Малые колебания консервативных лагранжевых систем

А. Н. Швец

8 апреля 2020 г.

1. Состояния равновесия

Рассмотрим консервативную лагранжеву систему, заданную лагранжианом $L(q,\dot q) = T(q,\dot q) - U(q)$ (не зависящим от времени). *Положением равновесия* такой системы назовём решение уравнений Эйлера — Лагранжа вида $q(t) = q^* = \mathrm{const}$, *состоянием равновесия* — пару $(q,\dot q) = (q^*, 0)$. В дальнейшем без ограничения общности считаем, что эта константа нулевая, то есть положение равновесия находится в начале координат; если это не так, то сдвинем соответствующим образом координаты.

2. Линеаризация лагранжевых уравнений

Во многом поведение решений лагранжевых уравнений вблизи состояния равновесия сходно с поведением решений системы линеаризованных уравнений. Для выполнения линеаризации следует представить уравнения Лагранжа в виде системы уравнений первого порядка (ввести переменные $v = \dot q$), а затем разложить правые части полученных уравнений в тейлоровские ряды в окрестности состояния равновесия $(0, 0)$, отбросив члены разложения степени выше первой.

Однако этот универсальный подход, годящийся не только для лагранжевых уравнений, но и для вообще любых, можно значительно упростить, полагаясь на вариационную специфику уравнений. Заметим, во-первых, что при линеаризации лагранжевых уравнений снова получаются лагранжевы, но только линейные (проверьте!). Во-вторых, лагранжианам, квадратичным по скоростям отвечают линейные уравнения, и наоборот, линейные лагранжевы уравнения отвечают квадратичным лагранжианам (тоже проверьте!). Всё это позволяет свести операцию линеаризации лагранжевых уравнений к манипуляциям лишь с одной функцией Лагранжа (вместо манипуляций со многими правыми частями уравнений).

Нужно разложить в тейлоровский ряд сам лагранжиан L в окрестности состояния равновесия по отношению ко всем фазовым переменным $(q,\dot q)$, отбрасывая члены разложения степени выше *второй.* По полученному в результате лагранжиану $\tilde L$ уже нужно строить уравнения, они заведомо будут линейными.

В задачах механики, когда $L = 1/2 \cdot \sum_{i,j} a_{ij}(q)\dot q_i \dot q_j - U(q)$, получаем

$$\tilde L = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(0)\dot q_i\dot q_j - \left(U(0) + \sum_k \frac{\partial U(0)}{\partial q_k} q_k + \frac{1}{2}\sum_{l,m}\frac{\partial^2 U(0)}{\partial q_l \partial q_m} q_l q_m \right).$$

С учётом того, что в положении равновесия $\partial U(0)/\partial q_k = 0$, а константа $U(0)$ является калибровочной, получим

$$\tilde L = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(0)\dot q_i\dot q_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 U(0)}{\partial q_i \partial q_j} q_i q_j.$$

Введём обозначения: $A_{ij} = a_{ij}(0)$ — матрица кинетической энергии, $B_{ij} = \partial^2 U(0)/\partial q_i \partial q_j$ — матрица (Гессе) потенциальной энергии. Тогда (проверьте!)

$$\mathbf{E}_i(\tilde{L}) = \sum_s A_{is}\ddot{q}_s + \sum_s B_{is}q_s.$$

Наша следующая забота — линейными заменами координат придать полученным уравнениям $\mathbf{E}(\tilde{L}) = 0$ наиболее простой вид. Заметим, что обе матрицы, A и B, симметрические, и к тому же матрица A определённо-положительная (последнее вытекает из определённой положительности кинетической энергии). Линейные преобразования координат q продолжаются до линейных (и тех же самых) преобразований скоростей $\dot{q}$. Как известно из линейной алгебры, линейными преобразованиями можно одновременно привести пару квадратичных форм, одна из которых определённо-положительна, к диагональному виду, причём определённо-положительная превратится в сумму квадратов. Для доказательства нужно задать в линейном пространстве евклидову структуру с помощью определённо-положительной формы, тогда утверждение сводится к теореме о приведении квадратичной формы к главным осям. Полученные оси можно выбрать к тому же ортогональными относительно скалярного произведения — факт, который мы вспоминали в связи с главными осями инерции.

В новых переменных $\hat{q}_i = \sum_k C_{ik}q_k$ линеаризованные уравнения Лагранжа примут вид:

$$\ddot{\hat{q}}_i + \omega_i^2\hat{q}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

где ω_i^2 суть собственные числа пары форм с матрицами A и B. Диагонализующие координаты называются *нормальными.* Нормализация привела к полному расцеплению линеаризованных уравнений — каждое уравнение содержит лишь свою координату.

