Эллипсоидальные координаты и геодезические на трехосном эллипсоиде

Пицын Сергей

Апрель 2020

1. Постановка задачи

Пусть эллипсоид в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ задан уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3} = 1, \tag{1}$$

где $0 < a_1 < a_2 < a_3$ — квадраты главных полуосей (такие эллипсоиды, где все квадраты главных полуосей попарно неравны, называются трехосными).

Рассмотрим движение точки единичной массы по инерции по этому эллипсоиду. Так как движение происходит без воздействия каких-либо сил, то силовая функция $U = 0$. Тогда

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2). \tag{2}$$

Наша цель — показать, что существует замена координат, при которой переменные в этой задаче разделяются. Такая замена, соответственно, позволит эту задачу проинтегрировать и получить уравнения движения материальной точки, а, как следствие, и уравнения геодезических на трехосном эллипсоиде.

2. Эллипсоидальные координаты

Рассмотрим уравнение

$$f(\lambda) = \frac{x_1^2}{a_1 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 + \lambda} = 1,$$

где a_i — все те же квадраты главных полуосей эллипсоида. Докажем, что корни этого уравнения вещественны. В самом деле, в интервале $(-\infty, -a_3)$ $f(\lambda)$ очевидно отрицательна, а значит, корней в этом интервале нету. Когда λ пробегает интервал $(-a_3, -a_2)$, $f(\lambda)$ монотонно пробегает интервал $(-\infty, +\infty)$. Таким образом, в интервале $(-a_3, -a_2)$ найдется корень, и притом только один. Аналогично в интервале $(-a_2, -a_1)$ есть единственный корень. Далее, когда λ пробегает интервал $(-a_1, +\infty)$, $f(\lambda)$ монотонно уменьшается в интервале $(+\infty, 0)$. Следовательно и в этом интервале будет единственная точка, где $f(\lambda)$ примет значение 1, то есть корень.

Обозначим эти корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Они-то и называются эллипсоидальными координатами. Таким образом, получаем:

$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_1}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda_1}+\frac{x_3^2}{a_3+\lambda_1}=1,$$
$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_2}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda_2}+\frac{x_3^2}{a_3+\lambda_2}=1,$$
$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_3}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda_3}+\frac{x_3^2}{a_3+\lambda_3}=1.$$

Выразим декартовы координаты через эллипсоидальные. Для этого домножим первое уравнение на $a_3+\lambda_1$ и вычтем из него второе, домноженное на $a_3+\lambda_2$. Получим:

$$x_1^2\left(\frac{a_3+\lambda_2}{a_1+\lambda_1}-\frac{a_3+\lambda_1}{a_1+\lambda_2}\right)+x_2^2\left(\frac{a_3+\lambda_2}{a_2+\lambda_1}-\frac{a_3+\lambda_1}{a_2+\lambda_2}\right)=\lambda_2-\lambda_1,$$

или, после сокращений

$$\frac{a_1-a_3}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)}x_1^2+\frac{a_2-a_3}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)}x_2^2=1.$$

Проделав аналогичную операцию с первым и третьим уравнением в системе, получим систему с исключенной переменной x_3:

$$\frac{a_1-a_3}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)}x_1^2+\frac{a_2-a_3}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)}x_2^2=1,$$
$$\frac{a_1-a_3}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_3)}x_1^2+\frac{a_2-a_3}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_3)}x_2^2=1.$$

Аналогично исключаем переменную x_2 из нее, и получаем одно уравнение:

$$\frac{(a_1-a_3)(a_1-a_2)}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}x_1^2=1,$$

откуда

$$x_1^2=\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_3)(a_1-a_2)}.$$

Для x_2^2 и x_3^2, очевидно, будут иметь место аналогичные формулы, которые получаются с помощью точно таких же манипуляций. Итого:

$$x_1^2=\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_3)(a_1-a_2)},$$
$$x_2^2=\frac{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_3)}{(a_2-a_3)(a_2-a_1)},$$
$$x_3^2=\frac{(a_3+\lambda_1)(a_3+\lambda_2)(a_3+\lambda_3)}{(a_3-a_2)(a_3-a_1)}.$$

Так мы выразили старые декартовы координаты через новые эллипсоидальные. Это замечательно. Добавим, кстати, что исходный эллипсоид в эллипсоидальных координатах будет задаваться уравнением $\lambda_3=0$ (единственная лямбда, которая может быть неотрицательной, самая большая), так как в этом случае как раз и получается уравнение исходного эллипсоида (1). А λ_1 и λ_2 в этом случае зададут на нем систему координат.

