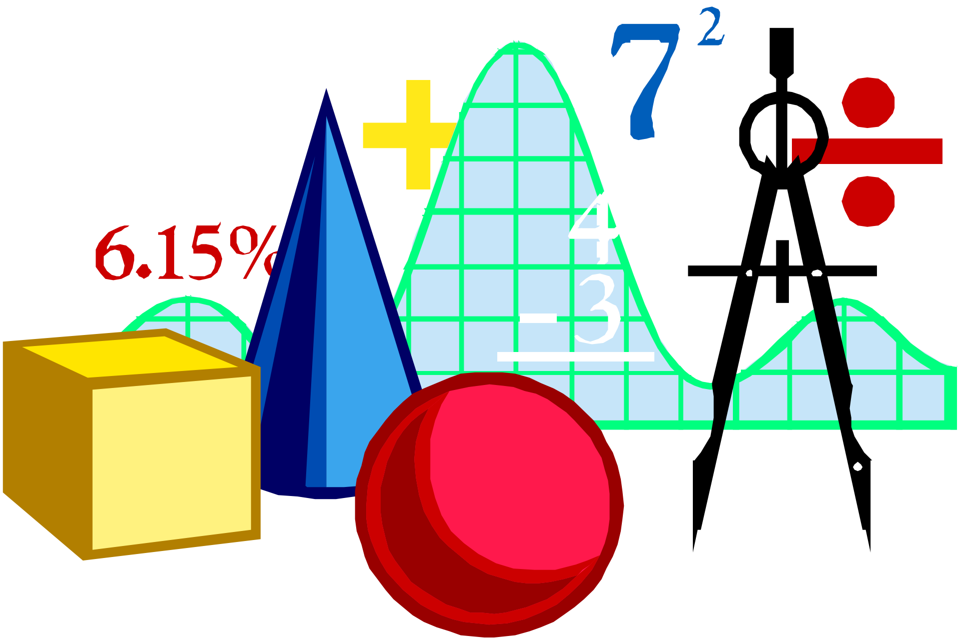
Задачи и контрольные вопросы по математике

для студентов 2 семестра



Москва 2009

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Московский государственный технологический университет
«СТАНКИН»

Задачи и контрольные вопросы по математике

для студентов 2 семестра

Москва 2009

УДК 517 (075.8)

Задачи и контрольные вопросы по математике для студентов 2 семестра: Контрольные задания. – М.: МГТУ «Станкин», 2009. – с.

Содержит задачи и контрольные вопросы по курсу математики для второго семестра и включает следующие разделы: исследование функций одной переменной с помощью производной, интегральное исчисление функций одной переменной, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, кратные интегралы. Во всех параграфах даются необходимые краткие теоретические сведения – определения, формулировки теорем, формулы, – а также приводятся примеры решений типовых задач. Задачи сопровождаются ответами.

Для использования на практических занятиях и самостоятельной работы студентов первого курса высших технических учебных заведений.

Рис. . Библ. назв.

Утверждено кафедрой математики МГТУ «Станкин»

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие предназначается для студентов второго семестра втузов, изучающих курс общей математики в объеме 270–280 аудиторных часов, что соответствует программам по математике подготовки бакалавров техники и технологий и инженеров-экономистов на дневных факультетах МГТУ «Станкин». Содержит следующие разделы: исследование функций одной переменной с помощью производной, интегральное исчисление функций одной переменной, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, кратные интегралы.

Каждый параграф начинается с краткого теоретического введения, в котором приводятся определения и обозначения математических понятий, математические факты, формулировки теорем и утверждений, а также формулы, необходимые для решения задач. Задачам, предлагаемым для самостоятельного решения, предшествуют подробно разобранные типовые примеры. Начало решений разобранных примеров и задач помечается знаком ◂, конец решения – знаком ▸.

Наряду с типовыми задачами с целью активного освоения изучаемых понятий и теорем предлагаются контрольные теоретические вопросы и задачи теоретического характера, поэтому настоящее издание может быть использовано при подготовке к экзамену как обзорное.

Задачи расположены обычно в порядке возрастания сложности и сгруппированы парами– задачи с четными номерами рекомендуется решать в аудитории на практических занятиях, а задачи с нечетными номерами предлагаются для самостоятельной работы (домашних заданий). Задачи повышенной сложности в каждом параграфе выделены в отдельную группу. Ко всем контрольным вопросам, а также к задачам, требующим ответа, в частности, задачам вычислительного характера, даны ответы.

Глава 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§1. Неопределенный интеграл и методы его вычисления

1. Первообразная, неопределенный интеграл и его свойства. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на данном промежутке, если $F'(x) = f(x)$ для всех x из этого промежутка.

Разыскание для функции всех ее первообразных называется *интегрированием* ее и составляет одну из основных задач интегрального исчисления.

Теорема. *Если функция $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$ на промежутке I, то и функция $F(x)+C$, где C - произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$ на I. Обратно, любая первообразная функции $f(x)$ на I представляется в виде $F(x)+C$.*

Совокупность всех первообразных функций $f(x)$ на промежутке I называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ на I и обозначается символом $\int f(x)dx$, т.е.

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

где $F(x)$ - какая-нибудь первообразная функции $f(x)$, а C - произвольная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла:

а) $(\int f(x)dx)' = f(x)$;

$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$;

б) $\int F'(x)dx = F(x)+C$;

$\int dF(x) = F(x)+C$;

в) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx, A \neq 0$;

г) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Таблица простейших интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$.

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

(в частности, $\int 1dx = x + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$, $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$).

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$, $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$.

10. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0)$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \quad (a \neq 0)$.

Найти первообразные следующих функций:

5.1. $6x^5$.

5.2. $3\sqrt{x}$.

5.3. $\cos 3x$.

5.4. $\sin(2x+1)$.

Применяя таблицу простейших интегралов и их свойства, найти следующие интегралы:

5.5. $\int \sqrt{2x} dx$.

5.6. $\int x^{3/2} dx$.

5.7. $\int x^4 (5 - x^2) dx$.

5.8. $\int (1-x)(1-x^2) x^3 dx$.

5.9. $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[4]{x}} dx$.

5.10. $\int \frac{x^{3/2} + x}{x^2} dx$.

5.11. $\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx$.

5.12. $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt{x}} dx$.

5.13. $\int (2^x + 3^{-x}) dx$.

5.14. $\int (3 \cdot 4^x - 5 \cdot 7^x) dx$.

5.15. $\int (5^x + 3^{-x})^2 dx$.

5.16. $\int (e^x + 1)^2 dx$.

5.17. $\int (2 + \sin x - 3\cos x) dx$.

5.18. $\int (2\sin x + 5\cos x) dx$.

5.19. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

5.20. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

5.21. $\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$.

5.22. $\int \frac{x^2 dx}{1-x^2}$.

5.23. $\int \frac{\sqrt{1-x^2} + 4}{1-x^2} dx$.

5.24. $\int \frac{2\sqrt{1+x^2} - 3}{x^2+1} dx$.

5.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

5.26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$.

5.27. $\int \left(e^{-3x}+\sqrt{x}\right)' dx$.

5.28. $\int d(\sin^2 5x+\cos\sqrt{x})$.

5.29. Являются ли функции $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ и $\frac{2}{x^2-1}$ первообразными одной и той же функции?

5.30. Являются ли функции $\frac{x}{x+1}$ и $\frac{x-1}{x+1}$ первообразными одной и той же функции?

5.31. Являются ли функция $\arcsin x$ и $2-\arccos x$ первообразными одной и той же функции?

5.32. Являются ли функция $\operatorname{arctg} x$ и $1-\operatorname{arcctg} x$ первообразными одной и той же функции?

5.33. $F(x)$ - первообразная функции $f(x)=x^2\sin^3 x$. Найти $F''(x)$.

5.34. $F(x)$ - первообразная функции $f(x)=e^{-x^2}$. Найти $F''(x)$.

Задачи повышенной сложности

5.35. Объясните, почему в формуле 11 таблицы интегралов накладывается условие $a>0$. Как будет выглядеть правая часть этой формулы, если ограничиться условием $a\neq 0$?

5.36. Как следует понимать формулу 3 таблицы интегралов, а именно, на каких промежутках рассматривается интеграл от $\frac{1}{x}$?

5.37. Найти $f(x)$, если $f'(x^2)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$.

5.38. Найти $f(x)$, если $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$.

5.39. Найти $\int \max(1,x^2)dx$.

5.40. Найти $\int \min(1,x^2)dx$.

5.41. Найти $\int x|1-x|dx$.

5.42. Найти $\int |x|dx$.

5.43. Найти первообразную функции $\cos 5x$, принимающую значение 5 при $x=0$.

5.44. Найти первообразную функции $\frac{1}{\cos^2 2x}$, принимающую значение 3 при $x=0$.

5.45. Является ли первообразной и если да, то для какой функции, функция $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{при } x\neq 0 \\ 0 & \text{при } x=0 \end{cases}$?

5.46. Является ли первообразной функция $F(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0 \\ 0 \text{ при } x = 0 \\ -1 \text{ при } x < 0 \end{cases}$?

на полуинтервалах $(0,+\infty),(-\infty,0)$ и на всей прямой?

2. Метод замены переменной. В основе *метода замены переменной* лежит следующее

Утверждение. Если $\int g(t)dt = G(t) + C$, то тогда $\int g(\omega(x) \cdot \omega'(x)dx = G(\omega(x)) + C,$ где $g(t), \omega(x), \omega'(x)$ - непрерывные функции.

а) Если при нахождении $\int f(x)dx$ мы замечаем, что функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = g(\omega(x)) \cdot \omega'(x)$ и $\int g(t)dt$ нам известен, то

$$\int f(x)dx = \int g(\omega(x)) \cdot \omega'(x)dx = G(\omega(x)) + C .$$

Такая замена переменной носит название *подведения под знак дифференциала*, в связи с тем, что $\omega'(x)dx = d\omega(x) = dt$. При этом в интеграле также применяется запись

$$\int g(\omega(x)) \cdot \omega'(x)dx = \int g(\omega(x)) \cdot d\omega(x) = G(\omega(x)) + C .$$

Пример 1. Найти $\int \sin^2 x \cos x dx$.

◄ $\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d \sin x = \frac{\sin^3 x}{3} + C$ (т.к. $\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C$) ►

Пример 2.Найти $\int \frac{xdx}{x^4+1}$.

◄ $\int \frac{xdx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\left(x^2\right)^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$ (т.к. $\int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C$) ►

б) В других случаях в подинтегральное выражение $f(x)dx$ непосредственно подставляют, вместо x, дифференцируемую функцию $x = s(t)$ от новой переменной t и получают выражение

$$f(s(t))s'(t)dt = g(t)dt .$$

Если $t = \omega(x)$ функция обратная для $x = s(t)$, то

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C = G(\omega(x)) + C .$$

Такой метод замены переменной называют также *подстановкой.*

Пример 3. Найти $\int \frac{xdx}{1+\sqrt{x+1}}$.

◄ Сделаем подстановку $t = \sqrt{x+1}$. Тогда $x = t^2 - 1,\ dx = 2tdt$.

$\int \frac{xdx}{1+\sqrt{x+1}} = \int \frac{\left(t^2-1\right)2tdt}{1+t} = \int (t-1)2tdt = \int \left(2t^2-2t\right)dt = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + C =$

$= \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - (x+1) + C.$ ►

Найти интегралы, применяя метод подведения под знак дифференциала:

5.47. $\int \cos^2 x d\cos x$.

5.48. $\int \sin 3x d\sin 3x$.

5.49. $\int (1-x)^{2000} dx$.

5.50. $\int (3x+5)^{2001} dx$.

5.51. $\int \frac{xdx}{1+x^4}$.

5.52. $\int \frac{xdx}{1-x^4}$.

5.53. $\int x\cos x^2 dx$.

5.54. $\int 3x\sin \frac{x^2}{2} dx$.

5.55. $\int \mathrm{tg}\, xdx$.

5.56. $\int \mathrm{ctg}\, xdx$.

5.57. $\int \frac{e^x dx}{1+e^x}$.

5.58. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$.

5.59. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos x}}$.

5.60. $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{\sin x}}$.

5.61. $\int \frac{\mathrm{tg}^3 xdx}{\cos^2 x}$.

5.62. $\int \frac{\mathrm{arctg}\, xdx}{1+x^2}$.

5.63. $\int x^3 \cos 2x^4 dx$.

5.64. $\int 3x^5 \sin x^6 dx$.

5.65. $\int x(2-x)^{300} dx$.

5.66. $\int x(2x+5)^5 dx$.

5.67. $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$.

5.68. $\int x^2 e^{-x^3} dx$.

5.69. $\int e^x \sin e^x dx$.

5.70. $\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x}$.

5.71. Докажите, что $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$, $(a \neq 0)$, где $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$.

5.72. Докажите, что $\int xf(x^2)dx = \frac{1}{2}F(x^2)+C$, где $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$.

Применяя указанные подстановки найти интегралы

5.73. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, $x=t^2$.

5.74. $\int \frac{dx}{1-\sqrt[3]{x}}$, $x=t^3$.

Задачи повышенной сложности

Найдите

5.75. $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

5.76. $\int \frac{dx}{1-e^{-x}}$.

5.77. $\int x^3 (1+x)^{2001} dx$.

5.78. $\int \frac{x^3 dx}{(1-x)^{100}}$.

5.79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$.

5.80. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

5.81. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

5.82. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x\sqrt{x}}$.

5.83. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$.

5.84. $\int \frac{\sin x\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

5.85. $\int x^3\sqrt{1+x^2}dx$.

5.86. $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}dx$.

5.87. $\int \cos(\sin(\sin x))\cos(\sin x)\cos x dx$.

5.88. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$.

5.89. $\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$, $x=\sin t$.

5.90. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$, $x=tg\,t$.

3. Метод интегрирования по частям. Теорема. *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *имеют непрерывные производные* $u'(x)$ *и* $v'(x)$. *Тогда*

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx$$

или, короче,

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Эти формулы носят название формул интегрирования по частям.

Пример 4. Найти $\int xe^x dx$.

◄ $\int xe^x dx\left|\begin{matrix} u=x, & du=dx \\ dv=e^x dx, & v=e^x\end{matrix}\right|=\int xde^x=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$. ►

Вообще интегралы вида $\int x^k e^{ax}dx, \int x^k \cos axdx, \int x^k \sin axdx$ вычисляются последовательным применением метода интегрирования по частям k раз, при этом за функцию u принимается $x^m\ (m=k,k-1,...,1)$.

Пример 5. Найти $\int x^2\ln xdx$.

◄ $\int x^2\ln xdx=\int \ln xd\frac{x^3}{3}=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C$. ►

При вычислении интегралов вида $\int x^k\ln^m xdx\ (k\neq-1)$ полагают $u=\ln^m x$ и интеграл находится m-кратным применением метода интегрирования по частям.

Пример 6. Найти $\int \operatorname{arctg} xdx$.

◄ $\int \operatorname{arctg} xdx=x\operatorname{arctg} x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. ►

Аналогично, при нахождении интегралов $\int \arcsin xdx, \int \arccos xdx, \int \ln xdx$ полагают $dv=dx$.

Пример 7. Найти $\int e^{ax}\sin bxdx, (b\neq 0)$.

◄Полагая $u=e^{ax}$, $dv=\sin bxdx$ получим

$$\int e^{ax}\sin bxdx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left(\frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx\right).$$

Решая это уравнение относительно интересующего нас интеграла, найдем

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C. \ ►$$

Аналогично находятся интегралы $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int \cos\ln xdx$, $\int \sin\ln xdx$.

Применяя метод интегрирования по частям, найти интегралы:

5.91. $\int x\cos 2xdx$.

5.92. $\int x\sin xdx$.

5.93. $\int x^2\sin 2xdx$.

5.94. $\int x^2\cos xdx$.

5.95. $\int xe^{-3x}dx$.

5.96. $\int xe^{2x}dx$.

5.97. $\int x^{\alpha}\ln xdx(\alpha \neq -1)$.

5.98. $\int \sqrt{x}\ln xdx$.

5.99. $\int x\ln^2 xdx$.

5.100. $\int \frac{\ln xdx}{x^2}$.

5.101. $\int \arcsin xdx$.

5.102. $\int \arccos xdx$.

5.103. $\int (x^2 - x + 1)\cos xdx$.

5.104. $\int (2x+3)\sin 3xdx$.

Задачи повышенной сложности

5.105. В предположении непрерывности $u''(x)$ и $v''(x)$ с помощью двукратного интегрирования по частям получить формулу, выражающую $\int u(x)v''(x)dx$ через $\int u''(x)v(x)dx$.

5.106. С помощью формулы, полученной в 5.105, вычислить $\int x^2e^xdx$ и $\int x^2\cos xdx$.

Выразить через $\int f(x)dx$ следующие интегралы:

5.107. $\int xf''(x)dx$.

5.108. $\int xf''(2x)dx$.

5.109. Выразите $\int x^k e^x dx$ через $\int x^{k-1}e^x dx$. С помощью полученной формулы найдите $\int x^5 e^x dx$.

5.110. Выразите $\int x^k \ln^m xdx$ через $\int x^k \ln^{m-1} xdx$ $(k \neq -1)$. С помощью полученной формулы найдите $\int x^7 \ln^3 xdx$.

Найти интегралы:

5.111. $\int \cos\ln xdx$.

5.112. $\int \sin\ln xdx$.

5.113. $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

5.114. $\int \sin\sqrt{x}dx$.

5.115. $\int (\arcsin x)^2 dx$.

5.116. $\int x^2\arcsin xdx$.

5.117. $\int e^{2x}\cos 3x dx$.

5.118. $\int e^{-x}\sin 2x dx$.

5.119. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

5.120. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

5.121. $\int\sqrt{1+x^2}dx$.

5.122. $\int\sqrt{1-x^2}dx$.

5.123. $\int x^3\sin x^2 dx$.

5.124. $\int x^5 e^{x^3}dx$.

5.125. $\int e^x \operatorname{tg} e^x dx$.

5.126. $\int x\operatorname{ctg} x^2 dx$.

§2. Интегрирование основных классов элементарных функций

1. Интегрирование дробей вида $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ и $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Интегралы $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ и $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приводятся к табличным интегралам выделением полного квадрата в квадратном трехчлене знаменателя подинтегральной дроби.

Пример 1. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

◄ $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\int\frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+1}}=\ln\left(x+2+\sqrt{(x+2)^2+1}\right)+C$. ►

Если окажется, что $Ax+B=\left(ax^2+bx+c\right)'=2ax+b$, то подведение под знак дифференциала квадратного трехчлена ax^2+bx+c делает интегралы табличными:

$$\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}=\ln\left|ax^2+bx+c\right|+C,$$

$$\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=2\sqrt{ax^2+bx+c}+C.$$

При интегрировании дробей $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ и $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ в числителе дроби выделяется производная квадратного трехчлена знаменателя, а именно:

$$Ax+B=\frac{A}{2a}\cdot(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}$$

и дробь представляется в виде суммы двух дробей

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{2a}\cdot\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\frac{1}{ax^2+bx+c}$$

(аналогично представляется дробь $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$).

Интегрирование каждой из дробей правой части равенства мы уже рассмотрели.

Пример 2. Найти $\int\frac{3x+1}{x^2-2x+10}dx$.

◀ $\int \frac{3x+1}{x^2-2x+10}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-2)+4}{x^2-2x+10}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+10}dx + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2+9} =$

$= \frac{3}{2}\ln\left(x^2-2x+10\right) + \frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3} + C$. ▶

Замечание. Если уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет действительные корни, то дробь $\frac{Ax+b}{ax^2+bx+c}$ обычно интегрируется иначе, как будет рассмотрено в следующем пункте.

Найти интегралы:

5.127. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+3}}$.

5.128. $\int -\frac{dx}{2x-x^2-2}$.

5.129. $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+20}$.

5.130. $\int \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}dx$.

5.131. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3+2x+x^2}}$.

5.132. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}dx$.

5.133. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2-6x+8}}dx$.

5.134. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+10x+30}}dx$.

5.135. $\int \frac{1-7x}{x^2-4x+8}$.

5.136. $\int \frac{4x+1}{x^2-6x+10}dx$.

Задачи повышенной сложности

5.137. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-2x^2+2}}$.

5.138. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}}$.

2. Интегрирование рациональных дробей. *Рациональной* функцией или *рациональной дробью* называется функция, являющаяся отношением двух многочленов $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}$.

Если $m < n$, то дробь называется *правильной*, а если $m \geq n$, то *неправильной*.

Всякая неправильная рациональная дробь представляется в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ - многочлен степени $m-n$, а $R(x)$ - многочлен степени меньшей n.

$M(x)$ и $R(x)$ находятся делением многочлена $P(x)$ на $Q(x)$.

Всякая правильная рациональная дробь представляется в виде суммы *простейших дробей* следующих четырех типов:

1) $\frac{A}{x-a}$;

2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(k=2,3,..)$;

3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ $(p^2-4q<0)$;

4) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ $(k=2,3,..;\ p^2-4q<0)$.

Простейшие дроби первого и второго типа легко приводятся к табличным:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C;\ \int\frac{Adx}{(x-a)^k}=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C.$$

Интегрирование простейших дробей третьего типа рассмотрено в п.1.

Приведем примеры интегрирования простейших дробей четвертого типа.

Пример 3. Найти $\int\dfrac{dx}{(x^2+1)^2}$.

◀ Проинтегрируем по частям $\int\dfrac{dx}{x^2+1}$, полагая $u=\dfrac{1}{x^2+1}$, $dv=dx$. Тогда

$$\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{(x^2+1-1)dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{dx}{x^2+1}-2\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+C. ▶$$

Пример 4. Найти $\int\dfrac{x+3}{(x^2+2x+2)^2}dx$.

◀ $$\int\frac{x+3}{(x^2+2x+2)^2}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)+2}{(x^2+2x+2)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}dx+2\int\frac{dx}{((x+1)^2+1)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+2}+\mathrm{arctg}(x+1)+\frac{x+1}{(x+1)^2+1}+C=\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\mathrm{arctg}(x+1)+C,$$

где последний интеграл мы вычислили, учитывая предыдущий пример. ▶

Вид разложения правильной рациональной дроби в сумму простейших зависит от разложения знаменателя $Q(x)$ на множители. Как известно, каждый многочлен $Q(x)$ раскладывается на линейные множители вида $x-a$ и квадратичные, не имеющие действительных корней вида x^2+px+q (где $p^2-4q<0$). Объединяя одинаковые множители, получают разложение многочлена $Q(x)$ в виде

$$Q(x)=a_0(x-a)^k\ldots(x^2+px+q)^l\ldots.$$

Если множитель $x-a$ входит в разложение $Q(x)$ в степени k, так что

$$Q(x)=(x-a)^kQ_1(x),$$

где $Q_1(x)$ уже не делится на $x-a$ (т.е. a - корень кратности k), то представление дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ в виде суммы простейших дробей содержит простейшую дробь первого типа $\dfrac{A_1}{x-a}$ и $k-1$ (если $k>1$) простейшую дробь второго типа $\dfrac{A_2}{(x-a)^2}$, … , $\dfrac{A_k}{(x-a)^k}$.

Если множитель x^2+px+q ($p^2-4q<0$) входит в разложение $Q(x)$ в степени l, то представление $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ в виде суммы простейших дробей содержит простейшую дробь третьего типа $\dfrac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q}$ и $l-1$ (если $l>1$) дробь четвертого типа $\dfrac{B_2 x + C_2}{\left(x^2 + px + q\right)^2}, \ldots, \dfrac{B_l x + C_l}{\left(x^2 + px + q\right)^l}$. Таким образом, зная разложение знаменателя на множители, получим представление дроби в виде суммы простейших дробей. Коэффициенты разложения A_i, B_i, C_i находятся методом неопределенных коэффициентов (см. примеры).

Пример 5. Найти $\int \dfrac{x^4 + 2x + 1}{x^3 + 4x} dx$.

◀ Подинтегральная дробь неправильная, следовательно нужно выделить ее целую часть:

$$\frac{x^4 + 2x + 1}{x^3 + 4x} = x - \frac{4x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4x}.$$

Правильную дробь $\dfrac{4x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4x}$ разложим на простейшие. Так как $x^3 + 4x = x\left(x^2 + 4\right)$, то

$$\frac{4x^2 - 2x + 1}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}.$$

Приводя сумму в правой части равенства к общему знаменателю, получим равенство дробей с равными знаменателями, откуда следует равенство их числителей:

$$4x^2 - 2x + 1 = A\left(x^2 + 4\right) + x(Bx + C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A + B = 4 \\ \quad C = -2 \\ \quad 4A = 1 \end{cases},$$

откуда находим $A = \dfrac{1}{4}$, $B = \dfrac{15}{4}$, $C = -2$.

Таким образом,

$$\int \frac{x^4 + 2x + 1}{x^3 + 4x} dx = \int x dx - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} - \int \frac{\frac{15}{4}x - 2}{x^2 + 4} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{15}{8}\int \frac{2x dx}{x^2 + 4} + 2\int \frac{dx}{x^2 + 4} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{15}{8}\ln\left(x^2 + 4\right) + \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C. \text{ ▶}$$

Пример 6. Найти $\int \dfrac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)^2}$.

