Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики

Кафедра Систем управления и информатики

Дисциплина: Динамика робототехнических систем (м.1.3.4-СУиИ)

Домашняя работа 2:

ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА НЬЮТОНА-ЭЙЛЕРА

Вариант: 0.

Студент:	Дема Н.Ю.
Группа:	P4135
Преподаватель:	Колюбин С. А.

«Санкт-Петербург 2017»

Задание

На основе метода Ньютона-Эйлера аналитически вывести уравнения движения двухзвенного маятника, описываемого кинематической схемой, показанной на рисунке 1, где l_1 и l_2 — длинна первого и второго звеньев маятника, r_1 и r_2 — расстояния от начала соответствующих звеньев до их центров масс.

Разработать программу в среде Matlab, реализующую ее динамическую модель для решения прямой задачи динамики (численная реализация уравнений Ньютона-Эйлера в рекуррентном виде) и удовлетворяющую некоторым требованиям.

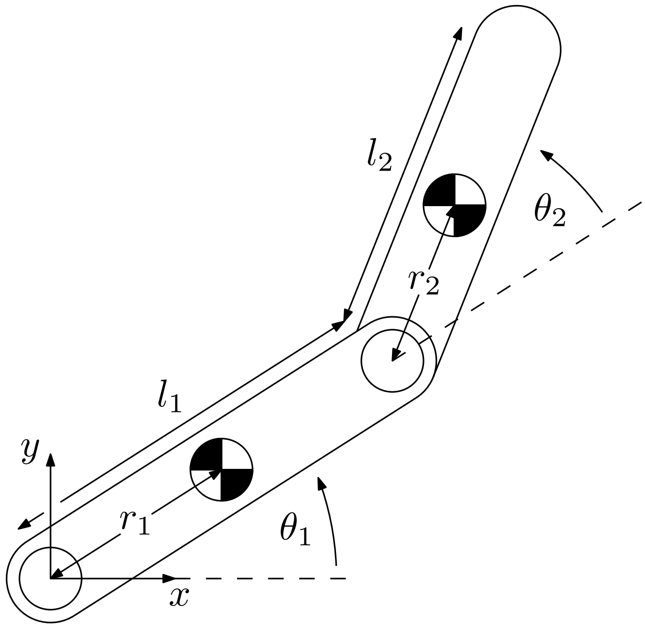


Рисунок 1: Кинематическая схема рассматриваемой системы.

При выполнении расчетов влияние актюаторов и трение в сочленениях не учитывается. Массы звеньев маятника обозначим соответственно как m_1 и m_2.

Вывод уравнений движения

Определение параметров Денавита-Хартенберга и соответствующих матриц однородных преобразований

Зададим соответствующие системы координат (Рисунок 2) и определим для рассматриваемой системы соответствующие параметры Денавита-Хартенберга (Таблица 1).

Таблица 1: Параметры Денавита-Хартенберга

звено (i)	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	θ_1
2	l_2	0	0	θ_2

Используя формулу (1) определим матрицы преобразования координат(2), описывающие переход от системы координат, связанной с (i − 1)-ым звеном, в систему координат, связанную с i-ым звеном и центром масс i-ого звена для всех звеньев системы:

$$^{i-1}H_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

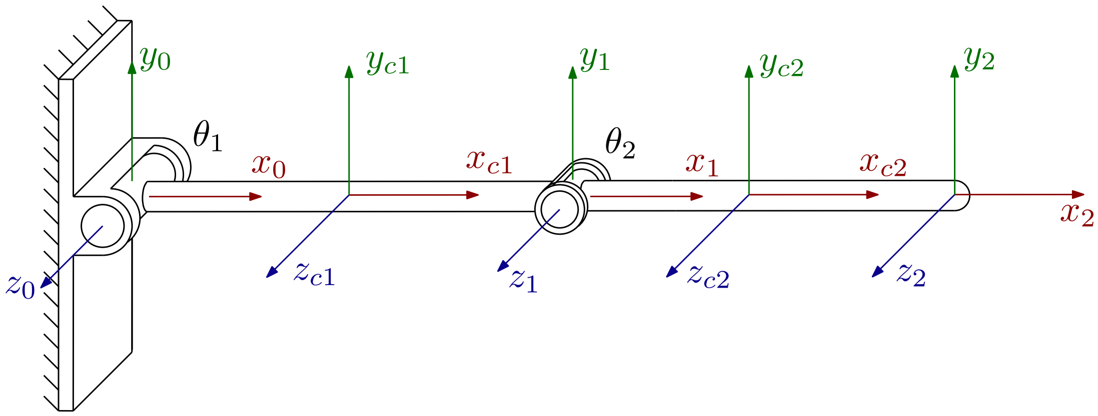


Рисунок 2: Системы координат, описывающие состояние маятника.

$$
{}^0H_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & l_1\cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & l_1\sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1H_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & l_2\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & l_2\sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$
$$
{}^0H_{c1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & r_1\cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & r_1\sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1H_{c2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & r_2\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & r_2\sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}
$$

Матрицы поворота, входящие в состав первых двух полученных матриц однородных преобразований соответственно равны:

$$
{}^0R_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1R_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}
$$

Определение тензора инерции

Для расчета тензоров инерции звеньев маятника примем, что каждое из них имеет форму сплошного цилиндра, обозначим соответствующие радиусы как r_{l1} и r_{l2}. Тогда тензор инерции I_i соответствующего звена в системе координат центра масс звена можно найти, как:

$$
I_i = \begin{bmatrix} \frac{m_i r_{li}^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_i}{12}\left(3r_{li}^2 + l_i^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_i}{12}\left(3r_{li}^2 + l_i^2\right) \end{bmatrix} \tag{4}
$$

Для определения тензора инерции относительно относительно оси вращения звена воспользуемся теоремой Гюйгенса-Штейнера:

$$
J_{i,jk} = I_{i,jk} + m_i\left(\mathbf{p}_i^2\delta_{jk} - p_{i,j}p_{i,k}\right), \tag{5}
$$

где $J_{i,jk}$ — элемент (j,k) тензора инерции i относительно оси вращения звена i, $I_{i,jk}$ — элемент соответствующего исходного тензора инерции, $\mathbf{p}_i = (p_{i,1}, p_{i,2}, p_{i,3})$ — вектор смещения центра масс, а δ_{jk} — символ Кронекера.

Выполняя преобразование получаем аналитическое выражение для расчета соответствующих тензоров инерции:

$$
J_i = \begin{bmatrix} \frac{m_i r_{li}^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_i}{12}\left(3r_{li}^2 + l_i^2\right) + m_i r_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_i}{12}\left(3r_{li}^2 + l_i^2\right) + m_i r_i^2 \end{bmatrix} \tag{6}
$$

Начальные условия

Система координат $Ox_0y_0z_0$ является инерциальной, также полагается отсутствие внешних воздействий, следовательно начальные условия для вывода уравнений выбираются как:

$$\omega_0^0 = [0\ 0\ 0]^T \qquad a_{c0}^0 = [0\ 0\ 0]^T$$
$$\dot{\omega}_0^0 = [0\ 0\ 0]^T \qquad f_{n+1}^{n+1} = [0\ 0\ 0]^T$$
$$a_0^0 = [0\ g\ 0]^T \qquad \tau_{n+1}^{n+1} = [0\ 0\ 0]^T$$

где соответствующие величины в общем виде обозначаются, как:

ω_j^i — угловая скорость вращения $Ox_jy_jz_j$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$,

$\dot{\omega}_j^i$ — угловое ускорение $Ox_jy_jz_j$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$,

a_j^i — линейное ускорение начала $Ox_jy_jz_j$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$,

a_{cj}^i — линейное ускорение центра масс звена j относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$,

f_j^i — сила, действующая на j-ое звено со стороны (j-1)-го звена, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$,

τ_j^i — момент силы, действующий на j-ое звено со стороны (j-1)-го звена, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$,

g — ускорение свободного падения.

