

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра Систем управления и информатики

Дисциплина: Динамика робототехнических систем (м.1.3.4-СУиИ)

**Домашняя работа 2:**  
**ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ**  
**МЕТОДА НЬЮТОНА-ЭЙЛЕРА**

**Вариант: 0.**

Студент: Дема Н.Ю.  
Группа: Р4135  
Преподаватель: Колюбин С. А.

## Задание

На основе метода Ньютона-Эйлера аналитически вывести уравнения движения двухзвенного маятника, описываемого кинематической схемой, показанной на рисунке 1, где  $l_1$  и  $l_2$  — длины первого и второго звеньев маятника,  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния от начала соответствующих звеньев до их центров масс.

Разработать программу в среде Matlab, реализующую ее динамическую модель для решения прямой задачи динамики (численная реализация уравнений Ньютона-Эйлера в рекуррентном виде) и удовлетворяющую некоторым требованиям.

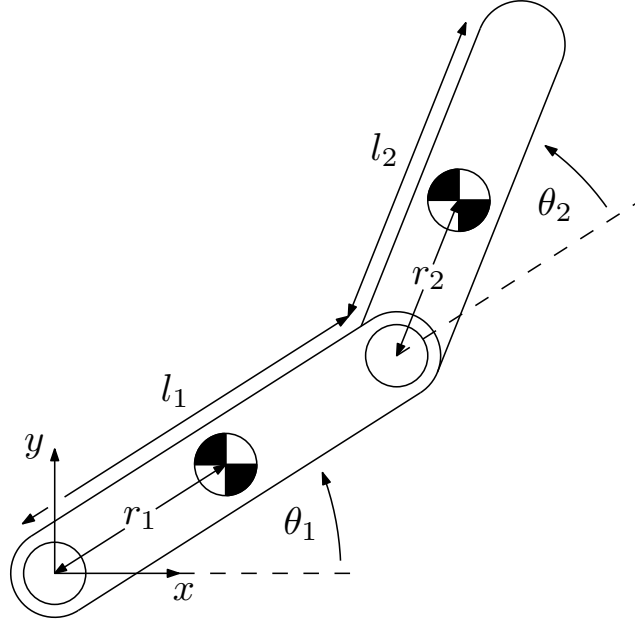


Рисунок 1: Кинематическая схема рассматриваемой системы.

При выполнении расчетов влияние актюаторов и трение в сочленениях не учитывается. Массы звеньев маятника обозначим соответственно как  $m_1$  и  $m_2$ .

## Вывод уравнений движения

### Определение параметров Денавита-Хартенберга и соответствующих матриц однородных преобразований

Зададим соответствующие системы координат (Рисунок 2) и определим для рассматриваемой системы соответствующие параметры Денавита-Хартенберга (Таблица 1).

Таблица 1: Параметры Денавита-Хартенберга

звено (i)	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$l_1$	0	0	$\theta_1$
2	$l_2$	0	0	$\theta_2$

Используя формулу (1) определим матрицы преобразования координат(2), описывающие переход от системы координат, связанной с (i - 1)-ым звеном, в систему координат, связанную с i-ым звеном и центром масс i-ого звена для всех звеньев системы:

