Скобки Пуассона

А. Н. Швец

27 апреля 2020 г.

1. Алгебры Ли

Алгеброй Ли называют векторное пространство $\mathfrak{g}$, снабжённое билинейным отображением $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g}^2 \to \mathfrak{g}$ таким, что для любых векторов $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathfrak{g}$ выполняется

1. $[\mathbf{v},\mathbf{w}] = -[\mathbf{w},\mathbf{v}]$.
2. $[\mathbf{u},[\mathbf{v},\mathbf{w}]] + [\mathbf{v},[\mathbf{w},\mathbf{u}]] + [\mathbf{w},[\mathbf{u},\mathbf{v}]]$.

Операция $[\cdot,\cdot]$ называется *скобкой Ли.* Говорят, что элементы $\mathbf{v},\mathbf{w}$, для которых $[\mathbf{v},\mathbf{w}] = 0$, *коммутируют.*

Смысл первого условия ясен — скобка Ли кососимметрична. Второе условие называется *тождеством Якоби,* его смысл мы постараемся прояснить.

Оператор $\mathcal{D}$, заданный в линейном пространстве, снабжённом какой-то билинейной операцией $[\![\cdot,\cdot]\!]$ (*алгебре*), называют *дифференцированием,* если он отвечает правилу Лейбница:

$$\mathcal{D}[\![\mathbf{v},\mathbf{w}]\!] = [\![\mathcal{D}\mathbf{v},\mathbf{w}]\!] + [\![\mathbf{v},\mathcal{D}\mathbf{w}]\!].$$

Если зафиксировать вектор $\mathbf{v}$, скобку можно рассматривать как линейный оператор $[\mathbf{v},\cdot]\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Тождество Якоби вместе с условием кососимметричности означает, что указанный оператор является дифференцированием алгебры Ли (проверьте!). Иными словами, мы определили действие алгебры Ли на себе дифференцированиями. Линейность и правило Лейбница являются ключевыми свойствами дифференцирования, как бы мы его ни понимали, и позволяют перенести дифференциальное исчисление на произвольные кольца и алгебры без разностных отношений и предельных переходов.

Все сведения о конечномерной алгебре Ли содержатся в трёхвалентном *структурном тензоре* $c_{ij}^k \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k$ таком, что

$$[\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j] = c_{ij}^k \mathbf{e}_k.$$

Здесь $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ и $\{\mathbf{e}^\beta\}$ — базисы в $\mathfrak{g}$ и дуальном к $\mathfrak{g}$ пространстве. Элементы матрицы c_{ij}^k называются *структурными константами* алгебры, и недаром — они вполне определяют её структуру. Условия на скобку Ли накладывают на структурные константы определённые ограничения:

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \quad c_{ij}^k c_{kl}^m + c_{li}^k c_{kj}^m + c_{jl}^k c_{ki}^m = 0.$$

Важным примером алгебр Ли служат пространства векторных полей на многообразии, когда в качестве скобки Ли берётся их коммутатор $[\mathbf{v},\mathbf{w}] = \mathbf{v}\circ\mathbf{w} - \mathbf{w}\circ\mathbf{v}$ как дифференциальных операторов. На первый взгляд, коммутатор выглядит как дифференциальный оператор второго порядка, но это только на первый взгляд. Проверьте, что он является оператором *первого* порядка, и, таким образом, отождествляется с векторным полем. Проверьте также, что выполняется тождество Якоби (кососимметричность и так очевидна).

Алгебры Ли часто ассоциируют с группами Ли. Делается это следующим образом. Любая группа действует на себе правыми сдвигами $h \mapsto h \cdot g$ ($\cdot$ обозначает групповую операцию). Для группы Ли G правое действие продолжается с помощью дифференциала до действия на касательное расслоение к группе, отображающее векторные поля на G в векторные поля. Поля, инвариантные относительно продолженного правого действия, называются *правоинвариантными.* Оказывается, что правоинвариантные поля образуют алгебру Ли относительно коммутатора в качестве скобки Ли (проверьте!). Эта алгебра и называется *алгеброй Ли* $\mathfrak{g}$ группы Ли G.

Правоинвариантное поле на G однозначно задаётся своим значением в единице группы, и, наоборот, любой касательный в единице вектор правыми сдвигами можно разнести по группе, получив правоинвариантное поле. Это соображение позволяет перенести структуру алгебры Ли правоинвариантных полей на касательное пространство к группе в её единице.

