Теорема Нётер

А. Н. Швец

4 апреля 2020 г.

1. Векторные поля и их фазовые потоки

Пусть M — гладкое многообразие с локальными координатами $x = (x_1, \dots, x_n)$. Дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x)\partial_{x_i}, \tag{1}$$

где $\partial_{x_i} = \partial/\partial x_i$, отождествляются, как известно, с векторными полями на M. *Фазовый поток* системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{d\varepsilon} = \xi_i(x), \quad i = 1, \dots, n \tag{2}$$

есть однопараметрическое семейство отображений g^ε, отображающих начальное условие $x|_0$ в решение $x|_\varepsilon$ уравнений (2) в момент времени ε. При определённых предположениях о функциях $\xi_i(x)$ (в дальнейшем считаем их выполненными) фазовый поток существует, по крайней мере, при ε, достаточно близких к нулю.

Преобразования g^ε образуют однопараметрическую абелеву локальную группу Ли, поскольку, очевидно,

$$g^0 = \mathrm{id}, \quad g^{\alpha+\beta} = g^\beta \circ g^\alpha, \quad (g^\alpha)^{-1} = g^{-\alpha},$$

по крайней мере, при достаточно малых α, β. Группа *локальная,* поскольку групповая структура на множестве $G = \{g^\varepsilon\}$ определена, вообще говоря, лишь в окрестности единицы группы. В дальнейшем термин «локальный» применительно к группам будет опускаться. Убедитесь, что $g^\varepsilon = \exp(\varepsilon\mathbf{v}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathbf{v}^k/k!$.

Поле $\mathbf{v}$ называется *инфинитезимальной образующей,* или *генератором* группы G.

Действие групповых преобразований g^ε на M естественным образом продолжается до действия на $C^1(M)$ — множество гладких функций на M:

$$(g^\varepsilon(f))(x) = f(g^\varepsilon(x)).$$

Тогда, дифференцируя по ε и полагая $\varepsilon = 0$, получим

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} f(g^\varepsilon(x)) = \mathbf{v}(f), \tag{3}$$

что и даёт право отождествить векторные поля с дифференциальными операторами первого порядка. Генератор, если можно так выразиться, осуществляет групповое преобразование при бесконечно малом ε:

$$g^\varepsilon(f) = f + \varepsilon\mathbf{v}(f) + o(\varepsilon).$$

Между прочим, для группы $g^\varepsilon\colon x \mapsto x + \varepsilon$ с генератором ∂_x получаем формулу Тейлора

$$f(x + \varepsilon) = \exp(\varepsilon\partial_x)(f(x)).$$

2. Вариационные симметрии лагранжевых систем

Пусть $M = \{x\}$ — конфигурационное многообразие лагранжевой системы, $M^* = \{(x, \dot{x})\}$ — его фазовое многообразие (то есть касательное расслоение к M), $L\colon \mathbb{R} \times M^* \to \mathbb{R}$ — лагранжиан, $\mathcal{L}[x] = \int L\,dt$ — соответствующий лагранжев интегральный функционал.

В предыдущем разделе мы установили соответствие между векторными полями $\mathbf{v}$ на M и однопараметрическими группами $g^\varepsilon = \exp(\varepsilon\mathbf{v})$ преобразований M. Действие g^ε на координаты x продолжается согласованным образом до действия на скорости $\dot{x}$:

$$g^\varepsilon(x) = \hat{x}, \quad (g^\varepsilon)^*(\dot{x}) = \dot{\hat{x}}.$$

Здесь $(g^\varepsilon)^*$ — дифференциал преобразования g^ε. Условия согласованности есть *условия Пфаффа:*

$$(d\hat{x}_i = \dot{\hat{x}}_i\,dt) \bmod (dx_j = \dot{x}_j\,dt), \quad i, j = 1, \dots, n, \tag{4}$$

выражающиеся в том, что производные по t при преобразованиях переходят снова в производные. Другими словами, требуется, чтобы под действием преобразования скорость $\dot{x}$ гладкой кривой на M в её точке x переводилась преобразованием в скорость $\dot{\hat{x}}$ преобразованной кривой в её точке $\hat{x}$. Так определяется операция первого *продолжения* группы G, $\mathbf{pr}^{(1)}\,G$. Аналогичным образом можно построить и высшие продолжения группы G, групповые преобразования которых действуют согласованно на $(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \dots, x^{(n)})$.