Вычисление скоростей и ускорений звеньев (прямая рекурсия)

Для вращательных сочленений необходимые скорости и ускорения рассчитываются по следующим формулам:

$$\omega_i^i = {}^{i-1}R_i^T\left(\omega_{i-1}^{i-1} + \dot{q}_i z_{i-1}^{i-1}\right), \tag{7}$$
$$\dot{\omega}_i^i = {}^{i-1}R_i^T\left(\dot{\omega}_{i-1}^{i-1} + \ddot{q}_i z_{i-1}^{i-1} + \dot{q}_i\omega_{i-1}^{i-1} \times z_{i-1}^{i-1}\right), \tag{8}$$
$$a_i^i = {}^{i-1}R_i^T a_{i-1}^{i-1} + \dot{\omega}_i^i \times r_{i-1,i}^i + \omega_i^i \times \left(\omega_i^i \times r_{i-1,i}^i\right), \tag{9}$$
$$a_{ci}^i = a_i^i + \dot{\omega}_i^i \times r_{i,ci}^i + \omega_i^i \times \left(\omega_i^i \times r_{i,ci}^i\right), \tag{10}$$

где соответствующие величины в общем виде обозначаются, как:

z_j^i — базисный вектор z системы координат $Ox_jy_jz_j$, выраженный в системе координат $Ox_iy_iz_i$,

$r_{j,k}^i$ — вектор из начала $Ox_jy_jz_j$ в начало $Ox_ky_kz_k$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$.

q_i — i-ая обобщенная координата, соответствующая i-ому сочленению.

Далее, для упрощения записи положим, что все вектора, у которых нет верхнего индекса, выражены в собственной системе координат соответствующего звена. Используя формулы (7-10) найдем искомые значения:

- Звено 1:

$$\omega_1 = {}^0R_1^T[\omega_0 + \dot{q}_1 z_0] = \begin{bmatrix}0 & 0 & \dot{q}_1\end{bmatrix}^T \tag{11}$$

$$\dot{\omega}_1 = {}^0R_1^T[\dot{\omega}_0 + \ddot{q}_1 z_0 + \dot{q}_1\omega_0 \times z_0] = \begin{bmatrix}0 & 0 & \ddot{q}_1\end{bmatrix}^T \tag{12}$$

$$a_1 = {}^0R_1^T a_0 + \dot{\omega}_1 \times r_{0,1}^1 + \omega_1 \times (\omega_1 \times r_{0,1}^1) = \begin{bmatrix}-\dot{q}_1^2 l_1 + g\sin(q_1) \\ \ddot{q}_1 l_1 + g\cos(q_1) \\ 0\end{bmatrix} \tag{13}$$

$$a_{c1} = a_1 + \dot{\omega}_1 \times r_{1,c1} + \omega_1 \times (\omega_1 \times r_{1,c1}) = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1^2 l_1 - \dot{q}_1^2 \left(-l_1 + r_1\right) + g \sin\left(q_1\right) \\ \ddot{q}_1 l_1 + \ddot{q}_1 \left(-l_1 + r_1\right) + g \cos\left(q_1\right) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

- Звено 2:

$$\omega_2 =^1 R_2^T[\omega_1 + \dot{q}_2 z_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T \tag{15}$$

