

QUASISTATISKE ELEKTRISKE OG MAGNETISKE FELTER

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Hans Ebert
3. udgave
Marts 1998



Forord

Denne note er skrevet til anvendelse i et grundlæggende kursus indenfor EQS og MQS – Electric QuasiStatic fields og Magnetic QuasiStatic fields.

Der forudsættes en vis viden om infinitesimalregning, koordinatsystemer, vektorregning, elektrisk kredsløbsteori og elektriske enheder, fysiske love indenfor elektricitetslæren, men ikke om vektoranalyse (differentialregning med vektorer.) Dette svarer cirka til niveauet efter studentereksamensniveau samt bestået teknisk-naturvidenskabelig basisuddannelse og gennemført kredsløbsteorikursus.

I noten findes et resumé af nogle af forudsætningerne – dels for at genopfriske dem i den form, de anvendes i kurset og dels for at introducere den notation, der anvendes kurset igennem.

På side 113 findes et formelresumé og på side 119 et stikordregister.

Noten er forfattet i oktober 1989, og er i 1996 blevet omredigeret og sat med TeX.

Oplysninger om fejl, mangler, uhensigtsmæssigheder og lignende modtages med tak af forfatteren.

Hans Ebert
Aalborg Universitet
Institut for elektroniske systemer
Den 17. marts 1998

Indholdsfortegnelse

1 Indledning	1
1.1 Feltteori kontra kredsløbsteori	1
1.2 Historisk resumé	6
2 Resumé af forudsætninger	9
2.1 Koordinatsystemer, vektorer, felter	9
2.2 Vektoroperationer	17
2.2.1 Prikprodukt	17
2.2.2 Krydspunkt	18
2.2.3 Andre vektorer	20
2.2.4 Differentiering/integrering mht. tiden	20
2.2.5 Integrering mht. stedet	20
2.3 Komplex Symbolsk Notation (KSN)	25
2.4 Forskellige bemærkninger til KSN	29
2.5 Enhedssystemer	32
2.5.1 Mediekonstanter	34
3 Elektriske felter	37
3.1 Ladning	37
3.2 Elektrisk feltstyrke	37
3.3 Coulombs lov	39
3.4 Felter om punktladninger	41
3.4.1 Potentiale	44
3.4.2 Energien i et elektrisk felt	47
3.5 Kapacitet	51
4 Magnetiske felter	57
4.1 Oversigt	57
4.2 Magnettfelter	58
4.2.1 B-feltet	58
4.2.2 H-feltet	62
4.3 Ampère og Faraday	65

4.3.1 Ampères lov	66
4.3.2 Faradays lov	68
4.4 Selvinduktion	69
4.4.1 Formler for spoler	72
4.5 Gensidig induktion	74
5 Dualiteter	79
5.1 Formler	79
5.2 Analogier	81
6 Magnetiske kredsløb	83
6.1 Elektrisk analogi	85
6.2 Magnetiske ækvivalentdiagrammer med ulineariteter	89
7 Ferromagnetiske materialer	97
7.1 Eksempler på permeabiliteter	97
7.2 Hysteresekurven	98
7.3 B-H diagrammer	101
7.4 Permeabilitet	102
7.5 Magnetisering af jern	103
7.6 B-H-diagrammer	106
8 Litteraturliste	111
9 Formler	113
9.1 Størrelser og enheder	113
9.2 Definitionsligninger	113
9.3 Love	114
9.4 Kredsløbselementer	115
9.5 Feltberegning	117
9.6 Magnetiske kredsløb	118
Stikordsregister	119

1

Indledning

1.1 Feltteori kontra kredsløbsteori

Når man skal analysere og syntesere spændinger og strømme i en eller anden konfiguration af forskellige materialer anbragt i det tredimensionelle rum, anvender man ofte *kredsløbsteori*, hvor forskellige diskrete områder sammenfattes i komponenttyper med velbeskrevne, karakteriske egenskaber, som fx. modstande, kondensatorer og spoler. Disse komponenter er i forbindelse med hinanden via nogle elementtyper kaldet *ledninger*, der udviser en temmelig ideel opførsel, således at deres indvirkning på kredsløbet er neglicibel.

Læren om disse komponenters opførsel mht. strøm, spænding og effekt, set fra komponentens terminaler er kredsløbsteorien. Komponenten er en „black-box”, hvis indre virkemåde, man ikke behøver at bekymre sig om. Derved slipper man for en masse besvær fx. behøver man ikke definere et koordinatsystem, som konfigurationen ellers skulle beskrives i; det tredimensionelle rum bliver til et todimensionelt diagram.

De væsentligste regneregler, der anvendes i kredsløbsteori er vel:

1. Ohms lov
2. Kirchhoffs knudeligning
3. Kirchhoffs maskeligning.

Kirchhoffs knudeligning siger i al væsentlighed, at der kan ikke løbe mere strøm *fra* et punkt, end der løber *til* punktet.

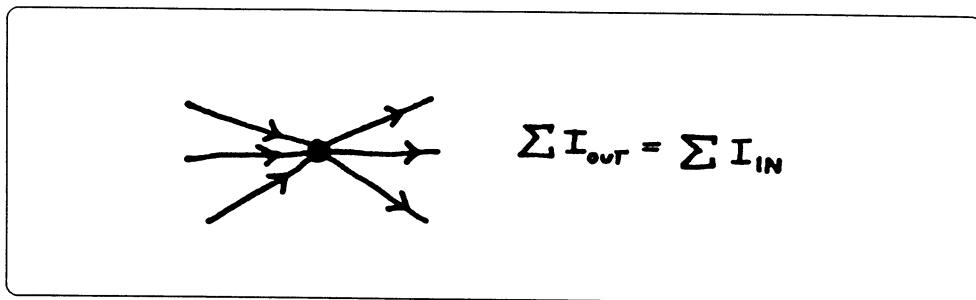


Fig. 1.1. Illustration af Kirchhoffs knudelov.

Denne lov, og de fleste andre, synes umiddelbart rigtig og logisk, og den er i fuld overensstemmelse med vor intuition. Dette skyldes – tror jeg – at vi i baghovedet har en eller anden mere håndgribelig, følelig og synlig model: vand, der strømmer eller elektroner som små kugler, der løber – styret af tyngdefeltet – i rør. Vi tænker: elektrisk strøm = vandstrøm og elektrisk spænding = vandtryk, og så kan vi pludselig „forstå“ det.

Vi er med andre ord fuldt fortrolig med objekters opførsel i rummet under påvirkning af tyngdefeltet. Udén at kende ligningerne, ved vi på forhånd, hvordan objekterne vil opføre sig under forskellige omstændigheder, og når vi så får præsenteret ligningerne, evt. i forklædning, siger vi: „der er s. da klart“.

Men, men – det passer ikke altid!

Kirchhoffs knudeligning gælder ikke generelt, ligesåvel de andre regler og love, der anvendes i kredsløbsteorien.

Der findes tilfælde, som vi ikke kan beskrive umiddelbart ved anvendelse af kredsløbsteorien. Betragt fx. en walkie-talkie. Der løber måske 1 A ud i antennen, som er en ledning, der ender blindt. Hvor bliver den 1 A af? Kirchhoffs knudepunktsgleichung gælder ikke.

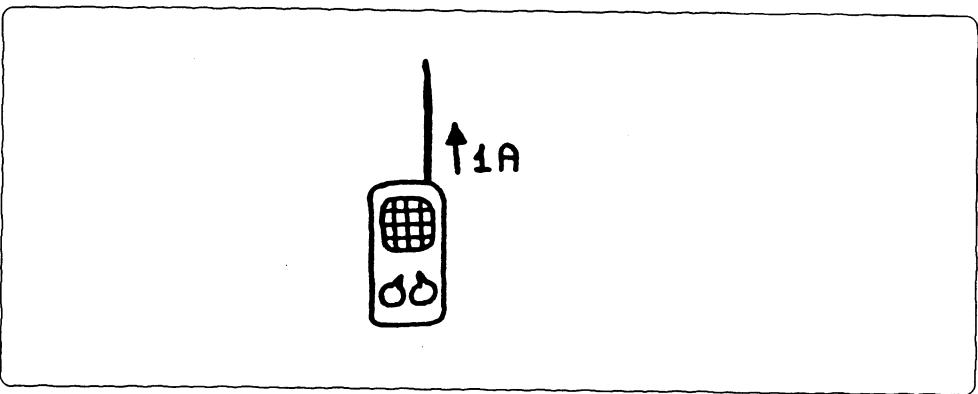


Fig. 1.2. En walkie-talkie, hvor der løber 1 ampère ud i antennen.

Skal man anvende kredsløbsteorien, må man lave en „black-box“, der hedder „antenne“ (og som indeholder en ohmsk modstand). Kredsløbsteoriens metode er at indkapsle uforståelige opførsler i black-boxe.

