← h * (j_valor)-1 * f_valor

(* Cálculo del siguiente punto *)
p1 ← p_aux +  $\frac{1}{6}$  (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4)

(* Cálculo de la norma de la distancia entre los dos puntos*)
error ← || p1 - p ||∞
p ← p1
End

Return (x(k) ≡ (p)T)
Output

```

8.3 Problemas

■ **Problema 33.** Sea el sistema no lineal de ecuaciones siguiente:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 1/2 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + (10\pi - 3)/3 = 0.$$

Mediante el método de *Continuación u Homotopía* calcúlese la aproximación de la solución, comenzando en el punto inicial

$$P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0, 0, 0)^T \text{ y realizando } n = 4 \text{ iteraciones.}$$

Solución

```

Clear[ecuaciones, p, m];
ecuaciones = {3 x1 - Cos[x2 * x3] - 1 / 2,
              x1^2 - 81 (x2 + 0.1)^2 + Sin[x3] + 1.06,
              Exp[-x1 * x2] + 20 x3 + (10 Pi - 3) / 3
              };
p = {{0.0}, {0.0}, {0.0}};
m = 4;
continuacionhomotopia[ecuaciones, p, m];

```

Método de *Continuacion Homotopia* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\cos(x_2 x_3) + 3x_1 - \frac{1}{2} \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 \\ 20x_3 + e^{-x_1 x_2} + \frac{1}{3}(-3 + 10\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3 & \sin(x_2 x_3) x_3 & \sin(x_2 x_3) x_2 \\ 2 x_1 & -162 (x_2 + 0.1) & \cos(x_3) \\ -e^{-x_1 x_2} x_2 & -e^{-x_1 x_2} x_1 & 20 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.12500000 \\ -0.0042222033 \\ -0.13089969 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 0.12499998 \\ -0.0033117620 \\ -0.13092324 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 0.12499998 \\ -0.0032962448 \\ -0.13092035 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.12499989 \\ -0.0023020676 \\ -0.13093470 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.12499997 \\ -0.0032900474 \\ -0.13092026 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.12499989 \\ -0.0023019179 \\ -0.13093466 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 0.12499976 \\ -0.0012303950 \\ -0.13093902 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 0.12499981 \\ -0.0012233159 \\ -0.13093560 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.12499976 \\ -0.000094776483 \\ -0.13092912 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.12499977 \\ -0.0045074001 \\ -0.26185576 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.12499976 \\ -0.000094768570 \\ -0.13092908 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 0.12499988 \\ 0.0010777262 \\ -0.13091134 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 0.12499993 \\ 0.0010713431 \\ -0.13090777 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.12500020 \\ 0.0022589181 \\ -0.13087879 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = P_2 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.37499970 \\ -0.0034303521 \\ -0.39276344 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.12500020 \\ 0.0022587863 \\ -0.13087875 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 0.12500045 \\ 0.0034455048 \\ -0.13083864 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 0.12500035 \\ 0.0034248117 \\ -0.13083540 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.12500000 \\ 0.0045827692 \\ -0.13078516 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = P_3 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 1.2668609 \times 10^{-8} \\ -0.52359878 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	

1	$\begin{pmatrix} 0.12499997 \\ -0.0032900474 \\ -0.13092026 \end{pmatrix}$	0.13092
2	$\begin{pmatrix} 0.24999977 \\ -0.0045074001 \\ -0.26185576 \end{pmatrix}$	0.130936
3	$\begin{pmatrix} 0.37499970 \\ -0.0034303521 \\ -0.39276344 \end{pmatrix}$	0.130908
4	$\begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 1.2668609 \times 10^{-8} \\ -0.52359878 \end{pmatrix}$	0.130835

La solución aproximada del sistema es:

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.50000000 \\ 1.2668609 \times 10^{-8} \\ -0.52359878 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 34.** Sea el sistema no lineal de ecuaciones siguiente:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 - 37 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2^2 - 5 = 0,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_3 + x_1 + x_2 - 3 = 0$$

Mediante el método de *Continuación u Homotopía* calcúlese la aproximación de la solución, comenzando en el punto inicial

$$P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0, 0, 0)^T \text{ y realizando } n = 2 \text{ iteraciones.}$$

Solución

```
Clear[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d, m];
ecuaciones = { x1^2 + x2 - 37, x1 - x2^2 - 5, x3 + x1 + x2 - 3 };
p = {{0.0}, {0.0}, {0.0}};
m = 2;
continuacionhomotopia[ecuaciones, p, m];
```


Método de *Continuacion Homotopia* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 - 37 \\ -x_2^2 + x_1 - 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 1 & -2x_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 2.5000000 \\ 18.500000 \\ -19.500000 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 7.2962963 \\ 0.25925926 \\ -6.0555556 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 2.5232448 \\ 0.089658444 \\ -1.1129032 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 3.0538605 \\ 3.0887248 \\ -4.6425853 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 4.1988238 \\ 3.7144267 \\ -6.4132505 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 2.2076836 \\ -0.039348791 \\ -0.66833481 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 1.7539258 \\ -0.10096403 \\ -0.15296178 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 1.8313659 \\ -0.091245116 \\ -0.24012077 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 1.5448774 \\ -0.13180717 \\ 0.086929793 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 6.0193478 \\ 3.6218310 \\ -6.6411788 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 4.1988238 \\ 3.7144267 \\ -6.4132505 \end{pmatrix}$	6.41325
2	$\begin{pmatrix} 6.0193478 \\ 3.6218310 \\ -6.6411788 \end{pmatrix}$	1.82052

La solución aproximada del sistema es:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 6.0193478 \\ 3.6218310 \\ -6.6411788 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 35.** Sea el sistema no lineal de ecuaciones siguiente:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2^2 - 6 = 0,$$

Mediante el método de *Continuación u Homotopía* calcúlese la aproximación de la solución, comenzando en el punto inicial:

a) $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (0, 0)^T$

b) $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (1, 1)^T$

c) $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (3, -2)^T$

y realizando $n = 8$ iteraciones.

Solución

a)

```
Clear[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d, m];
ecuaciones = { x1^2 - x2^2 + 2 x2, 2 x1 - x2^2 - 6 };
p = {{0.0}, {0.0}};
m = 8;
continuacionhomotopia[ecuaciones, p, m];
```

Método de *Continuacion Homotopia* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 + 2 x_2 \\ -x_2^2 + 2 x_1 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 x_1 & 2 - 2 x_2 \\ 2 & -2 x_2 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.37500000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 0.37500000 \\ -0.070312500 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 0.37740328 \\ -0.068359839 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.38427976 \\ -0.13574868 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.37734772 \\ -0.068848893 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.38434201 \\ -0.13568857 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 0.40257111 \\ -0.20170068 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 0.40936530 \\ -0.20250708 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.45067492 \\ -0.27887691 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.78716267 \\ -0.27267906 \end{pmatrix}$$

....

....

Nota: Se han eliminado varias iteraciones. En la tabla final se pueden ver los resultados

Iteración $i = 7$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.20337776 \\ 0.20330965 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.21524648 \\ 0.21517049 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.21598197 \\ 0.21590537 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.23035551 \\ 0.23026892 \end{pmatrix}$$

$$P_7 = P_6 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 3.6274929 \\ -2.6288570 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 8$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.23036255 \\ 0.23027595 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.24789911 \\ 0.24779981 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.24934395 \\ 0.24924337 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.27201858 \\ 0.27190068 \end{pmatrix}$$

$$P_8 = P_7 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 3.3780150 \\ -2.3794798 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	

1	$\begin{pmatrix} 0.37734772 \\ -0.068848893 \end{pmatrix}$	0.377348
2	$\begin{pmatrix} 0.78716267 \\ -0.27267906 \end{pmatrix}$	0.409815
3	$\begin{pmatrix} 1.3648261 \\ -0.69203276 \end{pmatrix}$	0.577663
4	$\begin{pmatrix} 2.9002566 \\ -2.0132693 \end{pmatrix}$	1.53543
5	$\begin{pmatrix} 2.3338425 \\ -1.4729057 \end{pmatrix}$	0.566414
6	$\begin{pmatrix} 3.8435246 \\ -2.8448121 \end{pmatrix}$	1.50968
7	$\begin{pmatrix} 3.6274929 \\ -2.6288570 \end{pmatrix}$	0.216032
8	$\begin{pmatrix} 3.3780150 \\ -2.3794798 \end{pmatrix}$	0.249478

La solución aproximada del sistema es:

$$P_8 = \begin{pmatrix} 3.3780150 \\ -2.3794798 \end{pmatrix}$$

Solución

b)

```
Clear[ecuaciones, ecuacionestrans, p, d, m];
ecuaciones = { x1^2 - x2^2 + 2 x2, 2 x1 - x2^2 - 6 };
p = {{1.0}, {1.0}};
m = 8;
continuacionhomotopia[ecuaciones, p, m];
```

Método de *Continuacion Homotopia* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 + 2 x_2 \\ -x_2^2 + 2 x_1 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 1. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 x_1 & 2 - 2 x_2 \\ 2 & -2 x_2 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.12500000 \\ -0.43750000 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.030800821 \\ -0.43942505 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.029226983 \\ -0.43795011 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.067715537 \\ -0.43552088 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.97044332 \\ 0.56203813 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.067733504 \\ -0.43549802 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 0.16163366 \\ -0.43819665 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 0.15965720 \\ -0.44568405 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.25769419 \\ -0.47102615 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 1.1317782 \\ 0.11632387 \end{pmatrix}$$

....

....

Nota: Se han eliminado varias iteraciones. En la tabla final se pueden ver los resultados

Iteración $i = 7$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.41362262 \\ 0.36106659 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.51650642 \\ 0.45288133 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.55087494 \\ 0.48378958 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.88564861 \\ 0.78450886 \end{pmatrix}$$

$$P_7 = P_6 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 2.3583257 \\ -1.5078962 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 8$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.92748662 \\ 0.82232890 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 41.959215 \\ -37.973475 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.020312488 \\ 0.016239007 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.96911505 \\ 0.85918874 \end{pmatrix}$$

$$P_8 = P_7 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 16.021860 \\ -13.880055 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 1.0000000 \\ 1.0000000 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 0.97044332 \\ 0.56203813 \end{pmatrix}$	0.437962
2	$\begin{pmatrix} 1.1317782 \\ 0.11632387 \end{pmatrix}$	0.445714
3	$\begin{pmatrix} 1.5441207 \\ -0.46093098 \end{pmatrix}$	0.577255
4	$\begin{pmatrix} 2.5882426 \\ -1.5929921 \end{pmatrix}$	1.13206
5	$\begin{pmatrix} 3.2842844 \\ -2.3187540 \end{pmatrix}$	0.725762
6	$\begin{pmatrix} 2.9306647 \\ -2.0110491 \end{pmatrix}$	0.35362
7	$\begin{pmatrix} 2.3583257 \\ -1.5078962 \end{pmatrix}$	0.572339
8	$\begin{pmatrix} 16.021860 \\ -13.880055 \end{pmatrix}$	13.6635

La solución aproximada del sistema es:

$$P_8 = \begin{pmatrix} 16.021860 \\ -13.880055 \end{pmatrix}$$

Solución

c)

```
Clear[ecuaciones, p, d, m];
ecuaciones = { x1^2 - x2^2 + 2 x2, 2 x1 - x2^2 - 6 };
p = {{3.0}, {-2.0}};
m = 8;
continuationhomotopia[ecuaciones, p, m];
```

Método de *Continuacion Homotopia* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 + 2 x_2 \\ -x_2^2 + 2 x_1 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3. \\ -2. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 x_1 & 2 - 2 x_2 \\ 2 & -2 x_2 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.29166667 \\ 0.27083333 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.33886779 \\ 0.31581736 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.34807302 \\ 0.32467067 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.43764125 \\ 0.41045139 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 2.6494684 \\ -1.6729565 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.43921783 \\ 0.41197593 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.64545752 \\ 0.61041357 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.83155172 \\ 0.79075263 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 1.8880415 \\ -1.8567607 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 2.3986026 \\ -1.4466986 \end{pmatrix}$$

....

.....

Nota: Se han eliminado varias iteraciones. En la tabla final se pueden ver los resultados

Iteración $i = 7$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.045269325 \\ -0.036327495 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 0.045423087 \\ -0.036417585 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 0.045423629 \\ -0.036417780 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.045579030 \\ -0.036508458 \end{pmatrix}$$

$$P_7 = P_6 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} -5.0552307 \\ 5.5992770 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 8$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.045579030 \\ -0.036508458 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 0.045736090 \\ -0.036599727 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} 0.045736652 \\ -0.036599926 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 0.045895413 \\ -0.036691792 \end{pmatrix}$$

$$P_8 = P_7 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} -5.0094940 \\ 5.5626771 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 3.0000000 \\ -2.0000000 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 2.6494684 \\ -1.6729565 \end{pmatrix}$	0.350532
2	$\begin{pmatrix} 2.3986026 \\ -1.4466986 \end{pmatrix}$	0.250866
3	$\begin{pmatrix} 1.2050556 \\ -0.32396323 \end{pmatrix}$	1.19355

4	$\begin{pmatrix} 1.9623856 \\ -1.0674512 \end{pmatrix}$	0.75733
5	$\begin{pmatrix} -5.1457715 \\ 5.6719328 \end{pmatrix}$	7.10816
6	$\begin{pmatrix} -5.1006543 \\ 5.6356948 \end{pmatrix}$	0.0451172
7	$\begin{pmatrix} -5.0552307 \\ 5.5992770 \end{pmatrix}$	0.0454236
8	$\begin{pmatrix} -5.0094940 \\ 5.5626771 \end{pmatrix}$	0.0457367

La solución aproximada del sistema es:

$$P_8 = \begin{pmatrix} -5.0094940 \\ 5.5626771 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 36.** Sea el sistema no lineal de ecuaciones siguiente:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 1/2 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{(-x_1 x_2)} + 20x_3 + (10\pi - 3)/3 = 0.$$

Aplíquese el método de *Continuación u Homotopía* con la aproximación inicial $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (1, 1, 1)^T$ y aplicando el método con $n = 4$ iteraciones.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, d];
ecuaciones = { 3 x1 - Cos[x2 * x3] - 1 / 2,
  4 x1^2 - 625 x2^2 + 2 x2 - 1, Exp[-x1 * x2] + 20 x3 + (10 Pi - 3) / 3 };
p = {{1.0}, {1.0}, {1.0}};
m = 4;
continuacionhomotopia[ecuaciones, p, m];
```