◀ Получим разложение подинтегральной дроби на простейшие

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{(x+3)^2}.$$

Приводя сумму справа к общему знаменателю и приравнивая числители, получим:

$$1 = A(x+2)(x+3)^2 + B(x+1)(x+3)^2 + C(x+1)(x+2)(x+3) + D(x+1)(x+2).$$

Положим в этом равенстве значения *x* равными корням знаменателя и еще какому-нибудь «простому» значению, например нулю, чтобы получить для определения четырех неизвестных коэффициентов четыре уравнения.

При $x=-1$ имеем $1=4A$,
при $x=-2$ имеем $1=-B$,
при $x=-3$ имеем $1=2D$,
при $x=0$ имеем $1=18A+9B+6C+2D$.

Отсюда следует, что $A=1/4$, $B=-1$, $D=1/2$, $C=3/4$. Тогда

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x+2}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+3)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x+1|-\ln|x+2|+\frac{3}{4}|x+3|-\frac{1}{2(x+3)}+C.\ \blacktriangleright$$

Укажите, какая из двух дробей является правильной

5.139. $\dfrac{x^5+x^4}{x^6+1}$ или $\dfrac{x^4-1}{x^5+2x}$.

5.140. $\dfrac{x^7-8}{x^8+x^7}$ или $\dfrac{x^3+2}{x^3-2}$.

Найти интегралы:

1) Знаменатель раскладывается на различные линейные множители.

5.141. $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x-1}dx$.

5.142. $\displaystyle\int\frac{x^3+2x+3}{2x-3}dx$.

5.143. $\displaystyle\int\frac{x+3}{(x-1)(x+2)}dx$.

5.144. $\displaystyle\int\frac{2x-1}{(x+1)(x+3)}dx$.

5.145. $\displaystyle\int\frac{x^2+x+1}{x(x+1)(x+2)}dx$.

5.146. $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{(x+2)(x^2-9)}dx$.

5.147. $\displaystyle\int\frac{x^5-1}{4x^3-x}dx$.

5.148. $\displaystyle\int\frac{x^6+1}{x^5-5x^3+4x}dx$.

2) Знаменатель раскладывается на линейные множители.

Правильная рациональная дробь имеет знаменатель $Q(x)$. Напишите вид разложения этой дроби на простейшие

5.149. $Q(x)=(x+1)^3(x-2)$.

5.150. $Q(x)=(x-a)^2(x+b)^2$.

Найти интегралы:

5.151. $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$.

5.152. $\displaystyle\int\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2\cdot\frac{dx}{x}$.

5.153. $\displaystyle\int\frac{x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+4x}dx$.

5.154. $\displaystyle\int\frac{x^3-2}{x^3-2x^2+x}dx$.

5.155. $\int \frac{dx}{x^2(x-1)^2}$.

5.156. $\int \frac{dx}{x^4 - x^2}$.

5.157. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2} dx$.

5.158. $\int \frac{3x^2 + 1}{(x^2 - 1)^3} dx$.

3) Знаменатель раскладывается на линейные и квадратичные множители.

Правильная рациональная дробь имеет знаменатель $Q(x)$. Напишите вид разложения этой дроби на простейшие

5.159. $Q(x) = (x-3)(x^2+1)^2$.

5.160. $Q(x) = (x^2 + 4x + 5)(x+2)^2$.

Найти интегралы:

5.161. $\int \frac{dx}{1 + x^3}$.

5.162. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

5.163. $\int \frac{x^4 + 1}{x^4 - 1} dx$.

5.164. $\int \frac{x^4 dx}{x^4 - 16}$.

5.165. $\int \frac{3x + 1}{x^2(x^2 + 2x + 2)} dx$.

5.166. $\int \frac{3x^3 + 4x^2 - x + 4}{(x-1)^2(x^2 + 4x + 5)} dx$.

5.167. $\int \frac{dx}{x^4 + 6x^2 + 8}$.

5.168. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$.

Применяя различные приемы, найти интегралы:

5.169. $\int \frac{x^2 dx}{x^6 - 4}$.

5.170. $\int \frac{x^3 dx}{x^8 + 9}$.

Задачи повышенной сложности

5.171. $\int \frac{x dx}{x^8 - 1}$.

5.172. $\int \frac{x^4 dx}{(x^{10} - 1)^2}$.

5.173. $\int \frac{x^9 dx}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2}$.

5.174. $\int \frac{x^5 - 2x}{x^8 + 1} dx$.

5.175. $\int \frac{x^3 dx}{(x+1)^{10}}$.

5.176. $\int \frac{(x-2)x^2 dx}{(x-3)^{20}}$.

5.177. Выразите $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{n+1}}$ через $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}$, применив к последнему интегралу метод интегрирования по частям (полагая $u = (a^2 + x^2)^{-n}$, $dv = dx$).

5.178. Найти $\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^2}$.

Найти интегралы:

5.179. $\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^3}$.

5.180. $\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^2}$.

5.181. $\int \frac{x^3+x-1}{\left(x^2+2\right)^2}dx$.

5.182. $\int \frac{2x+1}{x\left(4+x^2\right)^2}dx$.

5.183. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

5.184. $\int \frac{xdx}{x^8+1}$.

5.185. $\int \frac{e^x dx}{\left(e^x-1\right)\left(e^{2x}+2e^x+2\right)}$.

5.186. $\int \frac{\sin x dx}{\left(\sin^2 x+3\right)\left(\cos x+2\right)}$.

3. Интегрирование тригонометрических функций.

а) Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

Если n – нечетное положительное число, $n=2k+1$, то выполним следующие преобразования

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx = \int \sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^k d\sin x,$$

т.е. мы отделили один косинус от нечетной степени и подвели под знак дифференциала и оставшийся косинус в четной степени выразили через синус. Полученный интеграл легко находится как интеграл от суммы степенных функций. Аналогично рассматривается случай, когда m – нечетное положительное число.

Пример 7. Найти $\int \sin^3 x \frac{1}{\sqrt{\cos x}}dx$.

$$◄ \int \sin^3 x \frac{1}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos x}}\sin x dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\sqrt{\cos x}}d\cos x =$$

$$= -\int (\cos x)^{-1/2} d\cos x + \int (\cos x)^{3/2} d\cos x = -2\sqrt{\cos x} + \frac{2}{5}(\cos x)^{5/2} + C =$$

$$= \sqrt{\cos x}\left(-2+\frac{2}{5}\cos^2 x\right)+C. ►$$

Если m и n – четные неотрицательные числа, то применяются формулы понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 8. Найти $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

$$◄ \int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{8}x - \frac{\sin 4x}{32} + C. ►$$

б) Для интегрирования произведений синусов и косинусов различных аргументов применяются тригонометрическое формулы:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)).$$

Пример 9. Найти $\int\cos 5x\sin x dx$.

◄ $\int\cos 5x\sin x dx=\frac{1}{2}\int(-\sin 4x+\sin 6x)dx=\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{12}\cos 6x+C$. ►

в) *Многочленом* $P(u,v)$ *от двух переменных* u и v называется сумма конечного числа членов вида $a_{km}u^k v^m$, где k и m – неотрицательные целые числа, а коэффициенты a_{km} - действительные числа.

Рациональной функцией $R(u,v)$ *от двух переменных* называется отношение двух многочленов: $R(u,v)=\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, где $P(u,v)$, $Q(u,v)$ - многочлены от u и v.

Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где $R(u,v)$ - рациональная функция от двух переменных, приводятся к интегралам от рациональной функции одного переменного t с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. При этом

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 10. Найти $\int\frac{dx}{2\cos x+3}$.

◄ $\int\frac{dx}{2\cos x+3}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(2\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\right)}=\int\frac{2dt}{2(1-t^2)+3+3t^2}=2\int\frac{dt}{5+t^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C=$

$=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}+C$. ►

Если $R(u,v)=R(-u,-v)$ (в частности, если $R(\sin x,\cos x)$ содержит $\sin x$ и $\cos x$ только в четных степенях или $R(\sin x,\cos x)$ зависит только от $\operatorname{tg}x$), то применяется более простая в использовании подстановка $\operatorname{tg}x=t$. При этом

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 11. Найти $\int\operatorname{tg}^4 x dx$.

◄ $\int\operatorname{tg}^4 x dx=\int t^4\frac{dt}{1+t^2}=\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg}t+C=\operatorname{tg}^3x-\operatorname{tg}x+x+C$. ►

Найти интегралы (см. а)):

5.187. $\int\sin^3 x dx$.

5.188. $\int\cos^3 x dx$.

5.189. $\int\sin^3 x\sqrt[3]{\cos x}dx$.

5.190. $\int\frac{\cos^5 x dx}{\sqrt{\sin x}}$.

5.191. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

5.192. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

5.193. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

5.194. $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$.

5.195. $\int \sin^4 x dx$.

5.196. $\int \cos^4 x dx$.

5.197. $\int \operatorname{tg} x \sin^2 x dx$.

5.198. $\int \operatorname{ctg} x \cos^2 x dx$.

5.199. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$.

5.200. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$.

Найти интегралы (см. б)):

5.201. $\int \sin 2x \cos 3x dx$.

5.202. $\int \sin 5x \cos 2x dx$.

5.203. $\int \cos \frac{x}{2} \cos\left(\frac{3}{2}x + 1\right) dx$.

5.204. $\int \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) dx$.

5.205. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$.

5.206. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$.

Укажите, какие из данных функций являются рациональными функциями от $\sin x$ и $\cos x$:

5.207. $\frac{1 + 2\sin x \cos x}{\cos^3 x - \sin^2 x}$, $\frac{\sqrt{\sin x}}{1 + \cos^2 x}$, $\frac{\ln \sin x}{\operatorname{tg} x + 1}$.

5.208. $\frac{\sin(\cos x)}{\cos x + 1}$, $\frac{\cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$, $\frac{\sin x + 1}{2\cos x + 3}$.

5.209. $R(x)$ - рациональная функция. Как привести интеграл $\int \sin x R(\cos x) dx$ к интегралу от рациональной функции одного переменного?

5.210. $R(x)$ - рациональная функция. Как привести интеграл $\int \cos x R(\sin x) dx$ к интегралу от рациональной функции одного переменного?

Найти интегралы (см. в)):

5.211. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

5.212. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

5.213. $\int \frac{dx}{2 + \sin x}$.

5.214. $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x}$.

5.215. $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.

5.216. $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg} x + 1} dx$.

5.217. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\cos^2 x}$.

5.218. $\int \frac{dx}{\cos^2 x - 4\sin^2 x}$.

Задачи повышенной сложности

Найти интегралы:

5.219. $\int \frac{\sin x dx}{\sin x + 3\cos x}$.

5.220. $\int \frac{\cos x dx}{2\sin x + 1}$.

5.221. $\int e^x \cos e^x \sin e^x dx$.

5.222. $\int x \cos^2 x^2 \sin x^2 dx$.

5.223. $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x + \sin x \cos x}$.

5.224. $\int \frac{\operatorname{ctg}^2 x dx}{2\sin x \cos x + 3\sin^2 x}$.

5.225. $\int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x}$.

5.226. $\int \frac{\cos x dx}{2 + \cos x}$.

5.227. $\int \frac{\sin^3 x \ln x}{x} dx$.

5.228. $\int \frac{\cos^2 \ln x}{2} dx$.

5.229. $\int e^x \operatorname{tg}^2 e^x dx$.

5.230. $\int \sin x \operatorname{tg}^3(\cos x) dx$.

4. Интегрирование некоторых иррациональных функций. В этом пункте R - рациональная функция от двух переменных.

а) Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right) dx,$$

где n – натуральное число, вычисляются с помощью подстановки $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}$.

Пример 12. Найти $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$.

◀ Положим $t = \sqrt{x}$. Тогда $x = t^2$ и $dx = 2tdt$.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{2t^2 dt}{1+t} = 2\int \left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right) dt = t^2 - 2t + \ln|1+t| + C = x - 2\sqrt{x} + \ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C.$$ ▶

В более общем случае, интегралы вида

$$\int R\left(\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right) dx,$$

где p, q, r, s – натуральные числа, вычисляются с помощью подстановки $t = \left(\frac{ax+b}{cx+b}\right)^{1/m}$,

где m – наименьшее общее кратное чисел q и s.

Пример 13. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$.

◀ Положим $t = \sqrt[6]{x}$. Тогда $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} = \int \frac{6t^5 dt}{t^2 + t^3} = 6\int \frac{t^3 dt}{1+t} = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1-t}\right) dt = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|1+t| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right) + C.$$ ▶

б) Следующие три вида интегралов

1) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$, $\quad x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$)

2) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$, $\qquad x = a\,\mathrm{tg}\,t$

3) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$, $\qquad x = a\sec t = \dfrac{a}{\cos t}$

с помощью тригонометрических подстановок приводятся к рациональной функции от $\sin t$ и $\cos t$ (см. п.3).

Интегралы $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$ приводятся к одному из интегралов вида 1), 2) или 3) выделением полного квадрата в квадратном трехчлене и линейной заменой переменных $u = x + \dfrac{b}{2a}$.

Пример 14. Найти $\int \sqrt{3 + 2x - x^2}\,dx$.

◀ Преобразуем $3 + 2x - x^2 = 4 - (x-1)^2$ и положим $x - 1 = 2\sin t$. Тогда $\sqrt{3 + 2x - x^2} = 2\cos t$ и $dx = 2\cos t\,dt$.

$$\int \sqrt{3 + 2x - x^2}\,dx = \int 4\cos^2 t\,dt = 2\int (1 + \cos 2t)\,dt = 2t + \sin 2t + C = 2t + 2\sin t\cos t + C =$$
$$= 2\arcsin\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{2}\cdot\sqrt{3 + 2x - x^2} + C. \ ▶$$

Пример 15. Найти $\int \dfrac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x}dx$.

◀ Положим $x = \dfrac{1}{2\cos t}$. Тогда $\sqrt{4x^2 - 1} = \mathrm{tg}\,t$.

$$\int \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}dx = \int \mathrm{tg}\,t \cdot 2\cos t \cdot \frac{1}{2} d\left(\frac{1}{\cos t}\right) = \int \sin t\, d\left(\frac{1}{\cos t}\right) = \sin t \cdot \frac{1}{\cos t} - \int \cos t\, d\sin t =$$
$$= \mathrm{tg}\,t - t + C = \sqrt{4x^2 - 1} - \arccos\frac{1}{2x} + C. \ ▶$$

Найти интегралы (см. а)):

5.231. $\int \dfrac{dx}{2 + \sqrt{2x+3}}$. 5.232. $\int \dfrac{dx}{1 + \sqrt{x}}$.

5.233. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x} + 1\right)}$. 5.234. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x^3}}$.

5.235. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x} + 1\right)}$. 5.236. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}}$.

Найти интегралы (см. б)):

5.237. $\int \sqrt{3 - x^2 - 2x}\,dx$. 5.238. $\int \sqrt{2x - x^2}\,dx$.

5.239. $\int \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 1}dx$. 5.240. $\int \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}dx$.

5.241. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{\left(x^2 - 6x + 13\right)^3}}$. 5.242. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{\left(x^2 + 4x + 5\right)^3}}$.

Задачи повышенной сложности

Найдите интегралы:

5.243. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$.

5.244. $\int \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}dx$.

5.245. $\int \sqrt{\left(4x-x^2\right)^3}dx$.

5.246. $\int \sqrt{\left(8-2x-x^2\right)^3}dx$.

5.247. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$.

5.248. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$.

5.249. $\int \frac{2\ln x+3}{x\sqrt{4\ln x-\ln^2 x}}dx$.

5.250. $\int \frac{\sqrt{2\ln x-\ln^2 x}}{x}dx$.

5.251. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}-1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}+1}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}$.

5.252. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(1+\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\right)}$.

5.253. $\int \frac{\cos x dx}{1-\sqrt{\sin x}}$.

5.254. $\int \frac{\sin^3 x dx}{1+\sqrt{\cos x}}$.

5.255. $\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}dx$.

5.256. $\int \frac{\sqrt{e^{2x}-1}}{e^{2x}}dx$.

Смешанные задачи на интегрирование

Найти интегралы:

5.257. $\int x^3\sqrt{10-x^4}dx$.

5.258. $\int x^3\sqrt{5+x^2}dx$.

5.259. $\int \sqrt{4x-x^2}dx$.

5.260. $\int \sqrt{x^2+6x+10}dx$.

5.261. $\int e^x\cos^2 e^x dx$.

5.262. $\int e^{-x}\sin^3 e^{-x}dx$.

5.263. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

5.264. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x-\ln^2 x}}$.

5.265. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3}{2}x dx$.

5.266. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{5}{2}x dx$.

5.267. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx$.

5.268. $\int \frac{x dx}{\sqrt{6x-x^2-5}}$.

5.269. $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^{10}}$.

5.270. $\int \frac{x^2 dx}{3+x^2}$.

5.271. $\int x\cdot 2^x dx$.

5.272. $\int x\cos\frac{x}{2}dx$.

5.273. $\int \frac{x dx}{4-x^4}$.

5.274. $\int \frac{dx}{x^3-5x^2+6x}$.

§3. Определенный интеграл и методы его вычисления

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

и выберем в каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку $\xi_i : x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ $(i = 1,2,..., n)$. (Наибольшую из разностей $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1,2,..., n)$ обозначим через λ.) Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{2}$$

называется интегральной суммой функции для данного разбиения (1) и данного выбора точек ξ_i.

Если существует конечный предел интегральных сумм (2), когда $\lambda \to 0$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на части и выбора точек ξ_k, то этот предел называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Функция $f(x)$ называется при этом *интегрируемой* на отрезке $[a,b]$. Числа a и b называются *нижним* и верхним пределом интеграла, соответственно. Данное определение интеграла принадлежит Б.Риману.

Если функция интегрируема на отрезке $[a,b]$*, то она ограничена на этом отрезке* (необходимое условие интегрируемости функции).

Непрерывная на отрезке $[a,b]$ *функция интегрируема на этом отрезке* (достаточное условие интегрируемости функции).

Геометрически частичная сумма (2) для $f(x) \ge 0$ выражает площадь ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников, основаниями Δx_i и высотами $f(\xi_i)$. Отсюда вытекает

Геометрический смысл определенного интеграла. *Если* $f(x) \ge 0$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$*, то* $\int_a^b f(x)dx$ *равен площади криволинейной фигуры, ограниченной сверху графиком функции* $y = f(x)$*, снизу осью Ox и с боков отрезками прямых x=a и x=b.*

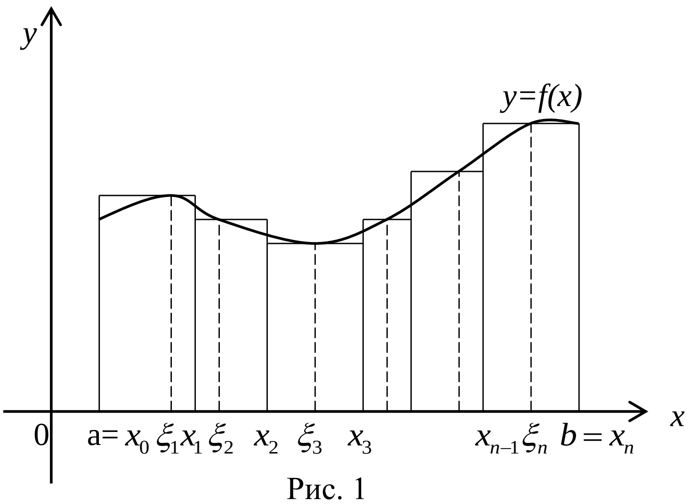


Рис. 1

Свойства определенного интеграла.

1 Линейность.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, A и B – константы, то функция $Af(x)+Bg(x)$ также интегрируема на $[a,b]$ и выполняется равенство

$\int_a^b (Af(x)+Bg(x))dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx$.

2 Монотонность.

Если $f(x)\le g(x)$ и $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то

$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Следствие. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$, то

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

3 По определению

$\int_a^a f(x)dx = 0$, $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ (при $a<b$).

4 Для любых трех чисел a,b,c справедливо равенство

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

5 Теорема (о среднем). *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке найдется такая точка с, что*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется величина $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Теорема (о производной интеграла по переменному верхнему пределу). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то функция $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ является первообразной функции $f(x)$ на $[a,b]$, т.е. $\Phi'(x)=f(x)$, $x\in[a,b]$.*

Из этой теоремы следует основная формула интегрального исчисления –

Формула Ньютона - Лейбница. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ - ее первообразная, т.е. $F'(x)=f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Пример 1.◄ $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2$. ►

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $x=\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ и $f(\varphi(t))$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Если функции $u(x)$, $v(x)$ и их производные $u'(x)$, $v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_b^a - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^3 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$.

◀ Применим подстановку $x=3\sin t$.

$$\int_0^3 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = 3^5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^2 t dx = -243\int \left(1-\cos^2 t\right)\cos^2 td\cos t =$$

$$-243\left(\frac{\cos^3 t}{3}-\frac{\cos^5 t}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{162}{5}.$$ ▶

Пример 3. Вычислить $\int_1^4 \sqrt{x}\ln x dx$.

◀ $$\int_1^4 \sqrt{x}\ln x dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x\Bigg|_1^4 - \int_1^4 \frac{2}{3}x^{3/2}\frac{1}{x}dx = \frac{16}{3}\ln 4 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 x^{3/2}\Bigg|_1^4 = \frac{16}{3}\ln 4 - \frac{28}{9}.$$ ▶

Выразите с помощью интеграла площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

5.275. $y=x$, $y=3x$, $x=3$.

5.276. $y=x+1$, $x=2$, $y=0$.

5.277. $y=x^2$, $y=8-x^2$.

5.278. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

Не вычисляя интеграла, определить его знак:

5.279. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$.

5.280. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^7 x dx$.

5.281. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x dx$.

5.282. $\int_{-1}^0 x e^{-x^2} dx$.

Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из двух больше:

5.283. $\int_0^{\frac{1}{2}} x^3 dx$ или $\int_0^{\frac{1}{2}} x^5 dx$.

5.284. $\int_1^3 x^2 dx$ или $\int_1^3 x^4 dx$.

5.285. $\int_0^1 2^{x^2} dx$ или $\int_0^1 2x^3 dx$.

5.286. $\int_1^2 \ln x dx$ или $\int_1^2 \ln^2 x dx$.

Пользуясь следствием из свойства 2, оцените интегралы:

5.287. $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

5.288. $\int_0^4 \frac{dx}{2+\cos^4 x}$.

Найти производную от функции:

5.289. $y=\int_1^x \frac{\sin t dt}{t}$ при $x=\pi$.

5.290. $y=\int_0^x \frac{1-t+t^2}{1+t^2+t^3}dt$ при $x=1$.

Не вычисляя интеграла, найти точки экстремума функции:

5.291. $y=\int_0^x \left(t^2-4t\right)dt$.

5.292. $y=\int_0^x \left(3+2t-t^2\right)dt$.

Пользуясь формулой Ньютона - Лейбница, вычислить интегралы:

5.293. $\int_1^3 \left(x^2+2x+5\right)dx$.

5.294. $\int_{-1}^2 \left(x^3-x^4\right)dx$.

5.295. $\int_2^3 \frac{x^2+\sqrt[3]{x}+1}{x}dx$.

5.296. $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}dx$.

5.297. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$.

5.298. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 2x dx$.

5.299. $\int_1^2 e^{3x+2}dx$.

5.300. $\int_{-1}^1 2^{-5x}dx$.

5.301. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx$.

5.302. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$.

5.303. $\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}$.

5.304. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$.

5.305. $\int_0^{\pi} \sin 2x \cos 3x dx$.

5.306. $\int_0^{\pi} \cos x \cos 5x dx$.

5.307. $\int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt$.

5.308. $\int_2^3 \frac{du}{\sqrt[3]{u-1}}$.

Найти среднее значение функции y на отрезке:

5.309. $y=\frac{1}{x^2+4x+5}$, $[-3,-1]$.

5.310. $y=\frac{1}{x^2-5x+6}$, $[0,1]$.

5.311. $y=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, $[1,4]$.

5.312. $y=\frac{1}{x}\ln x$, $[1,e]$.

Найти интегралы, пользуясь заменой переменной в определенном интеграле:

5.313. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$.

5.314. $\int_3^8 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$.

5.315. $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

5.316. $\int_0^3 \frac{x+1}{\sqrt{4-x}}dx$.

5.317. $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}dx$.

5.318. $\int_2^3 \sqrt{4x-x^2-3}dx$.

5.319. $\int_1^3 x(2-x)^{11}dx$.

5.320. $\int_1^2 x^2(3-x)^{-10}dx$.

Найти интегралы, применяя формулу интегрирования по частям:

5.321. $\int_1^e \ln x dx$.

5.322. $\int_1^2 x \ln x dx$.

5.323. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$.

5.324. $\int_0^{\pi} x \cos x dx$.

5.325. $\int_{-1}^1 xe^{-x}dx$.

5.326. $\int_{-1}^1 x^2e^x dx$.

5.327. $\int_0^1 \arcsin x dx$.

5.328. $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$.

Задачи повышенной сложности

Вычислить интегралы:

5.329. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

5.330. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$.

5.331. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$.

5.332. $\int_0^{\pi} (x\cos x)^2 dx$.

5.333. $\int_1^e \sin(\ln x)dx$.

5.334. $\int_1^e \cos(\ln x)dx$.

5.335. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$. 5.336. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

5.337. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$. 5.338. $\int_0^{\ln 5} e^x \sqrt{e^x - 1}\,dx$.

5.339. Доказать, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ иррационально}, \\ 1, \text{ если } x \text{ рационально} \end{cases}.$$

не интегрируема на любом отрезке $[a,b]$.