Kredsløbsteorien forklarer fx. heller ikke hvorfor visse ledninger er udformet som koncentriske rør. Der er flere forudsætninger for den diskrete kredsløbsteori, hvorfra de 2 vigtigste er:

1. Bølgelængden for de signaler, der regnes med skal være meget større end de fysiske dimensioner af de kredsløb, der regnes på. For signaler op til 100 kHz er bølgelængden over 3 km, så man kan med en meget god tilnærmede regne på LF-forstærkere på fx. $1\text{ m} \times 1\text{ m}$. Radiosignaler op til 100 MHz har over 3 m i bølgelængde, så her går det også godt for små kredsløb fx. $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$.
2. Ledningsevnen for kredsløbenes ledninger skal være meget større end ledningsevnen for det omgivende medium; som regel luft. For kobber haves $\sigma = 58 \cdot 10^6 \text{ S/m}$, og for tør luft $\sigma \approx 10^{-18} \text{ S/m}$, så i sådanne tilfælde med „kobberledninger nedsænket i luft“ er tilnærmedsen meget god.

Kredsløbsteorien gælder eksakt for DC, dvs. jævnstrømme og jævnspændinger, men så har vi jo ikke megen glæde af spoler og kondensatorer (i hvertfald ikke i stationær tilstand). I øvrigt forklarer kredsløbsteorien ikke i sig selv, hvordan der kan være en spænding over en spole, som jo er en kortslutning, eller hvordan der kan løbe en strøm igennem en kondensator, som jo er en afbrydelse.

I dette kursus skal vi se på teorier, som måske ikke forklarer alle de nævnte eksempler, men som er en slags indledning til en egentlige feltteori, som gør. Vi skal se på quasistatiske elektriske og magnetiske felter, og her med overvægt på det sidste. Det er normalt, de fleste steder, at man lærer kredsløbsteori først og derefter – som en slags udvidelse hertil – elektromagnetisme og feltteori.

Dette er rent pædagogiske nok også den bedste måde, men skulle man være mere pragmatisk, burde den generelle feltteori indlæres først. Derefter kom specialtilfældene quasistatiske felter og kredsløbsteori.

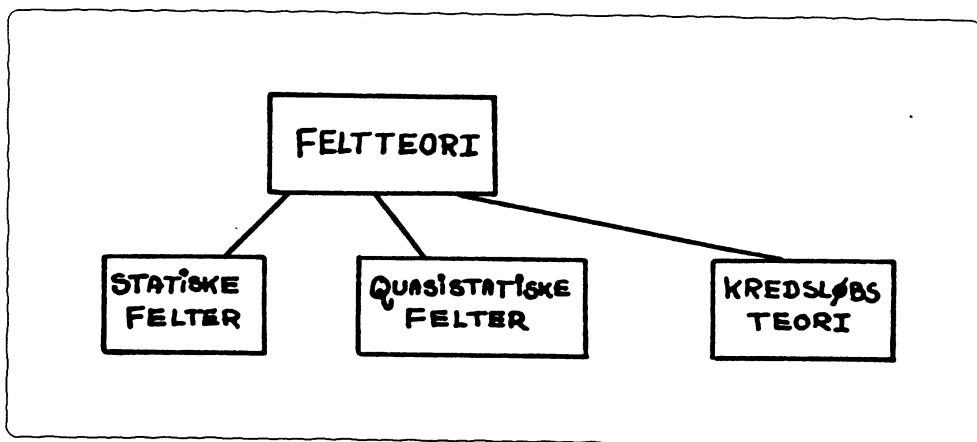


Fig. 1.3. Det hierarkiske system af teorier og metoder indenfor elektromagnetiske fænomener.

Men et gode ved, at kredssløbsteorien er velkendt og forståelsesmæssigt accepteret, er at den kan anvendes på andet end elektriske kredssløb, som derved bliver forståelige. Vi skal i kurset anvende sådanne analogier for magnetiske kredssløb i forbindelse med transformatoren og for mekaniske kredssløb i forbindelse med højttaleren. (pudsigt: man forstår elektriske kredssløb, fordi de minder én om noget mekanisk – et øjeblik senere anvender man de udfundne teorier for at forstå mere indviklede mekaniske kredssløb. Jeg gad vide om fysikere gør lige det omvendte?).

Når de magnetiske kredssløb skal behandles, vil vi se, at det er et tilfælde, hvor forudsætning 2 (side 3) ikke er ret godt opfyldt: forskellen i magnetisk ledede vne mellem luften og en transformator er kun $10^3 - 10^4$, hvorfor det er vanskeligt at lave nøjagtige beregninger. Dette svarer til, at et elektrisk kredssløb blev nedslænket i saltvand, der var 1000 gange mere ledende end normalt havvand ($\sigma = 4 \text{ S/m}$). Det ville i sandhed være svært at udregne strømme og spændinger i så tilfælde.

De felter, der behandles, er:

1. Stationære
2. Quasistatiske.

At felterne er stationære, betyder, at de befinner sig i en dynamisk hviletilstand, hvilket for AC-felter (vekselfelter) vil sige, at de gennemløber samme cyklus af værdier med fast periodetid. Det betyder altså ikke at det er DC-felter (dette ville være statiske felter). Det modsatte af stationære felter er transiente felter.

At de er quasistatiske betyder, at de varierer langsomt, således at bølgelængden er lang i forhold til de fysiske dimensioner af de områder, der betragtes.

Et AC magnetfelt inducerer en AC strøm i en ledning, og en AC strøm i en ledning skaber et AC magnetfelt. Hvis frekvenser er høj nok, vil det samme ske, selv hvis ledningen

ikke er der, og der sker en gensidig påvirkning – en vekselvirkning mellem elektriske og magnetiske felter – som gør at disse felter kan opretholde sig selv i luften: der vil ske en bølgeudbredelse af elektromagnetiske (sammenkoblede) felter.

Dette er hvad Maxwells ligninger siger, og det er generel feltteori (James Clerk Maxwell, 1831 - 1879).

Quasistatiske tilstænde er tilstede, når strømmen i ledningen altid er meget større end den strøm, der induceres i luften.

Mere præcist: For QES gælder, at der kun induceres negligeble spændinger af varierende magnetfelter. (Dette kun formelt opskrives som $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$)

For MQS gælder at magnetfelter hovedsageligt skyldes varierende ledningsstrømme. (Dette kan formelt opskrives som $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$).

1.2 Historisk resumé

Hvor gamle er de teorier, der tales om ?

Ja, elektricitetslæren begyndte o. år 1800 og kredsløbsteorien o. år 1900.

Nedenfor bringes en kronologisk liste over de vigtigste opdagelser indenfor området. Sideløbende er der sket en ligeså vigtig udvikling indenfor matematikken, som efterhånden har gjort at alle taler samme sprog, og at elektricitetslæren kan udtrykkes på en simpel, klar, overskuelig og forståelig måde. Mange af de originale artikler er udtrykt i et matematisk sprog, der er helt uigenkendeligt og uforståeligt for os i dag.

Matematiksiden af sagen må ikke undervurderes – det er af stor vigtighed at sammenhænge kan udtrykkes på en klar måde, der fremhæver det væsentlige og skjuler det uvæsentlige, for at opdagelser kan udnyttes og stimulere nye opdagelser.

De gamle grækere kendte til elektriske felter, de havde opdaget, at rav gnedet med katteskind kunne tiltrække papyrusstumper (orden *elektron* er græsk for rav), og dette har givet navn til elektricitet. De gamle kinesere havde lavet kompasser af magnetjernsten fundet i naturen.

Colombs lov	1785
Volatas batteri	1800
Ørsteds opdagelse	1820
Ampères lov	1820
Biot-Savarts lov	1820
Ohms lov	1826
Faradays lov	1831
Henry, selvinduktion	1832
Joule, effektligning	1841
Maxwells love	1862
Heaviside, transmissionsledninger	1880
Hertz, radiobølger	1887
Bedell, Crehore, Steinmetz	
Komplex symbolsk notation	1893
Marconi, trådløs telegrafi	1895
Elektronen identificeres	1896

Af nyere udviklinger kan nævnes:

Valdemar Poulsen, båndoptageren	1898
Valdemar Poulsen, lysbuesenderen	1903
Lee de Forest, radiørøret	1906
Peter L. Jensen, den elektrodynamiske højttaler	1915
General Electric og flere andre udsender TV	1928
CBS udsender farve-TV	1940
Bradley, Bardeen, Schottky, transistoren	1948
NTSC-standard for farve-TV	1953
RCA videobåndoptager i farve	1953
VHS-standarden	1978

2

Resumé af forudsætninger

2.1 Koordinatsystemer, vektorer, felter

Feltteorien er en matematisk beskrivelse af observérbare hændelser i rummet.