$${}^{i-1}H_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

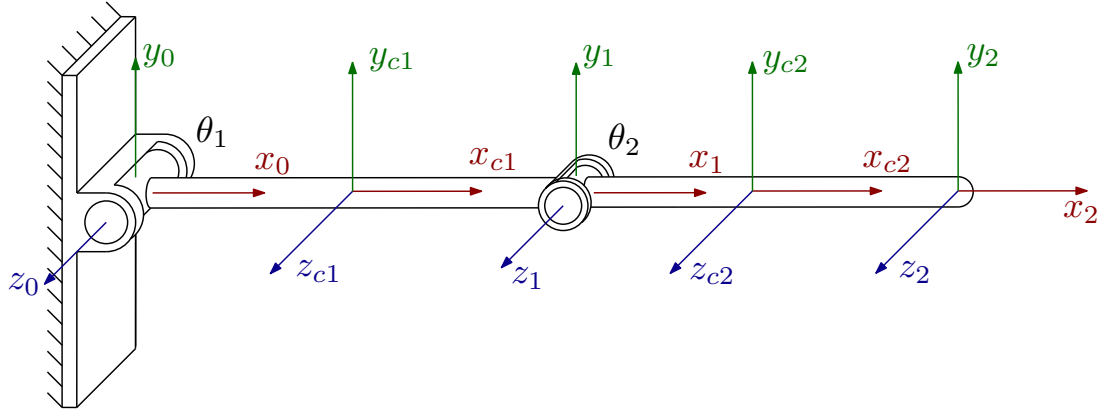


Рисунок 2: Системы координат, описывающие состояние маятника.

$$\begin{aligned}
 {}^0H_1 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & l_1 \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & l_1 \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1H_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & l_2 \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & l_2 \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 {}^0H_{c1} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & r_1 \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & r_1 \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1H_{c2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & r_2 \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & r_2 \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Матрицы поворота, входящие в состав первых двух полученных матриц однородных преобразований соответственно равны:

$${}^0R_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1R_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

## Определение тензора инерции

Для расчета тензоров инерции звеньев маятника примем, что каждое из них имеет форму сплошного цилиндра, обозначим соответствующие радиусы как  $r_{l1}$  и  $r_{l2}$ . Тогда тензор инерции  $I_i$  соответствующего звена в системе координат центра масс звена можно найти, как:

$$I_i = \begin{bmatrix} \frac{m_i r_{li}^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_i}{12} (3r_{li}^2 + l_i^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_i}{12} (3r_{li}^2 + l_i^2) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Для определения тензора инерции относительно относительно оси вращения звена воспользуемся теоремой Гюйгенса-Штейнера:

$$J_{i,jk} = I_{i,jk} + m_i (\mathbf{p}_i^2 \delta_{jk} - p_{i,j} p_{i,k}), \tag{5}$$

где  $J_{i,jk}$  — элемент  $(j, k)$  тензора инерции  $i$  относительно оси вращения звена  $i$ ,  $I_{i,jk}$  — элемент соответствующего исходного тензора инерции,  $\mathbf{p}_i = (p_{i,1}, p_{i,2}, p_{i,3})$  — вектор смещения центра масс, а  $\delta_{jk}$  — символ Кронекера.

Выполняя преобразование получаем аналитическое выражение для расчета соответствующих тензоров инерции:

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{m_i r_{li}^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_i}{12} (3r_{li}^2 + l_i^2) + m_i r_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_i}{12} (3r_{li}^2 + l_i^2) + m_i r_i^2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

## Начальные условия

Система координат  $Ox_0y_0z_0$  является инерциальной, также полагается отсутствие внешних воздействий, следовательно начальные условия для вывода уравнений выбираются как:

$$\begin{aligned}\omega_0^0 &= [0 \ 0 \ 0]^T & a_{c0}^0 &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ \dot{\omega}_0^0 &= [0 \ 0 \ 0]^T & f_{n+1}^{n+1} &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ a_0^0 &= [0 \ g \ 0]^T & \tau_{n+1}^{n+1} &= [0 \ 0 \ 0]^T\end{aligned}$$

где соответствующие величины в общем виде обозначаются, как:

$\omega_j^i$  — угловая скорость вращения  $Ox_jy_jz_j$  относительно  $Ox_0y_0z_0$ , выраженная относительно  $Ox_iy_iz_i$ ,

$\dot{\omega}_j^i$  — угловое ускорение  $Ox_jy_jz_j$  относительно  $Ox_0y_0z_0$ , выраженное относительно  $Ox_iy_iz_i$ ,

$a_j^i$  — линейное ускорение начала  $Ox_jy_jz_j$  относительно  $Ox_0y_0z_0$ , выраженное относительно  $Ox_iy_iz_i$ ,

$a_{cj}^i$  — линейное ускорение центра масс звена  $j$  относительно  $Ox_0y_0z_0$ , выраженное относительно  $Ox_iy_iz_i$ ,

$f_j^i$  — сила, действующая на  $j$ -ое звено со стороны  $(j-1)$ -го звена, выраженная относительно  $Ox_iy_iz_i$ ,

$\tau_j^i$  — момент силы, действующий на  $j$ -ое звено со стороны  $(j-1)$ -го звена, выраженная относительно  $Ox_iy_iz_i$ ,

$g$  — ускорение свободного падения.

