Eksame sæt

Opg 1

Betragt matrixen $\boldsymbol{A}$ givet ved

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} j0,8 & j0,6 \\ j0,6 & -j0,8 \end{bmatrix}$$

1. For hvert af følgende, angiv om udsagnet er korrekt, og i bekræftende fald begrund hvorfor: $\boldsymbol{A}$ er hermitisk, $\boldsymbol{A}$ er skævhermitisk, $\boldsymbol{A}$ er unitær, $\boldsymbol{A}$ er normal.
2. Vil egenværdierne for $\boldsymbol{A}$ være reelle, imaginære eller generelt komplekse?
3. Find en egenbase for $\boldsymbol{A}$.

1. For kompleks matrix for at finde om den er skævsymmetrisk brug: $-\mathbf{A} = \mathbf{A^H}$

Så konjugere man:

$$A^H = (*A)^T$$

$$A^* = \begin{bmatrix} -j0.8 & -j0.6 \\ -j0.6 & +j0.8 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -j0.8 & -j0.6 \\ -j0.6 & +j0.8 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -j0.8 & -j0.6 \\ -j0.6 & +j0.8 \end{bmatrix}$$

Udfra det overstående ses der et den er skævhermitisk.

Check om matrixen er normal ved dette:

$$\mathbf{A^H A = A A^H}$$

Svaret er ja!

Check om hermitisk:

$$\mathbf{A = A^H}$$

Check om unitær

Unitary matrix: $A^H = A^{-1}$

Inverse af en matrix to måder:

Første:

$[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ hvor man udfører row operation på dem begge så får man til sidst -> $[I|A^{-1}]$

Anden er noget mere involveret: $adj(\mathbf{A})/\mathbf{det}(\mathbf{A})$

Eksempel på adj for B:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \mathbf{adj}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{1}$$

Den inverse af matrix eksitere kun hvis matrix er square og determinanten er $\neq 0$

Transpose example:

Du tager diagonalen altså 1 4 og ligger søjlen under 1 op så det bliver til 1 række istedet hvorimod søjlen for med 4 i bliver til en række for 4.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} j0.8 & j0.6 \\ j0.6 & -j0.8 \end{bmatrix}, \; A^T = \begin{bmatrix} j0.8 & j0.6 \\ j0.6 & -j0.8 \end{bmatrix}$$

Resten af mulighederne passer ikke så den er normal og skævhermitisk.

2. De vil være imaginære fordi skæv hermitiske matrixer altid giver imaginære egenværdier eller 0, og vi er ikke interesseret i den trivielle nul løsning.

Tabel over sammenhæng mellem eigenværdier og typer er matrixer:

Taxanomy for normal matrices

Reel matrix	Kompleks matrix	Generel	Normal[2]	Egenværdier
Symmetrisk $A^T = A$	Hermitesk (diagonal er reel) $A^{*T} = A$	Selvadjungeret[1]	Ja	Reelle (inkl. 0)
Skævsymmetrisk (diagonal = 0) $A^T = -A$	Skævhermitesk (diagonal imaginær eller 0) $A^{*T} = -A$	Skævadjungeret	Ja	Imaginære (inkl. 0)
Ortogonal ($\Delta A = \pm 1$) $A^T = A^{-1}$	Unitær ($\lvert\Delta A\rvert = 1$) $A^{*T} = A^{-1}$	Isometrisk	Ja	Absolut værdi 1

(1) Den (komplekst) konjugerede transponerede, A^{*T}, kaldes for den adjungerede til **A** (og deraf betegnelsen selvadjungeret i dette tilfælde); mere formelt kaldes den komplekst konjugerede transponerede for den hermitesk adjungerede, hvor hermitesk adjungering er analogt til kompleks konjugering.

