Линейная Алгебра и Геометрия

Клуб Альтруистичных, Инициативных и Находчивых:
Беляков Денис
Вельдяйкин Николай
Гринберг Вадим
Иовлева Анастасия
Попов Никита
Пузырев Дмитрий
Сухова Ольга
Хайдуров Руслан
Хачиянц Алексей

Надо просто сесть и *постигнуть*.

Р.С. Авдеев

1 Определения

1. **Арифметический n-мерный вектор** — упорядоченный набор n чисел: $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), a_i \in \mathbb{R}$, записанных в строку или столбец.

2. **Арифметическое n-мерное пространство** — множество всех арифметических n-мерных векторов; $\mathbb{R}^n$.

3. **Сумма двух арифметических n-мерных векторов** — $\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$.

4. **Умножение арифметического n-мерного вектора на скаляр** — $k\vec{a} = (ka_1, \dots, ka_n)$.

5. **Длина арифметического n-мерного вектора** — $|\vec{x}| = \sqrt{\langle\vec{x}, \vec{x}\rangle}$ (*прим.:* скалярное умножение: $\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$).

6. **Угол между двумя арифметическими n-мерными векторами** —
$$\alpha = \arccos \frac{\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

7. **Линейная функция** — $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$.

8. **Линейное уравнение** — $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, где x_i — неизвестные. При $b = 0$ уравнение называют *однородным.*

9. **Линейное многообразие** — множество решений в $\mathbb{R}^n$ системы линейных уравнений.

10. **Сумма двух матриц** — $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

11. **Умножение матрицы на скаляр** — $kA = (ka_{ij})$.

12. **Транспонированная матрица** — $A^T = (a_{ji})$.

13. **Произведение двух матриц** — $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$, $B \in \mathrm{Mat}_{n\times l}$, $AB \in \mathrm{Mat}_{m\times l}$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

14. **Диагональная матрица** —$a_{ij} = 0$ при $i \neq j$; обозначение: $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

15. **Единичная матрица** — $E = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$.

16. **След квадратной матрицы** — $\mathrm{tr}\, A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$.

17. **Совместная система линейных уравнений** — есть хотя бы одно решение.

18. **Несовместная система линейных уравнений** — нет ни одного решения.

19. **Определенная система линейных уравнений** — единственное решение.

20. **Неопределенная система линейных уравнений** — более одного решения или решений нет.

21. **Определитель квадратной матрицы второго порядка** — $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

22. **Определитель квадратной матрицы третьего порядка** — $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

23. **Перестановка элементов множества** $\{1,2,\ldots,n\}$ — всякий упорядоченный набор из n элементов $\{1, 2, \ldots, n\}$, в котором каждый элемент встречается ровно один раз.

24. **Подстановка элементов множества** $\{1, 2, \ldots, n\}$ — всякое биективное отображение этого множества в себя; биективная функция, сопоставляющая набору чисел его перестановку.

25. **Инверсия в подстановке из n элементов** — $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

26. **Знак подстановки** — $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$, где $N(\sigma)$ — число инверсий в σ.

27. **Четная подстановка** — $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ (или подстановка, имеющая чётное число инверсий).

28. **Нечетная подстановка** — $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ (или подстановка, имеющая нечётное число инверсий).

29. **Произведение подстановок** — оно же **композиция**; $(\sigma\rho)(x) = \rho(\sigma(x))$.
ПРИМЕЧАНИЕ: именно такой порядок был введен на лекциях, несмотря на то, что написано в Винберге, Куроше, Википедии и прочем. Связано это с тем, что в задачнике Проскурякова именно такой порядок.

30. **Тождественная подстановка** — $\mathrm{id}(x) = x, \;\forall x$.

31. **Обратная подстановка** — $\sigma^{-1} :\; \sigma \cdot \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \sigma = \mathrm{id}$.

32. **Транспозиция** — $\tau_{ij} :\; \tau_{ij}(i) = j,\, \tau_{ij}(j) = i,\, \tau_{ij}(x) = x,\; x \neq i, j$

33. **Элементарная транспозиция** — $\tau_{i,i+1}$.

34. **Общая формула для определителя квадратной матрицы произвольного порядка** — $\det A = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$, где S_n — множество подстановок.

35. **Верхнетреугольная матрица** — $a_{ij} = 0$, при $i > j$.

36. **Нижнетреугольная матрица** — $a_{ij} = 0$, при $i < j$.

37. **Кососимметрическая функция от нескольких аргументов** — $f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\forall \tau$, где τ — транспозиция в S_n. Иными словами, функция меняет знак при перестановке любых двух аргументов.

38. **Полилинейная функция от нескольких аргументов** — для каждого аргумента выполняется, что:

    (a) $f(\ldots, \lambda x_i, \ldots) = \lambda f(\ldots, x_i, \ldots)$;

    (b) $f(\ldots, x_i' + x_i'', \ldots) = f(\ldots, x_i', \ldots) + f(\ldots, x_i'', \ldots)$.

39. **Дополнительный минор к элементу квадратной матрицы** — $\overline{M}_{ij} = \det A'$, для A', полученной из A «вычеркиванием» i-ой строки и j-ого столбца.

40. **Алгебраическое дополнение к элементу квадратной матрицы** — $A_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M}_{ij}$.

41. **Обратная матрица** — $A^{-1}: \; A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

42. **Присоединенная матрица** — $\hat{A} = (A_{ij})^T$.

43. **Элементарные преобразования строк матрицы** —

    (a) $Э_1(i, j, \lambda): \; A_{(i)} \rightsquigarrow A_{(i)} + \lambda A_{(j)}$ (прибавление к i-й строке j-й строки, домноженной на коэффициент λ);

    (b) $Э_2(i, j): \; A_{(i)} \leftrightsquigarrow A_{(j)}$ (перестановка i-й и j-й строк);

    (c) $Э_3(i, \lambda): \; A_{(i)} \rightsquigarrow \lambda A_{(i)}$ (умножение i-й строки на коэффициент λ).

44. **Ступенчатый вид матрицы** —

    (a) номера ведущих элементов (*прим.:* первый ненулевой элемент) строк строго возрастают;

    (b) все нулевые строки стоят в конце (внизу).

45. **Улучшенный ступенчатый вид матрицы**, он же **канонический**

    (a) имеет ступенчатый вид;

    (b) все ведущие элементы строк равны 1, и во всех столбцах, содержащих ведущие элементы, над ведущими элементами стоят нули.

46. **Расширенная матрица системы линейных уравнений** — $(A \mid \vec{b})$, где A — матрица коэффициентов, а $\vec{b}$ — вектор правых частей.

47. **Эквивалентные системы линейных уравнений** — имеют одинаковые множества решений.

48. **Однородная система линейных уравнений** — $A\vec{x} = \vec{0}$.

49. **Векторное пространство** — также **линейное**; множество V (над полем $\mathbb{R}$), в котором заданы следующие операции:

    (a) «сложение»: $V \times V \to V : (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto (\vec{a} + \vec{b})$;

    (b) «умножение на скаляр»: $\mathbb{R} \times V \to V : (\lambda, \vec{a}) \mapsto \lambda \cdot \vec{a}$.

    Аксиомы векторного пространства:

    (a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — коммутативность;

    (b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ — ассоциативность;

    (c) $\exists \vec{0} \in V : \ \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ — существование нулевого элемента;

    (d) $\exists (-\vec{a}) : \ (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ — существование обратного элемента;

    (e) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ — умножение на единичный скаляр;

    (f) $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$ — ассоциативность умножения на скаляр;

    (g) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ — дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения;

    (h) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ — дистрибутивность сложения относительно умножения на скаляр.

50. **Подпространство векторного пространства** — подмножество $U \subseteq V$, такое, что:

    (a) $\vec{0} \in U$;

    (b) $\forall \vec{a}, \vec{b} \in U \ (\vec{a} + \vec{b}) \in U$;

    (c) $\forall \vec{a} \in U, \lambda \in \mathbb{R} \ \lambda\vec{a} \in U$.

51. **Линейная комбинация конечного набора векторов векторного пространства** — всякий вектор $\vec{v} = a_1\vec{x_1} + \ldots + a_n\vec{x_n}, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

52. **Линейная оболочка подмножества векторного пространства** — множество всех линейных комбинаций векторов данного подмножества; $\langle S \rangle$.

53. **Конечномерное векторное пространство** — пространство порождается конечным количеством своих векторов; существует конечное подмножество S, что $\langle S \rangle = V$.

54. **Линейная зависимость конечного набора векторов** — для векторов $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\ldots$, $\vec{v_n}$ существует ненулевой набор скаляров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такой, что $\lambda_1\vec{v_1} + \ldots + \lambda_n\vec{v_n} = \vec{0}$. То есть, существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.

55. **Линейная независимость конечного набора векторов** —

    - для векторов $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ не существует ненулевого набор скаляров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такой, что $\lambda_1\vec{v_1} + \ldots + \lambda_n\vec{v_n} = \vec{0}$.
    - Если для векторов $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ и каких-то скаляров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ выполняется $\lambda_1\vec{v_1} + \ldots + \lambda_n\vec{v_n} = \vec{0}$, то $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

    То есть, существует только тривиальная линейная комбинация, равная нулю.

56. **Базис конечномерного векторного пространства** — система векторов $e_1, \ldots, e_n$, такая, что любой $\vec{v} \in V$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации этих векторов: $\vec{v} = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$.

57. **Размерность конечномерного векторного пространства** — число элементов любого базиса оного пространства; $\dim V$.

58. **Ранг системы векторов конечномерного векторного пространства** — наибольшее число векторов в линейно-независимой подсистеме $S' \subseteq S$ системы S; обозначается $\operatorname{rk} S$.

59. **Столбцовый ранг матрицы** — ранг системы векторов-стобцов.

60. **Строковый ранг матрицы** — столбцовый ранг A^T.

61. **Минор матрицы** A — определитель всякой её квадратной подматрицы (примечание: подматрица A — всякая матрица, полученная из A путём вычёркивания каких-то строк и/или столбцов).

62. **Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений** — всякий базис пространства решений этой системы.

63. **Ортогональное дополнение подмножества в** $\mathbb{R}^n$ —

$$S^{\perp} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \ \forall \vec{y} \in S\}$$

то есть множество $S^{\perp}$, состоящее из векторов $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, таких, что они ортогональны сразу всем векторам из S.

2 Вопросы

2.1 Арифметические n-мерные векторы. Арифметическое n-мерное пространство. Сложение арифметических n-мерных векторов и умножение на скаляр. Свойства этих операций.

Упорядоченная система n чисел

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

записанных в строку или столбец, называется *арифметическим n-мерным вектором.* Числа $a_i, i = 1, 2, \ldots, n$, будут называться *компонентами* вектора α.

Арифметическое n-мерное пространство — множество всех арифметических n-мерных векторов. Обозначение: $\mathbb{R}^n$

Операции в $\mathbb{R}^n$:

- Сложение $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$. Паре векторов $(\vec{x}, \vec{y})$ сложение сопоставляет вектор $\vec{x} + \vec{y}$, определяемый следующим образом:

$$\vec{x} + \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

- Умножение на скаляр. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n : (\lambda, \vec{x}) \mapsto \lambda\vec{x}$

$$\lambda\vec{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Свойства сложения и умножения на скаляр:

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \ \ \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ — коммутативность сложения.
2. $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n \ \ (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ — ассоциативность сложения.
3. $\exists\ \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \ \ \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ — существование нейтрального по сложению элемента.
4. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n\ \exists -\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} : \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ — существование противоположного элемента.
5. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \ \ \alpha\vec{x} = \vec{x}\alpha$ — коммутативность умножения на скаляр.
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \ \ (\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$ — ассоциативность умножения на скаляр.
7. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \ \ 1\vec{x} = \vec{x}$ — существование нейтрального по умножению элемента.

8. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\; (\alpha+\beta)\vec{x} = \alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$ — дистрибутивность умножения по сложению.

9. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R} \;\; \alpha(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$ — дистрибутивность сложения по умножению.

10. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R} \;\; 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$ — умножение на нулевой скаляр.

11. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R} \;\; -1 \cdot \vec{x} = -\vec{x}$ — умножение на минус-единичный скаляр.

12. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \;\; \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ — умножение скаляра на нулевой вектор.

13. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R} \;\; : \alpha\vec{x} = 0, \Rightarrow \alpha = 0 \vee \vec{x} = 0$ — нулевое произведение.

2.2 Скалярное произведение в арифметическом n-мерном пространстве и его свойства. Длина арифметического n-мерного вектора.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ называется сумма произведений их координат:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Свойства скалярного произведения:

1. Скалярное произведение нулевого вектора и любого другого равно нулю:

$$\langle \vec{0}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot x_i = 0$$

2. Скалярное произведение коммутативно:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$$

3. Скалярное произведение дистрибутивно по сложению:

$$\langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{z} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$$

4. Скаляр можно внести внутрь скалярного произведения, причём его можно отнести к любому вектору:

$$\alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i y_i = \langle \alpha\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \alpha\vec{y} \rangle$$

5. Скалярное произведение вектора $\vec{x}$ с самим собой неотрицательно:

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant 0$$

причем $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$

Длиной вектора называют корень скалярного призведения вектора с самим собой:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

Свойство длины векторов: $|\vec{x}| \geqslant 0$, причем $|\vec{x}| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$

2.3 Неравенство Коши в арифметическом n-мерном пространстве. Угол между двумя арифметическими n-мерными векторами.

