Эллипсоидальные координаты и геодезические на трехосном эллипсоиде

Пицын Сергей

Апрель 2020

1. Постановка задачи

Пусть эллипсоид в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ задан уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3} = 1, \tag{1}$$

где $0 < a_1 < a_2 < a_3$ — квадраты главных полуосей (такие эллипсоиды, где все квадраты главных полуосей попарно неравны, называются трехосными)[1].

Рассмотрим движение точки единичной массы по инерции по этому эллипсоиду. Так как движение происходит без воздействия каких-либо сил, то силовая функция $U = 0$. Тогда

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2). \tag{2}$$

Наша цель — показать, что существует замена координат, при которой переменные в этой задаче разделяются. Такая замена, соответственно, позволит эту задачу проинтегрировать и получить уравнения движения материальной точки, а, как следствие, и уравнения геодезических на трехосном эллипсоиде.

2. Эллипсоидальные координаты

Рассмотрим уравнение

$$f(\lambda) = \frac{x_1^2}{a_1 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 + \lambda} = 1,$$

где a_i — все те же квадраты главных полуосей эллипсоида. Докажем, что корни этого уравнения вещественны. В самом деле, в интервале $(-\infty, -a_3)$ $f(\lambda)$ очевидно отрицательна, а значит, корней в этом интервале нету. Когда λ пробегает интервал $(-a_3, -a_2)$, $f(\lambda)$ монотонно пробегает интервал $(-\infty, +\infty)$. Таким образом, в интервале $(-a_3, -a_2)$ найдется корень, и притом только один. Аналогично в интервале $(-a_2, -a_1)$ есть единственный корень. Далее, когда λ пробегает интервал $(-a_1, +\infty)$, $f(\lambda)$ монотонно уменьшается в интервале $(+\infty, 0)$. Следовательно и в этом интервале будет единственная точка, где $f(\lambda)$ примет значение 1, то есть корень.

[1]Для эллипсоидов вращения задача о движении точки по инерции легко решается методом Рауса с использованием циклического интеграла площадей. — *А. Ш.*

Обозначим эти корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Они-то и называются эллипсоидальными координатами. Таким образом, получаем:

$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_1} + \frac{x_2^2}{a_2+\lambda_1} + \frac{x_3^2}{a_3+\lambda_1} = 1,$$
$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_2} + \frac{x_2^2}{a_2+\lambda_2} + \frac{x_3^2}{a_3+\lambda_2} = 1,$$
$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_3} + \frac{x_2^2}{a_2+\lambda_3} + \frac{x_3^2}{a_3+\lambda_3} = 1.$$

Выразим декартовы координаты через эллипсоидальные. Для этого домножим первое уравнение на $a_3 + \lambda_1$ и вычтем из него второе, домноженное на $a_3 + \lambda_2$. Получим:

$$x_1^2\left(\frac{a_3+\lambda_2}{a_1+\lambda_1} - \frac{a_3+\lambda_1}{a_1+\lambda_2}\right) + x_2^2\left(\frac{a_3+\lambda_2}{a_2+\lambda_1} - \frac{a_3+\lambda_1}{a_2+\lambda_2}\right) = \lambda_2 - \lambda_1,$$

или, после сокращений

$$\frac{a_1-a_3}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)}x_1^2 + \frac{a_2-a_3}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)}x_2^2 = 1.$$

Проделав аналогичную операцию с первым и третьим уравнением в системе, получим систему с исключенной переменной x_3:

$$\frac{a_1-a_3}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)}x_1^2 + \frac{a_2-a_3}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)}x_2^2 = 1,$$
$$\frac{a_1-a_3}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_3)}x_1^2 + \frac{a_2-a_3}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_3)}x_2^2 = 1.$$

Аналогично исключаем переменную x_2 из нее, и получаем одно уравнение:

$$\frac{(a_1-a_3)(a_1-a_2)}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}x_1^2 = 1,$$

откуда

$$x_1^2 = \frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_3)(a_1-a_2)}.$$

Для x_2^2 и x_3^2, очевидно, будут иметь место аналогичные формулы, которые получаются с помощью точно таких же манипуляций. Итого:

$$x_1^2 = \frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_3)(a_1-a_2)},$$
$$x_2^2 = \frac{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_3)}{(a_2-a_3)(a_2-a_1)},$$
$$x_3^2 = \frac{(a_3+\lambda_1)(a_3+\lambda_2)(a_3+\lambda_3)}{(a_3-a_2)(a_3-a_1)}.$$

Так мы выразили старые декартовы координаты через новые эллипсоидальные. Это замечательно. Добавим, кстати, что исходный эллипсоид в эллипсоидальных координатах будет задаваться уравнением $\lambda_3 = 0$ (единственная лямбда, которая может быть неотрицательной, самая большая), так как в этом случае как раз и получается уравнение исходного эллипсоида (1). А λ_1 и λ_2 в этом случае зададут на нем систему координат.