(2) En normal matrix er en (generelt) kompleks kvadratisk matrix der kommuterer med sin adjungerede, dvs. opfylder $A^{*T}A = AA^{*T}$.

$$\Delta\bar{\bar{A}} = det(\bar{\bar{A}})$$

3. Så udregn eigenværdierne og løs for dens eigen vektore.

Determinant eksempel for 2x2 matrix:

$$A = det(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = |A| = ad - bc$$

Eigenvalue:

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Og her er **I** en identitets matrice

$$det(\begin{bmatrix} j0.8 & j0.6 \\ j0.6 & -j0.8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}) = 0$$
$$= det(\begin{bmatrix} j0.8 - \lambda & j0.6 \\ j0.6 & -j0.8 - \lambda \end{bmatrix}) = 0$$
$$= \lambda^2 + 1 = 0$$

Løs for rødderne λ: $\lambda_1 = j$, $\lambda_2 = -j$

Formel for andengrads polynomies rødder:

$$x_{1,2} = -\frac{b \pm (\sqrt{b^2 - 4ac})}{2a}$$

Eigenspace/eigenvector:

$$E = \vec{v}: \ (A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

Sæt λ værdierne ind og løs for $\vec{v} = [x_1, x_2]^T$

for λ_1

$$\begin{bmatrix} j0.8 - j & j0.6 \\ j0.6 & -j0.8 - j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -j0.2 & j0.6 \\ j0.6 & -j1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Hernæst udfør gaussisk elimination:

$$\begin{bmatrix} -j0.2 & j0.6 & 0 \\ j0.6 & -j1.8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 = 3r_1 + r_2} \begin{bmatrix} -j0.2 & j0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 = -6r_1 + r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

x_2 kan vælges frit til 1 eftersom at x_2 har ingen pivot og er derfor en fri variabel.

$$1 \cdot x_1 - 3(1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3$$

x_1 er så 3 deraf er eigenvektor eller en basis: $v_1 = [3, 1]^T$

Samme procedure for λ_2 hvilket giver: $[-0.33, 1]^T$ hvilket stemmer overens med svarene!(troels vælger bare x_2 til 3)

For at checke om dine svar rigtig brug: $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \lambda\tilde{\mathbf{x}}$

$\vec{x}$ er eigenvector til den tilhørende λ du vil sætte ind.

Egenbasen er derfor egenvektorene sat i en matrix:

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.33 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Matlab

```
A = [j*0.8 j*0.6; j*0.6 -j*0.8];
%Use conjugate transpose | A' or ctranspose(A)

if -A == A'
    x = 'skewsymm'
else A == A'
    z = 'symm'
end
if A'*A == A*A'
    y = 'yes normal'
end
%% 3
A = [j*0.8 j*0.6; j*0.6 -j*0.8];
syms x y;
%Hurtig måde for eigen værdier og vektore!
[vA, eA] = eig(A)
%løs den på den langsomme måde
q = ((j*0.8-x).*(-j*0.8-x)) - (j*0.6.*j*0.6);
expand(vpa(q));
vpa(solve(q,x)); %løser for rødderne

%Langsom måde for eigenvektor
v1 = A - (eA(1)*eye(2));
v2 = A - (eA(4)*eye(2));
rref(v1); % vælg x2 = 1 og løs for x1 hvilket er 3 her
rref(v2); % vælg x2 = 1 og løs for x1 hvilket er -0.333 her
x1 = [3; 1];
x2 = [-0.333; 1] %svar på eigen base
```

Opg 2

Opgaveeks. 2

En matrix $\boldsymbol{A}$ er givet ved

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 \\ 44 & -8 & -4 & -2 \\ 4 & 8 & 16 & 2 \\ 16 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 16 & 8 & -26 \\ 2 & 16 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Find en basis for henholdsvis række- og søjlerum for $\boldsymbol{A}$.