Método de *Continuacion Homotopia* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\cos(x_2 x_3) + 3x_1 - \frac{1}{2} \\ 4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 \\ 20x_3 + e^{-x_1 x_2} + \frac{1}{3}(-3 + 10\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 1. \\ 1. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3 & \sin(x_2 x_3) x_3 & \sin(x_2 x_3) x_2 \\ 8 x_1 & 2 - 1250 x_2 & 0 \\ -e^{-x_1 x_2} x_2 & -e^{-x_1 x_2} x_1 & 20 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.023047325 \\ -0.12434646 \\ -0.37570934 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.057232431 \\ -0.13283327 \\ -0.37665824 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.057923995 \\ -0.13343597 \\ -0.37670686 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.091811028 \\ -0.14399854 \\ -0.37775486 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.94247147 \\ 0.86651942 \\ 0.62330093 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.091815412 \\ -0.14400626 \\ -0.37775484 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.12165758 \\ -0.15726512 \\ -0.37882670 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.12226079 \\ -0.15858062 \\ -0.37889289 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.14539514 \\ -0.17663369 \\ -0.37993097 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.82163025 \\ 0.70779751 \\ 0.24444677 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.14539799 \\ -0.17667092 \\ -0.37993216 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.16053067 \\ -0.20193739 \\ -0.38087962 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.16066141 \\ -0.20614071 \\ -0.38097967 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.16690218 \\ -0.24938372 \\ -0.38191896 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = P_2 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.66251619 \\ 0.50076238 \\ -0.13648152 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.16688575 \\ -0.24983376 \\ -0.38193621 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.16474080 \\ -0.33296470 \\ -0.38324352 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.16351017 \\ -0.37455541 \\ -0.38419885 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.15301950 \\ -0.99905078 \\ -0.39731006 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = P_3 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.49978166 \\ 0.056774915 \\ -0.52217002 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 1.0000000 \\ 1.0000000 \\ 1.0000000 \end{pmatrix}$	

$$\begin{array}{l} 1 \begin{pmatrix} 0.94247147 \\ 0.86651942 \\ 0.62330093 \end{pmatrix} \quad 0.376699 \\ 2 \begin{pmatrix} 0.82163025 \\ 0.70779751 \\ 0.24444677 \end{pmatrix} \quad 0.378854 \\ 3 \begin{pmatrix} 0.66251619 \\ 0.50076238 \\ -0.13648152 \end{pmatrix} \quad 0.380928 \\ 4 \begin{pmatrix} 0.49978166 \\ 0.056774915 \\ -0.52217002 \end{pmatrix} \quad 0.443987 \end{array}$$

La solución aproximada del sistema es:

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.49978166 \\ 0.056774915 \\ -0.52217002 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 37.** Sea el sistema no lineal de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 4x_1^2 - 20x_1 + 1/4x_2^2 + 8 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) &= 1/2x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0. \end{aligned}$$

Aplíquese el método de *Continuación u Homotopía* con la aproximación inicial $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (1, 0)^T$ y aplicando el método con $n = 6$ iteraciones.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, d];
ecuaciones = { 4 x1^2 - 20 x1 + 1 / 4 x2^2 + 8, 1 / 2 x1 x2^2 + 2 x1 - 5 x2 + 8 };
p = {{1.0}, {0.0}};
m = 6;
continuacionhomotopia[ecuaciones, p, m];
```

Método de *Continuacion Homotopia* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^2 - 20x_1 + \frac{x_2^2}{4} + 8 \\ \frac{1}{2}x_1x_2^2 - 5x_2 + 2x_1 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8x_1 - 20 & \frac{x_2}{2} \\ \frac{x_2^2}{2} + 2 & x_1 x_2 - 5 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.11111111 \\ 0.28888889 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.10540694 \\ 0.29911158 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.10553749 \\ 0.29936470 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.10020766 \\ 0.30889480 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.89446539 \\ 0.29912271 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.10021091 \\ 0.30888086 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.095227914 \\ 0.31761021 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.095314666 \\ 0.31786191 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.090604488 \\ 0.32576730 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.79914863 \\ 0.61672144 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.090607837 \\ 0.32575365 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.086162938 \\ 0.33274159 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.086224208 \\ 0.33298636 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.082000914 \\ 0.33904890 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = P_2 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.71291813 \\ 0.94943118 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.082004333 \\ 0.33903601 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.078006147 \\ 0.34410677 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.078052511 \\ 0.34434574 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.074252618 \\ 0.34844406 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = P_3 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.63485575 \\ 1.2934954 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 5$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.074256025 \\ 0.34843225 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.070663231 \\ 0.35152371 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.070700697 \\ 0.35176085 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.067296876 \\ 0.35389356 \end{pmatrix}$$

$$P_5 = P_4 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.56414229 \\ 1.6449778 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 6$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.067300177 \\ 0.35388294 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.064095682 \\ 0.35505169 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.064127458 \\ 0.35529045 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.061107990 \\ 0.35556504 \end{pmatrix}$$

$$P_6 = P_5 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} 0.49999988 \\ 1.9999999 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 1.0000000 \\ 0 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 0.89446539 \\ 0.29912271 \end{pmatrix}$	0.299123

2	$\begin{pmatrix} 0.79914863 \\ 0.61672144 \end{pmatrix}$	0.317599
3	$\begin{pmatrix} 0.71291813 \\ 0.94943118 \end{pmatrix}$	0.33271
4	$\begin{pmatrix} 0.63485575 \\ 1.2934954 \end{pmatrix}$	0.344064
5	$\begin{pmatrix} 0.56414229 \\ 1.6449778 \end{pmatrix}$	0.351482
6	$\begin{pmatrix} 0.49999988 \\ 1.9999999 \end{pmatrix}$	0.355022

La solución aproximada del sistema es:

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0.49999988 \\ 1.9999999 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 38.** Sea el sistema de ecuaciones no lineales siguiente.

$$f_1(x_1, x_2) = \sin(4\pi x_1 x_2) - 2x_2 - x_1 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2) = ((4\pi - 1)/(4\pi))(e^{2x_1} - e) + 4e x_2^2 - 2e x_1 = 0.$$

Aplíquese el método de *la Continuación u Homotopía* iniciando el método en el punto inicial $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T = (0, 0)^T$ realizando 4 iteraciones.

Solución