## Вычисление скоростей и ускорений звеньев (прямая рекурсия)

Для вращательных сочленений необходимые скорости и ускорения рассчитываются по следующим формулам:

$$\omega_i^i = {}^{i-1}R_i^T (\omega_{i-1}^{i-1} + \dot{q}_i z_{i-1}^{i-1}), \quad (7)$$

$$\dot{\omega}_i^i = {}^{i-1}R_i^T (\dot{\omega}_{i-1}^{i-1} + \ddot{q}_i z_{i-1}^{i-1} + \dot{q}_i \omega_{i-1}^{i-1} \times z_{i-1}^{i-1}), \quad (8)$$

$$a_i^i = {}^{i-1}R_i^T a_{i-1}^{i-1} + \dot{\omega}_i^i \times r_{i-1,i}^i + \omega_i^i \times (\omega_i^i \times r_{i-1,i}^i), \quad (9)$$

$$a_{ci}^i = a_i^i + \dot{\omega}_i^i \times r_{i,ci}^i + \omega_i^i \times (\omega_i^i \times r_{i,ci}^i), \quad (10)$$

где соответствующие величины в общем виде обозначаются, как:

$z_j^i$  — базисный вектор  $z$  системы координат  $Ox_jy_jz_j$ , выраженный в системе координат  $Ox_iy_iz_i$ ,

$r_{j,k}^i$  — вектор из начала  $Ox_jy_jz_j$  в начало  $Ox_ky_kz_k$ , выраженный относительно  $Ox_iy_iz_i$ .

$q_i$  —  $i$ -ая обобщенная координата, соответствующая  $i$ -ому сочленению.

Далее, для упрощения записи положим, что все вектора, у которых нет верхнего индекса, выражены в собственной системе координат соответствующего звена. Используя формулы (7-10) найдем искомые значения:

- Звено 1:

$$\omega_1 = {}^0R_1^T [\omega_0 + \dot{q}_1 z_0] = [0 \ 0 \ \dot{q}_1]^T \quad (11)$$

$$\dot{\omega}_1 = {}^0R_1^T [\dot{\omega}_0 + \ddot{q}_1 z_0 + \dot{q}_1 \omega_0 \times z_0] = [0 \ 0 \ \ddot{q}_1]^T \quad (12)$$

$$a_1 = {}^0R_1^T a_0 + \dot{\omega}_1 \times r_{0,1}^1 + \omega_1 \times (\omega_1 \times r_{0,1}^1) = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1^2 l_1 + g \sin(q_1) \\ \ddot{q}_1 l_1 + g \cos(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$a_{c1} = a_1 + \dot{\omega}_1 \times r_{1,c1} + \omega_1 \times (\omega_1 \times r_{1,c1}) = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1^2 l_1 - \ddot{q}_1^2 (-l_1 + r_1) + g \sin(q_1) \\ \ddot{q}_1 l_1 + \ddot{q}_1 (-l_1 + r_1) + g \cos(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