$$\dot{\omega}_2 =^1 R_2^T[\dot{\omega}_1 + \ddot{q}_2 z_1 + \dot{q}_2 \omega_1 \times z_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{bmatrix}^T \tag{16}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= {}^1R_2^T a_1 + \dot{\omega}_2 \times r_{1,2}^2 + \omega_2 \times (\omega_2 \times r_{1,2}^2) = \\ &= \begin{bmatrix} -l_2 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 + \left(\ddot{q}_1 l_1 + g \cos\left(q_1\right)\right) \sin\left(q_2\right) + \left(-\dot{q}_1^2 l_1 + g \sin\left(q_1\right)\right) \cos\left(q_2\right) \\ l_2 \left(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2\right) + \left(\ddot{q}_1 l_1 + g \cos\left(q_1\right)\right) \cos\left(q_2\right) - \left(-\dot{q}_1^2 l_1 + g \sin\left(q_1\right)\right) \sin\left(q_2\right) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} a_{c2} &= a_2 + \dot{\omega}_2 \times r_{2,c2} + \omega_2 \times (\omega_2 \times r_{2,c2}) = \\ &= \begin{bmatrix} \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 r_2 + \left(\ddot{q}_1 l_1 + g \cos\left(q_1\right)\right) \sin\left(q_2\right) + \left(-\dot{q}_1^2 l_1 + g \sin\left(q_1\right)\right) \cos\left(q_2\right) \\ \left(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2\right) r_2 + \left(\ddot{q}_1 l_1 + g \cos\left(q_1\right)\right) \cos\left(q_2\right) - \left(-\dot{q}_1^2 l_1 + g \sin\left(q_1\right)\right) \sin\left(q_2\right) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

Вычисление сил и моментов (обратная рекурсия)

Силы и моменты, с которыми звенья маятника действуют друг на друга, рассчитываются по следующим формулам:

$$f_i^i = f_{i+1}^i m_i a_{ci}^i, \tag{19}$$

$$\tau_i^i = \tau_{i+1}^i - f_i^i \times \left(r_{i-1,i}^i - r_{i,ci}^i\right) + f_{i+1}^i \times r_{i,ci}^i + J_i^i \dot{\omega}_i^i + \omega_i^i \times \left(J_i^i \omega_i^i\right). \tag{20}$$

Соответствующие обобщенные силы рассчитываются как:

$$u_i = \tau_i^T z_{i-1}^i. \tag{21}$$

Используя формулы (19-20) найдем искомые значения:

- Звено 2:

$$\begin{aligned} f_2 &= f_3 + m_2 a_{c2} = \\ &= \begin{bmatrix} -m_2 \left(-\ddot{q}_1 l_1 \sin\left(q_2\right) + \dot{q}_1^2 l_1 \cos\left(q_2\right) + \dot{q}_1^2 r_2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 r_2 + \dot{q}_2^2 r_2 - g \sin\left(q_1 + q_2\right)\right) \\ m_2 \left(\ddot{q}_1 l_1 \cos\left(q_2\right) + \ddot{q}_1 r_2 + \ddot{q}_2 r_2 + \dot{q}_1^2 l_1 \sin\left(q_2\right) + g \cos\left(q_1 + q_2\right)\right) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \tau_3 - f_2 \times ({}^2r_{12} + r_{2,c2}) + f_3 \times r_{2c2} + J_2 \dot{\omega}_2 + \omega_2 \times (J_2 \omega_2) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_2}{12}(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)(l_2{}^2 + 3r_{l2}{}^2) + m_2(l_2 - r_2)(\cos(q_2)(\ddot{q}_1 l_1 + g\cos(q_1)) + \\ + \sin(q_2)(\dot{q}_1{}^2 l_1 - g\sin(q_1)) + l_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + r_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Звено 1:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= f_2 + m_1 a_{c1} = \\
&= \begin{bmatrix} m_1\left(-\dot{q}_1^2 r_1 + g\sin(q_1)\right) - m_2\left(-\ddot{q}_1 l_1 \sin(q_2) + \right. \\ \left. + \dot{q}_1^2 l_1 \cos(q_2) + \dot{q}_1^2 r_2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 r_2 + \dot{q}_2^2 r_2 - g\sin(q_1+q_2)\right) \\ m_1\left(\ddot{q}_1 r_1 + g\cos(q_1)\right) + m_2\left(\ddot{q}_1 l_1 \cos(q_2) + \ddot{q}_1 r_2 + \right. \\ \left. + \ddot{q}_2 r_2 + \dot{q}_1^2 l_1 \sin(q_2) + g\cos(q_1+q_2)\right) \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \tau_2 - f_1 \times ({}^1r_{01} + r_{1,c1}) + f_2 \times r_{1c1} + J_1\dot{\omega}_1 + \omega_1 \times (J_1\omega_1) = \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_2}{12}(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)({l_2}^2+3{r_{l2}}^2) + m_1(l_1-r_1)(\ddot{q}_1 l_1 + \ddot{q}_1 r_1 + g\cos(q_1)) + \frac{m_1}{12}\ddot{q}_1({l_1}^2+3{r_{l1}}^2) + \\ +m_2(l_2-r_2)(\cos(q_2)(\ddot{q}_1 l_1 + g\cos(q_1)) + \sin(q_2)({\dot{q}_1}^2 l_1 - g\sin(q_1)) + l_2(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2) + \\ +r_2(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)) - l_1 m_2 \sin(q_2)(l_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2 + r_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2 - \sin(q_2)(\ddot{q}_1 l_1 + g\cos(q_1)) \\ +\cos(q_2)({\dot{q}_1}^2 l_1 - g\sin(q_1))) + l_1 m_2 \cos(q_2)(\cos(q_2)(\ddot{q}_1 l_1 + g\cos(q_1)) \\ +\sin(q_2)({\dot{q}_1}^2 l_1 - g\sin(q_1)) + l_2(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2) + r_2(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Уравнение движения