```
Clear[ecuaciones, p, m, d];
ecuaciones = {
  Sin[4 * Pi * x1 * x2] - 2 x2 - x1,
  ((4 Pi - 1) / (4 Pi)) (Exp[2 x1] - E) + 4 E (x2)^2 - 2 E * x1};
p = {{0.0}, {0.0}};
m = 4;
continuacionhomotopia[ecuaciones, p, m];
```

Método de *Continuación Homotopía* para sistemas de ecuaciones no lineales.

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin(4\pi x_1 x_2) - x_1 - 2x_2 \\ 4e x_2^2 - 2e x_1 + \frac{(-e + e^{2x_1})(-1 + 4\pi)}{4\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4\pi \cos(4\pi x_1 x_2) x_2 - 1 & 4\pi \cos(4\pi x_1 x_2) x_1 - 2 \\ -2e + \frac{e^{2x_1}(-1 + 4\pi)}{2\pi} & 8e x_2 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 1$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.10996031 \\ 0.054980154 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.10053454 \\ 0.024458033 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.10250307 \\ 0.032964556 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.097271662 \\ 0.017345574 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} -0.10221787 \\ 0.031195151 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 2$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.097343701 \\ 0.018034131 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.094437044 \\ 0.012042947 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.094527591 \\ 0.013019181 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.092140623 \\ 0.0092541796 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} -0.19678680 \\ 0.044097246 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 3$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.092137501 \\ 0.0092825391 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.090121763 \\ 0.0070812789 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.090147096 \\ 0.0073385003 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.088391533 \\ 0.0058151466 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = P_2 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} -0.28696459 \\ 0.051420120 \end{pmatrix}$$

Iteración $i = 4$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.088390071 \\ 0.0058176348 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.086848148 \\ 0.0047996081 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.086864795 \\ 0.0048898916 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.085500431 \\ 0.0041479274 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = P_3 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} -0.37385066 \\ 0.056310880 \end{pmatrix}$$

Tabla de datos.

i	P_i	$\ P_i - P_{i-1}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} -0.10221787 \\ 0.031195151 \end{pmatrix}$	0.102218
2	$\begin{pmatrix} -0.19678680 \\ 0.044097246 \end{pmatrix}$	0.0945689
3	$\begin{pmatrix} -0.28696459 \\ 0.051420120 \end{pmatrix}$	0.0901778
4	$\begin{pmatrix} -0.37385066 \\ 0.056310880 \end{pmatrix}$	0.0868861

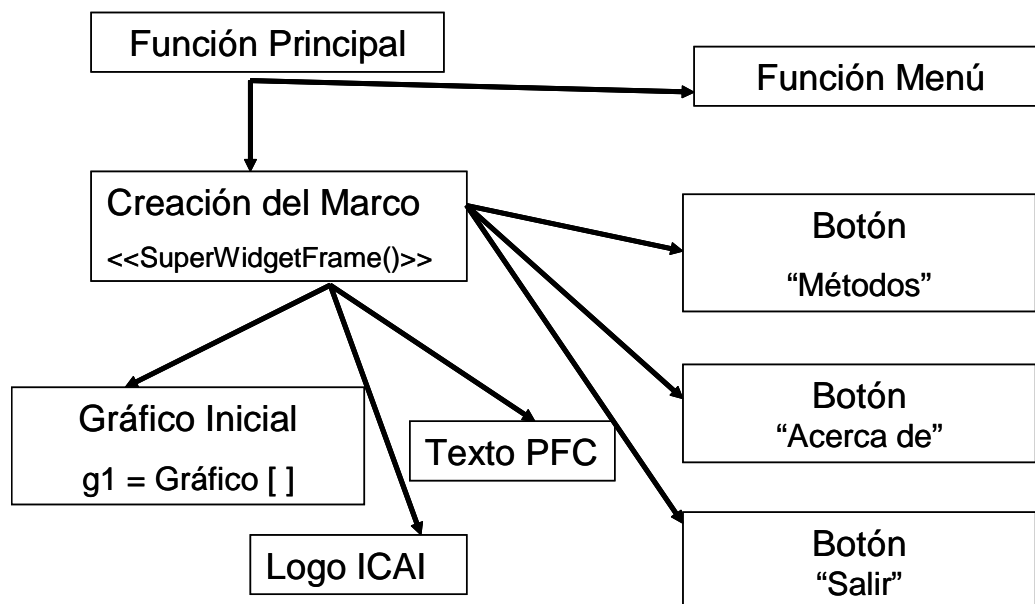
La solución aproximada del sistema es:

$$P_4 = \begin{pmatrix} -0.37385066 \\ 0.056310880 \end{pmatrix}$$

9. Interfaz de Usuario

9.1 Ventana inicial

La ventana inicial del programa realiza la creación del marco inicial donde se van a alojar los botones, el gráfico, logo y los menús de ventana con los respectivos textos relativos al nombre de aplicación y botón.



Creación de la ventana inicial de la aplicación.

Figura 3

Para el correcto funcionamiento de la aplicación es necesario incluir el paquete *SuperWidgetPackage* que da soporte a las ventanas y marcos utilizados.

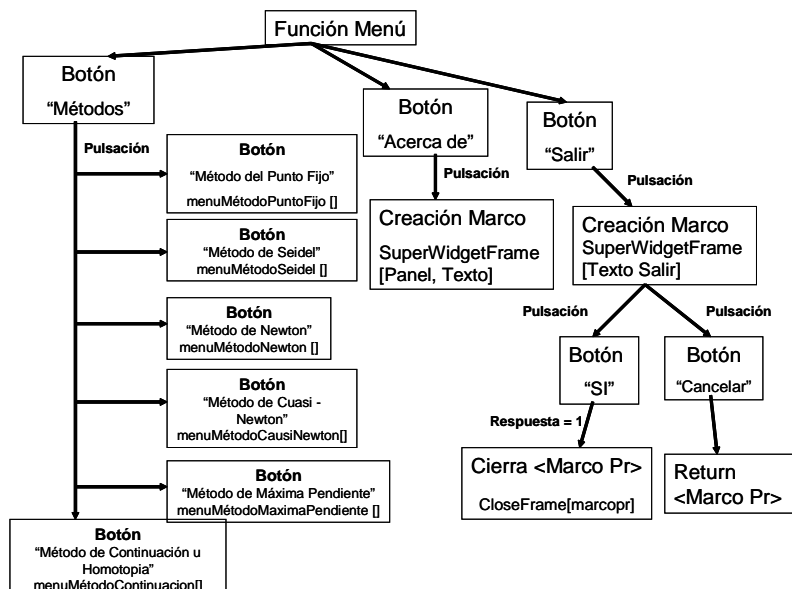
La pantalla inicial se presenta a continuación:



Pantalla inicial de la aplicación.

Figura 4

En el menú que se presenta se pueden pulsar tres botones; "Métodos", "Acerca de" y "Salir" que están incluidos en la función Menú. Si se pulsa en cada uno de ellos se desplegarán las opciones que cada uno tiene. Las opciones se muestran en el diagrama siguiente:



Creación del menú desplegable.

Figura 5

En cuanto al botón "Acerca de" crea un marco en el que se crea un panel con el texto relativo al proyecto, aparecen la Universidad, Especialidad, tipo de trabajo, autor y director del mismo.

El botón Salir da a elegir mostrando dos botones. Con el botón "Sí" se cierra el marco principal y se para la ejecución del programa. Con el boton "Cancelar" regresamos al marco principal.

Las ventanas resultantes se muestran a continuación:



Figura 6

Ventanas Acerca de.



Ventana Salir de la aplicación.

Figura 7

Por último, el botón "Métodos" al ser pulsado despliega varias opciones de ejecución, de las que podemos seleccionar una cada vez.

Los métodos que pueden usarse en esta aplicación se muestran en detalle a continuación:



Opciones de los Métodos de resolución.

Figura 8

Los métodos son:

- Método del *Punto Fijo*.
- Método de *Seidel*.
- Método de *Newton*.
- Método de *Cuasi - Newton*
- Método de la *Máxima Pendiente*
- Método de *Continuación* u *Homotopía*.

9.2 Ventana Método del Punto Fijo

Al pulsar el botón "Método del Punto Fijo" se llama a la función `menuMétodoPuntoFijo()` que inicializa las variables globales con la función `inicializar()` y a continuación crea el marco respectivo del método.

Dentro del marco se tienen varios elementos que lo constituyen. Primero el texto que indica el formato de los datos que debe introducir el usuario. En segundo lugar, una serie de cajas de captura de datos, según el tipo. En este caso, "*Ecuaciones*" tipo texto, en esta caja se deben introducir las ecuaciones que forman el sistema a resolver, "*Ecuaciones transformadas*" de tipo texto, y en ella se deben introducir las ecuaciones transformadas para que puedan ser utilizadas por el método, "*Punto Inicial*" de tipo texto, es el punto inicial a partir del cual se va a comenzar a iterar, "*Error*" de tipo real, en esta caja se debe introducir el error mínimo que se quiere alcanzar para obtener la solución aproximada. En tercer lugar, se crean dos botones, uno es el botón "Cancelar" que si es pulsado devuelve a la ventana inicial del programa y el otro que es el botón "Realizar". Al ser pulsado por el usuario el programa recoge los datos introducidos en las cajas de parámetros (el usuario previamente los ha debido introducir) y se envían a la función del método del Punto Fijo, para que los datos introducidos por el usuario puedan ser utilizados por esta función es necesario realizar una transformación de los datos de entrada al tipo de datos que son admitidos por la función. Todo esto se realiza a la vez que se llama a la función `PuntoFijo()`. Por último, aparece el texto que indica que se va a mostrar la solución del sistema de ecuaciones no lineales y una caja de texto en la que una vez que se ha calculado la solución se muestran los resultados.

Con la función `PuntoFijo()` se calcula la solución aproximada del sistema de

ecuaciones no lineales introducido por el usuario. Del mismo modo esta función devuelve al marco los elementos resultantes de dicha llamada, r que contiene el valor de la aproximación a la solución.

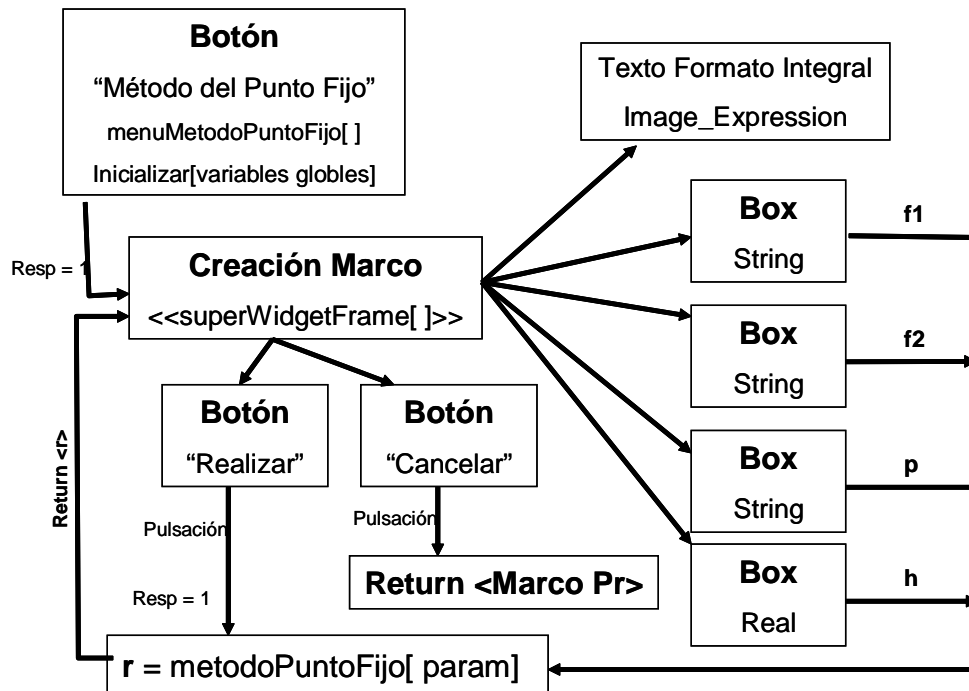


Diagrama con el método Punto Fijo.

Figura 9

Las ventanas se muestra a continuación. Se puede ver que el evento que se produce al pulsar el botón "Realizar" lanza la llamada a la función imprimiendo los resultados.





Ventanas para calcular la solución del sistema con el Método del Punto Fijo.

Figura 10

9.3 Ventana Método de Seidel

Al pulsar el botón "Método de Seidel" se llama a la función `menuMétodoSeidel()` que inicializa las variables globales con la función `inicializar()` y a continuación crea el marco respectivo del método.