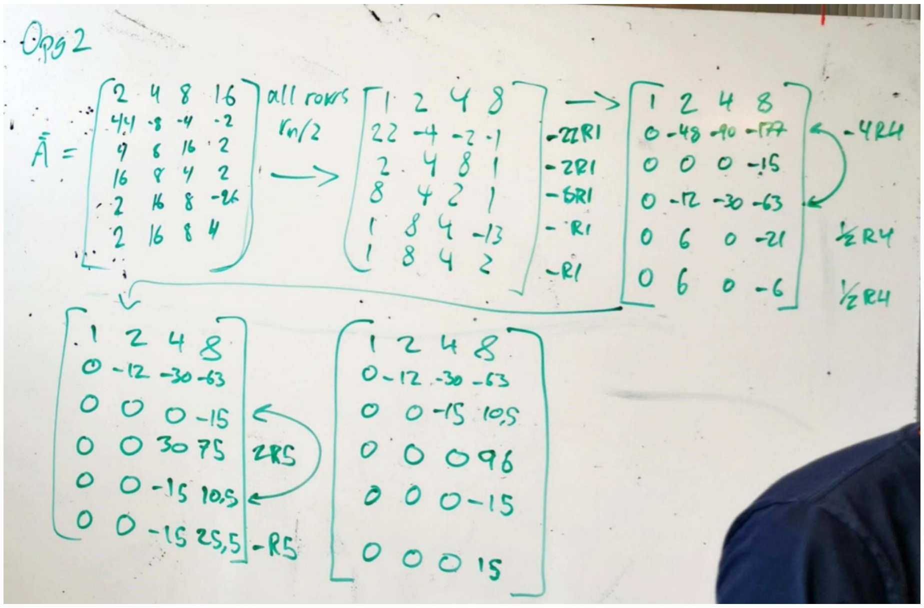
2. Bestem nulrummet til $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ og angiv nulliteten.

1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 \\ 44 & -8 & -4 & -2 \\ 4 & 8 & 16 & 2 \\ 16 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 16 & 8 & -26 \\ 2 & 16 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Row reduktion eksempel:

Det understående eksempel mangler at fjerne de sidste to rækker ellers passer det til row reduced echeolon form.



Resultatet på row reduced echeolon form:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Basis for søjlerum: Det er de 4 søjler i matrixen fra den originale matrix!! som udgør en basis for søjlerummet. Dette kan ses ved hjælp af row reduktion og tælle antal pivots der kommer. I dette tilfælde har alle søjler en pivot ergo fuld rank.

Basis for rækkerum: For rækkerum så det row reduktion igen og alle de rækker som har udelukkende 0 kan ikke vælges som en basis for rækkerum fra den originale.

Deraf rækkerne r_1, r_2, r_3, r_4

Rang for række og søjle er ens på row reduced echeolon form!

2.

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{0}}$$

Udfra row reduktion fra 1) kan man se at nullititen er 0 og der kun en løsning hvilket er den trivielle 0 løsning der er ikke andre vektor som giver relationen:

De er alle sammen linære uafhængig.

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

Nulitet kan også udtrykkes som: Rank + Null = Antal Coloumns.

$rank(\mathbf{A}) = \mathbf{4}$ altså fuld rank og antal søjler er 4

$4 - 4 = 0$

```
%% Opg2
A = [2 4  8  16;44  -8  -4  -2;4  8  16  2;16  8  4  2;2  16  8  -26;2  16  8  4];
B = [0 0 0 0 0 0]';
M = [A B];
[R,p] = rref(M); %giver en triviel 0 løsning vektor med 0.
%Eksempel på en matrix som ikke har en triviel løsning med 0 vektor
C = [1 -2 2 3 -1; -3 6 -1 1 -7; 2 -4 5 8 -4];
rref(C);
```

eksempler på nullitet: https://www.youtube.com/watch?v=iApoNPcI5eI

Opg 3

Opgaveeks. 3

Betragt vektorerne $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

1. Gøre rede for at $\{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3}\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$, hvor:

$$\boldsymbol{b_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2. Redegør for at $3x_1 + x_3 = 0$ udgør et underrum i $\mathbb{R}^3$, og bestem en basis for dette; giv en geometrisk fortolkning af underrummet.

