

## Opgaver til lektion 7

### Opgave 7.1

Analysér og bestem de kritiske punkter for det elektriske kresløb i Eksempel 2, sektion 4.1 (eksempel med elektrisk netværk der blev gennemgået i forbindelse med undervisningen), dvs., bestem de punkter der opfylder

$$\frac{di_2/dt}{di_1/dt} = 0$$

- Hvor ligger det/de kritiske punkter og hvilken type er de?
- Lav et faseplot i området omkring de kritiske punkter, svarende til Fig 80.b, s. 134 i Kreyszig.

### Opgave 7.2

Betragt følgende ulineære 2. ordens differentialligning:

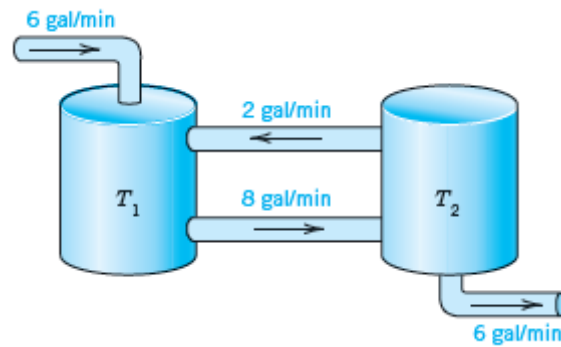
$$y'' - 9y + y^3 = 0$$

- Opstil det ækvivalente 1. ordens (ulineære) ligningssystem og bestem de kritiske punkter. *Hint: ligningssystemet er en "stak" af ligninger  $y'_i = f_i(y_1, \dots, y_n, r(t))$ , hvor  $f_i$  generelt er en ulineær funktion - se slides fra lektion 6: "A first order system" vs. "A first order linear system".*
- Opstil det generelle *lineariserede* ligningssystem for det kritiske punkt  $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ ; følg proceduren "Linearization (around stationary point)" fra slides med penduleksemplet – bemærk, proceduren er ikke begrænset til et stationært (kritisk) punkt. Afhænger ligningssystemet af det kritiske punkt, og hvordan i så fald?
- Lav et plot af den identificerede ulineære funktion sammenholdt med dens linearisering (i et eller alle kritiske punkter).
- For hvert af de kritiske punkter, undersøg typen og stabiliteten heraf, og lav et faseplot i omegnen af det kritiske punkt.

### Opgave 7.3

Tilsvarende opgave som i lektion 6, med koblede tanke, men nu med andre betingelser.

De to tanke indeholder hver 100 gal. vand, målt i volumenenheden gallons, hvori der for  $T_2$ 's vedkommende er opløst 150 lb salt. Flow ind og ud af tankene er vist på figuren. Specifikt, som tilløb til  $T_1$  kommer der et flow på 6 gal/min indeholdende 6 lb salt. Koncentrationen af salt i de to tanke kan antages ensartet da der er konstant omrøring.



Problemet løses for  $y_1(t)$  og  $y_2(t)$  der angiver vægten af salt i de to tanke, respektive, målt i vægt-enheden pounds (lb) – modsvarende masse.

Problemet opstilles som koblede differentialligninger der sikrer balance i flowet (ingen masseophobning), dvs. for antal vægtenheder (salt) per minut:

$$\frac{\text{flow [gal/min]} \times \text{weight [lb]}}{\text{volume [gal]}} = \text{weight [lb/min]}$$

- Løs for  $y_1(t)$  og  $y_2(t)$  som funktion af tiden og plot de to resultater i samme graf for et tidsinterval der tydeligt viser både transient- og steady-state forløbet (stabiliseringen) af  $T_1$  og  $T_2$ .
- Giv en kvantitativ forklaring på steady-state-værdien, f.eks. vha. flow-ligningerne, og en kvalitativ forklaring på transientforløbet.
- Opstil systemet på state-space form, med output  $y(t)$  i form af vægten af gødning i  $T_2$ ; identificer state-, input- og output- matricer, og angiv om systemet er homogent/inhomogent og tidsvariant/invariant.
- Anvend Laplace teknikken til at løse det koblede ligningssystem og sammenlign løsningsmetoderne.