Dentro del marco se tienen varios elementos que lo constituyen. Primero el texto que indica el formato de los datos que debe introducir el usuario. En segundo lugar, una serie de cajas de captura de datos, según el tipo. En este caso, "*Ecuaciones*" tipo texto, en esta caja se deben introducir las ecuaciones que forman el sistema a resolver, "*Ecuaciones transformadas*" de tipo texto, y en ella se deben introducir las ecuaciones transformadas para que puedan ser utilizadas por el método, "*Punto Inicial*" de tipo texto, es el punto inicial a partir del cual se va a comenzar a iterar, "*Error*" de tipo real, en esta caja se debe introducir el error mínimo que se quiere alcanzar para obtener la solución aproximada. En tercer lugar, se crean dos botones, uno es el botón "Cancelar" que si es pulsado devuelve a la ventana inicial del programa y el otro que es el botón "Realizar". Al ser pulsado por el usuario el

programa recoge los datos introducidos en las cajas de parámetros (el usuario previamente los ha debido introducir) y se envían a la función del método de Seidel, para que los datos introducidos por el usuario puedan ser utilizados por esta función es necesario realizar una transformación de los datos de entrada al tipo de datos que son admitidos por la función. Todo esto se realiza a la vez que se llama a la función Seidel(). Por último, aparece el texto que indica que se va a mostrar la solución del sistema de ecuaciones no lineales y una caja de texto en la que una vez que se ha calculado la solución se muestran los resultados.

Con la función Seidel() se calcula la solución aproximada del sistema de ecuaciones no lineales introducido por el usuario. Del mismo modo esta función devuelve al marco los elementos resultantes de dicha llamada, r que contiene el valor de la aproximación a la solución.

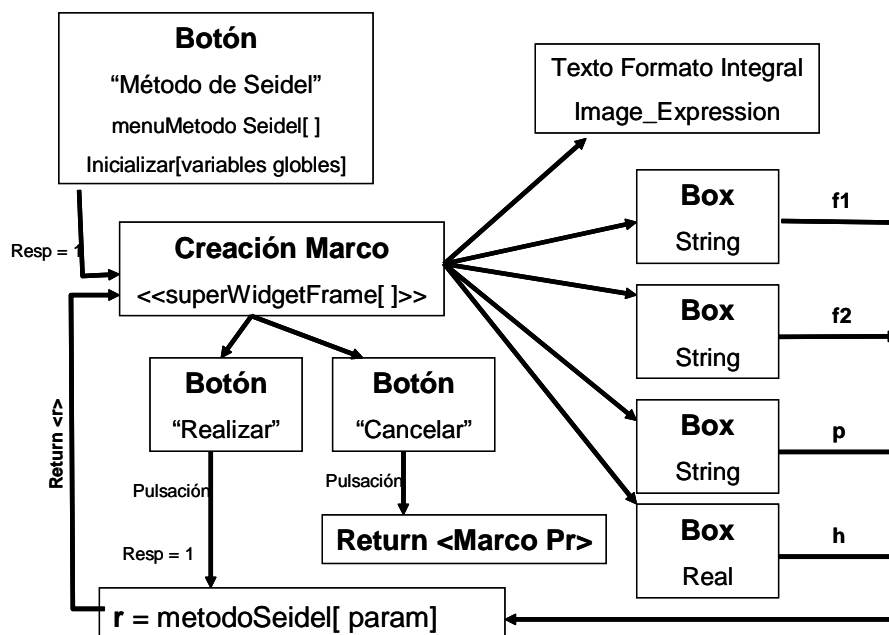
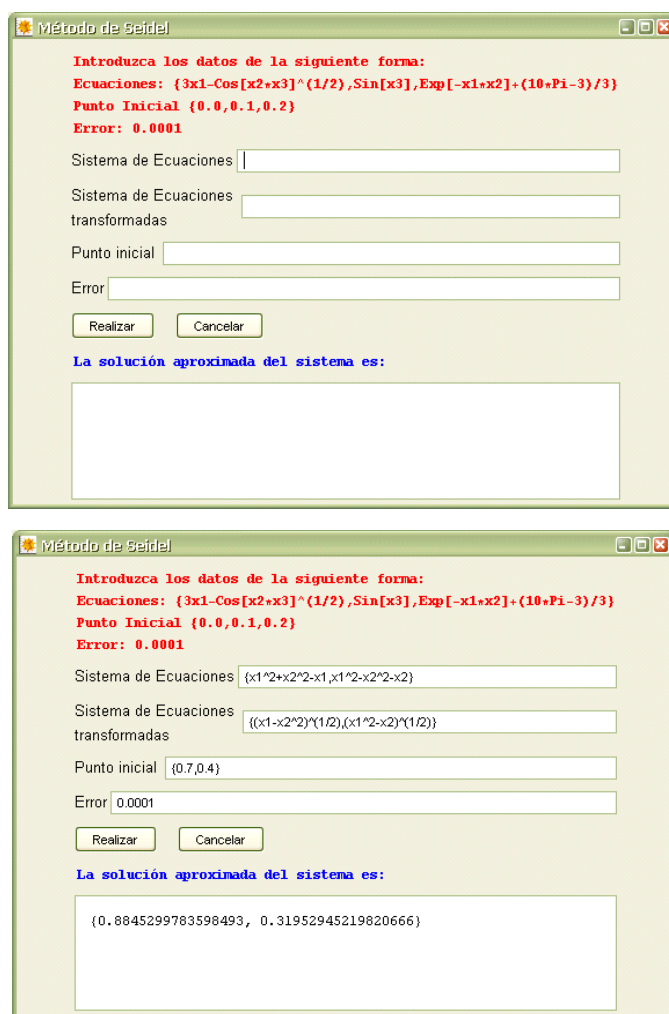


Diagrama con el método de Seidel.

Figura 11

Las ventanas se muestra a continuación. Se puede ver que el evento que se produce al pulsar el botón "Realizar" lanza la llamada a la función imprimiendo los resultados.



Ventanas para calcular la solución del sistema con el Método de Seidel.

Figura 12

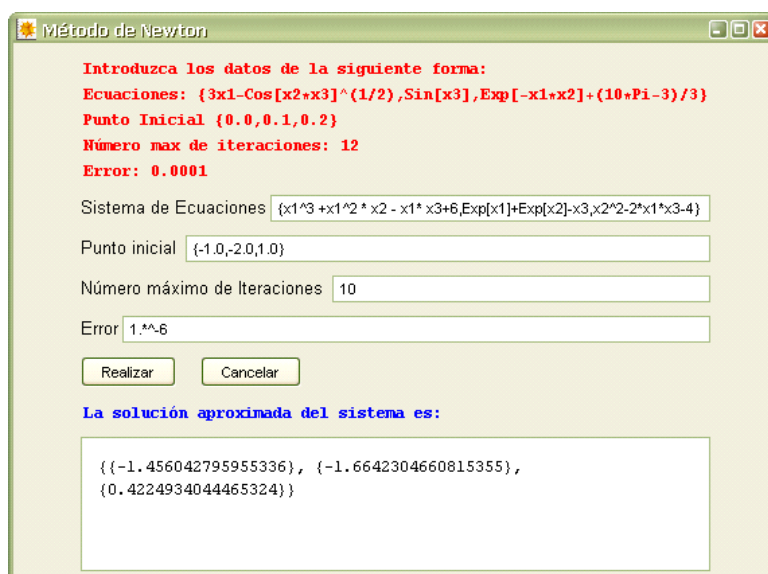
9.4 Ventana Método de Newton

Al pulsar el botón "Método de Newton" se llama a la función `menuMétodoNewton()` que inicializa las variables globales con la función `inicializar()` y a continuación crea el marco respectivo del método.

Dentro del marco se tienen varios elementos que lo constituyen. Primero, el texto que indica el formato de los datos que debe introducir el usuario. En segundo lugar, una serie de cajas de captura de datos, según el tipo. En este caso, "Ecuaciones" tipo texto, en

esta caja se deben introducir las ecuaciones que forman el sistema a resolver, "*Punto Inicial*" de tipo texto, es el punto inicial a partir del cual se va a comenzar a iterar, "*Número Máximo Interacciones*" de tipo texto y en la que se debe introducir el número máximo de iteraciones que se quieren realizar, "*Error*" de tipo real, en esta caja se debe introducir el error mínimo que se quiere alcanzar para obtener la solución aproximada. En tercer lugar, se crean dos botones, uno es el botón "Cancelar" que si es pulsado devuelve a la ventana inicial del programa y el otro que es el botón "Realizar". Al ser pulsado por el usuario el programa recoge los datos introducidos en las cajas de parámetros (el usuario previamente los ha debido introducir) y se envían a la función del método de Newton, para que los datos introducidos por el usuario puedan ser utilizados por esta función es necesario realizar una transformación de los datos de entrada al tipo de datos que son admitidos por la función. Todo esto se realiza a la vez que se llama a la función `Newton()`. Por último, aparece el texto que indica que se va a mostrar la solución del sistema de ecuaciones no lineales y una caja de texto en la que una vez que se ha calculado la solución se muestran los resultados.

Con la función `Newton()` se calcula la solución aproximada del sistema de ecuaciones no lineales introducido por el usuario. Del mismo modo esta función devuelve al usuario los elementos resultantes de dicha llamada, r que contiene el valor de la aproximación a la solución.



Ventanas para calcular la solución del sistema con el Método de Newton.

Figura 14

9.5 Ventana Método de Cuasi - Newton

Al pulsar el botón "Método de Cuasi - Newton" se llama a la función `menuMétodoCuasiNewton()` que inicializa las variables globales con la función `inicializar()` y a continuación crea el marco respectivo del método.

Dentro del marco se tienen varios elementos que lo constituyen. Primero, el texto que indica el formato de los datos que debe introducir el usuario. En segundo lugar, una serie de cajas de captura de datos, según el tipo. En este caso, "*Ecuaciones*" tipo texto, en esta caja se deben introducir las ecuaciones que forman el sistema a resolver, "*Punto Inicial*" de tipo texto, es el punto inicial a partir del cual se va a comenzar a iterar, "*Número Máximo de Iteraciones*" de tipo texto, y en ella se debe introducir el número máximo de iteraciones que se desea que realice el método, "*Error*" de tipo real, en esta caja se debe introducir el error mínimo que se quiere alcanzar para obtener la solución aproximada. En tercer lugar, se crean dos botones, uno es el botón "Cancelar" que si es pulsado devuelve

a la ventana inicial del programa y el otro que es el botón "Realizar". Al ser pulsado por el usuario el programa recoge los datos introducidos en las cajas de parámetros (el usuario previamente los ha debido introducir) y se envían a la función del método de Cuasi - Newton, para que los datos introducidos por el usuario puedan ser utilizados por esta función es necesario realizar una transformación de los datos de entrada al tipo de datos que son admitidos por la función. Todo esto se realiza a la vez que se llama a la función Cuasi - Newton(). Por último, aparece el texto que indica que se va a mostrar la solución del sistema de ecuaciones no lineales y una caja de texto en la que una vez que se ha calculado la solución se muestran los resultados.

Con la función CausiNewton() se calcula la solución aproximada del sistema de ecuaciones no lineales introducido por el usuario. Del mismo modo esta función devuelve al marco los elementos resultantes de dicha llamada, r que contiene el valor de la aproximación a la solución.

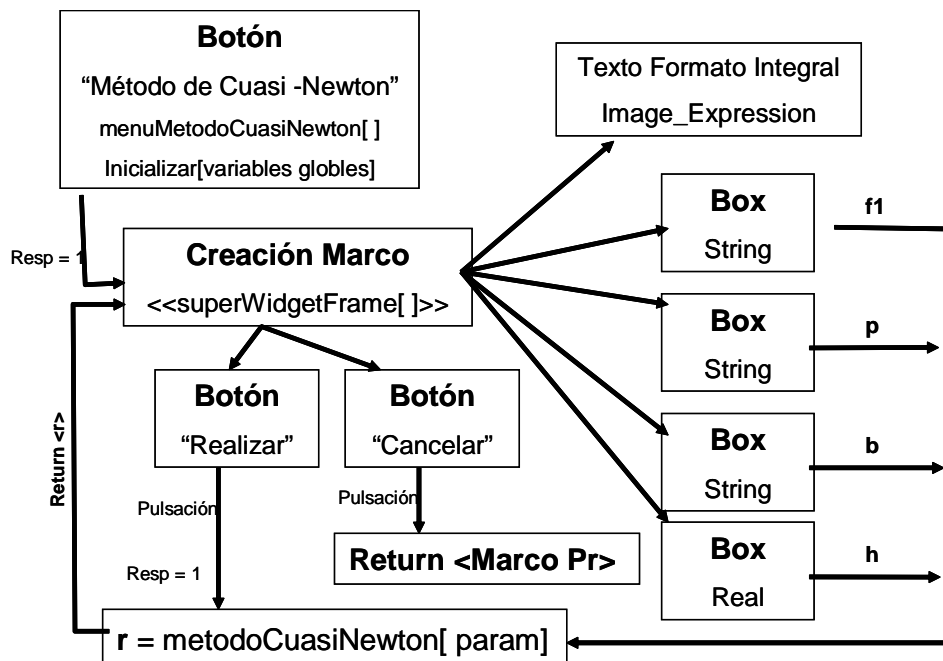


Diagrama con el método de Cuasi – Newton.

Figura 15

Las ventanas se muestra a continuación. Se puede ver que el evento que se produce al pulsar el botón "Realizar" lanza la llamada a la función imprimiendo los resultados.

Método de Cuasi - Newton

Introduzca los datos de la siguiente forma:
Ecuaciones: {3x1-Cos[x2*x3]^(1/2),Sin[x3],Exp[-x1*x2]+(10*Pi-3)/3}
Punto Inicial {0.0,0.1,0.2}
Número max iteraciones: 12
Error: 0.0001

Sistema de Ecuaciones

Punto inicial

Número máximo de Iteraciones

Error

La solución aproximada del sistema es:

Método de Cuasi - Newton

Introduzca los datos de la siguiente forma:
Ecuaciones: {3x1-Cos[x2*x3]^(1/2),Sin[x3],Exp[-x1*x2]+(10*Pi-3)/3}
Punto Inicial {0.0,0.1,0.2}
Número max iteraciones: 12
Error: 0.0001

Sistema de Ecuaciones

Punto inicial

Número máximo de Iteraciones

Error

La solución aproximada del sistema es:

Ventanas para calcular la solución del sistema con el Método de Cuasi – Newton.

Figura 16

9.6 Ventana Método de la Máxima Pendiente

Al pulsar el botón "Método de la Máxima Pendiente" se llama a la función `menuMétodoMaximaPendiente()` que inicializa las variables globales con la función `inicializar()` y a continuación crea el marco respectivo del método.