Так как звенья рассматриваемого плоского маятника вращательные, произведем проекцию моментов на оси их вращения. Используя формулу (21) получим искомые уравнения движения:

$$
\begin{aligned}
u_1 = \tau_1^T z_0 = {} & \frac{m_2}{12}(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)({l_2}^2+3{r_{l_2}}^2) + m_1(l_1+r_1)(\ddot{q}_1 l_1 + \ddot{q}_1 r_1 + g\cos(q_1)) + \\
& + \frac{m_1}{12}\ddot{q}_1({l_1}^2+3{r_{l_1}}^2) + m_2(l_2-r_2)(\cos(q_2)(\ddot{q}_1 l_1 + g\cos(q_1)) + \sin(q_2)({\dot{q}_1}^2 l_1 - g\sin(q_1)) + \\
& + l_2(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2) + r_2(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)) - l_1 m_2 \sin(q_2)(l_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2 + r_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2 - \sin(q_2)(\ddot{q}_1 l_1 + \\
& + g\cos(q_1)) + \cos(q_2)({\dot{q}_1}^2 l_1 - g\sin(q_1))) + l_1 m_2 \cos(q_2)(\cos(q_2)(\ddot{q}_1 l_1 + g\cos(q_1)) + \\
& + \sin(q_2)({\dot{q}_1}^2 l_1 - g\sin(q_1)) + l_2(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2) + r_2(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2 = \tau_2^T z_1 = {} & \frac{m_2}{12}(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)({l_2}^2+3{r_{l_2}}^2) + m_2(l_2-r_2)(\cos(q_2)(\ddot{q}_1 l_1 + g\cos(q_1)) + \\
& + \sin(q_2)({\dot{q}_1}^2 l_1 - g\sin(q_1)) + l_2(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2) + r_2(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2))
\end{aligned}
$$

Представим уравнение движения в форме Эйлера-Лагранжа:

$$
D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \tag{22}
$$

где $D(q)$ — матрица инерции, $C(q,\dot{q})$ — матрица Кориолисовых и центробежных сил, $G(q)$ — вектор гравитационных сил, а τ — вектор обобщенных моментов. Вектор $G(q)$ определяется как:

$$
G(q) = \begin{bmatrix} m_2 g\cos(q_1+q_2)r_2 + l_1 m_2 cos(q_1) + g m_1 \cos(q_1) r_1 \\ m_2 g \cos(q_1+q_2) r_2 \end{bmatrix}
$$

