Opgaver til lektion 2

Opgave 1.1

Løs ligningssystemet vha. Gauss-elimination og bagefter vha. Cramers formel.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 3y & - & 2z & = & 7 \\ 3x & & & + & 3z & = & -3 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & -1 \end{array}$$

Opgave 1.2

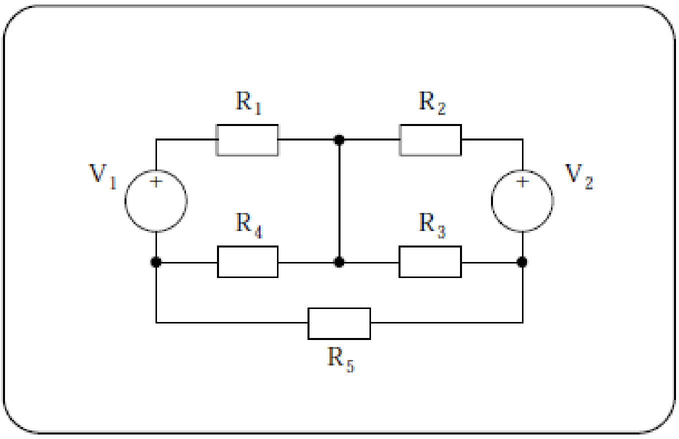
Løs ligningssystemet vha. Gauss-elimination og bagefter vha. Cramers formel.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 5y & + & 3z & = & 1 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

Opgave 1.3

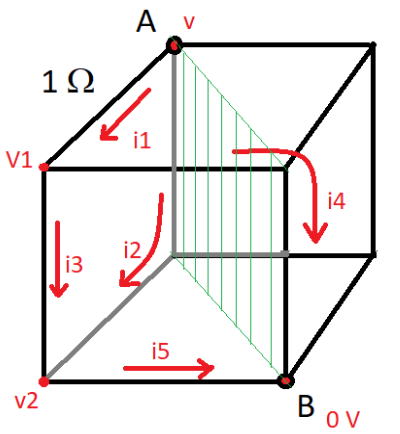
Beregn strømmen igennem R_3. Plusretningen er tilhøjre på figuren. Opstil kredsløbsligningerne vha. Kirchoffs maskeligninger og løs ligningssystemet fx vha. gaussisk elimination. Generatorer og modstande har følgende værdier:

$$\begin{array}{llll} V_1 = 1\ \text{V} & R_1 = 1\ \Omega & R_3 = 3\ \Omega & R_5 = 5\ \Omega \\ V_2 = 2\ \text{V} & R_2 = 2\ \Omega & R_4 = 4\ \Omega & \end{array}$$



Opgave 1.4

Fra ugebladet Ingeniørens Tænkeboks: Givet nedenstående kubiske terning opbygget af 12 modstandstråde, hver med resistansen 1 Ohm, find resistansen mellem punkt A og B (eller generelt mellem diametralt modsatte hjørner).



I Ingeniørens løsning anvendtes symmetri: Fra punkt A, og tilsvarende fra B pga. symmetri, kan strømmen løbe ad tre veje med lige stor modstand (og til punkter med samme potentiale pga. symmetrien), der hver deler sig i to veje med lige stor modstand; den samlede resistans er derfor 1/3 + (1/2)/3 + 1/3 Ω= 5/6 Ω.

Opgaven er at verificere denne løsning ved at løse det underliggende ligningssystem. Anvend symmetri, men nu ved at dele terningen diagonalt i to halvdele (ved den grønne skærm), sådan at den samlede resistans fremkommer som parallelforbindelsen. Vi kan derfor nøjes med at analysere den venstre halvdel ved at påtrykke v = 1 V i punkt A i forhold til B (0 V) og løse for den resulterende strøm, og deraf resistansen.

Bestem det ”halve kredsløb” og opstil ligningssystemet med de fem ubekendte strømme og to ubekendte spændinger, dvs. $\overline{x}$ = [i1, i2, i3, i4, i5, v1, v2], og derefter ligningen til bestemmelse af resistansen mellem de to hjørner.

Anvend de to iterative metoder, Gauss-Seidel og Jacobi, på det opstillede ligningssystem og sammenligning løsning, konvergens og konvergensrate.

Opgave 1.5

Matrixen A er givet ved:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

a. Rækkereducér A til echelonform.
b. Find rangen af A.
c. Find en base for rækkerummet.
d. Find en base for søjlerummet.
e. Find en base for nulrummet.
f. Angiv dimensionerne af de tre rum og relatér dem til antallet af søjler i A.

OBS! De to første spørgsmål er løst i forrige opgavesæt (opgave 1.4).

Opgave 1.6

Matrixen A er givet ved:

$$A = \left\{ \begin{array}{ccc} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

a. Find rangen af A.
b. Find nulliteten af A (dimensionen af nulrummet).
c. Find determinanten for A.
d. Undersøg om de tre vektorer a, b og $(\mathrm{a}+\mathrm{b})$ tilhører nulrummet for A. Vektorerne er givne ved:

$$\mathrm{a} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 11 \end{array} \right\} \qquad \mathrm{b} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 6 \\ 22 \end{array} \right\}$$

Opgave 1.7

Givet følgende tre sæt af vektorer, angiv i hvert tilfælde om der er tale om et vektorrum og begrund hvorfor/hvorfor ikke. I fald der er tale om et vektorrum, angiv dimensionen heraf og en base for vektorrummet:

1) alle vektorer i $\mathbb{R}^2$ hvorom det gælder at $|x|<1, |y|<1$, dvs. hvor komposanternes absolutte værdi er mindre end 1.
2) alle vektorer i $\mathbb{R}^3$ hvorom det gælder at $2x+3z=0$.
3) alle vektorer i $\mathbb{R}^1$

Opgave 1.8

Betragt alle vektorer i $\mathcal{R}^3$, hvorom det gælder, at $5x - 3y + 2z = 0$

$\mathcal{R}^3$ står for sæt af 3 reelle tal. Dvs. det kunne være det 3-dimensionelle rum, der beskrives. Symbolerne x, y, z står for komposanterne i de angivne vektorer.

a. Vis at de angivne vektorer udgør et vektorrum.
b. Find dimensionen.
c. Find en base.

Opgave 1.9

Betragt alle vektorer i $\mathcal{R}^5$, hvorom det gælder, at de 3 første komposanter er 0.

a. Vis at de angivne vektorer udgør et vektorrum.
b. Find dimensionen.
c. Find en base.