Если все $\omega_i^2 > 0$ (это так, если потенциальная энергия имеет невырожденный минимум в положении равновесия), то каждая нормальная координата в силу линеаризованных уравнений будет совершать гармонические колебания с частотой ω_i. В этом случае движения линеаризованной системы называют *малыми колебаниями.* Сами линеаризованные уравнения называются *уравнениями малых колебаний*. Это совсем не означает малость амплитуд колебаний — для линейных уравнений она может быть как угодно велика. Дело в том, что для исходных уравнений $\mathbf{E}(L) = 0$ вдали от состояния равновесия линеаризация $\mathbf{E}(\tilde{E}) = 0$ перестаёт быть хорошим приближением — отсюда слово *малые.*

Траектории малых колебаний суть так называемые *фигуры Лиссажу́.* Они в типичном случае незамкнуты. Однако, если частоты соизмеримы, то есть линейно зависимы над $\mathbb{Z}$, они замкнуты, а малые колебания периодичны — период равен наименьшему общему кратному периодов колебаний отдельных координат.

3. Малые колебания при наложении голономных связей

Пусть на лагранжеву систему, способную совершать малые колебания в положении равновесия, наложена ещё одна дополнительная голономная автономная связь с уравнением $f(q) = 0$, причём имеющееся положение равновесия q^* удовлетворяет уравнению связи. Связь съедает одну степень свободы. Что можно сказать о малых колебаниях с учётом дополнительной связи?

Теперь следует ограничить уравнения малых колебаний на гиперплоскость, заданную линеаризованным уравнением связи.

Оказывается, полученная система на гиперплоскости будет также совершать гармонические колебания с частотами $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, причём частоты $\omega_1, \dots, \omega_n$ колебаний исходной системы будут чередоваться с частотами системы на гиперплоскости:

$$\omega_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \omega_n.$$

(здесь предполагается, что все частоты упорядочены по неубыванию). Это следует из теоремы Куранта (линейная алгебра). Геометрическая интерпретация этой теоремы: при центральном сечении эллипсоида с полуосями $a_1 \leqslant \dots \leqslant a_n$ получается эллипсоид коразмерности один с полуосями $b_1 \leqslant \dots \leqslant b_{n-1}$, причём

$$a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant b_{n-1} \leqslant a_n.$$

В частности, для двумерного эллипсоида его центральное круглое сечение обязано проходить через среднюю ось.

В технической механике данный результат очень важен. Добавочные связи в технике реализуются как дополнительные рёбра жёсткости, балки, фермы, и т. п. Их добавление в конструкцию, таким образом, может разве что сузить диапазон собственных частот. Это хорошо, поскольку системы отзывчивы к внешним возмущениям, имеющим частоты, кратные или близкие к кратным собственных частот — это явление *резонанса,* при котором рота солдат, шагающая по мосту в ногу (что категорически запрещено), может разрушить мост, если частота вынуждающего воздействия окажется близкой к какой-то из собственных. Чем у́же диапазон собственных частот, тем лучше, тем жёстче конструкция.

Челлендж: предлагаю желающим отличиться раскопать теорему Куранта, изложить её с доказательством понятным языком, и мы выложим на сайт.

4. Задачи

Задачи относятся к предыдущей теме. В следующий раз, если доживём (☠), будут задачи на малые колебания. К этому времени нужно изучить также предисловие к разделу 3 задачника.

1. Найдите геодезические на плоскости Лобачевского в модели на верхней полуплоскости как графики функций $y(x)$. Обратите внимание, что геодезические, не представимые в указанном виде, будут потеряны. Теперь поменяйте местами в функционале длины зависимую и независимую переменные и снова найдите геодезические, в том числе потерянные. Используйте метод Рауса (где возможно) и не забывайте про интеграл Якоби. Фукнционал длины в обоих случаях:

   $$\mathcal{L}_1[y] = \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx, \quad \mathcal{L}_2[x] = \int \frac{x'\sqrt{1+1/x'^2}}{y}\,dy,$$

   (штрих означает производную по независимой переменной). Убедитесь сначала, что $\mathcal{L}_2$ совпадает с $\mathcal{L}_1$, но только выражен в других переменных.

2. 2.20.

3. 2.33.

4. 2.35.

5. 2.36.

6. *Челлендж!*

Теперь задачи на малые колебания. Выполняя линеаризацию (отбрасывая члены степени выше второй в лагранжиане), строго обосновывайте, что степень малости отбрасываевых членов достаточно велика. Теоретическая основа в этих задачах ничтожна. Главное — аккуратность в вычислениях и обоснования. Проверяйте совпадение с ответом самостоятельно. Решения без обоснований проверять не буду. Не возражаю против использования систем компьютерной алгебры (Maxima, Reduce, Wolfram Mathematica), и даже приветствую.

1. 3.1, 3.2 (в сущности, это одна и та же задача). Исследуйте все возможные положения равновесия и их характер при разнообразных комбинациях значений параметров.
2. 3.6.
3. 3.12.
4. 3.14.
5. 3.23.

Будьте здоровы!