

Продолжения векторных полей

В. Белослудцев

28 апреля 2020 г.

1. Вывод общей формулы

Для того, чтобы в голове не возникало каши из дифференциальной геометрии и аналитической механики, проведём небольшое повторение:

В каждый момент времени для точки определена координата x , и её скорость \dot{x} . Вместе со временем t эти три параметра дают нам расширенное фазовое пространство $\tilde{M} \ni (t, x, \dot{x})$ — всевозможные варианты движения точки. Для простоты мы считаем, что координаты x точки образуют гладкое многообразие M . А раз многообразие гладкое, то можем говорить и о касательном расслоении $M^* \ni (x, \dot{x})$.

Резюме:

В конфигурационном пространстве живут координаты точек x .

В расширенном конфигурационном пространстве живут координаты точек x и время t .

В расширенном фазовом пространстве живут координаты точек x , скорости \dot{x} и время t .

Ввиду приведённых выше соображений из механики, буквы (t, x, \dot{x}) не являются полностью независимыми. Между ними имеется дифференциальное соотношение $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$. Нужно, чтобы и после преобразований фазовым потоком (речь о нём пойдёт ниже) это соотношение сохранилось. Сие и выражено в условиях Пфаффа.

Предположим, что теперь из всевозможных движений точки мы хотим выбрать конкретные. Для этого будем рассматривать дифференциальные уравнения на расширенном фазовом пространстве. Эти уравнения соответствуют какому-то фазовому потоку (обозначим соответствующую однопараметрическую группу через G), который в свою очередь даст нам обобщённое векторное поле $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \xi_j \partial_{x_j} + \tau \partial_t$. Здесь нет дифференцирования по \dot{x} , так как пока мы считаем, что группа действует только на множестве координат и на времени. А теперь рассмотрим действие этой группы на всём расширенном фазовом пространстве. Действие на x и t мы уже знаем. В листке показывалось, как через дифференциал доопределить действие на \dot{x} . Теперь же мы хотим понять, как будут выглядеть генераторы нашего нового действия $\mathbf{pr}^{(1)}G$:

$$g^\varepsilon(x): \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}, \quad (t, x, \dot{x}) \mapsto (\hat{x}, \hat{\dot{x}}, \hat{t}).$$

Коэффициенты генератора для ∂_x и ∂_t мы уже знаем. Осталось найти коэффициенты при $\partial_{\dot{x}}$. Обозначим их через $\eta = \left. \frac{d\hat{\dot{x}}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$.

Условия Пфаффа гласят: если $dx_j = \dot{x}_j dt$, то $d\hat{x}_j = \hat{\dot{x}}_j d\hat{t}$.

Разложим слагаемые из последнего равенства в ряд по ε до первой степени:

$$\hat{x}_j = x_j + \varepsilon \xi_j + o(\varepsilon),$$

$$\hat{\dot{x}}_j = \dot{x}_j + \varepsilon \eta_j + o(\varepsilon),$$

$$\hat{t} = t + \varepsilon \tau + o(\varepsilon).$$

Подставив эти разложения в условия Пфаффа, получим следующее (что-то успешно сократится):

$$d(x_j + \varepsilon \xi_j + o(\varepsilon)) - (\dot{x}_j + \varepsilon \eta_j + o(\varepsilon)) d(t + \varepsilon \tau + o(\varepsilon)) = 0.$$

Следовательно,

$$\varepsilon \eta_j dt + o(\varepsilon) = \varepsilon d\xi_j - \varepsilon \dot{x}_j d\tau + o(\varepsilon).$$

Значит,

$$\left. \frac{d\hat{x}_j}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \eta_j = \dot{\xi}_j - \dot{t}\dot{x}_j = (\xi_j - \tau\dot{x}_j)' + \tau\ddot{x}_j.$$

Таким образом, новое векторное поле выглядит так¹:

$$\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{j=1}^n \eta_j \partial_{\dot{x}_j} = \sum_{j=1}^n \xi_j \partial_{x_j} + \tau \partial_t + \sum_{j=1}^n (\dot{\xi}_j - \dot{t}\dot{x}_j) \partial_{\dot{x}_j}.$$

¹Заметим, что полученная формула в частном случае, когда $\tau = 0$, даёт формулу из методички (да и могло ли быть иначе?). — А. Ш.