Udgangspunktet er derfor det 3-dimensionelle rum. Dette kortlægges vha. koordinatsystemer. Vi skal anvende orthogonale kurvilineære koordinatsystemer af følgende typer:

1. Rektangulære koordinater („Carthesiske“)
2. Cylinderkoordinater
3. Kuglekoordinater (sfæriske).

Hvert af disse findes i 2 udgaver:

- a. Højrehåndssystemer
- b. Venstrehåndssystemer.

At systemerne er orthogonale, betyder at de 3 basisvektorer alle står vinkelret på hinanden, at de er kurvilineære, betyder at et punkts beliggende beskrives ved skæringen mellem 3 definitionsflader. Vi skal kun bruge højrehåndssystemer.

Der anvendes forskellige koordinatsystemer, alt efter hvilket problem, der skal beskrives. Valget afgøres udfra symmetribetrægtninger. Har vi fx. at gøre med en størrelse, der kun varierer med afstanden til et bestemt punkt, er der kuglesymmetri, og derfor vælges kuglekoordinater. Problemet kan selvfølgelig beskrives i et vilkårligt koordinatsystem, da der findes transformationsformler, men det er klart en lettelse at vælge rette system.

Typisk anvendes systemerne således:

Rektangulær	Plansymmetri. Felter om store flade ting eller om små udsnit af kugleflader eller cylinderflader. Generelt, hvis der ingen særlig symmetri findes.
Cylinder	Cylindersymmetri. Felter om og i kabler og andre lange, runde ting.
Kugle	Kuglesymmetri. Felter om punkter, enden af spidse ting. Ved kugleformede genstande.

Som eksempel på den lettelse, det giver at vælge rette koordinatsystem kan nævnes positionsangivelser på jordkloden. Længde- og breddeangivelserne er kuglekoordinater, og man behøver ikke opgive den 3. koordinat: radialafstanden, idet den er den samme overalt og derfor betydningsløs. Kuglekoordinaterne gør fx. at der er let at udregne afstanden mellem punkter – hvor det jo er storcircelafstanden, der er interessant for os mennesker – ikke den korteste vej (igen nem jorden).

Karthesiske koordinater

Vi anvender dette system for generelle forklaringer. En vektor er et matematisk objekt, der angives ved 3 størrelser, kaldet komposanter. Undertiden siger man også: størrelse og retning, hvor størrelse så er en 1-dimensionel størrelse, og retning er 2-dimensionel størrelse.

Vi afbilder en repræsentant for en vektor som en pil, der er et orienteret liniestykke. I karthesiske koordinater angives en vektor \bar{V} (vektorer noteres som tegn med en streg over) således:

$$\bar{V} = V_x \cdot \hat{x} + V_y \cdot \hat{y} + V_z \cdot \hat{z} \quad (2.1)$$

V_x, V_y, V_z er hhv. 1., 2. og 3. koordinaterne, og $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ er enhedsvektorer i de respektive orthogonale retninger.

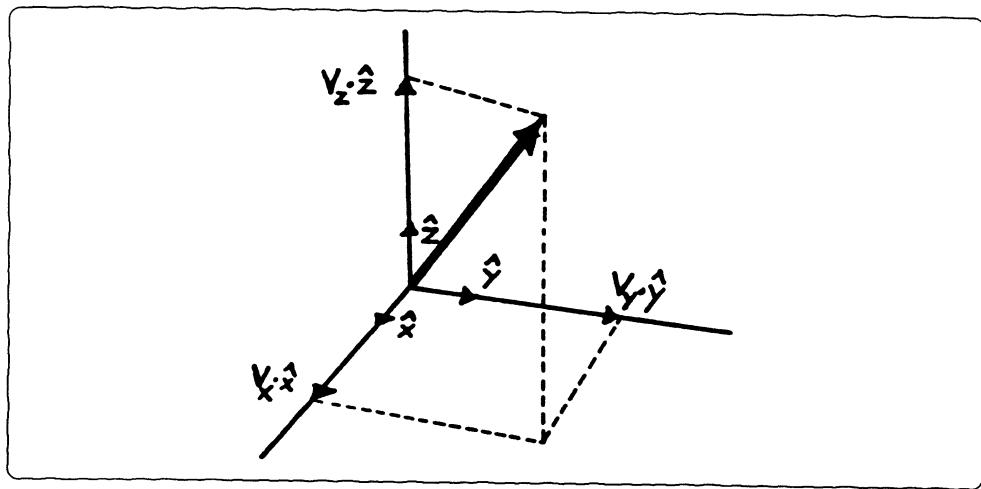


Fig. 2.1. Det rektangulære højrehåndede koordinatsystem.

I et højrehåndssystem gælder: Når man drejer \hat{x} over i \hat{y} , vil en højreskrue, der drejes samme vej, skrue sig i \hat{z} -retningen. Der tales om den positive retning for \hat{x} , \hat{y} og \hat{z} .

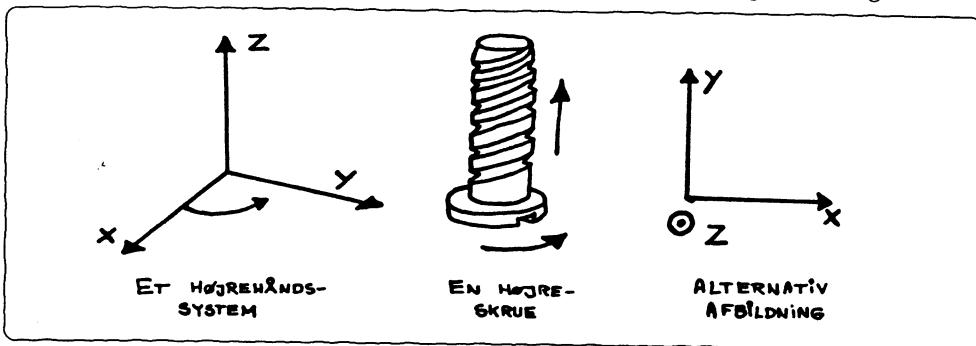


Fig. 2.2. Illustration af højrehåndede rektangulære systemers orientering.

Vektorer *ud af* papiret vises som \odot (spidsen af en pil), og vektorer *ind i* papiret som \otimes (enden af en pil; man kan tydeligt se halefinnen)

Skalarfelt

Et skalarfelt er en funktion, der knytter en 1-dimensionel størrelse til hvert punkt i rummet.

$$F(x,y,z,t) \quad (2.2)$$

Punkterne i rummet er entydigt adressérbare via koordinatsystemet. Parameteren t er *tiden*.

Eksempel 2.1

Lufttemperaturen kan for et vist område i troposfæren vises at falde med højden over jordoverfladen. Betragter man et mindre område af jordkloden, kan man bekvemt anvende karthesiske koordinater, og lufttemperaturen kan udtrykkes som et skalarfelt således:

$$T(x,y,z) = T_0 + (z_0 - z) \cdot 0,005 \quad [\text{°C}]$$

Her er ikke medtaget tidsafhængigheden.

■

Vektorfelt

Et *vektorfelt* eller blot et *felt*, er en funktion, der knytter en 3-dimensionel størrelse til hvert punkt i definitionsrummet. Til hvert punkt (x,y,z) hører der altså en vektor $\bar{\mathbf{V}} = V_x \cdot \hat{\mathbf{x}} + V_y \cdot \hat{\mathbf{y}} + V_z \cdot \hat{\mathbf{z}}$, som eventuelt også kan variere med tiden, t .

I karthesiske koordinater noteres feltet $\bar{\mathbf{A}}$ således:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}(x,y,z,t) &= A_x(x,y,z,t) \cdot \hat{\mathbf{x}} \\ &\quad + A_y(x,y,z,t) \cdot \hat{\mathbf{y}} \\ &\quad + A_z(x,y,z,t) \cdot \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Normalt er parameterangivelsen (x,y,z,t) besværlig at skrive hver gang, og den er derfor udeladt. Kun hvor der gøres opmærksom på særlige afhængigheder, medtages den helt eller delvis. Der anvendes derfor følgende notation:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}} \\ &= \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Eksempel 2.2

Vandstrømningen i en flod kan beskrives ved et felt – et vandstrømningsfelt. Vandstrømmen kan måles i ℓ/s , men vi kan ikke godt knytte denne størrelse til et punkt, så vi vælger i stedet at betragte den vandstrøm, der gennemstrømmer et areal på 1 m^2 . Enheden bliver derved $\ell/s \cdot \text{m}^2$ (liter pr. sekund pr. kvadratmeter) (Der kunne også vælges $\text{m}^3/\text{s} \cdot \text{m}^2 = \text{m}/\text{s}$)

Med origo placeret midt i fladen i vandoverfladen kunne strømningsfeltet se således ud:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,6x^2 + 10z + 1500 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$-50 \leq x \leq 50 \quad 0 < y < ? \quad -10 \leq z \leq 0$$

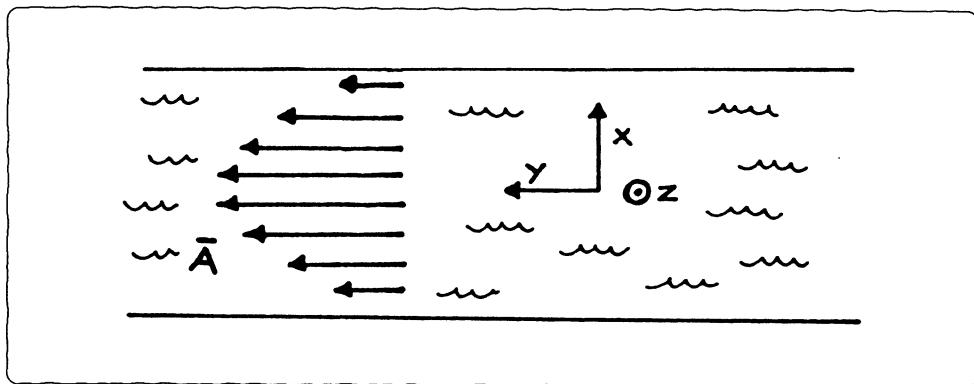


Fig. 2.3. Vandstrømningsfeltet i en flod.

