SI LV5 Facit Linjär Algebra

Niklas Gustafsson | Gustav Örtenberg
niklgus@student.chalmers.se | gusort@student.chalmers.se

2017-02-17

1

Bestäm normalekvationen: $A^T \cdot A\mathbf{x} + A^T \cdot \mathbf{b}$.

$$A^T \cdot A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93 \\ 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 55 & 15 & 93 \\ 15 & 5 & 26 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 10 & 0 & 15 \\ 15 & 5 & 26 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 5 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Vilket ger $k = \frac{3}{2},\ m = \frac{7}{10}$.

2

a)

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7*5-2*3} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

c)

$$AA^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} ad - bc & -ab + ab \\ cd - cd & -bc + ad \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad - bc & -ab + ab \\ cd - cd & -bc + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3

Använd Saurus regel.
En matris är inverterbar, omm dess determinant är nollskild.

a) $5 - 6 = -1$

b) $10 - 10 = 0$

c) $1 * 1 * -1 + 2 * 9 * 3 + 3 * 2 * 6 - (3 * 1 * 3 + 6 * 9 * 1 + (-1) * 2 * 2) = 30$

d) $3 * 7 * 24 + 6 * -2 * 4 + 9 * 2 * 11 - (4 * 7 * 9 + 11 * -2 * 3 + 24 * 2 * 6) = 180$

e) 108

f) 0

4

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 8 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 2 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 38 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oändligt antal lösningar. Sätt $z = t$ och erhåll $x = 19 - t/2,\ y = 10,\ z = t$

5

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 & -3 \\ -1 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 11 & -5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 & -3 \\ -1 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & -\frac{2}{11} & -\frac{10}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sätt $x_3 = s,\ x_4 = t$ och erhåll $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{11} \\ \frac{5}{11} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{10}{11} \\ \frac{3}{11} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Geometrisk tolkning är ett plan i $\mathbb{R}^4$ som skär i origo.

6

Radoperationen (rad 3) - 3*(rad 1) ger oss det ekvivalenta systemet nedan.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \text{b} - 2 & -1 \\ 0 & \text{a+b} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 - 2\text{b} & \text{a} + 8 \end{bmatrix}$$

Om b = 3 ser vi att lösningar saknas om inte a = -8, i vilket fall vi har oändligt många lösningar (en fri kolumn och därmed en linje som lösningsmängd). Om b!= 3, så har vi exakt en lösning om inte a+b = 0. För att undersöka detta fall sätter vi a = -b och får genom radoperationen rad 3 = (rad 2) + (6-2b) * (rad 1) systemet nedan.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \mathrm{b}-2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 20-5\mathrm{b} \end{bmatrix}$$