Лирическое отступление: Легко заметить, что, полагая $\lambda_3 = \text{const}$, получаем какой-то эллипсоид. Если положить $\lambda_2 = \text{const}$, то легко понять, что получится однополосный гиперболоид, а при $\lambda_1 = \text{const}$ гиперболоид будет двуполосным. Это явно следует из расположения корней $f(\lambda)$ на числовой оси относительно чисел a_1, a_2 и a_3. И это довольно симпатично.

3. Решение задачи

Наша ближайшая цель — посчитать функцию Лагранжа (2) в эллипсоидальных координатах. Для этого воспользуемся трюком, а именно: возьмем выведенное ранее выражение через эллипсоидальные координаты, например, для x_1^2 и возьмем от обеих частей логарифм. Получим: $2\ln(x_1) = \sum_{i=1}^{3}\ln(a_1+\lambda_i) + \mathrm{const}$. Теперь продифференцируем обе части по t (здесь есть зависимость от t, т. к. теперь x_i понимаем как координаты точки при движении). Получим:

$$\frac{2\dot{x}_1}{x_1} = \frac{\dot{\lambda}_1}{a_1+\lambda_1} + \frac{\dot{\lambda}_2}{a_1+\lambda_2} + \frac{\dot{\lambda}_3}{a_1+\lambda_3} = \frac{\dot{\lambda}_1}{a_1+\lambda_1} + \frac{\dot{\lambda}_2}{a_1+\lambda_2},$$

так как $\lambda_3 = 0$. Возведем обе части в квадрат и домножим на x_1^2. Тогда получим:

$$4\dot{x}_1^2 = \frac{x_1^2\dot{\lambda}_1^2}{(a_1+\lambda_1)^2} + \frac{x_1^2\dot{\lambda}_2^2}{(a_1+\lambda_2)^2} + \frac{2x_1^2\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)}.$$

Проделаем аналогичные выкладки с выражениями для x_2 и x_3 и сложим три полученных равенства. Итого:

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 = \frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{x_i^2\dot{\lambda}_1^2}{(a_i+\lambda_1)^2} + \frac{x_i^2\dot{\lambda}_2}{(a_i+\lambda_2)^2}\right) + \sum_{i=1}^{3}\frac{2x_i^2\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2}{(a_i+\lambda_1)(a_i+\lambda_2)}\right] = 2L.$$

Теперь подставим вместо x_i их выражения через λ_1 и λ_2 и получим то, что надо.

Давайте подставим сначала в

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{2x_i^2\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2}{(a_i+\lambda_1)(a_i+\lambda_2)}.$$

Легко видеть, что после подстановки и сокращений получается

$$2\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2\left(\frac{a_1}{(a_1-a_3)(a_1-a_2)} + \frac{a_2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)} + \frac{a_3}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}\right) = 0.$$

Замечательно!

Теперь подставим во все остальное. Тогда получим:

$$L = \frac{1}{8}(M_1(\lambda_1,\lambda_2)\dot{\lambda}_1^2 + M_2(\lambda_1,\lambda_2)\dot{\lambda}_2^2),$$

где

$$M_1(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)}, \quad M_2(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}$$

не зависят от $\dot{\lambda}_1$ и $\dot{\lambda}_2$.

Как мы видим, относительно переменных $\dot{\lambda}_1$ и $\dot{\lambda}_2$ функция L является однородной степени 2, а значит по теореме Эйлера получаем, что после преобразования Лежандра относительно переменных $\dot{\lambda}_1$ и $\dot{\lambda}_2$ функция L не изменится.

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial\dot{\lambda}_1} = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_1\dot{\lambda}_1}{4(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)}, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial\dot{\lambda}_2} = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2\dot{\lambda}_2}{4(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}.$$

И тогда

$$H = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}(g(\lambda_1)p_1^2 + g(\lambda_2)p_2^2).$$

То есть видно, что переменные в эллипсоидальных координатах разделились, как мы и хотели. Ура!

Дальше, как и говорилось в начале, задачу можно проинтегрировать и получить уравнения движения и геодезические, но явный вид закона получится слишком сложный и не слишком интересный, поэтому лучше остановимся на приятном.

Список литературы

[1] К. Якоби. Лекции по динамике.

[2] А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Динамика твердого тела.