Силы реакций идеальных связей в твёрдом теле являются внутренними

А. Н. Швец

4 апреля 2020 г.

Твёрдым телом назовём систему материальных точек, попарные расстояния между которыми постоянны. Твёрдое тело можно рассматривать как систему с голономными связями с уравнениями

$$(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)^2 - c_{\alpha\beta}^2 = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

где $\mathbf{r}_\nu$ — радиусы-векторы точек, N — количество точек, $c_{\alpha\beta}$ — константы.

Согласно принципу освобождения от связей твёрдое тело можно также рассматривать как систему свободных материальных точек под действием дополнительных (помимо заданных) сил реакции $\mathbf{R}_\nu$.

В динамике к определению твёрдого тела добавляют требование, чтобы силы реакции были внутренними, то есть допускали представление в виде

$$\mathbf{R}_\nu = \sum_\kappa \lambda_{\nu\kappa}(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\kappa), \quad \lambda_{\nu\kappa} = \lambda_{\kappa\nu}, \tag{2}$$

где $\lambda_{\nu\kappa}$ — некоторые константы.

Нетрудно доказать, что с этим дополнительным требованием связи в твёрдом теле являются идеальными. В самом деле, с учётом условий на виртуальные перемещения

$$\langle \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta, \delta\mathbf{r}_\alpha - \delta\mathbf{r}_\beta \rangle = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, N \tag{3}$$

форма виртуальной работы сил реакции равна нулю:

$$\sum_\nu \langle \mathbf{R}_\nu, \delta\mathbf{r}_\nu \rangle = \sum_\nu \sum_\kappa \lambda_{\nu\kappa} \langle \mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\kappa, \delta\mathbf{r}_\nu \rangle = 0$$

(последняя сумма состоит из пар слагаемых вида

$$\lambda_{\nu\kappa} \langle \mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\kappa, \delta\mathbf{r}_\nu \rangle + \lambda_{\kappa\nu} \langle \mathbf{r}_\kappa - \mathbf{r}_\nu, \delta\mathbf{r}_\kappa \rangle,$$

которые уничтожаются парами в силу (3) и симметричности матрицы $\lambda_{\nu\kappa}$).

Верно и обратное утверждение.

Теорема. Пусть связи в твёрдом теле идеальны. Тогда силы их реакции являются внутренними.

Лемма. Пусть $f, g_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — линейные функции, причём $f(x) = 0$ в силу $g_s(x) = 0$, $s = 1, \dots, k$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда найдутся множители $\lambda_s \in \mathbb{R}$ такие, что $f(x) \equiv \sum_{s=1}^{k} \lambda_s g_s(x)$.

Доказательство леммы. Положим $V_s = \ker g_s$. Тогда по условию $f \in (\bigcap_s V_s)^\perp$ (здесь $V^\perp$ означает ортогональное дополнение к подпространству V, то есть $\{h \in (\mathbb{R}^n)^* \mid V \subset \ker h\}$). Утверждение леммы равносильно равенству

$$\left(\bigcap_s V_s\right)^\perp = \sum_s V_s^\perp.$$

Заменив в этом равенстве V_s на $V_s^\perp$ и взяв ортогональное дополнение к обеим частям, получим равносильное равенство

$$\bigcap_s V_s^\perp = \left(\sum_s V_s\right)^\perp.$$

Его справедливость вытекает из того факта, что принадлежность линейной функции h пространствам в обеих частях равенства равносильна принадлежности h каждому из пространств $V_s^\perp$, $s = 1, \dots, k$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы. Идеальность связей в твёрдом теле означает равенство нулю формы виртуальной работы сил реакции, то есть обращение в ноль линейной функции $\sum_\nu \langle \mathbf{R}_\nu, \delta\mathbf{r}_\nu \rangle$ на любом векторе $(\delta\mathbf{r}_1, \dots, \delta\mathbf{r}_N)$, удовлетворяющем условиям (3), также линейным по отношению к виртуальным перемещениям.

Согласно лемме найдутся такие множители $\lambda_{\alpha\beta}$, что будет выполняться равенство

$$\sum_\nu \langle \mathbf{R}_\nu, \mathbf{v}_\nu \rangle = \sum_{\alpha,\beta} \lambda_{\alpha\beta} \langle \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta, \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta \rangle \tag{4}$$

для всевозможных векторов $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$, не стеснённых никакими ограничениями.

Расщепляя уравнение (4), получим равенства

$$\mathbf{R}_\nu = \sum_\kappa [\lambda_{\nu\kappa}(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\kappa) - \lambda_{\kappa\nu}(\mathbf{r}_\kappa - \mathbf{r}_\nu)] = \sum_\kappa (\lambda_{\nu\kappa} + \lambda_{\kappa\nu})(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\kappa),$$

то есть силы реакций связей имеют вид (2), и, следовательно, являются внутренними. Теорема доказана. □