Соответствующие элементы матрицы $D(q)$ определяются как:

$$
\begin{aligned}
d_{11} &= \frac{1}{12}(13{l_1}^2 m_1 + 12{l_1}^2 m_2 + 13{l_2}^2 m_2 + 12 m_1 {r_1}^2 + 12 m_2 {r_2}^2 + 3 m_1 {r_{l1}}^2 + 3 m_2 {r_{l2}}^2 - \\
&\quad - 24 l_1 m_1 r_1 - 24 l_2 m_2 r_2 + 24 l_1 l_2 m_2 \cos(q2) - 24 l_1 m_2 r_2 \cos(q2)) \\
d_{12} = d_{21} &= \frac{m_2}{12}(13{l_2}^2 - 24 l_2 r_2 + 12 l_1 \cos(q2) l_2 + 12{r_2}^2 - 12 l_1 \cos(q2) r_2 + 3{r_{l2}}^2)
\end{aligned}
$$

$$d_{22} = \frac{m_2}{12}(13{l_2}^2 - 24 l_2 r_2 + 12{r_2}^2 + 3{r_{l2}}^2)$$

Матрица Кориолисовых и центробежных сил определяется как:

$$C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} -2\dot{q}_2 l_1 m_2 \sin(q_2) r_2 & -\dot{q}_2 l_1 m_2 \sin(q_2) r_2 \\ \dot{q}_1^2 l_1 m_2 \sin(q_2) r_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Расчет траектории

Спланируем для каждого сочленения траектории методом сплайн-функций, для расчета промежуточных значений используется полином пятого порядка. Обозначим следующие граничные условия:

$$q(t_0) = [q_{1_0}\ q_{2_0}]^T \qquad q(t_{des}) = [q_{1_{des}}\ q_{2_{des}}]^T$$

$$\dot{q}(t_0) = [\dot{q}_{1_0}\ \dot{q}_{2_0}]^T \qquad \dot{q}(t_{des}) = [\dot{q}_{1_{des}}\ \dot{q}_{2_{des}}]^T$$

$$\ddot{q}(t_0) = [\ddot{q}_{1_0}\ \ddot{q}_{2_0}]^T \qquad \ddot{q}(t_{des}) = [\ddot{q}_{1_{des}}\ \ddot{q}_{2_{des}}]^T$$

Рассмотрим метод расчета коэффициентов интерполирующего полинома только для q_1, так как для обобщенной координаты q_2 выполняются аналогичные действия. Обозначим полином, интерполирующий значения функции $q_{1itr}(t)$ на временном отрезке $t \in [0, t_{des}]$, где t_{des} — время прохождения траектории, а так же его первые две производные, как:

$$q_{1itr}(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \tag{23}$$

$$\dot{q}_{1itr}(t) = 5a_5 t^4 + 4a_4 t^3 + 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1, \tag{24}$$

$$\ddot{q}_{1itr}(t) = 20a_5 t^3 + 12a_4 t^2 + 6a_3 t + 2a_2. \tag{25}$$

Подставляя граничные условия в уравнения (23 - 25) составим следующие шесть уравнений:

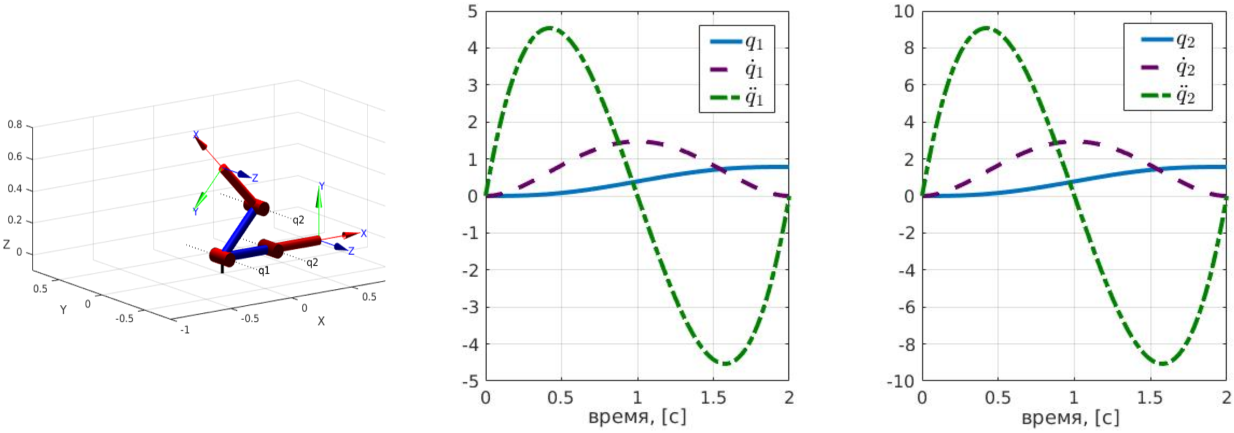
$$\begin{aligned}
q_{1itr}(t_0) &= a_5 t_0^5 + a_4 t_0^4 + a_3 t_0^3 + a_2 t_0^2 + a_1 t_0 + a_0, \\
\dot{q}_{1itr}(t_0) &= 5a_5 t_0^4 + 4a_4 t_0^3 + 3a_3 t_0^2 + 2a_2 t_0 + a_1, \\
\ddot{q}_{1itr}(t_0) &= 20a_5 t_0^3 + 12a_4 t_0^2 + 6a_3 t_0 + 2a_2, \\
q_{1itr}(t_{des}) &= a_5 t_{des}^5 + a_4 t_{des}^4 + a_3 t_{des}^3 + a_2 t_{des}^2 + a_1 t_{des} + a_0, \\
\dot{q}_{1itr}(t_{des}) &= 5a_5 t_{des}^4 + 4a_4 t_{des}^3 + 3a_3 t_{des}^2 + 2a_2 t_{des} + a_1, \\
\ddot{q}_{1itr}(t_{des}) &= 20a_5 t_{des}^3 + 12a_4 t_{des}^2 + 6a_3 t_{des} + 2a_2.
\end{aligned}$$

Объединяя полученные уравнения в систему, представим их в матричном виде и выразим коэффициенты полинома:

$$\begin{bmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0^5 & t_0^4 & t_0^3 & t_0^2 & t_0 & 1 \\ 5t_0^4 & 4t_0^3 & 3t_0^2 & 2t_0 & 1 & 0 \\ 20t_0^3 & 12t_0^2 & 6t_0 & 2 & 0 & 0 \\ t_{des}^5 & t_{des}^4 & t_{des}^3 & t_{des}^2 & t_{des} & 1 \\ 5t_{des}^4 & 4t_{des}^3 & 3t_{des}^2 & 2t_{des} & 1 & 0 \\ 20t_{des}^3 & 12t_{des}^2 & 6t_{des} & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_{1itr}(t_0) \\ \dot{q}_{1itr}(t_0) \\ \ddot{q}_{1itr}(t_0) \\ q_{1itr}(t_{des}) \\ \dot{q}_{1itr}(t_{des}) \\ \ddot{q}_{1itr}(t_{des}) \end{bmatrix} \tag{26}$$

