Τρίτη προγραμματιστική εργασία - Μάθημα Αλγορίθμων

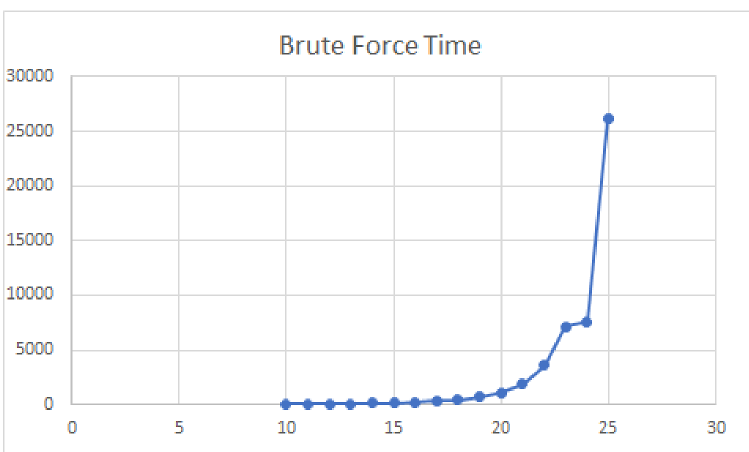
Νικόλαος Σμυρνιούδης (3170148)

2 Ιουνίου 2019

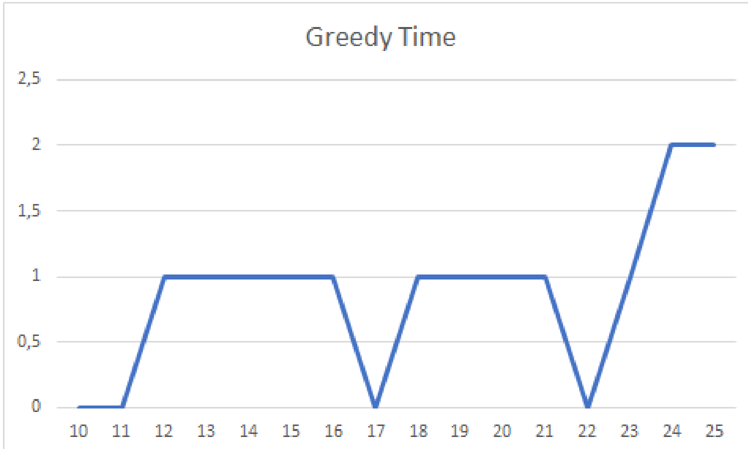
1 Άσκηση 3.3

Οι δοκιμαστικές εκτελέσεις του αλγορίθμου έγιναν με την μέθοδο generateRandomGraph(int size) η οποία δημιουργεί έναν γράφο μεγέθους size και προσθέτει κάθε ακμή με πιθανότητα 0.5

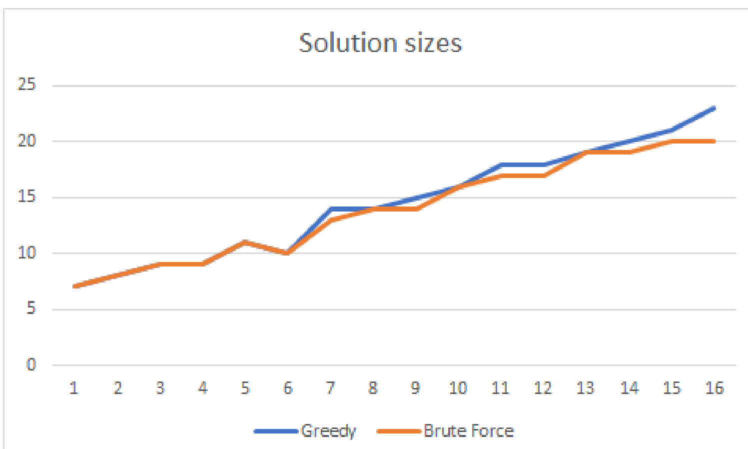
Ο αλγόριθμος εξαντλητικής αναζήτησης ελέγχει κάθε πιθανό υποσύνολο των κόμβων και συνεπώς τρέχει σε χρόνο $\mathcal{O}(2^{|V|})$. Αυτό μπορεί να φανεί και απο τις παρακάτω πειραματικές εκτελέσεις αφού κάθε φορά που αυξάνεται το πλήθος των κόμβων κατα ένα, ο απαιτούμενος χρόνος διπλασιάζεται.