Неравенство Коши. *Пусть существуют векторы x и $y \in \mathbb{R}^n$, тогда выполнено следующее неравенство: $|\langle x, y\rangle| \leqslant |x||y|$. Другими словами, модуль скалярного произведения векторов не больше произведения их длин.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное число $\lambda \in \mathbb{R}$ и рассмотрим вектор $\vec{z} = \lambda\vec{x} + \vec{y}$. Так как длина вектора не меньше 0, то

$$\langle \vec{z}, \vec{z}\rangle \geqslant 0 \iff \lambda^2|\vec{x}|^2 + 2\lambda\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + |\vec{y}|^2 \geqslant 0$$

Так как это верно для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, то дискриминант квадратного уравнения относительно λ не больше нуля.

$$D : 4(\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle)^2 - 4|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 \leqslant 0$$

Тогда

$$\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle^2 \leqslant |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 \text{ и } |\langle x, y\rangle| \leqslant |x||y|$$

. **Q.E.D.**

Пусть имеются два вектора $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Так как $|\langle x, y\rangle| \leqslant |x||y|$, то величина $\dfrac{\langle x, y\rangle}{|x||y|}$ лежит в пределах $[-1, 1]$. Тогда можно ввести понятие *угла α между векторами x и y* следующим образом:

$$\alpha = \arccos \frac{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

2.4 Неравенство треугольника в арифметическом n-мерном пространстве.

Неравенство треугольника. *Пусть векторы $\vec{x}, \vec{y}$ и $\vec{z}$ образуют треугольник в n-мерном пространстве. Докажем, что будет выполняться неравенство $|\vec{z}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}|$.*

Доказательство. Заметим, что $\vec{z} = \vec{x} \pm \vec{y}$. Не умаляя общности, допустим, что направление векторов такое, что $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$. Вспомним также неравенство Коши: $|\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle| \leqslant |\vec{x}||\vec{y}|$. Итого, получаем:

$$\begin{gathered}
|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leqslant \\
\leqslant |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2 \\
\Downarrow \\
|x+y| \leqslant |x| + |y|
\end{gathered}$$

Q.E.D.

2.5 Линейные функции. Линейные уравнения. Линейные многообразия. Примеры.

Линейная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция вида

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

Примеры:

- $f(x, y) = 2x - 3y$ — линейная;

- $f(x) = x - 5$ — нелинейная;
- $f(x) = 0$ — линейная;
- $f(x) = 1$ — нелинейная;

Линейное уравнение — уравнение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$
Линейное многообразие — множество решений в $\mathbb{R}^n$ системы линейных уравнений.
Примеры:

- $ax + by = c$
  $\begin{pmatrix} \frac{c}{a} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix}$ — прямая в $\mathbb{R}^2$
- $ax + by + cz = d$ — задаёт плоскость в $\mathbb{R}^3$
- $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$ — задаёт прямую (пересечение двух плоскостей) в $\mathbb{R}^3$

2.6 Матрицы. Сложение матриц, умножение на скаляр. Свойства этих операций.

Матрица размера $m \times n$ (или $m \times n$*-матрица*) — это прямоугольная таблица высоты m и ширины n, в каждой клетке которой стоит один элемент.

Вообще говоря, матрицу можно задать (и она так задаётся в учебнике Куроша) как таблицу коэффициентов неизвестных при СЛУ, т.е. коэффициенты системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

задают матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Размером матрицы называется количество её строк и стоблцов. Говоря «матрица размера $m \times n$», мы подразумеваем, что в матрице m строк и n столбцов. Это обозначается следующим образом: $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$. Проводя аналогию со сказанным выше про СЛУ, можно сказать, что количество строк соответствует количеству уравнений в системе, а количество столбцов — количеству неизвестных.

Матрица, у которой количество строк равно количеству столбцов (и равно n), называется квадратной порядка n. Размер такой матрицы обозначается как $n \times n$. В таком случае пишут, что $A \in \mathrm{M}_n$

Отдельно рассмотрим матрицы $1 \times n$ и $m \times 1$. Они имеют специальные названия.

- Матрица размера $1 \times n$ называется *вектор-строкой*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

- Матрица размера $m \times 1$ называется *вектор-столбцом*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Элемент матрицы имеет два индекса — индекс строки и индекс столбца. Запись a_{ij} означает, что мы рассматриваем элемент i-ой строки j-го столбца.

Сложение двух матриц определено только в том случае, когда размеры их одинаковы. *Суммой* двух матриц A и B размера $m \times n$ называется такая матрица C размера $m \times n$, в которой каждый элемент равен сумме соответствующих элементов матриц A и B, то есть

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Сложение матриц имеет следующие свойства, которые легко проверить по определению суммы:

1. $\forall A, B, C \in \mathrm{Mat}_{m\times n}\ (A + B) + C = A + (B + C)$ — ассоциативность
2. $\forall A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}\ \ A + B = B + A$ — коммутативность
3. $\exists\ 0 \in \mathrm{Mat}_{m\times n} : \forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}\ \ A + 0 = 0 + A = A$ — сложение с нулевой матрицей
4. $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}\ \exists!(-A) = (-a_{ij}) : A + (-A) = (-A) + A = 0$ — существование противоположной матрицы

Произведением матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ на *скаляр* λ является такая матрица $B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$, в которой каждый элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы A и скаляра λ, то есть $(b_{ij}) = (\lambda a_{ij})$. Обозначение: λA

Умножение матриц на скаляр имеет следующие свойства, которые легко проверить по определению:

1. $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}\ \ 1 \cdot A = A$ — умножение на единичный скаляр
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}\ (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ — ассоциативность
3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}\ (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ — дистрибутивность относительно скаляров
4. $\forall \lambda \in \mathbb{R}; A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}\ \ \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ — дистрибутивность относительно матриц

Перечисленные выше свойства соответствуют аксиомам векторного пространства, поэтому совокупность матриц размера $m \times n$ можно рассматривать как $m \times n$-мерное векторное пространство.

2.7 Произведение матриц: определение, дистрибутивность, связь с умножением на скаляр.

Произведением матрицы A размера $m \times n$ и матрицы B размера $n \times l$ является матрица C размера $m \times l$, такая, что:

$$c_{ij} = A_{(i)}B^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Свойства произведения матриц:

- Дистрибутивность: $A(B+C) = AB + AC$

  Доказательство. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$, $B, C \in \mathrm{Mat}_{n\times k}$. Матрицы $A(B+C)$ и $AB+AC$ имеют одинаковый размер $m \times k$.

  Пусть $D = A(B+C)$, $E = AB + AC$. Тогда

$$d_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}(b_{sj} + c_{sj}) = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj} + \sum_{s=1}^{n} a_{is}c_{sj}$$

$$e_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj} + \sum_{s=1}^{n} a_{is}c_{sj} = d_{ij}$$

  Тогда $D = E \iff A(B+C) = AB + AC$. **Q.E.D.**

- Дистрибутивность: $(B+C)A = BA + CA$ (доказательство аналогичное)

- Произведение на скаляр: $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

2.8 Произведение матриц: ассоциативность, некоммутативность.

Ассоциативность умножения. *Пусть определено умножение произвольных матриц A, B, C (то есть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times l}$, $B \in \mathrm{Mat}_{l\times n}$, $C \in \mathrm{Mat}_{n\times p}$). Тогда $(AB)C = A(BC)$.*

Доказательство. Пусть $AB = U$, $BC = V$ а $A(BC) = X$, $(AB)C = Y$. Тогда

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{l} u_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rk}\right) c_{kj} = \sum_{k=1}^{l}\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rk}c_{kj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\left(\sum_{k=1}^{l} b_{rk}c_{kj}\right) =$$
$$= \sum_{r=1}^{n} a_{ir}v_{rj} = x_{ij}$$

Q.E.D.

В общем случае умножение матриц некоммутативно. Пример таких матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.9 Транспонирование матриц: определение, связь со сложением и умножением на скаляр. Транспонирование произведения двух матриц.

Транспонированием матрицы называется преобразование матрицы такое, что столбцы становятся строками и наоборот. Это можно записать следующим образом:

$$(a_{ij})^T = (a_{ji})$$

Связь транспонирования и умножения на скаляр:

$$\lambda(a_{ij})^T = (\lambda a_{ji}) = (\lambda a_{ij})^T \iff \lambda A^T = (\lambda A)^T$$

Связь транспонирования и сложения:

$$(a_{ij})^T + (b_{ij})^T = (a_{ji} + b_{ji}) = (a_{ij} + b_{ij})^T \iff A^T + B^T = (A+B)^T$$

Это рассуждение обобщается на произвольное количество матриц с помощью математической индукции.

Теорема. *Для любых* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}$, $B \in \mathrm{Mat}_{m\times p}$ *верно:* $(AB)^T = B^T A^T$

Доказательство. Сначала покажем совпадение размерностей произведений. Произведение матриц A и B будет иметь размерность $n \times p$. Тогда $(AB)^T$ имеет размер $p \times n$. Теперь проверим правую часть равенства. B^T имеет размер $p \times m$, а A^T имеет размер $m \times n$. Тогда их произведение будет иметь размер $p \times n$. Размерности совпадают.

Пусть $AB = C$, а $B^T A^T = D$. Тогда

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}^T a_{kj}^T = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ki} = c_{ji} = (c_{ij})^T$$

Тогда $D = C^T$ и $(AB)^T = B^T A^T$. С помощью математической индукции эти 2 рассуждения можно обобщить на n матриц. **Q.E.D.**

2.10 Диагональные матрицы. Умножение на диагональную матрицу слева и справа. Единичная матрица и её свойства.

Диагональной матрицей называют квадратную матрицу, в которой элементы вне главной диагонали равны нулю. Обозначается $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$:

$$\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Свойство: *Пусть* $A_1 = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,$A_2 = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, *а* $B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}$. *тогда:*

$$A_1 B = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}, \; BA_2 = \left(a_1 B^{(1)}, a_2 B^{(2)}, \ldots, a_n B^{(m)}\right)$$

Доказательство.

$$A_1 B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} & \cdots & a_1 b_{1m} \\ a_2 b_{21} & a_2 b_{22} & \cdots & a_2 b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_{n1} & a_n b_{n2} & \cdots & a_n b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$$

$$BA_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_2 b_{12} & \cdots & a_n b_{1m} \\ a_1 b_{21} & a_2 b_{22} & \cdots & a_n b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 b_{n1} & a_2 b_{n2} & \cdots & a_n b_{nm} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(a_1 B^{(1)}, a_2 B^{(2)}, \ldots, a_n B^{(m)}\right)$$

Q.E.D.

Единичная матрица (порядка n) — квадратная матрица порядка n, элементы главной диагонали которой равны единице, а остальные равны нулю. Обозначается $E_n = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1)$.

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Основное свойство единичной матрицы — при умножении матрицы A на E слева или справа A не изменяется. Это доказывается элементарной проверкой.

2.11 След квадратной матрицы: определение, поведение при сложении, умножении на скаляр и транспонировании. След произведения двух матриц.

Следом матрицы A называется сумма сумма всех диагональных элементов матрицы A. Обозначение: $\operatorname{tr} A$ (от английского слова «trace» — след). Альтернативное обозначение: $\operatorname{Sp} A$ (от немецкого слова «spur»):

$$\operatorname{tr} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Свойства:

1. $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$
$$\operatorname{tr}(A + B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$$

2. $\operatorname{tr} \lambda A = \lambda \operatorname{tr} A$
$$\operatorname{tr} \lambda A = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda \operatorname{tr} A$$

3. $\operatorname{tr} A^T = \operatorname{tr} A$
При транспонировании члены главной диагонали остаются на месте, т.к. $a_{ii}^T = a_{ii}$. Значит, и след не изменится.

4. $\forall A \in \operatorname{Mat}_{m\times n}, B \in \operatorname{Mat}_{n\times m}\ \operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$

   Доказательство. Пусть $AB = X$, $BA = Y$. Тогда:
$$\operatorname{tr} X = \sum_{k=1}^{m} x_{kk} = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl} b_{lk}\right) = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{lk} a_{kl}\right) = \sum_{l=1}^{n} y_{ll} = \operatorname{tr} Y$$
Q.E.D.

2.12 Матричная форма записи системы линейных уравнений. Совместные, несовместные, определённые и неопределённые системы линейных уравнений. Примеры.

Пусть имеется система линейных уравнений из m уравнений при n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Введём обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{— \textit{матрица коэффициентов}};$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{— \textit{вектор неизвестных}}; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \text{— \textit{вектор правых частей.}}$$

Тогда $A\vec{x} = \vec{b}$ называется *матричной формой* записи СЛУ.

СЛУ называется *совместной*, если у неё есть решения (хотя бы одно), и *несовместной* в противном случае.

СЛУ называется *определённой*, если у неё есть единственное решение, и *неопределённой* в противном случае.

Основные вопросы теории СЛУ:

1. Когда СЛУ совместна? (см. *ранг матрицы*)
2. Когда СЛУ определена? (см. *определитель матрицы*)

Примеры:

Система

$$\begin{cases} 3x - 2y = -6 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$$

является совместной, так как имеет, по крайней мере, одно решение: $x = 0$, $y = 3$.

Система

$$\begin{cases} 5x + y = -6 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$$

является несовместной, так как выражения, стоящие в левых частях уравнений системы равны, но правые части не равны друг другу. Ни для каких наборов (x, y) это не выполняется.

Система

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 9y = 15 \end{cases}$$

является определённой, так как имеет единственное решение: $x = 1.5$, $y = 1$.

Система

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$$

является неопределённой, так как имеет бесконечно много решений (x, y), где $x = y$.

2.13 Определители второго и третьего порядков. Признак определённости системы двух линейных уравнений от двух неизвестных, формулы Крамера для такой системы.

Введем два определения:

Определителем квадратной матрицы порядка два $A = (a_{ij})$ называется число $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Определителем квадратной матрицы порядка три $A = (a_{ij})$ называется число $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Эту формулу можно запомнить, используя *правило Саррюса*:

$$
\begin{array}{ccc|cc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}
$$

Теперь перейдем к СЛУ.

Имеем систему линейных уравнений.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2
\end{cases}
$$

Применим к ней метод исключения неизвестных.