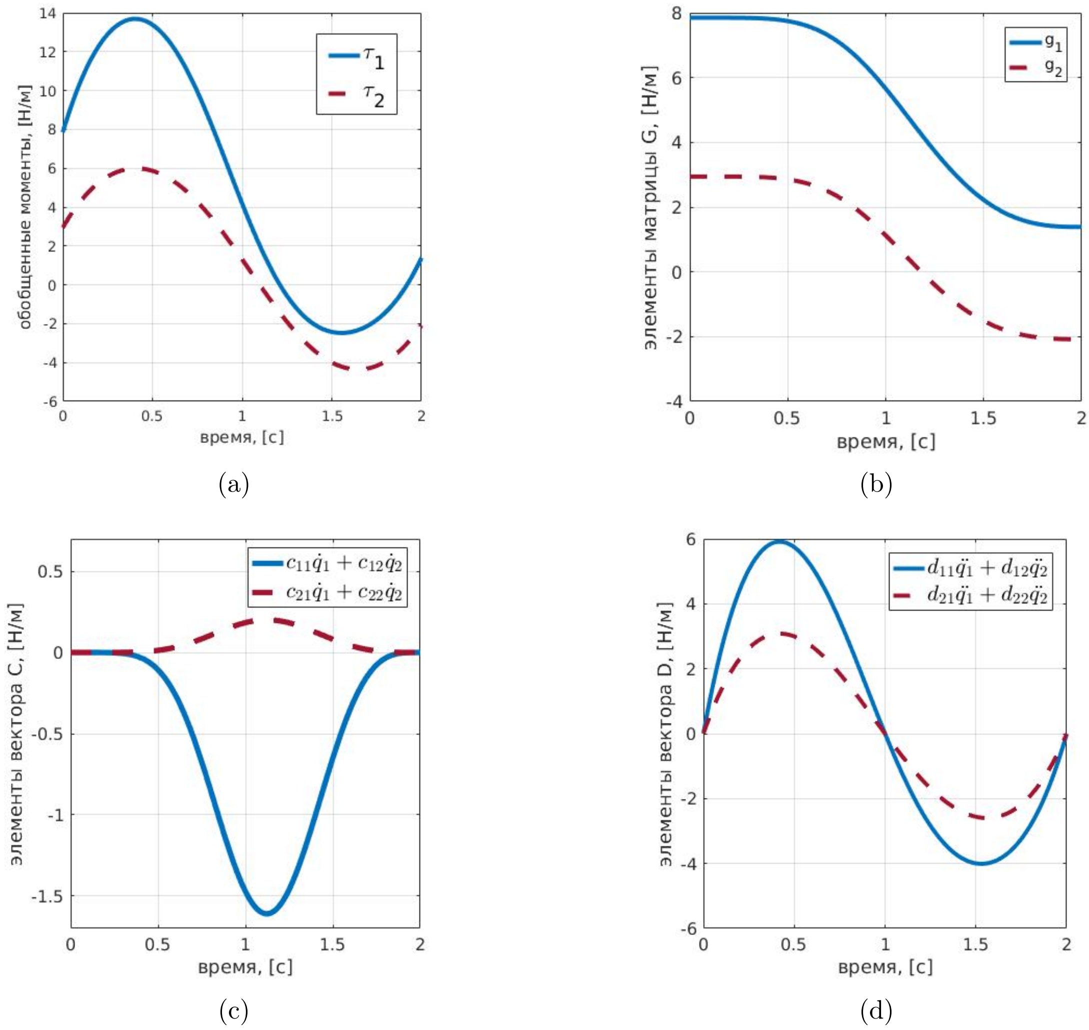
Таким образом, подставляя полученные коэффициенты в уравнения (23 - 25), могут быть искомые интерполирующие полиномы для каждого звена.

Применив описанный выше метод для следующих граничных значений $\left(q(t_0) = [0\ 0]^T;\ q(t_{des}) = = [\pi/4\ \pi/2]^T\right)$ получим траектории, соответствующие компоненты которых представлены на рисунке 3(b) и 3(c). Начальное и конечное положение маятника представлены на рисунке 3(а).



(a) (b) (c)

Рис. 3: Результаты построения траектории: (а) — графическое представление манипулятора в начальной и конечной конфигурации, (b) и (c) — графики изменения положения, скорости и ускорения со временем для каждого сочленения соответственно



(c) (d)

Рис. 4: Графики зависимости различных компонент уравнения движения от времени

Заключение

В ходе выполнения данной работы было получено уравнение движения двухзвенного маятника методом Ньютона-Эйлера, методом полиномиальной интерполяции были найдены траектории соответствующих обобщенных координат, а так же проведено моделирование движения вдоль найденных траекторий используя полученное уравнение движения. Результаты выполнения моделирования представлены на рисунке 4. Код разработанной программы доступен по адресу `https://github.com/Ram2301/ITMO-hw/tree/master/graduate/Robot_Dynamics`.