Операция продолжения групповых преобразований g^ε переносится в силу (3) на генераторы:

$$\mathbf{pr}^{(1)}\,\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(0)} \partial_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(1)} \partial_{\dot{x}_i}, \quad \xi_i^{(0)} = \xi_i, \quad \xi_i^{(1)} = \dot{\xi}_i \tag{5}$$

(проверьте, пользуясь условиями Пфаффа (4)!).

Заметим, что коэффициенты ξ векторного поля (5) (они называются *характеристиками*) зависят только от x. Ничто не мешает позволить им зависеть также от t, формулы продолжения (5) останутся теми же.

Дальнейшее обобщение заключается в том, чтобы позволить характеристикам ξ зависеть ещё и от скоростей. Можно показать, что и в этом случае формулы продолжения (5) останутся в силе. Однако здесь нужно заметить, что в формулах продолжения коэффициенты $\dot{\xi}$ будут уже зависеть от $\ddot{x}$, из-за чего станет невозможным определить действие группы $\exp(\varepsilon\,\mathbf{pr}^{(1)}\,\mathbf{v})$ ни на $M^* = \{(x, \dot{x})\}$, ни даже на $M^{(k)} = M^{\underbrace{**\cdots*}_{k}} = \{(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots x^{(k)})\}$ для некоторого конечного k. Тем не менее при определённых оговорках можно определить действие $\mathbf{pr}^{(1)}\,G$ на гладких кривых на M.

Конечно, можно обобщать понятие векторного поля и дальше. Можно позволить характеристикам зависеть от высших производных. Но такое обобщение не найдёт полезного применения в задачах теоретической механики, когда лагранжиан L зависит самое большее от первых производных. Можно рассмотреть более общие поля вида

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial_{x_i} + \tau\partial_t,$$

и получить для них формулы продолжения, обобщающие (5) (они оказываются более сложными). Но, как оказывается, такое обобщение ничего полезного уже не добавит, поскольку поля данного вида будут в некотором смысле задавать те же преобразования, что и поля с $\tau = 0$.

Они в этом смысле (который мы не уточняем) будут эквивалентны своим *эволюционным представителям* — полям вида

$$\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \tau \dot{x}_i) \partial_{x_i}.$$

3. Теорема Нётер

Итак, рассмотрим обобщённое векторное поле вида (1), где функции ξ_i зависят от $(t, x, \dot{x})$. Назовём его *полем обобщённой симметрии* лагранжевой задачи $\mathcal{L}[x] = \int L(t, x, \dot{x})\, dt$, если найдётся такая дифференциальная функция A, что

$$\mathbf{pr}^{(1)}\, \mathbf{v}(L) = \dot{A}. \tag{6}$$

Под *дифференциальной функцией* мы понимаем функцию независимой переменной t, зависимых x_i и производных вплоть до некоторого порядка.

В оправдание названия полей обобщённых симметрий заметим, что в своём инфинитезимальном действии такие поля прибавляют к лагранжиану калибровочное слагаемое $\varepsilon \dot{A}$, что означает добавление к функционалу $\mathcal{L}$ постоянного функционала $\varepsilon \int \dot{A}\, dt$ (добавка зависит лишь от значений функций $x(t)$ на концах отрезка интегрирования, и, таким образом, не меняется при варьировании). Это, конечно, никак не сказывается на стационарных точках $\mathcal{L}$, следовательно, групповые преобразования переводят решения $x(t)$ уравнений Эйлера — Лагранжа в решения.

Теорема (A. E. Noether)**.** Пусть $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial_{x_i}$ — поле обобщённой симметрии лагранжевой задачи $\mathcal{L}$ и

$$I(t, x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - A.$$

Тогда

$$\dot{I} = -\sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathbf{E}_i(L). \tag{7}$$

Доказательство. Непосредственная проверка с учётом (6) и (5) (докажите!). □

Теорема Нётер устанавливает соответствие между обобщёнными симметриями вариационных задач и законами сохранения (первыми интегралами) уравнений Эйлера — Лагранжа. Из теоремы непосредственно вытекает, что

$$\dot{I} = 0 \bmod \mathbf{E}(L) = 0,$$

и, следовательно, I является первым интегралом уравнений Эйлера — Лагранжа.

