应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000-0887(2000)08-0777-06

计算股市的基本方程、理论和原理(III)——基本理论*

云天铨

(华南理工大学 工程力学系, 广州 510641)

(我刊编委云天铨来稿)

摘要: 由基本方程导出两个理论: 1 股票的价值理论 $v^*(t) = v^*(0)\exp(ar_2^* t)$。 2 股能守恒理论。 将股能定义为股价 v 及其导数 $\dot{v}$ 的二次函数 $\phi = Av^2 + Bv\dot{v} + C\dot{v}^2 + Dv$, 在基本方程约束下, 将问题归结为沿最优路径的约束优化问题。 应用 Lagrange 乘数, 变分法 Euler 方程可证 ϕ 对任何 v、$\dot{v}$ 守恒。 文中给出应用这些方程和理论对股市走势作分析的一些判断并为深沪股市实际走势所验证。

关 键 词: 政治经济学; 价值理论; 变分法; Euler 方程; 守恒律
中图分类号: F224.9 文献标识码: A

概 述

商品的价格围绕其价值上下波动被认为是商品的固有的规律, 即价值规律。 股票是一种商品, 自然也服从价值规律。 即股票的价格也围绕其价值波动。 如何确定股票的价值对分析股市走势, 决策投资具有重要的意义。 传统的马克思主义政治经济学认为商品的价值是由生产该商品所必需的社会平均熟练程度和劳动强度而耗费的劳动时间决定的[1]。 这定义不仅不方便量化地定出股票的价值, 而且股票的价值不只依赖于该商品上市公司的业绩, 还与其它金融系统的利率有关。 本文由基本方程之一, 就能方便地定出股票的价值, 揭示出股票的价值与上市公司业绩、银行利率以及时间之间的关系。

守恒律是自然规律的一种重要的表现形式。 能量守恒被认为是 19 世纪三大重要发现规律之一。 在股市报刊中亦常见到有“能量”(如多方能量, 空方能量, 能量选股等[2])之类的提法, 却从未有其准确的含义或科学的定义。至于守恒律如何导出? 这是一个对指导科学研究很有意义的问题。 在经济领域中, 据[3], 是 Samuelson(1970)首先将经典力学中的总能量守恒律的概念引入经济学守恒律。Harao Kataoka 和 Hiroaki Hashimoto 用 Noether 定理给出新的经典 von Neumann 模型的新的守恒律[3]。 本文认为守恒, 从数学角度来看是对某一或某些变量无关或其导数为零, 因此, 将问题归结为极值问题也可以导出守恒律。 本文不用 Noether 定理, 将股能定义为股价 v, 其导数 $\dot{v}$ 的二次函数, 在基本方程的约束下, 建立约束条件下的股能极值问

* 收稿日期: 1999-02-01; 修订日期: 2000-01-29
作者简介: 云天铨(1936—), 男, 海南文昌人, 教授, 已发表论文 90 余篇, 专著 2 本, 三次获省、厅级自然科学奖、科技进步奖, 近期兴趣: 金融衍生产品的数学力学分析.

题。 引入 Lagrange 乘数, 用变分法 Euler 方程可证股能对任何的 v、$\dot{v}$ 守恒。

文中给出应用这些方程和理论对股市走势作分析的一些判断, 并为深沪股市的实际走势所验证。

1 股票的价值理论

如上述用[1]的定义来考察股票的价值显得抽象而难于定出。股票的价值用平衡状态下股票的价格来定义就最恰当且最方便。因为外部因素消除后, 股价波动最终趋向平衡状态下的价位, 以此来定义股票的价值(简称股值)符合价值规律。

按照平衡状态定义[4], 资金不再流动, 各种投资均获相同的利率时即为平衡状态, 用公式表示为

$$r_1^* = a r_2^*, \tag{1}$$

式中 * 号表示平衡状态, r 表示利率, 下标 1 代表股市(各个股利率相同), 2 代表银行。常数 $a > 1$, 这是因为存款入银行风险较小且不用投资者费心操作。

