应用数学和力学, 第 20 卷 第 2 期(1999 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

论文编号: 1000-0887(1999)02-0145-152

计算股市的基本方程、理论和原理(Ⅰ)——基本方程*

云 天 铨

华南理工大学 力学系, 广州 510641

摘要: 本文采用网络模型和类似于固体力学的方法论来研究计算股市。建立四个基本的联立方程, 即: 利率-流通量方程; 股票买入、卖出方程; 股价变化率方程; 以及利率、股价及股价变化率方程。文中着重讨论利率-流通量方程的解及其简单应用, 包括时间离散化时股市网络用 Banach 收缩映射定理证明最终趋向平衡状态, 以及银行减息引起资金流动按指数型式衰减等。

关键词: 股票市场; 网络模型; 微分方程; 收缩映射; 弹性理论; 方法论
分类号: F224.9 文献标识码: A

概 述

尽管要达到现今的计算数学、计算力学那样的水平还有漫长的路要走, 现代经济分析还是朝计算经济方向发展。股市是市场经济活动的晴雨表。当前, 计算经济的研究论文不少(如[1～2]), 但涉及股市的却很少见到。在国内, 有关股市的出版物(如[3～5])多是行情资料, 走势推测, 获利的技术操作或经验等, 谈不上定量计算规律的探讨。至于股市的理论, 国外的道氏理论和波浪理论[3]在流行。道氏理论由道氏于 1884 年提出, 遗憾的是道氏从未为其理论著书立说, 其理论由后人提炼于 1932 年发表[3]。艾略特波浪理论于 1938 年提出, 认为股市和大自然潮汐一样具有相当的规律性, 其波形、比例、时间和费波尼西数有关[3]。道氏理论欠规律性概括, 波浪理论缺乏把股市与大自然潮汐联系在一起的联系依据。二者都未能由数学方程式推导出来。

本文是对计算股市的基本方程、理论和原理作系列研究的第(Ⅰ)部份。系列研究的目的是要初步建立计算股市的框架。为预测走势提供计算的理论和方法。本文的目的是建立和探讨计算股市的基本方程, 为计算股市的理论提供数学依据。

在第 1 节, 讨论计算模型、方法论和影响因素。在此, 采用网络模型和类似固体力学研究的方法论; 影响因素区分为连续性出现的经济因素(如利率, 供求关系等时刻都在变动的因素)和间隔性出现的政治因素(如政策, 政局等)。

在第 2 节, 类似固体力学的本构方程、位移和应变方程、平衡方程, 本文建立利率与流通方程; 股票买入、卖出方程; 股价变化率方程; 以及利率、股价及股价变化率方程。

在第 3 节, 着重讨论利率-流通量方程, 包括用拉氏变换求解; 时间离散化时股市网络用

* 收稿日期: 1997-08-11
作者简介: 云天铨(1936～)男, 教授

Banach 收缩射定理证明最终趋向平衡状态;以及银行加息对股市流通量的影响等。

1 计算模型、方法论和影响因素

研究经济问题,可以有多种的模型,不同的方法论。在此讨论:

1.1 计算模型

图1表示一个网络。它有 m 个节点,节点之间用直线连通。在将整个经济看成是一个网络(称经济网络)时,$i=1,2,\cdots,m$ 分别代表各经济部门或行业,如股票证券业、银行金融业、房地产业,……;在股市内部看成是一个网络(称股市网络)时,i 分别代表各个个股以及其与有资金往来的部门或行业。节点之间有资金流动,构成一幅“时-空系统”的经济活动图。

采用网络模型的原因:一是简单,二是它容易和人工神经网络接近。人工神经网络技术曾在多个领域[6]如:自动控制、图像识别、有限元分析[7],以及金融方面预报外币汇率变化[8,9],预报道琼斯工业平均指数走势[10]等有用。估计对股市分析、预报走势也将会是有效的。