Strømningsfeltet har kun en y -komposant, men afhænger ikke af y .

Det ses, at $\bar{\mathbf{A}}$ kun har en A_y -komposant, vandet strømmer altså kun i y -retningen, men strømningshastigheden afhænger af x og z , afstanden til hhv. bredden og bunden af floden. I flodens midte i vandoverfladen kan strømningen (her haves $x = z = 0$) bestemmes til:

$$A_y = 1500 \quad [\ell/s \cdot \text{m}^2]$$

Ved bredden i vandoverfladen, $x = \pm 50$ fås:

$$A_y = -0,6(\pm 50)^2 + 1500 = -1500 + 1500 = 0 \quad [\ell/\text{s} \cdot \text{m}^2]$$

■

Eksempel 2.3

Alle punkter i verdensrummet kan beskrives ved en tilknyttet egenskab, der kaldes masse. (I lighed med eksempel 2.2 kan man ikke godt tilknytte en masse til et punkt, men det kan vises at den masse, der findes fordelt i et endeligt volumen udadtil virker som om massen befandt sig i et punkt, hvis man befinder sig uden for volumenet). Vi kan ikke se eller føle massen, kun punkternes opførsel som følge af at de har en masse.

Eksperimentelt er det fundet, at 2 masser m_1 og m_2 placeret i afstanden d tiltrækker hinanden med:

$$\bar{F} = \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \cdot k_1 \cdot \hat{d} \quad [\text{N}]$$

Hvor:

\hat{d} er en retningsvektor fra m_1 til m_2

k_1 er en konstant, som er $6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}/\text{kg}^2$

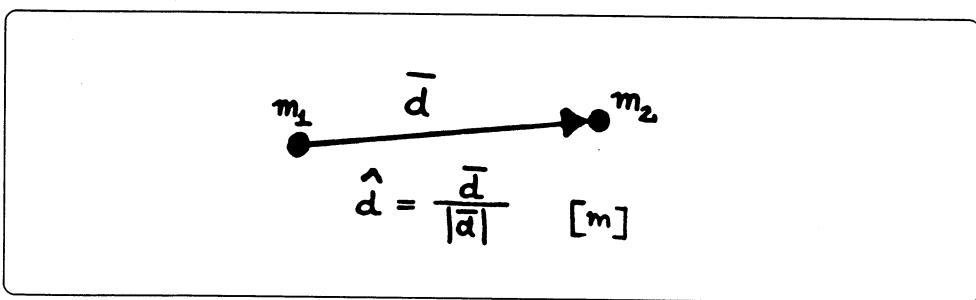


Fig. 2.4. Retningsvektoren fra m_1 til m_2 .

Enhedsregning giver:

$$\left[\left(\frac{\text{kg} \cdot \text{kg}}{\text{m}^2} \right) \cdot \left(\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg}^2} \right) \cdot \text{m} \right] = \text{N}$$

Jordklodens masse og middelradius er:

$$\begin{aligned}m_j &= 5,999 \cdot 10^{24} \text{ kg} \\R &= 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}\end{aligned}$$

Ved jordoverfladen udsættes en enhedsmasse for kraften:

$$F_{1\text{kg}} = \frac{1 \cdot 5,999 \cdot 10^{24}}{(6,378 \cdot 10^6)^2} \cdot k_1 \quad [\text{N}]$$

Der kan defineres et *tyngdefelt*, som er et felt, der beskriver *retning* og *størrelse* af den kraft, en enhedsmasse udsættes for i feltet:

$$\bar{\mathbf{A}} \triangleq \frac{\bar{\mathbf{F}}}{m_{1\text{kg}}} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{kg}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

Betrages kun et lille område af jordoverfladen, fx. 10 km² og kun op til en lille højde, fx. 100 m, kan feltet med en god tilnærmelse udtrykkes i karthesiske koordinater med *xy*-planet i jordoverfladen og *z*-aksen pegende opad:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9,88 \end{Bmatrix} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

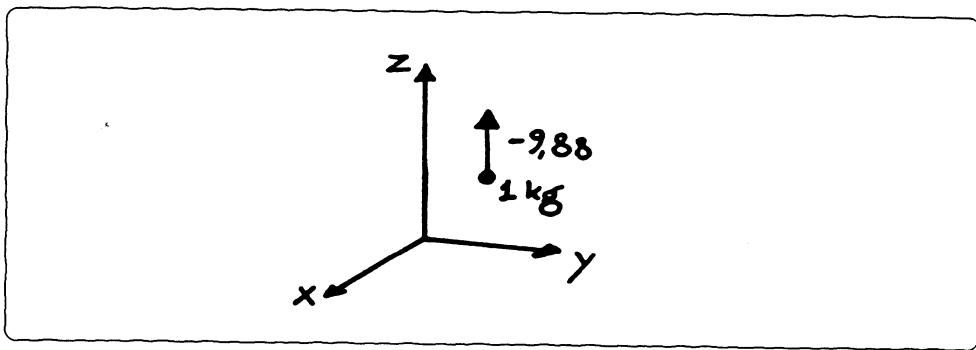


Fig. 2.5. Tyngdefeltet.



Tre koordinatsystemer

Betegnelserne, der anvendes i de 3 typer koordinatsystemer er vist på figur 2.6 . Alle 3 systemer er orthogonale. Kun i det karthesiske system er alle basisvektorerens retning uafhængig af de valgte punkt. Betegnelserne er standardbetegnelser.

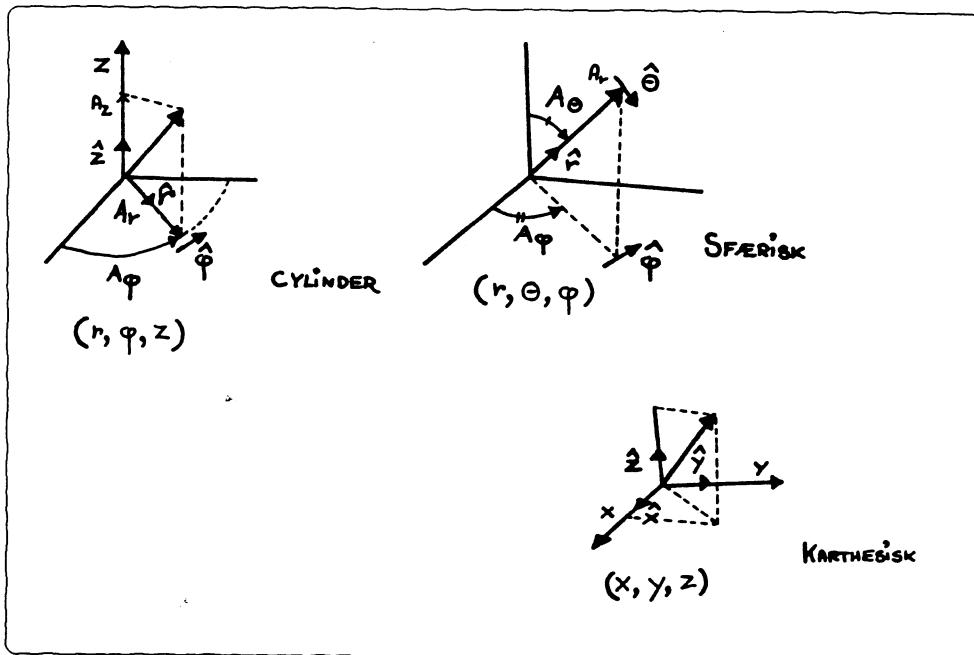


Fig. 2.6. Betegnelser i de tre koordinatsystemer.