5.340. Функция $|f(x)|$ интегрируема на $[a,b]$. Следует ли отсюда, что $f(x)$ тоже интегрируема на $[a,b]$?

5.341. Доказать, что если $f(x)$ непрерывная четная функция на $[-l,l]$, то $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_0^{l} f(x)dx$.

5.342. Доказать, что если $f(x)$ непрерывная нечетная функция на $[-l,l]$, то $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$.

§4. Геометрические приложения определенных интегралов

1. Вычисление площадей плоских фигур. Площадь S плоской фигуры, ограниченной сверху и снизу двумя непрерывными кривыми $y_2(x) \ge y_1(x)$ и с боков прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, равна

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx.$$

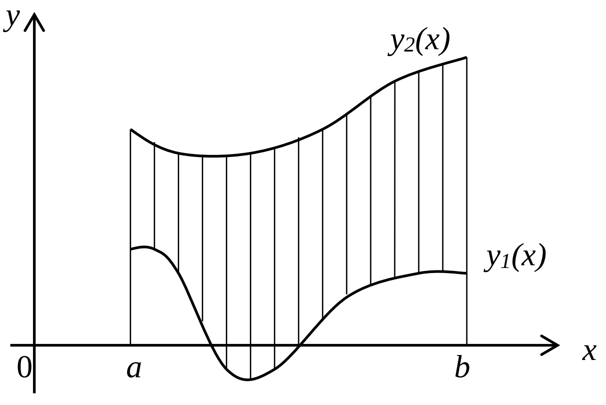


Рис. 2

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{1+x^2}$ и $y = \frac{x^2}{2}$.

◄ Кривые пересекаются при $x = \pm 1$.

$$S = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$ ►

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью Ox, с боков прямыми $x = a$ и $x = b$ и сверху непрерывной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ (причем $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$) равна

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

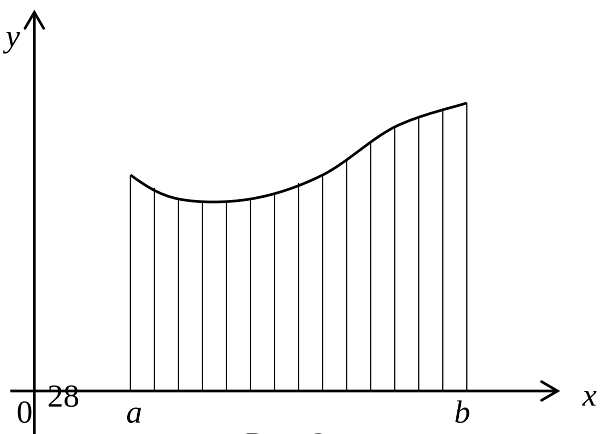


Рис. 3

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

◀ В силу симметрии фигуры относительно осей Ox и Oy

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\left(-a\sin t\right)dt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt = 2ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)dt = 2ab\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$= \pi ab$. ▶

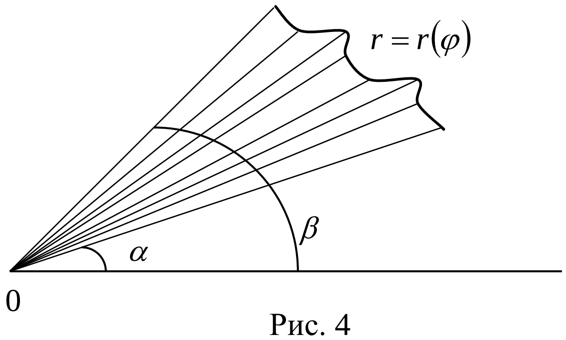


Рис. 4

Площадь в полярных координатах. Площадь фигуры (криволинейного сектора), ограниченной графиком непрерывной функции $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, равна

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi .$$

Пример 3. Найти площадь сектора, ограниченного кривой $r = \operatorname{tg}\varphi$ и лучом $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

◀ $S = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}-1\right)d\varphi = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\varphi-\varphi\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$. ▶

Найти площади фигур, ограниченных линиями, заданными в прямоугольных координатах:

5.343. $y = x^2 - 4x$, $y = 2x - x^2$.

5.344. $y = x^2 - 2x + 2$, $y = x$.

5.345. $y = \frac{1}{x}$, $2x + 2y = 5$.

5.346. $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 2$.

5.347. $y = \sin^2 x$, $y = 0$, $(0 \le x \le 2\pi)$.

5.348. $y = \cos^2 x$, $y = 0$, $x = 0$, $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$.

5.349. $y = x\ln x$, $y = 0$, $(1 \le x \le 2)$.

5.350. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.

5.351. $y = e^{x/2}$, $y = e^{-x/2}$, $x = 2$.

5.352. $y = xe^{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$.

5.353. $y = \frac{x^2}{3}$, $y = \frac{1}{2+x^2}$.

5.354. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{1}{2}$.

5.355. $y = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

5.356. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, $y=0$, $x=9$.

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрически:

5.357. $x=2\cos t$, $y=3\sin t$.

5.358. $x-1=4\cos t$, $y+1=\sin t$.

5.359. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ (арка циклоиды) $y=0$.

5.360. $x=1-\cos t$, $y=t-\sin t$, $(0\le t\le 2\pi)$, $x=0$.

5.361. $x=3\cos^3 t$, $y=3\sin^3 t$ (астроида).

5.362. $x=1+a\cos^3 t$, $y=2+a\sin^3 t$.

5.363. $x=\cos^3 t$, $y=\sin^2 t$, $\left(0\le t\le \dfrac{\pi}{2}\right)$, $x=0$, $y=0$.

5.364. $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $\left(0\le t\le \dfrac{\pi}{3}\right)$, $x=1$, $y=0$.

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах:

5.365. $r^2=a^2\cos 2\varphi$ (лемниската).

5.366. $r^2=\sin 2\varphi$.

5.367. $r=a(1+\cos\varphi)$ $(a>0)$ (кардиоида).

5.368. $r=3(1-\sin\varphi)$.

5.369. $r=3\sin 3\varphi$.

5.370. $r=2\cos 3\varphi$.

5.371. $r=1-\varphi^2$.

5.372. $r=\varphi^2$ $(0\le\varphi\le\pi)$, $\varphi=\pi$.

5.373. $r=e^{\varphi}$ $\left(-\pi\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\varphi=-\pi$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

5.374. $r=\dfrac{1}{\varphi}$ $\left(\dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

Задачи повышенной сложности

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

5.375. $y=\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$.

5.376. $y=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

5.377. $x=3t^2$, $y=3t-t^3$.

5.378. $x=t^2-1$, $y=t^3-t$.

5.379. $(y-\arcsin x)^2=x-x^2$.

5.380. $y^2=x^2-x^4$.

5.381. $r=\sin n\varphi$.

5.382. $r=\cos n\varphi$.

5.383. $x^2 = y(1-y^2)$. 5.384. $y^2 = (1-x^2)^3$.

5.385. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$, касательной к ней в точке $x = e$ и осью *Ox*.

5.386. В каком отношении парабола $y^2 = 2x$ делит площадь круга $x^2 + y^2 = 8$?

5.387. Как найти в полярных координатах площадь криволинейного сектора $\{(r,\varphi): 0 \le r \le r(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta\}$, если функция $r = r(\varphi)$ задана неявно с помощью обратной функции $\varphi = \varphi(r)$, где $\varphi(r)$ и $\varphi'(r)$ - непрерывные функции?

5.388. Найти площадь сектора, ограниченного кривой $\varphi = r \operatorname{arctg} r$ и двумя лучами - $\varphi = 0$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

2. Вычисление длин дуг кривых. Пусть *AB* – дуга кривой на плоскости или в пространстве. Возьмем на *AB* последовательность точек в определенном направлении (от *A* к *B* или от *B* к *A*), например, $M_0 = A, M_1, ..., M_{n-1}, M_n = B$. Соединив последовательно взятые точки отрезками, получим ломаную линию $M_0M_1...M_{n-1}M_n$, вписанную в дугу *AB*. *Длиной* кривой *AB* называется предел длин вписанных в *AB* ломаных, когда длина наибольшего звена ломаной стремится к нулю (если предел при этом существует и не зависит от выбора точек ломаной). Кривая, имеющая конечную длину, называется *спрямляемой*.

а) Если кривая задана уравнением $y = y(x)$ и $y'(x)$ непрерывная функция, то длина *l* дуги этой кривой равна

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y(x)^2}\, dx,$$

где *a* и *b* – абсциссы концов дуги.

Пример 4. Найти длину кривой $y = x^{3/2}$ $(0 \le x \le 1)$.

◀ $$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{4}{9}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^1 = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}.$$ ▶

б) Длина кривой, заданной параметрически. Если плоская кривая задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$ и $x'(t)$, $y'(t)$ - непрерывные функции на $[t_1, t_2]$, то длина *l* этой кривой равна

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

Если кривая в пространстве задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$ и $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ - непрерывные функции на $[t_1, t_2]$, то длина *l* этой кривой равна

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt.$$

Пример 5. Найти длину кривой $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ $(1 \le t \le 2)$.

◀ $l = \int_1^2 \sqrt{\left(e^t \cos t - e^t \sin t\right)^2 + \left(e^t \sin t + e^t \cos t\right)^2 + \left(e^t\right)^2}\,dt =$

$$= \int_1^2 e^t \sqrt{3}\,dt = \sqrt{3}e^t \Big|_1^2 = \sqrt{3}e(e-1).$$ ▶

в) Длина кривой в полярных координатах. Если кривая задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$ и $r'(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, то длина l этой кривой равна

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'(\varphi)^2}\,d\varphi\,.$$

Пример 6. Найти длину дуги логарифмической спирали $r = e^\varphi$ $(-1 \le \varphi \le 1)$.

◀ $l = \int_{-1}^1 \sqrt{\left(e^\varphi\right)^2 + \left(e^\varphi\right)^2}\,d\varphi = \int_{-1}^1 \sqrt{2}e^\varphi d\varphi = \sqrt{2}e^\varphi \Big|_{-1}^1 = \sqrt{2}\left(e - \frac{1}{e}\right).$ ▶

Найти длины дуг следующих кривых:

5.389. $y = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$ $(1 \le x \le 4)$.

5.390. $y = 1 + \frac{2}{3}(x-2)^{3/2}$ $(2 \le x \le 10)$.

5.391. $(y+1)^2 = x^3$ $(0 \le x \le 1)$.

5.392. $(y-2)^2 = \frac{4}{9}(x-1)^3$ $(1 \le x \le 2)$.

5.393. $y = 1 - \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(-1 \le x \le 1)$.

5.394. $y = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$ $(0 \le x \le 1)$.

5.395. $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi)$ (дуга развертки окружности).

5.396. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(t - \cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ (арка циклоиды).

5.397. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ (астроида).

5.398. $\begin{cases} x = 1 + \sin^3 t \\ y = 2 + \cos^3 t \end{cases}$.

Найти длину петли кривой:

5.399. $x = t^2$, $y = t - \dfrac{t^3}{3}$.

5.400. $x = \dfrac{t}{3} - t^3$, $y = t^2$.

Найти длины пространственных кривых:

5.401. $x = t^2$, $y = t + \dfrac{t^3}{3}$, $z = t - \dfrac{t^3}{3}$, $\left(0 \le t \le \sqrt{3}\right)$.

5.402. $\begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \quad (0 \le t \le 1). \\ z = e^{-t} \end{cases}$

Найти длину кардиоиды:

5.403. $r = 1 - \cos\varphi$.

5.404. $r = a(1 + \sin\varphi),\ (a > 0)$.

Найти длины кривых:

5.405. $r = 2\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$.

5.406. $r = e^{-\varphi/2}\ (0 \le \varphi \le 1)$.

5.407. $r = 1 - \varphi^2$.

5.408. $r = \varphi^2\ \left(0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Задачи повышенной сложности

Найти длины дуг кривых:

5.409. $y = \ln\cos x\ \left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}\right)$.

5.410. $y = \ln\sin x\ \left(\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

5.411. $y = x^2\ (-2 \le x \le 2)$.

5.412. $y = 1 - x^2 - 2x\ (-1 \le x \le 0)$.

5.413. $x = \cos^4 t,\ y = \sin^4 t$.

5.414. $|x| = \cos^5 t,\ |y| = \sin^5 t$.

5.415. $r = a\varphi\ (0 \le \varphi \le 2\pi,\ a > 0)$.

5.416. $r = -\dfrac{\varphi}{2}\ (-\pi \le \varphi \le 0)$.

3. Вычисление объемов.

а) Вычисления объема тела по известным поперечным сечениям. Если площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси *Ox*, является непрерывной функцией на отрезке $[a,b]$, то объем тела равен

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Пример 7. Найти объем тела, ограниченного поверхностью эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

◄ Сечение тела плоскостью $x = h$ представляет собой фигуру, ограниченную эллипсом $\dfrac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)} + \dfrac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)} = 1$. Параметрически этот эллипс задается уравнениями $y = b\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{a^2}}\cos t$, $z = c\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{a^2}}\sin t$. Площадь сечения (см. пример 2) такого эллипса равна $S(h) = \pi cb\left(1 - \dfrac{h^2}{a^2}\right)$. Тогда $V = \int_{-a}^{a} \pi cb\left(1 - \dfrac{h^2}{a^2}\right)dh = \pi cb\left(h - \dfrac{h^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \dfrac{4}{3}\pi abc$. ►

б) Объем тела вращения. Объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции $a \le x \le b$, $0 \le y \le y(x)$, где $y(x)$ непрерывная на $[a,b]$ функция, равен

$$V=\pi\int_a^b y^2(x)dx.$$

Пример 8. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $0\le x\le 1$, $0\le y\le\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

◀ $V=\pi\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}=\pi\,\mathrm{arctg}x\Big|_0^1=\dfrac{\pi^2}{4}$. ▶

5.417. Найти объем тела, ограниченного плоскостью $z=H$ и эллиптическим параболоидом $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$.

5.418. Найти объем тела, ограниченного плоскостями $z=0$, $z=1$ и однополостным гиперболоидом $x^2+y^2-z^2=1$.

Найти объемы тел, образованных вращением вокруг оси Ox следующих криволинейных трапеций:

5.419. $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le y\le\cos^2 x$.

5.420. $0\le x\le\pi$, $0\le y\le\sin x$.

5.421. $e\le x\le e^2$, $0\le y\le\ln x$.

5.422. $1\le x\le 2$, $0\le y\le e^{-x}$.

5.423. $1\le x\le 2$, $\dfrac{1}{x}\le y\le\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

5.424. $0\le x\le 1$, $e^{-x}\le y\le e^{x}$.

Задачи повышенной сложности

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями, полученными при вращении вокруг оси Ox дуг следующих линий:

5.425. $x=\sin^3 t$, $y=4\cos^3 t$.

5.426. $x=3\cos t$, $y=2\sin t$.

5.427. $x=t^2$, $y=t-t^3$, $x<1$.

5.428. $x=1-t^2$, $y=t^3-t$, $x>0$.

5.429. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $0\le a\le x\le b$, $0\le y\le y(x)$, где $y(x)$ - непрерывная функция, равен

$$V_y=2\pi\int_a^b xy(x)dx.$$

5.430. Доказать, что объем тела. образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры $0\le a\le x\le b$, $y_1(x)\le y\le y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - непрерывные функции, равен

$$V_y=2\pi\int_a^b x(y_2(x)-y_1(x))dx.$$

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейных трапеций

5.431. $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \sin x$ 5.432. $0 \le x \le 1$, $e^{-x} \le y \le e^{x}$

5.433. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси плоской фигуры $o \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi$, $0 \le r \le r(\varphi)$, где $r(\varphi)$ - непрерывная функция, равен

$$V = \frac{2\pi}{3} \int r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi .$$

5.434. Найти объем тела, образованного вращением кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$ вокруг полярной оси.

§5. Приложения определенных интегралов к решению задач механики и физики

1. Вычисление моментов. Координаты центра масс. *Статический момент* материальной точки массы *m*, лежащей на координатной оси и имеющей координату *x* равен $m \cdot x$. Статические моменты M_x и M_y точки массы *m*, лежащей на плоскости и имеющей координаты (x, y), относительно оси *Ox* и оси *Oy* равны соответственно $M_x = m \cdot y$ и $M_y = m \cdot x$. Аналогично в пространстве определяются статические моменты точки относительно координатных плоскостей.

Момент инерции материальной точки массы *m* относительно точки *A* (относительно прямой *l*, относительно плоскости *p*) равен произведению массы точки на квадрат расстояния ее до точки *A* (до прямой *l*, до плоскости *p*, соответственно).

Статические моменты и моменты инерции системы материальных точек равны сумме соответствующих моментов точек, составляющих эту систему. Это позволяет получить формулы для вычисления моментов материального отрезка – стержня, некоторых кривых, плоских фигур и пространственных тел с помощью определенных интегралов. Центр масс системы материальных точек на прямой равен $\frac{M}{m}$, где *M* - статический момент системы, а *m* – масса системы.

Для точек на плоскости и в пространстве точка *C* – центр масс имеет координаты $x_C = \frac{M_y}{m}$, $y_C = \frac{M_x}{m}$ в плоском случае и в пространственном случае $x_C = \frac{M_{yz}}{m}$, $y_C = \frac{M_{xz}}{m}$, $z_C = \frac{M_{xy}}{m}$, где в числителях стоят статические моменты относительно соответствующих координатных плоскостей.

Так, для стержня $[a, b]$ с линейной плотностью $\rho(x)$ статический момент *M* и момент инерции I_0 относительно точки $O(0)$ вычисляются по формулам

$$M = \int_a^b x\rho(x)dx,\ I_0 = \int_a^b x^2 \rho(x)dx,$$

а момент инерции I_A относительно точки $A(x_0)$ - по формуле

$$I_A = \int_a^b (x - x_0)^2 \rho(x)dx .$$

Пример 1. Найти центральный момент инерции стержня $[0,1]$, $\rho(x)=x^2$ (т.е. момент инерции относительно центра масс стержня).

◀ Найдем сначала массу, статический момент и центр масс стержня. Масса m стержня равна

$$m=\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3};$$

статический момент M стержня равен

$$M=\int_0^1 x\cdot x^2dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}.$$

Тогда центр масс стержня имеет координату $x_C=\frac{M}{m}=\frac{3}{4}$.

Теперь найдем центральный момент инерции стрежня:

$$I_C=\int_0^1\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\cdot x^2dx=\int_0^1\left(x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{16}x^2\right)dx=\frac{1}{5}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{80}. \ ▶$$

5.435. Найти массу стержня $[1,9]$, если его линейная плотность $\rho(x)=\sqrt{x}+1$.

5.436. Найти массу стержня длины 5м, если его линейная плотность меняется по закону $\rho=\frac{10}{1+x}\,{}^{кг}\!/_{м}$, где x – расстояние от одного из концов стержня.

5.437. Найти центр масс стержня $[-1,5]$, если его линейная плотность $\rho(x)=|x|+2$.

5.438. Найти статический момент стержня $[-2,4]$, если его линейная плотность $\rho(x)=\frac{1}{|x|+2}$.

5.439. Найти центральный момент инерции стержня $[0,6]$, если его линейная плотность $\rho(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

5.440. Найти момент инерции стержня $[0,1]$ относительно начала координат, если его линейная плотность $\rho(x)=\frac{1}{x+1}$.

Задачи повышенной сложности

Пусть $ABCD$ – криволинейная трапеция, ограниченная с боков прямыми $x=a$, $x=b$ и сверху и снизу графиками функции $y=f_2(x)$, $y=f_1(x)$, соответственно. Поверхностную плотность этой фигуры будем считать равной единице.

5.441. Найти момент инерции $ABCD$ относительно оси Oy.

5.442. Найти статический момент $ABCD$ относительно оси Oy.

5.443. Найти момент инерции фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ относительно осей координат.

5.444. Найти момент инерции криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ относительно оси *Oy*.

5.445. Найти центр масс полукруга $x^2 + y^2 \le a^2$, $y \ge 0$.

5.446. Найти статический момент фигуры, ограниченной линиями $y = 1$, $y = x^2$, $x = 0$ относительно оси *Oy*.

5.447. Пусть дуга *l* кривой задана уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, и имеет линейную плотность $\rho = \rho(x)$. Покажите, что статические моменты этой дуги относительно координатных осей *Ox* и *Oy* равны

$$M_x = \int_a^b \rho(x) f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

$$M_y = \int_a^b \rho(x) x \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

а масса равна

$$m = \int_a^b \rho(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Напишите формулы для определения координат центра масс.

5.448. Покажите, что моменты инерции дуги относительно осей *Ox* и *Oy* равны

$$I_x = \int_a^b \rho(x) f^2(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

$$I_y = \int_a^b \rho(x) x^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

В задачах, где не указана плотность, считаем $\rho = 1$.

5.449. Найти координаты центра масс первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

5.450. Найти центр масс дуги параболы $y = x^2$, $-1 \le x \le 1$, если $\rho(x) = \sqrt{1 + 4x^2}$.

5.451. Найти момент инерции полуокружности радиуса *R* относительно ее диаметра.

5.452. Найти момент инерции дуги линии $y = e^x$, $0 \le x \le 1$, относительно оси *Ox*.

5.453. Найти центр масс полушара радиуса *R*.

5.454. Найти момент инерции цилиндра с радиусом основания *R* и высотой *H* относительно его оси.

2. Физические задачи.

5.455. Поезд в метро движется с ускорением $1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ и имеет в начальный момент времени нулевую скорость. Какой путь пройдет поезд за одну минуту от начала движения?

5.456. Скорость точки меняется по закону $v=\frac{t}{1+t^2}$. Какой путь пройдет точка за промежуток времени от t_1 до t_2?

5.457. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть упругую пружину на 10см, если сила в 1Н растягивает эту пружину на 1см? (По закону Гука сила пропорциональна растяжению пружины.)

5.458. Найти работу силы $F(x)=\frac{1}{x^2-2x+5}$ вдоль отрезка $[1,3]$.

5.459. За какое время опорожнится наполненный водой кубический бак со стороной 1м через круглое отверстие в дне диаметром 2см? (По закону Торричелли скорость истечения воды из сосуда равна $v=c\sqrt{2gh}$, где g – ускорение силы тяжести, h – высота уровня жидкости над отверстием и $c=0{,}6$ - опытный коэффициент.)

5.460. Коническая воронка высотой H=20см наполнена водой. Радиус верхнего отверстия R=12см. Нижнее отверстие, через которое вода вытекает из воронки имеет радиус 0,3см. В течение какого времени уровень воды в воронке понизится на 5см? Когда воронка опорожнится?

5.461. Скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству. Как меняется масса радия в зависимости от времени, если в начальный момент его масса m_0 и за 1600 лет его количество уменьшается в два раза?

5.462. Скорость размножения бактерий при благоприятных условиях растет пропорционально их количеству. В начальный момент масса бактерий была m_0. Считая коэффициент пропорциональности k известным, найти за какое время масса бактерий удвоится.

5.463. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду, наполняющую полусферический резервуар радиуса R=1м.

5.464. Размеры пирамиды Хеопса приблизительно таковы: высота 140м, сторона квадрата основания 200м. Плотность камня, из которого она сделана, $2500\frac{кг}{м^3}$. Вычислить работу, затраченную на преодоление силы тяжести при постройке пирамиды.

5.465. Найти кинетическую энергию однородного шара радиуса R и плотности γ, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра.

5.466. Найти кинетическую энергию серебряного цилиндра с радиусом основания 2см и высотой 5см, вращающегося в угловой скоростью 1 оборот/с (плотность серебра $10{,}5 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$).

5.467. Напряжение в электрической цепи равномерно увеличивается в течение минуты от 100В до 120В. Найти среднюю силу тока за это время, если сопротивление в цепи 10 Ом.

5.468. Закон изменения напряжения синусоидального тока, имеющего частоту ω, дается формулой $E = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где E_0 - максимальное напряжение, φ - фаза, t время. Найти среднее значения квадрата напряжения за один период.

Для характеристики социально – экономического строения общества применяются кривая Лоренца и коэффициент Джинни.

Рассмотрим функцию $L(x)$, которая показывает, что x-я часть самых бедных людей общества владеет $L(x)$-ой частью всего общественного богатства. При этом все общество и все богатство соответствуют значениям $x = 1$ и $L(x) = 1$. Если богатство распределено равномерно, то $L(x) = x$. Понятно, что всегда $L(x) \le x$. Функция $L(x)$ называется функцией Лоренца, ее график – кривой Лоренца. Чем больше площадь между $L(x)$ и x, тем неравномернее распределено богатство в обществе. Величина этой площади и называется коэффициентом Джинни.

5.469. Найдите коэффициент Джинни, если функция Лоренца $L(x) = x^3$.

5.470. Найдите коэффициент Джинни, если функция Лоренца $L(x) = x^5$.

§6. Несобственные интегралы

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $[a,+\infty)$ и интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует на каждом конечном отрезке $[a,b]$, $b \ge a$. Тогда по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

При этом, если предел в правой части формулы (1) существует и конечен, то говорят, что *несобственный интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится*, а если предел бесконечен или не существует, то несобственный интеграл называется *расходящимся*.

Если $F(x)$- первообразная функции $f(x)$ на $[a,+\infty)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\left(F(b)-F(a)\right) = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty)-F(a),$$

где по определению $F(+\infty) = \lim_{b\to+\infty} F(b)$.

Пример 1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$, $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$, $\int_0^{+\infty}\cos x dx$.