Домножим первую строку на a_{22}, вторую на $-a_{12}$ и сложим.

$$
(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 + (a_{12}a_{22} - a_{22}a_{12})x_2 = b_1a_{22} - b_2a_{12}
$$
$$
(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}
$$

Теперь домножим первую строку изначальной системы на $-a_{21}$, а вторую на a_{11}. Сложим и аналогично получим:

$$
(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}
$$

Заметим, что получили перед x_1 и x_2 одинаковый коэффициент. Обозначим его за Δ. Правую часть первого равенства обозначим за Δ_1, а второго — за Δ_2. То есть получим следующее:

$$
\begin{cases}
\Delta x_1 = \Delta_1 \\
\Delta x_2 = \Delta_2
\end{cases}
$$

Соответственно, делаем вывод, что наша СЛУ имеет единственное решение (определенная СЛУ) тогда и только тогда, когда $\Delta \neq 0$, причем это решение будет $x_1 = \Delta_1/\Delta$, $x_2 = \Delta_2/\Delta$. Если же $\Delta = 0$, то СЛУ неопределенная или несовместна.

Заметим, что $\Delta = \det A$, где A — матрица коэффициентов нашей СЛУ. Заметим также, что Δ_1 и Δ_2 являются определителями следующих матриц:

$$
A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}
$$

Правило Крамера для СЛУ с двумя уравнениями от двух неизвестных: если $\det A \neq 0$, то СЛУ является определенной и ее решение выражается формулой:

$$
x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}
$$

Если же мы будем рассматривать СЛУ с тремя уравнениями от трех переменных, то все тем же методом исключения неизвестных получим, что $x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}$, $x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}$, $x_3 = \frac{\det A_3}{\det A}$, где A, A_1, A_2 и A_3 — аналогичные матрицы.

2.14 Перестановки и подстановки множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Инверсии в подстановке. Знак и чётность подстановки. Примеры.

Перестановкой из n элементов множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется всякий упорядоченный набор, в котором каждый элемент встречается ровно один раз. Число перестановок из n элементов — $P_n = n!$.

Назовём *транспозицией* такое преобразование перестановки, при котором два её элемента меняются местами. Очевидно, все транспозиции обратимы.

Предложение. *Все $n!$ перестановок из n элементов можно расположить в таком порядке, что каждая следующая получается из предыдущей одной транспозицией. При этом начинать можно с любой перестановки.*

Доказательство. Для $n = 2$ утверждение очевидно: (1,2) $\to$ (2,1) $\to$ (1,2).

Предположим, что утверждение верно для $n-1$ элемента. Докажем его для n:

Пусть мы должны начать с перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_n)$. Рассмотрим все перестановки, начинающиеся с i_1. По предположению индукции мы можем их выстроить требуемым образом. Расставим их, после чего в последней из них переставим i_1 и, например, i_2. Будем повторять эту процедуру, пока не переберём все возможные первые элементы и получим требуемую расстановку. **Q.E.D.**

Из этого утверждения напрямую следует, что любую перестановку из n симолов можно получить из любой другой некоторой комбинацией транспозиций.

Пусть *подстановка* — биективное отображение из множества $X = \{1, 2, \dots, n\}$ в себя. Обозначение:

$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \sigma(x_1) & \sigma(x_2) & \dots & \sigma(x_n) \end{pmatrix}$$

Говорят, что x_1 переходит в $\sigma(x_1)$, x_2 переходит в $\sigma(x_2)$, и так далее.

Будем считать подстановки равными, если одни и те же элементы верхней строки переходят в одни и те же элементы нижней строки.

Мы будем рассматривать такие подстановки, где $x_i = i$ (из любой подстановки можно получить равную ей такого вида несколькими транспозициями столбцов).

Из этого очевидным образом следует, что подстановок на n элементах тоже $n!$.

Назовём *инверсией* такую пару индексов i и j, что $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$. Пусть всего инверсий в подстановке s, тогда назовём *знаком* подстановки число $(-1)^s$. Подстановка называется *чётной*, если её знак равен 1, и *нечётной* в обратном случае.

Заметим, что транспозиция меняет чётность подстановки. В самом деле, это очевидно, если транспозиция меняет местами два соседних элемента. Иначе же её можно представить как k транспозиций соседних элементов, чтобы поставить первый элемент после второго и $k-1$ — чтобы поставить второй на место первого. Общее число транспозиций $(2k-1)$ нечётно, значит, знак меняется.

Следствием является то, что из подстановки $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right)$ чётные подстановки получаются только чётным числом транспозиций и наоборот.

2.15 Произведение подстановок: определение, ассоциативность, некоммутативность.

Как мы знаем, подстановка степени n есть взаимно однозначное отображение множества $\{1, 2, \dots, n\}$ на себя. Рассмотрим две подстановки. Результат последовательного выполения этих двух взаимно однозначных отображений на себя будет также являться взаимно-однозначным отображением. Тогда последовательное выполение двух перестановок степени n приведёт к новой подстановке степени n. Эту новую подстановку будем называть *произведением* двух первых подстановок. Рассмотрим конкретный пример.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

При подстановке σ *первый* элемент перешел в *третий*. При подстановке ρ *третий* элемент перешел в *четвертый*. Тогда при последовательном выполнений *первый* перейдет в *четвертый* и так далее. Так получается произведение.

Ассоциативность произведения подстановок. *Для произведения перестановок, взятых в определённом порядке, порядок выполнения умножения не играет роли. То есть* $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$

Доказательство. Пусть даны перестановки $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_n$. Рассмотрим какой-нибудь элемент $i_1, 1 \leqslant i_1 \leqslant n$.

Пусть при подстановке σ_1 символ i_1 перейдёт в какой-то другой символ i_2, i_2, в свою очередь, при подстановке σ_2 перейдёт в i_3, а i_3 при подстановке σ_3 - в i_4.

Получается, что по по определению умножения при подстановке $\sigma_1\sigma_2$ i_1 перейдёт в i_3, а результат этой подстановки i_3 при подстановке σ_3 перейдет в i_4. По аналогичным соображениям при подстановке $\sigma_2\sigma_3$ i_2 перейдёт в i_4, а i_1 при выполнении подстановки σ_1 перейдёт в i_2. При обеих операциях из i_1 в результате выполнения подстановок получилось i_4. **Q.E.D.**

Подстановки *некоммутативны*, если их степени больше двух. Покажем это с помощью примера выше. Найдем $\rho\sigma$

$$\rho\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \sigma\rho$$

Такие контрпримеры можно подобрать для подстановок любой степени, начиная с трёх.

В случае, если степень подстановок равна 2, коммутативность присутствует. Существуют всего две подстановки степени 2, одна из которых тождественна.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что любое произведение этих двух подстановок коммутирует.

2.16 Тождественная подстановка. Обратная подстановка. Знак обратной подстановки.

Тождественная подстановка — подстановка, которая переводит элементы сами в себя; $\mathrm{id}(x) = x, \forall x$.

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Также отметим, что $\mathrm{id}\,\sigma = \sigma\,\mathrm{id} = \sigma$, где σ — некоторая подстановка.

Обратная подстановка — такая подстановка σ^{-1}, что $\sigma \cdot \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \sigma = \mathrm{id}$.

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Лемма о знаке обратной подстановки: $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$

Доказательство. Пусть пара (i,j) образует инверсию в σ. Это значит, что $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$. Но $i = \sigma^{-1}(\sigma(i))$ и $j = \sigma^{-1}(\sigma(j))$. Тогда $\sigma(i) > \sigma(j)$ и $\sigma^{-1}(\sigma(i)) < \sigma^{-1}(\sigma(j))$. Тогда $(\sigma(j), \sigma(i))$ образуют инверсию в σ^{-1}. Отсюда следует, что количество инверсий в σ и σ^{-1} совпадает $\implies \mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$ **Q.E.D.**

2.17 Транспозиции, элементарные транспозиции. Поведение знака подстановки при умножении слева на транспозицию. Количество чётных и нечётных подстановок.

Транспозицией называется такая подстановка, которая меняет два элемента местами. *Элементарная транспозиция* — транспозиция, в которой меняются местами два соседних элемента.

Лемма. *Пусть τ - транспозиция. Тогда* $\operatorname{sgn}(\tau\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$

Доказательство. Пусть транспозиция τ меняет местами элементы i,j, при этом $i < j$. Рассмотрим два случая:

1. $j = i + 1$. Произведение подстановок в таком случае равно

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & j & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(j) & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Если пара $(p, q) \neq (i, j)$, то она образует инверсию в σ тогда и только тогда, когда она образует инверсию в $\tau\sigma$. (i, j) образует инверсию в $\sigma \Leftrightarrow (i, j)$ не образуют инверсию в $\tau\sigma$. Вывод: Число инверсий в σ и $\tau\sigma$ отличаются на 1. А значит $\operatorname{sgn}(\tau\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$.

2. $j > i + 1$. Представим транспозицию τ_{ij} в виде композиции элементарных транспозиций:

$$\tau_{ij} = \tau_{i(i+1)}\tau_{(i+1)(i+2)} \dots \tau_{(j-2)(j-1)}\tau_{(j-1)j}\tau_{(j-2)(j-1)}\tau_{(j-3)(j-2)} \dots \tau_{(i+1)i}$$

Однако очень легко посчитать количество транспозиций, в произведение которых мы их представили. Для перестановки чисел i и j нужно сначала перенести i на позицию j, что займёт $j - i$ элементарных транспозиций. После этого число j окажется на позиции $j - 1$. Тогда нужно $j - i - 1$ элементарная транспозиция для того, чтобы поставить число j на позицию i. В итоге будет использовано $2(j - i) - 1$ элементарных транспозиций. Тогда знак подстановки умножился на $(-1)^{2(j-1)-1} = -1$, т.е. подстановка поменяла знак.

Q.E.D.

Свойство. При $n \geqslant 2$ число чётных подстановок в S_n равно числу нечётных. Это можно легко заметить, если сопоставить каждой подстановке такую же, но умноженную на некоторую фиксированную транспозицию (например на τ_{12}). Одна из полученных подстановок - чётная, другая - нечётная. Мы можем таким образом сделать биекцию между чётными и нечётными подстановками, а множества, между которыми можно сделать биекцию - равномощны.

2.18 Общая формула для определителя квадратной матрицы произвольного порядка. Определитель транспонированной матрицы. Определитель матрицы, содержащей нулевую строку или нулевой столбец.

Определитель квадратной матрицы порядка n вводится следующим образом:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \quad (*)$$

Теорема. *Определитель матрицы не изменяется от транспонирования (свойство T):* $\det A = \det A^T$ *для любой* $A \in \mathrm{M}_n$

Доказательство. Распишем определитель A^T по определению:

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Переставим элементы произведения так, чтобы их первые индексы шли в порядке возрастания. Это равносильно замене подстановки σ на обратную к ней подстановку $\rho = \sigma^{-1}$.

Так как количество инверсий в прямой и обратной подстановках совпадают, то их знаки совпадают и этот определитель равен

$$\sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)}$$

Но это равно $\det A$. **Q.E.D.**

Пусть в матрице есть нулевая строка. Из определения определителя следует, что каждый член суммы содержит по одному элементу с каждой строки. Но тогда все эти члены равны 0 и определитель равен 0. Для столбцов доказательство аналогично.

2.19 Поведение определителя при перестановке двух строк (столбцов). Определитель матрицы, содержащей две одинаковых строки (столбца).

- *При перестановке двух строк(столбцов) определитель меняет знак.*

  Доказательство. Принимая во внимание свойство T, достаточно доказать лишь для строк.

  В самом деле, пусть в определителе переставляются лишь i-ая и j-ая строки, $i \neq j$, а все остальные строки остаются на месте.

$$(1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (2)$$

  Если $a_{1,\alpha_1} a_{2,\alpha_2} \dots a_{n,\alpha_n}$ есть член определителя (1), то все его множители в определителе (2) остаются, очевидно, в разных строках и в разных столбцах. Таким образом, определители (1) и (2) состоят из одних и тех же членов. Этому члену в определителе (1) соответствует подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} (3)$$

  а в определителе (2) – подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} (4)$$

  так как, например, элемент $a_{i\alpha_i}$ стоит теперь в j-ой строке, но остается в старом α_i-ом столбце. Подстановка (4) получается, однако, из подстановки (3) путем одной транспозиции в нижней строчке, т.е. имеет противоположную четность. Отсюда следует, что все члены определителя (1) входят в определитель (2) с обратными знаками, т.е. определители (1) и (2) отличаются лишь знаком. **Q.E.D.**

- *Определитель, содержащий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.*

Доказательство. Принимая по внимания свойство T, достаточно доказать лишь для строк.

В самом деле, пусть определитель равен d и пусть соответственные элементы его i-ой и j-ой строк $(i \neq j)$ равны между собой. После перестановки этих двух строк определитель станет равен (ввиду выше доказанного свойства) числу $-d$. Так как, однако, переставляются одинаковые строки, то определитель не меняется, т.е. $d = -d$, откуда $d = 0$ **Q.E.D.**

2.20 Поведение определителя при умножении строки (столбца) на скаляр, разложении строки (столбца) в сумму двух, прибавлении к строке (столбцу) другой, умноженной на скаляр.

Умножение на скаляр: *Если в A все элементы некоторой строки умножить на одно и то же число λ, то определитель увеличится в λ раз:*

$$B_{(i)} = \lambda A_{(i)}, B_{(j)} = A_{(j)}, i \neq j \implies \det B = \lambda \det A$$

(Аналогичное свойство для столбцов из свойства T.)

Доказательство. В формуле определителя для B в каждом слагаемом присутствует $\lambda a_{i\sigma(i)}$ (только один) $\Rightarrow$ каждое слагаемое для $\det(B)$ получается умножением на λ соответствующего слагаемого для $\det(A) \Rightarrow \det(B) = \lambda \det(A)$. **Q.E.D.**

Разложение строки в сумму двух: *Пусть какая-то строка $A_{(i)}$ раскладывается в сумму двух строк $A'_{(i)}$ и $A''_{(i)}$, а все остальные остаются неизменными. Тогда* $\det A = \det A' + \det A''$. *(Аналогичное свойство для столбцов из свойства T.)*

Доказательство.

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a''_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = \det(A') + \det(A'')$$

Q.E.D.

