Продолжения векторных полей

В. Белослудцев

30 апреля 2020 г.

1. Вывод общей формулы

Для того, чтобы в голове не возникало каши из дифференциальной геометрии и аналитической механики, проведём небольшое повторение:

В каждый момент времени для точки определена координата x, и её скорость $\dot{x}$. Вместе со временем t эти три параметра дают нам расширенное фазовое пространство $\tilde{M} \ni (t, x, \dot{x})$ — всевозможные варианты движения точки. Для простоты мы считаем, что координаты x точки образуют гладкое многообразие M. А раз многообразие гладкое, то можем говорить и о касательном расслоении $M^* \ni (x, \dot{x})$.

Резюме:
В *конфигурационном пространстве* живут координаты точек x.
В *расширенном конфигурационном пространстве* живут координаты точек x и время t.
В *расширенном фазовом пространстве* живут координаты точек x, скорости $\dot{x}$ и время t.

Ввиду приведённых выше соображений из механики, буквы $(t, x, \dot{x})$ не являются полностью независимыми. Между ними имеется дифференциальное соотношение $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$. Нужно, чтобы и после преобразований фазовым потоком (речь о нём пойдёт ниже) это соотношение сохранилось. Сие и выражено в условиях Пфаффа.

Предположим, что теперь из всевозможных движений точки мы хотим выбрать конкретные. Для этого будем рассматривать дифференциальные уравнения на расширенном фазовом пространстве. Эти уравнения соответствуют какому-то фазовому потоку (обозначим соответствующую однопараметрическую группу через G), который в свою очередь даст нам обобщённое векторное поле $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \partial_{x_j} + \tau \partial_t$. Здесь нет дифференцирования по $\dot{x}$, так как пока мы считаем, что группа действует только на множестве координат и на времени. А теперь рассмотрим действие этой группы на всём расширенном фазовом пространстве. Действие на x и t мы уже знаем. В листке показывалось, как через дифференциал доопределить действие на $\dot{x}$. Теперь же мы хотим понять, как будут выглядеть генераторы нашего нового действия $\mathbf{pr}^{(1)}G$:

$$g^{\varepsilon}(x)\colon \tilde{M} \to \tilde{M}, \quad (t, x, \dot{x}) \mapsto (\hat{x}, \hat{\dot{x}}, \hat{t}).$$

Коэффициенты генератора для ∂_x и ∂_t мы уже знаем. Осталось найти коэффициенты при $\partial_{\dot{x}}$. Обозначим их через $\eta = \frac{d\hat{\dot{x}}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$.

Условия Пфаффа гласят: если $dx_j = \dot{x}_j\, dt$, то $d\hat{x}_j = \hat{\dot{x}}_j\, d\hat{t}$.

Разложим слагаемые из последнего равенства в ряд по ε до первой степени:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_j &= x_j + \varepsilon \xi_j + o(\varepsilon),\\
\hat{\dot{x}}_j &= \dot{x}_j + \varepsilon \eta_j + o(\varepsilon),\\
\hat{t} &= t + \varepsilon \tau + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Подставив эти разложения в условия Пфаффа, получим следующее (что-то успешно сократится):

$$d(x_j + \varepsilon\xi_j + o(\varepsilon)) - (\dot{x}_j + \varepsilon\eta_j + o(\varepsilon))\, d(t + \varepsilon\tau + o(\varepsilon)) = 0.$$

Следовательно,

$$\varepsilon\eta_j\, dt + o(\varepsilon) = \varepsilon\, d\xi_j - \varepsilon\dot{x}_j\, d\tau + o(\varepsilon).$$

Значит,

$$\left.\frac{d\hat{\dot{x}}_j}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \eta_j = \dot{\xi}_j - \dot{\tau}\dot{x}_j = (\xi_j - \tau\dot{x}_j)^{\cdot} + \tau\ddot{x}_j.$$

Таким образом, новое векторное поле выглядит так[1]:

$$\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{j=1}^{n} \eta_j \partial_{\dot{x}_j} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \partial_{x_j} + \tau\partial_t + \sum_{j=1}^{n} (\dot{\xi}_j - \dot{\tau}\dot{x}_j)\partial_{\dot{x}_j}.$$

[1]Заметим, что полученная формула в частном случае, когда $\tau = 0$, даёт формулу из методички (да и могло ли быть иначе?). — *А. Ш.*