Приведённая здесь формулировка теоремы Нётер является более общей, нежели та, которая обычно приводится в учебниках по теоретической механике. В традиционных (слабых) формулировках ограничиваются обычными (не обобщёнными) полями симметрий, у которых характеристики не зависят от скоростей, а функция A равна нулю. При таком подходе могут получиться лишь первые интегралы, линейные по отношению к скоростям. Другие важные случаи первых интегралов (например, интеграл Якоби, см. задачу 2) не находят объяснения с позиций слабой теоремы Нётер. Сильная теорема связывает любые нетривиальные интегралы уравнений Эйлера — Лагранжа с соответствующими обобщёнными симметриями лагранжевой задачи. Эта связь между симметриями и законами сохранения является ключевой во всех лагранжевых задачах математической физики, не только в теоретической механике, но и в механике сплошных сред, квантовой теории поля, геометрии.

4. Задачи

1. Проверьте, что

   - При $g^\varepsilon\colon x \mapsto x + \varepsilon$ получается $\mathbf{v} = \partial_x$ — генератор группы сдвигов — аддитивной группы $\mathbb{R}$.
   - При $g^\varepsilon\colon x \mapsto e^\varepsilon x$ получается $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n x_i \partial_{x_i}$ — генератор группы гомотетий — мультипликативной группы $\mathbb{R}^+$.
   - При $g^\varepsilon\colon (x, y) \mapsto (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon)$ получается $\mathbf{v} = -y\partial_x + x\partial_y$ — генератор группы поворотов SO(2).

2.
   - Найдите поле обобщённой симметрии в случае наличия циклической координаты ($\partial L/\partial x_\text{c} = 0$) и соответствующий в силу теоремы Нётер первый интеграл.
   - Покажите, что обобщённое поле $\mathbf{v} = -\sum_{i=1}^n \dot{x}_i \partial_{x_i}$ является полем вариационной симметрии лагранжевой задачи в автономном случае ($\partial L/\partial t = 0$). Найдите соответствующий первый интеграл. Между прочим, указанное поле служит эволюционным представителем поля ∂_t, которое, очевидно, сохраняет лагранжев функционал в автономном случае.
   - В задаче о движении точки на плоскости в центральном поле сил найдите первый интеграл, отвечающий поворотной симметрии задачи. Объясните механический смысл интеграла.

3. Пусть $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/\varphi(x, y)$, где φ — однородная функция степени 2 совокупности своих аргументов. Найдите две обобщённых вариационных симметрии задачи, и, пользуясь соответствующими двумя нётеровыми первыми интегралами, найдите движение. *Подсказки:* 1) теорема Эйлера об однородных функциях! 2) Исключите dt из условий постоянства нётеровых интегралов, получите уравнение первого порядка относительно $y(x)$. Убедитесь, что полученное уравнение однородное, и решите его с помощью уместной в таких случаях подстановки. А какая подстановка уместна? Как известно, однородное уравнение первого порядка $\Phi(x, y, y') = 0$ может быть переписано в равносильной форме через полный набор инвариантов однородности, в качестве которых можно взять $u = y/x$, $p = y' = u + xu'$, то есть как $\tilde{\Phi}(u, u + xu') = 0$. После подстановки переменные разделяются. 3) Когда найдена траектория, уже нетрудно найти закон движения.

4. Пусть $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 + k/r^2$, где $r^2 = x^2 + y^2$. Рассмотрите группу преобразований $(t, x, y) \mapsto (e^{2\varepsilon}t, e^\varepsilon x, e^\varepsilon y)$, убедитесь, что групповые преобразования сохраняют функционал $\int L\,dt$. Найдите генератор группы, затем его эволюционный представитель. Проверьте, что эволюционный представитель является обобщённой вариационной симметрией лагранжевой задачи (совпадение? не думаю). Найдите соответствующий нётеров интеграл. Решите задачу, пользуясь нётеровым интегралом совместно с интегралом Якоби (траекториями движения должны получиться *спирали Котса,* Cotes spirals, в полярных координатах имеющие в типичном случае вид наподобие $r = a/\cos(b\theta + c)$).

5. В задаче о движении точки на плоскости по инерции, $T = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$ найдите наиболее общий вид первого интеграла, пользуясь (7). Найдите также общий вид обобщённой симметрии этой задачи.

6. Выведите формулу продолжения (5) 1) для обычных полей (характеристики зависят только от x), 2) для обобщённых полей (характеристики зависят от $x, \dot{x}$) — *этот пункт для желающих отличиться*.