Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики

Кафедра Систем управления и информатики

Дисциплина: Динамика робототехнических систем (м.1.3.4-СУиИ)

Домашняя работа 1:

ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА.

Вариант: 0.

Студент:	Дема Н.Ю.
Группа:	P4135
Преподаватель:	Колюбин С. А.

«Санкт-Петербург 2017»

Задание

С помощью метода Эйлера-Лагранжа аналитически вывести уравнения движения двухзвенного маятника на подвижной тележке, описываемого кинематической схемой, показанной на рисунке 1, где L_2 и L_3 — длинна первого и второго звеньев маятника, l_2 и l_3 — расстояния от начала соответствующих звеньев до их центров масс.

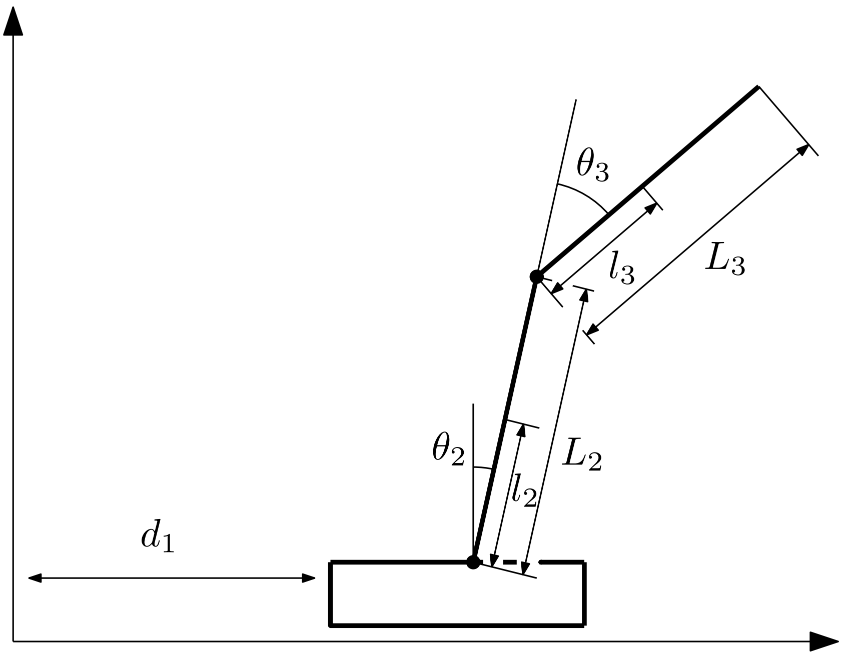

Рисунок 1: Кинематическая схема рассматриваемой системы.

Для выполнения расчетов связь между тележкой и поверхностью, по которой она перемещается, а так же связи в сочленениях маятника считаются идеальными. Массу тележки обозначим как m_1, массы звеньев маятника соответственно m_2 и m_3.

Определение параметров Денавита-Хартенберга

Зададим соответствующие системы координат (Рисунок 2) и определим для рассматриваемой системы соответствующие параметры Денавита-Хартенберга (Таблица 1).

Таблица 1: Параметры Денавита-Хартенберга

звено (i)	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\pi/2$	d_1	0
2	L_2	0	0	θ_2
3	L_3	$\pi/2$	0	$\theta_3 + \pi/2$

Так же, используя формулу (1) определим матрицы преобразования координат, описывающие переход от системы координат, связанной с (i − 1)-ым звеном, в систему координат, связанную с i-ым звеном для всех звеньев системы:

$$
{}^{i-1}H_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}
$$

$$
{}^0H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1H_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & L_2\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & L_2\sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
{}^2H_3 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta_3\right) & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta_3\right) & L_3\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta_3\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta_3\right) & 0 & -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta_3\right) & L_3\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta_3\right) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}
$$

