CNY520501：模式识别

习题 2 答案

2018 年 4 月 15 日

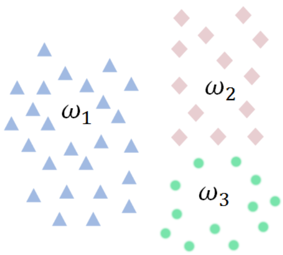
1.　什么是最小距离分类器？分别计算下列两个模式类的平均样本：

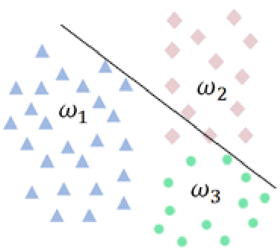
$$\boldsymbol{\omega_1}: \boldsymbol{X_1} = (-1,1)^T, \boldsymbol{X_2} = (1,-1)^T;\ \boldsymbol{\omega_2}: \boldsymbol{X_3} = (1,1)^T, \boldsymbol{X_4} = (1,2)^T$$

最小距离分类器：利用两个模式在特征空间中的距离作为两者之间的相似性度量，由此设计的度量函数就是最小距离分类器

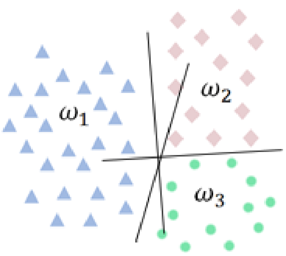
平均样本：$\omega_1: (0,0)^T$；$\omega_2: (1,1.5)^T$

2.　下图所示的样本集合　　　　　　是否总体线性可分？　　是否成对线性可分？





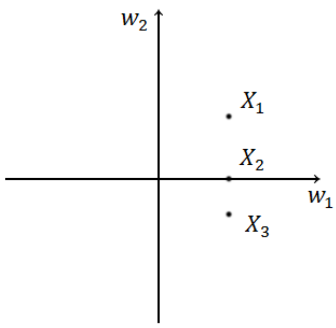
不是总体线性可分

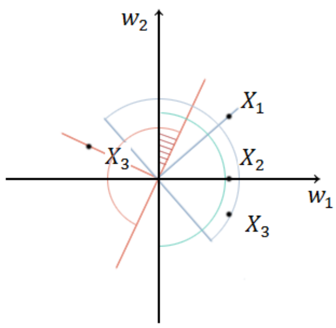


是成对线性可分

3.　画出下图中两个模式类的线性分类器$\boldsymbol{G(X) = W^T X}$的解区

$$\boldsymbol{\omega_1}: \boldsymbol{X_1} = (1,1)^T, \boldsymbol{X_2} = (1,0)^T;\ \boldsymbol{\omega_2}: \boldsymbol{X_3} = \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$$





---

4. 对以下样本集合，使用感知器算法求解线性分类器（取初始W为全 0 向量，取$\rho=1$），写出迭代过程。

$$\boldsymbol{\omega_1}: \boldsymbol{X_1}=(\mathbf{1},\mathbf{0})^T;\ \boldsymbol{\omega_2}: \boldsymbol{X_2}=(-\mathbf{1},\mathbf{0})^T, \boldsymbol{X_3}=(\mathbf{0},\mathbf{1})^T$$

- 模式类的增广形式：$\omega_1: X_1=(1,0,1)^T$；$\omega_2: X_2=(-1,0,1)^T, X_3=(0,1,1)^T$
- $k=0, g(X_1)=0$;　$W(1)=W(0)+\rho X_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$;　$N_c=0$
- $k=1, g(X_2)=2$;　$W(2)=W(1)-\rho X_2=(2,0,0)^{\mathrm{T}}$;　$N_c=0$
- $k=2, g(X_3)=0$;　$W(3)=W(2)-\rho X_3=(2,-1,-1)^{\mathrm{T}}$;　$N_c=0$
- $k=3, g(X_1)=2$;　$W(4)=W(3)$;　$N_c=1$
- $k=4, g(X_2)=-3$;　$W(5)=W(4)$;　$N_c=2$
- $k=5, g(X_3)=-2$;　$W(6)=W(5)$;　$N_c=3$

注：

1. 增广形式
2. 迭代终止的条件为$N_c=$样本个数
3. 每次迭代只输入一个样本

---

5. 对以下样本集合，使用感知器算法求解线性分类器并保证不存在不确定区域（取初始W为全 0 向量，取$\rho=1$），写出迭代过程。

$$\boldsymbol{\omega_1}: \boldsymbol{X_1}=(\mathbf{1},\mathbf{1})^T;\ \boldsymbol{\omega_2}: \boldsymbol{X_2}=(-\mathbf{2},\mathbf{1})^T;\ \boldsymbol{\omega_3}: \boldsymbol{X_3}=(\mathbf{2},-\mathbf{2})^T$$

- 初始化

  模式类的增广形式：$\omega_1: X_1=(1,1,1)^T$；$\omega_2: X_2=(-2,1,1)^T$；$\omega_3: X_3=(2,-2,1)^T$

