Задача 6

7 мая 2020 г.

Пусть $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ — векторные поля на M. *Скобка* $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{v} \circ \mathbf{w} - \mathbf{w} \circ \mathbf{v}$. Для начала, покажем, что векторное пространство векторных полей на M с операцией *скобка* является алгеброй Ли.

Свойства (1) и (2) проверются тривиально, исходя из определения скобки в нашем случае:

$$
\begin{aligned}
&-[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -\mathbf{v} \circ \mathbf{w} + \mathbf{w} \circ \mathbf{v} = [\mathbf{w}, \mathbf{v}],\\
&[\mathbf{v}, [\mathbf{u}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{u}, [\mathbf{w}, \mathbf{v}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{v}, \mathbf{u}]] =\\
&\qquad = \mathbf{v} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{w} - \mathbf{v} \circ \mathbf{w} \circ \mathbf{u} - \mathbf{u} \circ \mathbf{w} \circ \mathbf{v} + \mathbf{w} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{v} +\\
&\qquad + \mathbf{u} \circ \mathbf{w} \circ \mathbf{v} - \mathbf{u} \circ \mathbf{v} \circ \mathbf{w} - \mathbf{w} \circ \mathbf{v} \circ \mathbf{u} + \mathbf{v} \circ \mathbf{w} \circ \mathbf{u} +\\
&\qquad + \mathbf{w} \circ \mathbf{v} \circ \mathbf{u} - \mathbf{w} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{w} + \mathbf{u} \circ \mathbf{v} \circ \mathbf{w} = 0.
\end{aligned}
$$

Осталось показать, что *скобка* не выводит за пределы векторного пространства:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial_{x_i}, \quad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \partial_{x_i},\\
&\mathbf{v} \circ \mathbf{w}(f) = \mathbf{v}(\mathbf{w}(f)) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial_{x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \eta_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] =\\
&\qquad = \sum_{(i,j)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}.
\end{aligned}
$$

Аналогичным образом получаем, что

$$
\mathbf{w} \circ \mathbf{v}(f) = \sum_{(i,j)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}.
$$

Наконец, находя $[\mathbf{v}, \mathbf{w}](f)$, имеем

$$
[\mathbf{v}, \mathbf{w}](f) = (\mathbf{v} \circ \mathbf{w} - \mathbf{w} \circ \mathbf{v})|_f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(f) \zeta_j = \mathbf{u}(f)
$$

Теперь необходимо доказать, что скобка также оставляет на месте подпространство необобщённых вариационных симметрий. Покажем, что $\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w}$, являющихся необобщёнными вариационными симметриями лагранжевой задачи, $\mathbf{pr}^{(1)}[\mathbf{v}, \mathbf{w}](L) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}(L) = \sum_i \xi_i \frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum_i \dot{\xi}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i},\\
&\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w}(L) = \sum_i \eta_i \frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum_i \dot{\eta}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i},
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{u}(L) = \sum_i \zeta_i \frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum_i \dot{\zeta}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i},$$

$$\zeta_j = \sum_{i=1}^n \left(\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right), \quad \dot{\zeta}_j = \sum_{i=1}^n \left(\xi_i \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right)^{\cdot} + \dot{\xi}_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right)^{\cdot} - \dot{\eta}_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right).$$

Было бы приятно иметь следующий факт: $\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{u} = [\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}, \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w}]$, ведь тогда

$$\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{u}(L) = \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}(\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w}(L)) - \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w}(\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}(L)) = 0.$$

Докажем факт, описанный выше, тривиальной проверкой:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v} \circ \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w} = \\
&\quad = \sum_i \xi_i \partial_{x_i} \left(\sum_j \eta_j \partial_{x_j} + \sum_j \dot{\eta}_j \partial_{\dot{x}_j} \right) + \sum_i \dot{\xi}_i \partial_{\dot{x}_i} \left(\sum_j \eta_j \partial_{x_j} + \sum_j \dot{\eta}_j \partial_{\dot{x}_j} \right) = \\
&\quad = \sum_i \xi_i \left(\sum_j \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \partial_{x_j} + \sum_j \eta_j \partial_{x_j x_i} + \sum_j \frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial x_i} \partial_{\dot{x}_j} + \sum_j \dot{\eta}_j \partial_{\dot{x}_j x_i} \right) + \\
&\quad + \sum_i \dot{\xi}_i \left(\sum_j \eta_j \partial_{x_j \dot{x}_i} + \sum_j \frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial \dot{x}_i} \partial_{\dot{x}_j} + \sum_j \dot{\eta}_j \partial_{\dot{x}_j \dot{x}_i} \right).
\end{aligned}$$

В последнем слагаемом мы не выписали часть, содержащую $\partial \eta_j / \partial \dot{x}_i$, поскольку η_j не зависят от $\dot{x}$. При вычислении разности $\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v} \circ \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w} - \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w} \circ \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}$ все суммы вида $\sum_{(i,j)}$ уйдут ввиду того, что будут содержаться и в уменьшаемом, и в вычитаемом. При выписывании результата учтём также, что

$$\frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \sum_k \frac{\partial \eta_j}{x_k} \dot{x}_k}{\partial \dot{x}_j} = \sum_k \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\dot{x}_j} = \frac{\partial \eta_j}{\partial x_j}.$$

Остаётся выражение следующего вида:

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}, \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w}] = \sum_i \xi_i \left(\sum_j \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \partial_{x_j} + \sum_j \frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial x_i} \partial_{\dot{x}_j} \right) + \sum_i \dot{\xi}_i \left(\sum_j \frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial \dot{x}_i} \partial_{\dot{x}_j} \right) - \\
&\quad - \sum_i \eta_i \left(\sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \partial_{x_j} + \sum_j \frac{\partial \dot{\xi}_j}{\partial x_i} \partial_{\dot{x}_j} \right) - \sum_i \dot{\eta}_i \left(\sum_j \frac{\partial \dot{\xi}_j}{\partial \dot{x}_i} \partial_{\dot{x}_j} \right) = \\
&\quad = \sum_j \partial_{x_j} \sum_{i=1}^n \left(\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right) + \\
&\quad + \sum_j \partial_{\dot{x}_j} \sum_{i=1}^n \left(\xi_i \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right)^{\cdot} + \dot{\xi}_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right)^{\cdot} - \dot{\eta}_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right).
\end{aligned}$$

Сравнивая полученное с $\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{u}$ делаем вывод, что выражения равны, тем самым завершая доказательство.