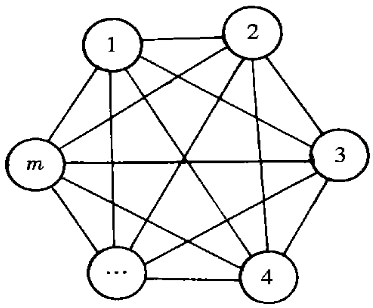

图 1 网络模型

1.2 方法论

在此,不将股市变化看成是无规律的随机现象,用统计理论去分析,而是看成具有某种客观规律,用类似固体力学分析方法来处理。原因是固体力学是物理学乃至整个自然科学中最成熟地运用数学描述和分析的学科。将自然科学中发展最早的学科的方法用于经济问题的量化分析的初期研究,按逻辑推理,应将是有效的。

1.3 影响因素

将影响因素区分为间断地出现的(政治)因素(如:政策、经济数据的公布、消息或传言、政局、战争、灾害等)和连续地出现的(经济)因素(如:利率、供求关系等时刻都在变动的因素)两大类。当在时间间隔 $[0,T]$ 中没间断性因素出现,分析只需考虑连续性因素的影响,在 $t=0$ 之前发生的间断性因素的影响在 $t=0$ 的初始条件中表达。

从众多的经济因素中选择“利率”和“资金流通量”(简称流通量)来描述经济活动规律。利率集中反映了材料、设备、工资、销售、管理效益、物价或通涨等因素。流通量体现了投资的社会趋向。

定义

$$r_i(t,T)\equiv[A_i(t+T)-A_i(t)]/[T\cdot \text{股价}(t)]\ \text{平衡} \tag{1.1}$$

为节点 i 在时刻t 的单位周期的利率。式中 $A_i(t)$ 和 $A_i(t+T)$ 分别是投入和输出的资金数,T 是周期。

记

$$A_{ij}=A_{ij}(t)=-A_{ji}(t)=-A_{ji} \tag{1.2}$$

为“当 $A_{ij}>0$,由节点 i 流向节点j 的资金数”。

2 基本方程

2.1 利率-流通量方程

由市场经济经验,作出假设:

(1) 利率差即时引起如下的流通量

$$r_i - r_j = k_{ji}A_{ji}, \tag{2.1}$$

$$r_i = r_i(t, T) \equiv r_i(t, T) - r_i^*, \quad r_j = r_j(t, T) \equiv r_j(t, T) - r_j^*,$$

式中 k_{ji} 为系数; r_i^* 和 r_j^* 分别代表平衡状态 $A_{ij}=0$ 下节点 i 和 j 的利率(简称初始利率)。一般 $r_i^* \neq r_j^*$。例如:股市的 r_1^* 大于银行的 r_2^*(以下用下标2代表银行,下标1代表股市)。这是因为存款入银行不用投资者操心运作,风险又较小。由于初始利率的差别($r_i^*-r_j^*$)并不引起资金的流动,又不易测定这种差别,因此,下文不计 $r_i^*-r_j^*$,(2.1)式简化为

$$r_i - r_j = k_{ji}A_{ji} \tag{2.2}$$

或者说(2.2)式的 r_i, r_j 应理解为 r_i, r_j。

(2) 流动后节点 i 资金的增量与该节点的利率变化率 $\dot{r}_i$ 成比例,即

$$\dot{r}_i(t) = c_i[A_i(t+\Delta t) - A_i(t)], \quad (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{2.3}$$

$$A_i(t+\Delta t) = A_i(t) + \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(t), \tag{2.4}$$

式中 c_i 为常数,代表节点 i 的资金供求关系对利率升降的敏感程度。例如银行,其利率不因存款的增减立即作出反应,即敏感系数很低。而股市的敏感系数相对地高些。$\dot{r}_i = \partial r_i / \partial t$。

以上的(2.2)、(2.3)式用的是线性假设,它使计算简单,而且只要分段变化常数,如同用折线逼近曲线一样,可以近似处理非线性问题。自然,对(2.2)、(2.3)式也可以作非线性(如幂次式)的假定。

将(2.2)、(2.4)式代入(2.3)式,得:

$$\dot{r}_i(t) = c_i \sum_{j=1}^{m} [r_j(t) - r_i(t)] / k_{ji}, \quad (i = 1, 2, \cdots, m)。 \tag{2.5}$$

