

# Малые колебания консервативных лагранжевых систем

А. Н. Шве́ц

4 апреля 2020 г.

## 1. Состояния равновесия

Рассмотрим консервативную лагранжеву систему, заданную лагранжианом  $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$  (не зависящим от времени). *Положением равновесия* такой системы назовём решение уравнений Эйлера — Лагранжа вида  $q(t) = q^* = \text{const}$ , *состоянием равновесия* — пару  $(q, \dot{q}) = (q^*, 0)$ . В дальнейшем без ограничения общности считаем, что эта константа нулевая, то есть положение равновесия находится в начале координат; если это не так, то сдвинем соответствующим образом координаты.

## 2. Линеаризация лагранжевых уравнений

Во многом поведение решений лагранжевых уравнений вблизи состояния равновесия сходно с поведением решений системы линеаризованных уравнений. Для выполнения линеаризации следует представить уравнения Лагранжа в виде системы уравнений первого порядка (ввести переменные  $v = \dot{q}$ ), а затем разложить правые части полученных уравнений в тейлоровские ряды в окрестности состояния равновесия  $(0, 0)$ , отбросив члены разложения степени выше первой.

Однако этот универсальный подход, годящийся не только для лагранжевых уравнений, но и для вообще любых, можно значительно упростить, полагаясь на вариационную специфику уравнений. Заметим, во-первых, что при линеаризации лагранжевых уравнений снова получаются лагранжевы, но только линейные (проверьте!). Во-вторых, лагранжианам, квадратичным по скоростям отвечают линейные уравнения, и наоборот, линейные лагранжевы уравнения отвечают квадратичным лагранжианам (тоже проверьте!). Всё это позволяет свести операцию линеаризации лагранжевых уравнений к манипуляциям лишь с одной функцией Лагранжа (вместо манипуляций со многими правыми частями уравнений).

Нужно разложить в тейлоровский ряд сам лагранжиан  $L$  в окрестности состояния равновесия по отношению ко всем фазовым переменным  $(q, \dot{q})$ , отбрасывая члены разложения степени выше *второй*. По полученному в результате лагранжиану  $\tilde{L}$  уже нужно строить уравнения, они заведомо будут линейными.

В задачах механики, когда  $L = 1/2 \cdot \sum_{i,j} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q)$ , получаем

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(0) \dot{q}_i \dot{q}_j - \left( U(0) + \sum_k \frac{\partial U(0)}{\partial q_k} q_k + \frac{1}{2} \sum_{l,m} \frac{\partial^2 U(0)}{\partial q_l \partial q_m} q_l q_m \right).$$

С учётом того, что в положении равновесия  $\partial U(0)/\partial q_k = 0$ , а константа  $U(0)$  является калибровочной, получим

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(0) \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 U(0)}{\partial q_i \partial q_j} q_i q_j.$$

Введём обозначения:  $A_{ij} = a_{ij}(0)$  — матрица кинетической энергии,  $B_{ij} = \partial^2 U(0)/\partial q_i \partial q_j$  — матрица (Гессе) потенциальной энергии. Тогда (проверьте!)

$$\mathbf{E}_i(\tilde{L}) = \sum_s A_{is} \ddot{q}_s + \sum_s B_{is} q_s.$$

Наша следующая забота — линейными заменами координат придать полученным уравнениям  $\mathbf{E}(\tilde{L}) = 0$  наиболее простой вид. Заметим, что обе матрицы,  $A$  и  $B$ , симметрические, и к тому же матрица  $A$  определённо-положительная (последнее вытекает из определённости положительности кинетической энергии). Линейные преобразования координат  $q$  продолжают до линейных (и тех же самых) преобразований скоростей  $\dot{q}$ . Как известно из линейной алгебры, линейными преобразованиями можно одновременно привести пару квадратичных форм, одна из которых определённо-положительна, к диагональному виду, причём определённо-положительная превратится в сумму квадратов. Для доказательства нужно задать в линейном пространстве евклидову структуру с помощью определённо-положительной формы, тогда утверждение сводится к теореме о приведении квадратичной формы к главным осям. Полученные оси можно выбрать к тому же ортогональными относительно скалярного произведения — факт, который мы вспоминали в связи с главными осями инерции.

В новых переменных  $\hat{q}_i = \sum_k C_{ik} q_k$  линейаризованные уравнения Лагранжа примут вид:

$$\ddot{\hat{q}}_i + \omega_i^2 \hat{q}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $\omega_i^2$  суть собственные числа пары форм с матрицами  $A$  и  $B$ . Диагонализирующие координаты называются *нормальными*. Нормализация привела к полному расщеплению линейаризованных уравнений — каждое уравнение содержит лишь свою координату.