Der findes omregningsformler, hvormed man kan omregne et punkts koordinatsæt i ét system til et andet, man det får vi ikke specielt brug for her. I et højrehåndet cylinderkoordinatsystem skruer en højreskrue sig i z -aksens positive retning, når den drejes i den positive φ -retning.

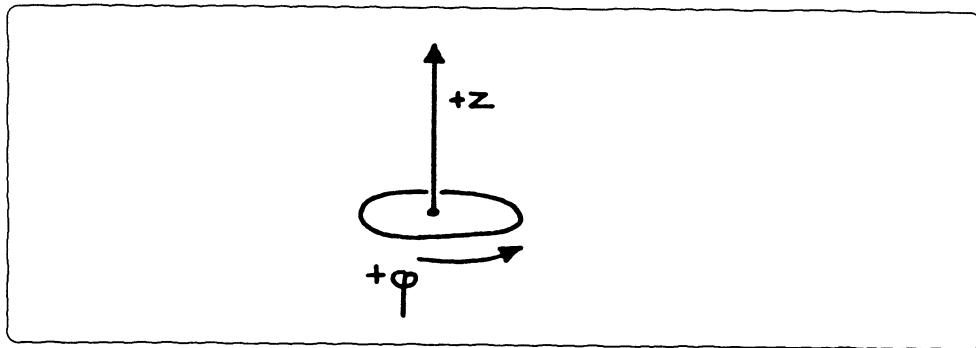


Fig. 2.7. Retninger i et højrehåndet cylinderkoordinatsystem.

2.2 Vektoroperationer

For vektorer er der defineret addition/subtraktion samt multiplikation/division med skalarer:

$$m\bar{A} \pm \frac{\bar{B}}{n} = \begin{cases} mA_x \pm \frac{1}{n}B_x \\ mA_y \pm \frac{1}{n}B_y \\ mA_z \pm \frac{1}{n}B_z \end{cases} \quad (2.5)$$

Der er *ikke* defineret vektorkvotient \bar{A}/\bar{B} .

Der defineres 2 forskellige produkter af vektorer: Vektorprodukt og skalarprodukt.

2.2.1 Prikprodukt

Kaldes også *skalarproduktet* eller det *indre produkt*.

$$\bar{A} \bullet \bar{B} = |\bar{A}| \cdot |\bar{B}| \cdot \cos \varphi = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (2.6)$$

Hvor:

φ er den mindste vinkel fra \bar{A} til \bar{B}

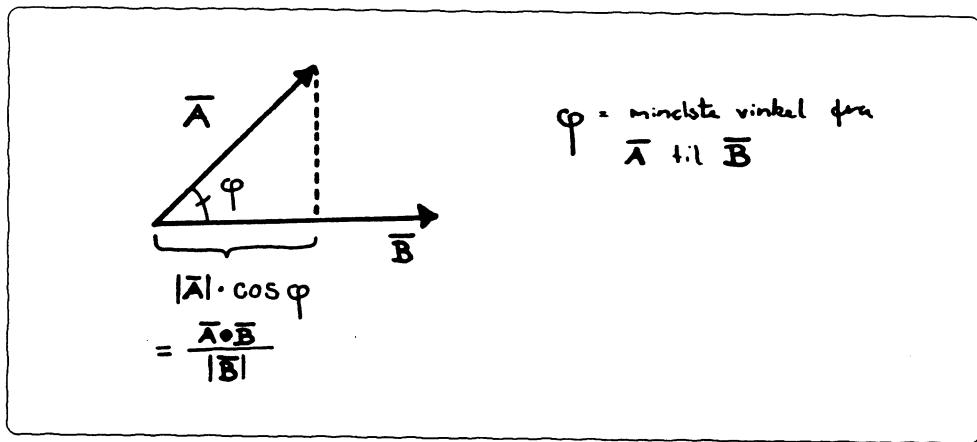


Fig. 2.8. Geometrisk tolkning af prikproduktet.

Der gælder, at:

\bar{A} og \bar{B} er vektorer

$\bar{A} \bullet \bar{B}$ er en skalar

(Jeg noterer prikproduktet med en overdrevent fed prik. Almindeligvis ligner prikkens en almindelig „gangeprikk“, men i denne note vil jeg gerne understrege de steder, hvor der er tale om et prikprodukt mellem vektorer)

Endvidere gælder:

$$\bar{A} \bullet \bar{B} = 0 \Leftrightarrow \bar{A} \perp \bar{B} \quad (2.7)$$

$$|\bar{B}| = 1 \Rightarrow \bar{A} \bullet \bar{B} = \bar{A}'s \text{ projektion på } \bar{B} \quad (2.8)$$

$$\bar{A} \bullet \bar{B} = \bar{B} \bullet \bar{A} \quad (2.9)$$

$$\bar{A} \bullet (\bar{B} + \bar{C}) = \bar{A} \bullet \bar{B} + \bar{A} \bullet \bar{C} \quad (2.10)$$

Notationen $\bar{A} \perp \bar{B}$ betyder, at \bar{A} og \bar{B} er orthogonale (vinkelret på hinanden).

2.2.2 Krydsprodukt

Kaldes også *vektorproduktet* eller det *ydre produkt*.

$$\bar{A} \times \bar{B} = |\bar{A}| \cdot |\bar{B}| \cdot \sin \varphi \cdot \hat{n} \quad (2.11)$$

Hvor:

φ er den mindste vinkel fra \bar{A} til \bar{B}

\hat{n} er en normalenhedsvektor, der er orthogonal med både \bar{A} og \bar{B} .

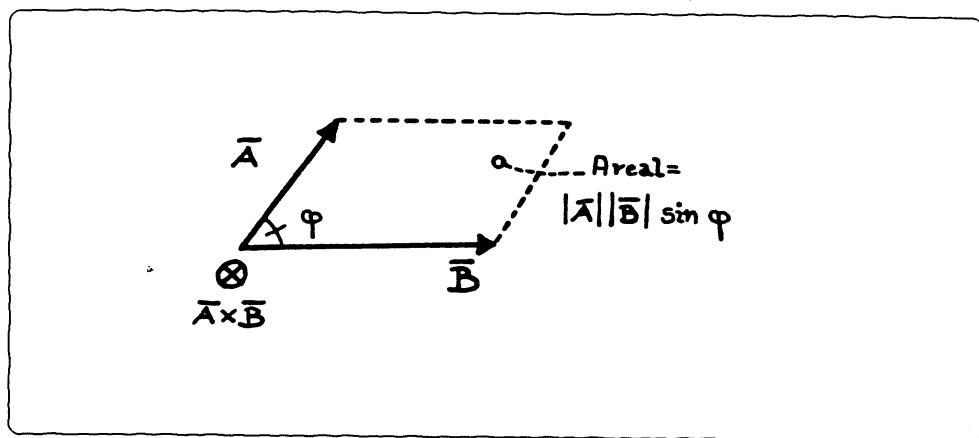


Fig. 2.9. Geometrisk tolkning af krydsproduktet.

Krydsproduktet kan opskrives med den såkaldte *determinantnotation*:

$$\begin{aligned} \bar{A} \times \bar{B} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \cdot \hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \cdot \hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \cdot \hat{z} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Der gælder, at:

\bar{A} og \bar{B} er vektorer

$\bar{A} \times \bar{B}$ er en vektor

Endvidere gælder:

$$\bar{A} \times \bar{B} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{A} \parallel \bar{B} \quad (2.13)$$

$$\bar{A} \times \bar{B} = -(\bar{B} \times \bar{A}) \quad (2.14)$$

$$\bar{\mathbf{A}} \times (\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{C}}) = \bar{\mathbf{A}} \times \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{A}} \times \bar{\mathbf{C}} \quad (2.15)$$

$$\bar{\mathbf{A}} \times (\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{C}}) \neq (\bar{\mathbf{A}} \times \bar{\mathbf{B}}) \times \bar{\mathbf{C}} \quad (2.16)$$

Notationen $\bar{\mathbf{A}} \parallel \bar{\mathbf{B}}$ betyder, at $\bar{\mathbf{A}}$ og $\bar{\mathbf{B}}$ er parallelle.

2.2.3 Andre vektorer

Symbolet $\bar{\mathbf{O}}$ står for nulvektoren (den eneste vektor, der ingen retning har). \bar{n} er en normalvektor, dvs. en vektor, der er normal (vinkelret på) til en flade eller en vektor, \hat{n} er en normalenhedsvektor. Endvidere anvendes \bar{t} og \hat{t} for tangentialvektor og tangentialenhedsvektor (dvs. parallel med en flade eller en vektor), samt \bar{d} og \hat{d} for retningsvektorer. I alle disse tilfælde er det underforstået, hvilken retning disse vektorer peger i.