◀ $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1$,

$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x\Big|_0^{+\infty} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{2}$,

$\int_0^{+\infty}\cos x dx = \lim_{b\to+\infty}\sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\sin b$ - интеграл расходится, т.к. $\lim_{b\to+\infty}\sin b$ не существует. ▶

Аналогично определяются несобственные интегралы

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx .$$

В последнем случае

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx,$$

где c – произвольное число, и интеграл слева сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из интегралов справа.

Пример 2. Вычислить несобственные интегралы $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

◀ $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_a^0 = 0 - \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x = \frac{\pi}{2}$;

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \pi$. ▶

Теорема. *Если* $f(x)\ge 0$ *на* $[a,+\infty)$ *и для некоторого K>0 имеем* $\int_a^b f(x)dx \le K$ *(для всякого* $b\ge a$*), то* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится.*

Признак сравнения для несобственных интегралов.

Пусть $0\le f(x)\le g(x)$ *на* $[a,+\infty)$ *(*$f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на каждом отрезке* $[a,b]$, $b>a$*). Тогда, если* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *сходится, то сходится и* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, *причем* $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$. *Если* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *расходится, то расходится и* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

В качестве интеграла, с которым производится сравнение, нередко используется интеграл вида $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Пример 3. Выяснить, сходится ли $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \cos^2 x}$.

◂ Заметим, что $\frac{1}{x^2 + \cos^2 x} \le \frac{1}{x^2 + \frac{1}{4}}$ на $[0,1]$ и $\frac{1}{x^2 + \cos^2 x} < \frac{1}{x^2}$ на $[1,+\infty)$. Так как $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \cos^2 x}$ тоже сходится и $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \cos^2 x} \le \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \frac{1}{4}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, т.е. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \cos^2 x}$ тоже сходится. ▸

Теорема. *Если* $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *сходится, то сходится и* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *(в предположении, что* $f(x)$ *интегрируема на каждом отрезке* $[a,b]$, $b > a$*).*

Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Таким образом, теорема говорит о том, что абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *условно сходящимся*, если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится.

Примером условно сходящегося интеграла является $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$.

Пример 4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 + \cos^2 x}$.

◂ Заметим, что $\left|\frac{\sin x}{x^2 + \cos^2 x}\right| \le \frac{1}{x^2 + \cos^2 x}$ и, учитывая признак сравнения и пример 3, получим, что $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2 + \cos^2 x}\right| dx$ сходится и, значит, исходный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 + \cos^2 x}$ абсолютно сходится. ▸

Аналогичные определения и теоремы имеют место и для интегралов $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

5.471. $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx$.

5.472. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$.

5.473. $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^4}$.

5.474. $\int_1^{+\infty} \frac{x^3 dx}{1+x^8}$.

5.475. $\int_1^{+\infty} \sin x dx$.

5.476. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$.

5.477. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

5.478. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

5.479. $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx$.

5.480. $\int_{-\infty}^{1} e^{2x} dx$.

5.481. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{4+x^6}$.

5.482. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{9+x^{10}}$.

Исследовать на сходимость интегралы:

5.483. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)}}$.

5.484. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+x^2+1}$.

5.485. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

5.486. $\int_1^{+\infty} \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+5)\sqrt[3]{x}}$.

5.487. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}$.

5.488. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$.

Доказать, что следующие интегралы абсолютно сходятся:

5.489. $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2-1}$.

5.490. $\int_3^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2-2x}$.

5.491. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\frac{1}{1+4x^2}$ и осью *Ox*.

5.492. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\frac{1}{9+x^2}$ и $y=\frac{-1}{1+x^2}$.

5.493. Найти длину дуги логарифмической спирали $r=e^{\varphi}$, находящейся внутри окружности $r=1$.

5.494. Найти длину дуги кривой $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$ $(t \ge 0)$.

5.495. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ и осью *Ox*.

5.496. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = x^{-\frac{3}{4}}$, осью Ox и прямой $x = 1$ $(x \geq 1)$.

Задачи повышенной сложности

5.497. Доказать, что если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty} Af(x)dx$, где A – действительное число, и $\int_a^{+\infty} Af(x)dx = A\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

5.498. Доказать, что если интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} (f(x)+g(x))dx$, и $\int_a^{+\infty} (f(x)+g(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx$.

5.499. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

5.500. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ ограничена?

5.501. Функции $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на $[a,+\infty)$, $\int_a^{+\infty} v(x)u'(x)dx$ сходится и существуем конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty} u(b)\cdot v(b)$. Доказать, что интеграл $\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)$ тоже сходится и $\int_a^{+\infty} u(x)v'(x) = \lim\limits_{b\to\infty} (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int_a^{+\infty} v(x)u'(x)dx$. Это - формула интегрирования по частям для несобственного интеграла.

5.502. Написать и доказать формулу, аналогичную формуле предыдущего номера для интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)u'(x)dx$, указав условия на $u(x)$ и $v(x)$.

Вычислить несобственные интегралы:

5.503. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$. 5.504. $\int_1^{+\infty} (2x+1)e^{-3x}dx$.

5.505. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$. 5.506. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3-1}$.

Исследовать на сходимость интегралы:

5.507. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$. 5.508. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx$.

(Указание. Воспользуйтесь формулой интегрирования по частям полагая $u=\frac{1}{x}$.)

5.509. $\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}dx$. 5.510. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

5.511. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$. 5.512. $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$.

2. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a,b]$, интеграл $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ существует для каждого $0<\varepsilon\le b-a$, и $f(x)$ не ограничена на $(a,b]$ (например, $f(x)$ непрерывна на $(a,b]$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$). Тогда по определению

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (2)$$

При этом, если предел в правой части формулы (2) существует и конечен, то говорят, что *несобственный интеграл* (от неограниченной функции) $\int_a^b f(x)dx$ *сходится*, а если предел бесконечен или не существует, то несобственный интеграл называется *расходящимся*.

Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на $(a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to +0}\left(F(b)-F(a+\varepsilon)\right)=F(x)\Big|_{a+0}^{b}=F(b)-F(a+0),$$

где по определению $F(a+0)=\lim\limits_{\varepsilon\to +0}F(a+\varepsilon)$.

Пример 5. Вычислить $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

◀ $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{\varepsilon\to +0}2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{1}=2-\lim\limits_{\varepsilon\to +0}2\sqrt{\varepsilon}=2$. ▶

Аналогично определяется несобственный интеграл от функции, неограниченной на полуинтервале $[a,b)$ с особенностью в точке *b*, т.е. на каждом отрезке $[a,b-\varepsilon]$ ($\varepsilon>0$, $\varepsilon<b-a$) функция $f(x)$ интегрируема:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to +0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет особенность в точке $c\in[a,b]$, т.е. $f(x)$ неограниченна на $[a,c)$ и $(c,b]$, но интегрируема на каждом из отрезков $[a,c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon,b]$, где $\varepsilon>0$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to +0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\delta\to +0}\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx.$$

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из несобственных интегралов $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$.

Рассматриваются также интегралы от неограниченных функций на отрезке или интервале, в том числе бесконечном, с конечным числом особенностей.

Признаки сходимости и понятия абсолютной и условной сходимости аналогичны рассмотренным в п.1.

В качестве интеграла, с которым производится сравнение, нередко используется интеграл вида $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, который сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

5.513. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. 5.514. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.

5.515. $\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}}$. 5.516. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

5.517. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2+x-2}$. 5.518. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$.

5.519. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 5.520. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

5.521. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x\ln^2 x}$. 5.522. $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

Задачи повышенной сложности

Как понимается следующий несобственный интеграл

5.523. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(x^2+1\right)}$. 5.524. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.

5.525. Функции $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны и неограниченны на $(a,b]$, $\int_a^b v(x)u'(x)dx$ сходится и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a+0} u(x)v(x)$. Доказать, что интеграл $\int_a^b u(x)v'(x)$ тоже сходится и

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_{a+0}^{b} - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

5.526. Доказать формулу, аналогичную формуле предыдущего номера для $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ для функций, определенных на $[a,b)$, указав соответствующие условия на $u(x)$ и $v(x)$.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

5.527. $\int_0^{\pi} \operatorname{tg} x dx$.

5.528. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$.

5.529. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

5.530. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

5.531. $\int_0^1 \ln x dx$.

5.532. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x)dx$.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы:

5.533. $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$.

5.534. $\int_0^1 \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx$.

Глава 6
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Основные понятия

1. Понятие функции нескольких переменных. Всякий упорядоченный набор из *n* действительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ обозначается $(x_1, x_2, ..., x_n)$ или $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и называется *точкой n-мерного пространства* $\mathbf{R^n}$; числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются *координатами* точки *P*.

Пусть $D \subset \mathbf{R^n}$ - произвольное множество точек. Если каждой точке $P(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ поставлено в соответствие некоторое определенное действительное число $f(P) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, то говорят, что на множестве D зада*на числовая функция* f от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Множество D называется *областью определения функции* и обозначается *D(f)* или просто D. Число $u = f(P)$ называется *значением функции в точке* P. Множество всех значений функции обозначается $E(f)$ или просто *E*.

Геометрическими изображениями пространств $\mathbf{R^2}$ и $\mathbf{R^3}$ являются (координатная) плоскость и (координатное) пространство соответственно, поэтому в случае двух (трех) переменных область определения функции $z = f(x, y)$ $(u = f(x, y, z))$ геометрически представляет собой некоторое множество точек на плоскости (в пространстве). *Графиком функции* $z = f(x, y)$ называется множество точек (x, y, z) в пространстве, таких, что $(x, y) \in D(f)$, а $z = f(x, y)$. Обычно график функции двух переменных представляет собой некоторую поверхность.

К простейшим функциям нескольких переменных относятся *линейная функция* $u = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$ (называемая *линейной формой при b=0*) и *квадратичная функция* $u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c$ (называемая *квадратичной формой* при $b_1 = b_2 = ... = b_n = c = 0$), где хотя бы одно из чисел a_{ij} отлично от нуля. Например, линейная функция двух переменных имеет вид $z = Ax + By + C$ (график – плоскость); квадратичная форма от трех переменных $u = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz$.

Пример 1. Найти $z\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$, если $z = \cos x \cdot \cos y$.

◂ $z\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. ▸

Пример 2. Найти область определения функции $z = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$, $R = const$.

◂ $D:\ x^2+y^2-R^2\geq 0,\ \ x^2+y^2\geq R^2$. Найденная область определения представляет собой при $R\neq 0$ плоскость *xy*, исключая внутренние точки круга радиуса $|R|$ с центром в начале координат, и всю плоскость *xy* при $R=0$. ▸

Пример 3. Найти область определения функции $u=\sqrt{R^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}$, $R=const$.

◂ $D:\ R^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq 0$,

$x^2+y^2+z^2\leq R^2$.

Найденная область определения представляет собой при $R\neq 0$ шар радиуса $|R|$ с центром в начале координат и точку $(0, 0, 0)$ при $R=0$. ▸

Найти и построить области определения функций двух переменных:

6.1. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

6.2. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$.

6.3. $z=\ln\left(-x-y\right)$.

6.4. $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

6.5. $z=y\cdot\sqrt{\cos x}$.

6.6. $z=x\cdot\sqrt{\sin y}$.

6.7. $z=\arcsin\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$.

6.8. $z=\arccos\left(x-y^2\right)$.

Построить графики функций:

6.9. $z=\sqrt{16-4(x-2)^2-16y^2}$.

6.10. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

6.11. $z=x^2+\dfrac{y^2}{4}$.

6.12. $z=x^2-y^2$.

Найти и описать области определения функций трех переменных:

6.13. $u=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$.

6.14. $u=\ln\left(1-x^2-y^2+z^2\right)$.

Найти множества значений функций:

6.15. $z=4+x^2+y^2$.

6.16. $z=4-x^2-y^2+2x-4y$.

6.17. $z=2^{-\sqrt{xy}}$.

6.18. $z=e^{x^2\cdot y^2}$.

6.19. $u=x^2+y^2+z^2-4x+6y+2z$.

6.20. $u=\sqrt{xy+z}-1$.

6.21. Дана функция $z=\dfrac{2x-3y}{3x-2y}$. Найти $z\ (2;\ 1)$, $z\ (1;\ 2)$, $z(3;\ 2)$; $z(a;\ a)$, $z(a;\ -a)$.

6.22. Дана функция $z=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$. Найти $z(-3;\ 4)$; $z\left(1;\ \dfrac{y}{x}\right)$; $z(a;\ a)$.

6.23. Дана функция $z=\sin(2x-y)$. Найти $z\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$; $z\left(\dfrac{\pi}{4};\ -\dfrac{\pi}{6}\right)$.

6.24. Дана функция $z = x \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{2}\right)$. Найти $z(1;\ 1)$, $z\left(-\sqrt{3};\ -\sqrt{3}\right)$.

6.25. Дана функция $u = x^2 + y - z^3$. Найти $u(1;\ -4;\ -1)$, $u(0;\ 1;\ 1)$.

6.26. Дана функция $u = z \cdot e^x \cdot \sin y$. Найти $u\left(0;\ \frac{\pi}{2};\ 4\right)$, $u(1;\ \pi;\ -1)$.

Задачи повышенной сложности

6.27. Найти и построить на плоскости oxy область определения функции $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$.

6.28. Найти и построить на плоскости oxy область определения функции $z = \sqrt{\ln\left(x^2 - y\right)}$.

6.29. Каково геометрическое изображение системы $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2 - 2x - 2y \end{cases}$?

6.30. Каково геометрическое изображение системы $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 2x \end{cases}$?

2. Предел и непрерывность функции. *Расстояние* между точками $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $P'(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ из R^n определяется формулой $\rho(P, P') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \ldots + (x_n - x'_n)^2}$.

δ*-окрестностью* точки P_0 называется совокупность всех точек P, таких, что $\rho(P, P_0) < \delta$.

В частном случае двух переменных δ- окрестность представляет собой множество внутренних точек круга радиуса δ с центром в точке $P_0(x_0, y_0)$: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$.

В частном случае трех переменных δ- окрестность представляет собой множество внутренних точек шара радиуса δ с центром в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2$.

Пусть функция $f(x_1, x_2, ... x_n) = f(p)$ определена в некоторой окрестности точки P_0, за исключением, быть может, самой точки P_0.

Число A называется *пределом* функции $f(P)$ при стремлении точки $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ к точке $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что из условия $0 < \rho(P, P_0) < \delta$ следует $|f(P) - A| < \varepsilon$.

При этом пишут $A=\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=\lim\limits_{\substack{x_1\to x_1^0\\ \cdots\cdots\\ x_n\to x_n^0}} f(x_1,x_2,...,x_n)$.

Функция $u=f(P)$ называется *непрерывной* в точке P_0, если выполнены следующие три условия:

1) $P_0\in D(f)$;

2) $\exists \lim\limits_{P\to P_0} f(P)$;

3) $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$.

Функция $u=f(P)$ называется *непрерывной в области*, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$.

◄ $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy(3+\sqrt{xy+9})}{(3-\sqrt{xy+9})(3+\sqrt{xy+9})}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy(3+\sqrt{xy+9})}{9-xy-9}=$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}-(3+\sqrt{xy+9})=-6.$$ ►

Вычислить пределы:

6.31. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}$.

6.32. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

6.33. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(x^2+y^2)\cdot\mathrm{tg}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.

6.34. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)^{\frac{x+y}{3}}$.

3. Частные производные. Дифференциал и его применение. *Частной производной* (первого порядка) $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ (другое обозначение - f'_{x_k}) функции $u=f(P)$ по переменной x_K в точке P называется следующий предел:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(x_1, x_2,\ldots,x_k+\Delta x_k,\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots,x_n)}{\Delta x_k},\quad (k=1, 2, 3,\ldots,n)$$

Частные производные вычисляются по обычным правилам и формулам дифференцирования; при этом все переменные, кроме x_k, рассматриваются как постоянные.

Полным приращением функции $u=f(P)$ в точке $P(x_1,x_2,...,x_n)$, соответствующим приращениям аргументов $\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_n$, называется разность $\Delta u=f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,..., x_n+\Delta x_n)-f(x_1,x_2,..., x_n)$.

Функция $u(P)$ называется *дифференцируемой* в точке P_0, если всюду в некоторой окрестности этой точки полное приращение может быть представлено в виде: $\Delta u = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + ... + A_n \cdot \Delta x_n + o(\rho(P, P_0))$, где $o(\rho(P, P_0))$ — бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $\rho(P, P_0)$.

Дифференциалом (первого порядка) функции $u = f(P)$ называется главная (при условии, что не все коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равны нулю) часть полного приращения функции в данной точке, линейная относительно $\Delta x_1, ..., \Delta x_n$, т.е. $du = A_1 \cdot dx_1 + A_2 \cdot dx_2 + ... + A_n \cdot dx_n$, где $\Delta x_k = dx_k$, $k = 1, 2, ..., n$.

Если все частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны в точке P_0, то

$$du(P_0) = \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{P_0} \cdot dx_1 + \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{P_0} \cdot dx_2 + \ldots + \left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{P_0} \cdot dx_n .$$

В частном случае функции двух переменных $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}; \; \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y};$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y);$$

$$dz = A_1 \cdot dx + A_2 \cdot dy = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy .$$

Дифференциал используется для приближенных вычислений приращения функции и значения функции в точке. Например, в случае функции двух переменных $z = f(x, y)$ при малых Δx и Δy справедливы приближенные равенства $\Delta z \approx dz$ и $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + dz$.

Найти частные производные:

6.35. $z = xy + \dfrac{y}{x}$.

6.36. $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

6.37. $z = x \cdot e^{-xy}$.

6.38. $z = \dfrac{\cos y^2}{x}$.

6.39. $z = y^x$.

6.40. $z = \ln(x^2 + y^2)$.

6.41. $z = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$.

6.42. $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$.

Найти дифференциал:

6.43. $z = (x + y) \cdot e^{xy}$.

6.44. $z = x \cdot \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

6.45. $u = e^{xyz}$.

6.46. $u = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$.

6.47. $u = \dfrac{x}{y} \cdot e^z$.

6.48. $u = x \cdot \ln y + \sqrt{\sin z}$.

6.49. Найти дифференциал и полное приращение функции $z = \lg(x^2 + y^2)$, если x изменяется от 2 до 2,1; а y изменяется от 1 до 0,9.

6.50. Найти дифференциал и полное приращение функции $z = x^2 - xy + y^2$, если x изменяется от 2 до 1,9; а y изменяется от 1 до 1,2.

6.51. Вычислить приближенно $\sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}$.

6.52. Вычислить приближенно $(2{,}01)^{3{,}03}$.

Задачи повышенной сложности

Вычислить частные производные и дифференциал первого порядка:

6.53. $z = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{x+y}\right)$.

6.54. $z = \arcsin\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

6.55. $z = \ln\left(\cos\dfrac{x}{y}\right)$.

6.56. $z = \operatorname{tg}\left(e^x + e^y\right)$.

6.57. $u = xy + yz + zx$.

6.58. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

6.59. Вычислить приближенно $\sin 28^\circ \cdot \cos 61^\circ$.

6.60. Прямоугольный параллелепипед имеет измерения: $a = 3$м, $b = 2$м, $c = 6$м. Найти приближенно величину изменения длины диагонали параллелепипеда, если a увеличится на 2см, b увеличится на 1 см, а c уменьшится на 3 см.

§ 2. Дифференцирование сложных и неявных функций

1.Сложные функции одной и двух переменных. Пусть $z = f(x,y)$ – дифференцируемая функция переменных x и y, а $x = x(t),\ y = y(t)$ — дифференцируемые функции независимой переменной t. Тогда сложная функция $z = f(x(t), y(t))$ является дифференцируемой функцией переменной t, производная которой находится по формуле $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$.

В частности, если $z = f(x,y),\ y = y(x)$, то для производной сложной функции $z = f(x, y(x))$ получаем формулу $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$.

Если $z = f(u,v)$ дифференцируемая функция переменных u и v, которые сами являются дифференцируемыми функциями переменных x и y

$z=f(u,v),\ u=u(x,y),\ v=v(x,y)$, то частные производные первого порядка вычисляются по формулам: $z'_x=z'_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+z'_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$; $z'_y=z'_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+z'_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

При этом выражение для дифференциала первого порядка $dz=z'_u\cdot du+z'_v\cdot dv$ сохраняет свой вид – *свойство инвариантности формы первого дифференциала.*

2. Неявные функции одной и двух переменных. В случае функции одной переменной, заданной неявно, $f(x,y(x))=0$ производная вычисляется по формуле: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f'_x}{f'_y}$; $f'_y\neq 0$.

В случае функции двух переменных, заданной неявно, $F(x,y,z(x,y))=0$ частные производные первого порядка вычисляются по формулам: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$; $F'_z\neq 0$.

В случае функции n переменных

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n,u(x_1,x_2,\ldots,x_n))=0;\quad \frac{\partial u}{\partial x_k}=-\frac{F'_{x_k}}{F'_u};\quad F'_u\neq 0,1,2,\ldots,n.$$

Пример 1. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если e^{2x3y}, $x=\mathrm{tg}t,\ y=t^2-t$.

◀ $\dfrac{dz}{dt}=e^{2x-3y}\cdot 2\cdot\dfrac{1}{\cos^2 t}+e^{2x-3y}\cdot(-3)\cdot(2t-1)=e^{2tgt-3t^2+3t}\cdot\left(\dfrac{2}{\cos^2 t}-6t+3\right)$. ▶

Пример 2. Найти $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=\ln(e^x+e^y),\ y=\dfrac{1}{3}x^3+x$.

◀ $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{e^x+e^y}\cdot e^x+\dfrac{1}{e^x+e^y}\cdot e^y\cdot(x^2+1)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{3}x^3}\cdot\left(x^2+1\right)}{1+e^{\frac{1}{3}x^3}}$. ▶

Пример 3. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=u^2\cdot\ln v;\ u=\dfrac{y}{x};\ v=x^2+y^2$.

◀ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2u\cdot\ln v\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+\dfrac{u^2}{v}\cdot 2x=-\dfrac{2y^2\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^3}+\dfrac{2y^2}{x\left(x^2+y^2\right)}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2u\cdot\ln v\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{u^2}{v}\cdot 2y=-\dfrac{2y\cdot\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2}+\dfrac{2y^3}{x^2\left(x^2+y^2\right)}$. ▶

Пример 4. Найти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$, если $x^2+xy-y^3=0$.

◀ $\dfrac{\partial y}{\partial x}=-\dfrac{2x+y}{x-3y^2}=\dfrac{2x+y}{3y^2-x}$, $3y^2-x\neq 0$. ▶

Пример 5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке (1, -2, 2), если $z^3-4xz+y^2-4=0$.

◀ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{-4z}{3z^2-4x}=\dfrac{4z}{3z^2-4x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,-2,2)=1$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2y}{3z^2-4x}=\dfrac{2y}{4x-3z^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,-2,2)=\dfrac{1}{2}$. ▶

6.61. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$, если $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; $x=e^{2t}+1$; $y=e^{2t}-1$.

6.62. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$, если $z=\dfrac{y}{x}$; $x=\ln t$; $y=e^{t}$.

6.63. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, если $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$; $y=e^{x}$.

6.64. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, если $z=\cos x\cdot\sin y$; $y=\arccos x$.

6.65. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=u^2\cdot v^2$; $u=x^2+y^2$; $v=\dfrac{x^2}{y^2}$.

6.66. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=u^2v-v^2u$; $u=x\sin y$; $v=y\cos x$.

6.67. Найти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$, если $y\sin x-\cos\left(x-y\right)=0$.

6.68. Найти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$, если $x-y+\operatorname{arctg}\ y=0$.

6.69. Найти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$, если $x^2e^{2y}-y^2e^{2x}=0$.

6.70. Найти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$, если $x+y=e^{y-x}$.

6.71. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z\ln\left(x+y\right)-\dfrac{xy}{z}=0$.

6.72. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$.

6.73. Найти dz, если $yz-\operatorname{arctg}(xz)=0$.

6.74. Найти dz, если $xz-e^{\frac{z}{y}}+x^3+y^3=0$.

Задачи повышенной сложности

6.75. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=x^{y}, x=\ln t, y=\sin t$.

6.76. Найти $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+1}{y}\right), y=e^{(x+1)^2}$.

6.77. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ (-1;1), если $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$.

6.78. Найти dz, если $x+y+z-e^{z}=0$.

6.79. $z^2+\dfrac{2}{x}=\sqrt{y^2-z^2}$. Показать, что $x^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{z}$.

6.80. $\dfrac{z}{x}=F\left(\dfrac{y}{z}\right)$. Показать, что $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$.

§3. Производная по направлению и градиент. Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть $\mathbf{s}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k}$ — единичный вектор заданного направления $\mathbf{s}$. *Производная функции* $u(P)=f(x,y,z)$ *в точке* $P_0(x_0,y_0,z_0)$ *по направлению* $\mathbf{s}$, обозначаемая через $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{s}}$, определяется соотношением

$$\frac{\partial u}{\partial s}\Big|_{P_0}=\lim_{\tau\to 0}\frac{u(P_0+\tau\cdot\mathbf{s})-u(P_0)}{\tau}$$

и характеризует скорость изменения функции $u(P)$ в направлении $\mathbf{s}$.

Производная по направлению вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial s}\bigg|_{P_0}=\frac{\partial u}{\partial x}(P_0)\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(P_0)\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}(P_0)\cdot\cos\gamma .$$

Градиентом функции $u(P)=f(x,y,z)$, обозначаемым символом $grad\,u$, называется вектор, координатами которого являются соответствующие частные производные функции $u(P)$, т.е. $grad\,u=u_x'\cdot\vec{i}+u_y'\cdot\vec{j}+u_z'\cdot\vec{k}$.