(2.5)式是一个线性微分方程组。它描述网络节点间的利率差对节点利率升降变化的关系,是以节点利率来表达的利率-流通量方程。

(2.2)、(2.3)式或(2.5)式在此称为利率-流通量方程。

2.2 股票买入、卖出量方程

对要求买入、卖出股票量(以下简称买入、卖出量)作如下假定:

$$A_p(t+\Delta t) = p_1 v^{-a_1}(t) + p_2 \dot{v}^{a_2}(t) + p_3 A_p^{a_3}(t), \tag{2.6}$$

$$A_s(t+\Delta t) = s_1 v^{b_1}(t) - s_2 \dot{v}^{b_2}(t) + s_3 A_s^{b_3}(t) + A_f + A_g, \tag{2.7}$$

式中 A 代表量; v, $\dot{v}$ 分别代表股价和股价变化率; t 代表时间, Δt 为时间增量; 下标或字符 p, s 分别代表买入和卖出。$p_1 \sim p_3$, $s_1 \sim s_3$ 分别为买入和卖出的系数; $a_1 \sim a_3$ 和 $b_1 \sim b_3$ 分别为买入和卖出的($\geqslant 1$)幂次次数。这些系数可根据行情资料定出。

(2.6)式和(2.7)式分别代表买入和卖出的规律。在[11]中讨论常规情形的简化规律,只取(2.6)、(2.7)式中前两项,且取 $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$,即取线性的假定。(2.6)、(2.7)式的第3项代表"连锁反应"。时刻 t 时的买入或卖出量 $A_p(t)$ 或 $A_s(t)$ 愈大立即导致时刻 $t+\Delta t$ 的买入或卖出量也愈大。系数 p_3, s_3 与 $\dot{v}$ 等有关,当股价急剧变化时, p_3, s_3 较大,即"连锁反应"现象较突出。连锁反应是从众心理的反映。

买和卖是性质相反的交易行为,因此它们大致服从相反性质的规律。若买入量与 v 成正比,则卖出量应与 v 成反比。然而,由于有可能存在 $\dot{v}=0$,为避免计算中出现无穷大,在(2.7)式的第2项宁取 $-s_2\dot{v}^{b_2}$($b_2 \geqslant 1$)而不取 $\dot{v}^{-b_2}$。(2.7)式的末两项为卖出所独有。因为只要有

钱,则人人可以买入,而卖出仅限于持股人。这第 4 项表为

$$A_f = H(t - t_0)H(t_1 - t)A_f, \tag{2.8}$$

式中 H 为 Heviside 函数,即对 $u > 0$, $H(u) = 1$;对 $u < 0$, $H(u) = 0$。(2.8)式表示在时间区段 $t_0 < t < t_1$ 内必须售出持股的 A_f 量。属于这类限期在 t_1 之前必须卖出情形,如用公款炒股,借贷炒股,或其它急需用款必须在时刻 t_1 之前售出的情形。很难准确测定这类股的比例。不过,在股价急升期,由"连锁反应"引至疯狂入市时,往往是大量违规的用公款炒股,借贷炒股,机构入市,大户联系操纵股市等所导至的非常情形。因此,每当有关清理、整顿金融、证券市场之类的政策、文件发布或消息、传言所透露之期限,或年终、周末、节假日等日期常引起股价急泻,可能与抛售这类持股有关。

(2.7)式的第 5 项 $A_g = A_g(t)$ 代表在时刻 t 的新股上市的量,它增加了股市的供给量,即卖出量。

股票的买入和卖出量的规律或方程可视为是许多因素的复杂的函数,即

$$A_p(t) = A_p(\tau, v(\tau)\dot{v}(\tau), A_p(\tau), \cdots), \qquad \tau \in (0, t),$$
$$A_s(t) = A_s(\tau, v(\tau), \dot{v}(\tau), A_s(\tau), \cdots), \qquad \tau \in (0, t),$$

这些函数可以有不同的假定,并依赖于时刻 t 之前的过往的历史资料。在(2.6)、(2.7)式中,采用的是差不多是最简单的假定,其中左边时刻为 $t + \Delta t$ 的量,仅与右边的时刻为 t 的量有关,而不计时刻 t 之前的任何资料。这当中应用了"最近性原理"。关于这原理已于[13]中应用于股市短期预测,详细探讨另文再述。

2.3 股价变化率方程、成交量方程

按照股价的变动全由求供差来决定的假定,有:

$$\dot{v}(t)\Delta t = v(t + \Delta t) - v(t) = g \cdot [A_p(t) - A_s(t)], \tag{2.9}$$

