Пара слов о преобразовании Лежандра

А. Н. Швец

29 апреля 2020 г.

Преобразование Лежандра, знакомое нам в связи с методом Рауса и уравнениями Гамильтона, является ярким примером преобразования, в которое вовлечены не только независимые и зависимые переменные, но и первые производные (такие преобразования называются *контактными*).

Пусть $u(x_1, \dots, x_n)$ — гладкая функция своих аргументов, $p_i = \partial u/\partial x_i$. Осуществим переход от букв (x, u, p) к новым буквам $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{p})$ по формулам

$$\hat{x}_i = p_i, \quad \hat{u} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - u, \quad \hat{p}_i = x_i. \tag{1}$$

Это и есть преобразование Лежандра. Хорошо видно, что преобразование является инволюцией.

Заметим, что переменные (x, u, p) не являются вполне независимыми. Они независимы *функционально,* (между ними нет функционального соотношения), однако зависимы *дифференциально* — имеется соотношение с участием их дифференциалов. Внешняя форма Пфаффа обращается для них в ноль:

$$du - \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i = 0. \tag{2}$$

Преобразования в пространстве независимых, зависимых переменных и первых производных (*пространстве 1-струй* функции u) только тогда будут осмысленными, если они сохраняют соотношение Пфаффа, то есть в новых переменных также должно выполняться $\hat{p}_i = \partial\hat{u}/\partial\hat{x}_i$.

Для преобразования Лежандра это так. Действительно, с учётом (1)

$$d\hat{u} - \sum_{i=0}^{n} \hat{p}_i\, d\hat{x}_i = \sum_{i=1}^{n} (p_i\, dx_i + x_i\, dp_i) - du - \sum_{i=1}^{n} x_i\, dp_i = \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i - du,$$

что равно нулю в силу (2).

Преобразование Лежандра можно использовать для решения обыкновенных дифференциальных уравнений Клеро (и для упрощения уравнений других типов)

$$\Phi(p, xp - u) = 0, \tag{3}$$

где $p = u'$. После выполнения преобразования Лежандра в новых переменных получим

$$\Phi(\hat{x}, \hat{u}) = 0, \tag{4}$$

Adrien-Marie Legendre

уравнение отнюдь не дифференциальное. Разрешив его относительно $\hat{u}$, получим $\hat{u} = \varphi(\hat{x})$, и, после возврата к прежним переменным, получим

$$xp - u = \varphi(p) \quad \text{или} \quad u = xp - \varphi(p).$$

Мы получили однопараметрическое семейство решений, в котором в качестве параметра выступает $p = u'$. Решения $u(x)$ являются аффинными функциями относительно x, их графики — прямые. Помимо семейства аффинных функций, среди решений может появиться особое, его график является огибающей семейства прямых. Его можно найти, исключив p из уравнений

$$\Phi = 0, \quad \frac{d\Phi}{dp} = 0$$

(это стандартный способ нахождения огибающих семейства кривых, заданных неявно). Или, как вариант, можно из указанных уравнений получить выражения

$$x = \alpha(p), \quad u = \beta(p).$$

Это параметрическое представление особого решения, где график запараметризован p — тангенсом угла наклона. Эта параметризация корректна на участках выпуклости графика, когда вдоль кривой p меняется монотонно. Особое решение как раз отвечает случаю, когда уравнение (4) нельзя разрешить относительно $\hat{x} = p$. Для неособых решений, конечно, такая параметризация неуместна.