由利率、股价及股价变化率方程[4], 得

$$r_1 = r_1(t) = \dot{v}(t)/v(t), \tag{2}$$

式中 v 为股价, $(\dot{\ }) = \mathrm{d}(\ \ )/\mathrm{d}t$, t 为时间。联解(1)、(2)式, 得

$$v^*(t) = v^*(0)\exp(a r_2^* t), \tag{3}$$

式中 $v^*(0)$ 代表时刻 $t = 0$ 时的股价, $v(t)$ 为时刻 t 时的股价, v^* 代表股值。

(3)式表示股票的价值理论。

分析这个理论, 有如下特点:

1) 股值 $v^*(t)$ 不仅取决于初值 $v^*(0)$(代表上市公司业绩等自身因素), 还与银行利率 r_2^* 有关。

2) 股值 $v^*(t)$ 随时间增加呈指数式增大。

几个问题研讨:

(A) 如何确定 $v^*(0)$

据定义, 利率= 利润/本金。取上市公司年报业绩公布的时刻为 $t = 0$, 公布的每股税后盈利 x 元为利润, $v^*(0)$ 作为本金, 则

$$v^*(0) = x/r_1^*(0) = x/[a r_2^*(0)]。 \tag{4}$$

通常用市盈率 $M = v/x$ 来判断股价 v 是高或低, 有无投资价值。若

$$M(0) = v(0)/x = 1/[a r_2^*(0)], \tag{5}$$

则 $v(0) = v^*(0)$, 此时股价等于股值。(4)或(5)为 $v^*(0)$ 或合适的 $M(0)$ 提供简便算法。

(B) 银行利率变化如何确定 $v^*(t)$

设 $0 < t < t_1$ 时银行利率为 r_2^*, 当 $t_1 \leqslant t < t_2$ 时银行利率为 $r_2^* + \Delta r_2^*$, 由(3)得

$$v^*(t_1^-) = v^*(0)\exp(a r_2^* t_1), \qquad (t_1^- = t_1 - 0),$$

$$\begin{aligned} v^*(t) &= v^*(t_1^-)\exp[a(r_2^* + \Delta r_2^*)(t - t_1)] = \\ &\quad v^*(0)\exp[a(r_2^* t_1 + (r_2^* + \Delta r_2^*)(t - t_1))], \qquad (t > t_1)。 \end{aligned} \tag{6}$$

2 约束方程

[4]中的几个基本方程, 可以单独分析, 也可以组合在一起分析。在此取[4]的(2.2)、

(2.6)、(2.7)作为本文的约束方程。即取

$$A_p(t+\Delta t) = p_1 v^{-1}(t) + p_2\dot{v}(t) + kA_p(t) + m[r_1(t) - r_2(t)], \tag{7}$$

$$A_s(t+\Delta t) = s_1 v(t) - s_2\dot{v}(t) + kA_s(t), \tag{8}$$

式中 A 代表量;下标 p 和 s 分别代表买入和卖出;p_1, p_2, s_1, s_2, k, m 为系数。对比(7)、(8)和[4]的(2.6)、(2.7)式:(7)式的末项为[4]的(2.2)式,表示因股市与银行利率差而流入股市的资金即时注入$(t+\Delta t)$时刻的买入量(当$r_1(t) < r_2(t)$时,在(8)式中加上(7)式的末项,表示资金即时从卖盘中流向银行),$m = 1/k_{21}$;[4]的(2.6)式 $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $p_3 = k$;[4]的(2.7)式与(8)式比,略去难于准确估计的 A_f 与 A_g 项,并取 $b_1 = b_2 = b_3 = 1$, $s_3 = k$。

按照供求差决定股价升降的假定。即[4]的(2.9)式,有

$$\dot{v}(t)\Delta t = v(t+\Delta t) - v(t) = g[A_p(t) - A_s(t)], \tag{9}$$

式中常数 g 使左右两边量纲相等,时间离散化,取 $\Delta t = 1$。

由(7),(8),(9)及(2)式得

$$\begin{aligned}\ddot{v}(t)/g &= [\dot{v}(t+\Delta t)\Delta t - \dot{v}(t)\Delta t]/g = \\ &[A_p(t+\Delta t) - A_s(t+\Delta t)] - [A_p(t) - A_s(t)] = \\ &p_1 v^{-1}(t) - s_1 v(t) + n\dot{v}(t) + m[\dot{v}(t)/v(t) - r_2(t)]\end{aligned}$$

或

$$v(t)\ddot{v}(t) = g[p_1 - s_1 v^2(t) + nv(t)\dot{v}(t) + m\dot{v}(t) - mr_2(t)v(t)]。 \tag{10}$$