• Звено 2:

$$\omega_2 = {}^1 R_2^T [\omega_1 + \dot{q}_2 z_1] = [0 \quad 0 \quad \dot{q}_1 + \dot{q}_2]^T \quad (15)$$

$$\dot{\omega}_2 = {}^1 R_2^T [\dot{\omega}_1 + \ddot{q}_2 z_1 + \dot{q}_2 \omega_1 \times z_1] = [0 \quad 0 \quad \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2]^T \quad (16)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= {}^1 R_2^T a_1 + \dot{\omega}_2 \times r_{1,2}^2 + \omega_2 \times (\omega_2 \times r_{1,2}^2) = \\ &= \begin{bmatrix} -l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + (\ddot{q}_1 l_1 + g \cos(q_1)) \sin(q_2) + (-\dot{q}_1^2 l_1 + g \sin(q_1)) \cos(q_2) \\ l_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + (\ddot{q}_1 l_1 + g \cos(q_1)) \cos(q_2) - (-\dot{q}_1^2 l_1 + g \sin(q_1)) \sin(q_2) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} a_{c2} &= a_2 + \dot{\omega}_2 \times r_{2,c2} + \omega_2 \times (\omega_2 \times r_{2,c2}) = \\ &= \begin{bmatrix} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 r_2 + (\ddot{q}_1 l_1 + g \cos(q_1)) \sin(q_2) + (-\dot{q}_1^2 l_1 + g \sin(q_1)) \cos(q_2) \\ (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) r_2 + (\ddot{q}_1 l_1 + g \cos(q_1)) \cos(q_2) - (-\dot{q}_1^2 l_1 + g \sin(q_1)) \sin(q_2) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

## Вычисление сил и моментов (обратная рекурсия)

Силы и моменты, с которыми звенья маятника действуют друг на друга, рассчитываются по следующим формулам:

$$f_i^i = f_{i+1}^i m_i a_{ci}^i, \quad (19)$$

$$\tau_i^i = \tau_{i+1}^i - f_i^i \times (r_{i-1,i}^i - r_{i,ci}^i) + f_{i+1}^i \times r_{i,ci}^i + J_i^i \dot{\omega}_i^i + \omega_i^i \times (J_i^i \omega_i^i). \quad (20)$$

Соответствующие обобщенные силы рассчитываются как:

$$u_i = \tau_i^T z_{i-1}^i. \quad (21)$$

Используя формулы (19-20) найдем искомые значения:

• Звено 2:

$$\begin{aligned} f_2 &= f_3 + m_2 a_{c2} = \\ &= \begin{bmatrix} -m_2 (-\ddot{q}_1 l_1 \sin(q_2) + \dot{q}_1^2 l_1 \cos(q_2) + \dot{q}_1^2 r_2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r_2 + \dot{q}_2^2 r_2 - g \sin(q_1 + q_2)) \\ m_2 (\ddot{q}_1 l_1 \cos(q_2) + \ddot{q}_1 r_2 + \ddot{q}_2 r_2 + \dot{q}_1^2 l_1 \sin(q_2) + g \cos(q_1 + q_2)) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \tau_3 - f_2 \times ({}^2 r_{12} + r_{2,c2}) + f_3 \times r_{2,c2} + J_2 \dot{\omega}_2 + \omega_2 \times (J_2 \omega_2) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_2}{12} (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) (l_2^2 + 3r_{12}^2) + m_2 (l_2 - r_2) (\cos(q_2) (\ddot{q}_1 l_1 + g \cos(q_1)) + \\ + \sin(q_2) (\dot{q}_1^2 l_1 - g \sin(q_1)) + l_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + r_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Звено 1:

$$f_1 = f_2 + m_1 a_{c1} =$$

$$= \begin{bmatrix} m_1 (-\dot{q}_1^2 r_1 + g \sin(q_1)) - m_2 (-\ddot{q}_1 l_1 \sin(q_2) + \\ + \dot{q}_1^2 l_1 \cos(q_2) + \dot{q}_1^2 r_2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r_2 + \dot{q}_2^2 r_2 - g \sin(q_1 + q_2)) \\ m_1 (\ddot{q}_1 r_1 + g \cos(q_1)) + m_2 (\ddot{q}_1 l_1 \cos(q_2) + \ddot{q}_1 r_2 + \\ + \ddot{q}_2 r_2 + \dot{q}_1^2 l_1 \sin(q_2) + g \cos(q_1 + q_2)) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_1 = \tau_2 - f_1 \times ({}^1r_{01} + r_{1,c1}) + f_2 \times r_{1c1} + J_1 \dot{\omega}_1 + \omega_1 \times (J_1 \omega_1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_2}{12} (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) (l_2^2 + 3r_{l2}^2) + m_1 (l_1 - r_1) (\ddot{q}_1 l_1 + \ddot{q}_1 r_1 + g \cos(q_1)) + \frac{m_1}{12} \ddot{q}_1 (l_1^2 + 3r_{l1}^2) + \\ + m_2 (l_2 - r_2) (\cos(q_2) (\ddot{q}_1 l_1 + g \cos(q_1)) + \sin(q_2) (\dot{q}_1^2 l_1 - g \sin(q_1)) + l_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + \\ + r_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)) - l_1 m_2 \sin(q_2) (l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + r_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - \sin(q_2) (\ddot{q}_1 l_1 + g \cos(q_1)) \\ + \cos(q_2) (\dot{q}_1^2 l_1 - g \sin(q_1))) + l_1 m_2 \cos(q_2) (\cos(q_2) (\ddot{q}_1 l_1 + g \cos(q_1)) \\ + \sin(q_2) (\dot{q}_1^2 l_1 - g \sin(q_1)) + l_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + r_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)) \end{bmatrix}$$

## Уравнение движения

Так как звенья рассматриваемого плоского маятника вращательные, произведем проекцию моментов на оси их вращения. Используя формулу (21) получим искомые уравнения движения:

$$u_1 = \tau_1^T z_0 = \frac{m_2}{12} (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) (l_2^2 + 3r_{l2}^2) + m_1 (l_1 + r_1) (\ddot{q}_1 l_1 + \ddot{q}_1 r_1 + g \cos(q_1)) + \\ + \frac{m_1}{12} \ddot{q}_1 (l_1^2 + 3r_{l1}^2) + m_2 (l_2 - r_2) (\cos(q_2) (\ddot{q}_1 l_1 + g \cos(q_1)) + \sin(q_2) (\dot{q}_1^2 l_1 - g \sin(q_1)) + \\ + l_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + r_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)) - l_1 m_2 \sin(q_2) (l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + r_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - \sin(q_2) (\ddot{q}_1 l_1 + \\ + g \cos(q_1)) + \cos(q_2) (\dot{q}_1^2 l_1 - g \sin(q_1))) + l_1 m_2 \cos(q_2) (\cos(q_2) (\ddot{q}_1 l_1 + g \cos(q_1)) + \\ + \sin(q_2) (\dot{q}_1^2 l_1 - g \sin(q_1)) + l_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + r_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2))$$

$$u_2 = \tau_2^T z_1 = \frac{m_2}{12} (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) (l_2^2 + 3r_{l2}^2) + m_2 (l_2 - r_2) (\cos(q_2) (\ddot{q}_1 l_1 + g \cos(q_1)) + \\ + \sin(q_2) (\dot{q}_1^2 l_1 - g \sin(q_1)) + l_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + r_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2))$$

Представим уравнение движения в форме Эйлера-Лагранжа:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (22)$$

где  $D(q)$  — матрица инерции,  $C(q, \dot{q})$  — матрица Кориолисовых и центробежных сил,  $G(q)$  — вектор гравитационных сил, а  $\tau$  — вектор обобщенных моментов. Вектор  $G(q)$  определяется как:

$$G(q) = \begin{bmatrix} m_2 g \cos(q_1 + q_2) r_2 + l_1 m_2 \cos(q_1) + g m_1 \cos(q_1) r_1 \\ m_2 g \cos(q_1 + q_2) r_2 \end{bmatrix}$$

