Алгебра Ли вариационных симметрий лагранжевой задачи

В. Боровик

3 мая 2020 г.

Пусть M — гладкое многообразие с локальными координатами $x = (x_1, ..., x_n)$, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \xi_i(x)\partial_{x_i}$ — векторное поле на нем. Оно является *полем обычной вариационной симметрии* лагранжевой задачи $\mathcal{L}[x] = \int L(t, x, \dot{x})\,dt$, если

$$\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}(L) = \sum_{i=1}^n \xi_i \partial_{x_i}(L) + \sum_{i=1}^n \dot{\xi}_i \partial_{\dot{x}_i}(L) = 0. \tag{1}$$

Введем скобку Ли на пространстве векторных полей: $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{v} \circ \mathbf{w} - \mathbf{w} \circ \mathbf{v}$. Проверим, что мы получили дифференциальный оператор первого порядка, то есть можем его отождествить с векторным полем.

Пусть $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \xi_i(x)\partial_{x_i}$, $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^n \eta_j(x)\partial_{x_j}$. Тогда

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v} \circ \mathbf{w} - \mathbf{w} \circ \mathbf{v})(f) &= \sum_{i=1}^n \xi_i \partial_{x_i}\left(\sum_{j=1}^n \eta_j \partial_{x_j}(f)\right) - \sum_{i=1}^n \eta_i \partial_{x_i}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j \partial_{x_j}(f)\right) = \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\xi_i \partial_{x_i}(\eta_j)\partial_{x_j}(f) + \xi_i \eta_j \frac{\partial(f)}{\partial x_i \partial x_j} - \left(\eta_i \partial_{x_i}(\xi_j)\partial_{x_j}(f) + \eta_i \xi_j \frac{\partial(f)}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right] = \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\xi_i \partial_{x_i}(\eta_j)\partial_{x_j}(f) - \eta_i \partial_{x_i}(\xi_j)\partial_{x_j}(f)\right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\xi_i \eta_j \frac{\partial(f)}{\partial x_i \partial x_j} - \eta_i \xi_j \frac{\partial(f)}{\partial x_i \partial x_j}\right),
\end{aligned}$$

причем последняя двойная сумма равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\xi_i \eta_j \frac{\partial(f)}{\partial x_i \partial x_j} - \eta_i \xi_j \frac{\partial(f)}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j \frac{\partial(f)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \xi_j \frac{\partial(f)}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Отсюда

$$(\mathbf{v} \circ \mathbf{w} - \mathbf{w} \circ \mathbf{v})(f) = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n \left(\xi_i \partial_{x_i}(\eta_j) - \eta_i \partial_{x_i}(\xi_j)\right)\right] \partial_{x_j}(f),$$

следовательно,

$$\mathbf{v} \circ \mathbf{w} - \mathbf{w} \circ \mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \zeta_j \partial_{x_j}, \text{где } \zeta_j = \sum_{i=1}^n \left(\xi_i \partial_{x_i}(\eta_j) - \eta_i \partial_{x_i}(\xi_j)\right) = \mathbf{v}(\eta_j) - \mathbf{w}(\xi_j).$$

Кососимметричность такой скобки очевидна, проверим тождество Якоби. Пусть $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \tau_i(x)\partial_{x_i}$, тогда:

$$[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{u}(\mathbf{v}(\eta_j) - \mathbf{w}(\xi_j)) - [\mathbf{v}, \mathbf{w}](\tau_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{u} \circ \mathbf{v}(\eta_j) - \mathbf{u} \circ \mathbf{w}(\xi_j) - \mathbf{v} \circ \mathbf{w}(\tau_j) + \mathbf{w} \circ \mathbf{v}(\tau_j).$$

Аналогично,

$$[\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{v} \circ \mathbf{w}(\tau_j) - \mathbf{v} \circ \mathbf{u}(\eta_j) - \mathbf{w} \circ \mathbf{u}(\xi_j) + \mathbf{u} \circ \mathbf{w}(\xi_j),$$

$$[\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{w} \circ \mathbf{u}(\xi_j) - \mathbf{w} \circ \mathbf{v}(\tau_j) - \mathbf{u} \circ \mathbf{v}(\eta_j) + \mathbf{v} \circ \mathbf{u}(\eta_j).$$

Следовательно, $[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] = 0$, и пространство векторных полей на многообразии с операцией коммутирования образует алгебру Ли.

Теперь достаточно проверить, что подпространство полей вариационных симметрий инвариантно относительно введенной скобки. Пусть $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ — поля вариационных симметрий, то есть они удовлетворяют (1). Проверим, что $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ тоже удовлетворяет (1).

Операция первого продолжения отображает однопараметрическую локальную группу Ли $G = \{g^\epsilon\}$ преобразований M в однопараметрическую локальную группу Ли $\mathbf{pr}^{(1)}G$ преобразований $M^* = \{(x, \dot{x})\}$. Дифференциал этого отображения сопоставляет векторному полю $\mathbf{v}$ на M его продолжение $\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}$ и стреляет из алгебры Ли группы G в алгебру Ли группы $\mathbf{pr}^{(1)}G$. В силу функториальности дифференциала, имеем:

$$\mathbf{pr}^{(1)}[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}, \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w}].$$

Тогда

$$\mathbf{pr}^{(1)}[\mathbf{v}, \mathbf{w}](L) = (\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v} \circ \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w})(L) - (\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w} \circ \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v})(L) = \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}(0) - \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w}(0) = 0.$$

Таким образом, $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ — снова поле вариационной симметрии, а значит подпространство полей вариационных симметрий — алгебра Ли.