Домашнее задание на лето

А. Н. Швец

2 мая 2020 г.

На множестве четырёхугольников на плоскости рассмотрим преобразование, переводящее четырёхугольник $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4$ в $\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2\mathbf{y}_3\mathbf{y}_4$, где $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4$ суть ортоцентры треугольников $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4$, $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4$, $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_4$, $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$ соответственно (рис. 1).

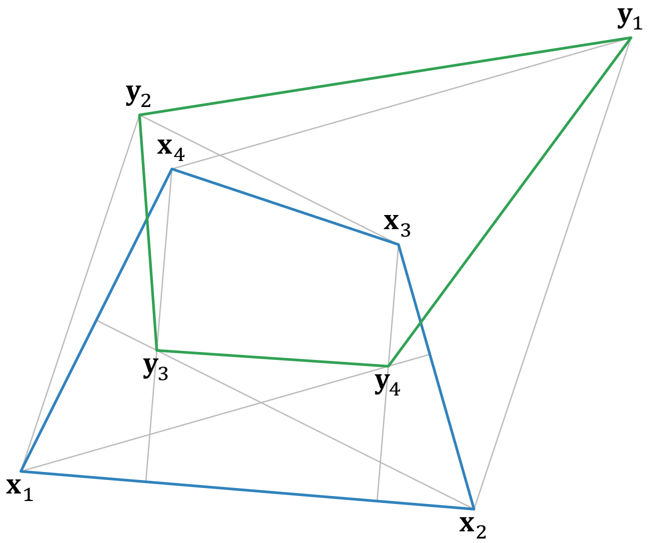

Рис. 1: Построение равновеликого четырёхугольника

Посмотреть на преобразование в действии можно на сайте Геогебры.

1. Проверьте, верно ли, что преобразование является каноническим относительно симплектической 2-формы в 8-мерном пространстве координат вершин четырёхугольника

$$\omega = \sum_{i=1}^{4} dx_i^1 \wedge dx_i^2,$$

   где (x_i^1, x_i^2) — координаты вершины $\mathbf{x}_i$.

2. Докажите, что преобразование сохраняет площадь четырёхугольника[1], иными словами, площадь является первым интегралом отображения.

3. Докажите, что все 8 вершин четырёхугольников $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4$ и $\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2\mathbf{y}_3\mathbf{y}_4$ лежат на некоторой квадрике.

4. Пользуясь ранее доказанным, докажите, что названная квадрика есть равнобочная гипербола.

[1] Об описанном отображении и данном его свойстве нам в 1998 г. в частном разговоре сообщил Д. В. Трещёв со ссылкой, предположительно, на В. Е. Подольского. Дело давнее.

5. Пользуясь ранее доказанным, докажите, что отображение обладает четырьмя независимыми первыми интегралами, рациональными относительно координат вершин (осторожно, очень громоздкие выражения, пользуйтесь CAS). Само существование интегралов можно установить путём умозаключений.

6. Выразите, если это вообще возможно, площадь как функцию найденных первых интегралов.

7. Составьте таблицу скобок Пуассона найденных первых интегралов.