Прибавление строки: *Если к какой-либо строке прибавить другую строку, умноженную на скаляр, то определитель не изменится.*

Доказательство. $B_{(i)} = A_{(i)}, B_{(k)} = A_{(k)} + \lambda A_{(j)}, i \neq k$

$$\det B = \det \begin{pmatrix} B_{(1)} \\ \vdots \\ B_{(i)} \\ \vdots \\ B_{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + \lambda A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{во второй матрице} \\ \text{оказалось две} \\ \text{одинаковые строки} \end{matrix} \right\} \det A + 0 = \det A$$

Для столбцов свойство будет аналогичным в связи со свойством T. **Q.E.D.**

2.21 Верхнетреугольные и нижнетреугольные матрицы. Определитель верхнетреугольной и нижнетреугольной матрицы. Определитель диагональной матрицы. Определитель единичной матрицы.

Матрица $A \in M_n$ – *верхнетреугольная*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$ (т.е. ниже диагонали).
Матрица $A \in M_n$ – *нижнетреугольная*, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$ (т.е. выше диагонали).

Свойство. *если $A \in M_n$ – верхнетреугольная (нижнетреугольная) матрица, то* $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ *— произведение всех элементов главной диагонали.*

Доказательство. По свойству T достаточно доказать для верхнетреугольной матрицы.

Пусть A – верхнетреугольная матрица. Возьмём подстановку $\sigma \in S_n$ и соответсвующее ему слагаемое определеителя $P = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n}$.

Если $P \neq 0$, то, так как ниже диагонали идут нули, необходимо, чтобы $\sigma_1 \geq 1, \sigma_2 \geq 2, \ldots, \sigma_n \geq n$. Из этих неравенст и того, что подстановка обладает свойством инъективности, следует, что $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2, \ldots, \sigma_n = n$. Иными словами, $\sigma = \mathrm{id}$. Так как $\operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = 1$, получаем, что $P = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$, и больше других ненулевых слагаемых определеителя нет.

Итого, $\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$. **Q.E.D.**

Следствия:

1. Определитель диагональной матрицы $\det A = \det(\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, т.к. диагональная матрица одновременно и верхнетреугольная, и нижнетреугольная.
2. Определитель единичной матрицы $\det E = 1$, т.к. она — диагональная с единицами по диагонали.

Замечание: любой определитель можно вычислить, приведя матрицу к верхнетреугольному виду (см. элементарные преобразования).

2.22 Разложение подстановки в произведение транспозиций и элементарных транспозиций. Знак произведения подстановок.

Лемма 1. *Любая подстановка представима в виде произведения транспозиций.*

Доказательство. Докажем с помощью индукции по n.

$n = 2$. Тогда либо $\sigma = \tau_{12}$, либо $\sigma = \tau_{12}\tau_{21} = \mathrm{id}$.

$n > 2$. Пусть $s = \sigma^{-1}(n)$, то есть $\sigma(s) = n$. Тогда рассмотрим два случая: когда $s = n$ и когда $s < n$.

Если $s = n$, то ее разложение есть суть разложения подстановки $\sigma' \in S_{n-1}$, так как n-ый элемент ничего не меняет. А для σ', по индукционному предположению, такое разложение существует. Соответственно, такое же разложение имеет место в σ.

Если $s < n$, рассмотрим подстановку $\tau_{sn}\sigma$. Тогда:

$$(\tau_{sn}\sigma)(n) = \sigma(\tau_{sn}(n)) = \sigma(s) = n$$

Итого, эта подстановка относится к предыдущему случаю, когда последний элемент ничего не изменяет, и для него по индукционному предположению есть некое разложение: $\tau_{sn}\sigma = \tau_1\tau_2\ldots\tau_k$. Домножим слева на τ_{ns}:

$$\tau_{ns} \cdot \tau_{sn}\sigma = \tau_{ns} \cdot \tau_1\tau_2\ldots\tau_k$$
$$\mathrm{id} \cdot \sigma = \tau_{ns} \cdot \tau_1\tau_2\ldots\tau_k$$
$$\sigma = \tau_{ns} \cdot \tau_1\tau_2\ldots\tau_k$$

Итого, получили искомое разложение. Следовательно, лемму можно считать доказаной. **Q.E.D.**

Лемма 2. *Любая подстановка представима в виде произведения элементарных транспозиций.*

Доказательство. Непосредственно следует из леммы 1 и того, что любая транспозиция представима в виде произведения элементарных транспозиций. На всякий случай, рассмотрим второе чуть подробней:

$$\tau_{ij} = \tau_{i,i+1} \cdot \tau_{i+1,i+2} \dots \tau_{j-1,j} \cdot \tau_{j-1,j-2} \dots \tau_{i+1,i}$$

То есть сначала мы двигаем i-ый элемент до j-ой позиции, после чего то, что раньше было на j-ом месте, стоит на $j-1$-ом, и мы двигаем его обратно на i-ую позицию. **Q.E.D.**

Теорема. *Знак произведения подстановок есть произведения знаков подстановок:* $\operatorname{sgn}(\sigma\rho) = \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\rho$.

Доказательство. По лемме 1 подстановка σ представима в виде произведение транспозиций: $\sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_k$. Каждая транспозиция есть суть инверсия, и потому меняет знак подстановки. Следовательно:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau_1\tau_2 \dots \tau_k) = (-1)\operatorname{sgn}(\tau_2 \dots \tau_k) = (-1)^2 \operatorname{sgn}(\tau_3 \dots \tau_k) = \dots = (-1)^k$$

Аналогично, для произведения подстановок получим:

$$\operatorname{sgn}(\sigma\rho) = \operatorname{sgn}(\tau_1\tau_2 \dots \tau_k\rho) = (-1)\operatorname{sgn}(\tau_2 \dots \tau_k\rho) = \dots = (-1)^k \operatorname{sgn}(\rho) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\rho)$$

Q.E.D.

2.23 Полилинейные и кососимметрические функции от нескольких аргументов. Примеры. Значение кососимметрической функции от n столбцов высоты n на наборе из n единичных столбцов.

Назовём функцию от нескольких аргументов *полилинейной*, если она линейна по всем аргументам. Иначе, функция $f(x_1, \dots, x_n)$ полилинейна тогда и только тогда, если для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняется

$$f(x_1, \dots, \alpha x_i + \beta x_i', \dots, x_n) = \alpha f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \beta f(x_1, \dots, x_i', \dots, x_n)$$

Назовём функцию от нескольких аргументов *кососимметрической*, если для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ выполняется

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i \dots, x_n)$$

Примеры:

- Определитель матрицы является полилинейной кососимметрической функцией от строк матрицы;
- $f(x, y) = x - y$ — кососимметрическая, но не полилинейная;
- $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ — полилинейная, но не кососимметрическая.

Рассмотрим функцию $f(e_1, \dots, e_n)$, где $e_i \in \mathbb{R}^n$ — какой-то единичный столбец. Тогда:

- Если среди $e_1, \dots, e_n$ есть хотя бы 2 одинаковых, то $f(e_1, \dots, e_n) = 0$ в силу кососимметричности, т.к., переставив эти два одинаковых столбца местами, мы изменим знак, но при этом значение измениться не должно. Значит, значение функции — 0.
- Если все $e_1, \dots, e_n$ различны, то при перестановке 2-х столбцов меняться будет только знак, значение по модулю же останется прежним. Следовательно: $f(e_1, \dots, e_n) = \pm f(E)$, где E — единичная матрица.

2.24 Теорема о полилинейной кососимметрической функции строк (столбцов) квадратной матрицы. Аксиоматическое определение определителя.

Пусть строки e_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ получены из нулевых строк подстановкой 1 на i-ую позицию.

$$\begin{gathered} e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0) \\ e_2 = (0, 1, \dots, 0, 0) \\ \dots\dots \\ e_n = (0, 0, \dots, 0, 1) \end{gathered}$$

Лемма. *Пусть f — полилинейная кососимметрическая функция от n строк длины n. Тогда $\forall \sigma \in S_n$ верно, что*

$$f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) f(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

Доказательство. Разложим σ в произведение транспозиций:

$$\sigma = \tau_{p_1,q_1} \cdot \tau_{p_2,q_2} \cdot \ldots \cdot \tau_{p_k,q_k}$$

Теперь в выражении $f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ выполним эти перестановки (с конца):

$$\begin{gathered} e_{p_k} \leftrightarrow e_{q_k} \\ e_{p_{k-1}} \leftrightarrow e_{q_{k-1}} \\ \dots\dots \\ e_{p_1} \leftrightarrow e_{q_1} \end{gathered}$$

В силу кососимметричности, при выполнении каждой такой перестановки функция будет менять знак. Поэтому в результате получим $(-1)^k f(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Осталось только заметить, что $(-1)^k = \operatorname{sgn}(\sigma)$. **Q.E.D.**

Теорема о полилинейной кососимметрической функции строк. *Пусть f — полилинейная кососимметрическая функция от строк матрицы $A \in Mat_n$. Тогда*

$$f(A) = f(E) \det A$$

Доказательство. Рассмотрим строки матрицы A: $A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(n)}$. Заметим, что каждую такую строку можно выразить через введенные нами строки e:

$$A_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) = a_{11} \cdot e_1 + (0, a_{12}, \dots, a_{1n}) = \ldots = \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} e_{i_1}$$

$$A_{(2)} = \sum_{i_2=1}^{n} a_{2i_2} e_{i_2}$$

$$\dots\dots$$

$$A_{(n)} = \sum_{i_n=1}^{n} a_{ni_n} e_{i_n}$$

Тогда перезапишем с помощью этого $f(A)$:

$$\begin{gathered} f(A) = f(A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(n)}) = \\ = f(\sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} e_{i_1}, A_{(2)}, \dots, A_{(n)}) \end{gathered}$$

Наша функция полилинейна, так что воспользуемся линейностью по первому аргументу.

$$f(A) = \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} f(e_{i_1}, A_{(2)}, \ldots, A_{(n)})$$

Аналогичные действия мы можем проделать со всеми строками, и в итоге получим:

$$f(A) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$$

Заметим, что если среди чисел $i_1, i_2, \ldots i_n$ есть одинаковые, то $f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) = 0$ из кососимметричности (так как знак должен поменяться при перестановке любых двух аргументов, в том числе если мы переставим равные). А если все числа различны, то тогда существует такая подстановка $\sigma \in S_n$, что $i_1 = \sigma(1), i_2 = \sigma(2), \ldots, i_n = \sigma(n)$.

$$f(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$$

Применим доказанную ранее лемму и заметим, что получили определитель:

$$\begin{gathered} f(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \\ = f(e_1, e_2, \ldots, e_n) \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} = \\ = f(E) \det A \end{gathered}$$

Q.E.D.

Следствие (аксиоматическое определение определителя). *Единственная полилинейная кососимметрическая функция от строк матрицы A, равная 1 на E, есть* $\det A$.

Аналогично для столбцов (по свойству T).

2.25 Определитель произведения матриц.

Пусть A, B — квадратные матрицы рамера n. Тогда $\det AB = \det A \cdot \det B$

Доказательство.

$$\begin{gathered} (AB)_{(i)} = A_{(i)} B \\ \det(AB) = \det((AB)_{(1)}, \ldots, (AB)_{(n)}) = \det(A_{(1)}B, \ldots, A_{(n)}B) \end{gathered}$$

Рассмотрим определитель как функцию от строк матрицы A, зафиксировав B. По аксиоматическому определению эта функция является полилинейной кососимметрической функцией. Тогда по теореме о полилинейной кососимметрической функции строк из предыдущего билета:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(EB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Q.E.D.

2.26 Определитель с углом нулей.

Матрицей с углом нулей называется квадратная блочная матрица вида

$$C = \begin{pmatrix} A & P \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ P & B \end{pmatrix}$$

Теорема. *Пусть есть матрицы C и D с углом нулей, где на месте P могут стоять произвольные числа, а на месте 0 — нулевая матрица. При этом матрицы $A \in M_k(\mathbb{R})$ и $B \in M_n(\mathbb{R})$ — квадратные. Тогда определитель* $\det C = \det D = \det A \det B$.

Доказательство. Докажем для матрицы C, так как для D аналогично (по свойству T).

Рассмотрим $f = \det C$ — функцию от столбцов A, зафиксировав P и B. Тогда f — полилинейная кососимметрическая функция, следовательно,

$$\det C = \det A \cdot \begin{vmatrix} E_k & P \\ 0 & B \end{vmatrix}.$$

Теперь рассмотрим $\begin{vmatrix} E_k & P \\ 0 & B \end{vmatrix}$ как функцию g от строк матрицы B, зафиксировав P. Тогда g — полилинейная кососимметрическая функция, следовательно,

$$\det C = \det A \cdot \det B \cdot \begin{vmatrix} E_k & P \\ 0 & E_n \end{vmatrix}.$$

Заметим, что матрица $\begin{pmatrix} E_k & P \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$ — верхнетреугольная с единицами на диагонали, значит её определитель равен 1. Тогда $\det C = \det A \det B$. **Q.E.D.**

2.27 Дополнительный минор и алгебраическое дополнение к элементу квадратной матрицы. Разложение определителя по строке (столбцу).

Дополнительным минором к элементу a_{ij} матрицы $A \in \mathrm{M}_n$ называют определитель матрицы, полученной из A удалением i-ой строки и j-го столбца:

$$\overline{M}_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы $A \in \mathrm{M}_n$ называют число $A_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{M}_{ij}$

Теорема Лапласа о разложении определителя по строке (столбцу). *Пусть выбрана i-я строка матрицы $A \in \mathrm{M}_n$. Тогда определитель матрицы A равен сумме всех элементов строки, умноженных на их алгебраические дополнения:*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

Для столбца формулировка аналогична.