式中常数 g 使左右两边量纲相等。

按照成交量 A_d 的定义,有

$$A_d(t) \equiv \min[A_p(t), A_s(t)]。 \tag{2.10}$$

(2.9)、(2.10)式分别为股价变化率及成交量方程。

2.4 股市利率、股价及股价变化率方程

设在时刻 t 股价为 $v(t)$ 时买入,在时刻为 $t + T$,股价为 $v(t + T)$ 时卖出,则由(1.1)式得股市的平均利率 r_1 为:

$$r_1 = r_1(t, T) = \frac{1}{T \cdot v(t)}[v(t + T) - v(t)] = \frac{1}{T \cdot v(t)}\int_t^{t+T} \dot{v}(u)du。 \tag{2.11}$$

若取 $T = \Delta t(\Delta t \to 0)$,可得瞬时利率为

$$r_1 = r_1(t) = \dot{v}(t)/v(t)。 \tag{2.12}$$

(2.11)、(2.12)式将利率 r_1 和股价及其变化率联系起来。

以上为基本方程。除此之外,还受如下的条件约束:

1. $$I(t + \Delta t) = I(t) + \sum_{j=1}^{m} A_{j1}(t) \geqslant A_p(t + \Delta t); \tag{2.13}$$

2. $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} A_{ij}(t) = 0, \qquad \forall t。 \tag{2.14}$$

(2.13)式的 I 代表股市的保证金,即注入股市的资金数。这个不等式使买入有效。(2.14)式表示网络资金流动总和为零(不计注入的发钞)。

3 基本方程的讨论

以上基本方程可以按所需目的作单独或联合的分析。下面着重讨论利率-流通方程。

3.1 网络利率微分方程组(2.5)的求解

记

$$\bar{r}(s)=L[r(t)]=\int_t^{\infty} r(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{3.1}$$

为函数 $r(t)$ 的 Laplace 变换。将(2.5)式两边作拉氏变换,可得 $\bar{r}_i$ 的线性代数方程组,其解为:

$$\bar{r}_i=\frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{m} r_j(0)\Delta_{ij}, \qquad (i=1,2,\cdots,m), \tag{3.2}$$

式中

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & -c_1/k_{21} & -c_1/k_{31} & \cdots & -c_1/k_{m1} \\ -c_2/k_{12} & a_2 & -c_2/k_{32} & \cdots & -c_2/k_{m2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ -c_m/k_{1m} & -c_m/k_{2m} & -c_m/k_{3m} & \cdots & a_m \end{vmatrix}, \tag{3.3}$$

$$a_i=s+c_i\sum\nolimits^{-}(1/k_{ji}), \tag{3.4}$$

$$\sum\nolimits^{-}(\quad)=\sum_{j=1}^{m}(\quad)-(\quad)_{j=i}, \tag{3.5}$$

Δ_{ij} 为行列式 Δ 划去 i 行 j 列所剩下的代数余子式。$r_j(0)$ 为 $t=0$ 时的初值利率。

将(3.2)式的 $\bar{r}_i$ 作拉氏反变换可得 r_i。

3.2 时间离散化表示的网络利率方程(2.5)

因为许多经济数据,如股市行情等,是在特定的时刻报出,故将时间离散化会给计算带来方便。设取单位时间间隔 $\Delta t=1$(可以是计算机处理数据显示行情所需的时间间隔;可以是分;小时;天等),即取 $t=n(n=1,2,\cdots)$,此时(2.5)式写成

$$r_i(n+1)-r_i(n)=c_i\sum_{j=1}^{m}[r_j(n)-r_i(n)]/k_{ji}, \quad (i=1,2,\cdots,m), \tag{3.6}$$

(3.6)式为时间离散化表示的网络利率动态方程。我们讨论它的最简单的情形,即 $c_i=c$, $k_{ji}=k$,也就是网络各节点的敏感系数 c_i 以及流量系数 k_{ji} 都相同的情形。例如网络节点代表股市个股,研究资金在股市网络内部流动即属此情形。此时(3.6)式写成:

$$r_i(n+1)-r_i(n)=b\sum_{j=1}^{m}[r_j(n)-r_i(n)], \qquad (i=1,2,\cdots,m), \tag{3.7}$$

