Operações de Matrizes

Existem 8 operações de matrizes:

1. Soma de Matrizes

A diferença de matrizes é uma operação matricial na qual se subtrai, termo a termo, matrizes de mesmo tamanho.

Exemplo:

$$seja\ A_{2X2} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}\ e\ B_{2X2} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix},$$

$$A_{2X2} + B_{2X2} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10 & 5-5 \\ 4+3 & 9+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}$$

Propriedades da Soma

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. Sendo 0 a matriz nula nxm, $A + 0 = A$

2. Diferença de Matrizes

A diferença de matrizes é uma operação matricial na qual se subtrai, termo a termo, matrizes de mesmo tamanho.

Exemplo:

$$seja\ A_{2X2} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}\ e\ B_{2X2} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix},$$

$$A_{2X2} - B_{2X2} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-10 & 5-(-5) \\ 4-3 & 9-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriedades da Diferença

1. $A - B = -B + A$

2. $(A+B)-C = A+(B-C) = (A-C)+B$
3. Sendo 0 a matriz nula nxm, $A-0=A$

3. Produto Escalar

O produto escalar é uma operação matricial em que se multiplica um escalar k por uma matriz A resultando em uma matriz cujos elementos são os elementos de A multiplicados por k. Exemplo:

Exemplo:

$$seja\ A = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\ e\ k = 2,$$

$$k * A = 2 * \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -10 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$$

Propriedades do Produto Escalar

1. $k*(A+B) = k*A + k*B$
2. $(k_1+k_2)*A = k_1*A + k_2*A$
3. Sendo 0 o número real zero e 0_{nXm} a matriz nula, $0*A = 0_{nXm}$
4. $k_1*(k_j*A) = (k_1*k_2)*A$

4. Produto Matricial

O produto matricial é uma operação na qual se multiplica uma matriz A_{nXm} por uma matriz B_{mXp} gerando uma matriz produto P_{nXp} seguindo a seguinte relação:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} * b_{kj},$$

Em que p_{ij} é elemento de P, a_{ik} é elemento de A e b_{kj} é elemento de B.

Exemplo:

$$seja\ A_{2X2} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}\ e\ B_{2X2} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix}1 & 5\\4 & 9\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}10 & -5\\3 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1*10+5*3 & 1*(-5)+5*8\\4*10+9*3 & 4*(-5)+9*8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25 & 35\\67 & 52\end{pmatrix} = P$$

Propriedades do Produto Matricial

1. $AB \neq BA$
2. $I_nA = AI_n = A$
3. $A(B+C) = AB + AC$
4. $(B+C)A = BA + CA$
5. $A(BC) = (AB)C$
6. $(AB)^t = B^tA^t$
7. Sendo 0 a matriz nula $0 * A = A * 0 = 0$

5. Traço

O traço de uma matriz é a soma da diagonal principal de uma matriz quadrada e é representado por $tr(A)$.

Example

$$seja\ A_{2X2} = \begin{pmatrix}11 & 67\\47 & 39\end{pmatrix},\ tr(A) = 11 + 39 \Rightarrow tr(A) = 50$$

Propriedades do Traço

Não existem propriedades notáveis do traço

6. Transposição de Matrizes

A transposição de uma matriz é uma operação de matriz na qual, a partir de uma matriz A, se gera uma matriz A^T na qual as linhas de A são as colunas de A^T e as colunas de A são as linhas de A^T.

Exemplo:

$$seja\ A_{2X2} = \begin{pmatrix}11 & 50\\47 & 39\end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix}11 & 47\\50 & 39\end{pmatrix}$$

Propriedades da Transposição de Matrizes

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. Sendo k um escalar, $(kA)^t = kA^t$
4. Uma matriz é chamada de Simétrica se for igual a sua transposta, ou seja se $A = A^T$

7. Determinante

É uma operação matricial na qual transforma-se a matriz em um número escalar representada da seguinte forma:

$$sendo\ a\ matriz\ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Só existe determinante de matrizes quadradas.

Existem diversas formas de se calcular o determinante, mas a forma mais usada é a Regra de Laplace, e um dos principais motivos para se fazer esse cálculo é para achar a solução de um Sistema Linear.

Propriedades do Determinante

1. Pode-se somar ou subtrair o múltiplo de uma coluna a outra coluna ou o múltiplo de uma linha a outra linha sem alterar o determinante. Ex:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$d(L_1 \leftarrow L_1 - 2 * L_2)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -6$$

2. Se é uma matriz quadrada B é uma matriz obtida de A através da permutação entre linhas ou entre colunas, então o determinante de B é $(-1)^n$ vezes o determinante de

A, em que n é o número de permutações necessárias para que A se torne B ($det(B) = (-1)^n * det(A)$). Ex:

$$Seja\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}\ e\ B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix},$$

$$A \xlongequal{L_1 \leftrightarrow L_2} B$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow det(B) = (-1)^1 * det(A) = 6 = det(B)$$

3. $det(A) = det(A^t)$
4. Se uma matriz quadrada possui uma linha ou uma coluna repleta por 0's, então seu determinante é igual a zero. Ex:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

5. Se uma matriz quadrada possui duas linhas ou colunas iguais, então seu determinante é igual a zero. Ex:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

6. Se é uma matriz quadrada B é uma matriz obtida de A através da multiplicação por um número real k de uma linha ou de uma coluna, então o determinante de B é k vezes o determinante de A.Ex: $det(B) = k * det(A)$.

> **Se $B = k * A$, $det(B) = k^n det(A)$, em que n é a ordem de A e B.**

7. Se os elementos de uma das linhas de um determinante puder ser escrita como uma soma pode-se separar em uma soma de determinantes. Ex:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 11 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 11 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 6 & 11 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9 = -15 + 6$$

Apesar disso, em geral, $det(A+B) \neq det(A) + det(B)$**.**

8. O produto do determinante de duas matrizes é igual ao determinante do produtos das matrizes. Ex: $det(A) * det(B) = det(A * B)$.

8. Inversão de Matrizes

A inversa de uma matriz A é uma matriz B que obedece a seguinte relação:

$$AB = BA = I_n,$$

Em que B é uma matriz única, ou seja, **se** A **é inversível, existe apenas uma única matriz** B**.** A representação da inversa de A é A^{-1}

Nem toda matriz tem inversa

A inversa de uma matriz A só existe **se** $det(A) \neq 0$, da mesma forma, se A^{-1} existe, $det(A) \neq 0$. O determinante ser diferente de 0 é condição suficiente para afirmar que A^{-1} existe.

Existe duas formas principais de se calcular a inversa :

1. Método da adjunta, cuja fórmula geral é:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} * adj(A)$$

2. Método por operações elementais, no qual é representado da seguinte forma para uma matriz qualquer A_{nXn}:

$$[A|I_n] \sim [I_n|A^{-1}],$$

Em que $\sim$ indica que $[A|I_n]$ e $[I_n|A^{-1}]$ são linha semelhantes e | é uma linha tracejada.

Propriedades da inversa

1. Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas inversíveis, ou seja, existe A^{-1} e B^{-1}, então a matriz AB é inversível (Existe $(AB)^{-1}$).
2. Se A e B são inversíveis e da mesma ordem, então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$