Prikproduktet anvendes til at undersøge om en vektorer er orthogonale og krydsproduktet til undersøgelse for parallelitet.

2.2.4 Differentiering/integrering mht. tiden

Differentiering/integrering mht. tiden af et felt udføres på hver komposant for sig, fx.:

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{A}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} A_x \\ \frac{d}{dt} A_y \\ \frac{d}{dt} A_z \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

2.2.5 Integrering mht. stedet

Differentiering/integrering mht. x , y og z er straks mere kompliceret.

Stedsdifferentialer og stedsintegraler ligger egentlig uden for dette kursus' pensum og forudsætninger, men vi vil få brug for at udføre nogle meget simple kurveintegraler, hvorfor dette omtales kort.

Kurveintegraler

Et felt kan integreres langs en kurve C , som skal være fastlagt via en formel eller udtrykt klart på anden måde. Notationen er:

$$I = \int_C \bar{\mathbf{A}} \bullet d\bar{l} = \int (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \quad (2.18)$$

Resultatet bliver en *skalar*. Af formen ses at $\bar{\mathbf{A}}$'s projektion på et infinitesimalt liniestykke af C skal opsummeres; idéet der anvendes *prikproduktet*. Størrelsen $d\bar{l}$ kaldes *linieelementet*. Dette kan opskrives som:

$$d\bar{l} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Dette gælder kun for kartesiske koordinater. I de andre systemer har linieelementet et andet udseende.

Integralet giver kun noget hvor kurven C løber i samme retning som $\bar{\mathbf{A}}$ har en komposant. Hvis jeg integrerer tyngdefeltet i eksempel 2.3 langs en linie parallelt med x -eller y -aksen bliver resultatet 0. Kun hvis der integreres i z -retningen, fås et resultat forskelligt fra 0.

Eksempel 2.4

Feltet fra eksempel 2.2 (side 13) integreres langs C , som er en linie fra $y = 0$ til $y = 10$ og $x = z = 0$.

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,6x^2 + 10z + 1500 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [\frac{\text{N}}{\text{s}\cdot\text{m}^2}]$$

$$I = \int_C \bar{\mathbf{A}} \bullet d\bar{l} = \int_0^{10} A_y dy = \int_0^{10} 1500 dy = 1500 \cdot [y]_0^{10} = 15.000 \frac{\text{N}}{\text{s}\cdot\text{m}}$$

$$C : \quad 0 \leq y \leq 10 \quad x = z = 0$$

Eksempel 2.5

Ud fra tyngdefeltet i eksempel 2.3 (side 14) kan defineres et skalarfelt, som udtrykker det arbejde, det koster at bevæge 1 kg mod feltet. Dette kaldes iøvrigt et *potentialefelt*.

Arbejde er kraft·vej:

$$\begin{aligned} dU &= \bar{\mathbf{F}} \bullet d\bar{\mathbf{l}} \\ &= (\bar{\mathbf{A}} \cdot m_1 \text{ kg}) \bullet d\bar{\mathbf{l}} \end{aligned} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Arbejdet pr. kg bliver:

$$p = \frac{dU}{m_1 \text{ kg}} = \bar{\mathbf{A}} \bullet d\bar{\mathbf{l}} \quad \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg}} \right]$$

Feltet $\bar{\mathbf{A}}$ kan udtrykkes lidt mere præcist, hvor der ikke ses bort fra z -afhængigheden (se eksempel (2.4), side 14). Feltet kan opskrives som:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k_2}{(k_3+z)^2} \end{Bmatrix} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

Hvor:

$$\begin{aligned} k_2 &= 5,999 \cdot 10^{24} \cdot 6,7 \cdot 10^{-11} = 401,93 \cdot 10^{12} \frac{\text{N}}{\text{kg}} \\ k_3 &= 6,379 \cdot 10^6 \text{ m} \end{aligned}$$

Hvis jeg vil udtrykke potentialet i forhold til jordoverfladen, skal jeg integrere arbejdet fra $z = 0$ og op til punktet, kald det $z = a$.

$$\begin{aligned} p(a) &= \int_{z=0}^{z=a} \bar{\mathbf{A}} \bullet d\bar{\mathbf{l}} = \int_0^a \frac{-k_2}{(k_3+z)^2} dz \\ &= - \int_{k_3}^{k_3+a} \frac{k_2}{w^2} dw = -k_2 \int_{k_3}^{k_3+a} \frac{1}{w^2} dw \\ &= -k_2 \left[-\frac{1}{w} \right]_{k_3}^{k_3+a} = k_2 \left(\frac{1}{k_3} - \frac{1}{k_3+a} \right) \\ &= \frac{a \cdot k_2}{k_3(k_3+a)} \end{aligned} \quad \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg}} \right]$$

Hvis $k_3 \gg a$, fås:

$$p(a) \approx \frac{ak_2}{k_3^2} \quad \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg}} \right]$$

Potentialet vokser med højden over jordoverfladen. Potentialeforskellen vandret mellem

punkter vil være 0, da kurveintegraler i z - og y -retningerne giver 0.

■

Eksempel 2.6

Betræt et felt $\bar{G}(r, \varphi, z, t)$, der har cylindersymmetri og derfor angives i disse koordinater. Feltet er givet ved:

$$\bar{G} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{k_4}{r} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Feltet har kun en φ -komposant, der varierer med radius. Dette kunne illustreres som vist på figur 2.10.

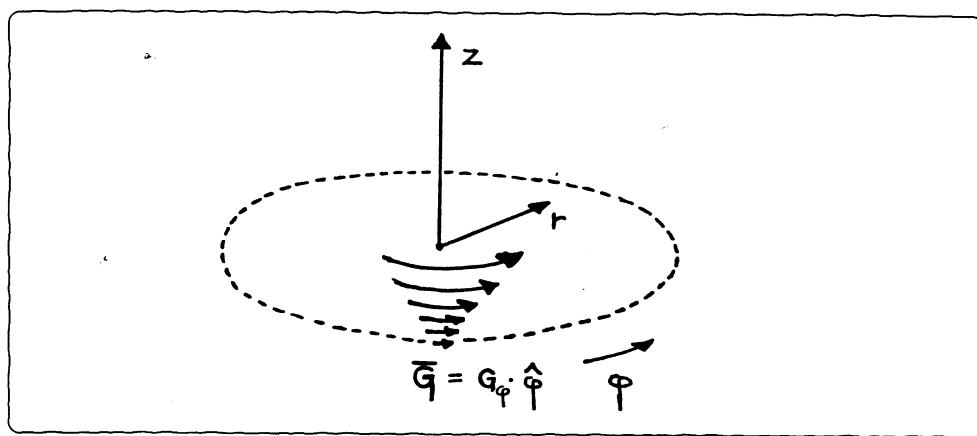


Fig. 2.10. Illustration af G -feltet, som har cylindersymmetri.

Jeg ønsker at integrere dette felt langs en cirkel, der bekvemt angives i cylinderkoordinater således:

$$r = r_c$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$z = z_c$$

Der opskrives

$$I = \int_C \bar{\mathbf{G}} \bullet d\bar{l}$$

I cylinderkoordinater er linieelementet givet ved:

$$d\bar{l} = \left\{ \begin{array}{l} dr \\ r d\varphi \\ dz \end{array} \right\}$$

Og jeg får:

$$\begin{aligned} I &= \int (G_r dr + G_\varphi d\varphi + G_z dz) \\ &= \int_0^{2\pi} G_\varphi \cdot r_c d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{k_4 \cdot r_c}{r_c} d\varphi \\ &= 2\pi \cdot k_4 \end{aligned}$$

Integraler i længderetningen og radialretningen (z og r) giver ingenting. Der fås samme integrale uanset hvilken radius, der vælges i integrationsvejen.

■

Ved hjælp af et vektorfelt beskrevet i et fornuftigt valgt koordinatsystem med fornuftigt valgte akseretninger og origo kan man altså på en overskuelig og klar måde beskrive fx. hvorledes genstande med en vis masse vil opføre sig nær jordoverfladen, og hvilket arbejde det koster at anbringe genstanden i en bestemt position.

Vi husker måske fra skolen, at tyngdefeltet er konservativt, hvilket vil sige, at hvis man fører en genstand fra punkt A til punkt B, koster det samme arbejde, uanset hvilken vej, jeg vælger. Dette betyder også, at det koster arbejdet nul at føre en genstand rundt i en lukket sløjfe.