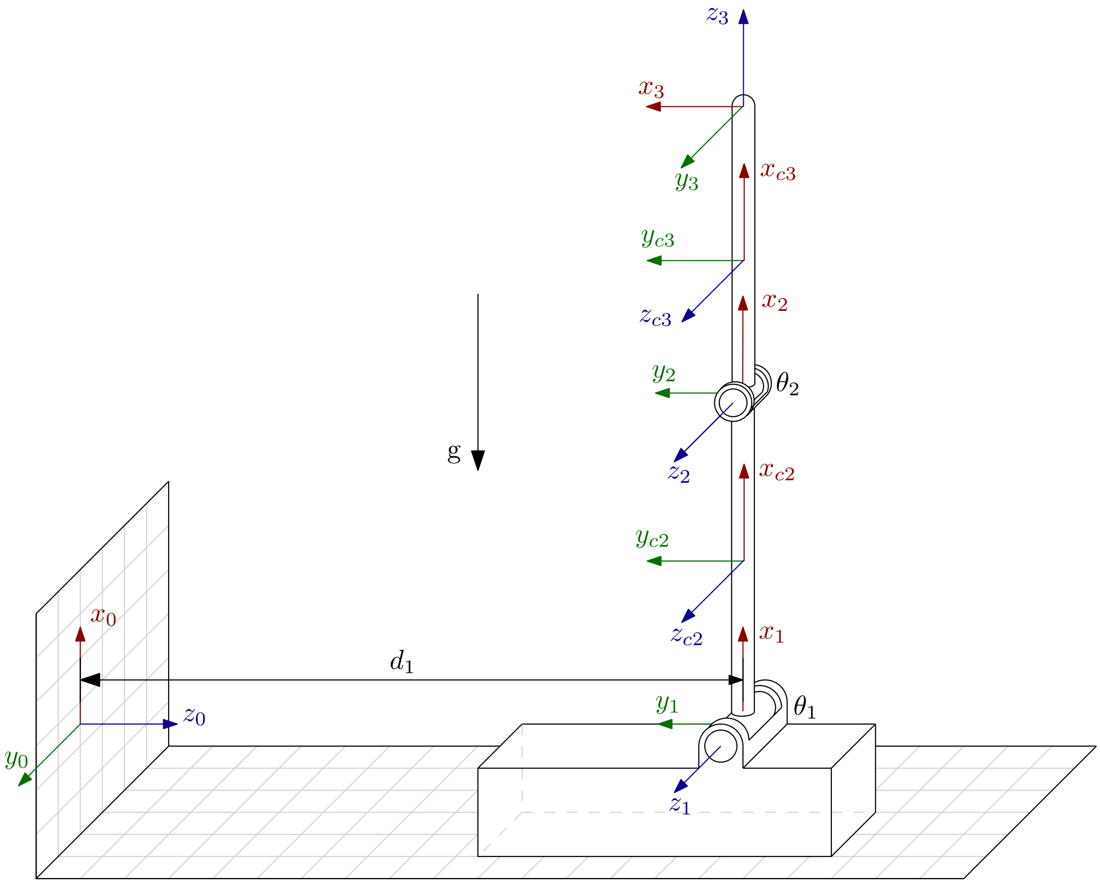

Рисунок 2: Системы координат, описывающие состояние системы.

Определение потенциальной энергии системы

Для определения полной потенциальной энергии системы найдем координаты центров масс звеньев в системе координат $Ox_0y_0z_0$. Для этого, определим матрицы преобразования координат, описывающие переход от системы координат, связанной с (i − 1)-ым звеном, в систему координат центра масс звена i-го звена:

$$
{}^1H_{c2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & l_2\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & l_2\sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^2H_{c3} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & l_3\cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & l_3\sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}
$$

Матрицы поворота, входящие в состав полученных матриц однородных преобразований соответственно равны:

$$
{}^0R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ {}^1R_{c2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ {}^2R_{c3} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}
$$

Далее определим координаты центров масс звеньев в системе координат $Ox_0y_0z_0$ как:

$$
\begin{bmatrix} r_{0,c1} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0H_1 \begin{bmatrix} r_{1,c1} \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{5}
$$

$$
\begin{bmatrix} r_{0,c2} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0H_1{}^1H_{c2} \begin{bmatrix} r_{2,c2} \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{6}
$$

$$
\begin{bmatrix} r_{0,c3} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0H_1{}^1H_2{}^2H_{c3} \begin{bmatrix} r_{3,c3} \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{7}
$$