式中 $n = p_2 + s_2 + k - 1$。

(10)式是股价的控制或约束方程。

约束方程在股市走势分析中的应用。

测顶或探底是股市走势分析中重要的一环,是股评和专业人士追逐的目标。如何判断这个“顶”或“底”是局部的还是较长时间范围内的?(10)式将为这一判断提供数学依据。

设在时刻 t_1 和 t_2,股价皆达极小值,即有 $\dot{v}(t_1) = \dot{v}(t_2) = 0$。我们来比较这两个极小值那个更小些。

记 $v(t_1) = v_1$, $v(t_2) = v_2$,此时(10)式给出:

$$\ddot{v}_2 - \ddot{v}_1 = g[p_1/(v_1 v_2) + s_1](v_1 - v_2)。 \tag{11}$$

因 $g[p_1/(v_1 v_2) + s_1] > 0 \quad (p_1, s_1, v_1, v_2, g > 0)$

故若 $\ddot{v}_2 > \ddot{v}_1 (> 0)$,则 $v_1 > v_2$, (12)

$\ddot{v}$ 表示$v(t)$的曲率。(12)式表明:曲率愈大的极小值,其价位愈低。也就是急跌接着急反弹(具有大曲率)的底将是很低的。同样可证急升接着又急跌所形成的顶将是很高的。

深沪两市走势记录证实了上述这一判断。图 1 和图 2 分别代表深成指和上证指数近年的最低和最高在内的走势记录。从图 1 可见 1998 年 8 月 18 日,深成指急跌急反弹所形成的 2 978 点的底是较长时间范围内的底。图 2 的 1996 年 12 月 16 日,1997 年 5 月中急升接着急降所形成的顶是沪股的历史的较高和最高。

3 股能守恒理论

在材料力学中有能量强度理论,古典力学中有机械能守恒。按逻辑推理,这些概念和理论应可引伸到股市分析。实际上证券报刊上常见到能量一词,只是从未见有准确的含义和科学的定义。怎样科学地定义股能?不妨反向思维,将一未知的函数,令它满足守恒律,然后将其

称之为股能。守恒律又怎样得出？从数学上说只要构造一个极值问题，便可由极值条件求出守恒律。这就是本文的思路。

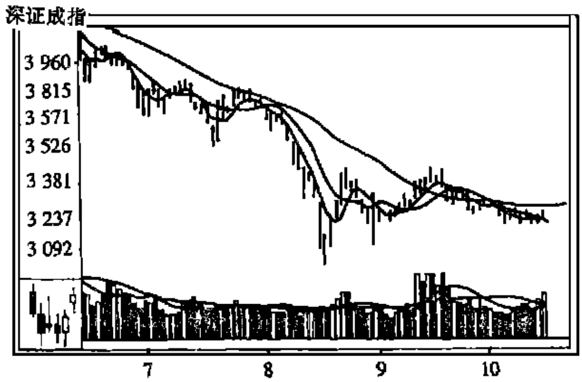

图 1　深圳成份指数走势图

（复制取自“广州日报”周末版 1998-10-17）

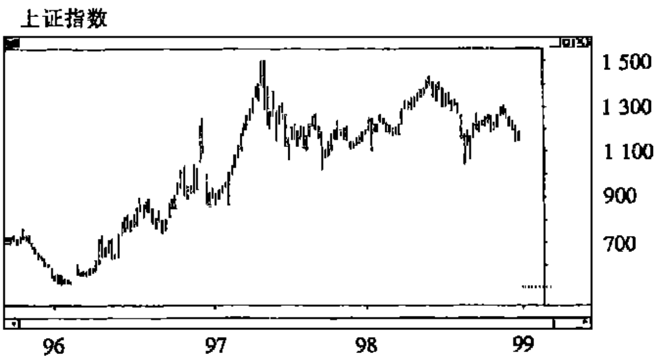

图 2　上证指数走势图（复制取自“广州日报”B_7 版 1998-12-26）

考虑最优路径上泛函的极值：

$$\max \text{ or } \min \int_0^T \phi(t, v, \dot{v})\,\mathrm{d}t, \tag{13}$$

$$\text{s.t. } F = F(t, v, \dot{v}, \ddot{v}) = \ddot{w} - g[p_1 - s_1 v^2 + nv\dot{v} + m\dot{v} - mr_2 v] = 0, \tag{14}$$