1.

$$\mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{b_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

A set of vectors $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_k\}$ in a vector space V is a basis for V if:

1. **The set S is independent.**
2. **The set S spans V. Span$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_k\} = V$**

Given a set of vectors $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_k\}$ are in R^n with scalars $c_1, c_2, \dots c_k$ is linearly independent if

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

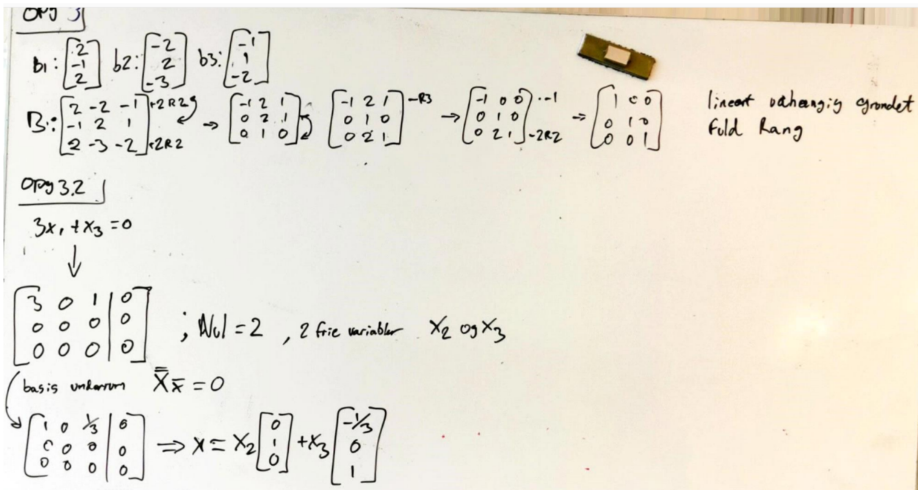
has only the trivial solution, meaning $c_i = 0$ for $i = 1, 2, \dots, k$

Opstil for b1, b2 og b3:

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fuld augmenteret matrix hvorefter række reduktion:

Svar på tavle for opg3



$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Alle rækker har en pivot ergo er de alle linære uafhængige og derfor danner en basis for $\mathbb{R}^3$

```
%% Opgave 3

b1 = [2 -1 2]';
b2 = [-2 2 -3]';
b3 = [-1 1 -2]';
I = [0 0 0]';
M = [b1 b2 b3 I]; % Alle b er linær indepedent og derfor danner de en basis for R^3;
```

2. Se svaret fra pdfen det meget udmærket!

Opg 4

Opgaveeks. 4

En matrix $\boldsymbol{A}$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, er givet ved

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2+2i & 0 \\ 2-2i & 0 & 2+2i \\ 0 & 2-2i & 0 \end{bmatrix}$$

1. Redegør for at $\boldsymbol{A}$ kan diagonaliseres.
2. Diagonaliser $\boldsymbol{A}$, og bestem en unitært ækvivalent matrix til $\boldsymbol{A}$; vis de enkelte step i udregningen.
3. Angiv spektret og den spektrale radius for $(\sqrt{-1}\boldsymbol{A})^5$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2+2i & 0 \\ 2-2i & 0 & 2+2i \\ 0 & 2-2i & 0 \end{bmatrix}$$

1. For at diagonaliser så skal nogle? af de her 4 ting gælde:

1. n linearly independent eigen vectors
2. n distinct eigenvalues
3. sum of geometric multiplicities is n.
4. for each λ geo. multiplicity = algebraic multiplicity

Men for den her gælder det at hvis din matrix er hermitisk($\mathbf{A} = \mathbf{A^H}$) og normal: ($A^H A = AA^H$) så kan den diagonaliseres.

Hvor $A^H = (*A^T)$ er dens conjugate transpose eksempel:

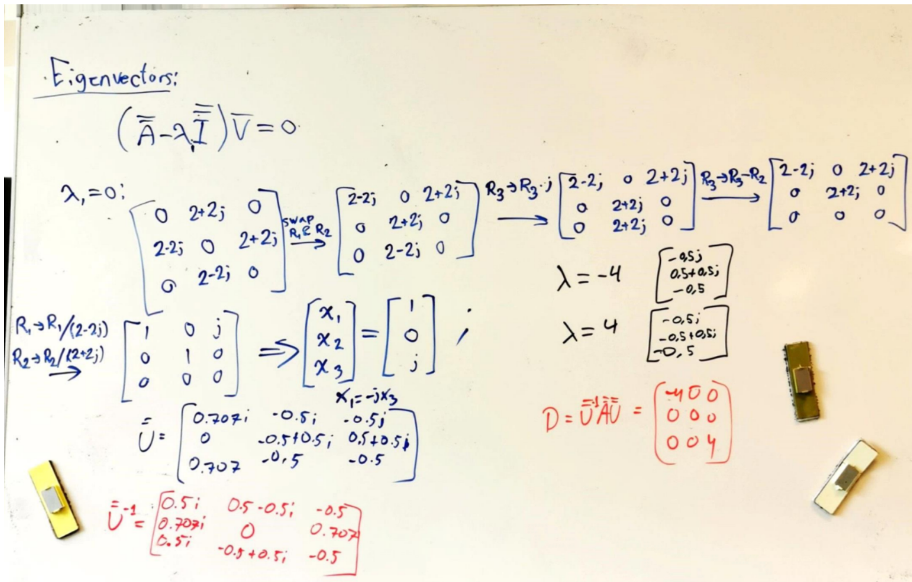
$$AA^H = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8i \\ 0 & 16 & 0 \\ -8i & 0 & 8 \end{bmatrix} A^H A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8i \\ 0 & 16 & 0 \\ -8i & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

2. For at diagonaliser så skal man opnå for $\mathbf{A}$: $\mathbf{D} = \mathbf{U^{-1}AU}$. Hvor $\mathbf{U}$ indeholder i sine søjler værdierne fra eigenvektorene: $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ Samtidig skal $\mathbf{D}$ have egenværdierne i sin diagonal.

$$det(\begin{bmatrix} 0 & 2+2i & 0 \\ 2-2i & 0 & 2+2i \\ 0 & 2-2i & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}) = 0$$

$$\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 4$$

Løs for λ_1 eigenvector



$$\vec{u_1} = [0 - 0.5i, 0.5 + 0.5i, -0.5]^T$$

og for resten:

$$\vec{u_2} = [0 - 0.707i, 0, 0.707]^T$$

$$\vec{u_3} = [0 - 0.5i, -0.5 - 0.5i, -0.5]^T$$

Derfor bliver $U = \begin{bmatrix} 0 - 0.5i & -0.707i & -0.5i \\ 0.5 + 0.5i & 0 & -0.5 - 0.5i \\ -0.5 & 0.707 & -0.5 \end{bmatrix}$

Så for **D**

$$U^{-1}AU = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Hvilket stemmer overens da eigenværdierne er i diagonalen!

3. Eftersom A er unitært ækvivalent med D så kan man erstatte A med D og dette giver værdierne for diagonalerne.

Spektret er deraf sættet: $[1024i, 0, -1024i]$

Spektrale radius er så den maksimale værdi af skalarene fra settet: 1024.

```
%% Opg 4
%% 1.
A = [0 2+i*2 0; 2-i*2 0 2+i*2; 0 2-i*2 0];
A'*A;
A*A';

% 2.
[vA, eA] = eig(A);
D = inv(vA) * A * vA

% 3
(sqrt(-1)*D).^5;
```

Opg 5

Opgaveeks. 5

Convert the following linear differential equation into a system of first-order ODEs and state the (real) general solution:

$$y'' + 4y = 0$$

Based on the eigenvalues for the system, conclude on whether the system is stable or unstable.

Solution:

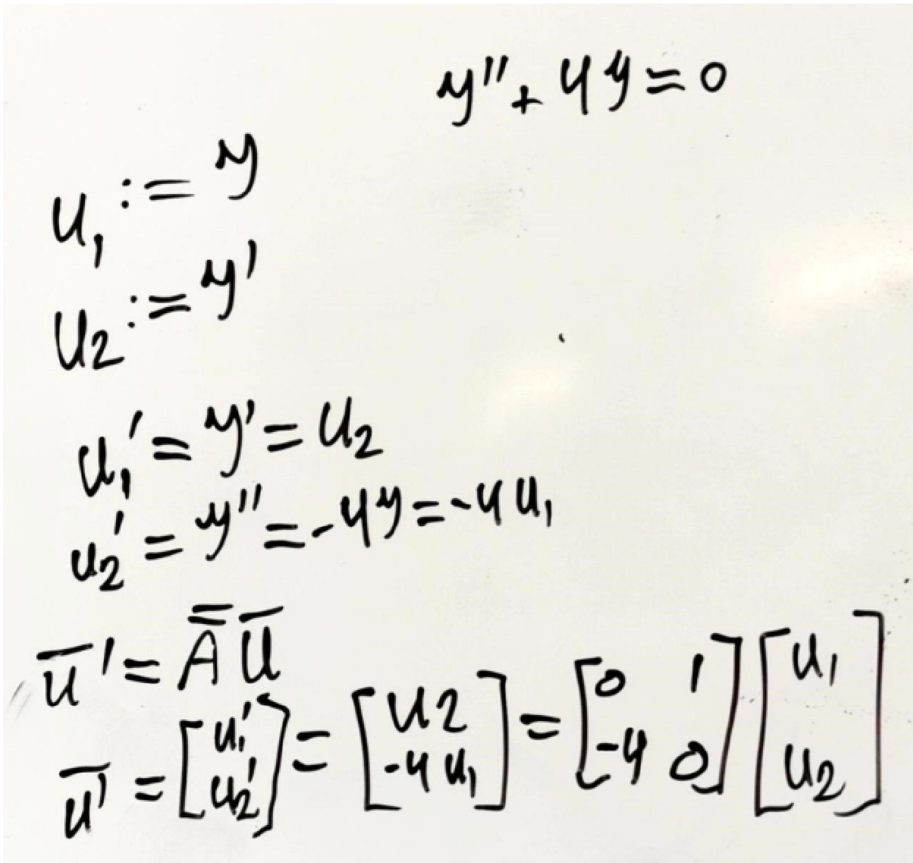
$$y(t) = c_1 cos(2t) + c_2 sin(2t)$$

From the eigenvalues it is seen that the q-value (product of eigenvalues) is positive - a stable system (center).

1

$$y'' + 4y = 0 \tag{3}$$

Stak af første ordens differential ligninger:



Den forventede løsning:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Løs for rødderne for at finde værdierne som skal ganges med t i den generelle løsnings.

$$\begin{aligned}
&y'' + 4y = 0 \\
&r^2 + 4 = 0 \\
&\text{roots} \qquad r_1 = -2i \qquad r_2 = 2i
\end{aligned}$$

Eftersom at tallene er imaginære $r_{1,2} = \lambda \pm \mu i$ så bliver det af formen:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} sin(\mu t)$$

Indsæt rødderne:

$$y(t) = c_1 cos(2t) + c_2 sin(2t)$$

Stable fordi (q): $2i \cdot -2i = 4$

Tabel over stabilitet for eigenværdier

Table 4.1 Eigenvalue Criteria for Critical Points (Derivation after Table 4.2)

Name	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	$q = \lambda_1 \lambda_2$	$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$	Comments on λ_1, λ_2
(a) Node		$q > 0$	$\Delta \geqq 0$	Real, same sign
(b) Saddle point		$q < 0$		Real, opposite signs
(c) Center	$p = 0$	$q > 0$		Pure imaginary
(d) Spiral point	$p \neq 0$		$\Delta < 0$	Complex, not pure imaginary

Table 4.2 Stability Criteria for Critical Points

Type of Stability	$p = \lambda_1 + \lambda_2$		$q = \lambda_1 \lambda_2$
(a) Stable and attractive	$p < 0$		$q > 0$
(b) Stable	$p \leqq 0$		$q > 0$
(c) Unstable	$p > 0$	OR	$q < 0$

```
syms r
test = r^2 + 4 == 0;
%solve(test,r);
A = [0 1; -4 0];
[vA eA] = eig(A);
%(2*i * (-2*i)); %4
```

Opg 6

Opgaveeks. 6

Calculate the output $y[n]$ of a linear time invariant system with impulse response $h[n] = 3^n u[n-1]$ for the input $x[n] = 5u[n]$.

