Метод Рауса

А. Н. Швец

8 апреля 2020 г.

1. Первые интегралы уравнений Эйлера — Лагранжа

Вариационные уравнения Лагранжа $\mathbf{E}(L) = 0$ при наличии определённых симметрий лагранжиана обладают первыми интегралами, то есть такими функциями $I(t, q, \dot{q})$, что $\dot{I} = 0 \bmod \mathbf{E}(L) = 0$. Здесь $\mathbf{E}$ — оператор Эйлера, отображающий лагранжиан L в набор уравнений Эйлера — Лагранжа.

В частности, если лагранжиан $L(t, q, \dot{q})$ инвариантен относительно сдвигов какой-нибудь обобщённой координаты, то есть $\partial L/\partial q_i = 0$, то функция $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$ является первым интегралом. Это напрямую следует из i-го уравнения Эйлера — Лагранжа. Обобщённая координата q_i называется *циклической,* а отвечающий ей первый интеграл называется *циклическим импульсом.*

2. Связь уравнений Эйлера — Лагранжа и уравнений Гамильтона

Уравнения Эйлера — Лагранжа можно записать в эквивалентной форме — в форме канонических уравнений Гамильтона. Нужно составить функцию Гамильтона (гамильтониан), выполнив *преобразование Лежандра* лагранжиана как функции обобщённых скоростей. Для этого составляем алгебраические уравнения

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

и разрешаем их относительно скоростей:

$$\dot{q}_i = f_i(t, q, p)$$

(предполагая, что уравнения разрешимы, хотя бы локально). Затем в выражение

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(t, q, \dot{q})$$

подставляем полученные выражения скоростей, и, таким образом, получаем функцию Гамильтона $H(t, q, p)$. Уравнения

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

и есть канонические уравнения Гамильтона. Это $2n$ уравнений первого порядка.

3. Метод Рауса

Известный непостоянный первый интеграл общей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x)$$

позволяет понизить порядок системы на единицу. Благодаря особой вариационной природе уравнений Эйлера — Лагранжа (и эквивалентных им уравнений Гамильтона) первый интеграл имеет двойную ценность — он позволяет понизить порядок на две единицы, исключив тем самым одну степень свободы.

Более сложным является вопрос о возможности понижения порядка (редукции) сразу на $2k$ единиц при наличии k независимых первых интегралов для уравнений Эйлера — Лагранжа. Согласно теореме Нётер каждый первый интеграл лагранжевых уравнений обусловлен какой-то одномерной группой Ли симметрий (*группами Ли* называются гладкие многообразия с групповой структурой, для которой групповая операция задаётся гладкими функциями). Наличие нескольких независимых первых интегралов означает наличие многомерной группы симметрий. В случае абелевой группы симметрий описанная редукция возможна; в неабелевом случае уже не обязательно.

Имеются различные методы понижения порядка уравнений Эйлера — Лагранжа в случае наличия первых интегралов. Если первые интегралы являются циклическими, очень удобен *метод Рауса.* При k циклических первых интегралах соответствующая группа симметрий есть группа трансляций циклических переменных, она абелева, так что метод Рауса позволяет понизить порядок сразу на $2k$ единиц.

Будем считать, что первые k обобщённых координат циклические. Остальные назовём *позиционными,* так что $q = (q_{\text{cyc}}, q_{\text{pos}})$. Выполним частичное преобразование Лежандра лагранжиана — по отношению не ко всем скоростям (как при составлении гамильтониана), а лишь по отношению к циклическим: в выражение

$$\sum_{\text{cyc}} \dot{q}_{\text{cyc}} p_{\text{cyc}} - L(t, q_{\text{pos}}, \dot{q}_{\text{cyc}}, \dot{q}_{\text{pos}}) \tag{1}$$

подставим вместо циклических скоростей $\dot{q}_{\text{cyc}}$ их выражения через циклические импульсы, полученные при решении уравнений

$$p_{\text{cyc}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\text{cyc}}}, \tag{2}$$

относительно циклических скоростей:

$$\dot{q}_{\text{cyc}} = f_i(t, q_{\text{pos}}, \dot{q}_{\text{pos}}, p_{\text{cyc}})$$

(правые части не содержат q_{cyc}, так как они отсутствуют в (2)). Построенная в результате такой подстановки в (1) функция $R(t, q_{\text{pos}}, \dot{q}_{\text{pos}}, p_{\text{cyc}})$ называется *функцией Рауса.*

Функция Рауса сочетает в себе свойства как функции Лагранжа (по отношению к позиционным переменным), так и функции Гамильтона (по отношению к циклическим). Это позволяет переписать исходные уравнения Эйлера — Лагранжа в эквивалентной гибридной форме: по отношению к позиционным переменным это будут уравнения Эйлера — Лагранжа (3), а по отношению к циклическим — уравнения Гамильтона (4), где функция Рауса будет играть роль функции и Лагранжа и Гамильтона одновременно:

$$\frac{\partial R}{\partial q_{\text{pos}}} - \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_{\text{pos}}}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} = 0, \tag{3}$$

$$\dot{p}_{\text{cyc}} = -\frac{\partial R}{\partial q_{\text{cyc}}} = 0, \quad \dot{q}_{\text{cyc}} = \frac{\partial R}{\partial p_{\text{cyc}}}. \tag{4}$$