式中 $b=c/k$ 为常数。(3.7)式换下标 $i\to j$, $j\to u$,

$$r_j(n+1)-r_j(n)=b\sum_{u=1}^{m}[r_u(n)-r_j(n)], \qquad (j=1,2,\cdots,m)。 \tag{3.8}$$

(3.7)式减去(3.8)式并取和数,得

$$\sum_{j=1}^{m}[r_i(n+1)-r_j(n+1)]=$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{r_i(n)-r_j(n)+bm[r_j(n)-r_i(n)]\right\}=$$

$$(1-bm)\sum_{j=1}^{m}[r_i(n)-r_j(n)], \tag{3.9}$$

两边取绝对值,有

$$\left|\sum_{j=1}^{m}[r_i(n+1)-r_j(n+1)]\right|\leqslant$$

$$|1-bm|\cdot\left|\sum_{j=1}^{m}[r_i(n)r_j(n)]\right|。\tag{3.10}$$

记 $X\overline{r}=\{x\}$ 为一集合,其中元素

$$x=x(t)=\sum_{j=1}^{m}[r_s(t)],\qquad (s=1,2,\cdots,m), \tag{3.11}$$

记 $$\|x(n)\|=\sup|x(t)|,\qquad (t=n) \tag{3.12}$$

为连续函数 $x(t)$ 的范数。定义

$$\rho(x,y)\equiv|x-y| \tag{3.13}$$

为赋范空间的距离,其中 $x=\sum_{j=1}^{m}[r_i]$,$(i=1,2,\cdots,m)$,$y=\sum_{j=1}^{m}[r_j]$,即 $x,y\in X$。(3.13)式满足距离的三性质,即 1. $\rho(x,y)\geqslant 0$,及 $\rho(x,y)=0\leftrightarrow x=y$;2. $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z)$,$z\in X$;3. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$。于是(3.10)写成

$$\rho(x(n+1),y(n+1))\leqslant|1-bm|\cdot\rho(x(n),y(n))。\tag{3.14}$$

若 $$|1-bm|=R<1, \tag{3.15}$$

式中 R 为与迭代次数 n 无关的常数,据 Banach 收缩映射定理[11],存在有唯一的不动点,(3.14)式所示的序列的距离收敛于零(不动点),即

$$\mathrm{Lim}\ \rho(x(n),y(n))=0,\qquad (n\to\infty), \tag{3.16}$$

即 $$\lim_{n\to\infty}x(n)=\sum_{j=1}^{m}[r_j]=\lim_{n\to\infty}y(n)=\sum_{j=1}^{m}[r_j]。\tag{3.17}$$

(3.17)式对 $\forall i$ 成立,即

$$\lim_{n\to\infty}r_i(n)=r_i^*=r_j(n)=r_j^*,\qquad \forall i,j, \tag{3.18}$$

(3.18)式表示最终的不动点状态是一平衡状态,那时各个股的利率均相同。只要满足条件(3.15),从任意的初始状态 $r_i(0)$ 开始,经迭代,最终收敛于网络股市的平衡状态,其时,再也没有资金流动了。

3.3 利率-流通方程的简单应用例子——银行减息对股市的影响

为简明计,设网络只有 2 节点,即股市"1"和银行"2"。设

$$c_2/k_{12}=1,\quad c_1/k_{21}=\mu\cdot(c_2/k_{12})=\mu,\qquad (\mu\gg 1), \tag{3.19}$$

(即股市的敏感系数是银行的 μ 倍)由(2.5)式得

$$r_1(t)-r_2(t)=[r_1(0)-r_2(0)]\,\mathrm{e}^{-(1+\mu)t}。\tag{3.20}$$

将(2.2)式代入(3.20)式,得

$$A_{21}(t)=A_{21}(0)\mathrm{e}^{-(1+\mu)t}, \tag{3.21}$$

(3.21)式表明若在 $t=0$ 时刻股市的利率 $r_1(0)$ 高于银行利率 $r_2(0)$,导致有银行资金向股市流动的量为 $A_{21}(0)$。则其后的流动按指数衰减,最终 $A_{21}(\infty)=0$。即网络最终处于平衡状态。