Solution: $y[n] = -\frac{15}{2}u[n] + \frac{15}{2}(3)^n u[n]$

1. Først udregn z transformen af $h(n)$ og $x(n)$ hvorefter man ved for et LTI system at dette er givet: $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ hvoraf man nu kan løse for $y(n)$ ved den inverse z-transform af $Y(z)$

$$h(n) = 3^n u(n-1) = 3(3)^{n-1}u(n-1)$$

$$3 \cdot 3^{n-1} = 3^{1+n-1}$$

Herfra tages z transformen af x(n) og h(n)

$$X(z) = Z(x(n)) = Z(5u(n)) = \frac{5z}{z-1}$$
$$H(z) = Z(h(n)) = Z(3(3)^{n-1}u(n-1)) = \frac{3z^{-1}}{1-3z^{-1}}$$

Herfra skal der isoleres for $Y(z)$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{15z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-3z^{-1})} = \frac{A_1}{1-z^{-1}} + \frac{A_2}{1-3z^{-1}}$$

$$A_1 = (1-z^{-1})Y(z)\big|_{z=1} = \left.\frac{15z^{-1}}{1-3z^{-1}}\right|_{z=1} = -15/2$$

$$A_2 = (1-3z^{-1})Y(z)\big|_{z=3} = \left.\frac{15z^{-1}}{1-z^{-1}}\right|_{z=3} = \frac{5}{1-1/3} = 15/2$$

$$Y(z) = \frac{-15/2}{(1-z^{-1})} + \frac{15/2}{(1-3z^{-1})} \qquad |z| > 3$$

Hvorfra at radius of convergence går mod højre for den her

$$Z^{-1}(Y(z)) = y(n) = 7.5(3)^n u(n) - 7.5u(n)$$

```
clear all; clc;
syms n integer
syms z u
u(n) = kroneckerDelta(n)/2 + heaviside(n);
h1(n) = (3.^n)*(u(n-1));
x1(n) = 5*u(n);
zu(z) = ztrans(u(n),z);
zh1(z) = partfrac(ztrans(h1(n),z));

%n = [-2: 0.5: 2]; %test for at om de er ens
%stem(n,h1(n));
%hold on
```

```
%stem(n,testh1(n));

zx1(z) = partfrac(ztrans(x1(n),z));
Y(z) = zh1(z)*zx1(z);
pretty(expand(Y(z))); %expand viser det ret godt
y1(n) = iztrans(Y(z),n);
vpa(partfrac(y1(n)));
%Svaret her mangler u(n) men det gør maple også så det er bare dejligt :)
```

Opg 7

Opgaveeks. 7

Given a causal linear time invariant system with the following transfer function:

$$H(z) = \frac{1 - 3z^{-1}}{2 - 4z^{-1}},$$

calculate the impulse response $h_i[n]$ of the inverse system.

Solution: $h_i[n] = 2(3)^n u[n] - 4(3)^{n-1} u[n-1]$, or $h_i[n] = -2(3)^n u[-n-1] + 4(3)^{n-1} u[-n]$.

1.

$$H(z) = \frac{1 - 3z^{-1}}{2 - 4z^{-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Le Gilli: Since H(z) is the transfer function of causal system, its region of convergence extends outside the outermost pole, i.e ROC: $z > 2$

Den inverse $H_i(z)$ er $\frac{1}{H(Z)}$. Herefter kan man splitte $H(z)$ op til to brøker istedet og udføre Z^{-1} transform så først inverse af $H(z)$:

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{2 - 4z^{-1}}{1 - 3z^{-1}}$$

Delt op i brøker og tag inverse ztransform

$$Z^{-1}(H_i(z)) = Z^{-1}\left(\frac{2}{1 - 3z^{-1}} - \frac{4z^{-1}}{1 - 3z^{-1}}\right)$$

Le Gilli:The only region of convergence of $H_i(z)$ that overlaps with the region of convergence of H(z) is $|z| > 3$

Herudfra kan man fra inspektion se at formen for dem begge er:

$$Z^{-1}(\frac{1}{1-az^{-1}}) = a^n u(n) \quad |z| > |a|$$

Konstanterne i tælleren trækkes ud og z^{-1} er timeshift property igen derfor bliver det til:

$$h_i(n) = 2(3)^n u(n) - 4(3)^{n-1} u(n-1)$$

Opg 7.1

Opgaveeks. 7

A stable LTI system is characterized by the following difference equation:

$$y[n] - 3y[n-1] = 5x[n-2]$$

Find the impulse response $h[n]$ of the system. Is the system causal?