Производная по направлению $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{s}}$ равна скалярному произведению градиента на единичный вектор данного направления: $\dfrac{\partial u}{\partial s}=(grad\ u,\mathbf{s})$.

Вектор $grad\,u$ направлен в сторону наибыстрейшего возрастания функции. Модуль градиента $|grad\,u|$ (длина вектора $grad\,u$) равен величине максимальной скорости возрастания функции.

Частными производными 2-го порядка функции $z=f(x;y)$ называются частные производные от ее частных производных 1-го порядка:

$$z''_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(z'_x\right)'_x;\ z''_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(z'_y\right)'_y;\ z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(z'_x\right)'_y;\ z''_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(z'_y\right)'_x .$$

Теорема. Если функция $z=f(x;y)$ и ее частные производные $z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$ определены и непрерывны в точке $M_0(x_0;y_0)$, то в этой точке $z''_{xy}(M_0)=z''_{yx}(M_0)$.

Дифференциалом 2-го порядка функции $z=f(x;y)$ называется дифференциал от ее дифференциала 1-го порядка, рассматриваемого как функция переменных x и y при фиксированных значениях dx и dy , т.е. $d^2z=d(dz)$:

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2 .$$

Пример 1. Для функции $u = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + z$ найти градиент и производную по направлению направляющего вектора прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2}$ в точке $P_0(2,1,1)$.

◄ $u_x' = x$; $u_x'(P_0) = 2$; $u_y' = -y$; $u_y'(P_0) = -1$; $u_z' = 1$; $u_z'(P_0) = 1$.

$\mathbf{q} = (1; 0; 2)$; $|\mathbf{q}| = \sqrt{5}$.

$\mathbf{s} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; 0; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

$grad\, u(P_0) = 2\vec{i} - 1\cdot\vec{j} + 1\cdot\vec{k} = (2; -1; 1)$.

$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{s}} = (grad\, u(P_0), \mathbf{s}) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + (-1)\cdot 0 + 1\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$. ►

Пример 2. Найти $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}, d^2z$ для функции $z = \frac{\cos y^2}{x}$.

◄ $z'_x = -\frac{\cos y^2}{x^2}$; $z'_y = -\frac{\sin y^2 \cdot 2y}{x}$; $z''_{xx} = \left(-\frac{\cos y^2}{x^2}\right)'_x = \frac{2\cos y^2}{x^3}$;

$z''_{yy} = \left(-\frac{\sin y^2 \cdot 2y}{x}\right)'_y = -\frac{2}{x}\left(\cos y^2 \cdot 2y\cdot y + \sin y^2\right) = -\frac{2}{x}\left(2y^2\cos y^2 + \sin y^2\right)$;

$z''_{xy} = z''_{yx} = \left(-\frac{\cos y^2}{x^2}\right)'_y = \frac{\sin y^2 \cdot 2y}{x^2}$;

$d^2z = \frac{2\cos y^2}{x^3}dx^2 + 2\cdot\frac{\sin y^2\cdot 2y}{x^2}dxdy - \frac{2}{x}\left(2y^2\cos y^2 + \sin y^2\right)dy^2$. ►

6.81. Найти производную по направлению и градиент функции $u = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ в точке $P_0(2, -1)$ по направлению вектора $\overline{P_0P_1}$, где $P_1(6, 2)$.

6.82. Найти скорость и направление наибыстрейшего возрастания функции $u = xyz$ в точке $P_0(1, 2, 2)$.

6.83. Найти направление и модуль градиента функции $u = \frac{x}{y} + z^2$ в точке $P_0(2, 1, 0)$.

6.84. Найти угол между градиентами функции $u = x^2 + 2y^2 - z^2$ в точках $P_1(2, 3, -1)$ и $P_2(1, -1, 2)$.

Найти z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}, d^2z:

6.85. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

6.86. $z = e^{x^2\cdot y}$.

6.87. $z = x^3 \sin y + y^4$.

6.88. $z = x \cdot \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

6.89. $z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$ в точке (1, 1, -3).

6.90. $z = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$ в точке (5,3).

6.91. $z = x \cdot \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

6.92. $z = \mathrm{tg}\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$.

Задачи повышенной сложности

6.93. Найти производную функции $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ в точке $P_0(a;b;c)$ по направлению радиус-вектора этой точки.

6.94. Для функции $u = \dfrac{2x}{\sqrt{y}}$ в точке $P_0(1;\,1)$ найти $grad\ \ u$, $|grad\ \ u|$, $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{s}}$. Если вектор **s** образует угол α с осью *ox:* $\alpha = 0; \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{4}; \pi;$. При каком значении α направление **s** совпадает с направлением $grad\ \ u$?

6.95. Найти d^2z, если $z = x^y$.

6.96. Доказать, что если $z = \dfrac{x^2y^2}{x+y}$, то $x \cdot z''_{xx} + y \cdot z''_{xy} = 2 \cdot z'_x$.

6.97. Доказать, что если $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$, то $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$.

6.98. Доказать, что если $z = \varphi\left(y + ax\right) + \phi\left(y - ax\right)$, то $a^2 \cdot z''_{yy} - z''_{xx} = 0$.

§ 4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Касательной плоскостью к поверхности *F(x, y, z(x, y))= 0* в ее точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (точка касания) называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Нормалью к поверхности *F(x,y,z(x,y))=0* называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Уравнение касательной плоскости:

$$F_x'(M_0)\cdot(x - x_0) + F_y'(M_0)\cdot(y - y_0) + F_z'(M_0)\cdot(z - z_0) = 0.$$

Уравнения нормали:

$$\frac{x - x_0}{F_x'(M_0)} = \frac{y - y_0}{F_y'(M_0)} = \frac{z - z_0}{F_z'(M_0)}.$$

Пример 1. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=e^{x\cdot\cos y}$ в точке $P_0\left(1;\pi;\frac{1}{e}\right)$.

◀ $F=e^{x\cdot\cos y}-z=0$, $x_0=1$, $y_0=\pi$, $z_0=\frac{1}{e}$.

$F_x'=e^{x\cdot\cos y}\cdot\cos y$; $F_x'(P_0)=-\frac{1}{e}$; $F_y'=e^{x\cdot\cos y}\cdot(-x\cdot\sin y)$; $F_y'(P_0)=0$; $F_z'=-1$; $F'_z\,(p_0)=-1$.

Уравнение касательной плоскости: $-\frac{1}{e}\cdot(x-1)+0\cdot(y-\pi)+(-1)\cdot\left(z-\frac{1}{e}\right)=0$, $x+e\cdot z-2=0$.

Уравнения нормали: $\dfrac{x-1}{-\frac{1}{e}}=\dfrac{y-\pi}{0}=\dfrac{z-\frac{1}{e}}{-1}$. ▶

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в точке M_0:

6.99. $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}-8=0$, $M_0(2;\ 2;\ 1)$.

6.100. $z=\sin x\cdot\cos y$, $M_0\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{1}{2}\right)$.

6.101. $x\cdot(y+z)\cdot(xy-z)+8=0$, $M_0(2;\ 1;\ 3)$.

6.102. $z^2+4z+x^2=0$ в точках пересечения с осью oz.

Задачи повышенной сложности

6.103. Для поверхности $x^2-z^2-2x+6y=4$ найти уравнение нормали, параллельной прямой $\frac{x+2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$.

6.104. Найти углы, которые образует нормаль к поверхности $z=\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$ в точке $\left(1;\ 1;\ \frac{\pi}{4}\right)$ с осями координат.

6.105. Найти расстояние от начала координат до касательной плоскости к поверхности $z=y\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{x}{a}\right)$ в точке $\left(\frac{\pi a}{4};\ a;\ a\right)$ $(a\neq 0)$.

6.106. На поверхности $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

§ 5. Экстремум функции двух переменных.

Функция $z = f(x;y)$ имеет *максимум (минимум)* в точке $P_0(x_0;y_0)$, если существует такая окрестность точки P_0, для всех точек $P(x;y)$ которой, отличных от точки P_0, выполняется неравенство $f(P_0) > f(P)$ (соответственно, $f(P_0) < f(P)$). Максимум или минимум функции называется ее *экстремумом.*

Необходимое условие экстремума. Если дифференцируемая функция $z = f(x;y)$ достигает экстремума в точке $P_0(x_0;y_0)$, то в этой точке частные производные 1-го порядка равны нулю, т.е. $\begin{cases} z'_x(P_0) = 0 \\ z'_y(P_0) = 0 \end{cases}$.

Точка $P_0(x_0;y_0)$, в которой частные производные 1-го порядка равны нулю, называется *стационарной точкой.*

Достаточное условие экстремума. Пусть функция $z = f(x;y)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки $P_0(x_0;y_0)$.

Введем обозначения:

$$A = z''_{xx}(P_0);\ B = z''_{xy}(P_0);\ C = z''_{yy}(P_0);\ D = AC - B^2,$$

тогда:

1. если $\begin{cases} D > 0 \\ A > 0\ (C > 0) \end{cases}$, то P_0 - точка минимума;
2. если $\begin{cases} D > 0 \\ A < 0\ (C < 0) \end{cases}$, то P_0 - точка максимума;
3. если $D < 0$, то точка P_0 не является точкой экстремума;
4 если $D = 0$, то требуется дополнительное исследование.

П р и м е р 1. Найти экстремумы функции $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

◀ $z'_x = 6x - 3x^2$; $z''_{xx} = 6 - 6x$; $z'_y = 6y + 4$; $z''_{yy} = 6$; $z''_{xy} = 0$.

Стационарная точка $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 6x - 3x^2 = 0 \\ 6y + 4 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$. Две стационарные точки $P_1\left(0; -\dfrac{2}{3}\right)$ и $P_2\left(2; -\dfrac{2}{3}\right)$.

P_1: $A = z''_{xx}(P_1) = 6$, $B = z''_{xy}(P_1) = 0$, $C = z''_{yy}(P_1) = 6$, $D = AC - B^2 = 36 > 0$.

$\begin{cases} A > 0 \\ D > 0 \end{cases} \Rightarrow P_1$ - точка минимума.

$$z_{\min} = z\left(0; -\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}.$$

P_2: $A = z''_{xx}(P_2) = -6$, $B = z''_{xy}(P_2) = 0$, $C = z''_{yy}(P_2) = 6$, $D = AC - B^2 = -36 < 0$.

P_2 не является точкой экстремума. ▶

Найти экстремумы функции:

6.107. $z = xy$.

6.108. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

6.109. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$.

6.110. $z = (2x^2 + y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)}$.

6.111. $z = xy^2(1 - x - y),\ x > 0,\ y > 0$.

6.112. $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y},\ x > 0,\ y > 0$.

6.113. $z = 1 + x^2 + \dfrac{y^2}{4}$.

6.114. $z = 3xy + x^2 - y^2$.

6.115. $z = y^2 - 4xy + 4x + 4$.

6.116. $z = \ln\left(x^2 + y^2 - xy + 1\right)$.

Задачи повышенной сложности

6.117. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

6.118. Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

6.119. Найти экстремумы функции $z = 2 - \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{3}}$.

6.120. Найти экстремумы функции $z = \sqrt{1 + \dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9}}$.

Глава 7
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Двойные интегралы

1. **Вычисление двойных интегралов в прямоугольных координатах.** Пусть функция $f(x,y)$ определена в ограниченной замкнутой области *D* плоскости Oxy, имеющей площадь *S*. Разобьем область *D* произвольным образом на *n* элементарных подобластей, имеющих площади $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ и диаметры $d_1, d_2, \ldots, d_n$ (диаметром области называется наибольшее из расстояний между двумя точками границы этой области). Выберем в каждой элементарной подобласти D_k произвольную точку $P_k(\xi_k, \eta_k)$ и умножим значение функции в точке P_k на площадь этой области.

Интегральной суммой функции *f*(*x*, *y*) для указанного разбиения области *D* называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta S_k = f(\xi_1,\eta_1)\Delta S_1 + f(\xi_2,\eta_2)\Delta S_2 + \ldots + f(\xi_n,\eta_n)\Delta S_n.$$

Обозначим через $d = \max\{d_1, d_2, \ldots d_n\}$. Если при $d \to 0$ существует конечный предел *I* интегральных сумм, не зависящий от способа разбиения области *D* на элементарные подобласти D_k и от выбора точек P_k в каждой их них, то этот предел называется *двойным интегралом* от функции $f(P) = f(x,y)$ по области *D* и обозначается

$$I = \iint_D f(P)dS = \iint_D f(x,y)dxdy,$$

где $dS = dxdy$ называется *элементом площади*. В этом случае говорят, что функция $f(x,y)$ *интегрируема* (*по Риману*) в области *D*. Если $f(x,y)$ непрерывна в области *D*, то она интегрируема по Риману в области *D*.

Если $f(x,y) > 0$ в области *D*, то двойной интеграл от этой функции по области *D* равен объему цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, снизу плоскостью Oxy, сбоку цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси *Oz*, и вырезающей на плоскости Oxy область *D* (геометрический смысл двойного интеграла).

Двойной интеграл обладает свойствами

линейности:

$$\iint_D [f_1(P) + f_2(P)]dS = \iint_D f_1(P)dS + \iint_D f_2(P)dS,$$

$$\iint_D Cf(P)dS = C\iint_D f(P)dS, \quad C = \text{const};$$

аддитивности: если область *D* разбита на две области D_1 и D_2, то

$$\iint_D f(P)dS = \iint_{D_1} f(P)dS + \iint_{D_2} f(P)dS \ ;$$

монотонности: если $f(P) \geq g(P)$ в области *D*, то

$$\iint_D f(P)dS \geq \iint_D g(P)dS \ ;$$

нормировки:

$$\iint_D 1dS = S \ .$$

Укажем правила вычисления двойного интеграла. Различают два основных вида области интегрирования.

1.Область интегрирования *D* ограничена снизу и сверху непрерывными кривыми $y = p(x),\ y = q(x),$ где $p(x) \leq q(x)$ для $x \in [a,b]$, а слева и справа - прямыми $x = a,\ x = b(a < b)$ (рис.5). Такую область назовем правильной в направлении оси Oy. Для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy,$$

где сначала вычисляется внутренний интеграл от функции $f(x,y)$ по переменной *y* при фиксированном значении переменной *x*, а затем полученная функция переменной *x* интегрируется в пределах от *a* до *b*.

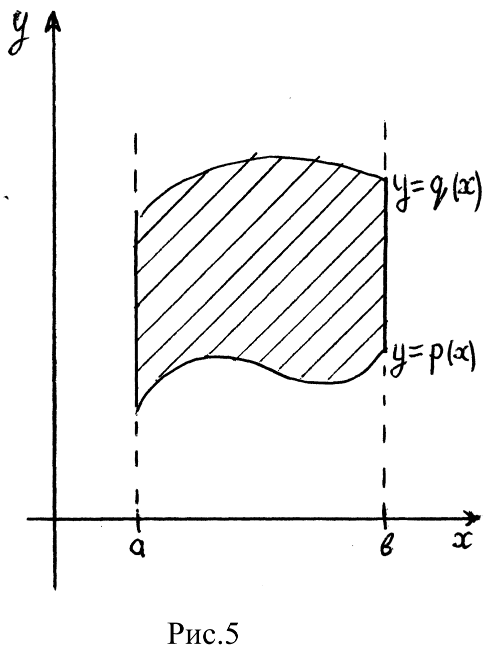


Рис.5

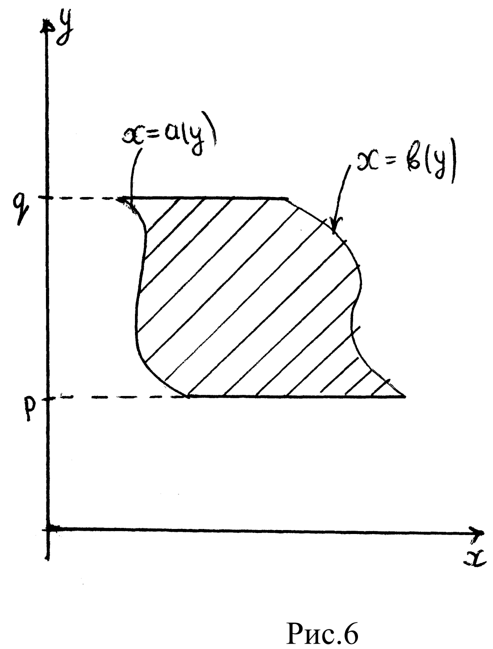


Рис.6

2.Область интегрирования *D* ограничена слева и справа непрерывными кривыми $x = a(y),\ x = b(y),$ где $a(y) \leq b(y)$ для $y \in [p,q]$, а снизу и сверху прямыми $y = p,\ y = q(p < q)$ (рис.6). Такую область назовем правильной в направлении оси *Ox*. Для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_p^q dy \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx,$$

где сначала вычисляется внутренний интеграл от функции $f(x,y)$ по переменной x при фиксированном значении переменной y, а затем полученная функция переменной y интегрируется в пределах от p до q.

Правые части указанных формул называются *повторными интегралами*. В случае области интегрирования общего вида ее нужно разбить на области, правильные либо в направлении оси Ox, либо в направлении оси Oy, и воспользоваться свойством аддитивности двойного интеграла.

Пример 1.Вычислить повторный интеграл $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} (2x-y)dy$.

◂ Вычисляем внутренний интеграл:

$$\int\limits_x^{x^2} (2x-y)dy = 2x\int\limits_x^{x^2} dy - \int\limits_x^{x^2} ydy = 2x\cdot y\Big|_x^{x^2} - \frac{y^2}{2}\Bigg|_x^{x^2} = 2x(x^2-x) - \frac{1}{2}(x^4-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - \frac{3}{2}x^2.$$

Вычисляем внешний интеграл:

$$\int\limits_1^2 \left(-\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)dx = \left(-\frac{x^5}{10} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{2}\right)\Bigg|_1^2 = 0,9. \text{ ▸}$$

Пример 2. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x}}^{1-x} f(x,y)dy$.

◂ Область интегрирования D ограничена прямыми $x=0, x=1, y=1-x$ и дугой окружности $y=-\sqrt{1-x^2}$ (рис.7) . Для изменения порядка интегрирования представим область D в виде объединения двух областей D_1 и D_2, где область D_1 ограничена прямыми $y=0,\quad y=1,\quad x=1-y$, а область D_2 ограничена прямыми $x=0, y=0$ и дугой окружности $x=\sqrt{1-y^2}\,(-1\le y\le 0)$. Тогда

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx. \text{ ▸}$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, где область D ограничена линиями $y=2-x^2, y=2x-1$ (рис.8).

◂ Найдем точки пересечения прямой $y=2x-1$ и параболы $y=2-x^2$: $2x-1=2-x^2, x^2+2x-3=0, x_1=1, x_2=-3$. Таким образом, имеем две точки пересечения $A(-3,-7)$, $B(1,1)$. Область интегрирования является правильной в направлении оси Oy. Находим

$$\iint\limits_D (x-y)dxdy = \int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)dy = \int\limits_{-3}^{1} \left(xy - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{2x-1}^{2-x^2} dx =$$

$$= \int\limits_{-3}^{1} \left[x(2-x^2) - x(2x-1) - \frac{\left(2-x^2\right)^2}{2} + \frac{\left(2x-1\right)^2}{2} \right] dx =$$

$$= \int\limits_{-3}^{1} \left(-\frac{x^4}{2} - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2} \right) dx = 4\frac{4}{15}. \blacktriangleright$$

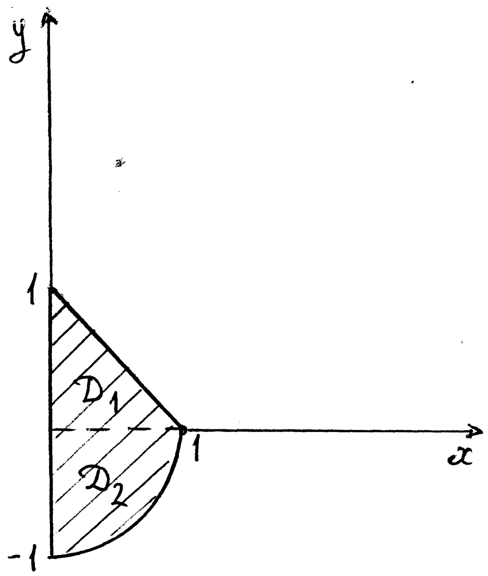


Рис.7

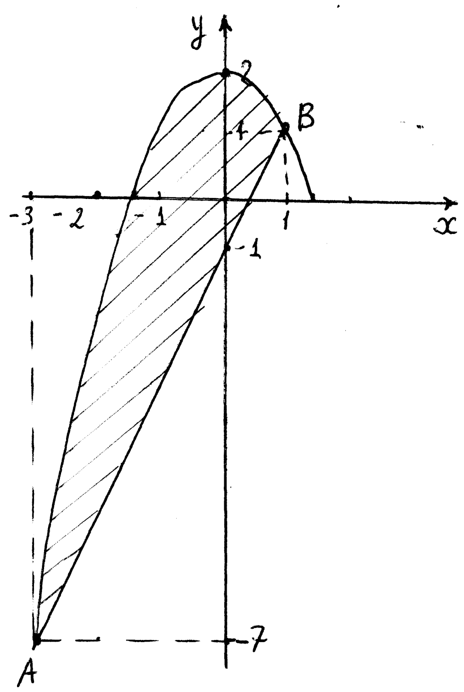


Рис.8

Найти $\iint\limits_D dxdy$, где область D задана неравенствами:

7.1. $x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0$.

7.2. $2x + y \le 2, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$.

Какой из интегралов больше:

7.3. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sin xy + 3}$ или $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sin xy + 2}$?

7.4. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{e^{x+y} + 1}$ или $\iint\limits_D \frac{dxdy}{e^{x+y} + 2}$?

Изменить порядок интегрирования в интегралах:

7.5. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$.

7.6. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{e^x} f(x,y)dy$.

Вычислить повторные интегралы:

7.7. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 (x^2+y)dy$.

7.8. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} \dfrac{xdy}{x^2+y^2}$.

Вычислить интегралы по области *D*, ограниченной указанными линиями:

7.9. $\iint\limits_D 12ye^{6xy}dxdy, \quad D: y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=1/6,\ x=1/3$.

7.10. $\iint\limits_D 3y\sin xydxdy, \quad D: y=\pi/2,\ y=3\pi,\ x=1,\ x=3$.

7.11. $\iint\limits_D x^2y^2dxdy, \quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$.

7.12. $\iint\limits_D xe^y dxdy, \quad D: x=e,\ y=\ln x,\ y=-\ln x$.

7.13. $\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy, \quad D: x=0,\ y=\pi/2,\ y=x$.

7.14. $\iint\limits_D \sqrt{x+y}dxdy, \quad D: x=0, y=1,\ y=x$.

7.15. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{xy-y^2}dxdy$, где область *D* – трапеция с вершинами в точках $A(1,1),\ B(5,1),\ C(10,2),\ D(2,2)$.

7.16. Вычислить $\iint\limits_D xdxdy$, где область *D* – треугольник с вершинами $A(0,1),\ B(3,0),\ C(2,2)$.

7.17. Вычислить $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, если *D* - прямоугольник $\{(x,y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$, а $f(x,y)=F''_{xy}(x,y)$.

7.18. Указать, между какими значениями заключен интеграл $I = \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \dfrac{dxdy}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$, где $x_0^2+y_0^2>R^2$.

2. **Вычисление двойных интегралов в полярных координатах.** Пусть (r,φ) - полярные координаты в плоскости Oxy, связанные с прямоугольными координатами (x,y) соотношениями $x=r\cdot\cos\varphi,\ y=r\cdot\sin\varphi$. Переход к полярным координатам в двойном интеграле осуществляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)rdrd\varphi,$$

где D' - область изменения переменных (r,φ). Пусть область интегрирования D ограничена лучами $\varphi=\alpha, \varphi=\beta$ и кривыми $r=r_1(\varphi), r=r_2(\varphi)$, где $\alpha\le\varphi\le\beta$ и $r_1(\varphi)\le r_2(\varphi)$. Двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi)rdr, \quad \text{где } F(r,\varphi)= f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi).$$

Пример 1.Вычислить интеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, где D– восьмая часть круга $x^2+y^2\le 4$ (рис.9)

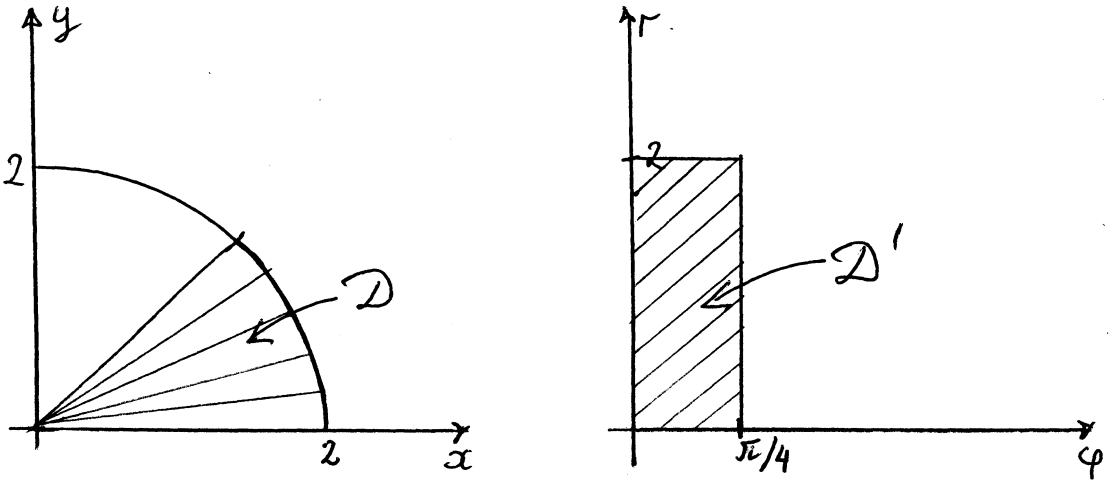


Рис.9

◀ Поскольку подынтегральная функция не зависит от полярного угла, то будем считать, что φ меняется от 0 до $\pi/4$. Неравенство $x^2+y^2\le 4$ переходит в неравенство $0\le r\le 2$.Таким образом, область D'является прямоугольником. Находим

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi\int\limits_0^2 \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}rdr = \int\limits_0^{\pi/4} d\phi\int\limits_0^2 r^2dr = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{2\pi}{3}. \blacktriangleright$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint\limits_D ydxdy,$ где область D ограничена окружностями $x^2+y^2=ay, x^2+y^2=by, 0<a<b, a=\text{const}, b=\text{const}$.