Dentro del marco se tienen varios elementos que lo constituyen. Primero, el texto que indica el formato de los datos que debe introducir el usuario. En segundo lugar, una serie de cajas de captura de datos, según el tipo. En este caso, *"Ecuaciones"* tipo texto, en esta caja se deben introducir las ecuaciones que forman el sistema a resolver, *"Punto Inicial"* de tipo texto, es el punto inicial a partir del cual se va a comenzar a iterar, *"Número Máximo de Iteraciones"* de tipo texto, y en ella se debe introducir el número máximo de iteraciones que se desea que realice el método, *"Error"* de tipo real, en esta caja se debe introducir el error mínimo que se quiere alcanzar para obtener la solución aproximada. En tercer lugar, se crean dos botones, uno es el botón "Cancelar" que si es pulsado devuelve a la ventana inicial del programa y el otro que es el botón "Realizar". Al ser pulsado por el usuario el programa recoge los datos introducidos en las cajas de parámetros (el usuario previamente los ha debido introducir) y se envían a la función del método de la Máxima Pendiente, para que los datos introducidos por el usuario puedan ser utilizados por esta función es necesario realizar una transformación de los datos de entrada al tipo de datos que son admitidos por la función. Todo esto se realiza a la vez que se llama a la función `MaximaPendiente()`. Por último, aparece el texto que indica que se va a mostrar la solución del sistema de ecuaciones no lineales y una caja de texto en la que una vez que se ha calculado la solución se muestran los resultados.

Con la función `MaximaPendiente()` se calcula la solución aproximada del sistema de ecuaciones no lineales introducido por el usuario. Del mismo modo esta función devuelve al marco los elementos resultantes de dicha llamada, *r* que contiene el valor de la aproximación a la solución.

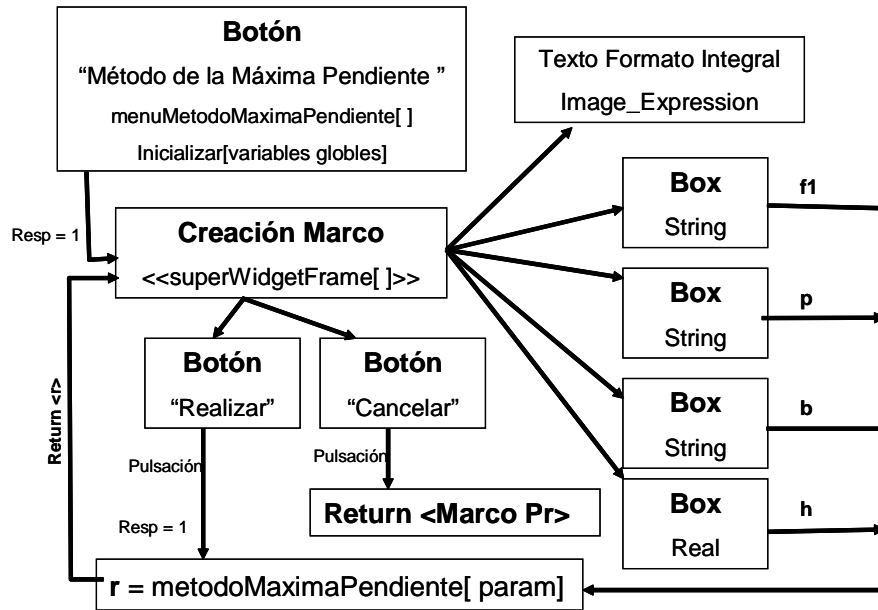
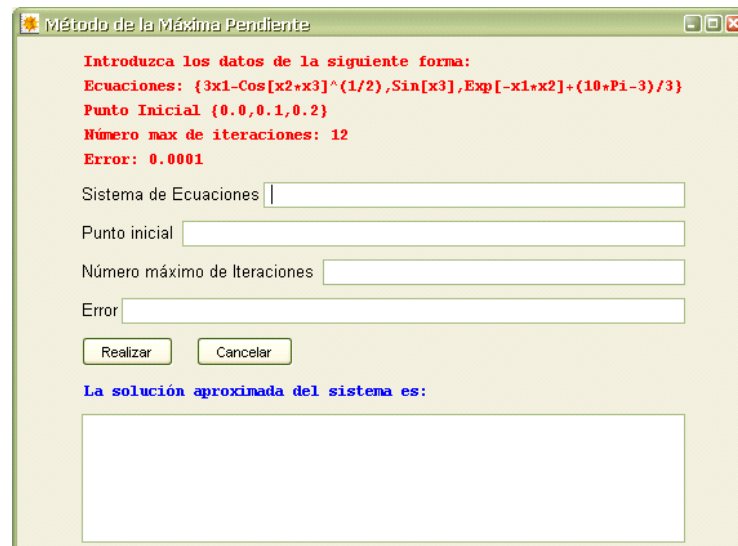
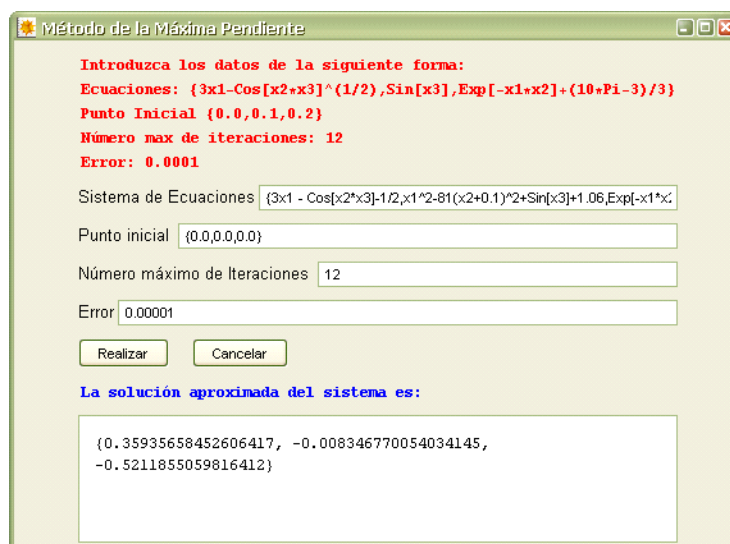


Diagrama con el método de la Máxima Pendiente.

Figura 17

Las ventanas se muestra a continuación. Se puede ver que el evento que se produce al pulsar el botón "Realizar" lanza la llamada a la función imprimiendo los resultados.





Ventanas para calcular la solución del sistema con el Método de la Máxima Pendiente.

Figura 18

9.7 Ventana Método de Continuación u Homotopía

Al pulsar el botón "Método de Continuación u Homotopía" se llama a la función `menuMétodoConotinuacion()` que inicializa las variables globales con la función `inicializar()` y a continuación crea el marco respectivo del método.

Dentro del marco se tienen varios elementos que lo constituyen. Primero, el texto que indica el formato de los datos que debe introducir el usuario. En segundo lugar, una serie de cajas de captura de datos, según el tipo. En este caso, "Ecuaciones" tipo texto, en esta caja se deben introducir las ecuaciones que forman el sistema a resolver, "Punto Inicial" de tipo texto, es el punto inicial a partir del cual se va a comenzar a iterar, "Número Máximo de Iteraciones" de tipo texto, y en ella se debe introducir el número máximo de iteraciones que se desea que realice el método. En tercer lugar, se crean dos botones, uno es el botón "Cancelar" que si es pulsado devuelve a la ventana inicial del programa y el otro que es el botón "Realizar". Al ser pulsado por el usuario el programa recoge los datos

introducidos en las cajas de parámetros (el usuario previamente los ha debido introducir) y se envían a la función del método de Continuación u Homotopía, para que los datos introducidos por el usuario puedan ser utilizados por esta función es necesario realizar una transformación de los datos de entrada al tipo de datos que son admitidos por la función. Todo esto se realiza a la vez que se llama a la función `Continuacion()`. Por último, aparece el texto que indica que se va a mostrar la solución del sistema de ecuaciones no lineales y una caja de texto en la que una vez que se ha calculado la solución se muestran los resultados.

Con la función `Continuacion()` se calcula la solución aproximada del sistema de ecuaciones no lineales introducido por el usuario. Del mismo modo esta función devuelve al marco los elementos resultantes de dicha llamada, r que contiene el valor de la aproximación a la solución.

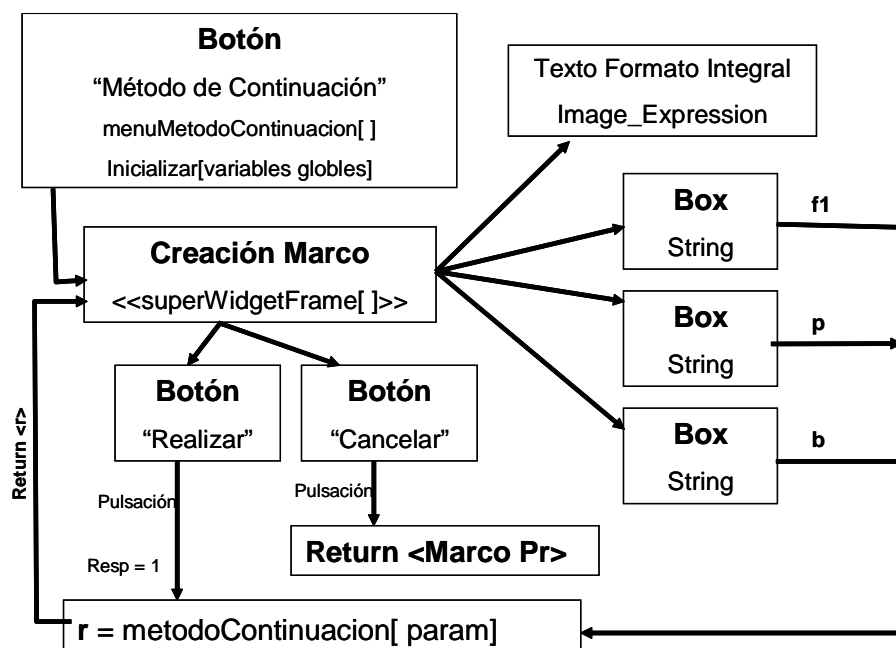


Diagrama con el método Continuación u Homotopía.

Figura 19

Las ventanas se muestra a continuación. Se puede ver que el evento que se produce al pulsar el botón "Realizar" lanza la llamada a la función imprimiendo los resultados.

Método de la Continuación u Homotopía

Introduzca los datos de la siguiente forma:
 Ecuaciones: $\{3x_1 - \cos[x_2 + x_3]^{1/2}, \sin[x_3], \exp[-x_1 + x_2] + (10\pi - 3)/3\}$
 Punto Inicial $\{(0.0), \{0.1\}, \{0.2\}\}$
 Número max iteraciones: 12

Sistema de Ecuaciones

Punto inicial

Número máximo de Iteraciones

La solución aproximada del sistema es:

Método de la Continuación u Homotopía

Introduzca los datos de la siguiente forma:
 Ecuaciones: $\{3x_1 - \cos[x_2 + x_3]^{1/2}, \sin[x_3], \exp[-x_1 + x_2] + (10\pi - 3)/3\}$
 Punto Inicial $\{(0.0), \{0.1\}, \{0.2\}\}$
 Número max iteraciones: 12

Sistema de Ecuaciones

Punto inicial

Número máximo de Iteraciones

La solución aproximada del sistema es:

Ventanas para calcular la solución del sistema con el Método Continuación u Homotopía.

Figura 20

10. Metodología

En este apartado se va a desarrollar un Plan de Gestión del Proyecto, documento de control para gestionar un proyecto informático, donde se definen todos los procesos necesarios para desarrollar los productos objeto del proyecto. Es independiente del tipo de proyecto, tamaño, importancia, complejidad y tecnología. Su contenido abarca aspectos de formato y de contenido. El contenido del Plan de Gestión del Proyecto son: EDT, fichas detalladas y planificación.

1. EDT: estructura de división del trabajo. es la descomposición del proyecto en un conjunto de tareas manejables. Da una visión detallada del alcance del proyecto, permite hacer estimaciones de tiempo y coste más cercanas a la realidad, permite monitorizar el progreso del proyecto con mayor facilidad y permite hacer asignaciones más claras de trabajo a los miembros del equipo. Tiene una estructura jerárquica, con un nodo raíz que representa el proyecto. De él cuelgan actividades; estas actividades son tareas desarrolladas durante un periodo de tiempo predefinido dentro del plan de trabajo del proyecto. Las actividades pueden descomponerse en sub - actividades creando una estructura jerárquica. Las actividades de último nivel suelen denominarse Tareas. A medida que se desciende en el árbol, aumenta el detalle de la tarea.

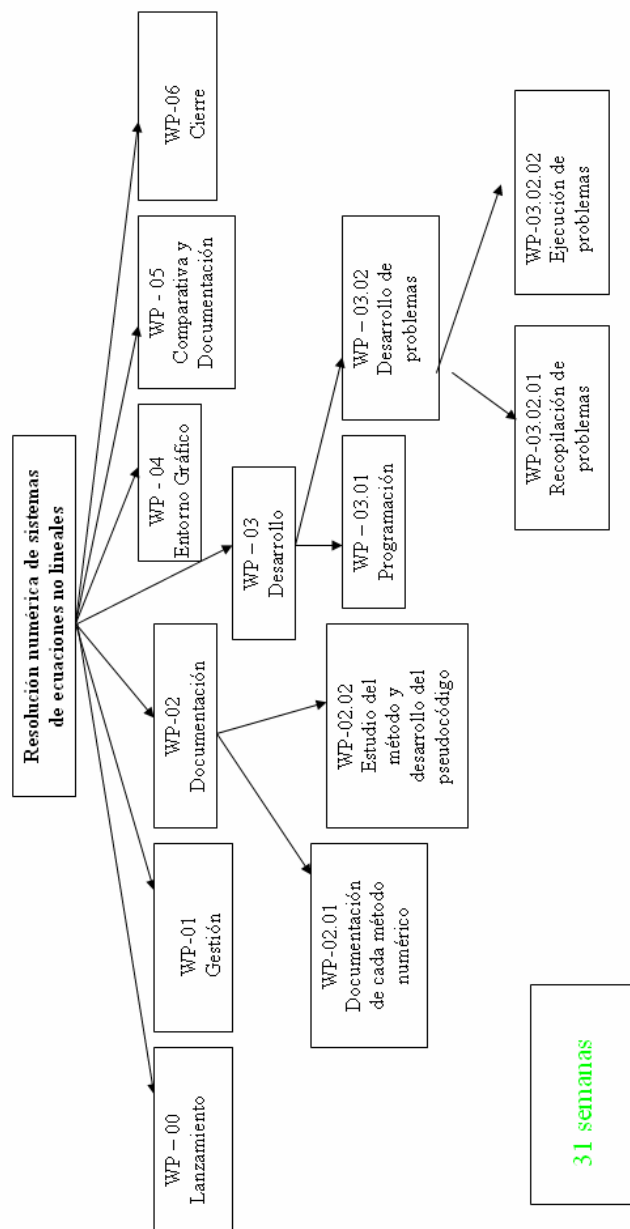
Hay dos tipos de tareas:

Tareas resumen: son simplemente un resumen que da una visión de más alto nivel.

Estas tareas resumen pueden descomponerse en más tareas, según el nivel de detalle.

Paquetes de trabajo: especificación del trabajo que debe ser realizado en una tarea, debe tener un identificador y un nombre, se suelen especificar precondiciones para su ejecución y productos generados. Es lo que realmente se ejecuta, no se descomponen más.

A continuación, se muestra el EDT del proyecto.

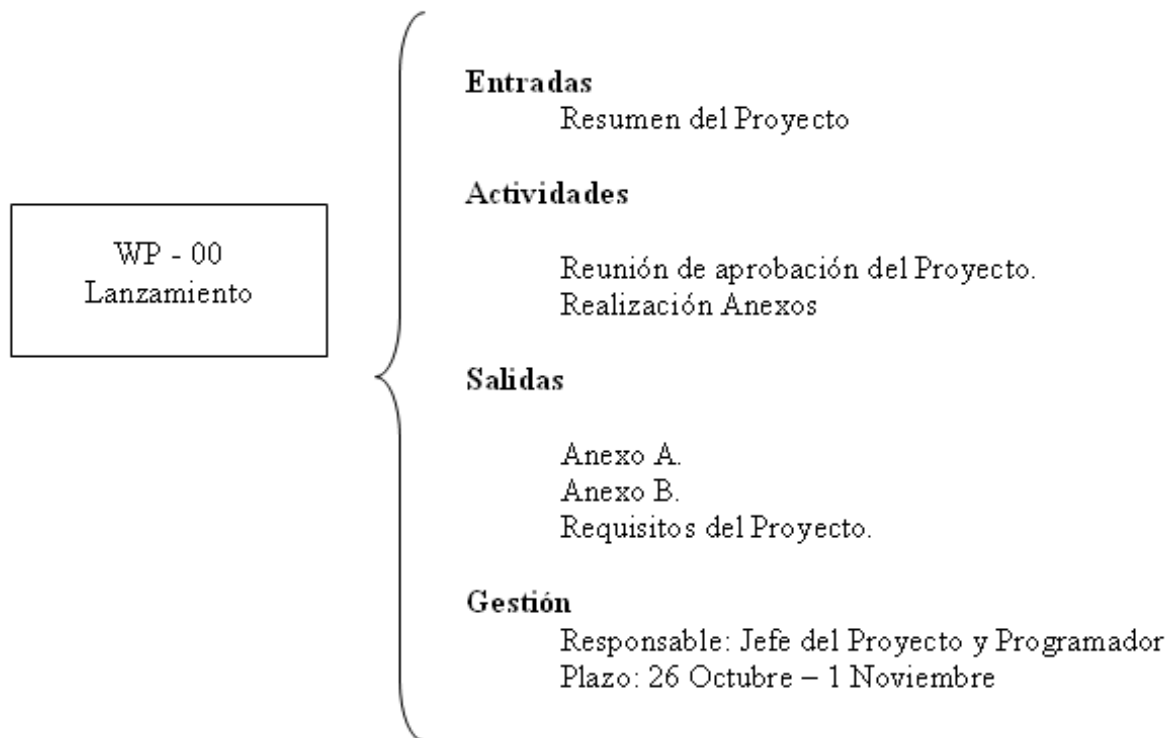


EDT del proyecto.

Figura 21

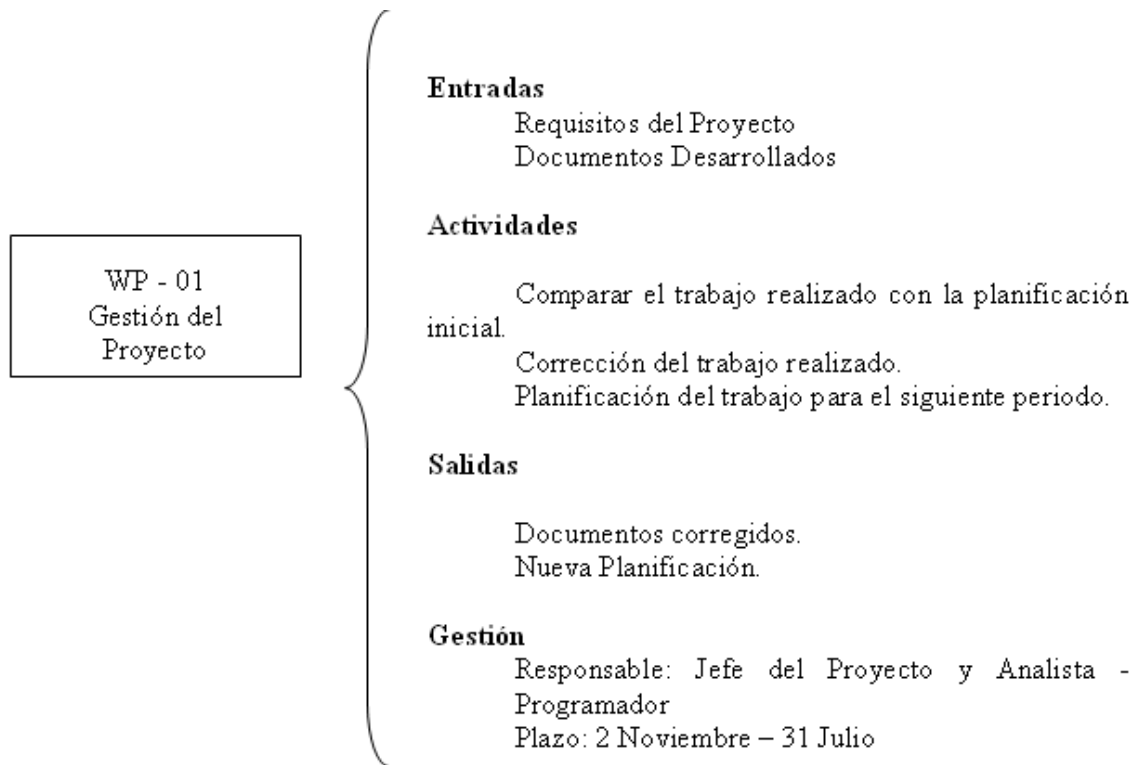
Para la realización de este proyecto no se ha considerado oportuno seguir una metodología de trabajo tradicional con las fases identificación de necesidades, análisis de requisitos, estudio de la arquitectura, diseño interno, diseño externo, etc. Sino que se ha optado por desarrollar una metodología que se ajuste mejor a la naturaleza del proyecto.

2. Fichas detalladas. En este apartado se detallan las actividades que se van a realizar en cada tarea, las entradas necesario para realizar la tarea, las salidas que produce la tarea y el responsable de la tarea junto con su duración.



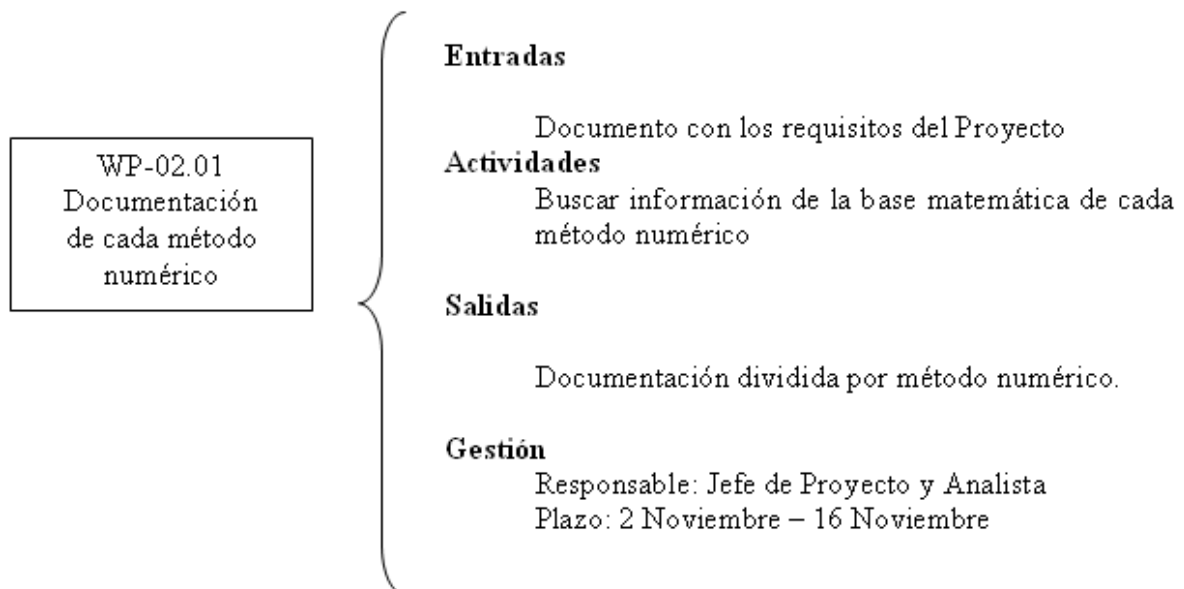
Detalle del paquete de trabajo "Lanzamiento".

Figura 22



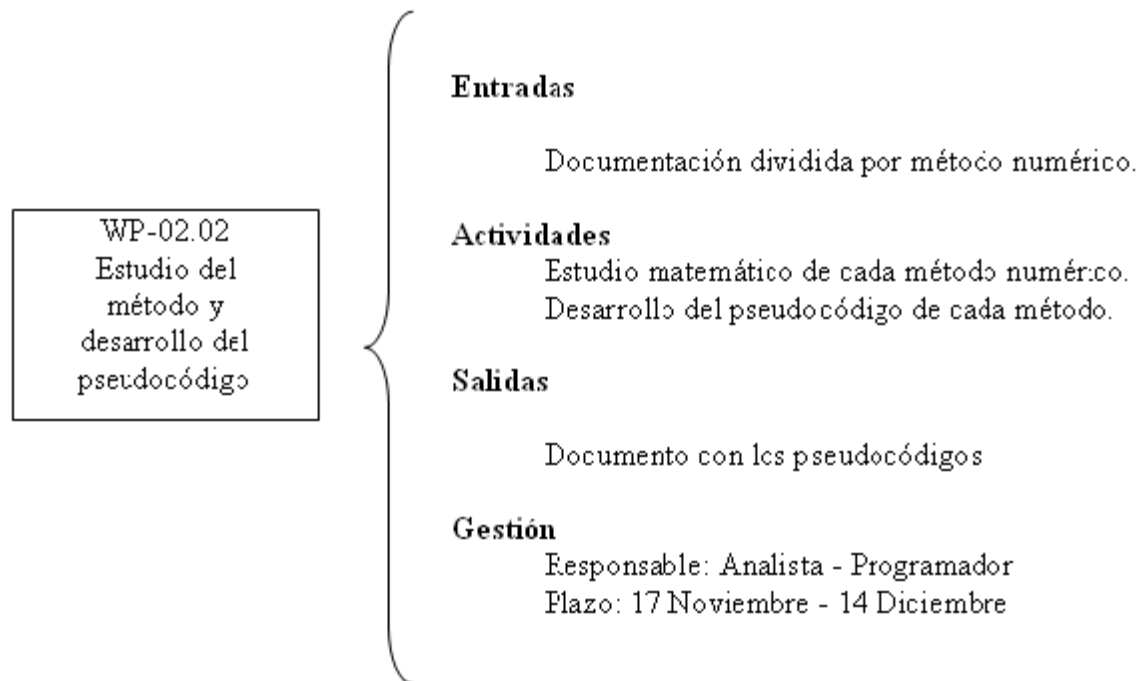
Detalle del paquete de trabajo "Gestión del Proyecto".

Figura 23



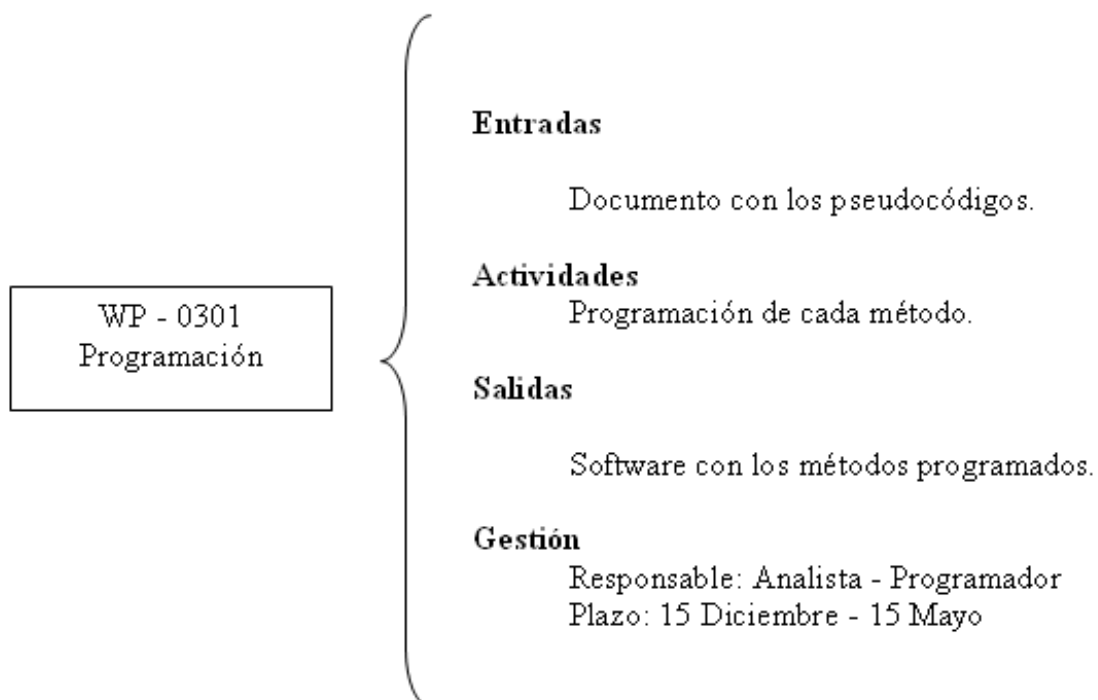
Detalle del paquete de trabajo "Documentación de cada Método Numérico".

Figura 24



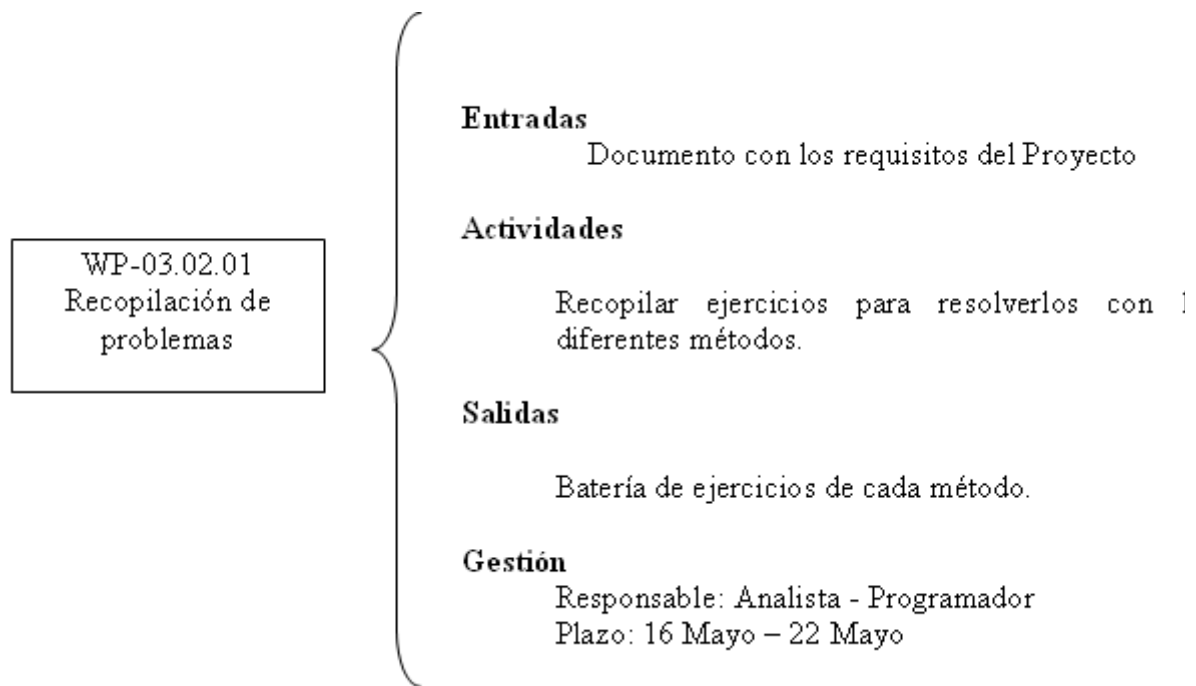
Detalle del paquete de trabajo "Estudio de los métodos y desarrollo de pseudocódigo".

Figura 25



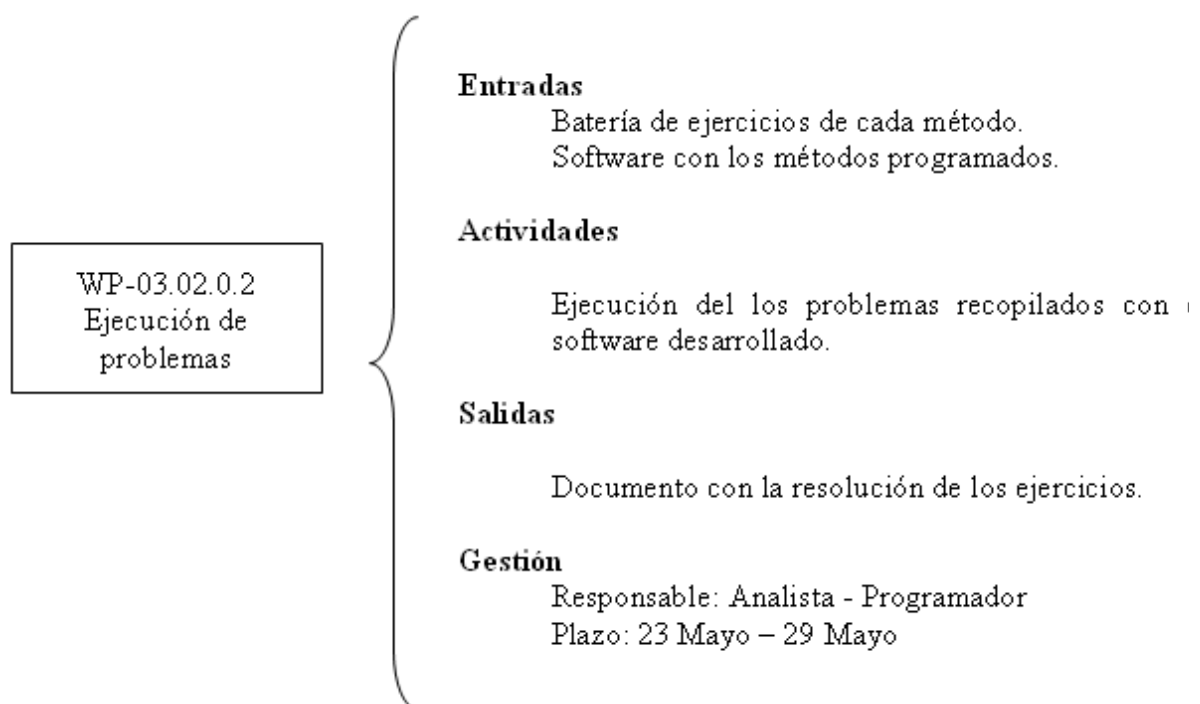
Detalle del paquete de trabajo "Programación".

Figura 26



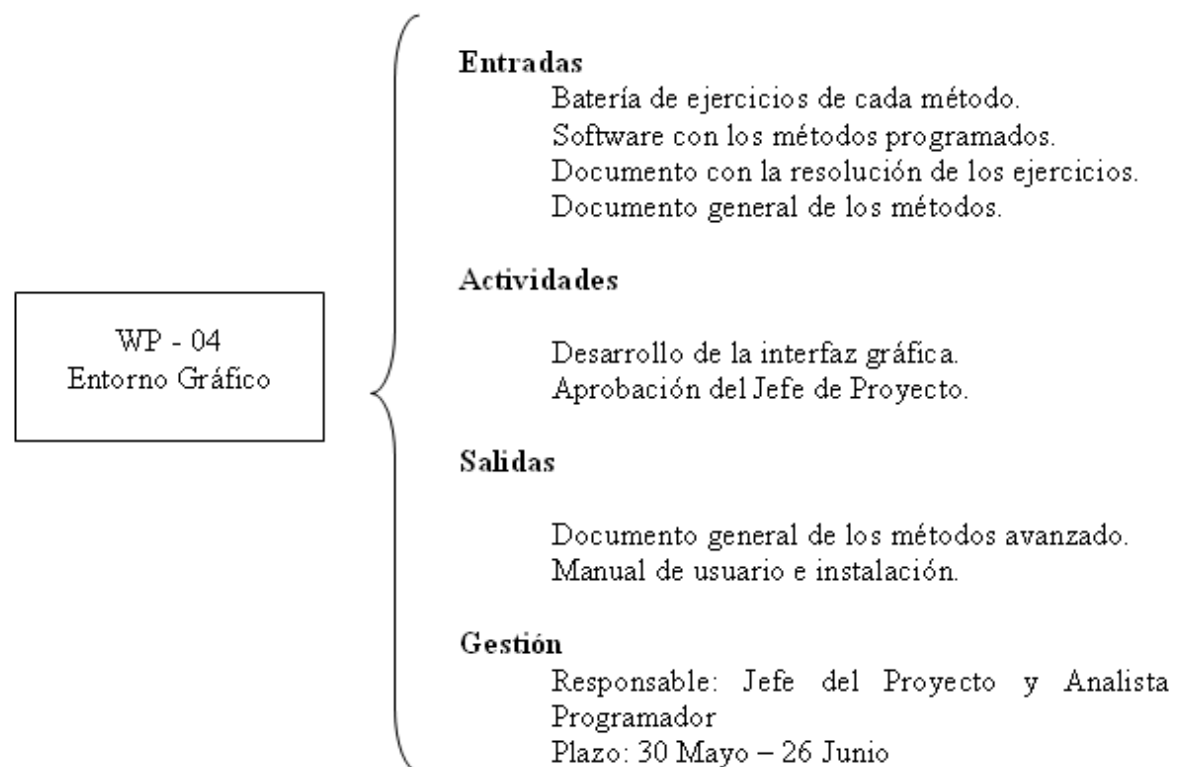