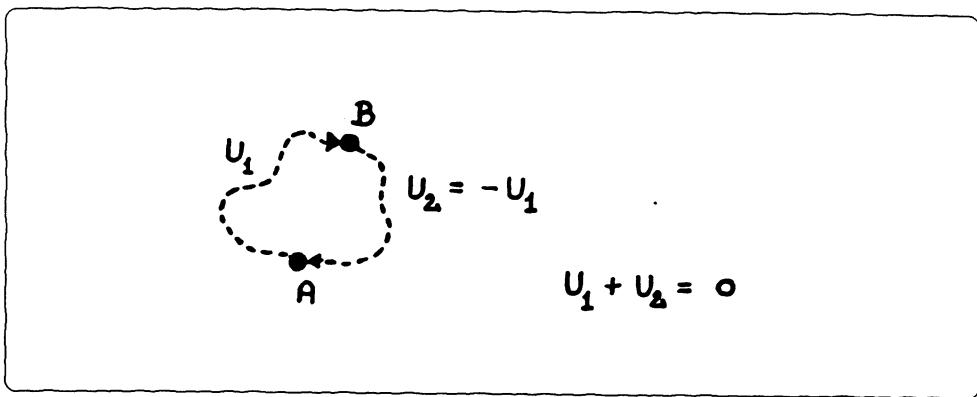


Fig. 2.11. Arbejdet rundt i en lukket sløjfe i et konservativt felt er nul.

Sådanne felter kaldes også *rotationsfri* (eller *irrotationelle*) (en anden udtryksform er $\text{Rot } \vec{A} = \vec{0}$ eller $\nabla \times \vec{A} = \vec{0}$).

De elektriske felter, men *ikke magnetfelter*, vi skal undersøge, antages netop under EQS at være irrotationelle, dvs. $\text{Rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \vec{0}$.

Dette betyder:

1. At der kan defineres et skalart potentialefelt, „spænding“
2. At Kirchhoffs maskelov gælder.

Eller med andre ord, at *kredsløbsteorien faktisk gælder*.

2 Resumé af forudsætninger

2.3 Komplex Symbolsk Notation (KSN)

KSN er en særlig regnemetode, der gør det let at regne på signaler i stationær tilstand.

Metoden grunder sig på teorien om orthogonale funktioner, og sinus og cosinus er netop orthogonale. Der kunne have været valgt andre funktioner, men i dette kursus anvender vi cos og sin af historiske grunde, ligesom alle andre. At cos og sin er orthogonale vil sige:

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \sin(x) \cdot \cos(x) dx = 0 \quad (2.20)$$

Ideen er nu, at ethvert signal kan oplöses i en række stationære sinusser og cosinusser – en Fourier-række. Sinus og cosinus kaldes under ét harmoniske signaler.

Da sin og cos er orthogonale, betyder det, at de udregninger, man foretager, faktisk er de samme som man udfører, når man regner på 2-dimensionelle vektorer. For at lette regnearbejdet laves derfor en analogi, hvor et signal repræsenteres af en vektor, kaldet en *tidsvektor*, en *viser* eller en *fasor*. Dette er *symbolsk notation*.

Regning med 2-dimensionelle tal, kaldes også regning med komplexe tal, og der er ofte en fordel yderligere at notere signalerne som komplexe tal. Dette er *komplex symbolsk notation*.

Med KSN opnås:

1. Stationære harmoniske signaler repræsenteres som vektorer. Lineære operationer kan udføres på disse, såsom $k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b}$. Operationer som $\vec{a} \cdot \vec{b}$ eller $\frac{\vec{a}}{\vec{b}}$ kan ikke udføres
2. Signaler kan i Eulersk notation opskrives som komplexe eksponentiale funktioner, som fx. $A \cdot e^{j\varphi}$
3. Differentiering bliver til multiplikation med $j\omega$, integrering bliver til division med $j\omega$ – altså algebraiske operationer.

Forudsætningerne er:

4. Frekvensen skal være den samme for alle signaler i et udtryk
5. Frekvensen skal angives i rad/sek. – altså som en vinkelfrekvens
6. Signalerne er stationære, dvs. de gentages periodisk med fast periodetid fra $t = -\infty$.

Ved signalanalyse er der ofte brug for at reducere komplicerede trigonometriske udtryk som:

$$A \cos(\omega t + \varphi) + B \cos(\omega t + \theta)$$

Dette er omfattende at udføre vha. de almindelige trigonometriske formler, såsom sum-formlerne og de logaritmiske formler – prøv selv!

Vha. KSN kan problemet løses elegant i grafisk form, se figur 2.12 .

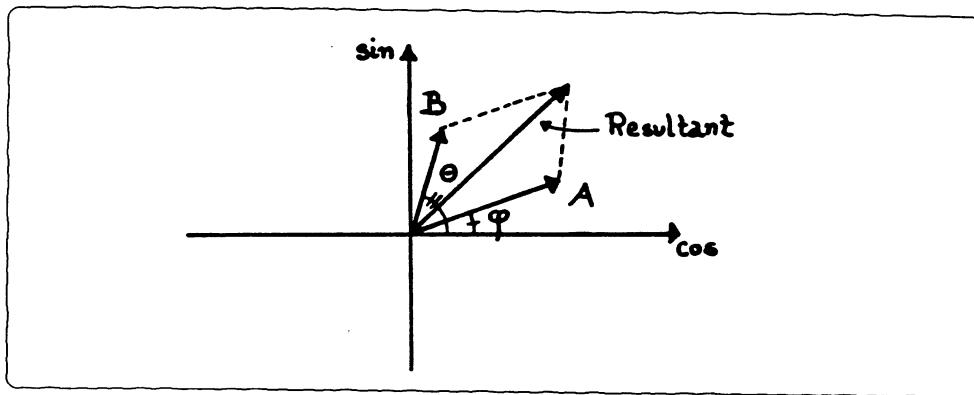


Fig. 2.12. Grafisk løsning af udtrykket i formel (2.20) .

Vha. Eulers formel:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \quad (2.21)$$

vil vi udtrykke signalet $C \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ som:

$$C e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (2.22)$$

der noteres som blot:

$$C \cdot e^{j\varphi} \quad \text{eller} \quad C \angle \varphi \quad (2.23)$$

Den karthesiske form bliver:

$$C e^{j\varphi} = C \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (2.24)$$

Dette er altså blot en *notation*:

Signal:	$C \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}[C \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}]$
Notation:	$C e^{j\varphi} \quad \text{eller} \quad C \angle \varphi$

(2.25)

For at komme fra KSN til de virkelige signaler, vi kan måle med et oscilloscop i laboratoriet, skal man udføre følgende:

2 Resumé af forudsætninger

1. Gang med den underforståede $e^{j\omega t}$
2. Tag realdelen af resultatet.

Da vi har at:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \cos x &= -\sin x \\ \frac{d}{dx} \cos \omega x &= -\omega \sin x = \omega \cos(x + \frac{\pi}{2})\end{aligned}\tag{2.26}$$

Når man differentierer et signal bliver det altså altid fasedrejet 90° (eller $\frac{\pi}{2}$ radianer) og multipliceret med ω . Det er jo underforstået, at „signal“ betyder et cosinussignal.

Signal	Notation	Værdi
$\cos \omega t$	e^{j0}	1
$\sin \omega t$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-j$
$(=\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}))$		
$\frac{d}{dt} \cos \omega t$	$-\omega e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$j\omega$
$(=-\omega \sin \omega t)$		
$\int \cos \omega t dt$	$\frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-\frac{j}{\omega} = \frac{1}{j\omega}$
$(=\frac{1}{\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}))$		

Det er vigtigt, at det er *alinkelfrekvensen*, der anvendes, da:

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad \text{hvor } x \text{ er i radianer}\tag{2.27}$$

men:

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\frac{180}{\pi} \cdot \sin x \quad \text{hvor } x \text{ er i grader}\tag{2.28}$$

fordi formel (2.27) netop er forudsætningen for ovenstående skema.

Eksempel 2.7

Betrægt fx. differentialkvotienten af $\cos x$ i punktet $x = 30^\circ$ eller $x = 0,5236$ rad. „Normalt“ siger vi, at $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$. Vi prøver at beregne en tilnærmelse til differentialkvotienten for $\Delta x = 0,1$, hvor vi regner først i grader, dernæst i radianer.

I grader:

$$x = 30^\circ \quad \Delta x = 0,1$$

$$\frac{d}{dx} \cos x \approx \frac{\Delta \cos x}{\Delta x} = \frac{\cos(30,1^\circ) - \cos(30^\circ)}{0,1} = -0,00873$$

$$-\sin(30^\circ)^\circ = -0,5$$

Forholdet er $\frac{-0,5}{-0,00873} \approx \frac{180}{\pi} = 57,3$.

I radianer:

$$x = 0,5236 \text{ rad.} \quad \Delta x = 0,1$$

$$\frac{d}{dx} \cos x \approx \frac{\Delta \cos x}{\Delta x} = -0,54$$

$$-\sin(0,5236)^\circ = -0,5$$



At KSN er behageligt, skyldes at vi ønsker at:

1. Reducere trigonometriske udtryk
2. Løse differentialligninger.

Som beskrevet i dette afsnitlettes netop disse forehavender.