Таким образом, группа Ли определяет свою алгебру. До некоторой степени возможно восстановить группу по её алгебре. Оказывается, для данной конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ найдётся единственная связная односвязная группа Ли G, чьей алгеброй служит $\mathfrak{g}$. Эта группа служит односвязным накрытием для любой другой связной группы Ли с той же алгеброй Ли. Мы приводим это утверждение без доказательства.

В частности, все одномерные алгебры Ли, очевидно, абелевы ($[\cdot,\cdot] = 0$), и связные группы Ли, ассоциированные с ними, изоморфны либо аддитивной группе $(\mathbb{R}, +)$, либо $\mathrm{SO}(2)$. Прямая $(\mathbb{R}, +)$ служит односвязной накрывающей для окружности $\mathrm{SO}(2)$.

Локальную группу Ли преобразований гладкого многообразия можно восстановить по её алгебре Ли с помощью *экспоненциального отображения* $\mathbf{v} \mapsto g = \exp(\mathbf{v})$. Обратное к экспоненциальному отображение, определённое, вообще говоря, лишь вблизи единицы, отображает достаточно малую окрестность единицы на касательное пространство к группе в единице, то есть на алгебру.

2. Скобки Пуассона

Автономную систему канонических уравнений Гамильтона ($\partial H/\partial t = 0$)

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n \tag{1}$$

можно интерпретировать как векторное поле $\mathbf{v}_H$ на фазовом многообразии гамильтоновой системы,

$$\mathbf{v}_H = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \partial_{p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \partial_{q_i} \right).$$

Такие поля имеют очень специальный вид, поскольку задаются одной функцией H (в общем случае поля на $2n$-мерном многообразии определяются $2n$ функциями). Поля такого вида называются *гамильтоновыми.* Оказывается, гамильтоновы поля образуют алгебру Ли относительно коммутатора: для двух функций $F(p,q)$, $G(p,q)$ найдётся функция $H(p,q)$ такая, что

$$[\mathbf{v}_F, \mathbf{v}_G] = \mathbf{v}_H,$$

причём

$$H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right).$$

Выражение для H, обычно обозначаемое как $\{F, G\}$[1], называется *скобкой Пуассона* функций F и G. Оно является билинейным и кососимметрическим относительно F и G. Более того, выполняется (проверьте!) тождество Якоби

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0.$$

Всё это делает линейное над $\mathbb{R}$ пространство гладких функций на $2n$-мерном многообразии алгеброй Ли. Учитывая, что соответствие между гамильтонианом H и гамильтоновым векторным полем $\mathbf{v}_H$ линейное, мы можем утверждать, что имеется гомоморфизм из алгебры Ли функций Гамильтона в алгебру Ли гамильтоновых векторных полей. У этого гомоморфизма ненулевое ядро (см. задачу 2).

Как легко проверить,

$$\mathbf{v}_F(G) = -\mathbf{v}_G(F) = \{F, G\}.$$

С учётом этого канонические уравнения 1 можно записать в виде

$$\dot{p}_i = \{H, p_i\}, \quad \dot{q}_i = \{H, q_i\}.$$

Вообще, для произвольной функции $F(p, q)$

$$\dot{F} = \{H, F\}$$

в силу канонических уравнений (проверьте!). В частности, если $\{H, F\} = 0$, то F является первым интегралом канонических уравнений с гамильтонианом H, и наоборот, H является первым интегралом для канонических уравнений с гамильтонианом F. Подчеркнём, что сказанное верно для функций F, H, не зависящих от времени. Не составит труда перенести рассуждения на общий случай, но результат уже будет другим: пусть функции зависят от времени. Тогда $F(t, p, q)$ служит первым интегралом уравнений с гамильтонианом H тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\} = 0.$$

Но вернёмся к автономному случаю. Легко проверить (проверьте, задача 2В!), что первые интегралы канонических уравнений с гамильтонианом H образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона — подалгебру в алгебре всех гладких функций на фазовом пространстве. Это позволяет в редких случаях получать новые первые интегралы как скобки Пуассона имеющихся.