Detalle del paquete de trabajo "Recopilación de problemas".

Figura 27



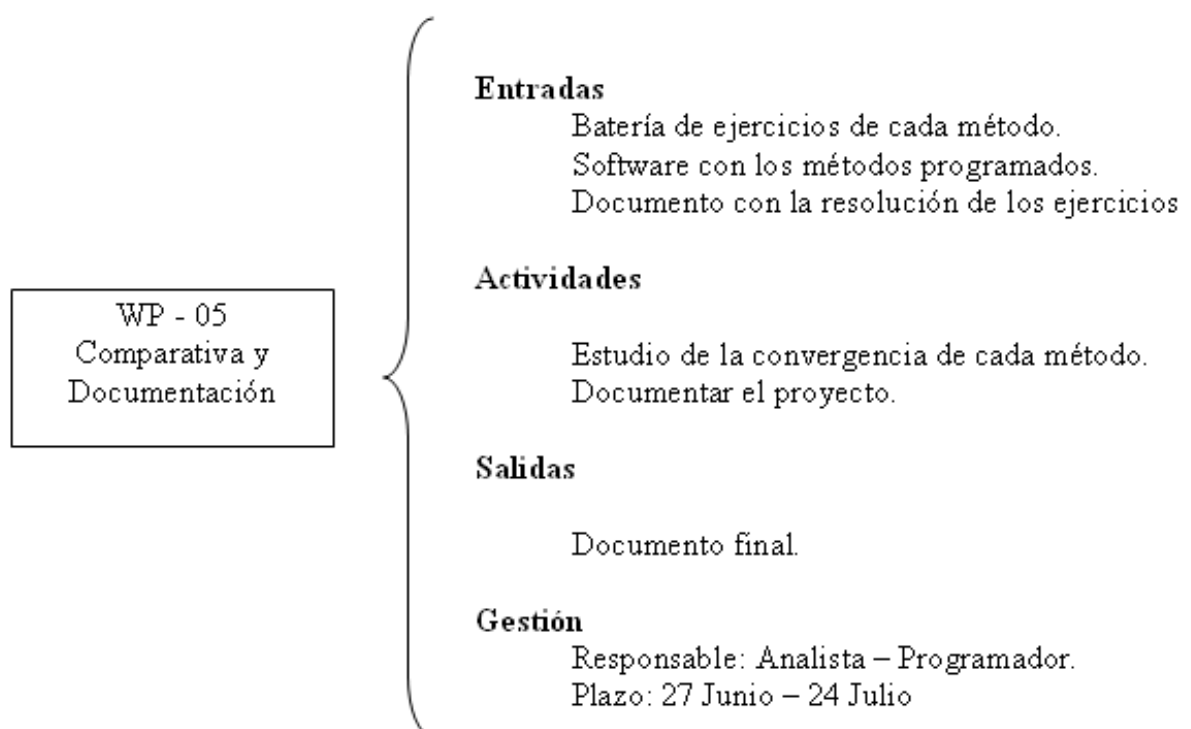
Detalle del paquete de trabajo "Ejecución de problemas".

Figura 28



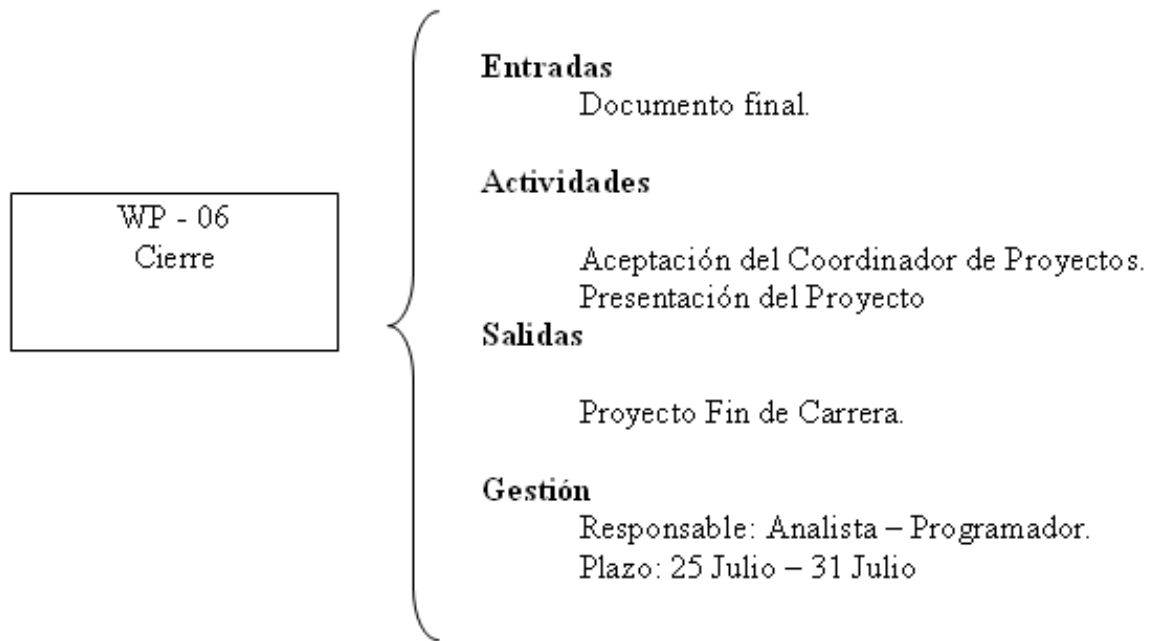
Detalle del paquete de trabajo " Entorno Gráfico"

Figura 29



Detalle del paquete de trabajo "Comparativa y documentación".

Figura 30



Detalle del paquete de trabajo " Cierre".

Figura 31

3. Planificación: Para relizar la planificación del proyecto se ha utilizadao una técnica PERT que permite calcular información importante sobre cada tarea para el seguimiento y control. Para cada paquete de trabajo se establece el inicio y fin más temprano de esa tarea, y el inicio y fin más tardío de la tarea. Antes se debe calcular la duración de los paquetes de trabajo. Permite conocer el camino crítico, es decir, las tareas en las que si se sufre retraso se retrasaría la fecha de finalización del proyecto.

Se realiza una estimación de las horas / hombre que va a dedicar cada participante en el desarrollo del proyecto a cada paquete de trabajo, especificando además las semanas totales que va a durar cada tarea.



ID Paquete	Nombre Paquete	Duración (semanas)	Total	Coordinador Proyecto	Jefe Proyecto	Analista Programador
WP-00	Lanzamiento	1	20	2	8	10
WP-01	Gestión	F	22	6	4	12
WP-02.01	Documentación métodos numéricos	2	26	0	8	18
WP-02.02	Estudio del método y desarrollo del pseudocódigo	3	38	0	8	30
WP-03.01	Programación	16	184	0	24	160
WP-03.02.01	Recopilación de problemas	1	12	0	4	8
WP-03.02.02	Ejecución de problemas	1	12	0	2	10
WP-04	Entorno gráfico	3	38	0	8	30
WP-05	Comparativa y documentación	3	34	0	10	24
WP-06	Cierre	1	18	4	4	10
Total		31	404	12	80	312

Tabla estimación horas de trabajo según paquete de trabajo.

Figura 32

Una vez que se ha calculado una estimación de las horas que se van a dedicar a cada tarea es necesario calcular el orden en que se van a ejecutar las tareas, para ello se crea una tabla en la que por cada tarea se establecen sus predecesoras, es decir, las tareas que deben estar terminadas para poder ejecutar las siguientes.

Número	Tarea	Predecesoras
WP-00	Lanzamiento	--
WP-01	Gestión	WP-00
WP-02.01	Documentación métodos numéricos	WP-00
WP-02.02	Estudio del método y desarrollo del pseudocódigo	WP-02.01
WP-03.01	Programación	WP-02.02
WP-03.02.01	Recopilación de problemas	WP-03.01
WP-03.02.02	Ejecución de problemas	WP-03.02.01
WP-04	Entorno gráfico	WP-03.01
WP-05	Comparativa y documentación	WP-04
WP-06	Cierre	WP-05;WP-04; WP-01

Orden de ejecución de los paquetes de trabajo.

Figura 33

Una vez calculadas las horas estimadas que se van a dedicar a cada paquete de trabajo y el orden en que se deben ejecutar las tareas podemos realizar el diagrama PERT y calcular el camino crítico.

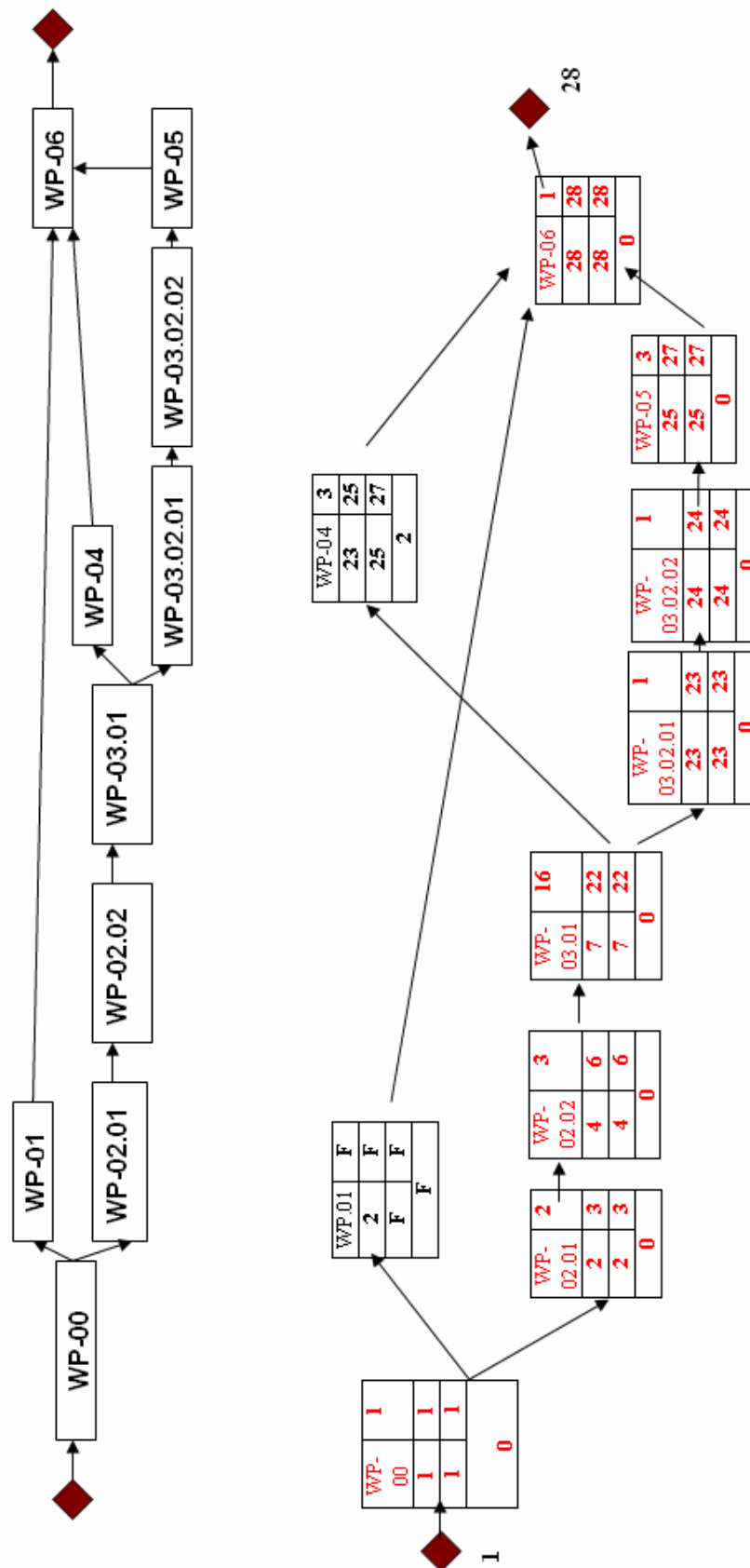


Diagrama de planificación PERT.

Figura 34

En el siguiente diagrama de *Gantt* de actividades se muestran los hitos y tareas más significativos para el desarrollo y ejecución de este Proyecto Fin de Carrera. El 26 de Octubre de 2005 comienza el Proyecto y finaliza el 31 de Julio de 2006.

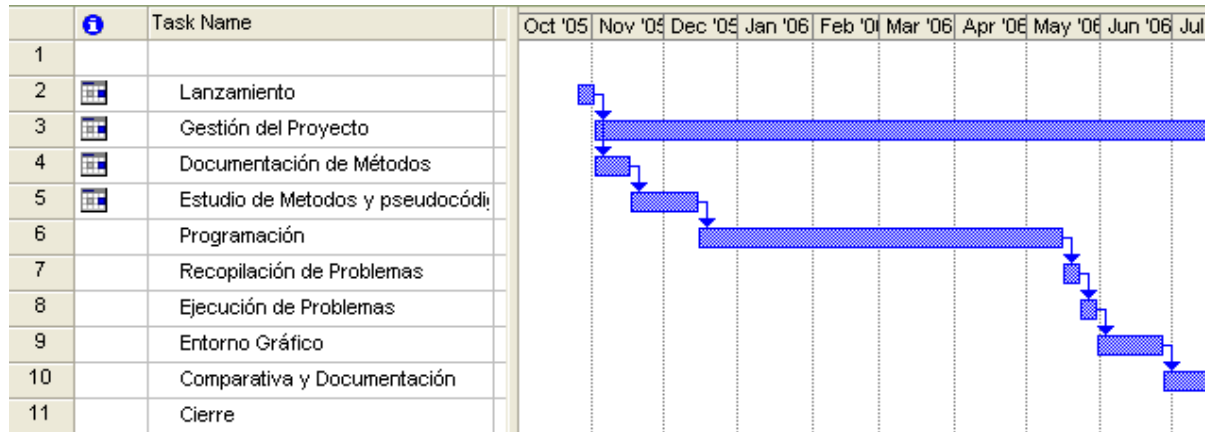


Diagrama de *Gantt*

Figura 35

11. Valoración económica

11.1. Introducción

En este apartado se detalla la valoración económica o análisis de costes de cada una de las tareas/actividades que comprende la realización y puesta en funcionamiento del presente Proyecto.

El Proyecto se ha descompuesto en actividades y tareas, indicadas en la valoración económica como ítems.

11.2. Técnicas de estimación de costes

Los costes de las diferentes partidas o ítems que componen el Proyecto se detallan a continuación.

1. Especificaciones y Desarrollo Software

En cada una de las fases en que se ha dividido la ejecución del Proyecto, Especificación, Desarrollo, Integración y Pruebas, y Formación, se reseñan los costes directos expresados en mese/hombre necesarios para acometer cada una de las fases, indicándose la categoría: Jefe de Proyecto, Analista, Programador, etc.

2. Instalación, Pruebas e Integración del Software

En este apartado se recogen los costes directos de las actividades de integración y las pruebas del software en el entorno de desarrollo y en el de explotación, incluidos los gastos adicionales, tales como los desplazamientos y las dietas.

3. Equipamiento y Licencias Software

Costes de todo el equipamiento e infraestructura (PC,s, impresoras, RAL, comunicaciones), si fuera necesario. Así mismo, se especifican las licencias necesarias para el entorno de explotación.

4. Apoyo logístico (Formación)

En este concepto se ampara la formación a impartir a los posibles operadores y administradores del sistema a implantar. Se incluye en la formación la entrega de toda la documentación necesaria para el curso de formación.

5. Incrementos e IVA

Se parte de la suma de las partidas (1), (2), (3), y (4) formando el Coste Directo del Proyecto. A este Coste Directo se le aplican los Gastos Generales (13 %) y el Beneficio Industrial (6 %). La suma de los conceptos de Coste Directo, Gastos Generales y Beneficio Industrial constituyen el Total Importe sin IVA.

A este importe se le sumarán los impuestos correspondientes como IVA (16 %), para la Península y Baleares, IGIC (5 %) para las islas Canarias o IPSI (0 %) para Ceuta y Melilla.

Total Proyecto

La suma del Total Importe sin IVA más la partida de Incrementos e IVA determinan el importe total del desarrollo, implantación y puesta en servicio del Proyecto.

11.3. Costes del Proyecto

El importe total del Proyecto asciende a **21.245,98** Euros (VEINTIÚN MIL DOSCIENTOS CUARENTA Y CINCO EUROS CON NOVENTA Y OCHO CÉNTIMOS), impuestos incluidos.

El detalle de cada una de las partidas se expresa en la siguiente tabla.

Resolución numérica de sistemas de ecuaciones no lineales					P.1	
Ítem	Concepto	Empresa	Unidad (Meses/Hombre)	Coste Unitario €	Coste Total €	Total por partidas €
1 Especificaciones y Desarrollo Software						
a) Especificaciones						
P.1.1.1	Especificación de Requisitos y Análisis Funcional					
	Jefe de Proyecto	Desarrollo Inf.	0,04	7.847,53	274,66	
	Analista/Programador	Desarrollo Inf.	0,25	5.762,31	1.440,58	
P.1.1.2	Plan de pruebas					
	Jefe de Proyecto	Desarrollo Inf.	0,04	7.847,53	274,66	
	Analista/Programador	Desarrollo Inf.	0,25	5.762,31	1.440,58	
b) Desarrollo software						
P.1.1.3	Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. Método del Punto Fijo. Método de Seidel. Método de Newton. Método de Cuasi -Newton. Método de la Máxima Pendiente. Método de Continuación u Homotopia.					
	Jefe de Proyecto	Desarrollo Inf.	0,11	7.847,53	863,23	
	Analista/Programador	Desarrollo Inf.	0,75	5.762,31	4.321,73	
					Subtotal 1	8.615,44
2 Instalación, Pruebas e Integración del Software						
P.1.2.1	Pruebas de integración en fábrica (Entorno de Desarrollo)					
	Jefe de Proyecto	Desarrollo Inf.	0,01	7.847,53	109,87	
	Analista/Programador	Desarrollo Inf.	0,10	5.762,31	576,23	
P.1.2.2	Instalación y pruebas de aceptación en las instalaciones del cliente (Entorno de Explotación)					
	Jefe de Proyecto	Desarrollo Inf.	0,01	7.847,53	109,87	
	Analista/Programador	Desarrollo Inf.	0,10	5.762,31	576,23	
					Subtotal 2	1.372,19
3 Equipamiento y Licencias						
P.1.3.1	Licencia de Mathematica V. 5.2 para Windows	AddLink Sw. Científico	1	1.419,64	1.419,64	
P.1.3.2	Licencia de Mathematica for Active X	DigiBuy	1	75,99	75,99	
					Subtotal 3	1.495,63
4 Apoyo Logístico (Formación)						
P.1.4.1	Formación Aplicación Software y documentación (Curso de 6 horas a 8 personas)	Desarrollo Inf.	1	3.907,91	3.907,91	
					Subtotal 4	3.907,91
					TOTAL COSTE DIRECTO	15.391,18
5 Incrementos e IVA						
P.1.5.1	Gastos Generales	Desarrollo Inf.	13%	15.391,18	2.000,85	
P.1.5.2	Beneficio Industrial	Desarrollo Inf.	6%	15.391,18	923,47	
					TOTAL IMPORTE SIN IVA	18.315,50
IVA (Península y Baleares)			16%	18.315,50	2.930,48	
					TOTAL PROYECTO (EUROS)	21.245,98

12. Conclusiones

A lo largo de este proyecto, se han estudiado diferentes métodos numéricos para aproximar una solución a un sistema de ecuaciones no lineales mediante seis métodos de resolución diferentes.