где $r_{i,cj} = [x_{i,cj} y_{i,cj} z_{i,cj}]^T$ — вектор, описывающий положение центра масс звена j относительно системы координат $Ox_iy_iz_i$. Координаты центра масс соответствующих звеньев в матричном виде определяются как: Аналитические выражения для определения искомых центров масс получены как:

$$
r_{0,c1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix},\quad r_{0,c2} = \begin{bmatrix} l_2\cos(\theta_2) \\ 0 \\ d_1 - l_2\sin(\theta_2) \end{bmatrix},\quad r_{0,c3} = \begin{bmatrix} L_2\cos(\theta_2) + l_3\cos(\theta_2+\theta_3) \\ 0 \\ d_1 - L_2\sin(\theta_2) - l_3\sin(\theta_2+\theta_3) \end{bmatrix} \tag{8}
$$

Потенциальная энергия исследуемой системы вычисляется как:

$$
U = -g_0(m_1r_{0,c1} + m_2r_{0,c2} + m_3r_{0,c3}), \tag{9}
$$

где $g_0 = [-g\ 0\ 0]$ — вектор, описывающий направление действия силы тяжести относительно системы координат $Ox_0y_0z_0$, m_i — масса i-го звена. С учетом (8) из этой формулы следует, что

$$
U = g\left[L_2m_3\cos(\theta_2) + l_2m_2\cos(\theta_2) + l_3m_3\cos(\theta_2+\theta_3)\right] \tag{10}
$$

Определение кинетической энергии системы

Для определения полной кинетической энергии системы определим Якобианы J_{c1}, J_{c2} и J_{c3} устанавливающие, согласно следующей формуле:

$$
\begin{bmatrix} \upsilon_{0,ci} \\ \omega^0_{0,ci} \end{bmatrix} = J_{ci}\dot{q} = \begin{bmatrix} J_{\upsilon,ci} \\ J_{\omega,ci} \end{bmatrix}\dot{q},\ i = \overline{1,3} \tag{10}
$$

связь между скоростями центров масс звеньев относительно системы координат $Ox_0y_0z_0$ и вектором обобщенных скоростей $q = [\dot{d}_1\ \dot{\theta}_2\ \dot{\theta}_3]^T$ как:

$$
\begin{gathered}
J_{\upsilon,c1} = \begin{bmatrix} z^0_0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\qquad J_{\upsilon,c2} = \begin{bmatrix} z^0_0 & z^0_1 \times (r_{0,c2} - r_{0,c1}) & 0 \end{bmatrix}, \\
J_{\upsilon,c3} = \begin{bmatrix} z^0_0 & z^0_1 \times (r_{0,c3} - r_{0,c1}) & z^0_2 \times (r_{0,c3} - r_{0,2}) \end{bmatrix},
\end{gathered} \tag{11}
$$

$$
J_{\omega,c1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\qquad J_{\omega,c2} = \begin{bmatrix} 0 & z^0_1 & 0 \end{bmatrix},\ J_{\omega,c3} = \begin{bmatrix} 0 & z^0_1 & z^0_2 \end{bmatrix}, \tag{12}
$$

где z^0_k — вектор направления оси z в системе координат $Ox_ky_kz_k$ выраженный относительно системы координат $Ox_0y_0z_0$. Тогда соответствующие Якобианы определяются, как:

$$
J_{\upsilon,c1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ J_{\upsilon,c2} = \begin{bmatrix} 0 & -l_2\sin(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & l_2\cos(\theta_2) & 0 \end{bmatrix},\ J_{\upsilon,c3} = \begin{bmatrix} 0 & L_2\sin(\theta_2) - l_3\sin(\theta_2+\theta_3) & -l_3\sin(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & L_2\cos(\theta_2) + l_3\cos(\theta_2+\theta_3) & l_3\cos(\theta_2+\theta_3) \end{bmatrix},
$$