  初始化三个决策函数$g_1(X)=W_1^TX, g_2(X)=W_2^TX, g_3(X)=W_3^TX$
- $k=0$，$g(X_1)=0$，$g(X_1)=0$，$g(X_1)=0$，$N_c=0$

$$\begin{cases} W_1(1)=W_1(0)+\rho X_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}} \\ W_2(1)=W_2(0)-\rho X_1=(-1,-1,-1)^{\mathrm{T}} \\ W_3(1)=W_3(0)-\rho X_1=(-1,-1,-1)^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

- $k=1$，$g(X_2)=0$，$g(X_2)=0$，$g(X_2)=0$，$N_c=0$

$$\begin{cases} W_1(2)=W_1(1)-\rho X_2=(3,0,0)^{\mathrm{T}} \\ W_2(2)=W_2(1)+\rho X_2=(-3,0,0)^{\mathrm{T}} \\ W_3(2)=W_3(1)-\rho X_2=(1,-2,-2)^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

- $k=2$，$g(X_3)=6$，$g(X_3)=-6$，$g(X_3)=4$，$N_c=0$

$$\begin{cases} W_1(3)=W_1(2)-\rho X_3=(1,2,-1)^{\mathrm{T}} \\ W_2(3)=W_2(2)=(-3,0,0)^{\mathrm{T}} \\ W_3(3)=W_3(2)=(1,-2,-2)^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

- $k=3$，$g(X_1)=2$，$g(X_1)=-3$，$g(X_1)=-3$，$N_c=1$

$$\begin{cases} W_1(4)=W_1(3)=(1,2,-1)^{\mathrm{T}} \\ W_2(4)=W_2(3)=(-3,0,0)^{\mathrm{T}} \\ W_3(4)=W_3(3)=(1,-2,-2)^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

- $k=4$，$g(X_1)=-1$，$g(X_1)=6$，$g(X_1)=-6$，$N_c=2$

$$\begin{cases} W_1(5)=W_1(4)=(1,2,-1)^{\mathrm{T}} \\ W_2(5)=W_2(4)=(-3,0,0)^{\mathrm{T}} \\ W_3(5)=W_3(4)=(1,-2,-2)^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

- $k=5$，$g(X_1)=-3$，$g(X_1)=-6$，$g(X_1)=4$，$N_c=3$

$$\begin{cases} W_1(5) = W_1(4) = (1,2,-1)^{\mathrm{T}} \\ W_2(5) = W_2(4) = (-3,0,0)^{\mathrm{T}} \\ W_3(5) = W_3(4) = (1,-2,-2)^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

- 无不确定区域的解：

$$\begin{cases} G_{12}(X) = g_1(X) - g_2(X) = (4,2,-1)^T \\ G_{13}(X) = g_1(X) - g_3(X) = (0,4,1)^T \\ G_{23}(X) = g_2(X) - g_3(X) = (-4,2,2)^T \end{cases}$$

注：

1. 增广形式
2. 注意不确定区域的消除方法

---

6. 对于二维线性判别函数$g(X) = 4x_1 - 3x_2 + 5$

a) 将判别函数写成矩阵形式$g(x) = W^T X + w_{n+1}$

$$W = [4,-3]^T,\ \ X = [x_1, x_2]^T,\quad w_{n+1} = 5,\ \ g(X) = [4,-3]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 5$$

b) 映射成广义线性函数$f(Y) = W^T Y, Y = (y_1, y_2, y_3)^T = (2x_1, x_2, 1)^T$

$$W = [2,-3,5]^T,\ \ f(Y) = [2,-3,5]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

---

7. 用广义线性判别函数法解决以下两个模式类的分类：

$$\boldsymbol{\omega_1}: X_1 = (1,0)^T, X_2(-1,0)^T;\ \ \boldsymbol{\omega_2}: X_3 = (0,1)^T, X_4 = (0,-1)^T$$

a) 设计变换函数$y_i = f_i(x_1, x_2), i = 1, 2, \ldots$使变换后的样本在 Y 空间线性可分。

$$Y = [y_1, y_2]^T = [x_1, x_2^2]^T$$

b) 给出一个决策面函数$g(Y)$

$$g(Y) = [0,1]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - 0.5$$

注：

1. 不少同学写$g(Y) = \frac{1}{2}$，注意$g(Y)$是关于Y的函数，正确应为$g(Y) = y_1 - 1/2$
2. 本题解法不唯一

---

8. 若准则函数的形式为$J(W, X) = \frac{1}{2}(1 - W^T X)^2$。$W = (2,1)^T, X_1 = (2,3)^T, X_2 = (1,4)^T$，在应用梯度下降法时，求$\nabla J(W, X_1)$和$\nabla J(W, X_2)$

$$\nabla J(W,X) = \frac{\partial J}{\partial W} = (1 - W^T X)(-X)$$

$$\nabla J(W, X_1) = (1 - W^T X_1)(-X_1) = (-6)[-2,-3]^T = [12,18]^T$$

$$\nabla J(W, X_2) = (1 - W^T X_2)(-X_2) = (-5)[-1,-4]^T = [5,20]^T$$

注：很多同学误写为$\nabla J(W,X) = (1 - W^T X)(-W)$

---

9. 利用位势法对以下模式类进行分类，位势函数选$K(X,X_n)=\exp\left(-\left||x-x_n|\right|^2\right)$, $K_{\mathrm{A},0}(x)=0$

$$\omega_1: X_1=(0,0)^T, \mathrm{X}_2=(1,2)^T; \omega_2: X_3=(1,-1)^T, X_4=(3,0)^T$$

