

Силы реакций идеальных связей в твёрдом теле являются внутренними

А. Н. Шве́ц

8 апреля 2020 г.

Твёрдым телом назовём систему материальных точек, попарные расстояния между которыми постоянны. Твёрдое тело можно рассматривать как систему с голономными связями с уравнениями

$$(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)^2 - c_{\alpha\beta}^2 = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где \mathbf{r}_v — радиусы-векторы точек, N — количество точек, $c_{\alpha\beta}$ — константы.

Согласно принципу освобождения от связей твёрдое тело можно также рассматривать как систему свободных материальных точек под действием дополнительных (помимо заданных) сил реакции \mathbf{R}_v .

В динамике к определению твёрдого тела добавляют требование, чтобы силы реакции были внутренними, то есть допускали представление в виде

$$\mathbf{R}_v = \sum_k \lambda_{vk} (\mathbf{r}_v - \mathbf{r}_k), \quad \lambda_{vk} = \lambda_{kv}, \quad (2)$$

где λ_{vk} — некоторые константы.

Нетрудно доказать, что с этим дополнительным требованием связи в твёрдом теле являются идеальными. В самом деле, с учётом условий на виртуальные перемещения

$$\langle \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta, \delta \mathbf{r}_\alpha - \delta \mathbf{r}_\beta \rangle = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, N \quad (3)$$

форма виртуальной работы сил реакции равна нулю:

$$\sum_v \langle \mathbf{R}_v, \delta \mathbf{r}_v \rangle = \sum_v \sum_k \lambda_{vk} \langle \mathbf{r}_v - \mathbf{r}_k, \delta \mathbf{r}_v \rangle = 0$$

(последняя сумма состоит из пар слагаемых вида

$$\lambda_{vk} \langle \mathbf{r}_v - \mathbf{r}_k, \delta \mathbf{r}_v \rangle + \lambda_{kv} \langle \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_v, \delta \mathbf{r}_k \rangle,$$

которые уничтожаются парами в силу (3) и симметричности матрицы λ_{vk}).

Верно и обратное утверждение.

Теорема. Пусть связи в твёрдом теле идеальны. Тогда силы их реакции являются внутренними.

Лемма. Пусть $f, g_s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — линейные функции, причём $f(x) = 0$ в силу $g_s(x) = 0$, $s = 1, \dots, k, x \in \mathbb{R}^n$. Тогда найдутся множители $\lambda_s \in \mathbb{R}$ такие, что $f(x) \equiv \sum_{s=1}^k \lambda_s g_s(x)$.

Доказательство леммы. Положим $V_s = \ker g_s$. Тогда по условию $f \in (\cap_s V_s)^\perp$ (здесь V^\perp означает ортогональное дополнение к подпространству V , то есть $\{h \in (\mathbb{R}^n)^* \mid V \subset \ker h\}$). Утверждение леммы равносильно равенству

$$\left(\bigcap_s V_s\right)^\perp = \sum_s V_s^\perp.$$

Заменив в этом равенстве V_s на V_s^\perp и взяв ортогональное дополнение к обеим частям, получим равносильное равенство

$$\bigcap_s V_s^\perp = \left(\sum_s V_s\right)^\perp.$$

Его справедливость вытекает из того факта, что принадлежность линейной функции h пространствам в обеих частях равенства равносильна принадлежности h каждому из пространств V_s^\perp , $s = 1, \dots, k$. Лемма доказана. \square

Доказательство теоремы. Идеальность связей в твёрдом теле означает равенство нулю формы виртуальной работы сил реакции, то есть обращение в ноль линейной функции $\sum_v \langle \mathbf{R}_v, \delta \mathbf{r}_v \rangle$ на любом векторе $(\delta \mathbf{r}_1, \dots, \delta \mathbf{r}_N)$, удовлетворяющем условиям (3), также линейным по отношению к виртуальным перемещениям.

Согласно лемме найдутся такие множители $\lambda_{\alpha\beta}$, что будет выполняться равенство

$$\sum_v \langle \mathbf{R}_v, \mathbf{v}_v \rangle = \sum_{\alpha, \beta} \lambda_{\alpha\beta} \langle \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta, \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (4)$$

для всевозможных векторов $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$, не стеснённых никакими ограничениями.

Расщепляя уравнение (4), получим равенства

$$\mathbf{R}_v = \sum_k [\lambda_{vk}(\mathbf{r}_v - \mathbf{r}_k) - \lambda_{kv}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_v)] = \sum_k (\lambda_{vk} + \lambda_{kv})(\mathbf{r}_v - \mathbf{r}_k),$$

то есть силы реакций связей имеют вид (2), и, следовательно, являются внутренними. Теорема доказана. \square