Соответствующие элементы матрицы  $D(q)$  определяются как:

$$d_{11} = \frac{1}{12} (13l_1^2 m_1 + 12l_1^2 m_2 + 13l_2^2 m_2 + 12m_1 r_1^2 + 12m_2 r_2^2 + 3m_1 r_{l1}^2 + 3m_2 r_{l2}^2 - \\ - 24l_1 m_1 r_1 - 24l_2 m_2 r_2 + 24l_1 l_2 m_2 \cos(q_2) - 24l_1 m_2 r_2 \cos(q_2)) \\ d_{12} = d_{21} = \frac{m_2}{12} (13l_2^2 - 24l_2 r_2 + 12l_1 \cos(q_2) l_2 + 12r_2^2 - 12l_1 \cos(q_2) r_2 + 3r_{l2}^2)$$

$$d_{22} = \frac{m_2}{12}(13l_2^2 - 24l_2r_2 + 12r_2^2 + 3r_{l2}^2)$$

Матрица Кориолисовых и центробежных сил определяется как:

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -2\dot{q}_2 l_1 m_2 \sin(q_2) r_2 & -\dot{q}_2 l_1 m_2 \sin(q_2) r_2 \\ \dot{q}_1^2 l_1 m_2 \sin(q_2) r_2 & 0 \end{bmatrix}$$

## Расчет траектории

Спланируем для каждого сочленения траектории методом сплайн-функций, для расчета промежуточных значений используется полином пятого порядка. Обозначим следующие граничные условия:

$$q(t_0) = [q_{1_0} \ q_{2_0}]^T \quad q(t_{des}) = [q_{1_{des}} \ q_{2_{des}}]^T$$

$$\dot{q}(t_0) = [\dot{q}_{1_0} \ \dot{q}_{2_0}]^T \quad \dot{q}(t_{des}) = [\dot{q}_{1_{des}} \ \dot{q}_{2_{des}}]^T$$

$$\ddot{q}(t_0) = [\ddot{q}_{1_0} \ \ddot{q}_{2_0}]^T \quad \ddot{q}(t_{des}) = [\ddot{q}_{1_{des}} \ \ddot{q}_{2_{des}}]^T$$

Рассмотрим метод расчета коэффициентов интерполирующего полинома только для  $q_1$ , так как для обобщенной координаты  $q_2$  выполняются аналогичные действия. Обозначим полином, интерполирующий значения функции  $q_{1itr}(t)$  на временном отрезке  $t \in [0, t_{des}]$ , где  $t_{des}$  — время прохождения траектории, а так же его первые две производные, как:

$$q_{1itr}(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \quad (23)$$

$$\dot{q}_{1itr}(t) = 5a_5 t^4 + 4a_4 t^3 + 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1, \quad (24)$$

$$\ddot{q}_{1itr}(t) = 20a_5 t^3 + 12a_4 t^2 + 6a_3 t + 2a_2. \quad (25)$$

Подставляя граничные условия в уравнения (23 - 25) составим следующие шесть уравнений:

$$q_{1itr}(t_0) = a_5 t_0^5 + a_4 t_0^4 + a_3 t_0^3 + a_2 t_0^2 + a_1 t_0 + a_0,$$

$$\dot{q}_{1itr}(t_0) = 5a_5 t_0^4 + 4a_4 t_0^3 + 3a_3 t_0^2 + 2a_2 t_0 + a_1,$$

$$\ddot{q}_{1itr}(t_0) = 20a_5 t_0^3 + 12a_4 t_0^2 + 6a_3 t_0 + 2a_2,$$

$$q_{1itr}(t_{des}) = a_5 t_{des}^5 + a_4 t_{des}^4 + a_3 t_{des}^3 + a_2 t_{des}^2 + a_1 t_{des} + a_0,$$

$$\dot{q}_{1itr}(t_{des}) = 5a_5 t_{des}^4 + 4a_4 t_{des}^3 + 3a_3 t_{des}^2 + 2a_2 t_{des} + a_1,$$

$$\ddot{q}_{1itr}(t_{des}) = 20a_5 t_{des}^3 + 12a_4 t_{des}^2 + 6a_3 t_{des} + 2a_2.$$

