

## Задача 6

© Меденцов Н.В.

3 мая 2020 г.

Пусть  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  — векторные поля на  $M$ . Скобка  $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{v} \circ \mathbf{w} - \mathbf{w} \circ \mathbf{v}$ . Для начала, покажем, что векторное пространство векторных полей на  $M$  с операцией скобка является алгеброй Ли.

Свойства (1) и (2) проверятся тривиально, исходя из определения скобки в нашем случае:

$$\begin{aligned} -[\mathbf{v}, \mathbf{w}] &= -\mathbf{v} \circ \mathbf{w} + \mathbf{w} \circ \mathbf{v} = [\mathbf{w}, \mathbf{v}], \\ [\mathbf{v}, [\mathbf{u}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{u}, [\mathbf{w}, \mathbf{v}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{v}, \mathbf{u}]] &= \\ &= \mathbf{v} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{w} - \mathbf{v} \circ \mathbf{w} \circ \mathbf{u} - \mathbf{u} \circ \mathbf{w} \circ \mathbf{v} + \mathbf{w} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{v} + \\ &+ \mathbf{u} \circ \mathbf{w} \circ \mathbf{v} - \mathbf{u} \circ \mathbf{v} \circ \mathbf{w} - \mathbf{w} \circ \mathbf{v} \circ \mathbf{u} + \mathbf{v} \circ \mathbf{w} \circ \mathbf{u} + \\ &+ \mathbf{w} \circ \mathbf{v} \circ \mathbf{u} - \mathbf{w} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{w} + \mathbf{u} \circ \mathbf{v} \circ \mathbf{w} = 0. \end{aligned}$$

Осталось показать, что скобка не выводит за пределы векторного пространства:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^n \xi_i \partial_{x_i}, \quad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \eta_i \partial_{x_i}, \\ \mathbf{v} \circ \mathbf{w}(f) &= \mathbf{v}(\mathbf{w}(f)) = \sum_{i=1}^n \xi_i \partial_{x_i} \left( \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \sum_{i=1}^n \xi_i \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \eta_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] = \\ &= \sum_{(i,j)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\mathbf{w} \circ \mathbf{v}(f) = \sum_{(i,j)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}.$$

Наконец, находя  $[\mathbf{v}, \mathbf{w}](f)$ , имеем

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}](f) = (\mathbf{v} \circ \mathbf{w} - \mathbf{w} \circ \mathbf{v})|_f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \left( \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}(f) \zeta_j = \mathbf{u}(f)$$

Теперь необходимо доказать, что скобка также оставляет на месте подпространство необобщённых вариационных симметрий. Покажем, что  $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w}$ , являющихся необобщёнными вариационными симметриями лагранжевой задачи,  $\mathbf{pr}^{(1)}[\mathbf{v}, \mathbf{w}](L) = 0$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}(L) &= \sum_i \xi_i \frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum_i \dot{\xi}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \\ \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w}(L) &= \sum_i \eta_i \frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum_i \dot{\eta}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{u}(L) = \sum_i \zeta_i \frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum_i \dot{\zeta}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i},$$

$$\zeta_j = \sum_{i=1}^n \left( \xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right), \quad \dot{\zeta}_j = \sum_{i=1}^n \left( \xi_i \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right)' + \dot{\xi}_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \left( \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right)' - \dot{\eta}_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right).$$

Было бы приятно иметь следующий факт:  $\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{u} = [\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}, \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w}]$ , ведь тогда

$$\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{u}(L) = \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}(\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w}(L)) - \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w}(\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}(L)) = 0.$$

Докажем факт, описанный выше, тривиальной проверкой:

$$\begin{aligned} \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v} \circ \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w} &= \\ &= \sum_i \xi_i \partial_{x_i} \left( \sum_j \eta_j \partial_{x_j} + \sum_j \dot{\eta}_j \partial_{\dot{x}_j} \right) + \sum_i \dot{\xi}_i \partial_{\dot{x}_i} \left( \sum_j \eta_j \partial_{x_j} + \sum_j \dot{\eta}_j \partial_{\dot{x}_j} \right) = \\ &= \sum_i \xi_i \left( \sum_j \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \partial_{x_j} + \sum_j \eta_j \partial_{x_j x_i} + \sum_j \frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial x_i} \partial_{\dot{x}_j} + \sum_j \dot{\eta}_j \partial_{\dot{x}_j x_i} \right) + \\ &+ \sum_i \dot{\xi}_i \left( \sum_j \eta_j \partial_{x_j \dot{x}_i} + \sum_j \frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial \dot{x}_i} \partial_{\dot{x}_j} + \sum_j \dot{\eta}_j \partial_{\dot{x}_j \dot{x}_i} \right). \end{aligned}$$

В последнем слагаемом мы не выписали часть, содержащую  $\partial \eta_j / \partial \dot{x}_i$ , поскольку  $\eta_j$  не зависят от  $\dot{x}$ . При вычислении разности  $\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v} \circ \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w} - \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w} \circ \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}$  все суммы вида  $\sum_{(i,j)}$  уйдут ввиду того, что будут содержаться и в уменьшаемом, и в вычитаемом. При выписывании результата учтём также, что

$$\frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \sum_k \frac{\partial \eta_j}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k}{\partial \dot{x}_j} = \sum_k \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial \eta_j}{\partial x_j}.$$

Остаётся выражение следующего вида:

$$\begin{aligned} [\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}, \mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{w}] &= \sum_i \xi_i \left( \sum_j \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \partial_{x_j} + \sum_j \frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial x_i} \partial_{\dot{x}_j} \right) + \sum_i \dot{\xi}_i \left( \sum_j \frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial \dot{x}_i} \partial_{\dot{x}_j} \right) - \\ &- \sum_i \eta_i \left( \sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \partial_{x_j} + \sum_j \frac{\partial \dot{\xi}_j}{\partial x_i} \partial_{\dot{x}_j} \right) - \sum_i \dot{\eta}_i \left( \sum_j \frac{\partial \dot{\xi}_j}{\partial \dot{x}_i} \partial_{\dot{x}_j} \right) = \\ &= \sum_j \partial_{x_j} \sum_{i=1}^n \left( \xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right) + \\ &+ \sum_j \partial_{\dot{x}_j} \sum_{i=1}^n \left( \xi_i \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right)' + \dot{\xi}_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \left( \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right)' - \dot{\eta}_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Сравнивая полученное с  $\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{u}$  делаем вывод, что выражения равны, тем самым завершая доказательство.