Теорема Куранта

А. Завадский

1. Теорема Куранта

Введём в пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение: $(x, y) = x^T y$.

***Теорема* 1** (Р. Курант)*. Пусть A — симметрическая вещественная матрица размера $n \times n$, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ — её собственные значения, расположенные в порядке возрастания. Будем обозначать через L_k множество всех k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$, а его элементы, т.е. подпространства размерности k, — символом W. Тогда*

$$\lambda_k = \min_{W \in L_k} \max_{\substack{x \in W \\ \|x\|=1}} (x, Ax) = \max_{W \in L_{n-k+1}} \min_{\substack{x \in W \\ \|x\|=1}} (x, Ax).$$

Доказательство.

В некотором ортонормированном базисе матрица A диагональна, т.е. $(x, Ax) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$. Рассмотрим $(n-k+1)-$мерное подпространство $W_1 = \{x \mid x_1 = \ldots = x_{k-1} = 0\}$ и $k-$мерное подпространство $W_2 = \{x \mid x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}$. Заметим, что для любого вектора $x \in W_1$, имеющего единичную норму,

$$(x, Ax) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 \geqslant \lambda_k (x_k^2 + \ldots + x_n^2) = \lambda_k. \tag{1}$$

Значит, $\lambda_k \leqslant \min\limits_{\substack{x \in W_1 \\ \|x\|=1}} (x, Ax)$. Тогда $\lambda_k \leqslant \max\limits_{W \in L_{n-k+1}} \min\limits_{\substack{x \in W \\ \|x\|=1}} (x, Ax)$.

Для любого векотра $x \in W_2$, $\|x\| = 1$ имеем

$$(x, Ax) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_k x_k^2 \leqslant \lambda_k (x_1^2 + \ldots + x_k^2) = \lambda_k, \tag{2}$$

т.е. $\lambda_k \geqslant \max\limits_{\substack{x \in W_2 \\ \|x\|=1}} (x, Ax)$. Тогда $\lambda_k \geqslant \min\limits_{W \in L_k} \max\limits_{\substack{x \in W \\ \|x\|=1}} (x, Ax)$.

Пусть W_3 — произвольное $k-$мерное подпространство. Так как $\dim W_1 + \dim W_3 > n$, то $W_1 \cap W_3 \neq \{0\}$. Тогда найдётся вектор $x \in W_1 \cap W_3$ такой, что $\|x\| = 1$ и для него выполнено неравенство (1). Поэтому $\lambda_k \leqslant \max\limits_{x \in W_1 \cap W_2} (x, Ax) \leqslant \max\limits_{x \in W_2} (x, Ax)$. Подпространство $W_2 \in L_k$ мы выбрали произвольным образом, значит $\lambda_k \leqslant \min\limits_{W \in L_k} \max\limits_{\substack{x \in W \\ \|x\|=1}} (x, Ax)$.

Взяв теперь в качестве W_3 произвольное $(n-k+1)-$мерное подпространство и рассмотрев некоторый вектор единичной нормы в $W_2 \cap W_3$, получим аналогично, что $\lambda_k \geqslant \min\limits_{\substack{x \in W_1 \\ \|x\|=1}} (x, Ax)$. Тогда $\lambda_k \geqslant \max\limits_{W \in L_{n-k+1}} \min\limits_{\substack{x \in W \\ \|x\|=1}} (x, Ax)$. $\square$

Замечание: теорема верна и в случае эрмитовой матрицы A и эрмитова скалярного произведения в $\mathbb{C}^n$, причём доказательство переносится без изменений.

2. Малые колебания при наложении голономных связей

Рассмотрим консервативную лагранжеву систему, заданную лагранжианом $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$, способную совершать малые колебания в положении равновесия $q = 0$. Пусть $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ — её собственные значения. Наложим на систему дополнительную голономную автономную связь $g(q) = 0$, такую, что $g(0) = 0$, т.е. положение равновесия удовлетворяет уравнению связи. Считаем также, что g — гладкая функция и $\frac{\partial g}{\partial q}\Big|_{q=0} \neq 0$. На самом деле, можно считать функцию g линейной, т.к. при исследовании малых колебаний рассматривается не сами связи, а их линейные приближения.

Обобщённые координаты можно ввести так, что $g(q) = q_n$, т.е. новая связь задаётся уравнением $q_n = 0$. Пусть $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_{n-1}$ — собственные значения новой системы.

***Теорема* 2.** *При наложении связи новые собственные значения чередуются со старыми:*

$$\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \lambda_n.$$

Доказательство основывается на применении теоремы Куранта.

Пусть A — матрица кинетической энергии: $A = a_{ij}(0)$, а B — матрица Гессе потенциальной энергии в нуле: $B = \frac{\partial^2 U(0)}{\partial q_i \partial q_j}$. Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — это собственные числа пары форм с матрицами A и B. В нормальных координатах имеем $(q, Bq) = \lambda_1 q_1^2 + \ldots + \lambda_n q_n^2$ на эллипсоиде $\{q \mid (q, Aq) = 1\}$.

Рассмотрим $(n-1)$ — мерное подпространство, задаваемое уравнением $q_n = 0$. Оно соответствует системе с новой связью. Обозначим через $\tilde{L}_k$ множество $k-$мерных подпространств, содержащихся в нём. Очевидно, $\tilde{L}_k \subset L_k$. Из первого равенства в теореме Куранта

$$\mu_k = \min_{W \in \tilde{L}_k} \max_{\substack{q \in W \\ \|q\|=1}} (q, Bq) \geqslant \min_{W \in L_k} \max_{\substack{q \in W \\ \|q\|=1}} (q, Bq) = \lambda_k,$$

а из второго

$$\mu_k = \max_{W \in \tilde{L}_{n-k}} \min_{\substack{q \in W \\ \|q\|=1}} (q, Bq) \leqslant \max_{W \in L_{n-k+1}} \min_{\substack{q \in W \\ \|q\|=1}} (q, Bq) = \lambda_{k+1}.$$

$\square$

Собственные значения являются квадратами частот малых колебаний систем. Поэтому теорему 2 можно переформулировать следующим образом: *при наложении связи частоты колебаний новой системы чередуются с частотами старой.*

Список литературы

[1] В. В. Прасолов. Задачи и теоремы линейной алгебры, М.: МЦНМО, 2016

[2] С. В. Болотин и др. Теоретическая механика, М.: Академия, 2010