Объединяя полученные уравнения в систему, представим их в матричном виде и выразим коэффициенты полинома:

$$\begin{bmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0^5 & t_0^4 & t_0^3 & t_0^2 & t_0 & 1 \\ 5t_0^4 & 4t_0^3 & 3t_0^2 & 2t_0 & 1 & 0 \\ 20t_0^3 & 12t_0^2 & 6t_0 & 2 & 0 & 0 \\ t_{des}^5 & t_{des}^4 & t_{des}^3 & t_{des}^2 & t_{des} & 1 \\ 5t_{des}^4 & 4t_{des}^3 & 3t_{des}^2 & 2t_{des} & 1 & 0 \\ 20t_{des}^3 & 12t_{des}^2 & 6t_{des} & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_{1itr}(t_0) \\ \dot{q}_{1itr}(t_0) \\ \ddot{q}_{1itr}(t_0) \\ q_{1itr}(t_{des}) \\ \dot{q}_{1itr}(t_{des}) \\ \ddot{q}_{1itr}(t_{des}) \end{bmatrix} \quad (26)$$

Таким образом, подставляя полученные коэффициенты в уравнения (23 - 25), могут быть искомые интерполирующие полиномы для каждого звена.

Применив описанный выше метод для следующих граничных значений ( $q(t_0) = [0 \ 0]^T$ ;  $q(t_{des}) = [\pi/4 \ \pi/2]^T$ ) получим траектории, соответствующие компоненты которых представлены на рисунке 3(b) и 3(c). Начальное и конечное положение маятника представлены на рисунке 3(a).

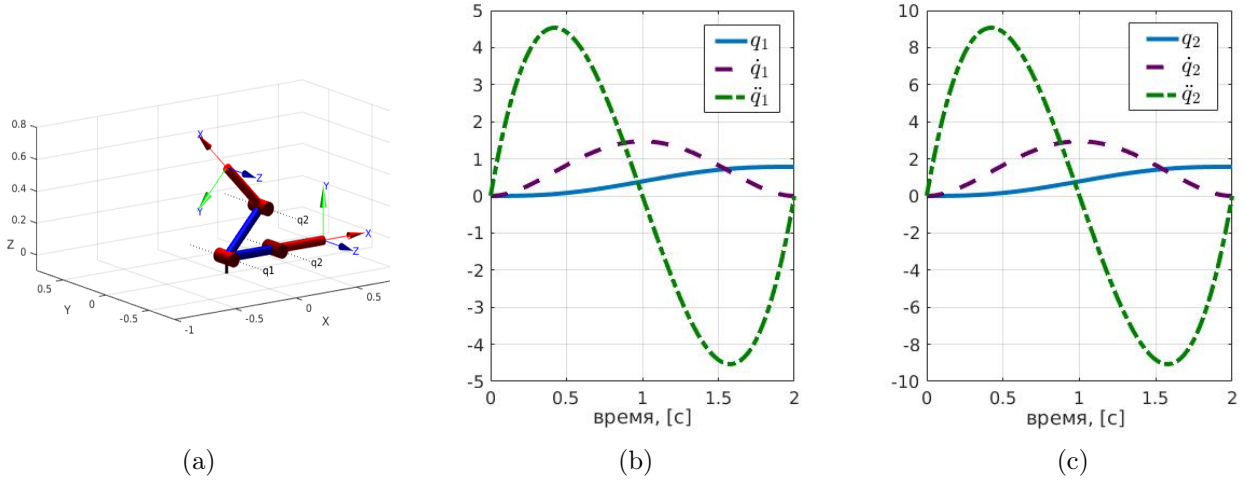


Рис. 3: Результаты построения траектории: (a) — графическое представление манипулятора в начальной и конечной конфигурации, (b) и (c) — графики изменения положения, скорости и ускорения со временем для каждого сочленения соответственно