Доказательство. Так как определитель не изменяется от транспонирования, то достаточно рассмотреть разложение по строке. Докажем следующее утверждение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\overline{M}_{11}$$

Для этого рассмотрим определитель по определению. Заметим, что $\sigma(1) = 1$ (иначе член обнуляется). Тогда $\sigma = \rho \in S_{n-1}$ и определитель равен $a_{11} \sum\limits_{\rho \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\rho) a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)}$. А это в свою очередь равно

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теперь вернёмся к основному рассуждению. Разложим i-ю строку матрицы в сумму строк вида $(0, \dots, a_{ij}, \dots, 0)$. Тогда определитель разобъётся в сумму определителей, где вместо i-й строки будет стоять строка такого вида, а все остальные останутся на месте. Переставим элемент с позиции (i, j) на позицию $(1, 1)$ с помощью перестановок соседних строк, а затем столбцов. На это понадобится $i + j - 2$ перестановки. Тогда i-я строка станет первой, а j-й столбец — тоже первым. Тогда согласно ранее доказанному утверждению, этот определитель равен $(-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M}_{ij} = a_{ij} A_{ij}$. Тогда

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

Q.E.D.

2.28 Лемма о фальшивом разложении определителя.

Лемма о фальшивом разложении определителя. *Сумма произведений всех элементов некоторой фиксированной строки (столбца) матрицы A на алгебраические дополнения соответствующих элементов любой другой фиксированной строки (столбца) равна нулю.*

При фиксированных i, $k \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq k$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$$

При фиксированных j, $m \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq k$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{im} = 0$$

Доказательство. Свойство T — достаточно доказать для строк.

Рассмотрим матрицу B, полученную из A заменой i-ой строки на k-ую. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} B_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj}$$

есть разложение определителя матрицы B по k-ой строке. Также ввиду свойства определителя о наличии двух одинаковых строк (столбцов), $\det B = 0$

Заметим, что алгебраические дополнения элементов i-ой строки матрицы B совпадают с алгебраическими дополнениями соответствующих элементов i-ой строки матрицы A. Но элементами i-ой строки матрицы B являются соответствующие элементы k-ой строки матрицы A. Таким образом, сумма произведений всех элементов i-ой строки матрицы B на их алгебраические дополнения с одной стороны равна нулю, а с другой стороны равна сумме произведений всех элементов k-ой строки матрицы A на алгебраические дополнения соответствующих элементов i-ой строки матрицы A. **Q.E.D.**

2.29 Обратная матрица, её единственность. Определитель обратной матрицы.

Определение. *Матрица $B \in M_n$ называется обратной матрицей к A, если $AB = BA = E$. Обозначение: A^{-1}.*

Теорема. *Если обратная матрица существвет, то она единственная:*

Доказательство. Пусть B и B' - две обратные к A матрицы.

$$B = EB = (B'A)B = B'(AB) = B'E = B'$$

Q.E.D.

Определение. *Матрица A называется невырожденной, если для нее существует обратная матрица.*

Теорема. *Если матрица A невырожденная, то $\det(A) \neq 0$ и $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$:*

Доказательство. Воспользуемся тем, что произведение определителей есть опредеделитель произвденения (*см. билет 25*).

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(E) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0, \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Q.E.D.

2.30 Матрица, присоединённая к данной. Критерий существования обратной матрицы. Явная формула для обратной матрицы. Матрица, обратная к произведению двух матриц.

Матрица, присоединённая к A — $\hat{A} = (A_{ij})^T$ — матрица из алгебраических дополнений:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & \dots & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теорема. *Матрица A — невырожденная (имеет обратную) $\iff$ $\det A \neq 0$, при этом $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \hat{A}$*

Доказательство. $\Rightarrow$ — лемма об определителе обратной матрицы (смотрите выше).

$\Leftarrow$: Пусть $\det A \neq 0 \Rightarrow$ достаточно доказать, что $\hat{A} \cdot A = \det A \cdot E$.

Пусть $\hat{A} = B \Rightarrow b_{ij} = A_{ji}$ по определению $\Rightarrow$.

1. Для $X = A \cdot \hat{A}$ выполнено:

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = \begin{cases} \det A, & \text{если } i = j \text{ (разложение по } i\text{-ой строке)} \\ 0, & \text{если } i \neq j \text{ (фальшивое разложение)} \end{cases}$$

2. Для $Y = \hat{A} \cdot A$ выполнено:

$$y_{ij} = \sum_{m=1}^{n} b_{im} \cdot a_{mj} = \sum_{m=1}^{n} A_{mi} \cdot a_{mj} = \begin{cases} \det A, & \text{если } i = j \text{ (разложение по i-ой строке)} \\ 0, & \text{если } i \neq j \text{ (фальшивое разложение)} \end{cases}$$

Таким образом, $\hat{A} \cdot A = \det A \cdot E$, откуда следует, что $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \hat{A}$. **Q.E.D.**

Следствие 1. *Если $A, B \in M_n$ и $AB = E$, то $BA = E$.*

Доказательство. $AB = E \Rightarrow \det A \cdot \det B = 1 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow A$ — невырожденная $\Rightarrow BA = E \cdot BA = (A^{-1} \cdot A)BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1} \cdot E \cdot A = E$. **Q.E.D.**

Следствие 2. *Если A, B — невырожденные, то AB — тоже невырожденная, причём $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.*

Доказательство. A, B— невырожденные $\Rightarrow \det A \neq 0, \det B \neq 0 \Rightarrow \det AB = \det A \cdot \det B \neq 0 \Rightarrow AB$— невырожденная $\Rightarrow (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot AB = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot B = B^{-1} \cdot E \cdot B = B^{-1} \cdot B = E \Rightarrow (B^{-1} \cdot A^{-1}) = (AB)^{-1}$. **Q.E.D.**

Утверждение: если A — невырожденная, то A^{-1} — тоже невырожденная, а значит, $(A^{-1})^{-1} = A$.

2.31 Признак определённости системы линейных уравнений с квадратной матрицей коэффициентов. Формулы Крамера.

Пусть A — матрица коэффициентов некой СЛУ, в которой количество уравнений равно количеству неизвестных, $\vec{b}$ — вектор правых частей, $\vec{x}$ — вектор неизвестных, матрицы A_i получены из A заменой в них i-ого столбца на $\vec{b}$.

Теорема. *Если $\det A \neq 0$, то СЛУ имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

Эти формулы называются формулами Крамера.

Доказательство. При любом элементарном преобразовании СЛУ в матрицах A и A_i одновременно происходит соотвествующее элементарное преобразование строк и, следовательно, отношения, стоящие в правых частях формул Крамера, не изменяются. С помощью элементарных преобразований строк матрицу A можно привести к единичной, поэтому достаточно доказать теорему для случая, когда $A = E$.

Если $A = E$, то система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \dots \\ x_n = b_n \end{cases}$$

Она, очевидно, имеет единственное решение $x_i = b_i$.

С другой стороны,

$$\det A = \det E = 1, \quad \det A_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b_n & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = b_i,$$

так что формулы Крамера в этом случае действительно верны. **Q.E.D.**

2.32 Элементарные преобразования строк матрицы, их обратимость и реализация при помощи умножения матриц.

Элементарными преобразованиями строк матрицы называют:

1. прибавление к любой строке матрицы другой, умноженной на ненулевое число.
2. перестановку местами любых двух строк матрицы;
3. умножение любой строки матрицы на константу $k, k \neq 0$ (при этом определитель матрицы увеличивается в k раз);

Каждому элементарному преобразованию соответствует *элементарная матрица* — матрица, при умножении на которую справа матрицы A, результат будет равен матрице после преобразования. Такие матрицы получаются после применения соответствующего преобразования к единичной матрице.

$$U_{i,j,\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Из определения произведения матриц вытекает, что она выполняет элементарное преобразование — все строки, кроме i не меняются; $A_{(i)}$ становится равна $A_{(1)} + A_{(j)} \cdot \lambda$.

$$U_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Из определения произведения матриц вытекает, что она выполняет элементарное преобразование. В самом деле, все строки, кроме i и j не меняются; $A_{(i)}$ становится равна $A_{(j)} \cdot 1$, и наоборот.

$$U_{i,\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Выполнение этого свойства вытекает из принципов умножения на диагональную матрицу.

Назовём две матрицы *эквивалентными* (обозначение $A \sim B$), если B можно получить из A с помощью элементарных преобразований.

Очевидно, что если $A \sim B$, $B \sim C$, то $A \sim C$.

Предложение. *$A \sim B \iff B \sim A$:*

Доказательство. Если B получается из A одним элементарным преобразованием, то придумать обратное несложно:

1. $B = A \cdot U_{i,j,\lambda}$. Тогда обратное действие — $A = B \cdot U_{i,j,-\lambda}$
2. $B = A \cdot U_{i,j}$. Тогда обратное действие — $A = B \cdot U_{i,j}$
3. $B = A \cdot U_{i,\lambda}$. Тогда обратное действие — $A = B \cdot U_{i,\lambda^{-1}}$

Q.E.D.

2.33 Ступенчатый и улучшенный ступенчатый вид матрицы. Теорема о приведении матрицы к ступенчатому и улучшенному ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований строк.

Ведущий элемент ненулевой строки — ее первый ненулевой элемент.

Матрица называется *ступенчатой*, или имеющей *ступенчатый вид*, если:

1. номера ведущих элементов строк строго возрастают;
2. все нулевые строки стоят в конце (внизу).

Пример ступенчатой матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица называется *улучшенной ступенчатой*, или *канонической*, если:

1. она имеет ступенчатый вид;
2. все ведущие элементы равны 1 и это единственный ненулевой элемент в столбцах, где они стоят.

Пример канонической матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a_{13} & 0 & 0 & a_{16} \\ 0 & 0 & 1 & a_{23} & 0 & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема. *Всякую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к ступенчатому виду, а всякую ступенчатую можно привести к канонической.*

Следствие. *Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к канонической.*

Доказательство. Просто приведем алгоритм такого преобразования. К ступенчатому:

Шаг 1 Если матрица нулевая, то с ней уже ничего делать не надо. Иначе ищем первый ненулевой столбец — пусть он будет под номером j.

Шаг 2 Если $a_{1j} \neq 0$, то переходим к следующему шагу. Иначе ищем такое k, что $a_{kj} \neq 0$ и меняем первую и k-ую строки.

Шаг 3 Имеем $a_{1j} \neq 0$. Вычитая первую строку с нужным коэффициентом из всех остальных срок, добиваемся того, чтобы снизу стояли все нули: $a_{ij} = 0, \ \ \forall i \in \{2, \ldots, n\}$.

Шаг 4 Повторяем алгоритм для последующих строк, на этот раз вытаскивая ведущий элемент (шаг 2) на вторую строку, третью и так далее, пока не приведем к ступенчатому виду.

К каноническому:

- Начинаем с нижней строки. Делим ее на ведущий элемент, от чего он становится равен 1, а потом вычитаем строку с нужным коэффициентом из вышестоящих строк так, чтобы над ведущими элементами стояли нули. Переходим к следующей строке и повторяем, пока не получим каноническую.

Q.E.D.

2.34 Расширенная матрица системы линейных уравнений. Эквивалентные системы линейных уравнений. Поведение множества решений системы линейных уравнений при элементарных преобразованиях строк её расширенной матрицы.

Матричная форма записи СЛУ — $A\vec{x} = \vec{b}$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{— \textit{матрица коэффициентов},}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{— \textit{столбец правых частей},}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{— \textit{столбец неизвестных}.}$$

Расширенная матрица СЛУ — матрица, которая имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ldots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

и содержит всю информацию о СЛУ.

Две СЛУ *эквивалентны* если имеют одинаковое множество решений.

Теорема. *Всякое элементарное преобразование строк матрицы переводит СЛУ в эквивалентную.*

Доказательство. Пусть СЛУ $(A|\vec{b})$ с множеством решений $S \subset R^n$. Пусть СЛУ $(A'|\vec{b'})$ с множеством решений $S' \subset R^n$. Если $(A'|\vec{b'})$ получена из $(A|\vec{b})$ при помощи одного элементарного преобразования, то $S \subseteq S'$. Но от $(A'|\vec{b'})$ к $(A|\vec{b})$ можно перейти при помощи элементарных преобразований, т.к. все преобразования строк обратимы. А значит, $S' \subseteq S$, а тогда $S = S'$. **Q.E.D.**

2.35 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Число решений системы линейных уравнений с действительными коэффициентами.

Вспомним, что элементарные преобразования над расширенной матрицей СЛУ переводят ее в эквивалентную. Тогда приведем ее к ступенчатому виду — это будет называться *прямым ходом метода Гаусса.* Остаётся только описать множество решений системы, матрица которой является ступенчатой.

Если в полученной матрице есть строка вида $(0{,}0,\ldots,0|b)$, то система несовместна. Ведь действительно, у уравнения $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ нет решений, если $b \neq 0$. Иначе система совместна.

В случае совместной системы возможны еще два варианта — когда количество ненулевых строк равно количеству неизвестных, и когда оно меньше.

Если ненулевых строк столько же, сколько неизвестных, то после отбрасывания нулевых строк получится строго треугольная система. Можно привести ее к каноническому виду (применить *обратный ход метода Гаусса*), тогда i-ое уравнение СЛУ будет иметь вид $x_i = b_i'$, где b_i' получена из b_i в процессе преобразований. Тогда, очевидно, система имеет единственное решение — она определенная.

Теперь пусть ненулевых строк меньше, чем неизвестных. Тогда назовем *главными* те неизвестные, коэффициенты при которых являются лидерами строк, а остальные назовем *свободными.* Отбросив нулевые строки и перенеся члены со свободными неизвестными в правую часть, мы снова получим строго треугольную систему. Решая ее как в предыдущем случае, находим выражение главных неизвестных через свободные. Подставляя в свободные любые значения, получаем бесконечное количество решений — система будет неопределенной.

Следствия:

- СЛУ определённа тогда и только тогда, когда все неизвестные главные.
- Если неизвестных в СЛУ больше, чем уравнений, то система является неопределённой.

2.36 Однородные системы линейных уравнений. Существование ненулевого решения у однородной системы линейных уравнений с числом неизвестных, большим числа уравнений. Связь между множествами решений системы линейных уравнений и соответствующей однородной системы.

Однородной СЛУ называют уравнение вида $A\vec{x} = \vec{0}$, где A — матрица коэффициетов, $\vec{x}$ — вектор неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что эта система всегда совместна, так как есть нулевое решение $\vec{x} = \vec{0}$.