Лирическое отступление: Легко заметить, что, полагая $\lambda_3=\mathrm{const}$, получаем какой-то эллипсоид. Если положить $\lambda_2=\mathrm{const}$, то легко понять, что получится однополосный гиперболоид, а при $\lambda_1=\mathrm{const}$ гиперболоид будет двуполосным. Это явно следует из расположения корней $f(\lambda)$ на числовой оси относительно чисел a_1, a_2 и a_3. И это довольно симпатично.

3. Решение задачи

Наша ближайшая цель — посчитать функцию Лагранжа (2) в эллипсоидальных координатах. Для этого воспользуемся трюком, а именно: возьмем выведенное ранее выражение через эллипсоидальные координаты, например, для x_1^2 и возьмем от обеих частей логарифм. Получим: $2\ln(x_1) = \sum_{i=1}^{3}\ln(a_1+\lambda_i) + \mathrm{const}$. Теперь продифференцируем обе части по t (здесь есть зависимость от t, т. к. теперь x_i понимаем как координаты точки при движении). Получим:

$$\frac{2\dot{x}_1}{x_1} = \frac{\dot{\lambda}_1}{a_1+\lambda_1} + \frac{\dot{\lambda}_2}{a_1+\lambda_2} + \frac{\dot{\lambda}_3}{a_1+\lambda_3} = \frac{\dot{\lambda}_1}{a_1+\lambda_1} + \frac{\dot{\lambda}_2}{a_1+\lambda_2},$$

так как $\lambda_3 = 0$. Возведем обе части в квадрат и домножим на x_1^2. Тогда получим:

$$4\dot{x}_1^2 = \frac{x_1^2\dot{\lambda}_1^2}{(a_1+\lambda_1)^2} + \frac{x_1^2\dot{\lambda}_2^2}{(a_1+\lambda_2)^2} + \frac{2x_1^2\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)}.$$

Проделаем аналогичные выкладки с выражениями для x_2 и x_3 и сложим три полученных равенства. Итого:

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 = \frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{x_i^2\dot{\lambda}_1^2}{(a_i+\lambda_1)^2} + \frac{x_i^2\dot{\lambda}_2}{(a_i+\lambda_2)^2}\right) + \sum_{i=1}^{3}\frac{2x_i^2\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2}{(a_i+\lambda_1)(a_i+\lambda_2)}\right] = 2L.$$

Теперь подставим вместо x_i их выражения через λ_1 и λ_2 и получим то, что надо.

Давайте подставим сначала в

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{2x_i^2\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2}{(a_i+\lambda_1)(a_i+\lambda_2)}.$$

Легко видеть, что после подстановки и сокращений получается

$$2\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2\left(\frac{a_1}{(a_1-a_3)(a_1-a_2)} + \frac{a_2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)} + \frac{a_3}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}\right) = 0.$$

Замечательно!

Теперь подставим во все остальное. Тогда получим:

$$L = \frac{1}{8}(M_1(\lambda_1,\lambda_2)\dot{\lambda}_1^2 + M_2(\lambda_1,\lambda_2)\dot{\lambda}_2^2),$$

где

$$M_1(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)}, \quad M_2(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}$$

не зависят от $\dot{\lambda}_1$ и $\dot{\lambda}_2$.

Как мы видим, относительно переменных $\dot{\lambda}_1$ и $\dot{\lambda}_2$ функция L является однородной степени 2, а значит по теореме Эйлера получаем, что после преобразования Лежандра относительно переменных $\dot{\lambda}_1$ и $\dot{\lambda}_2$ функция L не изменится.

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial\dot{\lambda}_1} = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_1\dot{\lambda}_1}{4(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)}, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial\dot{\lambda}_2} = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2\dot{\lambda}_2}{4(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}.$$

И тогда

$$H = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}(g(\lambda_1)p_1^2 + g(\lambda_2)p_2^2).$$

То есть видно, что переменные в эллипсоидальных координатах разделились, как мы и хотели. Ура!

Дальше, как и говорилось в начале, задачу можно проинтегрировать и получить уравнения движения и геодезические, но явный вид закона получится слишком сложный и не слишком интересный, поэтому лучше остановимся на приятном.

Список литературы

[1] К. Якоби. Лекции по динамике.

[2] А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Динамика твердого тела.