现在研究在 $t=T$ 时刻后银行减息 Δr_2 的影响。当 $t=T$ 时,(3.20)式给出:

$$r_1(T)-r_2(T)=[r_1(0)-r_2(0)]\,\mathrm{e}^{-(1+\mu)T}; \tag{3.22}$$

当 $t > T$ 时,(3.20)式仍适用,此时只需将初值 $r_1(0) - r_2(0)$ 用 $r_1(T) - r_2(T) - (-\Delta r_2)$ 代替,即

$$r_1(t) - r_2(t) = [r_1(T) - r_2(T) + \Delta r_2] e^{-(1+\mu)t}, \qquad (t > T)。 \tag{3.23}$$

将(2.2)式代入(3.23)式,得

$$A_{21}(t) = [A_{21}(T) + \Delta A_{21}] e^{-(1+\mu)t}, \qquad (t > T), \tag{3.24}$$

其中 $\Delta A_{21} = \Delta r_2 / k_{21}$ 为因减息而引起的即时的流动增量。(3.24)式表明在 $t = T$ 瞬间,突然有 ΔA_{21} 的流动增量,其后按指数衰减。同样可以分析银行在 $t = t_1$, $t = t_2$ 等多次加减息的影响。

以上只分析利率和流通量。若要联系股价,需考虑其它方程,如(2.12)等。

至于股票买入、卖出方程等基本方程,因篇幅所限,不在此讨论。这些方程的部分讨论与应用,可参看[12~13]。

参 考 文 献

[1] Amir Rabah. Sensitivity analysis of multisector optimal economic dynamics [J]. *J Math Econom*, 1996, **25**: 123~141

[2] Wai Mun Fung, Ouliaris Sam. Spectral tests of th Martingale hypthesis for exchange rates [J]. *J Appl Econometrics*, 1995, **10**: 255~271

[3] 李杰, 王文军, 刘霞辉, 等. 期货价格分析[M]. 北京: 北京工业大学出版社 1994, 46~64

[4] 常荣庆. 股市致胜 88 招[M]. 北京: 中国经济出版社, 1993, 1~183

[5] 郑海苔. 股市搏击诀窍 183[M]. 北京: 经济出版社, 1992

[6] Clarkson T G. Introduction to neural networks[J]. *Neural Network World*, 1996, **6**(2): 123~130

[7] Yagawa G. Finite elements with network mechanism [A]. In: Tadahiko Kawai ed. *WCCM* 3[C], Vol, **2**, IACM, Chiba, Japan, 1994, 1474~1481

[8] Kuan C M, Liu T. Forecasting exchange rates using feed forward and recurrent neural networks [J]. *J Appl Econom*, 1995, **10**: 347~364

[9] Dunis C L. The economic value of neural network systems for exchange rate forecasting [J]. *Neural Network World*, 1996, **6**(1): 43~55

[10] Baptist G, Lin F C, Nelson J, Jr, Note on the long term trend of the Dow Jones Industrial Average [J]. *Neural Network World*, 1996, **6**(3): 259~262

[11] 云天铨. 积分方程及其在力学中的应用[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1990, 232~234

[12] 云天铨. 股价变化率的基本积分-微分方程[J]. 华南理工大学学报, 1996, **24**(6): 35~39

[13] 云天铨. 常规情形的股价短期预测[J]. 华南理工大学学报, 1997, **25**(5): 47~51

Basic Equations, Theory and Principle of Computational Stock Market (Ⅰ)——Basic Equations

Yun Tianquan
Department of Mechanics, South China University of Technology, Guangzhou 510641, P R China

Abstract: This paper studies computational stock market by using network model and similar methodology used in solid mechanics. Four simultaneous basic equations, i. e., equation of interest rate and amount of circulating fund, equations of purchasing and selling of share, equation of changing rate of share price, and equation of interest rate, share price and its changing rate, have been established. Discussions mainly on the solution and its simple applications of the equation of interest rate and amount of circulating fund are given. The discussions also involve the proof of tending to the equilibrium state of network of stock market based on the time discrete form of the equation by using Banach theorem of contraction mapping, and the influence of amount of circulating fund with exponential attenuation due to the decreasing of banking interest rate.

Key works: stock market; network model; differential equation; contraction mapping; elasticity; methodology