Diferenciación Numérica

Santiago Talero Parra
stalerop@udsitrital.edu.co

Facultad de Ciencias Matemáticas y Naturales
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Fecha de entrega: 25 de abril de 2023

Caída Libre

Método Analítico

El problema de caída libre es modelado preliminarmente cerca de la superficie de la tierra en que el campo gravitatorio tiene comportamiento uniforme y afecta a nuestro sistema mecánico de interés, una esfera con densidad uniforme tratado como punto matemático en su centro de masa.
Solo se tendrá en cuenta la interacción gravitacional que la esfera tenga con la tierra, despreciando cualquier tipo de interacción como molecular (rozmiento con el aire) y la interacción que presenta con otros cuerpos externos (Ley de Gravitación Universal a escalas mesoscópicas).

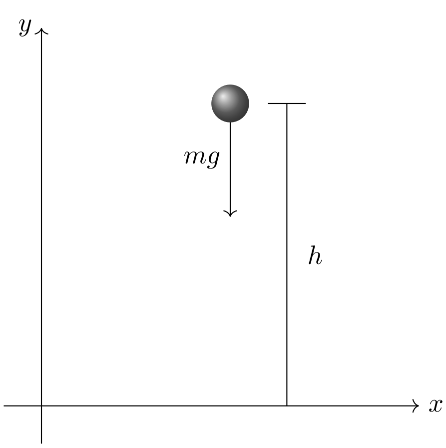

Figura 1. *Diagrama de una esfera sobre la superficie de la tierra*

Haciendo estas aproximaciones y con base en el diagrama 1 aplicamos segunda ley de Newton para modelar el comportamiento dinámico de la esfera en caída libre. En este caso no e presenta movimiento horizontal por parte del sistema y tampoco un agente externo aplica fuerza en ese sentido para perturbar la caída.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\,\hat{r}$$

Como solo el peso actúa en el movimiento

$$-mg\,\hat{\jmath} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\,\hat{\jmath}$$

la ecuación diferencial se reduce a

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -g \tag{1}$$

Solucionando

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v \;\rightarrow y = y_0 + vt \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g \;\rightarrow v = v_0 - gt \tag{3}$$

Reemplazando 3 en 2

$$\int_{y_0}^{y} \mathrm{d}y = \int_{t_0}^{t} v_0\,\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t} gt\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{y = y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}}$$

Del modelo analítico podemos obtener la posición en distintos intervalos de tiempo, así como la velocidad a partir de la ecuación 3. De modo que, para la esfera situada a 201 m del suelo (Torres Atrio) con una velocidad inicial de 0 m/s se obtuvieron los siguientes datos con intervalos de 0,5 s (*ver archivos*).

Pseudocódigo

Chapra (2011) [1] presenta un modelo básico para lo solicitado en que el método de euler se resume para la velocidad:

$$\text{nuevo valor} = \text{valor anteior} + \text{pendiente} \times \text{paso}$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{dv_i}{dt}\,\Delta t$$

El planteamiento del programa va encaminado en implementar el *método de euler* y resolver el fenómeno de caída libre para la posición y velocidad sujeto a condiciones iniciales.

Con base en la metodología y desarrollo dado en clase, el método de euler se rige a partir de las siguientes expresiones

$$y(t + \Delta t) = y(t) + v\,\Delta t \tag{4}$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) - g\,\Delta t \tag{5}$$

donde Δt es el paso de tiempo.

El pseudocódigo se realizó con base en la metodología de clase

- Definir $y(t)$ y $v(t)$.
- Condiciones iniciales para iterar con las ecuaciones 4 y 5.
- Obtener datos con un paso lo suficientemente pequeño.
- Comparar resultados numéricos con analíticos.

```
BEGIN
    VARIABLES g, yi, vi, y, v, t, h
    INPUT g, yi, vi, h
    ARRAY <zeit>,<posi>,<velo>

    y = yi
    v = vi
    t = ti

    WHILE y >= 0 {
        dydt = vi - gt
        dvdt = -g
        y = y + dydt * h
        v = v + dvdt * h

        t >> <zeit>
        y >> <posi>
        v >> <velo>

        t = t + h
    }
    END WHILE
    <zeit>,<posi>,<velo> >> numerical.txt
    GRAPH numerical.txt
END
```

Diagrama de Flujo

Diagrama de flujo para el proceso de cálculo de posiciones y velocidades

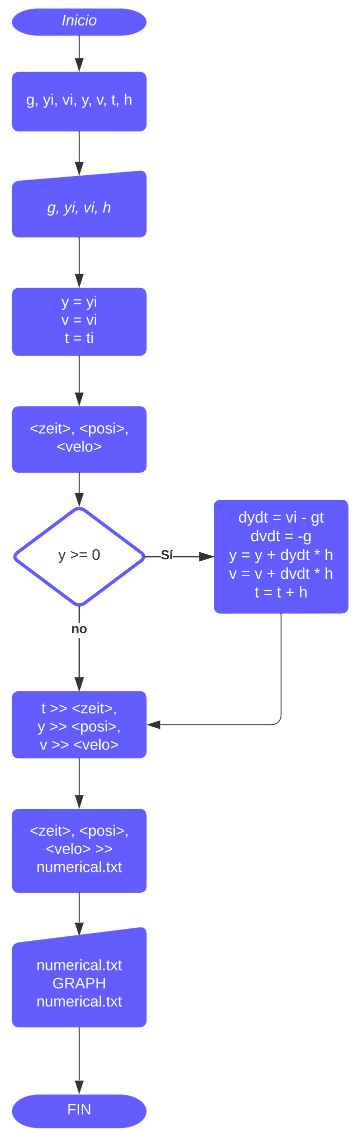

Figura 2. *Diagrama de flujo* (***Autoría Propia***)

Referencias

[1] Steven C Chapra, Raymond P Canale et al. *Numerical methods for engineers*. Vol. 1221. Mcgraw-hill New York, 2011.