Пусть в системе переменных больше, чем уравнений (строк матрицы СЛУ). Тогда в ступенчатом виде будет хотя бы одна свободная неизвестная (x_r). Значит, есть решение с $x_r \neq 0$. Тогда у СЛУ бесконечно много решений, среди которых есть ненулевые.

Пусть задана система система линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$, где $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Предложение 1: *Если сложить решение неоднородной системы с решением связанной с ней однородной, то получится решение неоднородной системы.*

Доказательство. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — решение уравнения $A\vec{x} = \vec{b}$ и $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — решения уравнения $A\vec{x} = \vec{0}$. Тогда рассмотрим i-ые строки:

$$\begin{cases} a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = b_i \\ a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{in}\beta_n = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{i1}(\alpha_1 + \beta_1) + a_{i2}(\alpha_2 + \beta_2) + \ldots + a_{in}(\alpha_n + \beta_n) = b_i$$

Тогда $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$ также является решением неоднородной системы. **Q.E.D.**

Предложение 2: *Разность двух решений неоднородной системы даст решение ассоциированной с ней однородной системы.*

Доказательство. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — решения уравнения $A\vec{x} = \vec{b}$. Тогда рассмотрим i-ю строку:

$$\begin{cases} a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = b_i \\ a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{in}\beta_n = b_i \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{i1}(\alpha_1 - \beta_1) + a_{i2}(\alpha_2 - \beta_2) + \ldots + a_{in}(\alpha_n - \beta_n) = 0$$

Тогда $(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$ является решением однородной системы. **Q.E.D.**

Теорема: *Пусть c — какое-то решение неоднородной системы, а L — множество всех решений связанной с ней однородной системы. Тогда $c + L$ есть множество всех решений неоднородной системы.*

Доказательство. Пусть M — множество всех решений данной неоднородной СЛУ и $c \in M$. Каждый элемент множества $c+L$ можно представить в виде $c+l$, $l \in L$. Но согласно предложению 1 $c+l \in M$. Тогда $c+L \subset M$.

При этом верно, что $M \subset c+L$. Действительно, пусть $d \in M$. Тогда $d-c \in L$ по предложению 2, следовательно $d \in c+L$ и $M \subset c+L$. Но тогда $M = c+L$. **Q.E.D.**

Геометрический смысл: множество M есть сдвиг множества L в $\mathbb{R}^n$.

2.37 Вычисление обратной матрицы при помощи элементарных преобразований.

Предложение. *Пусть $A \in \mathrm{Mat}_n$. Рассмотрим матрицу $M = (A|E) \in \mathrm{Mat}_{n\times 2n}$. Пусть $M' = (K|B)$ – матрица, полученная из M с помощью элементарных преобразований строк, причем K – канонический вид матрицы A. Тогда A невырожденна (обратима) тогда и только тогда, когда $K = E$, при этом $B = A^{-1}$.*

Доказательство. Вспомним, что для невырожденной матрицы верно, что $\det A \neq 0$. Так как элементарные преобразования не могут обнулить определитель, то и $\det K \neq 0$.

Итого, K — улучшенный ступенчатый вид матрицы A и при этом у нее не нулевой определитель. Единственная такая матрица — единичная, то есть $K = E$ (K верхнетреугольна, поэтому ее определитель есть произведение диагональных элементов. Но если в K есть «ступеньки» длины больше двух, то на диагонали есть нули, а значит и $\det K = 0$).

Элементарные преобразования строк — результат умножения слева на элементарную матрицу. Так как в итоге из A мы получили E, то $E = U_s \cdot \ldots \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot A$. Домножив справа на обратную, получим, что $A^{-1} = U_s \cdot \ldots \cdot U_2 \cdot U_1$.

Но все эти операции применялись ко всей матрице $M = (A|E)$, из которой в итоге получилась $M' = (E|B)$. То есть те же самые операции перевели E в B. Тогда $B = (U_s \cdot \ldots \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot E) = U_s \cdot \ldots \cdot U_2 \cdot U_1 = A^{-1}$. **Q.E.D.**

2.38 Векторные пространства. Примеры. Простейшие следствия из аксиом.

Множество V называется *векторным (линейным) пространством* над полем $\mathbb{R}$, если на V заданы следующие операции:

1. Сложение векторов: $V \times V \to V : (\vec{a},\vec{b}) \mapsto \vec{a}+\vec{b}$;

2. Умножение вектора на скаляр: $\mathbb{R} \times V \to V : (\lambda, \vec{a}) \mapsto \lambda\vec{a}$,

для которых верны следующие *аксиомы векторного пространства:*

1. $\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in V\ \vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ — коммутативность

2. $\forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V\ (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ — ассоциативность

3. $\exists\, \vec{0} \in V : \forall\, \vec{a} \in V\ \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$ — существование нулевого вектора. Замечание: $\vec{a}+(-\vec{b})$ обычно пишут, как $\vec{a}-\vec{b}$

4. $\forall\, \vec{a} \in V \exists -\vec{a} \in V : (-\vec{a})+\vec{a} = \vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$ — существование противоположного вектора

5. $\forall\, \vec{a} \in V\ 1\vec{a} = \vec{a}$ — умножение на единичный скаляр

6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \vec{a} \in V\ (\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$ — ассоциатвность умножения на скаляр

7. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \vec{a} \in V\ (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ — дистрибутивность умножения относительно сложения

8. $\forall \lambda \in \mathbb{R}; \vec{a}, \vec{b} \in V\ \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ — дистрибутивность сложения относительно умножения

Также стоит понимать, что вместо $\mathbb{R}$ можно подставить любое другое поле.

Примеры векторных пространств над $\mathbb{R}$ с введёнными операциями сложения и умножения на скаляр:

1. $V = \{\vec{0}\}$
2. $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{R}^n$ (реализованное как пространство строк или стобцов)
4. $\mathrm{Mat}_{n \times m}$ (то же самое, что $\mathbb{R}^{nm}$)
5. Множество функций $f : M \mapsto \mathbb{R}$, где M — произвольное (но фиксированное) множество. Частный случай: $M = [0,1]$.

Простейшие следствия из аксиом:

1. Нулевой элемент единствен.

   Доказательство. Пусть $\vec{0}_1$ и $\vec{0}_2$ — два нуля. Тогда $\vec{0}_1 = \vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_2$. **Q.E.D.**

2. Противоположный элемент единствен.

   Доказательство. Пусть $-\vec{a}_1$ и $-\vec{a}_2$ — два противоположных к $\vec{a}$ элемента. Тогда $-\vec{a}_1 = -\vec{a}_1 + \vec{0} = -\vec{a}_1 + \vec{a} - \vec{a}_2 = \vec{0} - \vec{a}_2 = -\vec{a}_2$. **Q.E.D.**

3. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda\vec{0} = \vec{0}$

   Доказательство. $\lambda\vec{0} = \lambda(\vec{0} + \vec{0}) = \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0} \iff \lambda\vec{0} = \vec{0}$ **Q.E.D.**

4. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda(-\vec{a}) = -\lambda\vec{a}$

   Доказательство. $\lambda(-\vec{a}) + \lambda\vec{a} = \lambda((-\vec{a} + \vec{a})) = \lambda\vec{0} = \vec{0}$ **Q.E.D.**

5. $0\vec{a} = \vec{0}$

   Доказательство. $0\vec{a} = (0 + 0)\vec{a} = 0\vec{a} + 0\vec{a} \iff 0\vec{a} = \vec{0}$ **Q.E.D.**

6. $(-1)\vec{a} = (-\vec{a})$

   Доказательство. См. следствие 4 при $\lambda = 1$. **Q.E.D.**

2.39 Подпространства векторных пространств. Структура множества решений однородной системы линейных уравнений.

Пусть V — векторное пространство.

Определение: Подмножество векторов $U \subseteq V$ — *подпространство*, если:

1. $\vec{0} \in U$
2. $\vec{a} \in U, \vec{b} \in U \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in U$
3. $\vec{a} \in U, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{\lambda a} \in U$

Предложение. *Всякое подпространство U, принадлежащее векторному пространству V, само является векторным пространством относительно имеющихся в V операций.*

Доказательство. Проверка всех аксиом векторного пространства — они выполняются и в подпространстве. **Q.E.D.**

Примеры:

1. $\vec{0}$ и само пространство V — подпространства в V.
2. Множество диагональных, множество верхнетреугольных матриц, множество нижнетреугольных матриц в M_n — все эти множества являются подпространствами в M_n.

Предложение. *Множество решений всякой однородной СЛУ $A\vec{x} = \vec{0}$, где $A \in Mat_{m\times n}$ и $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, является подпространством в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество решений нашей однородной СЛУ. Тогда просто проверим выполнение всех условий подпространства:

1. $\vec{0} \in S$, т.к. $A\vec{0} = \vec{0}$, то есть нуль-вектор всегда является решением.
2. $\vec{x_1}, \vec{x_2} \in S \Rightarrow A(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = A\vec{x_1} + A\vec{x_2} = 0$, то есть сумма решений тоже является решением.
3. $\vec{x} \in S, \lambda \in R \Rightarrow A\vec{\lambda x} = \lambda A\vec{x} = 0$, то есть решение, умноженное на скаляр, тоже является решением.

Q.E.D.

2.40 Линейные комбинации векторов. Линейная оболочка подмножества векторного пространства. Конечномерные векторные пространства.

Линейная комбинация конечного набора векторов векторного пространства — всякий вектор $\vec{v} = \lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Линейная комбинация $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$ называется *тривиальной*, если $\lambda_i = 0\ \forall i$, и *нетривиальной* в противном случае.

Пусть $S \subseteq V$ — какое-то подмножество. Совокупность всевозможных (конечных) линейных комбинаций векторов из S называется *линейной оболочкой* множества S и обозначается через $\langle S \rangle$. Это наименьшее подпространство пространства V, содержащее S. Говорят, что пространство V *порождается* множеством S, если $\langle S \rangle = V$.

Векторное пространство называется *конечномерным*, если оно порождается конечным числом векторов, и *бесконечномерным* в противном случае.

Предложение. *Линейная оболочка подмножества S векторного пространства V является подпространством этого векторного пространства.*

Доказательство. Чтобы доказать, что линейная оболочка является подпространством, достаточно показать, что выполняются его свойства.

- Ноль лежит в линейной оболочке.

$$v_1, \ldots, v_n \in S, \quad 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_n = 0 \in \langle S \rangle \to 0 \in \langle S \rangle$$

- Сумма двух линейных комбинаций лежит в линейной оболочке.

$$\begin{gathered} v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m \in S, \quad x_1, \ldots . x_n, y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n \in \langle S \rangle, \quad y_1 w_1 + \ldots + y_m w_m \in \langle S \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n + y_1 w_1 + \ldots + y_m w_m \in \langle S \rangle \end{gathered}$$

- Линейная комбинация, умноженная на скаляр, лежит в линейной оболочке.

$$\begin{gathered} v_1, \ldots, v_n \in S, \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 v_1 + \ldots x_n v_n \in \langle S \rangle \\ \lambda \in \mathbb{R} \to \lambda x_1 v_1 + \ldots + \lambda x_n v_n \in \langle S \rangle \end{gathered}$$

Q.E.D.

Примеры

- $\langle \vec{0} \rangle = \{0\}$
- $\vec{a} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \Rightarrow \langle \vec{a} \rangle = \{\lambda \vec{a} | \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$ — прямая, содержащая $\vec{a}$.
- $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}.$$

Тогда $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n$, так как

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

Замечание. *Говорят, что:*

- $\langle S \rangle$ *— подпространство, натянутое на S;*
- $\langle S \rangle$ *— подпространство, порождаемое множеством S.*

2.41 Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Критерий линейной зависимости.

Линейная зависимость — свойство, которое может иметь система векторов. При линейной зависимости существует нетривиальная линейная комбинация векторов, равная нулю: существуют такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (где есть хотя бы один ненулевой элемент), что $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$. Соответственно, система векторов линейно независима тогда, когда существует только тривиальная линейная зависимость, равная нулю: $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$ только при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Другая форма этого определения — назовём систему векторов линейно зависимой, если хотя бы один из векторов, входящих в эту систему, можно представить в виде линейной комбинации прочих (*критерий линейной зависимости*). Иными словами, существуют такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (где есть хотя бы один ненулевой элемент), что $a_i = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + \lambda_{i+1} a_{i+1} + \ldots + \lambda_n a_n$.

Доказать эквивалентность этих определений несложно:

(1) $\Rightarrow$ (2): $a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} a_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} a_3 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} a_n$
(2) $\Rightarrow$ (1): $0 = -\lambda_1 a_1 - \ldots - \lambda_{i-1} a_{i-1} + a_1 - \lambda_{i+1} a_{i+1} - \ldots - \lambda_n a_n$

2.42 Основная лемма о линейной зависимости.

Основная лемма о линейной зависимости. *Возьмём $a_1, a_2, \ldots, a_r$ и $b_1, b_2, \ldots, b_s$ — две системы векторов, причём $r < s$. Пусть вторая система линейно выражается через первую, то есть $b_i \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_r \rangle \forall i \in \{1, \ldots, s\}$. Тогда система $b_1, b_2, \ldots, b_s$ линейно завсисима.*

Доказательство. Исходя из условия, можно записать:

$$b_i = \alpha_{1i} a_1 + \ldots + \alpha_{ri} a_r,\ i \in \{1, \ldots, s\}$$

Для произвольных коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ запишем:

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_s b_s = \lambda_1(\alpha_{11} a_1 + \ldots + \alpha_{r1} a_r) + \ldots + \lambda_s(\alpha_{1s} a_1 + \ldots + \alpha_{rs} a_r) =$$

$$= (\alpha_{11}\lambda_1 + \ldots + \alpha_{1s}\lambda_s) a_1 + \ldots + (\alpha_{r1}\lambda_1 + \ldots + \alpha_{rs}\lambda_s) a_r$$

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\lambda_1 + \ldots + \alpha_{1s}\lambda_s = 0 \\ \alpha_{21}\lambda_1 + \ldots + \alpha_{2s}\lambda_s = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{r1}\lambda_1 + \ldots + \alpha_{rs}\lambda_s = 0 \end{cases}$$

относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$. Она совместна, поскольку в ней r уравнений и s неизвестных, а $r < s$ по условию. Также из этого же следует, что система не является определённой (уравнений меньше, чем неизвестных). Значит, она имеет ненулевое решение. Если найти это ненулевое решение и подставить вместо $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ в выражение выше, получаем зависимость системы $b_1, \ldots, b_s$. **Q.E.D.**

2.43 Базис конечномерного векторного пространства. Базис как линейно независимая порождающая система. Стандартный базис в пространстве $\mathbb{R}^n$

Система векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ векторного пространства V называется *базисом* этого векторного пространства, если всякий вектор $\vec{v}$ из этого векторного пространства единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов $e_1, \ldots, e_n$:

$\vec{v} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты вектора $\vec{v}$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$

Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{R}^n$. Вектора

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют в нём *стандартный* базис.