◀ В полярных координатах уравнения окружностей приобретают вид $r=a\cdot\sin\varphi, r=b\cdot\sin\varphi, \varphi\in[0,2\pi]$. Значит, область D' заключена между дугами двух синусоид (рис.10). Находим

$$\iint\limits_D ydxdy = \iint\limits_{D'} r^2\sin\varphi drd\varphi = \int\limits_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int\limits_{a\sin\varphi}^{b\sin\varphi} r^2dr = \int\limits_0^\pi \sin\varphi\cdot\frac{r^3}{3}\Bigg|_{a\sin\varphi}^{b\sin\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}(b^3-a^3)\int\limits_0^\pi \sin^4\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{12}(b^3 - a^3)\int_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{12}(b^3 - a^3)\int_0^{\pi}(1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{12}(b^3 - a^3) + \frac{1}{24}(b^3 - a^3)\int_0^{\pi}(1+\cos 4\varphi)d\varphi = \frac{\pi}{8}(b^3 - a^3). ▶$$

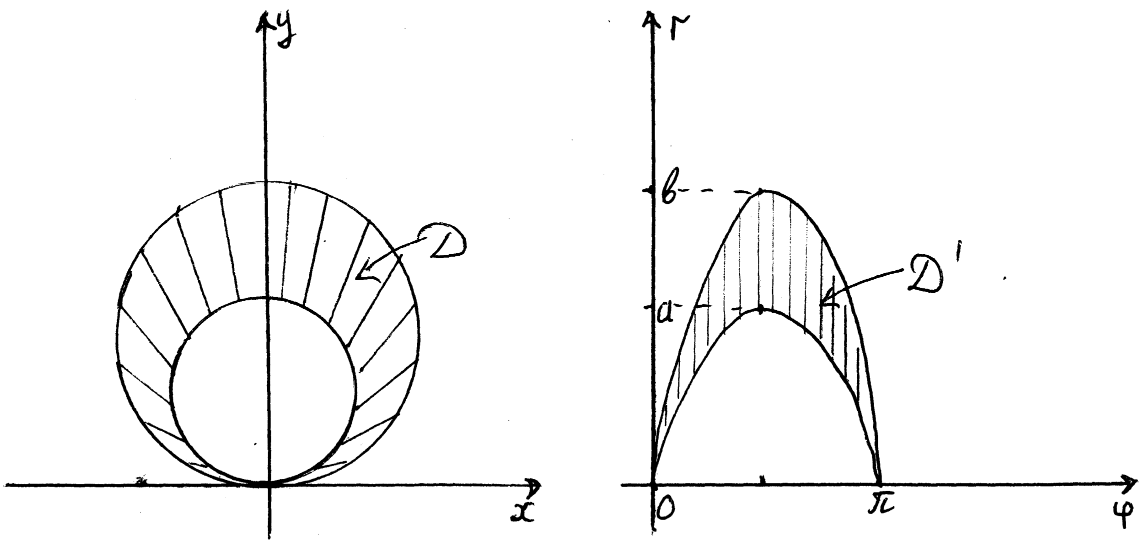


Рис.10

3. **Приложения двойных интегралов.** *Площадь* плоской области *D* выражается формулой

$$S = \iint\limits_D dxdy .$$

Объем *V* цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью Oxy, сбоку цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz , и вырезающей на плоскости Oxy область *D*, вычисляется по формуле

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy .$$

Масса *M* пластинки, занимающей область *D* плоскости *Oxy* и имеющей переменную поверхностную плотность $\gamma = \gamma(x, y)$, выражается интегралом

$$M = \iint\limits_D \gamma(x, y)dxdy$$

(механический смысл двойного интеграла).

Статические моменты M_x и M_y пластинки относительно осей *Ox* и *Oy* определяются по формулам

$$M_x = \iint\limits_D y\gamma(x, y)dxdy, \quad M_y = \iint\limits_D x\gamma(x, y)dxdy$$

соответственно. В случае однородной пластинки считаем $\gamma \equiv \gamma_0 = \text{const}$.

Координаты $(\bar{x}, \bar{y})$ *центра масс* пластинки можно вычислить по формулам

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}.$$

Моменты инерции I_x и I_y пластинки относительно осей Ox, Oy вычисляются по формулам соответственно

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \gamma(x,y) dxdy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2 \gamma(x,y) dxdy,$$

а *момент инерции* I_O относительно начала координат – по формуле

$$I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\gamma(x,y) dxdy = I_x + I_y.$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=4x-x^2$, $y^2=2x$(вне параболы).

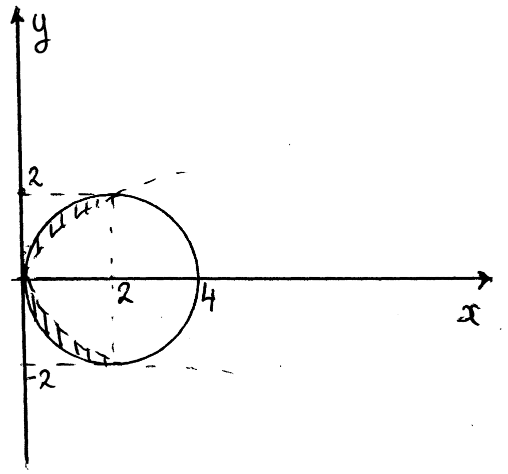


Рис.11

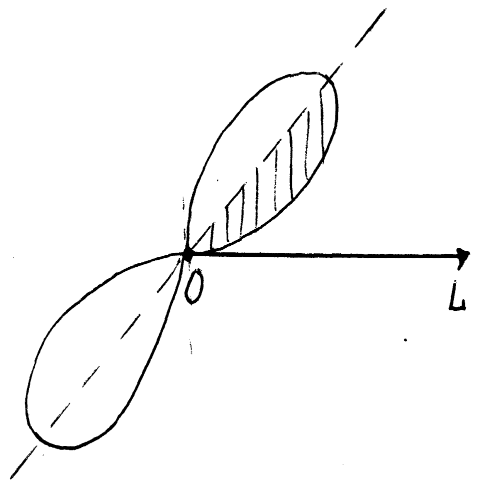


Рис.12

◀ Первая линия – окружность $(x-2)^2 + y^2 = 4$ с центром в точке(2,0) и радиуса 2 . Найдем точки ее пересечения с параболой $y^2 = 2x$. Это начало координат $O(0,0)$ и точки (2,2) и (2,-2). Фигура симметрична относительно оси Ox(рис.11). Учитывая это, получаем

$$S = 2\iint\limits_D dxdy = 2\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{4x-x^2}} dy = 2\left(\int_0^2 \sqrt{4x-x^2}dx - \int_0^2 \sqrt{2x}dx\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 - \frac{1}{3}(2x)^{3/2}\Big|_0^2\right) = 2\left(\pi - \frac{1}{3}4^{3/2}\right) = 2\pi - 16/3.$$

Заметим, что интеграл $\int_0^2 \sqrt{4x-x^2}dx$ представляет собой площадь четверти круга с центром в точке(2,0) и радиуса 2 и поэтому равен $(\pi 2^2)/4$. ▶

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$.

◂ Преобразуем уравнение кривой к полярным координатам: $r^4 = 2r^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi$, или $r^2 = \sin 2\varphi$. Значит, $\sin 2\varphi \ge 0$, и угол φ меняется в пределах от 0 до $\pi/2$ и от π до $3\pi/2$. Изменению угла φ от 0 до $\pi/4$ соответствует четверть искомой площади (рис.12). Получаем

$$S = 4\iint_D r dr d\varphi = 4\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} r dr = 2\int_0^{\pi/4} \sin 2\varphi d\varphi = -\cos 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = 1.$$ ▸

Пример 3. Вычислить объем тела, ограниченного двумя цилиндрическими поверхностями $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + z^2 = a^2$.

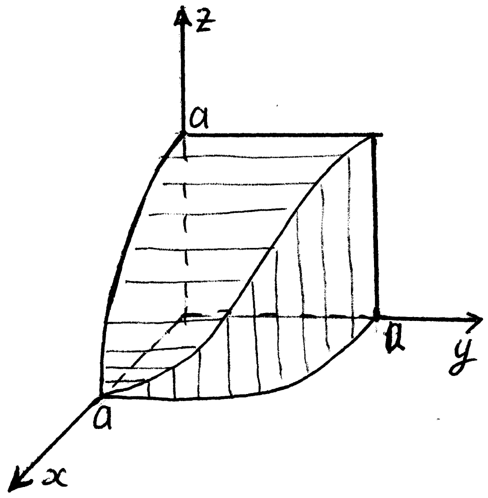


Рис.13

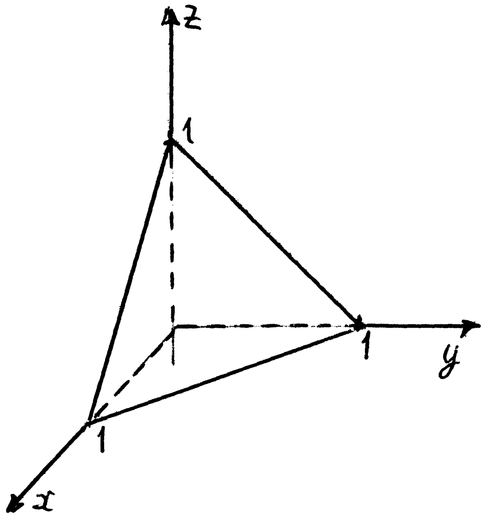


Рис.14

◂ Поскольку рассматриваемое тело симметрично относительно всех координатных плоскостей, то рассмотрим его восьмую часть T, расположенную в первом октанте (рис.13). Проекция T на плоскость Oxy – это четверть круга с центром в начале координат и радиусом a. Сверху тело T ограничено поверхностью $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, снизу - плоскостью Oxy. Имеем

$$V = 8\iint_D \sqrt{a^2 - x^2} dxdy = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} a^3.$$ ▸

Пример 4. Определить центр масс однородной пластинки, занимающей область, ограниченную линиями $y = x^2, y = 2x^2, x = 1, x = 2$.

◂ Полагаем плотность $\gamma(x, y) \equiv 1$. Находим массу пластинки:

$$M = \iint_D dxdy = \int_1^2 dx \int_{x^2}^{2x^2} dy = \int_1^2 (2x^2 - x^2) dx = \int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}.$$

Найдем статические моменты пластинки относительно осей Ox, Oy:

$$M_x = \iint_D y dxdy = \int_1^2 dx \int_{x^2}^{2x^2} y dy = \int_1^2 \frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^2}^{2x^2} dx = \frac{3}{2}\int_1^2 x^4 dx = \frac{63}{10},$$

$$M_y=\iint_D xdxdy=\int_1^2 xdx\int_{x^2}^{2x^2}dy=\int_1^2 x(2x^2-x^2)dx=\int_1^2 x^3dx=\frac{15}{4}.$$

Находим координаты центра масс

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{45}{28},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{189}{70}. \blacktriangleright$$

Вычислить интегралы по области D, определенной неравенствами

7.19. $\iint_D (x-2y)dxdy,\ D: 4\le x^2+y^2\le 9,\ y\ge x,\ x\ge 0$.

7.20. $\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}dxdy,\ D: 16\le x^2+y^2\le 25,\ y\ge -x,\ y\le x$.

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями

7.21. $x^2-6x+y^2=0,\ x^2-10x+y^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.22. $x^2-4y+y^2=0,\ x^2-8y+y^2=0,\ y=x/\sqrt{2},\ y=-x/\sqrt{2}.$

Найти объем тела, ограниченного данными поверхностями

7.23. $z=\sqrt{36-x^2-y^2},\ z=\sqrt{(x^2+y^2)/3}.$

7.24. $z=\sqrt{64-x^2-y^2}, 12z=x^2+y^2.$

7.25. $x+y=8,\ y=\sqrt{x},\ z=3y,\ z=0.$

7.26. $x=16\sqrt{2y},\ x=\sqrt{2y},\ z+y=2,\ z=0.$

7.27. Найти массу квадратной пластинки со стороной a, плотность которой в любой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки до одной из вершин квадрата и равна γ_0 в центре квадрата.

7.28. Найти массу круглой пластинки радиуса R, плотность которой в любой точке пропорциональна расстоянию от этой точки до центра и равна γ_0 на краю пластинки.

Найти положение центра масс однородной пластинки, занимающей область D, ограниченную данными линиями:

7.29. $y=x^2,\ x=y^2$. **7.30**. $y^2=2x,\ x=2.$

7.31. Найти момент инерции относительно оси Oy однородной пластинки, ограниченной линиями $y=4-x^2,\ y=0$.

7.32. Найти момент инерции относительно оси Ox однородной пластинки, ограниченной синусоидой $y=\sin x$ и прямой OA, проходящей через начало координат и вершину $A(\pi/2,1)$ синусоиды (при условии $x\geq 0$).

Задачи повышенной сложности

7.33. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $x^3+y^3=xy$ (площадь петли).

7.34. Вычислить момент инерции относительно оси Ox фигуры, ограниченной кардиоидой $r=1+\cos\varphi$.

§2. Тройные интегралы

1. Вычисление тройных интегралов в прямоугольных координатах. Пусть функция $f(P)=f(x,y,z)$ определена в ограниченной замкнутой области T пространства $Oxyz$, имеющей объем V. Разобьем область T произвольным образом на n элементарных подобластей $T_1,T_2,\ldots,T_n$, имеющих объемы $V_1,V_2,\ldots,V_n$ и диаметры $d_1,d_2,\ldots,d_n$. Выберем в каждой элементарной подобласти T_k произвольную точку $P_k(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$ и умножим значение функции в точке P_k на объем области T_k.

Интегральной суммой функции f для указанного разбиения области T называется сумма вида $\sum\limits_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta V_k$. Обозначим через $d=\max\{d_1,\ldots,d_n\}$. Предположим, что при $d\to 0$ существует конечный предел I интегральных сумм, не зависящий от способа разбиения области T на элементарные подобласти и от выбора точек P_k в каждой из них. Тогда этот предел называется *тройным интегралом* от функции $f(P)=f(x,y,z)$ по области T и обозначается

$$I=\iiint\limits_T f(P)dV=\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz,$$

где $dV=dxdydz$ называется *элементом объема*. Говорят также, что функция f *интегрируема* (*по Риману*) в области T. Свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

Пусть область интегрирования T ограничена снизу поверхностью $z=g(x,y)$, сверху поверхностью $z=h(x,y)$, сбоку цилиндрической поверхностью, образующей для которой служит граница области D на плоскости Oxy, а направляющие параллельны оси Oz. Тогда

$$\iiint\limits_T f(P)dV=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{z=g(x,y)}^{z=h(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

причем сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной z при фиксированных значениях x,y, а затем полученная функция переменных x,y интегрируется по плоской области D.

Пример 1. Вычислить интеграл $\iiint\limits_T \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, где тело T ограничено координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$ (рис.14).

◀ Область D - это треугольник, образованный прямыми $x=0,\ y=0,\ x+y=1$. Снизу тело ограничено плоскостью $z=0$, сверху - плоскостью $z=1-x-y$. Находим

$$\iiint\limits_T \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z=0}^{z=1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = \iint\limits_D \frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\Bigg|_0^{1-x-y} dxdy =$$

$$= -\frac{1}{2}\iint\limits_D \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2}\right] dxdy = -\frac{1}{8}S(D) + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} =$$

$$= -\frac{1}{16} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}. \ ▶$$

2. Вычисление тройных интегралов в цилиндрических и сферических координатах. В плоскости Oxy введем полярные координаты r и φ. Тогда *цилиндрическими координатами* точки $M(x,y,z)$ называется тройка чисел (r,φ,z), где (r,φ) – полярные координаты точки M_1, которая является проекцией точки M на плоскость Oxy (рис.15). Декартовы и цилиндрические координаты точки связаны соотношениями $x = r\cdot\cos\varphi,\quad y = r\cdot\sin\varphi,\quad z = z.$ Преобразование тройного интеграла по области T осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{T'} f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)rdrd\varphi,$$

где T'– область изменения переменных (r,φ,z).

Определим теперь сферические координаты точки M. Обозначим через ρ расстояние от точки M до начала координат. Обозначим через θ угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и положительным направлением оси Oz. Обозначим через φ угол, образованный вектором $\overrightarrow{OM_1}$ с положительным направлением оси Ox, где M_1– проекция точки M на плоскость Oxy. *Сферическими координатами* точки M называется тройка чисел (r,θ,φ) (рис.16). Сферические и декартовы координаты точки M связаны соотношениями

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta,\quad 0\le\rho<+\infty,\quad 0\le\theta\le\pi,\quad 0\le\varphi<2\pi.$$

Преобразование тройного интеграла по области T осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{T'} F(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi,$$

где $F(\rho,\theta,\varphi) = f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)$, T'– область изменения переменных (ρ,θ,φ).

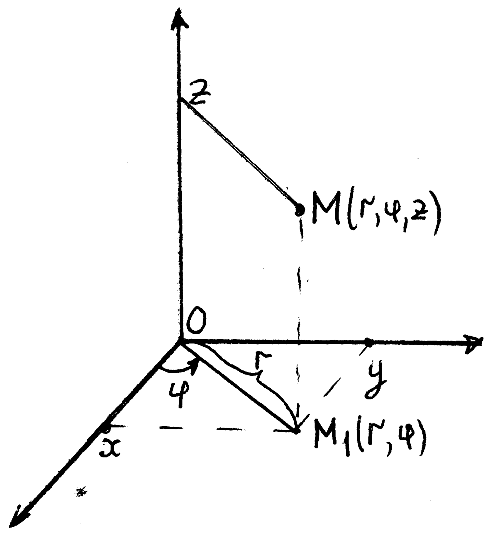


Рис.15

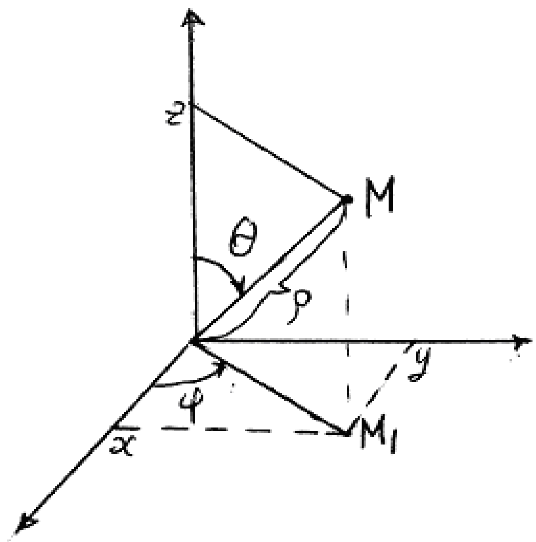


Рис.16

Часто через θ обозначают угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и плоскостью Oxy, причем $\theta \in [0, \pi/2]$, если $z \geq 0$, и $\theta \in [-\pi/2, 0]$, если $z \leq 0$. В этом случае декартовы и сферические координаты связаны соотношениями

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\sin\theta, \; 0 \leq \rho < +\infty, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Тройной интеграл по области T преобразуется по формуле

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{T'} F(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\cos\theta d\rho d\theta d\varphi,$$

где $F(\rho,\theta,\varphi) = f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta)$, T'– область изменения переменных (ρ,θ,φ).

Пример 2. Вычислить интеграл $\iiint\limits_T 4zdxdydz$, где тело задано неравенствами $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad z \geq 0$ (рис.17).

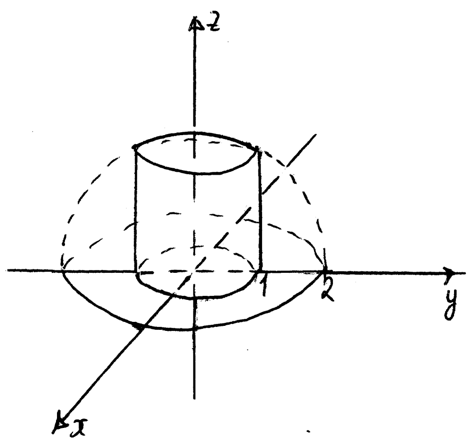


Рис.17

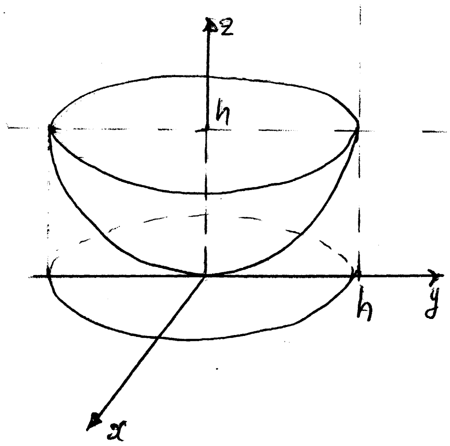


Рис.18

◂ Перейдем к цилиндрическим координатам. Первое неравенство переходит в неравенство $r^2+z^2\le 4$, второе - в неравенство $0\le r\le 1$. С учетом условия $z\ge 0$ получаем, что $0\le z\le\sqrt{4-r^2}$. Записываем

$$\iiint\limits_T 4zdxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 rdr\int\limits_0^{\sqrt{4-r^2}}4zdz=8\pi\int\limits_0^1 r\cdot\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{z=\sqrt{4-r^2}}dr=4\pi\int\limits_0^1 r(4-r^2)dr=7\pi.$$ ▸

Пример 3. Вычислить интеграл $\iiint\limits_T ydxdydz$, где тело T задано неравенствами $16\le x^2+y^2+z^2\le 25,\ y\ge x,\ y\ge -x,\ \sqrt{(x^2+y^2)/3}\le z\le\sqrt{3(x^2+y^2)}$.

◂ Перейдем к сферическим координатам. Поскольку $x^2+y^2+z^2=\rho^2$, то первое неравенство переходит в неравенство $4\le\rho\le 5$. Неравенства $y\ge x,\ y\ge -x$ приобретают вид $\rho\sin\theta\sin\varphi\ge\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi\ge-\rho\sin\theta\cos\varphi$, откуда, учитывая, что $\sin\theta\ge 0,\ \theta\in[0,\pi]$, находим, что $\pi/4\le\varphi\le 3\pi/4$. Двустороннее неравенство $\sqrt{(x^2+y^2)/3}\le z\le\sqrt{3(x^2+y^2)}$ принимает вид $\sqrt{\rho^2\sin^2\theta/3}\le\rho\cos\theta\le\sqrt{3\rho^2\sin^2\theta}$, откуда находим, что $1/\sqrt{3}\le\operatorname{ctg}\theta\le\sqrt{3}$, т.е. $\pi/6\le\theta\le\pi/3$. Итак, область T перешла в параллелепипед $T'=\{(\rho,\theta,\varphi):4\le\rho\le 5,\ \pi/6\le\theta\le\pi/3,\ \pi/4\le\varphi\le 3\pi/4\}$. В сферических координатах исходный интеграл превращается в произведение трех интегралов

$$\iiint\limits_{T'}\rho\sin\theta\sin\varphi\cdot\rho^2\sin\theta\,d\rho d\theta d\varphi=\int\limits_4^5\rho^3d\rho\cdot\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\sin^2\theta d\theta\cdot\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4}\sin\varphi d\varphi=$$

$$=\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_4^5\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}(1-\cos 2\theta)d\theta\cdot(-\cos\varphi)\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4}=\frac{123\sqrt{2}}{16}\pi.$$ ▸

3. **Приложения тройных интегралов.** *Объем* V тела, занимающего область T, определяется по формуле

$$V=\iiint\limits_T dxdydz.$$

Масса M тела с переменной плотностью $\gamma(x,y,z)$, занимающего область T, вычисляется по формуле

$$M=\iiint\limits_T\gamma(x,y,z)dxdydz$$

(механический смысл тройного интеграла).

