**Opgaver til lektion 5**

**Opgave 5.1**

Undersøg om $A$ er symmetrisk, skævsymmetrisk eller orthogonal. Find spektret for $A$

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

**Opgave 5.2**

Find spektrum, egenvektorer og spor for $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{Bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{Bmatrix}$$

Hint: For en mulig rod i et 3. grads polynomium med koefficient 1 ganget på højeste potens, check mulige fælles divisorer i koefficienterne der følger efter.

**Opgave 5.3**

Undersøg om $\boldsymbol{A}$ er symmetrisk, skævsymmetrisk eller orthogonal. Find spektret for $\boldsymbol{A}$ samt egenvektorer. Størrelserne $a$ og $b$ er reelle tal. Bestem også den algebraiske samt den geometriske multiplicitet for egenværdierne.

$$\boldsymbol{A} = \begin{Bmatrix} a & b \\ -b & a \end{Bmatrix}$$

**Opgave 5.4**

Find egenværdier og egenvektorer for $\boldsymbol{A}$. Bestem også den algebraiske samt den geometriske multiplicitet for egenværdierne.

$$\boldsymbol{A} = \begin{Bmatrix} 13 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & -8 \\ 5 & 4 & 7 \end{Bmatrix}$$

**Opgave 5.5**

Betragt en lineær transformation i det todimensionelle rum ($\boldsymbol{R}^2$), som angiver en spejling omkring y-aksen:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$$

Find egenværdier og egenvektorer for $\boldsymbol{A}$

### Anvendelsesopgaver

### Opgave 5.6 (Fibonacci talrækken – det gyldne snit)

Eftervisning af Fibonacci egenværdiproblemet (se separat slidesæt).

Formuler egenværdiproblemet relateret til Fibonacci talrækken, $\boldsymbol{AF} = \lambda\boldsymbol{F}$, som vist i slides og løs for $\lambda$.

Hint: Notationen og formuleringen i slidesættet (slide nr. 204) er ikke helt eksakt (korrekt), bortset fra det øverste udtryk; hvilken anden ligning, med udgangspunkt i udtrykket øverst, kan vi stille op som skal gælde for egenværdien vi leder efter når *n* går mod uendelig, og som sammen med den øverste ligning leder til egenværdiproblemet nederst? Er den karakteristiske ligning korrekt?

### Opgave 5.7 (Power kontrol i trådløs kommunikation)

Betragt et trådløst kommunikationssystem med to basisstationer og to mobiltelefoner (brugere) der sender i retning fra mobilen til basisstationen. Størrelsen $a_{i,b_i}$ angiver her kanalens forstærkning mellem mobil *i* og basisstation $b_i$: jo større afstand mellem mobil og basisstation, jo mindre forstærkning. Med to mobiler og to basisstationer er der fire forstærkninger som kan opstilles i en matrix $\mathbf{A}$, hvor række angiver mobil og søjle basisstation. Antag at denne er givet som følger:

$$\mathbf{A}^{(b)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/1^4 & 1/3^4 \\ 1/4^4 & 1/2^4 \end{bmatrix}$$

Antag at de to mobiler kommunikerer samtidigt og på samme kanal. De vil således interferere/forstyrre hinanden og give anledning til et signal til interferensforhold $\omega_i = a_{i,b_i} q_i / (a_{j,b_i} q_j)$, dvs. forholdet mellem den effekt vi modtager fra den ønskede mobil (sendeeffekt $q_i$ gange forstærkning i kanalen mellem mobil *i* og den basisstation $b_i$ som denne mobil er forbundet til) og den effekt vi modtager fra den anden mobil (dennes sendeeffekt $q_j$ gange forstærkning i kanalen mellem mobil *j* og den samme basisstation $b_i$ som mobil *i* er forbundet til).

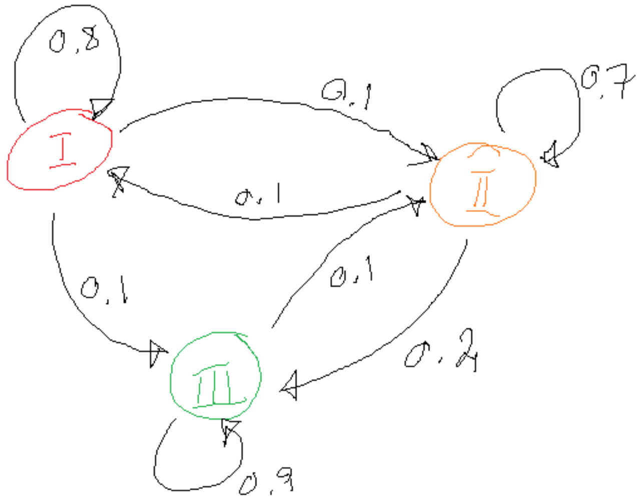
Signal til interferensforholdet er bestemmende for om man kan kommunikere samtidigt og ønskes så stort som muligt. I dette tilfælde ønsker vi det ikke bare så stort som muligt, men balanceret mellem de to mobiler/brugere sådan at de begge får samme servicekvalitet. Uden at gå i detaljer kan vi opstille ligningssystemet (i kan evt. selv prøve ud fra ovenstående betragtninger):

$$\frac{1}{\omega}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{2,b_1}/a_{1,b_1} \\ a_{1,b_2}/a_{2,b_2} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Spørgsmålet er nu hvordan skal vi associere mobiler med basisstationer og hvor stor sendeeffekt vi skal tildele de to mobiler sådan at vi maksimerer $\omega$? Besvar spørgsmålet med den antagelse at vi ikke tildeler begge mobiler til samme basisstation samtidigt.

## Opgave 5.8 (Markov proces – state transition matrix)

Følgende model viser hvordan en given by udvikler sig mellem tre områder, her I: boligområde, II: forretningsområde, og III: industriområde, i fem års intervaller. I et bestemt referenceår er fordelingen I: 30%, II: 20% og III: 50%




$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$a_{ij}$ angiver sandsynligheden for at gå fra tilstand *i* til tilstand *j*

Modellen er en såkaldt Markov-model, og udviklingen en Markov process: Den næste tilstand, ***y***, afhænger kun af den forrige tilstand ***x*** sådan at $\mathbf{y} = \mathbf{A}^T\mathbf{x}$, hvor f.eks. tilstanden i referenceåret er $\mathbf{x}^T = [0.3, 0.2, 0, 5]$ (overbevis jer om, at næste tilstand for område I er givet som i ovenstående udtryk for Markov processen).

**A** er en såkaldt stokastisk matrix, for hvilket der gælder at summen af hver række er lig 1.0 – den totale sandsynlighed er 1.0!

a) Lav et Matlab/Maple program der kan fremskrive udviklingen i områdefordelingen i intervaller af fem år (check at i for hvert step får total på 100 %), og generer et plot eller en tabel der viser procentfordelingen mellem de tre områder som funktion af intervaller af fem år (et antal år ud i fremtiden).

Besvarelsen af a) forsøger numerisk at løse problemet $\mathbf{y} = \mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}$, altså at fordelingen mellem områder stabiliserer sig (og for øvrigt tilsvarende fremgangsmåde som benyttes i Power Iteration for den maksimale egenværdi).

b) Formulér ovenstående som et egenværdiproblem og løs for den resulterende fordeling mellem områder vha. Gaussisk elimination (hvad er egenværdien? husk at hvis **x** er en løsning så er også *k***x** også en løsning, men ikke alle løsninger er gyldige her! Hvad skal der gælde for den resulterende løsning?)