Σε αντίθεση ο greedy αλγόριθμος χρειάζεται $\mathcal{O}(|V|^2)$ χρόνο (ο εξωτερικός βρόχος τρέχει το πολύ $|V|$ φορές, removeVertex τρέχει το removeEdge το πολύ $|V|$ φορές, το findMax διατρέχει όλους τους κόμβους σε $|V|$ χρόνο) και αυτό φαίνεται από τα πειράματα αφού για μικρές αλλαγές δεν αλλάζει σημαντικά ο χρόνος εκτέλεσης.



Τέλος, παρόλο που ο greedy αλγόριθμος βρίσκει VC με περισσότερους κόμβους απο το optimal VC του brute-force, αυτή η διαφορά δεν είναι μεγάλη και σίγουρα δεν θα άξιζε να τρέξουμε τον brute-force αλγόριθμο μέχρι να σβήσει ο ήλιος για να βρούμε το optimal vertex cover για έναν γράφο με 100 κόμβους.



2 Άσκηση 3.4

Dominating Set:

Δεδομένου γράφου $G(V, E)$ και ακεραίου k, υπάρχει $V' \subseteq V : \forall x \in V - V' : \exists y \in V' : \{x, y\} \in E$ με $|V'| = k$

Subset Cover:

Δεδομένου συνόλου $S = \{x_1, .., x_n\}$, υποσυνόλων του $S_1, ..., S_m$ για τα οποία ισχύει $S_1 \cup ... \cup S_m = S$ και ακεραίου k, υπάρχουν $S_{x_1}, ..., S_{x_k}$ τέτοια ώστε $S_{x_1} \cup ... \cup S_{x_k} = S$

Ακολουθεί ένα λήμμα που θα είναι χρήσιμο στην αναγωγή

Lemma 1. *Έστω $G(V, E)$ γράφος και V' dominating-set. Άν προσθέσουμε οποιονδήποτε κόμβο απο το $V - V'$ στο V',το τελικό V' παραμένει dominating-set.*

Απόδειξη:
Έστω $v \in V - V'$. Λόγω του V' , $\forall x \in V - V' : \exists y \in V' : \{x, y\} \in E$. Και επειδή $V - (V' \cup \{v\}) \subseteq V - V'$ και $V' \subseteq V' \cup \{v\}$ τότε θα ισχύει και:

$$\forall x \in V - (V' \cup \{v\}) : \exists y \in V' \cup \{v\} : \{x, y\} \in E.$$

Άρα τελικά το $V' \cup \{v\}$ είναι dominating-set.

Theorem 2. *Το πρόβλημα Dominating Set είναι NP-complete*

Απόδειξη.
- Dominating Set $\in NP$

Έστω V' το Dominating Set με μέγεθος k. Ο αλγόριθμος 1 ελέγχει σε πολυωνυμικό χρόνο αν όντως το V' είναι Dominating Set.

Ο εξωτερικός βρόχος τρέχει το πολύ V φορες, εσωτερικός σε ενώ το αν μεσα στον εσωτερικό βρόχο χρειάζεται να διατρέξει το σύνολο V' σε k βήματα. Συνολικά, ο χρόνος για να ελεγχθεί μια λύση του Dominating Set είναι $\mathcal{O}(V * E * k)$.

- SUBSET-COVER $\leq_p$ DOMINATING-SET:

Η γενική ιδέα της αναγωγής είναι να παράξουμε εναν γράφο όπου κάθε στοιχείο τους συνόλου S είναι ενας κόμβος στο σύνολο X, και επίσης κάθε δεδομένο υποσύνολο του S είναι ένας κόμβος στο σύνολο H. Μετά προστίθενται ακμές στον γράφο ετσι ώστε αν υπάρχει DOMINATING-SET k μεγέθους αυτό να είναι ένα υποσύνολο του H μεγέθους k δηλαδή μια λύση στο πρόβλημα του SUBSET-COVER.

Οι κόμβοι του παραχτέου γράφου θα έχουν ένα πεδίο .d το οποίο θα είναι ενα σύνολο.
Έστω $X = \{x_i | x_i \in S\}$. Θέτουμε για κάθε στοιχείο του X , $x_i.d = \emptyset$.
Θεωρούμε το σύνολο $= \{h_i | i = 1, .., m\}$ Θέτουμε $h_i.d = S_i, i = 1, .., m$. Οι κόμβοι του γράφου θα έιναι το σύνολο $V = T \cup X$. Όσο για τις ακμές θεωρούμε τα σύνολα $E_1 = \{\{u, v\} | u, v \in T\}$, $E_2 = \{\{x_i, v\} | x_i \in S, v \in T$ και $x_i \in v\}$ και θέτουμε ώς σύνολο ακμών το $E = E_1 \cup E_2$

Έτσι έχουμε δημιουργήσει μια συνάρτηση $f(S, S_1, ..., S_m, k) = (G(V, E), k)$ απο στιγμιότυπα του SUBSET-COVER σε στιγμιότυπα του DOMINATING SET.