Первый набор уравнений (4), как и ожидалось, выражает постоянство циклических импульсов. Уравнения (3) представляют собой уравнения Эйлера — Лагранжа с $n-k$ степенями свободы, содержащие набор параметров p_{cyc}. Решив их, получим зависимости $q_{\text{pos}}(t)$. Подставив эти зависимости во второй набор уравнений (4), получим уравнения

$$\dot{q}_{\text{cyc}} = \frac{\partial R(t, q_{\text{pos}}(t), \dot{q}_{\text{pos}}(t), p_{\text{cyc}})}{\partial p_{\text{cyc}}},$$

которые немедленно решаются:

$$q_{\text{cyc}}(t) = \int \frac{\partial R(t, q_{\text{pos}}(t), \dot{q}_{\text{pos}}(t), p_{\text{cyc}})}{\partial p_{\text{cyc}}}\, dt.$$

Таким образом, решение уравнений Эйлера — Лагранжа с n степенями свободы и с k циклическими координатами сводится к решению уравнений Эйлера — Лагранжа с $n-k$ степенями свободы.

В частности, уравнения Эйлера — Лагранжа с двумя степенями свободы, одной циклической координатой и с лагранжианом, не зависящим от времени, могут быть полностью проинтегрированы. Дело в том, что в этом случае функция Рауса также не зависит от времени, поэтому лагранжева группа уравнений Рауса представляет собой одно автономное уравнение Эйлера — Лагранжа относительно единственной позиционной координаты:

$$\frac{\partial R}{\partial q_{\text{pos}}} - \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_{\text{pos}}}\right)^{\cdot} = 0,$$

обладающее интегралом энергии

$$\dot{q}_{\text{pos}} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_{\text{pos}}} - R.$$

Условие постоянства этого первого интеграла есть автономное дифференциальное уравнение первого порядка, в котором можно разделить переменные.

Обратите внимание, что наше определение функции Рауса отличается знаком от определения в задачнике. Это не имеет никакого значения для уравнений Рауса. Мы же хотели таким выбором знака подчеркнуть связь построения функции Рауса с преобразованием Лежандра в его общепринятой форме.

4. Преобразование Лежандра полиномов

В задачах теоретической механики функции Лагранжа всегда являются квадратными полиномами относительно скоростей, поскольку зависимость от скоростей в них приходит из кинетической энергии. Учитывая это, можно упростить работу при вычислении преобразования Лежандра лагранжиана при составлении функции Рауса или Гамильтона.

Преобразование Лежандра функции $f(x)$ есть функция $g(y)$, вычисленная как

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - f(x),$$

где все переменные x заменяются на их выражения, полученные при решении уравнений $y = \partial f/\partial x$ относительно x (опять же предполагаем разрешимость этих уравнений).

Функция $\varphi(x)$ называется *однородной* степени r, если для любого положительного числа λ выполняется $f(\lambda x) \equiv \lambda^r f(x)$.

Теорема Эйлера об однородных функциях утверждает, что

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv rf,$$

если f — однородная функция степени r.

Рассмотрим функцию Лагранжа как функцию от тех скоростей, по отношению к которым выполняется преобразование Лежандра (зависимость от прочих переменных не принимаем во внимание). Обозначим как L_2, L_1 и L_0 соответственно однородные квадратичную, линейную части функции Лагранжа и часть, не содержащую указанных скоростей. Тогда $L = L_0 + L_1 + L_2$ и

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial(L_0 + L_1 + L_2)}{\partial \dot{q}_i} - (L_0 + L_1 + L_2) = 0L_0 + 1L_1 + 2L_2 - L_0 - L_1 - L_2 = L_2 - L_0.$$

Таким образом при вычислении преобразования Лежандра квадратичных по скоростям лагранжианов нужно оставить квадратичную часть, выкинуть линейную часть и поменять знак у части, не содержащей скоростей. После этого в полученном выражении следует подставить вместо скоростей их выражения через время, обобщённые координаты и импульсы, заданные неявно уравнениями $p = \partial L / \partial \dot{q}$.

5. Задачи

1. Докажите теорему Эйлера об однородных функциях (воспользуйтесь определением однородной функции и продифференцируйте его, положив $\lambda = 1$).

2. Геодезические на плоскости со стандартной метрикой можно определить как стационарные точки лагранжева функционала длины $\int \sqrt{1 + y'^2}\, dx$. Найдите решение соответствующих уравнений Эйлера — Лагранжа методом Рауса.

   Запараметризованные временем те же геодезические суть стационарные точки функционала длины $\int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$. Попытайтесь решить соответствующую лагранжеву задачу также методом Рауса. Не выходит? Объясните, в чём дело.

3. Покажите, что уравнения Эйлера — Лагранжа, описывающие движение материальной точки по инерции по риманову многообразию в отсутствие трения, совпадают с уравнениями геодезических для этого многообразия (известные из курса дифференциальной геометрии). В этой задаче лагранжиан есть кинетическая энергия $L = 1/2 \cdot g_{ij}(q)\dot{q}^i \dot{q}^j$.

4. Точка движется по прямому круговому конусу с вертикальной осью и углом между осью и образующей 45° без трения под действием силы тяжести ($g = 1$). Решите уравнения движения методом Рауса, взяв в качестве обобщённых полярные координаты проекции точки на горизонтальную плоскость.

5. Решите предыдущую задачу без силы тяжести (движение по инерции), тем самым будут найдены геодезические для прямого кругового конуса. Конус — развёртывающаяся поверхность, его развёртывание — изометрия на плоскость, поэтому при развёртывании геодезические должны перейти в прямые. Проверьте это, развернув конус в плоский угол, и получив полярное представление прямых на плоскости.