Ядро оператора Эйлера

Н. Колегов

8 апреля 2020 г.

1. Оператор Эйлера

Пусть $L(t, q(t), \dot{q}(t))$ — функция Лагранжа, где $q(t) = (q_1(t), \dots, q_m(t))$. Будем считать далее, что функции L, q достаточно гладкие, а также $t \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$, где Ω — область на прямой. Определим *оператор Эйлера* $\mathbf{E}$ как набор дифференциальных операторов $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_m)$, действующих по следующему правилу

$$\mathbf{E}_\alpha(L) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \ \ \alpha = 1, \dots, m.$$

При этом $\mathbf{E}(L) = (\mathbf{E}_1(L), \dots, \mathbf{E}_m(L))$. Таким образом, уравнения Эйлера — Лагранжа могут быть записаны в компактной форме $\mathbf{E}(L)[t, q(t), \dot{q}(t)] = 0$.

Зафиксируем $[t_1, t_2] \subseteq \Omega$. Определим *функционал действия*

$$S[q] = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(t, q(t), \dot{q}(t))dt \tag{1.1}$$

Отметим, что $\mathbf{E}(L)$ можно получить «проварьировав» функционал действия. Для этого рассмотрим приращение $S[q+h] - S[q]$ при условии $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Тогда, применяя формулу Тейлора, а затем интегрируя по частям, получим

$$S[q+h] - S[q] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \big(L(t, q(t) + h(t), \dot{q}(t) + \dot{h}(t)) - L(t, q(t), \dot{q}(t))\big)\, dt =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} h_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{h}_\alpha \right) dt + r(h) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^{m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) h_\alpha + r(h).$$

Откуда получаем

$$S[q+h] - S[q] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^{m} \mathbf{E}_\alpha(L)[t, q(t), \dot{q}(t)] h_\alpha(t) dt + r(h), \ \ \frac{||r||}{||h||} \to 0, \text{ при } h \to 0. \tag{1.2}$$

где под $||\cdot||$ понимаем C^1-норму на отрезке $[t_1, t_2]$. Заметим, что мы фактически получили ограничение действия производной Фреше на подпространство функций с нулевыми значениями на концах отрезка t_1, t_2.

2. Калибровка Лагранжиана

Преобразования Лагранжиана называются *калибровочными*, если они не изменяют уравнений Эйлера — Лагранжа. Простые примеры калибровочных преобразований: $L \mapsto \mathrm{const} \cdot L$, $L \mapsto L + \mathrm{const}$. Заметим, что если прибавить к лагранжиану такую функцию $f(t, q(t), \dot{q}(t))$, что $\mathbf{E}(f)[t, q(t), \dot{q}(t)] \equiv 0 \, \forall t, \forall q(t)$, то такое преобразование также очевидно будет калибровочным. Имеет место следующее утверждение.

***Теорема* 2.1.** $\mathbf{E}(f)[t, q(t), \dot{q}(t)] \equiv 0 \, \forall t, \forall q(t)$ *выполнено тогда и только тогда, когда* $f(t, q(t), \dot{q}(t))$ *является полной производной по* t *от некотрой фунцкии, т.е.*

$$\exists g(t, q(t), \dot{q}(t)) : \; f = \dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha.$$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathbf{E}(f)[t, q(t), \dot{q}(t)] \equiv 0 \, \forall t, \forall q(t)$. Для $\varepsilon \in [0, 1]$ рассмотрим функцию $f_\varepsilon = f(t, \varepsilon q(t), \varepsilon \dot{q}(t))$. Продифференцируем ее по ε.

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(t, \varepsilon q(t), \varepsilon \dot{q}(t)) = \sum_{\alpha=1}^{m} \left[q_\alpha \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\bigg|_{(t, \varepsilon q(t), \varepsilon \dot{q}(t))} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha}\bigg|_{(t, \varepsilon q(t), \varepsilon \dot{q}(t))} \right]$$

Ко второму слагаемому применим правило Лейбница о дифференцировании произведения.

$$\frac{d}{d\varepsilon} f_\varepsilon = \sum_{\alpha=1}^{m} \left[q_\alpha \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\bigg|_{(t, \varepsilon q(t), \varepsilon \dot{q}(t))} - q_\alpha \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha}\bigg|_{(t, \varepsilon q(t), \varepsilon \dot{q}(t))} \right) + \frac{d}{dt} \left(q \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha}\bigg|_{(t, \varepsilon q(t), \varepsilon \dot{q}(t))} \right) \right].$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} f_\varepsilon = \sum_{\alpha=1}^{m} \left(q_\alpha \mathbf{E}_\alpha(f)[t, \varepsilon q(t), \varepsilon \dot{q}(t)] + \dot{g}_\alpha \right)$$

для некоторых функциий g_α. По условию первое слагаемое равно нулю. Далее, обозначая сумму всех g_α как g_1,

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(t, \varepsilon q(t), \varepsilon \dot{q}(t)) = \dot{g}_1(\varepsilon, t, q(t), \dot{q}(t)),$$

$$\int_0^1 \frac{d}{d\varepsilon} f(t, \varepsilon q(t), \varepsilon \dot{q}(t)) d\varepsilon = \int_0^1 \dot{g}_1(\varepsilon, t, q(t), \dot{q}(t)) d\varepsilon$$

$$f(t, q(t), \dot{q}(t)) - f(t, 0, 0) = \frac{d}{dt} \int_0^1 g_1(\varepsilon, t, q(t), \dot{q}(t)) d\varepsilon$$

$$f(t, q(t), \dot{q}(t)) = \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 g_1(\varepsilon, t, q(t), \dot{q}(t)) d\varepsilon + \int_{t_0}^{t} f(\xi, 0, 0) d\xi \right)$$

Тогда то выражение, к которому применяется оператор дифференцирования по t, и будет искомой функцией g.

(⇐) Будем рассматривать $f = f(t, q(t), \dot{q}(t))$ как функцию Лагранжа. Возьмем произвольный отрезок $[t_1, t_2] \subseteq \Omega$ и рассмотрим S — соответствующий функционал действия (см. 1.1). Тогда

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t, q(t), \dot{q}(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} dg = g(t_2, q(t_2), \dot{q}(t_2)) - g(t_1, q(t_1), \dot{q}(t_1))$$

Значит, если $h(t_1) = h(t_2) = 0$, то $S[q+h] - S[q] = 0 \ \forall q(t), h(t)$. Поэтому из 1.2 получаем, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^{m} \mathbf{E}_\alpha(f)[t, q(t), \dot{q}(t)] h_\alpha(t) dt \equiv 0 \ \ \forall h(t).$$

Следовательно, $\mathbf{E}(f)[t, q(t), \dot{q}(t)] \equiv 0 \ \forall q(t) \ \forall t \in [t_1, t_2]$. Т.к. равенство верно на любом отрезке $[t_1, t_2] \subseteq \Omega$, то оно верно и на всем Ω.

$\square$

Отметим, что сформулированные выше утверждения естественным образом переносятся на случай, когда $(q_1, \ldots, q_m)$ — локальные координатны в окрестности точки на гладком многообразии.

Список литературы

[1] П. Олвер, *Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям*, М:Мир, 1989