$$J_{\omega,c1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; J_{\omega,c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; J_{\omega,c3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Для расчета тензоров инерции звеньев маятника примем, что каждое из них имеет форму сплошного цилиндра и радиусы r_2 и r_3 соответственно. Тогда тензор инерции I_i соответствующего звена можно найти, как:

$$I_i = \begin{bmatrix} \frac{m_i r_i^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_i r_i^2}{2} + \frac{m_i L_i^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_i r_i^2}{2} + \frac{m_i L_i^2}{12} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Используя полученные выражения найдем полную кинетическую энергию системы

$$\begin{gathered} K = \frac{1}{2}\dot{q}^T \left[\sum_{i=1}^{3} m_i J_{\upsilon,ci}^T J_{\upsilon,ci} + J_{\omega,ci}^T {}^0R_i I_i {}^0R_i^T J_{\omega,ci} \right] \dot{q} = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} = \\ (1/24)L_2^2\dot{\theta_2}^2 m_2 + (1/2)L_2^2\dot{\theta_2}^2 m_3 \sin^2(\theta_2) + (1/2)L_2^2\dot{\theta_2}^2 m_3 \cos^2(\theta_2) + \\ + L_2\dot{d}\dot{\theta}_2 m_3 \cos(\theta_2) + L_2\dot{\theta_2}^2 l_3 m_3 \sin(\theta_2)\sin(\theta_2+\theta_3) + L_2\dot{\theta_2}^2 l_3 m_3 \sin(\theta_2+\theta_3)\cos(\theta_2) + \\ + L_2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 l_3 m_3 \sin(\theta_2)\sin(\theta_2+\theta_3) + L_2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 l_3 m_3 \cos(\theta_2)\cos(\theta_2+\theta_3) + \\ + (1/24)L_3^2\dot{\theta_2}^2 m_3 + (1/12)L_3^2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 m_3 + (1/24)L_3^2\dot{\theta_3}^2 m_3 + (1/2)\dot{d}^2 m_1 + (1/2)\dot{d}^2 m_2 + \\ + (1/2)\dot{d}^2 m_3 + \dot{d}\dot{\theta}_2 l_2 m_2 \cos(\theta_2) + \dot{d}\dot{\theta}_2 l_3 m_3 \sin(\theta_2+\theta_3) + \dot{d}\dot{\theta}_3 l_3 m_3 \cos(\theta_2+\theta_3) + \\ + (1/2)\dot{\theta_2}^2 l_2^2 m_2 \sin^2(\theta_2) + (1/2)\dot{\theta_2}^2 l_2^2 m_2 \cos^2(\theta_2) + \dot{\theta_2}^2 l_3^2 m_3 \sin^2(\theta_2+\theta_3) + \\ + (1/8)\dot{\theta_2}^2 m_2 r_2^2 + (1/8)\dot{\theta_2}^2 m_3 r_3^2 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 l_3^2 m_3 \sin^2(\theta_2+\theta_3) + \\ + (1/2)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 l_3^2 m_3 \sin(2\theta_2+2\theta_3) + (1/4)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 m_3 r_3^2 + (1/2)\dot{\theta_3}^2 l_3^2 m_3 \sin^2(\theta_2+\theta_3) + \\ + (1/2)\dot{\theta_3}^2 l_3^2 m_3 \cos^2(\theta_2+\theta_3) + (1/8)\dot{\theta_3}^2 m_3 r_3^2, \end{gathered} \tag{15}$$

где $D(q)$ — матрицы инерции, поэлементное представление которой представлено в (17).

Получение уравнения движения

Уравнение движения в форме Эйлера-Лагранжа определяется, как:

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \tag{16}$$

где $C(q,\dot{q})$ — матрица Кориолисовых и центробежных сил, $G(q)$ — вектор гравитационных сил, а τ — вектор обобщенных сил.