其中　$$\phi = Av^2 + Bv\dot{v} + C\dot{v}^2 + Dv, \tag{15}$$

A、B、C、D 为待定常数。

这是一个条件约束极值问题。引入 Lagrange 乘数 λ 化为无约束极值问题。即作泛函 L

$$L = L(t, \lambda, v, \dot{v}, \ddot{v}) = \phi + \lambda F \tag{16}$$

使(13)、(14)变为沿最优路径的无约束极值问题：

$$\max \text{ or } \min \int_0^T L\,\mathrm{d}t。 \tag{17}$$

设只在曲线族 $v = v(t, \varepsilon)$（ε 为参数）上考虑泛函

$$R[v(t)] = \int_0^T L\,\mathrm{d}t \tag{18}$$

的值，则泛函成为 ε 的函数[5, p.17] 并记为 φ(ε)。泛函的极值是两端(0, T)固定的诸允许泛函

相互比较的值。这个极值的必要条件是在 $\varepsilon=0$ 时它的导数为零,即 $\varphi'(0)=0$。据变分法,泛函 $\varphi(\varepsilon)=R[v(t,\varepsilon)]$ 极值的必要条件是使其变分 $\delta\varphi=0$[5, p.19],即

$$\int_0^T [L_\lambda\delta\lambda+L_v\delta v+L_{\dot v}\delta\dot v+L_{\ddot v}\delta\ddot v]\,\mathrm{d}t=0, \tag{19}$$

式中 $L_{(\ )}=\partial L/\partial(\ \ )$;$\lambda$ 与 t 无关;δv、$\delta\dot v$、$\delta\ddot v$ 之间的关系可用分部积分都化作 δv,则上式写成([5, p.35])

$$\int_0^T\left\{L_\lambda\delta\lambda+\left[L_v-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_{\dot v}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}L_{\ddot v}\right]\delta v\right\}\mathrm{d}t=0。 \tag{20}$$

由于 $\delta\lambda$ 与 δv 相互独立,有

$$L_\lambda=0, \tag{21}$$

$$L_v-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_{\dot v}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}L_{\ddot v}=0。 \tag{22}$$

(22)式亦即 Euler 方程,其展开式为:

$$\begin{aligned}&L_v-L_{\dot v t}-L_{\dot v v}\dot v-L_{\dot v\dot v}\ddot v-L_{\dot v\ddot v}\dddot v+L_{\ddot v tt}+2L_{\ddot v tv}\dot v+\\&\quad 2L_{\ddot v t\dot v}\ddot v+2L_{\ddot v t\ddot v}\dddot v+L_{\ddot v vv}\dot v^2+2L_{\ddot v v\dot v}\dot v\ddot v+\\&\quad 2L_{\ddot v v\ddot v}\dddot v\dot v+L_{\ddot v\dot v\dot v}\ddot v^2+2L_{\ddot v\dot v\ddot v}\dddot v\ddot v+L_{\ddot v\ddot v\ddot v}\dddot v^2=0。\end{aligned} \tag{23}$$

将(15)、(16)代入(23),得

$$\begin{aligned}&L_v-L_{\dot v t}-L_{\dot v v}\dot v-L_{\dot v\dot v}\ddot v=v(2A+2\lambda gs_1)+\\&\quad\dot v(B-\lambda gn)+\ddot v(\lambda-4C)+D+\lambda gmr_2=0。\end{aligned} \tag{24}$$

联解(21)(即(14)式)和(24),即以(14)式代入 $v\times$(24)式,得

$$\begin{aligned}&v^2(2A+\lambda gs_1+4Cgs_1)+w\dot v(B-4Cgn)+v(D+4Cmr_2)+\\&\quad gp_1(\lambda-4C)+m\dot v(\lambda-4C)g=0。\end{aligned} \tag{25}$$