Lemma 3. *Το στιγμιότυπο $(S, S_1, ..., S_m, k)$ του SUBSET-COVER είναι ναι ανν το $(G(V, E), k)$ στιγμιότυπο του DOMINATING-SET που παράγεται είναι NAI*

Απόδειξη:

$\Longrightarrow$ Έστω πώς υπάρχουν k υποσύνολα απο τα δεδομένα τ.ω. $S_{p_1} \cup ... \cup S_{p_k} = S$. Τότε για το υποσύνολο κόμβων του γράφου που παράγεται μέσω της f, το $V' = \{h_{p_i} | i = 1, .., k\}$, ισχύει πώς για κάθε κόμβο του γράφου που δεν βρίσκεται στο V', αυτός έχει τουλάχιστον έναν γείτονα στο V'. Οι κόμβοι που βρίσκονται στο σύνολο $H - V'$, έχουν γείτονες όλους τους κόμβους στο σύνολο V'. Οι κόμβοι του συνόλου X έχουν όλοι τουλάχιστον έναν γείτονα στο σύνολο V' (επειδή $h_{p_1}.d \cup ... \cup h_{p_k}.d = S$). Προφανώς, το μέγεθος του V' είναι k και συνεπώς είναι DOMINATING-SET k μεγέθους.

$\Longleftarrow$ Έστω το dominating-set μεγέθους k $V' = X' \cup H'$ με $H' \subseteq H, X' \subseteq X$. Για κάθε στοιχείο του X' θα υπάρχει τουλάχιστον ενα στοιχείο του H το οποίο να είναι γειτονικό. Θεωρούμε το σύνολο H'' το οποίο περιέχει έναν αυθαίρετο γείτονα κάθε στοιχείου στο X'. Επειδή $H'' \subseteq X'$ θα ισχύει: $|H' \cup H''| \leq |H' \cup X'| \leq k$.
Μένει να αποδειχτεί πως $H' \cup H''$ είναι dominating-set. Πράγματι για κάθε $v \in H - (H' \cup H'')$ ο v θα έχει έναν γείτονα στο $H' \cup H''$ (ολοι οι κόμβοι στο H συνδέονται με όλους στο H). Επειδή το $X' \cup H'$ είναι dominating-set και επειδή δεν υπαρχουν δυο κόμβοι στο X που να συνδέονται μεταξύ τους, για τούς $v \in X - X'$ ισχύει πως θα έχουν όλοι κάποιον γείτονα στο H' αρα και στο $H' \cup H''$. Τέλος, οι κόμβοι του X που βρίσκοταν στο παλιό DS, δηλαδή οι $v \in X'$ θα έχουν όλοι κάποιον γείτονα στο H' λόγω του πως ορίστικε το H'. Καταλήγουμε τελικά πως για κάθε $v \in V - (H' \cup H'')$ ο v έχει κάποιον γείτονα στο $H' \cup H''$. Αν το μέγεθος του $H' \cup H''$ είναι μικρότερο απο k μπορούμε να προσθέσουμε ,σύμφωνα με το λήμμα 1, οποιονδήποτε αριθμό κόμβων απο το $H - (H' \cup H'')$ στο $(H' \cup H'')$ μέχρι αυτό να γίνει DS k στοιχείων.
Επειδή όλα τα στοιχεία του X έχουν γείτονα στο $(H' \cup H'')$ αυτό σημαίνει πως

$$\bigcup_{h_i \in (H' \cup H'')} h_i.d = S$$

άρα και υπάρχει σύνολο υποσυνόλων k στοιχείων που να κάλύπτει το S.

Τέλος, επειδή το SET-COVER είναι NP-complete , τότε και το DOMINATING-SET θα είναι NP-complete. $\square$

Algorithm 1 checkDS($G(V, E), V'$)

```
for every x ∈ V − V′ do
    found = false
    for every {u, v} ∈ G.E do
        if (u = x AND v ∈ V′) OR (v == x AND u ∈ V′) then
            found = true;
        end if
    end for
    if found == false then
        return false
    end if
end for
return true
```