Из выражения (15) элементы матрицы инерции $D(q)$ определяются, как:

$$\begin{aligned} d_{11} &= m_1 + m_2 + m_3, \\ d_{12} &= L_2 m_3 \cos(\theta_2) + l_2 m_2 \cos(\theta_2) + l_3 m_3 \sin(\theta_2+\theta_3), \\ d_{13} &= l_3 m_3 \cos(\theta_2+\theta_3), \\ d_{21} &= L_2 m_3 \cos(\theta_2) + l_2 m_2 \cos(\theta_2) + l_3 m_3 \sin(\theta_2+\theta_3), \\ d_{22} &= (1/12)L_2^2 m_2 + L_2^2 m_3 \sin^2(\theta_2) + L_2^2 m_3 \cos^2(\theta_2) + 2L_2 l_3 m_3 \sin(\theta_2)\sin(\theta_2+\theta_3) + \\ &\quad + 2L_2 l_3 m_3 \sin(\theta_2+\theta_3)\cos(\theta_2) + (1/12)L_3^2 m_3 + l_2^2 m_2 \sin^2(\theta_2) + l_2^2 m_2 \cos^2(\theta_2) + \\ &\quad + 2l_3^2 m_3 \sin^2(\theta_2+\theta_3) + (1/4)m_2 r_2^2 + (1/4)m_3 r_3^2, \\ d_{23} &= m_3(L_2 l_3 \sin(\theta_2)\sin(\theta_2+\theta_3) + L_2 l_3 \cos(\theta_2)\cos(\theta_2+\theta_3) + (1/12)L_3^2 + \\ &\quad + l_3^2 \sin^2(\theta_2+\theta_3) + (1/2)l_3^2 \sin(2\theta_2+2\theta_3) + (1/4)r_3^2), \end{aligned} \tag{17}$$

$$
\begin{aligned}
&d_{31} = l_3 m_3 \cos(\theta_2 + \theta_3),\\
&d_{32} = m_3(L_2 l_3 \sin(\theta_2)\sin(\theta_2+\theta_3) + L_2 l_3 \cos(\theta_2)\cos(\theta_2+\theta_3) + (1/12)L_3^2 +\\
&\qquad + l_3^2 \sin^2(\theta_2+\theta_3) + (1/2) l_3^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_3) + (1/4) r_3^2),\\
&d_{33} = m_3((1/12)L_3^2 + l_3^2 + (1/4) r_3^2).
\end{aligned}
$$

Для определения матрицы Кориолисовых и центробежных сил $C(q,\dot{q})$ используя формулу

$$
c_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ji}}{\partial q_k}\right), \tag{18}
$$

определим символы Кристофеля

$$
\begin{aligned}
c_{111} &= 0,\\
c_{112} &= 0,\\
c_{113} &= 0,\\
c_{121} = c_{211} &= 0,\\
c_{122} = c_{212} &= 0,\\
c_{123} = c_{213} &= -0.5\sqrt{2} l_3 m_3 \sin\left(\theta_2 + \theta_3 + \frac{\pi}{4}\right),\\
c_{131} = c_{311} &= 0,\\
c_{132} = c_{312} &= 0.5\sqrt{2} l_3 m_3 \sin\left(\theta_2 + \theta_3 + \frac{\pi}{4}\right),\\
c_{133} = c_{313} &= 0,\\
c_{221} &= -1.0 L_2 m_3 \sin(\theta_2) - 1.0 l_2 m_2 \sin(\theta_2) + 1.0 l_3 m_3 \cos(\theta_2 + \theta_3),\\
c_{222} &= l_3 m_3 \left(\sqrt{2} L_2 \sin\left(2\theta_2 + \theta_3 + \frac{\pi}{4}\right) + l_3 \sin(2\theta_2 + 2\theta_3)\right),\\
c_{223} &= l_3 m_3 \left(-L_2 \sin(\theta_2)\cos(\theta_2+\theta_3) - L_2\cos(\theta_2)\cos(\theta_2+\theta_3) + l_3\cos(2\theta_2 + 2\theta_3)\right),\\
c_{231} = c_{321} &= 0.5\sqrt{2} l_3 m_3 \cos\left(\theta_2 + \theta_3 + \frac{\pi}{4}\right),\\
c_{232} = c_{322} &= l_3 m_3 \left(1.0\sqrt{2} L_2 \sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{4}\right) + 2.0 l_3 \sin(\theta_2+\theta_3)\right)\cos(\theta_2+\theta_3),\\
c_{233} = c_{323} &= 0,\\
c_{331} &= -l_3 m_3 \sin(\theta_2+\theta_3),\\
c_{332} &= l_3 m_3 (L_2 \sin(\theta_2)\cos(\theta_2+\theta_3) - L_2\sin(\theta_2+\theta_3)\cos(\theta_2) + l_3 \sin(2\theta_2+2\theta_3) +\\
&\qquad + l_3\cos(2\theta_2 + 2\theta_3)),\\
c_{333} &= 0.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Затем, используя преобразование