Если все  $\omega_i^2 > 0$  (это так, если потенциальная энергия имеет невырожденный минимум в положении равновесия), то каждая нормальная координата в силу линейаризованных уравнений будет совершать гармонические колебания с частотой  $\omega_i$ . В этом случае движения линейаризованной системы называют *малыми колебаниями*. Сами линейаризованные уравнения называются *уравнениями малых колебаний*. Это совсем не означает малость амплитуд колебаний — для линейных уравнений она может быть как угодно велика. Дело в том, что для исходных уравнений  $\mathbf{E}(L) = 0$  вдали от состояния равновесия линейаризация  $\mathbf{E}(\tilde{E}) = 0$  перестаёт быть хорошим приближением — отсюда слово *малые*.

Траектории малых колебаний суть так называемые *фигуры Лиссажу*. Они в типичном случае незамкнуты. Однако, если частоты соизмеримы, то есть линейно зависимы над  $\mathbb{Z}$ , они замкнуты, а малые колебания периодичны — период равен наименьшему общему кратному периодов колебаний отдельных координат.

### 3. Малые колебания при наложении голономных связей

Пусть на лагранжеву систему, способную совершать малые колебания в положении равновесия, наложена ещё одна дополнительная голономная автономная связь с уравнением  $f(q) = 0$ , причём имеющееся положение равновесия  $q^*$  удовлетворяет уравнению связи. Связь съедает одну степень свободы. Что можно сказать о малых колебаниях с учётом дополнительной связи?

Теперь следует ограничить уравнения малых колебаний на гиперплоскость, заданную линейаризованным уравнением связи.

Оказывается, полученная система на гиперплоскости будет также совершать гармонические колебания с частотами  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ , причём частоты  $\omega_1, \dots, \omega_n$  колебаний исходной системы будут чередоваться с частотами системы на гиперплоскости:

$$\omega_1 \leq \lambda_1 \leq \omega_2 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \omega_n.$$

(здесь предполагается, что все частоты упорядочены по неубыванию). Это следует из теоремы Куранта (линейная алгебра). Геометрическая интерпретация этой теоремы: при центральном сечении эллипсоида с полуосями  $a_1 \leq \dots \leq a_n$  получается эллипсоид коразмерности один с полуосями  $b_1 \leq \dots \leq b_{n-1}$ , причём

$$a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_{n-1} \leq a_n.$$

В частности, для двумерного эллипсоида его центральное круглое сечение обязано проходить через среднюю ось.

В технической механике данный результат очень важен. Добавочные связи в технике реализуются как дополнительные рёбра жёсткости, балки, фермы, и т. п. Их добавление в конструкцию, таким образом, может разве что сузить диапазон собственных частот. Это хорошо, поскольку системы отзывчивы к внешним возмущениям, имеющим частоты, кратные или близкие к кратным собственным частот — это явление *резонанса*, при котором рота солдат, шагающая по мосту в ногу (что категорически запрещено), может разрушить мост, если частота вынуждающего воздействия окажется близкой к какой-то из собственных. Чем уже диапазон собственных частот, тем лучше, тем жёстче конструкция.

*Челлендж*: предлагаю желающим отличиться раскопать теорему Куранта, изложить её с доказательством понятным языком, и мы выложим на сайт.

## 4. Задачи

Задачи относятся к предыдущей теме. В следующий раз, если доживём (☹), будут задачи на малые колебания. К этому времени нужно изучить также предисловие к разделу 3 задачника.

1. Найдите геодезические на плоскости Лобачевского в модели на верхней полуплоскости как графики функций  $y(x)$ . Обратите внимание, что геодезические, не представимые в указанном виде, будут потеряны. Теперь поменяйте местами в функционале длины зависимую и независимую переменные и снова найдите геодезические, в том числе потерянные. Используйте метод Рауса (где возможно) и не забывайте про интеграл Якоби. Функционал длины в обоих случаях:

$$\mathcal{L}_1[y] = \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx, \quad \mathcal{L}_2[x] = \int \frac{x' \sqrt{1+1/x'^2}}{y} dy,$$

(штрих означает производную по независимой переменной). Убедитесь сначала, что  $\mathcal{L}_2$  совпадает с  $\mathcal{L}_1$ , но только выражен в других переменных.

2. 2.20.
3. 2.33.
4. 2.35.
5. 2.36.
6. *Челлендж!*

Теперь задачи на малые колебания. Выполняя линеаризацию (отбрасывая члены степени выше второй в лагранжиане), строго обосновывайте, что степень малости отбрасываемых членов достаточно велика. Теоретическая основа в этих задачах ничтожна. Главное — аккуратность в вычислениях и обоснования. Проверяйте совпадение с ответом самостоятельно. Решения без обоснований проверять не буду. Не возражаю против использования систем компьютерной алгебры (Maxima, Reduce, Wolfram Mathematica), и даже приветствую.

1. 3.1, 3.2 (в сущности, это одна и та же задача). Исследуйте все возможные положения равновесия и их характер при разнообразных комбинациях значений параметров.
2. 3.6.
3. 3.12.
4. 3.14.
5. 3.23.

Будьте здоровы!