Статические моменты M_{xy},M_{yz},M_{xz} тела относительно координатных плоскостей Oxy,Oxz,Oyz определяются по формулам

$$M_{xy}=\iiint\limits_T z\gamma(x,y,z)dxdydz,\quad M_{xz}=\iiint\limits_T y\gamma(x,y,z)dxdydz,\quad M_{yz}=\iiint\limits_T x\gamma(x,y,z)dxdydz.$$

Для определения координат $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ центра масс тела служат формулы

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{M},\quad\bar{y}=\frac{M_{xz}}{M},\quad\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}.$$

Моменты инерции I_x, I_y, I_z тела относительно координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно определяются по формулам

$$I_x = \iiint_T (y^2+z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz,$$
$$I_y = \iiint_T (x^2+z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz,$$
$$I_z = \iiint_T (y^2+x^2)\gamma(x,y,z)dxdydz.$$

В случае однородного тела полагаем плотность тела постоянной и равной γ_0.

Пример 4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $hz = x^2+y^2,\ z=h,\ h=\mathrm{const}>0$.

◀ Тело ограничено снизу параболоидом $z=(x^2+y^2)/h$, сверху – плоскостью $z=h$ и проецируется в круг $x^2+y^2\le h^2$ плоскости Oxy (рис.18). В цилиндрических координатах уравнение параболоида примет вид $z=r^2/h$. Находим объем

$$V=\iiint_T dxdydz=\iiint_{T'} rdrd\varphi dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h rdr\int_{r^2/h}^h dz=2\pi\int_0^h r(h-r^2/h)dr=\pi h^3/2.$$ ▶

Пример 5. Найти момент инерции шара радиуса R относительно его диаметра, если плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию от точки до центра шара и на поверхности шара равна γ_0.

◀ Примем центр шара за начало координат и будем вычислять момент инерции относительно оси Oz. Найдем формулу для плотности шара. По условию $\gamma(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, где k – коэффициент пропорциональности. Поскольку $\gamma=\gamma_0$ на сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$, то $\gamma_0=kR$, откуда $k=\gamma_0/R$. Значит, момент инерции вычисляется по формуле

$$I_z=\frac{\gamma_0}{R}\iiint_T (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz.$$

В сферических координатах

$I_z=\dfrac{\gamma_0}{R}\iiint_{T'}\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi$, где $0\le\rho\le R, 0\le\theta\le\pi, 0\le\varphi\le 2\pi$. Записываем интеграл в виде повторного:

$$I_z=\frac{\gamma_0}{R}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\int_0^R\rho^5 d\rho=\frac{\gamma_0}{R}\cdot 2\pi\cdot\left.\frac{\rho^6}{6}\right|_0^R\cdot\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta=$$

$$=-\frac{\pi\gamma_0R^5}{3}\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\right)d\cos\theta=\frac{\pi\gamma_0R^5}{3}\left.\left(\frac{\cos^3\theta}{3}-\cos\theta\right)\right|_0^{\pi}=\frac{4}{9}\pi\gamma_0R^5.$$ ▶

Пусть $f(x,y,z)>0$. Какой из интегралов больше:

7.35. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f(x,y,z)dz$ или $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{1-x-y} f(x,y,z)dz$?

7.36. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz$ или $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{1-x-y} f(x,y,z)dz$?

Записать тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного, если область интегрирования ограничена указанными поверхностями:

7.37. $y^2+2z^2=4x,\ x=2.$ **7.38**. $2x+3y+4z=12,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

Вычислить интегралы по области, ограниченной указанными поверхностями:

7.39. $\iiint\limits_T zdxdydz,\quad T:\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=x^2+y^2,\ z=0.$

7.40. $\iiint\limits_T x^2zdxdydz,\quad T:\ y=3x,\ y=0,\ x=2,\ z=xy,\ z=0.$

7.41. $\iiint\limits_T (3x^2+y^2)dxdydz,\quad T: z=10y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

7.42. $\iiint\limits_T (x^2+y^2)dxdydz,\quad T: z=y^2-z^2,\ z=0,\ y=1.$

7.43. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2-z^2=a^2,\ z=0,\ z=a(a=\text{const}>0)$, если плотность в каждой точке пропорциональна аппликате z и в плоскости $z=a$ равна γ_0.

7.44. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $64(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=4,\ z=0,\ y=0\big(y\ge 0,\ z\ge 0\big)$, если плотность в каждой точке равна расстоянию от точки до оси Oz.

Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного указанными поверхностями:

7.45. $z=\dfrac{H}{R^2}(x^2+y^2),\ z=H(R>0,\ H>0)$.

7.46. $z=\dfrac{H}{R^2}\sqrt{x^2+y^2},\ z=H(R>0,\ H>0)$.

Задачи повышенной сложности

7.47. Найти момент инерции однородного сегмента параболоида вращения с радиусом R и высотой H относительно его оси вращения.

7.48. Найти момент инерции однородного кругового конуса с радиусом R и высотой H относительно его оси.

Найти объем тела, заданного неравенствами

7.49. $9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36,\ z \le -\sqrt{(x^2 + y^2)/99},\ y \ge \sqrt{3}x,\ y \ge 0.$

7.50. $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9,\ z \le -\sqrt{(x^2 + y^2)/3},\ x/\sqrt{2} \le y \le 0.$

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 5

5.1. x^6+C. **5.2.** $2x^{3/2}+C$. **5.3.** $\frac{\sin 3x}{3}+C$. **5.4.** $-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C$. **5.5.** $\frac{2\sqrt{2}x^{3/2}}{3}+C$.
5.6. $\frac{2}{5}x^{3/2}+C$. **5.7.** $x^5-\frac{x^7}{7}+C$. **5.8.** $\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}+C$. **5.9.** $\frac{4}{5}x^{5/4}+\frac{4}{3}x^{3/4}+C$.
5.10. $2\sqrt{x}+\ln x+C$. **5.11.** $x-2\ln|x|-\frac{1}{x}+C$. **5.12.** $-\frac{2}{\sqrt{x}}--6\sqrt{x}+2x^{3/2}-\frac{2}{5}x^{5/2}+C$.
5.13. $\frac{2^x}{\ln 2}+\left(\frac{1}{3}\right)^x\Big/\ln\frac{1}{3}+C$. **5.14.** $\frac{3\cdot 4^x}{\ln 4}-\frac{5\cdot 7^x}{\ln 7}+C$. **5.15.** $\frac{5^{2x}}{\ln 25}+2\left(\frac{5}{3}\right)^x\frac{1}{\ln 5/3}+$
$+\frac{3^{-2x}}{\ln 1/9}+C$. **5.16.** $\frac{e^{2x}}{2}+2e^x+x+C$. **5.17.** $2x-\cos x-3\sin x+C$. **5.18.** $-2\cos x+$
$+5\sin x+C$. **5.19.** $\operatorname{tg}x-x+C$. **5.20.** $-\operatorname{ctg}x-x+C$. **5.21.** $x-\operatorname{arctg}x+C$.
5.22. $-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$. **5.23.** $\arcsin x+2\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$. **5.24.** $2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-$
$-3\operatorname{arctg}x+C$. **5.25.** $\arcsin\frac{x}{2}+C$. **5.26.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|+C$. **5.27.** $e^{-3x}+\sqrt{x}+C$.
5.28. $\sin^2 5x+\cos\sqrt{x}+C$. **5.29.** да. **5.30.** нет. **5.31.** да. **5.32.** да. **5.33.** $2x\sin^3 x+$
$+3x^2\sin^2 x\cos x$. **5.34.** $-2xe^{-x^2}$. **5.35.** $\arcsin\frac{x}{|a|}+C$. **5.36.** $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$.
5.37. $2\sqrt{x}+C$. **5.38.** $x-\frac{x^2}{3}+C$. **5.39.** $x+C$, $|x|\le 1$, $\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\operatorname{sgn}x+C$, $|x|>1$.
5.40. $\frac{x^3}{3}+C$, $|x|\le 1$, $x-\frac{2}{3}\operatorname{sgn}x+C$, $|x|>1$. **5.41.** $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C$, $x\ge 1$, $\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}+C$,
$x<1$. **5.42.** $\frac{1}{2}x^2\operatorname{sgn}x+C$. **5.43.** $\frac{1}{5}\sin 5x+5$. **5.44.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+3$. **5.45.** первообразная для
$f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},\ x\ne 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$. **5.46.** да, да, нет. **5.47.** $\frac{\cos^3 x}{3}+C$. **5.48.** $\frac{\sin^2 3x}{2}+C$.
5.49. $-\frac{(1-x)^{2001}}{2001}+C$. **5.50.** $\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+5)^{2002}}{2002}+C$. **5.51.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+C$.
5.52. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right|+C$. **5.53.** $\frac{1}{2}\sin x^2+C$. **5.54.** $-3\cos\frac{x^2}{2}+C$. **5.55.** $-\ln|\cos x|+C$.
5.56. $\ln|\sin x|+C$. **5.57.** $\ln\left(1+e^x\right)+C$. **5.58.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(e^x/2\right)+C$. **5.59.** $-2\sqrt{\cos x}+C$.
5.60. $2\sqrt{\sin x}+C$. **5.61.** $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C$. **5.62.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C$. **5.63.** $\frac{1}{8}\sin 2x^4+C$.

5.64. $-\frac{1}{2}\cos x^6+C$. **5.65.** $\frac{(2-x)^{302}}{302}-2\frac{(2-x)^{301}}{301}+C$. **5.66.** $\frac{(2x+5)^7}{28}-\frac{5}{24}(2x+5)^6+C$.

5.67. $\frac{1}{4}\ln^4 x+C$. **5.68.** $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$. **5.69.** $-\cos e^x+C$. **5.70.** $\operatorname{tg} e^x+C$. **5.73.** $2\sqrt{x}-$ $-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$. **5.74.** $-3\sqrt[3]{x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2-3}-3\ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right|+C$. **5.75.** $x-\ln\left|1+e^x\right|+C$.

5.76. $x+\ln\left|1-e^{-x}\right|+C$. **5.77.** $\frac{(1+x)^{2005}}{2005}-\frac{(1+x)^{2004}}{664}+3\frac{(1+x)^{2003}}{2003}-\frac{(1+x)^{2002}}{2002}+C$.

5.78. $\frac{(1-x)^{-99}}{99}-3\frac{(1-x)^{-98}}{98}+\frac{3}{97}(1-x)^{-97}-\frac{(1-x)^{-96}}{96}+C$.

5.79. $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+C$. **5.80.** $\arcsin(2x-1)+C$. **5.81.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.

5.82. $\frac{2}{3}\ln\left(1+x\sqrt{x}\right)+C$. **5.83.** $\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{2/3}+C$. **5.84.** $\sqrt{1+\sin^2 x}+C$.

5.85. $\frac{\left(1+x^2\right)^{5/2}}{5}-\frac{\left(1+x^2\right)^{3/2}}{3}+C$. **5.86.** $\frac{3}{14}\left(1+x^2\right)^{7/3}-\frac{3}{8}\left(1+x^2\right)^{4/3}+C$.

5.87. $\sin(\sin(\sin x))+C$. **5.88.** $\ln\ln\ln x+C$. **5.89.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$. **5.90.** $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

5.91. $\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$. **5.92.** $-x\cos x+\sin x+C$. **5.93.** $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}\right)\cos 2x-$ $-\frac{1}{2}x\sin 2x+C$. **5.94.** $\left(x^2-2\right)\sin x+2x\cos x+C$. **5.95.** $-\frac{1}{3}e^{-3x}\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

5.96. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}+C$. **5.97.** $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x-\frac{1}{\alpha+1}\right)+C$. **5.98.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln x-\frac{2}{3}\right)+C$.

5.99. $\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+C$. **5.100.** $-\frac{1}{x}(\ln x+1)+C$. **5.101.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

5.102. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$. **5.103.** $\left(x^2-x-1\right)\sin x+(2x-1)\cos x+C$.

5.104. $-\frac{1}{3}(2x+3)\cos 3x+\frac{2}{9}\sin 3x+C$. **5.105.** $uv'-u'v+\int v\cdot u''dx$.

5.106. $\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{2}+C$. **5.107.** $xf'(x)-f(x)+C$. **5.108.** $\frac{1}{2}xf'(2x)-\frac{1}{4}f(2x)+C$.

5.109. $\left(x^5-5x^4+20x^3-60x^2+120x-120\right)e^x+C$.

5.110. $\frac{x^8}{8}\left(\ln^3 x-\frac{3}{8}\ln^2 x+\frac{3}{32}\ln x-\frac{3}{256}\right)+C$. **5.111.** $\frac{1}{2}x(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$.

5.112. $\frac{1}{2}x(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$. **5.113.** $2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}+C$. **5.114.** $-2t\cos t+2\sin t+C$.

5.115. $x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$.

5.116. $\frac{x^3}{3}\arcsin x-\frac{1}{9}\left(1-x^2\right)^{3/2}+\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}+C$. **5.117.** $\frac{2\sin 3x+3\cos 3x}{13}e^{2x}+C$.

5.118. $\frac{-\sin 2x-2\cos 2x}{5}e^{-x}+C$. **5.119.** $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$.

5.120. $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$. **5.121.** $\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$.

5.122. $\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C$. **5.123.** $-\frac{1}{2}x^2\cos x^2+\frac{1}{2}\sin x^2+C$.

5.124. $\frac{1}{3}e^{x^3}\left(x^3-1\right)+C$. **5.125.** $-\ln\left|\cos e^x\right|+C$. **5.126.** $\frac{1}{2}\ln\left|\sin x^2\right|+C$.

5.127. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3/2}\right)+C$. **5.128.** $\mathrm{arctg}(x-1)+C$.

5.129. $\ln\left(x^2-3x+20\right)+C$. **5.130.** $\sqrt{2x-x^2}+C$. **5.131.** $\sqrt{x^2+2x+3}+$ $+\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)+C$. **5.132.** $-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{3}+\mathrm{C}$.

5.133. $5\sqrt{x^2-6x+8}+18\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+8}\right|+\mathrm{C}$. **5.134.** $3\sqrt{x^2+10x+30}-$ $-17\ln\left(x+5+\sqrt{x^2+10x+30}\right)+\mathrm{C}$. **5.135.** $-\frac{7}{2}\ln\left(x^2-4x+8\right)+\frac{15}{2}\mathrm{arctg}\frac{x-2}{2}+\mathrm{C}$.

5.136. $2\ln\left(x^2-6x+10\right)+13\,\mathrm{arctg}(x-3)+\mathrm{C}$. **5.137.** $\frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2+2}-$ $-\frac{1}{4}\ln\left(x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2+2}\right)+\mathrm{C}$. **5.138.** $\ln\left(\sin x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}\right)+\mathrm{C}$. **5.139.** обе дроби правильные. **5.140.** первая правильная. **5.141.** $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|+C$.

5.142. $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{8}x^2+\frac{17}{8}x+\frac{73}{16}\ln\left|x-\frac{3}{2}\right|+C$. **5.143.** $\frac{4}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+2|+C$.

5.144. $-\frac{3}{2}\ln|x+1|+\frac{7}{2}\ln|x+3|+C$. **5.145.** $\frac{1}{2}\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln|x+2|+C$.

5.146. $-\frac{3}{5}\ln|x+2|+\frac{4}{3}\ln|x+3|+\frac{4}{15}\ln|x-3|+C$. **5.147.** $\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{16}x+\ln|x|-\frac{31}{64}\ln\left|x-\frac{1}{2}\right|-$ $-\frac{33}{64}\ln\left|x+\frac{1}{2}\right|+C$. **5.148.** $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{65}{24}\ln\left|x^2-4\right|-\frac{1}{3}\ln\left|x^2-1\right|+C$. **5.149.** $\frac{A}{x+1}+$ $+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+b)^3}+\frac{D}{(x+b)^2}$. **5.150.** $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x+b}+\frac{D}{(x+b)^2}$. **5.151.** $2\ln|x|-$ $-\ln|x+1|+\frac{6}{x+1}+C$. **5.152.** $-\frac{8}{x-2}+\ln|x|+C$. **5.153.** $x+\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{29}{4}\ln|x+2|-$ $-\frac{19}{2}\cdot\frac{1}{x+2}+C$. **5.154.** $x-2\ln|x|+4\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+C$. **5.155.** $2\ln|x|-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|-$ $-\frac{1}{x-1}+C$. **5.156.** $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. **5.157.** $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{2(x-2)}+C$.

5.158. $\frac{1}{4(x+1)^2}-\frac{1}{4(x-1)^2}+C$. **5.159.** $\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}$.

5.160. $\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4x+5}$.

5.161. $\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. **5.162.** $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$.

5.163. $x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-2\operatorname{arctg}x+C$. **5.164.** $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-$ $-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

5.165. $\ln|x|-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x+1)+C$. **5.166.** $\ln|x-1|-$ $-\frac{1}{x-1}+\ln(x^2+4x+5)+C$. **5.167.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **5.168.** $\ln|x|-$ $-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$. **5.169.** $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x^3-2}{x^3+2}\right|+C$. **5.170.** $\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{3}+C$.

5.171. $\frac{1}{8}\ln|x^2-1|-\frac{1}{8}\ln|x^2+1|-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x^2+C$. **5.172.** $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x^5-1}{x^5+1}\right|+C$.

5.173. $\frac{1}{10}\ln(t^2+2t+2)+C$. **5.174.** $\frac{1}{8}\ln(x^8+1)-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x^4+C$. **5.175.** $-\frac{1}{6}(x+1)^{-6}+$ $+\frac{3}{7}(x+1)^{-7}-\frac{3}{8}(x+1)^{-8}+\frac{1}{9}(x+1)^{-9}+C$. **5.176.** $-\frac{1}{16}(x-3)^{-16}-\frac{7}{17}(x-3)^{-17}-$ $-\frac{5}{6}(x-3)^{-18}-\frac{9}{19}(x-3)^{-19}+C$. **5.177.** $\frac{1\cdot x}{2a^2n(a^2+x^2)^n}+\frac{2n-1}{2a^2n}\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$.

5.178. $\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{a^2+x^2}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$. **5.179.** $\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^2}+\frac{3}{8a^4}\cdot\frac{x}{a^2+x^2}+$ $+\frac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$. **5.180.** $\frac{1}{8}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+5}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$. **5.181.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+$ $+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2}-\frac{x}{4(x^2+2)}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **5.182.** $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{32}|4+x^2|+$ $\frac{1}{8(x^2+4)}+\frac{x}{4(x^2+4)}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **5.183.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+$ $+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{x}+1)+C$. **5.184.** $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\frac{x^4+\sqrt{2}x^2+1}{x^4-\sqrt{2}x^2+1}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x^2-1)+$ $+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x^2+1)+C$. **5.185.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+\frac{1}{2(e^x+1)}+C$. **5.186.** $\frac{1}{16}\ln(2-\cos x)-$ $-\frac{1}{16}\ln(\cos x+2)+\frac{1}{4(\cos x+2)}+C$. **5.187.** $\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C$. **5.188.** $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$.

5.189. $3\sqrt[3]{\cos x}\left(\frac{1}{10}\cos^3 x-\frac{1}{4}\right)+C$. **5.190.** $2\sqrt{\sin x}\left(1-\frac{2}{5}\sin^2 x+\frac{1}{9}\sin^4 x\right)+C$.

5.191. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$. **5.192.** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C$. **5.193.** $-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{32}\cos 4x+C$.

5.194. $-\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{1}{32}\cos 4x+C$. **5.195.** $\frac{3}{8}x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{32}\sin 4x+C$. **5.196.** $\frac{3}{8}x+$

$+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{32}\sin 4x+C$. **5.197.** $-\ln|\cos x|+\frac{\cos^2 x}{2}+C$. **5.198.** $\ln|\sin x|-\frac{\sin^2 x}{2}+C$.
5.199. $\frac{1}{2}\cos^{-2}x+\ln|\cos x|+C$. **5.200.** $-\frac{1}{2\sin^2 x}-\ln|\sin x|+C$. **5.201.** $\frac{1}{2}\cos x-$
$-\frac{1}{10}\cos 5x+C$. **5.202.** $-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{14}\cos 7x+C$. **5.203.** $\frac{1}{2}\sin(x+1)+\frac{1}{4}\sin(2x+1)+C$.
5.204. $\frac{\sqrt{3}}{4}x-\frac{1}{8}\cos 4x+C$. **5.205.** $-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x+\frac{1}{24}\cos 6x+C$. **5.206.** $\frac{1}{4}x+$
$+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin 6x+C$. **5.207.** первая функция. **5.208.** вторая и третья функции. **5.209.** подстановкой $t=\cos x$. **5.210.** подстановкой $t=\sin x$.
5.211. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **5.212.** $\ln\left|\frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|$. **5.213.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C$.
5.214. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$. **5.215.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}tg^2x+\frac{1}{2}\ln\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)+C$.
5.216. $\ln|1+tgx|+C$. **5.217.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x-\sqrt{5}}{\operatorname{tg}x+\sqrt{5}}\right|+C$. **5.218.** $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x-\frac{1}{2}}{\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}}\right|+C$.
5.219. $-\frac{3}{10}\ln|\operatorname{tg}x+3|+\frac{3}{20}\ln\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)+\frac{1}{10}x+C$. **5.220.** $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x+1|-$
$-\frac{1}{4}\ln\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)+\frac{1}{2}x+C$. **5.221.** $-\frac{1}{4}\cos\left(2e^x\right)+C$. **5.222.** $-\frac{1}{4}\cos\left(2x^2\right)+C$.
5.223. $\operatorname{tg}x-\ln|1+\operatorname{tg}x|+C$. **5.224.** $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}+\frac{3}{4}\operatorname{ctg}x+\frac{9}{8}\ln|2\operatorname{ctg}x+3|+C$.
5.225. $\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x-x+C$. **5.226.** $\frac{x}{2}-\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C$. **5.227.** $\frac{\cos^3\ln x}{3}-\cos\ln x+C$.
5.228. $\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}\sin(2\ln x)$. **5.229.** $\operatorname{tg}e^x-e^x+C$. **5.230.** $\operatorname{tg}(\cos x)$.
5.231. $\sqrt{2x+3}-2\ln\left(2+\sqrt{2x+3}\right)+C$. **5.232.** $2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$.
5.233. $4\sqrt[4]{x}-4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)+C$. **5.234.** $2\sqrt[4]{x}-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{4x}+C$.
5.235. $6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **5.236.** $-\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-3\sqrt[6]{x}-\frac{3}{2}\ln\left|1-2\sqrt[6]{x}\right|+C$.
5.237. $2\arcsin\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{3-x^2-2x}+C$. **5.238.** $\frac{1}{2}\arcsin(x-1)+$
$+\frac{1}{2}(x-1)\arcsin\sqrt{2x-x^2}+C$. **5.239.** $\sqrt{x^2-2x}-\arccos\frac{1}{x-1}+C$. **5.240.** $\sqrt{x^2-1}-$
$-\arccos\frac{1}{x}+C$. **5.241.** $\frac{1}{4}\cdot\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+13}}+C$. **5.242.** $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}+C$.

5.243. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right|-\frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)}-\frac{1}{4\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)^2}+C$.

5.244. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}\right|+\frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}+1\right)}+\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}+1\right)^2}+C$. **5.245.** $6\arcsin\frac{x-2}{2}+$ $+\frac{1}{16}(x-2)\sqrt{4x-x^2}\left(30-x^2+4x\right)+C$. **5.246.** $\frac{243}{8}\arcsin\frac{x+1}{3}+$ $+\frac{x+1}{324}\sqrt{8-2x-x^2}\left(2x^2+4x+11\right)+C$. **5.247.** $\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{2}\ln(1-\cos t)-\frac{1}{2}\ln(1+\cos t)+C$.
5.248. $-\sin t-\frac{1}{2}\ln(1-\sin t)+\frac{1}{2}\ln(1+\sin t)+C$. **5.249.** $-2\sqrt{4\ln x-\ln^2 x}+$ $+\frac{7}{4}\ln\left|\ln x-2+\sqrt{4\ln x-\ln^2 x}\right|+C$. **5.250.** $\frac{1}{2}\arcsin(\ln x-1)+\frac{1}{2}(\ln x-1)\sqrt{2\ln x-\ln^2 x}+C$.
5.251. $\operatorname{tg}^2 x-4\sqrt{\operatorname{tg} x}-5+2\ln\left(1+\sqrt{\operatorname{tg} x}\right)+C$. **5.252.** $3\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-3\operatorname{tg} x+3\ln|1+\operatorname{tg} x|+C$.
5.253. $-2\ln\left(1-\sqrt{\sin x}\right)+2-2\sqrt{\sin x}+C$. **2.254.** $\sqrt{\cos x}\left(\frac{2}{5}\cos^2 x-\frac{2}{3}\cos x\right)-\frac{\cos^2 x}{2}-$ $-\cos x+C$. **2.255.** $\frac{1}{2}\arcsin e^x+\frac{1}{2}e^x\sqrt{1-e^{2x}}+C$. **5.256.** $-\frac{1}{2}\arcsin e^{-x}-$ $-\frac{1}{2}e^{-x}\sqrt{1-e^{-2x}}+C$. **5.257.** $-\frac{1}{6}\sqrt{10-x^4}$. **5.258.** $\frac{3}{8}\left(5+x^2\right)^{4/3}+C$.
5.259. $\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{4x-x^2}-2\arcsin\frac{x-2}{2}+C$. **5.260.** $\frac{1}{2}(x-3)\sqrt{x^2+6x+10}+$ $+\frac{1}{2}\ln\left(x+3+\sqrt{x^2+6x+10}\right)+C$. **5.261.** $\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{4}\sin\left(2e^x\right)+C$. **5.262.** $-\cos e^x+$ $+\frac{\cos e^x}{3}+C$. **5.263.** $\ln\left(\ln x+\sqrt{1+\ln^2 x}\right)+C$. **5.264.** $\arcsin(2\ln x-1)+C$.
5.265. $\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$. **5.266.** $\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{6}\sin 3x+C$. **2.267.** $2\sqrt{x^2+2x+10}-$ $-3\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+10}\right)+C$. **5.268.** $-\sqrt{6x-x^2-5}+3\arcsin\frac{x-3}{3}+C$.
5.269. $x-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$. **5.270.** $-\frac{(x-1)^{-6}}{6}-\frac{3}{7}(x-1)^{-7}-\frac{3}{8}(x-1)^{-8}-\frac{1}{9}(x-1)^{-9}+C$.
5.271. $\frac{2^x}{\ln 2}\left(x-\frac{1}{\ln 2}\right)+C$. **5.272.** $2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C$. **5.273.** $\frac{1}{8}\ln\frac{2+x^2}{\left|2-x^2\right|}+C$.
5.274. $\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x-3|+C$. **5.275.** $\int_0^3 2x\,dx$. **5.276.** $\int_{-1}^2 (x+1)dx$.
5.277. $\int_{-2}^2\left(8-2x^2\right)dx$. **5.278.** $\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx$. **5.279.** плюс. **5.280.** минус. **5.281.** минус.
5.282. минус. **5.283.** первый. **5.284.** второй. **5.285.** первый. **5.286.** первый.