Se han diseñado y codificado los algoritmos empleados para resolver sistemas de ecuaciones no lineales en el lenguaje simbólico y numérico del paquete *Mathematica*®. En cada método numérico estudiado se ha indicado su desarrollo, mostrando los cálculos necesarios para ello, se han visualizado los resultados en forma de tabla y, cuando se ha creído necesario, se han mostrado a la par distintos algoritmos empleados con un mismo sistema de ecuaciones para comparar las ventajas del uso de un algoritmo u otro en la resolución de un mismo problema en lo que se refiere a eficiencia y exactitud.

Por consiguiente, tras hacer un amplio recorrido por las bases matemáticas empleadas y por las características de las mismas, y tras haber analizado y programado los algoritmos empleados para resolver el problema tratado, se pueden establecer las conclusiones teóricas y prácticas siguientes:

1. La resolución de sistemas de ecuaciones no lineales consiste en, dado un punto inicial aproximar ese punto iterativamente al punto solución del sistema de ecuaciones no lineales.
2. El método de *Newton* para sistemas requiere una buena aproximación inicial $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ y genera una sucesión

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - J(x^{(k-1)})^{-1} F(x^{(k-1)}),$$

que converge rápidamente, generalmente de forma cuadrática, en una solución p si $x^{(0)}$ está suficientemente cerca de p . Sin embargo, no siempre es fácil determinar valores iniciales a partir de los que se obtenga una solución y, además, el método de *Newton* requiere evaluar o aproximar n^2 derivadas parciales para calcular la matriz jacobiana, n operaciones escalares para evaluar F y resolver un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas en cada paso, lo que conlleva del orden de $O(n^3)$ operaciones, por lo que es un método computacionalmente muy costoso. En este método los errores de redondeo se van corrigiendo en las sucesivas iteraciones, es un método autocorrector.

3. El método del *Punto Fijo* y de *Seidel*, convergen de forma cuadrática a la solución para cualquier punto inicial. En cambio es necesario realizar una transformación del sistema de ecuaciones, despejando en cada ecuación una de las variables para resolver algebraicamente cada una de las ecuaciones para cada una de las variables. Sin embargo, esta técnica rara vez tiene éxito ya que es difícil encontrar la transformación adecuada entre todas las posibles transformaciones existentes. El método de *Seidel* acelera, generalmente la convergencia de la iteración del método del *Punto Fijo* utilizando las aproximaciones más recientes a la solución en cada iteración para calcular la nueva aproximación.

4. El método *Cuasi-Newton* reduce la cantidad de cálculos en cada iteración que es necesario realizar en el método de *Newton*, sin disminuir significativamente la velocidad de convergencia que tiene este método. Se pasa de la convergencia cuadrática del método de *Newton* a una convergencia superlineal. En este método se reemplaza la matriz jacobiana J por una matriz A_{k-1} cuya inversa se determina directamente en cada paso. Esto reduce el

orden del número de operaciones aritméticas de $O(n^3)$ a $O(n^2)$. Además, las únicas evaluaciones funcionales escalares que se requieren son al evaluar f_i , lo que permite ahorrar n^2 evaluaciones de funciones escalares en cada iteración, siendo solo necesario n evaluaciones de funciones escalares. En el método *Cuasi-Newton* también es necesario disponer de una buena aproximación inicial para asegurar la convergencia del método. Otra desventaja de este método es que, a diferencia del método de *Newton*, no es autocorrector; y las soluciones aproximadas que resultan en cada iteración son menos exactas que en el método de *Newton*.

5. El método de la *Máxima Pendiente* se presenta como una forma de obtener buenas aproximaciones iniciales para los métodos de *Newton* y de *Cuasi-Newton*. Aunque el método de la *Máxima Pendiente* no proporciona una sucesión que converge rápidamente, solo converge de manera lineal, es un método de naturaleza global, es decir, no requiere una buena aproximación inicial para que se produzca la convergencia. Necesita un gran número de pasos cuando se parte de puntos lejanos a la solución y tiende a oscilar alrededor de ésta. Cada paso supone un movimiento en la dirección del gradiente con sentido negativo, lo que implica moverse en la dirección en que el error decrece con mayor rapidez. Con el método de la *Máxima Pendiente* se aproxima un mínimo local de una función g de varias variables que, para aplicarlo, se toma

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n [f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2.$$

El valor mínimo de g es cero, que se alcanza cuando todas las funciones f_i son simultáneamente cero.

6. Los métodos de *Continuación* y *Homotopía* también se pueden usar para resolver

sistemas de ecuaciones no lineales, y son objeto de investigación en la actualidad. En estos métodos, el problema dado es $F(x) = 0$.

Está integrado en una familia de problemas de un parámetro que emplean un parámetro λ que toma valores en $[0, 1]$. El problema original corresponde a $\lambda = 1$, mientras que para $\lambda = 0$ le corresponde un problema cuya solución es conocida. Por ejemplo, el conjunto de problemas

$$G(\lambda, x) = \lambda F(x) + (1 - \lambda)(F(x) - F(x_0)) = 0, \quad \text{para } 0 \leq \lambda \leq 1,$$

donde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ viene dado, forma una homotopía. Para $\lambda = 0$ la solución es $x(\lambda = 0) = x_0$, mientras que la solución del problema original corresponde a $x(\lambda = 1)$. En un método de continuación se intenta determinar $x(\lambda = 1)$ resolviendo una secuencia de problemas correspondiente a $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n = 1$. La aproximación inicial de la solución de

$$\lambda_i F(x) + (1 - \lambda_i)(F(x) - F(x_0)) = 0$$

sería la solución $x(\lambda = \lambda_{i-1})$ del problema

$$\lambda_{i-1} F(x) + (1 - \lambda_{i-1})(F(x) - F(x_0)) = 0.$$

Con este método es necesario realizar $4N$ inversiones matriciales en cada iteración, en cambio, en el método de *Newton* solo es necesario invertir una matriz en cada iteración, por lo que el trabajo que conlleva el método de *Continuación* equivale, aproximadamente, a $4N$ iteraciones del método de *Newton*. El método de *Continuación* puede usarse *per se*, sin que haga falta disponer de una elección particularmente buena de $x(0)$. Sin embargo, este

método también puede emplearse para obtener aproximaciones iniciales para los métodos de *Newton* y *Cuasi-Newton*.

7. El método de *Newton* se recomienda para sistemas de ecuaciones no lineales que tengan valores relativamente bajos de n y funciones escalares que se puedan evaluar fácilmente, además será necesario disponer de un punto inicial suficientemente bueno para asegurar la convergencia. El método *Cuasi-Newton* es adecuado cuando se dispone de un punto inicial suficientemente bueno para asegurar la convergencia, en cambio, no es necesario que el sistema de ecuaciones tenga pocas variables o sus funciones escalares sean de fácil evaluación.

Los métodos de la *Máxima Pendiente* y de *Continuación u Homotopía* se recomiendan cuando no se dispone de una buena aproximación del punto inicial, en cambio hay que tener presente que son más lentos y más costosos computacionalmente.

Los métodos del *Punto Fijo* y de *Seidel* solo se recomiendan cuando el sistema de ecuaciones no lineales a resolver es muy simple ya que va a ser necesario realizar una transformación en las ecuaciones y su velocidad de convergencia no compensa esta transformación.

8. Los sistemas de ecuaciones no lineales pueden ser utilizados de diversas formas y en un amplio espectro de aplicaciones prácticas en el ámbito de la Ciencia y la Ingeniería.