Предложение 1. *Система векторов $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ является базисом в V тогда и только тогда, когда $\langle S \rangle = V$ и S линейно независима.*

Доказательство. Докажем следствия в одну и другую стороны:

[$\Rightarrow$] Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис в V. Из определения базиса и линейной оболочки следует, что любой вектор из V линейно выражается единственным образом через векторы из S, то есть $V = \langle S \rangle$. При этом из определения базиса следует линейная независимость $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

[$\Leftarrow$] Так как $V = \langle S \rangle = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$, то для любого вектора $\vec{v} \in V$ найдутся скаляры $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие, что $\vec{v} = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. Теперь покажем, что такое разложение единственно. Пусть это не так и есть другой набор скаляров $y_1, y_2, \ldots, y_n$ такой, что $\vec{v} = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$. Но тогда существует нетривиальная нулевая комбинация векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$:

$$(x_1 - y_1)e_1 + (x_2 - y_2)e_2 + \ldots + (x_n - y_n)e_n = 0$$

что противоречит условию линейной независимости. Тогда всякое разложение единственно и $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис в V.

Q.E.D.

2.44 Существование базиса у конечномерного векторного пространства. Независимость числа элементов в базисе от выбора базиса. Размерность конечномерного векторного пространства.

Следствие. *Всякая конечномерная линейно независимая система векторов является базисом своей линейной оболочки (см. предложение 1 предыдущего билета).*

Предложение 2. *Из всякой конечной системы S векторов пространства V можно выделить конечную подсистему, являющуюся базисом линейной оболочки $\langle S \rangle$.*

Доказательство. Пусть $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Докажем утверждение индукцией по m.

База: $m = 1$. Тогда в системе лишь один вектор. Если он нулевой, то в качестве базиса берём пустое множество (в математике принята договорённость, согласно которой $\langle \varnothing \rangle = \vec{0}$. Если не нулевой, то система линейно независима и является базисом.

Теперь пусть $m \geqslant 2$ и утверждение верно для меньших m. Если система $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ линейно независима, то она уже является базисом $\{v_1, \ldots, v_m\}$. Пусть система линейна зависима. Тогда существует вектор v_i, который линейно выражается через остальные векторы. Тогда $\langle S \rangle$ совпадает с $\langle S \setminus \{v_i\} \rangle$. Но в $\langle S \setminus \{v_i\} \rangle$ можно выбрать базис по предположению индукции. **Q.E.D.**

Следствие. *Всякое конечномерное пространство обладает базисом.*

Доказательство. V конечномерно, а значит $\exists v_1, \ldots v_m \in V$ такие, что $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$. Но среди $v_1, \ldots v_m$ можно выбрать базис по предложению 2. **Q.E.D.**

Предложение 3. *Все базисы конечномерного векторного пространства V содержат одно и то же число элементов.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_m$ - два базиса в V и $m > n$. Тогда $e'_1, \ldots, e'_m \in \langle e_1, \ldots e_n \rangle$. Но тогда $e'_1, \ldots, e'_m$ линейно зависимы по основной лемме о линейной зависимости. Противоречие. **Q.E.D.**

Размерностью линейного векторного пространства V называется число элементов в базисе V. Обозначение: $\dim V$.

Лемма. *V — векторное пространство, $\dim V = n < \infty$. Если $v_1, \ldots, v_m \in V$ — линейно независимые векторы, то $m \leqslant n$.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V. Тогда $v_1, \ldots v_m \in \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ по основной лемме о линейной зависимости, а значит $m \leqslant n$. **Q.E.D.**

2.45 Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса конечномерного векторного пространства.

Теорема: *Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{K}$ с базисом $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Тогда верно следующее утверждение: любую систему $f_1, f_2, \ldots, f_s$, $s \leqslant n$ линейно независимых векторов можно дополнить до базиса.*

Доказательство. Рассмотрим систему векторов $f_1, f_2, \ldots, f_s, e_1, e_2, \ldots, e_n$. Выбросим из этой системы все вектора, линейно выражаемые через предыдущие. Так как $f_1, f_2, \ldots, f_s$ линейно независимы, то ни один из них выброшен не будет, и система будет иметь вид

$$f_1, f_2, \ldots, f_s; e_{i_1}, \ldots, e_{i_t}$$

Любое нетривиальное соотношение

$$\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_s f_s + \beta_1 e_{i_1} + \ldots + \beta_t e_{i_t} = 0$$

обязательно содержало бы какой-либо коэффициент $\beta_k \neq 0$, где k — максимально (иначе система $f_1, f_2, \ldots, f_s$ была бы линейно зависима). Но тогда e_{i_k} выразился бы через предыдущие вектора, что невозможно. Тогда существует только тривиальная линейная комбинация, дающая ноль.

С другой стороны, все вектора из V линейно выражаются через базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и тем более через систему $f_1, f_2, \ldots, f_s; e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда линейно независимая система $f_1, f_2, \ldots, f_s; e_{i_1}, \ldots, e_{i_t}$ максимальна. Следовательно, она является базисом, а $e_{i_1}, \ldots, e_{i_t}$ — искомое дополнение. **Q.E.D.**

2.46 Размерность подпространства конечномерного векторного пространства. Ранг системы векторов конечномерного векторного пространства.

Теорема. *Возьмем конечномерное векторное пространство V размерности n. Пусть $U \subseteq V$ — подпространство, тогда*

1. *U — конечномерно и $\dim U \leq \dim V$.*

Доказательство. Пусть $u_1 \dots u_m$ — максимальная линейно независимая система векторов в U (такая система конечна, т.к. $U \subseteq V$). Тогда, поскольку всякую линейно независимую систему векторов можно дополнить до базиса, $u_1 \dots u_m$ порождают U. Значит, они есть базис в U. Следовательно, по лемме о размерности системы векторов в конечномерном векторном пространстве, $m \leqslant n \Rightarrow \dim U \leqslant \dim V$. **Q.E.D.**

2. $\dim U = \dim V \iff U = V$.

Доказательство. Если $U = V$, их размерности равны. Докажем в обратную сторону. Пусть $\dim U = \dim V$, но $U \neq V$, тогда в U есть базис из n векторов и эти же векторы есть базис в V, т.к. всякий набор из n линейно независимых векторов n-мерного векторного пространства есть его базис. Следовательно, $U = V$. **Q.E.D.**

Рангом системы векторов $S \subseteq V$ называют число $\operatorname{rk} S$, равное наибольшему числу векторов в линейно независимой подсистеме $S' \subseteq S$.

Предложение. *Пусть* $S \subseteq V$, *тогда* $\operatorname{rk} S = \dim\langle S\rangle$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{rk} S = k$ и $v_1 \dots v_k$ — линейно независимая подсистема в S. Тогда $S \subseteq \langle v_1 \dots v_k\rangle$, а поскольку всякую линейно независимую систему векторов можно дополнить до базиса, то $\langle S\rangle = \langle v_1 \dots v_k\rangle$. Следовательно, $v_1 \dots v_k$ — базис в S, а значит $\dim\langle S\rangle = k = \operatorname{rk} S$. **Q.E.D.**

Свойства ранга:

1. Ранг линейно независимой системы совпадает с числом её векторов.
2. Ранг линейно зависимой системы меньше числа её векторов.
3. Ранги эквивалентных систем совпадают – $S_1 \sim S_2 \Rightarrow \operatorname{rk} S_1 = \operatorname{rk} S_2$.
4. Ранг подсистемы не больше ранга системы.
5. Если $S_1 \subset S_2$ и $\operatorname{rk} S_1 = \operatorname{rk} S_2$, то S_1 и S_2 имеют общую базу.
6. Ранг системы векторов не изменяется, если в неё добавить вектор, являющийся линейной комбинацией остальных векторов системы.
7. Ранг системы векторов не изменяется, если из неё удалить вектор, являющийся линейной комбинацией остальных векторов.

2.47 Столбцовый и строковый ранги матрицы, их поведение при элементарных преобразованиях строк и столбцов.

Определение: *Рангом (или столбцовым рангом) матрицы* называется число, равное рангу системы столбцов. Обозначение: $\operatorname{rk} A$.

Определение: *Строковым рангом матрицы* называется число, равное столбцовому рангу ее транспонированной матрицы, т.е рангу системы строк. Обозначение: $\operatorname{rk} A^T$.

Системы векторов $\{a_1, \dots, a_n\}$ и $\{b_1, \dots, b_m\}$ называются *эквивалентными*, если каждый из векторов b_j линейно выражается через $a_1, \dots, a_n$, и наоборот, каждый из векторов a_i линейно выражается через $b_1, \dots, b_m$. Это, очевидно, равносильно совпадению линейных оболочек:

$$\langle a_1, \dots, a_n\rangle = \langle b_1, \dots, b_m\rangle$$

Теорема. *Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк.*

Доказательство. Пусть матрица B получена из матрицы A некоторыми элементарными преобразованиями строк. Рассмотрим систему столбцов матрицы A: $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$. Рассмотрим их некоторую линейную зависимость $x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \cdots + x_n A^{(n)} = 0$. Но тогда вектор $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ является решением СЛУ $A\vec{x} = \vec{0}$. Элементарные преобразования строк над СЛУ переводят ее в эквивалентную, следовательно, $\vec{x}$ также является решением СЛУ $B\vec{x} = \vec{0}$. Тогда в B существует линейная зависимость $x_1 B^{(1)} + \ldots + x_n B^{(n)} = 0$. Так как элементарные преобразоавания обратимы, то верно и обратное.

Итого, столбцы матрицы A линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы столбцы B, и наоборот. Следовательно, максимальное количество линейно независимых столбцов в обеих матрицах одинаково — а это и означает, что их ранг равен. **Q.E.D.**

Теорема. *Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях столбцов.*

Доказательство. Пусть матрица $A \in Mat_{m\times n}$ и матрица B получена из нее путем некоторых элементарных преобразований столбцов. Тогда $\langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle \supseteq \{B^{(1)}, \ldots, B^{(n)}\} \implies \langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle \supseteq \langle B^{(1)}, \ldots, B^{(n)} \rangle$. Так как элементарные преобразования обратимы, то справедливо и обратное включение: $\langle B^{(1)}, \ldots, B^{(n)} \rangle \supseteq \langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle$. То есть имеем $\langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle = \langle B^{(1)}, \ldots, B^{(n)} \rangle$.

Ранг есть размерность подпространства, задающегося линейной оболочкой. Значит, $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$. **Q.E.D.**

Лемма. *Строковый ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк или столбцов матрицы A.*

2.48 Столбцовый и строковый ранги матрицы, имеющей улучшенный ступенчатый вид. Связь между строковым и столбцовым рангами произвольной матрицы. Связь ранга квадратной матрицы с её определителем.

Предложение. *Если $A \in Mat_{m\times n}$ имеет улучшенный ступенчатый вид, то $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T$, причём оба числа равны количеству ненулевых строк.*

Доказательство.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & \ldots & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & \ldots & * & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть r — число ненулевых строк матрицы A. Тогда $\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\} \supseteq \{e_1, \ldots, e_r\}$, где e_i — i-й вектор стандартного базиса. Но с другой стороны: $\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\} \subseteq \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$. Следовательно, $\langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle = \langle e_1, \ldots, e_r \rangle \Rightarrow \operatorname{rk} A = \dim\langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle = \dim\langle e_1, \ldots, e_r \rangle = r$.

Теперь покажем, что $\operatorname{rk} A^T = r$.

Ясно, что $\langle A_{(1)}, \ldots, A_{(m)} \rangle = \langle A_{(1)}, \ldots, A_{(r)} \rangle$. Тогда достаточно показать, что $A_{(1)}, \ldots, A_{(r)}$ линейно независимы.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ таковы, что: $\lambda_1 A_{(1)} + \ldots + \lambda_r A_{(r)} = \vec{0}$.

Ограничивая данное соотношение на первый столбец матрицы A, получаем:

$$\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_r a_{r1} = 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \ldots + \lambda_r \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.$$

Аналогичные равенства получаем для каждого столбца $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0 \Rightarrow$ строки $A_{(1)}, \ldots, A_{(r)}$ линейно независимы $\Rightarrow \operatorname{rk} A^T = r$. **Q.E.D.**

Предложение. *Для всякой $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ имеем: $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T$, причём оба числа равны количеству ненулевых строк в ступенчатом виде, к которому приводится A посредтством элементарных преобразований строк.*

Доказательство. Так как при переходе от ступенчатого вида к улучшенному ступенчатому число ненулевых строк не изменяется, то утверждение следует из предложений о неизменности ранга матрицы при элементарных преобразованиях. **Q.E.D.**

Следствие. *Пусть $A \in \mathrm{M}_n$ — квадратная матрица, тогда:*

1. $\operatorname{rk} A = n \iff \det A \neq 0$
2. $\operatorname{rk} A < n \iff \det A = 0$

Доказательство. При приведении A к ступенчатому виду $\operatorname{rk} A$ не изменяется, а условия $\det A = 0$ и $\det A \neq 0$ сохраняются. Тогда если в ступенчатом виде есть нулевая строка, то $\operatorname{rk} A < n$ и $\det A = 0$.