(25)式也就是泛函 ϕ 的极值的必要条件。令(25)式对任何的 v、$\dot v$ 皆成立,只需上式各括号皆等于零,即得

$$C=\lambda/4,\ A=-\lambda gs_1,\ B=\lambda gn,\ D=-\lambda gmr_2。 \tag{26}$$

在以 ε 为参数的曲线族 $v=v(t,\varepsilon)$ 中,我们称(14)式的解 $v=v(t)=v(t,0)$(即 $\varepsilon=0$)为最优路径,或极值曲线。以(26)式的常数构成的(15)式的 ϕ,即

$$\phi=-\lambda gs_1v^2+\lambda gnw\dot v+\frac{\lambda}{4}\dot v^2-\lambda gmr_2v \tag{27}$$

沿最优路径达其极值。或者说在最优路径上,对任何的 v、$\dot v$ 值,ϕ 皆守恒。

若称 ϕ 为股能,只要 $v=v(t)$ 是约束方程(14)即(16)的解,则对任何时刻 t,股能 ϕ 皆守恒。这就是股能守恒理论。

4 股能守恒理论的应用

以下是一些很初步的应用:

1. 测定系数

基本方程根据一些假定得出,其中包含许多系数。这些系数如果未能准确测定,就很难应用这些方程到股市分析。文[6]也曾应用股市走势的资料记录去测定系数。现在,股能守恒理论也可方便地用来测定系数。

以(15)式定义的股能,有 A、B、C、D 这4个系数,连同未知的股能 ϕ 共用5个未知数。一

般需要5个方程就足以确定这5个未知数。 取5个时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_5$，从股市资料记录中，得出 $v(t_1)$、$\dot{v}(t_1)$ 至 $v(t_5)$、$\dot{v}(t_5)$。 代入(15)式，可解出 A、B、C、D 及 ϕ。 再由(26)式、(27)式，求出 λ、g、s_1、n、m 这5个系数。

2 估计股价的顶和底

在不太长的时间间隔范围内，即诸系数仍可看作不变的常数的情况下，应用股能(27)式，可预报近期(这些常系数仍适用)股价的顶和底。

以 $\dot{v}=0$ 代入(27)式，解得相应的股价分别为 v_1 和 v_2(当 $\dot{v}\leqslant 0$ 时 $m<0$)：

$$v_{2}^{1}=(1/2)\left[-mr_2/s_1\pm\sqrt{\left(mr_2/s_1\right)^2+4\phi/\lambda g s_1}\right], \tag{28}$$

$$v_1-v_2=\sqrt{\left(mr_2/s_1\right)^2+4\phi/\lambda g s_1}. \tag{29}$$

(29)式表示股价的顶和底之差，即最大振幅。为短线投资决策是否入市，是否有利可图提供参考依据。

[参 考 文 献]

[1] 方兆强，钱松年. 政治经济学[M]. 北京：高等教育出版社，1993, 19—20.

[2] 廖黎辉. 能量选股[N]. 广州日报，1998-12-26(7).

[3] Haruo Kataoka, Hiroaki Hashimoto. New conservation laws in a neoclassical von Neumann model [J]. *J Math Economics*, 1995, **24**: 271—280.

[4] 云天铨. 计算股市的基本方程、理论和原理(Ⅰ)——基本方程[J]. 应用数学和力学，1999, **20**(2): 145—152.

[5] 艾利斯哥尔兹ЛЭ. 变分法[M]. 李世晋 译. 北京：高等教育出版社，1958, 17—35.

[6] 云天铨. 常规情形的股价短期预测[J]. 华南理工大学学报，1997, **25**(5): 47—51.

Basic Equations, Theory and Principle of Computational Stock Market (Ⅲ)—Basic Theories

YUN Tian-quan

(*Department of Mechanics, South China University of Technology, Guangzhou* 510641, *P R China*)

Abstract: By basic equations, two basic theories are presented: 1. Theory of stock's value $v^*(t)=v^*(0)\exp(ar_2^* t)$. 2. Theory of conservation of stock's energy. Let stock's energy ϕ be defined as a quadratic function of stock price v and its derivative $\dot{v}$, $\phi=Av^2+Bv\dot{v}+C\dot{v}^2+Dv$, under the constraint of basic equation, the problem was reduced to a problem of constrained optimization along optimal path. Using Lagrange multiplier and Euler equation of variation method, it can be proved that ϕ keeps conservation for any v, $\dot{v}$. The application of these equations and theories on judgement and analysis of tendency of stock market are given, and the judgement is checked to be correct by the recorded tendency of Shenzhen and Shanghai stock markets.

Key words: political economics; theory of value of goods; variational method; Euler equation; conservation law