

# Пара слов о преобразовании Лежандра

А. Н. Шве́ц

29 апреля 2020 г.

Преобразование Лежандра, знакомое нам в связи с методом Рауса и уравнениями Гамильтона, является ярким примером преобразования, в которое вовлечены не только независимые и зависимые переменные, но и первые производные (такие преобразования называются *контактными*).

Пусть  $u(x_1, \dots, x_n)$  — гладкая функция своих аргументов,  $p_i = \partial u / \partial x_i$ . Осуществим переход от букв  $(x, u, p)$  к новым буквам  $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{p})$  по формулам

$$\hat{x}_i = p_i, \quad \hat{u} = \sum_{i=1}^n p_i x_i - u, \quad \hat{p}_i = x_i. \quad (1)$$

Это и есть преобразование Лежандра. Хорошо видно, что преобразование является инволюцией.

Заметим, что переменные  $(x, u, p)$  не являются вполне независимыми. Они независимы функционально, (между ними нет функционального соотношения), однако зависимы дифференциально — имеется соотношение с участием их дифференциалов. Внешняя форма Пфаффа обращается для них в ноль:

$$du - \sum_{i=1}^n p_i dx_i = 0. \quad (2)$$

Преобразования в пространстве независимых, зависимых переменных и первых производных (*пространстве 1-струй* функции  $u$ ) только тогда будут осмысленными, если они сохраняют соотношение Пфаффа, то есть в новых переменных также должно выполняться  $\hat{p}_i = \partial \hat{u} / \partial \hat{x}_i$ .

Для преобразования Лежандра это так. Действительно, с учётом (1)

$$d\hat{u} - \sum_{i=1}^n \hat{p}_i d\hat{x}_i = \sum_{i=1}^n (p_i dx_i + x_i dp_i) - du - \sum_{i=1}^n x_i dp_i = \sum_{i=1}^n p_i dx_i - du,$$

что равно нулю в силу (2).

Преобразование Лежандра можно использовать для решения обыкновенных дифференциальных уравнений Клеро (и для упрощения уравнений других типов)

$$\Phi(p, xp - u) = 0, \quad (3)$$

где  $p = u'$ . После выполнения преобразования Лежандра в новых переменных получим

$$\Phi(\hat{x}, \hat{u}) = 0, \quad (4)$$

уравнение отнюдь не дифференциальное. Разрешив его относительно  $\hat{u}$ , получим  $\hat{u} = \varphi(\hat{x})$ , и, после возврата к прежним переменным, получим

$$xp - u = \varphi(p) \quad \text{или} \quad u = xp - \varphi(p).$$

Мы получили однопараметрическое семейство решений, в котором в качестве параметра выступает  $p = u'$ . Решения  $u(x)$  являются аффинными функциями относительно  $x$ , их графики — прямые. Помимо семейства линейных функций, среди решений может появиться особое, его график является огибающей семейства прямых. Его можно найти, исключив  $p$  из уравнений

$$\Phi = 0, \quad \frac{d\Phi}{dp} = 0$$

(это стандартный способ нахождения огибающих семейства кривых, заданных неявно). Или, как вариант, можно из указанных уравнений получить выражения

$$x = \alpha(p), \quad u = \beta(p).$$

Это параметрическое представление особого решения, где график запараметризован  $p$  — тангенсом угла наклона. Эта параметризация корректна на участках выпуклости графика, когда вдоль кривой  $p$  меняется монотонно. Особое решение как раз отвечает случаю, когда уравнение (4) нельзя разрешить относительно  $\hat{x} = p$ . Для неособых решений, конечно, такая параметризация неуместна.