- $k=0,\quad X'=X_1=(0,0)^T,\quad K_{A,0}(X')=0,\quad N_c=0$
  因为$X'\in\omega_1$，且$K_{A,0}(X')\le 0$

$$K_{A,1}(X)=K_{A,0}(X)+K(X,X')=\exp\{-\left||X|\right|^2\}$$

- $k=1,\quad X'=X_2=(1,2)^T,\quad K_{A,1}(X')=\exp\{-1\}>0,\quad N_c=1$
  因为$X'\in\omega_1$，且$K_{A,0}(X')>0$

$$K_{A,2}(X)=K_{A,1}(X)=\exp\{-\left||X|\right|^2\}$$

- $k=2,\quad X'=X_3=(1,-1)^T,\quad K_{A,2}(X')=\exp\{-2\}>0,\quad N_c=0$
  因为$X'\in\omega_2$，且$K_{A,0}(X')>0$

$$K_{A,3}(X)=K_{A,2}(X)-K(X,X')=\exp\left\{-\left||X|\right|^2\right\}-\exp\{-\left||X-(1,-1)^T|\right|^2\}$$

- $k=3,\quad X'=X_4=(3,0)^T,\quad K_{A,3}(X')=\exp\{-9\}-\exp\{-5\}<0,\quad N_c=1$
  因为$X'\in\omega_2$，且$K_{A,0}(X')<0$

$$K_{A,4}(X)=K_{A,3}(X)=\exp\left\{-\left||X|\right|^2\right\}-\exp\{-\left||X-(1,-1)^T|\right|^2\}$$

- $k=4,\quad X'=X_1=(0,0)^T,\quad K_{A,4}(X')=1-\exp\{-2\}>0,\quad N_c=2$
  因为$X'\in\omega_1$，且$K_{A,0}(X')>0$

$$K_{A,5}(X)=K_{A,4}(X)=\exp\left\{-\left||X|\right|^2\right\}-\exp\{-\left||X-(1,-1)^T|\right|^2\}$$

- $k=5,\quad X'=X_2=(1,2)^T,\quad K_{A,5}(X')=\exp\{-5\}-\exp\{-9\}>0,\quad N_c=3$
  因为$X'\in\omega_1$，且$K_{A,0}(X')>0$

$$K_{A,6}(X)=K_{A,5}(X)=\exp\left\{-\left||X|\right|^2\right\}-\exp\{-\left||X-(1,-1)^T|\right|^2\}$$

- $k=6,\quad X'=X_3=(1,-1)^T,\quad K_{A,6}(X')=\exp\{-2\}-1<0,\quad N_c=4$
  $\because N_c=4$ ∴迭代结束
- 最终位势函数为：

$$\exp\left\{-\left||X|\right|^2\right\}-\exp\{-\left||X-(1,-1)^T|\right|^2\}$$

---

10. 用 Fisher 线性判别法对以下模式类构造分类器，确定最佳投影方向

$$\omega_1: X_1=(0,0)^T, \mathrm{X}_2=(1,2)^T; \omega_2: X_3=(1,-1)^T, X_4=(3,0)^T$$

- 计算两个样本的均值向量：

$$m_x^1=\frac{1}{n_1}\sum_{X_k\in\omega_1}X_k=[0.5,1]^T$$

$$m_x^2=\frac{1}{n_2}\sum_{X_k\in\omega_2}X_k=[2,-0.5]^T$$

- 计算类内总离散度矩阵：

$$S_w=\sum_{X_k\in\omega_1}(X_k-m_x^1)(X_k-m_x^1)^T+\sum_{X_k\in\omega_2}(X_k-m_x^2)(X_k-m_x^2)^T$$

$$=\begin{bmatrix}0.5 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.5 & 2\\ 2 & 2.5\end{bmatrix}$$

- 计算S_w的逆矩阵S_w^{-1}：

$$S_w^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{9}{9} & \frac{10}{9} \end{bmatrix}$$

- 最佳投影：

$$\begin{aligned} W^* &= S_w^{-1}(m_x^1 - m_x^2) \\ &= [-3,3]^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

注：有疑问或习题有错误请联系助教
张海峰： hfz@mail.ustc.edu.cn
谢晓路： xxxl@mail.ustc.edu.cn