9. Como línea futura de análisis e investigación y como mejora posible a introducir al actual proyecto cabría reseñar el desarrollo de otros algoritmos numéricos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales como los siguientes:

a) El método de la *Máxima Pendiente* admite muchas variaciones, algunas de las cuales incluyen técnicas más complejas para determinar el valor de α , que producirá un mínimo con una función de una sola variable h . En otras técnicas se emplea el polinomio de *Taylor* multidimensional para reemplazar la función de varias variables original g y reducir al mínimo el polinomio en vez de g . Aunque algunas de ellas tienen ventajas sobre el procedimiento que se ha utilizado en este proyecto; en general, todos los métodos de la *Máxima Pendiente* son linealmente convergentes y convergen independientemente de la aproximación inicial. Pero en algunos casos pueden converger en algo que no es el mínimo absoluto de la función g .

b) Método de *Continuación u Homotopía*. En este proyecto se ha utilizado el método de Continuación en su variante del método de *Runge-Kutta* de orden 4, para reducir el número de inversiones que hay que realizar en este método, que es una de sus desventajas, se podría usar un método de *Runge-Kutta* de orden 2, como el método de *Euler Modificado*, o incluso el método de *Euler*. Otra posibilidad es emplear valores más bajos de N .

Anexo I. Manual de Instalación y de Usuario

Manual de Instalación

Para poder instalar el software *Mathematica* es necesario disponer de entre 400 y 550 MB libres de disco duro, 128 MB de memoria RAM (recomendado 256 MB) y unidad de CD - ROM.

La versión de *Mathematica* que se va a instalar es la version 5.2 *for Students* ya que es una versión de libre distribución. Para instalarla simplemente hay que ejecutar el fichero setup_5.2.0_win.exe que se encuentra en el CD. Para la correcta visión y ejecución del proyecto es necesario instalar unas plantillas.

Las plantillas de *Mathematica* se copian en el directorio donde se haya instalado el programa, unidad C o D y en el directorio siguiente:

\\Archivos de programa\\Wolfram Research\\Mathematica\\XX\\SystemFiles\\FrontEnd\\StyleSheets

siendo XX = 5.1, ó 5.2 (según la versión instalada de *Mathematica*).

Las plantilla básicas a emplear en el PFC son cuatro:

- a) Proyecto_Fin_de_Carrera.nb: plantilla a emplear con el fichero PFC.
- b) Proyecto_Fin_de_Carrera(Resumen).nb: plantilla que se usará con el fichero PFC (Nombre y Apellidos) (Resumen, Abstract, Índice).nb.
- c) Proyecto_Fin_de_Carrera (Sin código).nb. Se empleará con el fichero PFC cuando

tenga los problemas incluidos.

- d) Código_Métodos_Numéricos_12.nb (Ficheros de Problemas y de los Algoritmos).

También es necesario instalar un paquete especial para poder visualizar y utilizar la interfaz de usuario. El paquete de *Mathematica The Super Widget Package (SWP)* se ha diseñado para crear interfaces de usuario (GUI) con *Mathematica*. Se necesita el paquete denominado GUIKit, incluido en *Mathematica* 5.1 o versiones superiores. No obstante, el paquete *Super Widget Package* requiere *Mathematica* 5.2.

La instalación de *Super Widget Package* (Versión 2.82 libre) se realiza del modo siguiente:

1. Se copia el fichero superwidgetpackage.zip en el directorio

DD\Archivos de programa\Wolfram Research\Mathematica\5.2

siendo DD = la unidad donde se haya instalado *Mathematica*.

2. Se debe preservar la estructura de ficheros contenida en el fichero ZIP. Se descomprime el fichero pero preservando la estructura de ficheros.
3. Se inicia *Mathematica*, y en menú *Help* se selecciona *Rebuild Help index*. Para integrar la documentación de *SWP* con el resto de *Mathematica*.
4. La ayuda de este paquete, *SWP*, se encuentra en Help Browser y en la solapa Add-ons & Links.

Manual de Usuario

Para utilizar la aplicación es necesario tener instalado el software *Mathematica 5.2*, el paquete *The Super Widget* y las plantillas suministradas en el CD.

Primero se debe abrir y ejecutar todo el fichero "Código (Resolución de Sistemas de Ecuaciones no Lineales.nb)". Para ejecutar todo el fichero se debe seleccionar en la barra de herramientas de *Mathematica* "Kernel", "Evaluation" y "Evaluate Notebook". Así serán reconocidos todos los algoritmos desarrollados. Al ejecutarse todo el archivo se arranca automáticamente la interfaz gráfico.

Para resolver problemas con esta interfaz se siguen los siguientes pasos:

1. Seleccionar el botón del método de resolución elegido en el botón "Métodos".
2. Introducir los datos necesarios para la resolución del problema como se indica en la ventana del método.
3. Pulsar el botón "Realizar".

Una vez que se han obtenido los resultados si que quiere volver a resolver un problema con el mismo método volver a introducir los datos en la misma ventana y pulsar el botón "Realizar". Si se quiere resolver un problema con otro método o salir de la aplicación se debe cerrar la ventana del método y se vuelve a la ventana principal de la aplicación desde la que se puede cerrar la aplicación o ejecutar problemas con cualquier método siguiendo los pasos anteriores.

Bibliografía

- [BURD98] Burden, Richard. L.; Faires, J. Douglas.
Análisis Numérico. 6ª Edición.
International Thomson Editores, México, 1998.
- [CARN79] Carnahan, Brice; Luther, H. A.; Wilkes, James O.
Cálculo Numérico. Métodos, Aplicaciones
Editorial Rueda, Madrid, 1979.
- [CHAP87] Chapra, Steven C.; Canale, Raymond P.
Métodos Numéricos para Ingenieros con aplicaciones en Computadora
McGraw-Hill. México, 1987.
- [DEMI85] Demidovich, B.P. *"Problemas y ejercicios de Análisis Matemático"*.
Paraninfo. 1985.
- [GARC97] García Merayo, Félix; Nevot Luna, Antonio.
Métodos Numéricos en forma de Problemas Resueltos.
UPCO. Madrid, 1997.
- [GERA00] Gerald, F. ; Wheatley, Patrick O.
Análisis Numérico con Aplicaciones
Pearson Educación, México, 2000.
- [INFA99] Infante del Río, Juan Antonio; Rey Cabezas, José María.
Métodos Numéricos. Teoría, Problemas y Prácticas con MATLAB.
Ediciones Pirámide. Madrid, 1999.
- [MATH00] Mathews, John H.; Fink, Kurtis D.
Métodos Numéricos con MATLAB. 3ª edición. Prentice Hall, Madrid, 2000.

- [MOUR88] Moursund, David G.; Duris, Charles S.
Elementary Theory and Application Analysis.
Dover Publications, Inc. New York, 1988.
- [MUTO98] MUTO, V. *Curso de Métodos Numéricos.*
Servicio Editorial Universidad del País Vasco, 1998.
- [NAKA91] Nakamura, S. *Applied Numerical Methods whit Software.*
Editorial Prentice-Hall, 1991.
- [PORT] Portaencasa, R.; Vega, C.; Fdez. Baizán, C.; Morant, J. L.; Ribagorda, A.
Análisis Numérico. Facultad de Informática. Madrid.
- [RINC01] Rincón, F.
Análisis Matemático y Métodos Numéricos para Informática
Ed. Dpto. Publicaciones de la E.U.I. Madrid, 2001.
- [RODR03] Rodríguez Gómez, Fco. Javier
Cálculo y Métodos Numéricos. Teoría, Algoritmos y Problemas Resueltos
Universidad Pontificia Comillas. Madrid, 2003.
- [RODR98] Rodríguez Gómez, Fco. Javier; García Merayo, Félix.
Fundamentos y Aplicaciones de Mathematica. Paraninfo. Madrid, 1998.
- [SCHE72] Scheid, Francis.
Análisis Numéricos. Teoría y 775 Problemas Resueltos.
Serie Schaum, McGraw-Hill. Madrid, 1972.
- [SCHE91] Scheid, F.; di Costanzo, R. E.
Métodos Numéricos. Segunda Edición. McGraw-Hill, 1991.
- [VILL96] De la Villa Cuenca, Agustín.
Problemas de Álgebra con Esquemas Teóricos. 3ª Edición.

URL's

- [1] <http://www.edicionsupc.es/ftppublic/forum/FEEL1102.pdf>
Métodos numéricos utilizados en la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales.
- [2] http://www.es.wikipedia.org/wiki/No_linealidad
No linealidad.
- [3] <http://kmplexblog.com/2005/05%las-organizaciones-como-sistemas-no.html>
Las organizaciones como sistemas no lineales.
- [4] <http://sai.azc.uam.mx/apoyodidactico/>
Métodos Numéricos.
- [5] http://homepage.cem.itesm.mx/lgozmez/curso_basico.htm
Curso básico del paquete computacional Mathematica.
- [6] <http://ma1.eii.us.es/miembros/cobos/AN/Utilidades/Chapter1.pdf>
Ecuaciones no lineales.