3. Задачи

1. Проверьте что алгебра Ли $\mathfrak{so}(3)$ группы Ли $\mathrm{SO}(3)$ изоморфна алгебре (тоже Ли) $(\mathbb{R}^3, [\cdot, \cdot])$ векторов трёхмерного пространства с векторным произведением в роли скобки Ли. И алгебре кососимметрических операторов в $\mathbb{R}^3$ с коммутатором в роли скобки. [Тут впору вспомнить формулу Пуассона из кинематики твёрдого тела. Немного проясняется, как связана группа вращений твёрдого тела и векторное умножение в формуле Пуассона, правда?] *Подсказка:* если не придумаете чего-то более изящного, можно найти структурные тензоры перечисленных алгебр.

[1] В некоторых книгах (например, в задачнике) определение скобки Пуассона отличается знаком. Это не страшно.

2. А. Докажите, что $[\mathbf{v}_F, \mathbf{v}_G] = \mathbf{v}_{\{F,G\}}$.

   Б. Найдите ядро гомоморфизма из алгебры функций в алгебру гамильтоновых полей.

   В. Проверьте, что первые интегралы канонических уравнений с гамильтонианом H, не зависящие от времени, образуют подалгебру Ли алгебры гладких функций.

3. Проверьте, что пространство векторных полей на многообразии с коммутатором в роли скобки Ли действительно является алгеброй Ли.

4. Пусть, как и раньше, $g_{\mathbf{v}}^{\varepsilon} = \exp(\varepsilon \mathbf{v})$ — фазовый поток поля $\mathbf{v}$. Ранее мы определяли действие векторных полей на многообразии на функции

$$(\mathbf{v}(f))(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(g_{\mathbf{v}}^{\varepsilon}(x)) - f(x)}{\varepsilon} = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} f(g_{\mathbf{v}}^{\varepsilon}(x)).$$

   как действие дифференциальных операторов — это просто дифференцирование функции вдоль векторного поля (не путать с ковариантной производной!). Можно попытаться по аналогии определить дифференцирование других тензорных объектов, например, векторных полей. Вот наивная попытка:

$$\mathbf{v}(\mathbf{w}) \stackrel{?}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbf{w}|_{g_{\mathbf{v}}^{\varepsilon}(x)} - \mathbf{w}|_x}{\varepsilon}.$$

   Она неудачная, так как слагаемые в числителе принадлежат разным пространствам: касательным к многообразию в разных точках — x и $g_{\mathbf{v}}^{\varepsilon}(x)$, их вычитание не определено. Чтобы определение стало корректным, нужно перед вычитанием перенести некоторым естественным образом вектор $\mathbf{w}|_{g_{\mathbf{v}}^{\varepsilon}(x)}$ в точку x. Для этой цели хорошо подходит дифференциал отображения $g_{\mathbf{v}}^{-\varepsilon}$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{w})|_x = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(g^{-\varepsilon})^*(\mathbf{w}|_{g_{\mathbf{v}}^{\varepsilon}(x)}) - \mathbf{w}|_x}{\varepsilon} = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \left((g^{-\varepsilon})^*(\mathbf{w}|_{g_{\mathbf{v}}^{\varepsilon}(x)}) - \mathbf{w}|_x\right).$$

   Покажите, что $\mathbf{v}(\mathbf{w}) = [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$.

5. Покажите, что

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}]|_x = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=+0} \left(g_{\mathbf{w}}^{-\sqrt{\varepsilon}} \circ g_{\mathbf{v}}^{-\sqrt{\varepsilon}} \circ g_{\mathbf{w}}^{\sqrt{\varepsilon}} \circ g_{\mathbf{v}}^{\sqrt{\varepsilon}}\right)(x).$$

6. *Для тех, кто хочет отличиться.* Покажите, что поля обычных (не обобщённых) вариационных симметрий лагранжевой задачи $\int L\, dt$ образуют алгебру Ли. Так можно получать новые вариационные симметрии по имеющимся. [Мы ограничиваемся обычными симметриями, поскольку не хотим определять коммутатор обобщённых полей — как вы, наверное, помните, порождаемые ими преобразования, вообще говоря, действуют на бесконечном *пространстве струй* функций $x(t)$ — пространстве $\{x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \dots, x^{(\infty)}\}$.]

7. 5.2.

8. 5.4.

9. 5.5.

10. 5.7.

11. 5.8.

12. 5.22.