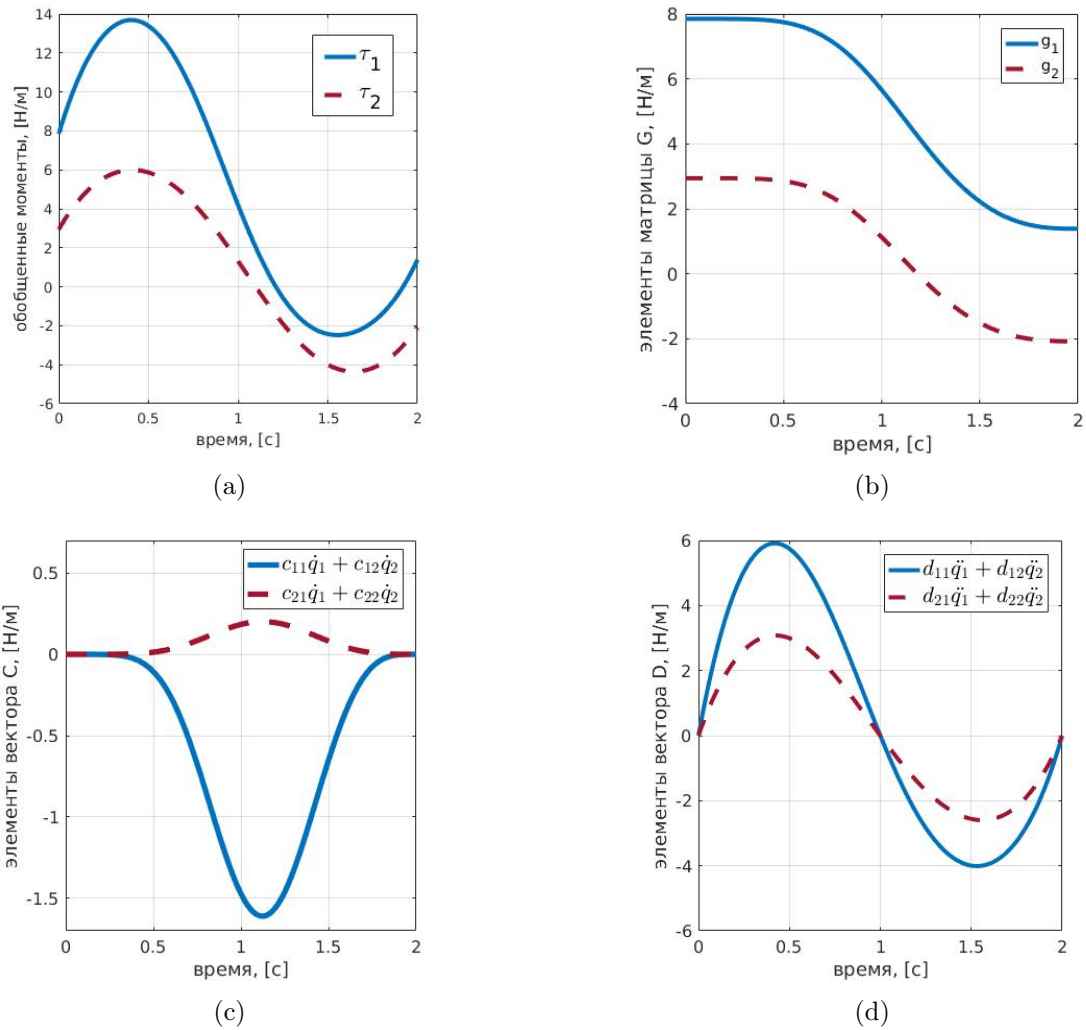


Рис. 4: Графики зависимости различных компонент уравнения движения от времени



## Заключение

В ходе выполнения данной работы было получено уравнение движения двухзвенного маятника методом Ньютона-Эйлера, методом полиномиальной интерполяции были найдены траектории соответствующих обобщенных координат, а так же проведено моделирование движения вдоль найденных траекторий используя полученное уравнение движения. Результаты выполнения моделирования представлены на рисунке 4. Код разработанной программы доступен по адресу [https://github.com/Ram2301/ITMO-hw/graduate/Robot\\_Dynamics](https://github.com/Ram2301/ITMO-hw/graduate/Robot_Dynamics).