$$
c_{kj} = \sum_{i}^{n} c_{ijk}(q)\dot{q}_i \tag{20}
$$

определим соответствующие элементы матрицы $C(q,\dot{q})$

$$
\begin{aligned}
&c_{11} = 0,\\
&c_{12} = -L_2\dot{\theta}_2 m_3 \sin(\theta_2) - \dot{\theta}_2 l_2 m_2 \sin(\theta_2) + \dot{\theta}_2 l_3 m_3 \cos(\theta_2+\theta_3) +\\
&\qquad + (1/2)\sqrt{2}\dot{\theta}_3 l_3 m_3 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \frac{\pi}{4}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{13} &= l_3 m_3((1/2)\sqrt{2}\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2+\theta_3+\frac{\pi}{4}) - \dot{\theta}_3 \sin(\theta_2+\theta_3)),\\
c_{21} &= (1/2)\sqrt{2}\dot{\theta}_3 l_3 m_3 \sin(\theta_2+\theta_3+\frac{\pi}{4}),\\
c_{22} &= l_3 m_3(\sqrt{2}L_2\dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2+\theta_3+\frac{\pi}{4}) + (1/2)\sqrt{2}L_2\dot{\theta}_3 \sin(2\theta_2+\theta_3+\frac{\pi}{4}) + \\
&\quad + (1/2)\sqrt{2}L_2\dot{\theta}_3 \cos(\theta_3+\frac{\pi}{4}) + \dot{\theta}_2 l_3 \sin(2\theta_2+2\theta_3) + \dot{\theta}_3 l_3 \sin(2\theta_2+2\theta_3)),\\
c_{23} &= l_3 m_3((1/2)\sqrt{2}L_2\dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2+\theta_3+\frac{\pi}{4}) + (1/2)\sqrt{2}L_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_3+\frac{\pi}{4}) - L_2\dot{\theta}_3 \sin(\theta_3) + \\
&\quad + (1/2)\sqrt{2}\dot{d} \sin(\theta_2+\theta_3+\frac{\pi}{4}) + \dot{\theta}_2 l_3 \sin(2\theta_2+2\theta_3) + \sqrt{2}\dot{\theta}_3 l_3 \sin(2\theta_2+2\theta_3+\frac{\pi}{4})),\\
c_{31} &= -(1/2)\sqrt{2}\dot{\theta}_2 l_3 m_3 \sin(\theta_2+\theta_3+\frac{\pi}{4}),\\
c_{32} &= l_3 m_3(-L_2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)\cos(\theta_2+\theta_3) - L_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2)\cos(\theta_2+\theta_3) - (1/2)\dot{d}\sin(\theta_2+\theta_3) - \\
&\quad - (1/2)\dot{d}\cos(\theta_2+\theta_3) + \dot{\theta}_2 l_3 \cos(2\theta_2+2\theta_3)),\\
c_{33} &= 0.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Элементы вектора гравитационных сил рассчитываются по следующей формуле

$$
g_k(q) = \frac{\partial}{\partial q_k} U, \tag{22}
$$

и формируют вектор следующего вида

$$
G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ g\left(-L_2 m_3 \sin(\theta_2) - l_2 m_2 \sin(\theta_2) - l_3 m_3 \sin(\theta_2+\theta_3)\right) \\ -g l_3 m_3 \sin(\theta_2+\theta_3) \end{bmatrix}. \tag{23}
$$

Заключение

В ходе выполнения данной работы было получено уравнение движения двухзвенного маятника на подвижной тележке, определяемое выражениями (16-17), (21) и (23).