5.287. $\frac{1}{2}<\int_0^1\frac{dx}{1+\sin^2 x}<1$. **5.288.** $\frac{4}{3}<\int_0^4\frac{dx}{2+\cos^4 x}<2$. **5.289.** 0. **5.290.** $\frac{1}{3}$. **5.291.** $x=0$, $x=4$. **5.292.** $x=-1$, $x=3$. **5.293.** $\frac{80}{3}$. **5.294.** $-\frac{57}{20}$. **5.295.** $\frac{5}{2}+3\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{2}+\ln\frac{3}{2}$.
5.296. $1-2\ln 2$. **5.297.** $\frac{\pi}{4}$. **5.298.** $\frac{\pi}{4}$. **5.299.** $\frac{1}{3}\left(e^8-e^5\right)$. **5.300.** $\frac{2^5-2^{-5}}{5\ln 2}$. **5.301.** $\frac{1}{2}\ln 2$.
5.302. $\frac{1}{2}\ln 2$. **5.303.** $\ln\frac{3+\sqrt{8}}{2+\sqrt{3}}$. **5.304.** $\frac{\pi}{6}$. **5.305.** –0,8. **5.306.** 0. **5.307.** $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.
5.308. $\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4}-1\right)$. **5.309.** $\frac{\pi}{4}$. **5.310.** $\ln\frac{4}{3}$. **5.311.** $\frac{1}{3}\left(e-\sqrt[4]{e}\right)$. **5.312.** $\frac{1}{e-1}$. **5.313.** $7+2\ln 2$.
5.314. $\frac{16}{3}-2\ln 3$. **5.315.** $\frac{8}{3}$. **5.316.** $\frac{16}{3}$. **5.317.** $\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.318.** $\frac{\pi}{4}$. **5.319.** $-\frac{2}{13}$.
5.320. $\frac{2815}{7168}$. **5.321.** 1. **5.322.** $2\ln 2-\frac{3}{4}$. **5.323.** 2. **5.324.** -2. **5.325.** $e-\frac{1}{e}$. **5.326.** $e-\frac{5}{e}$.
5.327. $\frac{\pi}{2}-1$. **5.328.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$. **5.329.** $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **5.330.** $\frac{\pi}{16}$. **5.331.** π^2-4. **5.332.** $\frac{\pi^3}{3}+\pi$.
5.333. $\frac{e(\sin 1-\cos 1)-1}{2}$. **5.334.** $\frac{e(\sin 1+\cos 1)+1}{2}$. **5.335.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. **5.336.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$.
5.337. $2-\frac{\pi}{2}$. **5.338.** $\frac{16}{3}$. **5.343.** **9.** **5.344.** $\frac{1}{6}$. **5.345.** $\frac{15}{8}-2\ln 2$. **5.346.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{5}{6}$.
5.347. π. **5.348.** $\frac{\pi}{4}$. **5.349.** $2\ln 2-\frac{3}{4}$. **5.350.** **1.** **5.351.** $2\left(e+\frac{1}{e}\right)-4$. **5.352.** $\frac{e-1}{2}$.
5.353. $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{9}$. **5.354.** $\frac{\pi}{2}-1$. **5.355.** $2-2\ln 3$. **5.356.** $15+4\ln 2$. **5.357.** 6π.
5.358. 2π. **5.359.** $3\pi a^2$. **5.360.** 3π. **5.361.** $\frac{27\pi}{8}$. **5.362.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **5.363.** $\frac{2}{5}$.
5.364. $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.365.** a^2. **5.366.** **1.** **5.367.** $\frac{3}{2}\pi a^2$. **5.368.** $\frac{27\pi}{2}$. **5.369.** $\frac{9\pi}{4}$. **5.370.** π.
5.371. $\frac{8}{15}$. **5.372.** $\frac{\pi^5}{10}$. **5.373.** $\frac{e^{\pi}-e^{-2\pi}}{4}$. **5.374.** $\frac{1}{\pi}$. **5.375.** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$. **5.376.** $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$.
5.377. $\frac{\pi}{4}$. **5.378.** $\frac{1}{3}$. **5.379.** $\frac{72}{5}\sqrt{3}$. **5.380.** $\frac{8}{15}$. **5.381.** $\frac{\pi}{4}$. **5.382.** $\frac{\pi}{4}$. **5.383.** $\frac{8}{15}$.
5.384. $\frac{3\pi}{4}$. **5.385.** $\frac{e}{2}-1$. **5.386.** $\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$. **5.387.** $\frac{1}{2}\int_{r(\alpha)}^{r(\beta)}r^2\varphi'(r)dr$. **5.388.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ln 2$.
5.389. $\frac{14}{3}$. **5.390.** $\frac{52}{3}$. **5.391.** $\frac{26}{27}\sqrt{13}-\frac{16}{27}$. **5.392.** $\frac{8\sqrt{2}-1}{3}$. **5.393.** e.
5.394. $\frac{1}{4}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$. **5.395.** $\frac{\pi^2}{2}$. **5.396.** 16. **5.397.** $6a^2$. **5.398.** 6. **5.399.** $6\sqrt{3}$.
5.400. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$. **5 401** $2\sqrt{6}$. **5.402.** $\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{e}\right)$. **5.403.** **8.** **5.404.** $8a$. **5.405.** 6π.

5.406. $\sqrt{5}\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. **5.407.** $\frac{8}{3}$. **5.408.** $\frac{1}{3}\left(\left(\frac{\pi^2}{4}+4\right)^{3/2}-8\right)$. **5.409.** $\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

5.410. $2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **5.411.** $\frac{\sqrt{17}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(4+\sqrt{17}\right)$. **5.412.** $\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$.

5.413. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **5.414.** $\frac{5}{24}\left(2+\sqrt{3}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$.

5.415. $a\left(\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)\right)$. **5.416.** $\frac{1}{4}\left(\pi\sqrt{1+\pi^2}-\ln\left(\sqrt{1+\pi^2}-\pi\right)\right)$.

5.417. $\frac{1}{2}\pi abH^2$. **5.418.** $\frac{4}{3}\pi$. **5.419.** $\frac{1}{4}\pi^2$. **5.420.** $\frac{1}{2}\pi^2$. **5.421.** πe^2. **5.422.** $\frac{\pi\left(e^2-1\right)}{2e^4}$.

5.423. $\pi\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$. **5.424.** $\frac{\pi\left(e^2-1\right)}{2e^2}$. **5.425.** $3\pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\right)$. **5.426.** 16π. **5.427.** $\frac{\pi}{6}$.

5.428. $\frac{\pi}{8}$. **5.431.** $2\pi^2$. **5.432.** 4π. **5.434.** $\frac{8}{3}\pi a^2$. **5.435.** $\frac{76}{3}$. **5.436.** $10\ln 6$ кг. **5.437.** 2,6.

5.438. $2-2\ln\frac{3}{2}$. **5.439.** 36. **5.440.** $\ln 2-\frac{1}{2}$. **5.441.** $\int_a^b x^2\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx$.

5.442 $\int_a^b x\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx$. **5.443.** $\frac{3}{35}$. **5.444.** $\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$. **5.445.** $\left(0,\frac{4a}{3\pi}\right)$. **5.446.** $\frac{1}{4}$.

5.447. $\frac{4}{3}a$. **5.450.** $\frac{17}{35}$. **5.451.** πR^3. **5.452.** $\frac{1}{3}\left(\left(1+e^2\right)^{3/2}-2^{3/2}\right)$. **5.453.** $\frac{3}{8}R$.

5.454. $\frac{\pi R^4 H}{2}$. **5.455.** 1,8 км. **5.456.** $\frac{1}{2}\ln\frac{1+t_2^2}{1+t_1^2}$. **5.457.** 0,5 дж. **5.458.** $\frac{\pi}{8}$. **5.459.** ≈ 40 сек. **5.460.** ≈ 55 сек, ≈ 108 сек. **5.461.** $m=m_0\cdot e^{-\frac{\ln 2}{1600}t}$. **5.462.** $\frac{\ln 2}{k}$. **5.463.** ≈ 7705 дж.

5.464. $\approx 1{,}6\cdot 10^{12}$ дж. **5.465.** $\frac{4}{15}\pi\gamma\omega^2R^5$. **5.466.** $\approx 2{,}3\cdot 10^{-3}$ дж. **5.467.** $11a$. **5.468.** $\frac{1}{2}E_0^2$.

5.469. $\frac{1}{4}$. **5.470.** $\frac{1}{3}$. **5.471.** 2. **5.472.** $\frac{1}{8}$. **5.473.** $\frac{\pi}{4}$. **5.474.** $\frac{\pi}{16}$. **5.475.** расходится.

5.476. расходится. **5.477.** расходится. **5.478.** 1. **5.479.** $-\frac{1}{2}$. **5.480.** $\frac{1}{2}e^2$. **5.481.** $\frac{\pi}{6}$.

5.482. $\frac{\pi}{15}$. **5.483.** сходится. **5.484.** сходится. **5.485.** сходится. **5.486.** сходится.

5.487. расходится. **5.488.** расходится. **5.491.** $\frac{1}{2}\pi$. **5.492.** $\frac{4}{3}\pi$. **5.493.** $\sqrt{2}$. **5.494.** $\sqrt{2}$.

5.495. π^2. **5.496.** 2π. **5.499.** нет. **5.500.** нет. **5.503.** 1. **5.504.** $\frac{17}{9}e^{-3}$.

5.505. $\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2\right)$. **5.506.** $\frac{1}{6}\ln 7-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{3}}$. **5.507.** сходится.

5.508. сходится. **5.509.** расходится. **5.510.** расходится. **5.511.** условно сходится.

5.512. условно сходится. **5.513.** $2\sqrt{\ln 2}$. **5.514.** $\frac{3}{2}$. **5.515.** $\frac{3}{2}$. **5.516.** 2.

5.517. Расходится. **5.518.** Расходится. **5.519.** π. **5.520.** $\frac{\pi}{2}$. **5.521.** Расходится. **5.522.** Расходистся. **5.527.** Расходится. **5.529.** π. **5.530.** $\frac{\pi}{2}$. **5.531.** -1. **5.532.** $-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$. **5.533.** Условно сходится. **5.534.** Условно сходится.

ГЛАВА 6

6.1. $x^2+y^2\le 9$. **6.2.** $x^2+y^2>4$. **6.3.** $y<-x$. **6.4.** $\begin{cases} x\ne 0 \\ y\ne 0 \end{cases}$.

6.5. $x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $y\in R$. **6.6.** $x\in R,\quad y\in[2\pi n;\quad \pi+2\pi n]$.

6.7. $-y^2\le x\le y^2$. **6.8.** $y^2-1\le x\le y^2+1$. **6.9.** Верхняя половина эллипсоида $\frac{(x^2-2)^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{16}=1$. **6.10.** Верхняя половина сферы $x^2+y^2+z^2=4$. **6.11.** Однополостный гиперболоид с центром в т. (1; 0; 0). **6.12.** Эллиптический цилиндр второго порядка, смещенный на 3 единицы по оси *оу*. **6.13.** Внутренние точки конуса $x^2+y^2-z^2=0$. **6.14.** Внутренние точки однополостного гиперболоида, не лежащие на поверхности. **6.15.** [4; +∞). **6.16.** (-∞; 9]. **6.17.** (0;1]. **6.18.** [1; +∞). **6.19.** [14; +∞). **6.20.** [-1; +∞). **6.21.** $\frac{1}{4}$; 4; 0; -1; 1. **6.22.** $-\frac{24}{13}$; $\frac{2xy}{x^2+y^2}$; $\frac{2a}{a+1}$.

6.23. –1; $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.24.** $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{3}$. **6.25.** –2; 0. **6.26.** 4; 0. **6.27.** $\begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\ge\frac{1}{4} \\ (x-1)^2+y^2\le 1 \end{cases}$ точки, заключенные между двумя окружностями. **6.28**. $y\le x^2-1$. **6.29.** Сечение эллиптического параболоида плоскостью. **6.30.** Сечение конуса плоскостью (пара прямых, пересекающихся в начале координат). **6.31.** 1. **6.32.** *e*. **6.33.** 1. **6.34.** $e^{1/3}$.

6.35. $y-\frac{y}{x^2}$; $x+\frac{1}{x}$. **6.36.** $dz=\frac{y^3dx+x^3dy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$. **6.37.** $e^{-xy}(1-xy)$; x^2e^{-xy}.

6.38. $-\frac{\cos y^2}{x^2}$; $-\frac{\sin y^2\cdot 2y}{x}$. **6.39.** $y^x\ln y$; $x\cdot y^{x-1}$. **6.40.** $dz=\frac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2}$.

6.41. $-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{y}$; $\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}$. **6.42.** $dz=\frac{(x+y)dx+xdy}{\sqrt{x^2+2xy}}$.

6.43. $dz=e^{xy}\left(1+xy+y^2\right)dx+e^{xy}\left(1+xy+x^2\right)dy$. **6.44.** $dz=\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)-1\right)dx+\frac{x}{y}dy$.

6.45. $du=e^{xyz}(yzdx+xzdy+xydz)$. **6.46.** $du=\left(3x^2+3yz\right)dx+\left(3y^2+3xz\right)dy+\left(3z^2+3xy\right)dy$.

6.47. $du=\ln y\cdot dx+\quad+\frac{x}{y}dy+\frac{\cos z}{2\sqrt{\sin z}}dz$. **6.48.** $du=\ln y\cdot dx+\frac{x}{y}dy+\frac{\cos z}{2\sqrt{\sin z}}dz$.

6.49. $\Delta z=0{,}044$; $dz=0{,}04$. **6.50.** $\Delta z=-0{,}23$; $dz=-0{,}3$. **6.51.** 2.95.

6.52. $8{,}12+0{,}24\cdot\ln 2\approx$ **.** **6.53.** $dz=\dfrac{ydx-xdy}{(x+y)^2+x^2}$. **6.54.** $dz=\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$.

6.55. $dz=\mathrm{tg}\left(\dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{y}dx+\dfrac{x}{y^2}dy\right)$. **6.56.** $dz=\dfrac{e^x dx+e^y dy}{\cos^2\left(e^x+e^y\right)}$.

6.57. $du=(y+z)dx+(x+z)dy+(y+z)dz$. **6.58.** $du=-\dfrac{xdx+ydy+zdz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$.

6.59. $\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{240}\approx 0{,}227$. **6.60.** $-\dfrac{1}{7}$. **6.61.** $\dfrac{2e^{2t}}{e^{4t}+1}$. **6.62.** $e^t\left(-\dfrac{1}{t\cdot\ln^2 t}+\dfrac{1}{\ln t}\right)$.

6.63. $\dfrac{2\left(x+e^{2x}\right)}{x^2+e^{2x}}$. **6.64.** $-\sin x\sqrt{1-x^2}-\dfrac{x\cdot\cos x}{\sqrt{1-x^2}}$. **6.65.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4\cdot\dfrac{\left(x^2+y^2\right)x^5+\left(x^2+y^2\right)^2x^3}{y^4}$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=4\cdot\dfrac{\left(x^2+y^2\right)x^4}{y^3}-4\cdot\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2x^4}{y^5}$. **6.66.** $z'_x=\left(2xy\sin y\cos x-y^2\cos^2 x\right)\cdot\sin y-$

$-\left(x^2\sin^2 y-2xy\sin y\cos x\right)\cdot y\cdot\sin x$ $z'_y=\left(2xy\sin y\cos x-y^2\cos^2 x\right)\cdot x\cdot\cos y+$

$+\left(x^2\sin^2 y-2xy\sin y\cos x\right)\cdot\cos x$. **6.67.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$. **6.68.** $\dfrac{dy}{dx}=1+\dfrac{1}{y^2}$.

6.69. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xe^{2y}-y^2e^{2x}}{ye^{2x}-x^2e^{2y}}$. **6.70.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{y-x}+1}{e^{y-x}-1}$. **6.71.** $z'_x=\dfrac{\dfrac{z}{x+y}-\dfrac{y}{z}}{\dfrac{xy}{z^2}-\ln(x+y)}$

$z'_y=\dfrac{\dfrac{z}{x+y}-\dfrac{x}{z}}{\dfrac{xy}{z^2}-\ln(x+y)}$. **6.72.** $z'_x=\dfrac{2-x}{z+1}$ $z'_y=\dfrac{2y}{z+1}$. **6.73.** $dz=\dfrac{\dfrac{zdx}{1+(xz)^2}-zdy}{y-\dfrac{x}{1+(xz)^2}}$.

6.74. $dz=\dfrac{\left(3x^2+z\right)dx+\left(3y^2+\dfrac{z}{y^2}e^{yz/}\right)dy}{\dfrac{1}{y}\cdot e^{z/y}-x}$. **6.75.** $\dfrac{dz}{dt}=\sin t\cdot\left(\ln t\right)^{\sin t-1}\cdot\dfrac{1}{t}+$

$+\left(\ln t\right)^{\sin t}\cdot\ln(\ln t)\cdot\cos t$. **6.76.** $\dfrac{dz}{dx}=e^{(x+1)^2}\cdot\dfrac{1-2(x+1)^2}{(x+1)^2+e^{2(x+1)^2}}$. **6.77.** 2. **6.78.** $dz=\dfrac{dx+dy}{e^z-1}$.

6.81. $\dfrac{13}{5}$; $(4;-1)$. **6.82.** $2\sqrt{6}$; $(4;\,2;\,2)$. **6.83.** (1; -2; 0); $\sqrt{5}$. **6.84.** $\pi-\arccos\dfrac{4}{\sqrt{4-1}}$.

6.85. $d^2z=\dfrac{2\left(y^2-x^2\right)dx^2-8xydxdy+2\left(x^2-y^2\right)dy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

6.86. $d^2z=e^{x^2y}\left(2y\left(2x^2y+1\right)dx^2+4x\left(x^2y+1\right)dxdy+x^4dy^2\right)$.

6.87. $d^2z=6x\cdot\sin ydx^2+6x^2\cdot\cos ydxdy+\left(-x^3\sin y+12y^2\right)dy^2$.

6.88. $d^2z=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{(y-x)\cdot x}}+\dfrac{y}{4\sqrt{x}(y-x)^{3/2}}\right)dx^2-$

$$-\left(\frac{\sqrt{x}}{y\cdot\sqrt{y-x}}+\frac{\sqrt{x}}{2(y-x)^{3/2}}\right)dxdy-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^{3/2}(3y-2x)}{y^2(y-x)^{3/2}}\;dy^2.$$

6.89. $d^2z=-10dx^2-90dxdy-10dy^2$. **6.90.** $d^2z=\frac{6}{125}dx^2+\frac{32}{225}dxdy-\frac{10}{27}dy^2$.

6.91. $d^2z=-\frac{1}{x}dx^2+\frac{2}{y}dxdy-\frac{x}{y^2}dy^2$.

6.92. $d^2z=\frac{2y^2}{x^4\cos^3\left(\frac{y^2}{x}\right)}\left(x\cos\left(\frac{y^2}{x}\right)+\sin\left(\frac{y^2}{x}\right)\right)dx^2-$

$$-\frac{4y}{x^2\cos^3\left(\frac{y^2}{x}\right)}\left(\cos\left(\frac{y^2}{x}\right)+2y^2\sin\left(\frac{y^2}{x}\right)\right)dxdy+$$

$+\frac{2}{x\cos^3\left(\frac{y^2}{x}\right)}\left(\cos\left(\frac{y^2}{x}\right)+\frac{4y^2}{x}\cdot\sin\left(\frac{y^2}{x}\right)\right)dy^2$. **6.93.** $\frac{6}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. **6.94.** (2; -1); $\sqrt{5}$; 2; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; -1; $-\frac{3}{\sqrt{2}}$; $-\sqrt{2}$; $\alpha=-\frac{\pi}{6}$. **6.95.** $d^2z=y(y-1)x^{y-i}dx^2+$ $+2x^{y-1}(1+y\cdot\ln x)dxdy+x^y\cdot\ln^2x\cdot dy$. **6.99.** $x+y-4z=0$ $x-2=y-2=\frac{z-1}{-4}$.

6.100. $x-y-2z+1=0$ $\frac{x-\frac{\pi}{4}}{1/2}=\frac{y-\frac{\pi}{4}}{-1/2}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-1}$. **6.101.** $2x+7y-5z+4=0$ $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{-5}$. **6.102.** $z=0$; $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{4}$ $z=4$; $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+4}{-4}$.

6.103. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-10/3}{3}=\frac{z+4}{4}$. **6.104.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$; $\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$; $\pi-\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

6.105. $\frac{\pi a}{2\sqrt{6}}$. **6.106.** $(0\;;\;\mp2\sqrt{2}\;;\;\pm2\sqrt{2})$ $(\mp2\;;\;\pm4\;;\;\mp2)$ $(\pm4\;\;\mp2\;;\;0)$. **6.107.** Нет экстремума. **6.108.** $z_{\min}(0;3)=-9$. **6.109.** $z_{\min}(1;3)=10-18\cdot\ln3$. **6.110.** $z_{\min}(0;0)=0$. **6.111.** $z_{\max}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{64}$. **6.112.** $z_{\min}(5;2)=30$. **6.113.** $z_{\min}(0;\;0)=1$. **6.114.** Нет экстремума. **6.115.** Нет экстремума. **6.116.** $z_{\min}(0;\;0)=0$. **6.117.** $z_{\min}(2;1)=-28$. $z_{\max}(-2;-1)=28$. **6.118.** $z_{\min}(1;\;1)=-1$. **6.119.** $z_{\max}(0;0)=2$. **6.120.** $z_{\min}(-1;\;1)=1$.

ГЛАВА 7

7.1. $\pi/4$. **7.2**. 1. **7.3**. Второй. **7.4**. Первый. **7.5.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$.

7.6. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)dx$. **7.7.** 8/3. **7.8.** $\pi/6$. **7.9**. 5. **7.10**. –4. **7.11**. 11/108.

7.12. $(e^3 - 3e + 2)/3$. **7.13**. 1. **7.14**. $4(2\sqrt{2}-1)/15$. **7.15**. 112/9. **7.16**. 5/3. **7.17**. $F(b,d) + F(a,c) - F(a,d) - F(b,c)$.

7.18. $\pi R^2 \Big/ (\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + R) \le I \le \pi R^2 \Big/ (\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - R)$. **7.19**. $19(2 - 3\sqrt{2})/6$. **7.20**. 369/4.

7.21. $8\pi/3$. **7.22**. 6(π+2). **7.23**. 72π. **7.24**. 608π/3. **7.25**. 60. **7.26**. 32. **7.27**. $4\gamma_0 a^2/3$.

7.28. $\pi\gamma_0 R^2/2$. **7.29**. (9/20, 9/20). **7.30**. (6/5,0). **7.31**. 128/15. **7.32**. (8-π)/24. **7.33**. $a^2/6$.

7.34. $21\pi a^4/32$. **7.35**. Первый**.** **7.36**. Второй. **7.37**. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \int\limits_{-\sqrt{(4x-y^2)/2}}^{\sqrt{(4x-y^2)/2}} f(x,y,z)dz$.

7.38. $\int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{4-2x/3} dy \int\limits_0^{3-x/2-3y/4} f(x,y,z)dz$. **7.39** 7/45. **7.40**. 144. **7.41**. 1. **7.42**. 4/15.

7.43. $3\pi\gamma_0 a^3$. **7.44**. 32π. **7.45.** (0,0,2H/3). **7.46**. (0, 0, 3H/4). **7.47**. $\pi\gamma HR^4/6$.
7.48. $\pi\gamma HR^4/10$. **7.49**. $54\pi(2-\sqrt{2})$. **7.50**. $19\pi/24$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сборник задач по математики для ВТУЗов Часть 1. Линейная алгебра и основы математического анализа./Под. ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича - М.:Наука, 1986 г.
2. Б.П. Демидович «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» - М.:Наука, 1977 г.
3. Г.Н. Берман «Сборник задач по курсу математического анализа» - М.:Наука, 1971 г.
4. Г.М. Фихтенгольц Курс дифферинциального и интегрального исчисления, Т.II. – М:Наука, 1969 г.
5. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова Высшая математика в упражнениях. Часть II. – М:Высшая школа, 1997.
6. В.И. Малыхин Математика в экономике. – М.:Инфра-М; 2002.