Если нет нулевых строк, то $\operatorname{rk} A = n$ и $\det A \neq 0$ (матрица — верхнетреугольная с ненулевыми элементами на диагонали). **Q.E.D.**

2.49 Подматрицы. Связь рангов матрицы и её подматрицы. Миноры. Теорема о ранге матрицы.

Пусть A — произвольная (не обязательно квадратная) матрица. Всякая матрица, составленная из элементов матрицы A, находящихся на пересечениях каких-то выбранных строк и каких-то выбранных столбцов, называется *подматрицей* матрицы A. Подчеркнем, что выбираемые строки и столбцы не обязаны идти подряд.

Определитель квадратной подматрицы порядка k называется *минором* порядка k матрицы A. Иногда, допуская вольность речи, саму квадратную подматрицу также называют минором. В частности, если A — квадратная матрица порядка n, то минор порядка $n-1$, получаемый вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, называется *дополнительным минором* элемента a_{ij} и обозначается через $\bar{M}_{ij}$.

Теорема о ранге матрицы. *Ранг матрицы равен наибольшему порядку ее миноров, отличных от нуля.*

Доказательство. Пусть ранг матрицы A равен r, и пусть $s > r$. Тогда любые s строк матрицы A линейно зависимы и, тем более, линейно зависимы строки любой квадратной подматрицы порядка s, представляющие собой части соответствующих строк матрицы A. Следовательно, любой минор порядка s равен нулю. Далее, рассмотрим подматрицу, образованную какими-либо r линейно независимыми строками матрицы A. Ее ранг, очевидно, также равен r и, значит, среди ее столбцов найдется r линейно независимых. Минор порядка r, образованный этими столбцами, не равен нулю. **Q.E.D.**

Следствие. *Ранг матрицы не меньше ранга любой ее подматрицы.*

2.50 Теорема Кронекера-Капелли. Критерий определённости совместной системы линейных уравнений в терминах ранга её матрицы коэффициентов. Критерий определённости системы линейных уравнений с квадратной матрицей коэффициентов.

Теорема Кронекера-Капелли. *Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы.*

Доказательство. Так как ни ранг матрицы, ни множество решений СЛУ не меняется при элементарных преобразованиях строк, мы можем рассматривать только случай, когда матрица приведена к ступенчатому виду.

В таком случае утверждение "система совместна" эквивалентно утверждению "в матрице нет строк вида $(0, \dots, 0|x)$, где $x \neq 0$". Значит, если мы перейдем от матрицы коэффициентов к расширенной матрице для совместной СЛУ, число ненулевых строк не изменится (т.к. не может ни увеличиться, ни уменьшиться добавлением строки вышеуказанного вида). Значит, ранги равны.

И наоборот, если система несовместна, то число ненулевых строк, а значит, и ранг, изменятся. **Q.E.D.**

Теорема. *Если СЛУ совместна, то она определена, если ранг матрицы равен числу неизвестных; иначе она имеет бесконечное число решений.*

Доказательство. Снова будем рассматривать только ступенчатые матрицы, т.к. все прочие можно свести к ступенчатому виду.

В этом случае, СЛУ определена тогда и только тогда, когда все переменные — главные; значит, число ступенек равно числу переменных, но так как ранг равен числу ступенек, это эквивалентно утверждению о том, что ранг равен числу переменных. **Q.E.D.**

Следствие. *Если A — квадратная матрица, то СЛУ определена тогда и только тогда, когда* $\det A \neq 0$.

Доказательство. Во-первых, из вышедоказанного следует, что если СЛУ определена, то $\det A \neq 0$, (т.к. $\operatorname{rk} A = n \iff \det A \neq 0$).

Во-вторых, если определитель нулю не равен, то ранг равен числу строк и добавление столбца правых частей не может увеличить ранг, т.к. он не больше наименьшей стороны матрицы. Тогда $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|b)$, тогда по теореме Кронекера-Капелли СЛУ совместна, а так как ранг равен числу переменных, решение единственно. **Q.E.D.**

2.51 Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений: определение и метод построения. Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений.

Фундаментальной системой решений однородной системы линйеных уравнений называется базис пространства решений этой системы. Пусть $u_1, u_2, \dots, u_n$ — ФСР некой СЛУ. Тогда любое решение этой СЛУ будет единственным образом представимо в виде линейной комбинации:

$$\lambda_1 \vec{u_1} + \lambda_2 \vec{u_2} + \ldots + \lambda_n \vec{u_n}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — произвольные коэффициенты из $\mathbb{R}$.

Альтернативное определение по Курошу: *фундаментальной системой решений* называется всякая максимальная линейно независимая система решений однородной системы линейных уравнений.

Чтобы построить ФСР, удобно воспользоваться следующим свойством: количество векторов в ФСР равно количеству *свободных неизвестных.*

Алгоритм построения следующий: приравнивать каждую свободную неизвестную по очереди к единице, при этом все остальные приравнивать к нулю, подставить значения свободных неизвестных в систему и выразить исходя из этого все зависимые.

Теорема о размерности пространства решений однородной системы линейных уравнений. *Пусть A — матрица однородной системы линейных уравнений относительно n неизвестных. Тогда множество решений этой системы является подпространством в $\mathbb{R}^n$ размерности $n - \operatorname{rk} A$.*

Доказательство. Пусть некоторые решения $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ принадлежат множеству решений S. Значит, $A\vec{x}_1 = \vec{0}, A\vec{x}_2 = \vec{0}$. Тогда $A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, то есть $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ принадлежит множеству решений S.

Аналогично показывается принадлежность множеству решений умножения решения на скаляр. Таким образом, множество решений образует векторное пространство.

Приведём матрицу к каноническому виду. Заметим, что пространство решений при элементарных преобразованиях не меняется.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & a_{1,r+1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & a_{2,r+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Поскольку ранг матрицы равен r, то в ней ровно r главных неизвестных. Выразим главные неизвестные через свободные.

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{a_{11}}(a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = -\frac{1}{a_{rr}}(a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n) \end{cases}$$

Из общего решения выделим некоторые частные решения, приравнивая свободные неизвестные к единице. Получим систему из $n - r$ векторов.

$$\begin{cases} u_1 = (\ldots, 1, 0, \ldots, 0) \\ u_2 = (\ldots, 0, 1, \ldots, 0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{n-r} = (\ldots, 0, 0, \ldots, 1) \end{cases}$$

Докажем, что она образует базис:

Линейная независимость: Предположим, что есть такой ненулевой набор скаляров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{R}$, что $\lambda_1\vec{u_1} + \lambda_2\vec{u_2} + \ldots + \lambda_n\vec{u_{n-r}} = \vec{0}$. Тогда $\forall i \in \{1, \ldots, n-r\}(r+i)$-я координата левой части равна λ_i, откуда $\lambda_i = 0$. Следовательно, все $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0$, значит $u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}$ — линейно независимы (существует только тривиальная их комбинация, равная нулю).

$\langle u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}\rangle$ *порождается пространством решений* S: Возьмём некое решение $\vec{u} \in S$, тогда $\vec{u} = (\ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r})$. Рассмотрим вектор $\vec{v} = u - \lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2 - \ldots - \lambda_{n-r}u_{n-r}$. Но тогда $v = (\ldots, 0, 0, \ldots, 0)$, а т.к. значения всех главных неизвестных однозначно определяются значениями свободных, то $v = (0, \ldots, 0, \ldots, 0) = \vec{0}$, следовательно $\vec{u} = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_{n-r}u_{n-r}$, значит $u \in \langle u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}\rangle \Rightarrow \langle u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}\rangle = S$.

Получается, векторы $u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}$ действительно состаляют базис в S. А из этого следует, что $\dim S = n - r = n - \operatorname{rk} A$. **Q.E.D.**

2.52 Ортогональное дополнение подмножества в $\mathbb{R}^n$. Связь между ортогональными дополнениями подмножества в $\mathbb{R}^n$ и его линейной оболочки.

Ортогональным дополнением подмножества S в $\mathbb{R}^n$ называется множество

$$S^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | (\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad \forall y \in S\},$$

где $(\vec{x}, \vec{y})$ — скалярное произвдение. Иными словами, $S^\perp$ состоит из векторов $\vec{x}$, которые ортогональны векторам из S.

Лемма 1. *$S \subseteq \mathbb{R}^n \to S^\perp$ подпространство в $\mathbb{R}^n$*

Доказательство. $\vec{y} \in$ S.

1. $\vec{0} \in S^\perp$ так как $(\vec{0},\vec{y}) = 0$.

2. $\vec{x_1}$, $\vec{x_2} \in S^\perp, \to (\vec{x_1} + \vec{x_2},\vec{y}) = (\vec{x_1},\vec{y}) + (\vec{x_2},\vec{y}) = 0$.

3. $\vec{x} \in S^\perp, \lambda \in \mathbb{R}^n \to (\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda 0 = 0$.

Q.E.D.

Лемма 2. *$S \subseteq \mathbb{R}^n \to S^\perp = \langle S \rangle^\perp$*

Доказательство. Так как $S \subseteq \langle S \rangle$, то $\langle S \rangle^\perp \subseteq S^\perp$.

Пусть $x \in S^\perp$. Покажем, что $x \in \langle S \rangle^\perp$.

Возьмем произвольный вектор $\vec{y} \in \langle S \rangle$. Тогда $y = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$. Здесь $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и $u_i \in S$.

Тогда $(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k) = \lambda_1(\vec{x},u_1) + \dots + \lambda_k(\vec{x},uk) = 0$. Следовательно, $\vec{x}$ ортогонален всем элементам из $\langle S \rangle$, то есть $S^\perp \subseteq \langle S \rangle^\perp$.

Итого, $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$. **Q.E.D.**

2.53 Размерность ортогонального дополнения подпространства в $\mathbb{R}^n$. Ортогональное дополнение к ортогональному дополнению подпространства в $\mathbb{R}^n$. Подпространства в $\mathbb{R}^n$ и множества решений однородных систем линейных уравнений.

Лемма. *Пусть V — подпространство в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\dim V^\perp = n - \dim V$.*

Доказательство. Пусть $v_1, \dots v_m$ — базис в V. Тогда $V^\perp = \{v_1, \dots, v_m\}^\perp$. Рассмотрим матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}$, где i-я строка — вектор v_i. Тогда $V^\perp$ — в точности решение СЛУ $A\vec{x} = \vec{0}$. Следовательно,так как $v_1, \dots, v_m$ — линейно независимы, то $\dim V^\perp = n - \mathrm{rk}\, A = n - m = n - \dim V$. **Q.E.D.**

Лемма. *Пусть V — подпространство в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\left(V^\perp\right)^\perp = V$*

Доказательство. Пусть $x \in V$, тогда $\langle \vec{x},\vec{y} \rangle = 0 \ \forall y \in V^\perp$, а значит $x \in \left(V^\perp\right)^\perp$ просто по определению. Но тогда $V \subseteq \left(V^\perp\right)^\perp$. Отсюда $\dim \left(V^\perp\right)^\perp = n - (n - \dim V) = \dim V$, что и означает равенство $\left(V^\perp\right)^\perp$ и V. **Q.E.D.**

Следствие. *Всякое подпространство в $\mathbb{R}^n$ является множеством решением некоторой СЛУ.*

Доказательство. Пусть V — подпространство в $\mathbb{R}^n$. По предыдущей лемме имеем, что $V = \left(V^\perp\right)^\perp$. Пусть $\{v_1, \dots, v_m\}$ — базис в $V^\perp$. Рассмотрим матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}$, где $A_{(i)} = v_i^T$. Тогда V есть множество решений СЛУ $A\vec{x} = \vec{0}$. **Q.E.D.**

2.54 Линейные многообразия в $\mathbb{R}^n$ как сдвиги подпространств. Размерность линейного многообразия.

Линейным многообразием в $\mathbb{R}^n$ называется множество всех решений какой-то СЛУ.

Теорема. *Множество $S \in \mathbb{R}^n$ — линейное многообразие тогда и только тогда, когда $S = \vec{v}_0 + V$, где $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^n$, а V — подпространство в $\mathbb{R}^n$. Иными словами, линейное многообразие есть сдвиг некоего подпространства, и наоборот.*

Доказательство. Докажем теорему в обе стороны:

[⇒] Пусть $S \in \mathbb{R}^n$ — непустое линейное многообразие, являющееся множеством решений СЛУ $A\vec{x} = \vec{b}$, и L — множество решений однородной СЛУ $A\vec{x} = \vec{0}$. Как было доказано ранее, L — подпространство в $\mathbb{R}^n$, из чего следует, что $S = \vec{x}_p + L$, где x_p — какое-то частное решение СЛУ $A\vec{x} = \vec{b}$.

[⇐] Пусть $S = \vec{v}_0 + V$ для некоторых $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ и подпространства $V \in \mathbb{R}^n$. Так как V — подпространство, то V есть множество решений некоторой однородной СЛУ $A\vec{x} = \vec{0}$, тогда v_0 — частное решение СЛУ $A\vec{x} = A\vec{v}_0$ (правая часть $\vec{b} = A\vec{v}_0$). Значит, S — множество решений СЛУ $A\vec{x} = A\vec{v}_0$, то есть S является линейным многообразием.

Q.E.D.

Размерность линейного многообразия $S = \vec{v}_0 + V$ *из* $\mathbb{R}^n$ — число $\dim S = \dim V$.

Предложение. *Пусть* S *— непустое линейное многообразие в* $\mathbb{R}^n$*, являющееся множеством решений СЛУ* $A\vec{x} = \vec{b}$*. Тогда* $\dim S = n - \operatorname{rk} A$*.*

Доказательство. Пусть L — множество решений однородной СЛУ $A\vec{x} = \vec{0}$. Из вышедоказанной теоремы следует, что размерность линейного многообразия есть размерность подпространства, его образующего: $\dim S = \dim L$. Тогда $S = \vec{x}_p + L \Rightarrow \dim S = \dim L = n - \operatorname{rk} A$. **Q.E.D.**