Лекция по дискретной математике

13 мая 2019

Комбинаторика

Комбинаторика - наука о том, как посчитать количество элементов конечного множества.

Правило сложения $|A \cup B| = |A| + |B|, A \cap B \neq \emptyset$ где $\cup$ - объединение, |A| - количество элементов множества A.

Примеры:

- 10 синих шаров = A, 10 красных шаров = B

  Всего шаров = |A|+ |B| = 20

- A = двузначные числа с последней цифрой 1 B = двузначные числа с последней цифрой 3

  $|A \cup B|$ = двузначные числа, оканчивающиеся 1 или 3

  $|A| = |B| = 9$. $|A \cup B| = 9 + 9 = 18$

Правило умножения

$A \times B$ – декартово произведение множеств, или множество пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$; $\{(a, b)|a \in A, b \in B\}$

Пример:

A = {1, 2, 3}

B = {x, y}

$A \times B$ = {1x,1y,2x,2y,3x,3y}

$|A \times B| = |A| * |B|$

Как видно из предыдущего примера, |A| = 3, |B| = 2, $|A \times B| = 3 * 2 = 6$

Пример:

Сколько всего трехзначных чисел?

|A| = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} |A| = 9

|B| = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} |B| = 10

|C| = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} |C| = 10

$A \times B \times C$- трехзначные числа

$((a, b), c) \Leftrightarrow (a, b, c)$ – множество троек

$|A \times B \times C| = 9 * 10 * 10 = 900$

$\Rightarrow$ всего 900 трехзначных чисел

Принцип биекции

$|A| = |B| \Leftrightarrow$ существуют взаимно однозначное отображение, которое элементам одного множества сопоставляет элементы другого.

$f : A \to B$

1. $f(A) = B$ или $\forall b \in B \exists a : f(a) = b$
2. $f(a_1) \neq f(a_2)$,если $a_1 \neq a_2$

Пример:

1. a, b, c 1, 2, 3

   $1 \to a$

   $2 \to b$

   $3 \to c$

2. слова в алфавите a, b, c длины 5 и числа от 0 до 242

   $aaaaa \leftrightarrow 00000_3 = 0$

   $abacc \leftrightarrow 01022_3 = 27 + 2 * 3 + 2 = 35$

   $baccc \leftrightarrow 10222_3$

   $ccacc \leftrightarrow 22022_3$

   $ccccc \leftrightarrow 22222_3 = 242$

   от 0 до 242 $\Rightarrow$ 243 числа

   $A = \{a, b, c\}$

   $|A \times A \times A \times A \times A| = |A|^5 = 3^5 = 243$

3. A = множество правильных скобочных последовательностей

   B = множество разбиений круга хордами

<u>Число сочетаний</u>
Дано множество |A| = n. Сколько в нем подмножеств размера k?
Пример: |A| = 4, k = 2
$A = \{a, b, c, d\}$
$\{ab\}, \{ac\}, \{ad\}, \{bc\}, \{bd\}, \{cd\}$ – 6 шт
Примеры задач

- сколько способов выбрать из 100 студентов 10, которые получат 5 автоматом?

- сколько существует пятизначных чисел, у которых цифры возрастают? (пр. 13789, 23579)

  $13789 \to \{1, 3, 7, 8, 9\}$

  $23579 \to \{2, 3, 5, 7, 9\}$ подмножество $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ из 5 элементов

Определение C_n^k - количество подмножеств размера k в множестве A. |A| = n

Вывод формулы:

Всего k позиций. Существует n способов выбрать 1-ый элемент, n - 1 – 2-ой элемент, …, n – k + 1 – k-ый элемент. Всего $n*(n-1)*\dots*(n-k+1)$ способов выбрать k элементов из n с учетом порядка

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

но порядок не важен

Пусть k = 3

Это все одно и то же:

3711 – 1 способ

7311 – 1 способ

1137 – 1 способ

таких же одинаковых наборов k! штук, это перестановки k элементов 1 способ повторяется $k*(k-1)*\dots*1 = k!$ раз т.е. в формуле $\frac{n!}{(n-k)!}$ каждый ответ посчитан $k!$ раз, значит, ответ:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Пример: $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{(2*2)} = 6$

Свойства

- $C_n^k = C_n^(n-k)$

  Аналитическое доказательство

  $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

  Комбинаторное доказательство

  Множество размера $k \leftrightarrow$ (взаимно отображается) множеством размера $n-k$

  n = 9, k = 3

  135 $\leftrightarrow$ 246789 $B \subset A \leftrightarrow A \setminus B \subset A$

- $C_n^0 = C_n^n = 1$

- $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

- $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

  Аналитическое доказательство

  $C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)!(k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)(n-k-1)!(k-1)!}$

  $C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k(k-1)!}$

  $C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(n-k)(n-k-1)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k(k-1)!} = \frac{(n-1)!k+(n-1)!(n-k)}{(n-k)(n-k-1)!k(k-1)!} = \frac{(n-1)!(k+(n-k))}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$

  Также это можно заметить при построении треугольника Паскаля