SI LV4 Facit Linjär Algebra

Niklas Gustafsson | Gustav Örtenberg
niklgus@student.chalmers.se | gusort@student.chalmers.se

2017-02-10

Repetition

a) -4

b) 4

c) -4

d) -5

1

a) $\vec{v} + \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$

b) $\vec{v} - \vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

c) $\alpha = \arccos \frac{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}{\vec{u} \cdot \vec{v}} = \arccos \frac{\sqrt{55}}{17} = 1.18°$

d) $\vec{v} \in \mathbf{R}^5$

2

$\begin{bmatrix} 4 & -8 & 8 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ Lösning saknas, lijnerna korsar ej varandra.

3

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 8 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 2 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 38 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oändligt antal lösningar. Sätt $z = t$ och erhåll $x = 19 - t/2,\ y = 10,\ z = t$

4

Ställ upp som ekvationsystem och Gausseliminera. Värdena skall bli:
Kaffe: 7kr
Te: 5kr
Körsbärspaj: 8kr
Choklad: 12kr
Kanelbulle: 7kr

5

Vi har att $\cos \pi/4 = 1/\sqrt{2}$ så endligt definitionen av skalärprodukt så har vi
$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{v}||\ ||\vec{w}||} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{3\ ||\vec{w}||} \iff \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{w}||}$
Man kan ansätta en godtycklig vektor $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ och sätta in i ekvationen. Det finns oändligt många lösningar och man kan t ex välja att sätta $w_3 = 0$ och får då ekvationen
$w_1^2 + w_2^2 - 16w_1w_2 = 0 \iff (w_1 - 8w_2)^2 = (\sqrt{63}w_2)^2 \iff w_1 = (8 \pm \sqrt{63})w_2$
så en möjlig lösning är

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 8 \pm \sqrt{63} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ett annat alternativ är att först bestämma en vecktor $\vec{x}$ som är ortogonal mot $\vec{v}$ och har samma längd. En vektor med sökta egenskapen är då $\vec{w} = \vec{v} + \vec{x}$ (eftersom $\vec{w}$ blir diagonalen i kvadraten som spänns upp av $\vec{v}$ och $\vec{x}$). Man kan t ex ta

$\vec{x} = \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ så att $\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 3/\sqrt{2} \\ 2 - 3/\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$

Ytterligare en möjlighet är att bestämma matrisen A för en linjär avbildning som roterar kring en axel som är ortogonal mot $\vec{v}$. Svaret blir då t ex $\vec{w} = A\vec{v}$.

6

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & 11 \\ 12 & -14 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & 25 \\ -2 & 2 & -2 & 11 \\ 0 & -2 & -9 & 67 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & 25 \\ -2 & 0 & -8 & 61 \\ 0 & 0 & -3 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & 25 \\ 1 & 0 & 4 & -\frac{61}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{17}{3} \end{bmatrix} \sim$$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{47}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{17}{3} \end{bmatrix}$ De tre linjerna möts i punkten $(x = -\frac{47}{6},\ y = -8,\ z = -\frac{17}{3})$

7

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 & -3 \\ -1 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 11 & -5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 & -3 \\ -1 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & -\frac{2}{11} & -\frac{10}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sätt $x_3 = s,\ x_4 = t$ och erhåll $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{11} \\ \frac{5}{11} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{10}{11} \\ \frac{3}{11} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Geometrisk tolkning är ett plan i $\mathbb{R}^4$ som skär i origo.