Solution: $h[n] = -5(3)^{n-2}u[-n+1]$. The system is non-causal.

1.

$$y[n] - 3y[n-1] = 5x[n-2]$$

Transform det til z domænet.

$$Y[z] - 3z^{-1}Y[z] = 5z^{-2}X[z]$$

Herefter find $H[z]$

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{5z^{-2}}{1-3z^{-1}}$$

Hernæst tag den inverse z transform af $H[z]$

Der bliver i opgaven givet at systemet er stabilt og en pol findes udfra overstående $H(z)$ hvilket giver at en sekvens gående mod venstre skal benyttes.

Dette skyldes at et system kun er stabilet hvis:

- An LTI system is stable if and only if the ROC of its system function H(z) includes the unit circle, |z| = 1

- Additionally for a causal system with rational system function H(z) is stable if all the poles of H(z) lie inside the unit circle i.e their magnitude < 1

Her ses det udfra formen at $Z^{-1}(\frac{1}{1-az^{-1}}) = -a^n u[-n-1]$ fordi nu går systemet mod venstre altså ind mod 0 hvilket er nødvendigt for dette system grundet at det er stabilt.

$5z^{-2}$ er henholdvis en konstant og en time delay hvilket giver at n bliver istedet $n-2$

Så ved inspektion giver det:

$$h[n] = -5(3)^{n-2}u[-(n-2)-1] = -5(3)^{n-2}u[-n+1]$$

Systemet er non causal grundet $(-n+1)$ fordi det afhænger af fremtidige værdier hvor causal er for de tidligere værdier så i stedet ved fx. $n-1$

Opg 8

Opgaveeks. 8

Calculate the inverse z-transform of the following sequences:

- $X(z) = \frac{2z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{z^3}{1-\frac{4}{7}z^{-1}}$, ROC: $|z| > 1$
- $X(z) = \frac{3}{1-2z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$, ROC: $|z| < 1$

Solution:

- $x[n] = 2u[n-1] + \left(\frac{4}{7}\right)^{n+3} u[n+3]$
- $x[n] = -3(2)^n u[-n-1] - u[-n]$.

Figure 1: alt text

1.

$$X(z) = \frac{2z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{z^3}{1-4/7 \cdot z^{-1}}$$

Så for den første del ved at bruge inspektion method kan man se at formen: $\frac{1}{1-z^{-1}}$ optræder hvilket inverse giver: $u[n]$ for ROC Z>1. Konstanten i tælleren kan trækkes ud og det resterende: z^{-1} kan løses for ved hjælp af time shifting property: $x[n-k]$ i Z-Domain:$z^{-k}X(z)$ Så der hvor n optræder skal k trækkes fra. Deraf ved inspektion:

$$Z^{-1}(\frac{2z^{-1}}{1-z^{-1}}) = 2u[n-1]$$

Den anden del ser man udfra inspektion at: $\frac{1}{1-az^{-1}}$ optræder hvilket giver: $a^n u[n]$ for ROC z>1. Ellers er proceduren det samme som del 1:

$$Z^{-1}(\frac{z^3}{1-4/7\cdot z^{-1}}) = \frac{4}{7}^{n+3} u[n+3]$$

$$x[n] = 2u[n-1] + \frac{4}{7}^{n+3} u[n+3]$$

2.

$$X(z) = \frac{3}{1-2z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

ROC: $|z| < 1$

Nu med denne ROC så er $Z^{-1}(\frac{1}{1-az^{-1}}) = -a^n u[-n-1]$

Så for det første term:

$$Z^{-1}(\frac{3}{1-2z^{-1}}) = -3(2)^n u[-n-1]$$

Det sidste term minder meget om den første men pga z < 1 nu så er den anderledes.

Ergo bliver det til:

$$x[n] = -3(2)^n u[-n-1] - u[-n]$$