Дифференциал операции продолжения группы

В. Боровик

3 мая 2020

Пусть M — гладкое многообразие с локальными координатами $x = (x_1, \dots, x_n)$, на котором действует группа преобразований $G = \{g^\varepsilon\}$ по правилу: $g^\varepsilon \cdot x = \hat{x}$. Определим операцию *первого продолжения* группы G:

$$\mathbf{pr}^{(1)} : \{g^\varepsilon\} \to \{(g^\varepsilon, (g^\varepsilon)^*)\},$$

где $(g^\varepsilon)^*$ — дифференциал преобразования g^ε.

Группа $\mathbf{pr}^{(1)}G = \{(g^\varepsilon, (g^\varepsilon)^*)\}$ действует уже на касательном расслоении $M^* = \{(x, \dot{x})\}$ по правилу:

$$(g^\varepsilon, (g^\varepsilon)^*) \cdot (x, \dot{x}) = (\hat{x}, \hat{\dot{x}}),$$

где $\hat{\dot{x}}$ определяется условиями согласованности Пфаффа

$$(d\hat{x}_i = \hat{\dot{x}}\, dt) \bmod (dx_j = \dot{x}_j\, dt), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Отображение $\mathbf{pr}^{(1)}$ осуществляет гомоморфизм локальных групп Ли в силу следущих соотношений:

$$\mathbf{pr}^{(1)} g^{\alpha+\beta} = \left(g^{\alpha+\beta}, (g^{\alpha+\beta})^*\right) = (g^\beta \circ g^\alpha, (g^\beta)^* \circ (g^\alpha)^*) = \mathbf{pr}^{(1)} g^\alpha \circ \mathbf{pr}^{(1)} g^\beta,$$

здесь мы пользуемся тем, что дифференциал композиции отображений является композицией дифференциалов.

Ранее мы установили соответствие между однопараметрическими группами преобразований M и векторными полями на M.

$$g^\varepsilon = \mathbf{exp}(\varepsilon \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} g^\varepsilon.$$

Если рассматривать $g^\varepsilon : \mathbb{R} \to G$ как кривую на многообразии G, проходящую через единицу, то из определения $\mathbf{v}$ следует, что это касательный вектор в смысле классов эквивалентности соприкасающихся кривых. Таким образом, $\mathbf{v} \in T_{g^0}G$ — касательному пространству в единице группы Ли G, которое, как известно, отождествляется с алгеброй Ли группы G, в дальнейшем будем обозначать ее $\mathcal{L}ie(G)$. Аналогично, элементами алгебры Ли $\mathcal{L}ie(\mathbf{pr}^{(1)}G)$ группы $\mathbf{pr}^{(1)}G$ являются генераторы $\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}$:

$$\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v} = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathbf{pr}^{(1)} g^\varepsilon.$$

С другой стороны, дифференциал описанного отображения $d\mathbf{pr}^{(1)}$ сопоставляет касательному вектору $\mathbf{v} \in \mathcal{L}ie(G)$ касательный вектор $d\mathbf{pr}^{(1)}(\mathbf{v}) \in \mathcal{L}ie(\mathbf{pr}^{(1)}G)$ по правилу:

$$d\mathbf{pr}^{(1)}(\mathbf{v}) = d\mathbf{pr}^{(1)}\left(\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} g^\varepsilon\right) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \left(\mathbf{pr}^{(1)} \circ g^\varepsilon\right) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathbf{pr}^{(1)} g^\varepsilon = \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}.$$

Так как мы определили касательный вектор, как класс соприкасающихся кривых, то использовали соответствующее определение дифференциала:

$$d_x\phi(\gamma'(0)) = (\phi \circ \gamma)'(0),$$

где $\phi\colon M \to N$, γ — кривая в M, такая что $\gamma(0) = x$.

Таким образом, получается, что операция продолжения векторных полей является дифференциалом отображения $\mathbf{pr}^{(1)}$ между G и $\mathbf{pr}^{(1)}G$.

$$\mathbf{pr}^{(1)} : G \to \mathbf{pr}^{(1)}G,$$
$$d\mathbf{pr}^{(1)} : \mathcal{L}ie(G) \to \mathcal{L}ie(\mathbf{pr}^{(1)}G).$$

Дифференциал гомоморфизма групп Ли является гомоморфизмом алгебр Ли, в силу этого получаем соотношение:

$$\mathbf{pr}^{(1)}[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}, \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w}], \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{L}ie(G).$$