2 Resumé af forudsætninger

2.4 Forskellige bemærkninger til KSN

Når man taler i KSN, og siger at en spænding er fx. 10 V, betyder det altså noget helt bestemt, nemlig „en cosinusformet spænding med spidsværdien 10 V og med den frekvens, vi er enige om“. Disse 10 V er altså ikke de samme 10 V, vi ville sige, at et batteri var på.

Det for nogle lidt mærkelige udtryk „spændingen er $j10$ V“ betyder „en cosinusformet spænding med amplituden 10 V og faseforskydningen 90° “.

Bemærk, at udtrykket $j10$ V ikke har nogen mening, hvis det er den eneste spænding i et kredsløb. I så tilfælde kunne vi ligeså godt sige 10 V. Hvis der ingen reference, altså noget der sammenlignes med, er, er det absurd at tale om faseforskyning.

At der i notationen er valgt cosinus, realdel og spidsværdi som grundenhed er arbitraert. Nogle anvender fx. sinus, imaginærdel og effektivværdi. Jeg tror, elektroingeniører specielt er glade for angivelsen i effektivværdier.

Vi skal i dette kursus hovedsageligt se på signaler med frekvensen 50 Hz, dvs. signaler af typen:

$$V = C \cdot \cos(100\pi t + \varphi) \quad (2.29)$$

og vi anvender en grafisk gengivelse af signaler som fasorer.

Signalerne:

$$\begin{aligned} V_1 &= A \cos(100\pi t) \\ V_2 &= C \cos(100\pi t + \theta) \end{aligned} \quad (2.30)$$

gengives som vist på figur 2.13, idént V_1 er taget som reference.

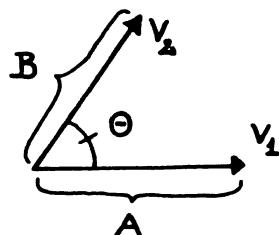


Fig. 2.13. Viserdiagram for signalerne i formel (2.30).

Ved serieforbindelser vælges strømmen som reference, da den er fælles for komponenterne.

Ved *parallelforbindelser* tages *spændingen* som reference, da den er fælles for komponenterne.

Eksempel 2.8

I elværkernes vekselstrømsanlæg opereres der med 3 spændinger, „faser“ kaldet, og en „nul“.

$$R(t) = 311 \cdot \cos(100\pi t)$$

$$S(t) = 311 \cdot \cos(100\pi t - \frac{2\pi}{3})$$

$$T(t) = 311 \cdot \cos(100\pi t - \frac{4\pi}{3})$$

$$O(t) = 0$$

[V]

Dette kan med fasorer illustreres som vist på figur 2.14 .

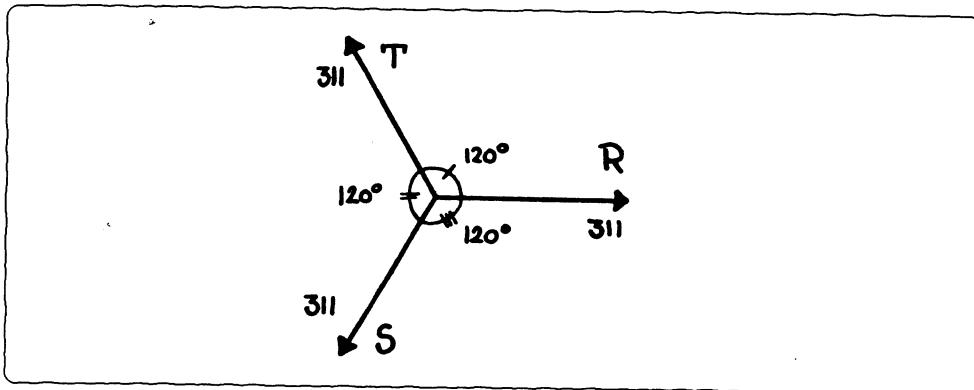


Fig. 2.14. Fasorer for trefaset vekselspænding.

Elfolk kalder i øvrigt dette et viserdiagram og de regner med effektivværdier:

$$\frac{311}{\sqrt{2}} = 220 \text{ V effektiv}$$

I de installationer, hvor fx. kun S-fasen benyttes (sammen med 0), er spændingen altså:

$$S = 331 \angle -120^\circ = -155 - j269 \text{ V}$$

Men som nævnt: Når der ingen speciel reference findes, er det absurd, at sige at spændingen i stikkontakten er $(-155 - j269)$ volt – nej, vi siger, at der er 311 V (eller

220 V effektiv)

Spændingen mellem de 2 faser, fx. S og R bliver:

$$\begin{aligned} S - R &= 311\angle -120^\circ - 311\angle 0^\circ \\ &= (-155 - j269) - (-311) \\ &= -466 - j269 \\ &= 537\angle -120^\circ \text{ V (spids)} \end{aligned}$$

Dette svarer i øvrigt til

$$\frac{537}{\sqrt{2}} \text{ V} = 380 \text{ V (eff.)}$$

■

2.5 Enhedssystemer

I dette kursus anvendes SI, som står for *Système International d'Unités*. SI er et enhedssystem, der blev vedtaget 1960 af CPGM (Conférence Générale des Poids et Mesures) og indført ved lov i Danmark 1/7 1977.

SI grunder sig på det tidligere *rationaliserede Georgi enhedssystem*, der var et MKSA-system – i modsætning til cgs-systemerne, MKSA = Meter, Kilogram, Sekund, Ampere og cgs = centimeter, gram, sekund.

Specielt indenfor området magnetisme fandtes der tidligere mange enheder af højst forskelligt tilsnit, som udtrykte samme fysiske forhold. jeg tror dette skyldes at opdagelsen af magnetismens „sande natur“ har været vanskelig og langvarig – hvilket også kan ses af de mange fysiske love indenfor området, som mere eller mindre siger det samme. Forskere har gjort opdagelse på opdagelse og skabt nye enheder uden at kunne gennemskue, at deres opdagelser var specialtilfælde af tidligere observerede fænomener.

Derfor findes der stadig forældede magnetiske enheder, som forskere holder fast ved, ligesom man kan støde på ældre litteratur med gamle enheder – og sådanne bøger skal ikke være så gamle endda.

Tidligere anvendtes emu = electromagnetic system og units og esu = electrostatic systems of units, der begge var cgs-systemer.

Enhedssystemer kan være *rationaliserede* eller *absolutive*. Forskellen er en faktor 4π (= overfladen af en enhedskugle). Hvis systemet er rationaliseret, optræder de 4π ikke i Maxwells ligninger, der betragtes som grundlovene i feltteorien – men de 4π dukker så

op i andre formler. SI er et rationaliseret system, og vi vil se de 4π i de grundlæggende mediekonstanter for det tomme rum, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m og $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ F/m.

Disse 2 konstanter er relateret til lysets hastighed c , som er lagt fast via definitionen af *meter* og *sekund*:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad [\frac{\text{m}}{\text{s}}] \quad (2.31)$$

Jeg anvender i dette kursus disse kantede enhedsparanteser, selvom SI udtrykkeligt siger, at de skal undgås (selv om de bliver brugt i standarden, der definerer SI!).

I SI findes der 7 grundenheder, hvoraf alle andre kan udledes:

Størrelse	Enhed	Symbol
Længde	m	ℓ
Masse	kg	m
Tid	s	t
Temperatur	K	T
Strømstyrke	A	I
Lysstyrke	cd	I
Stofmængde	mol	n

Undertiden virker nogle af SI-definitionerne lidt kunstige eller abstrakte på os. Eksempelvis defineres 1 A således:

En ampere er den strøm, der løber i to uendeligt lange parallelle ledere anbragt 1 m fra hinanden, som påvirker hinanden med kraften $2 \cdot 10^{-7}$ N pr. meter.

Så var den gamle esu-definition mere håndgribelig og forståelig:

Ved strømstyrken 1 A forstås styrken af den strøm, der på 1 sekund udskiller 1,18 mg sølv af en sølvnitratopløsning.

Her bringes en liste over de størrelser, der anvendes i kurset:

2 Resumé af forudsætninger

Navn	Symbol	Enhed	Andre udtryk
Elektrisk feltstyrke	\bar{E}	$\frac{V}{m}$	
Dielektrisk fluxtæthed	\bar{D}	$\frac{C}{m^2}$	$\frac{A \cdot s}{m^2}$
Magnetisk feltstyrke	\bar{H}	$\frac{A}{m}$	
Magnetisk fluxtæthed (Kraftlinietæthed)	\bar{B}	$\frac{Wb}{m^2}$	$\frac{V \cdot s}{m^2}, T$
Elektrisk ladning	Q	C	$A \cdot s$
Magnetisk flux (Kraftlineantal)	Φ	Wb	$V \cdot s$
Effekt	P	W	$V \cdot A, \frac{J}{s}$
Energi	E	J	$W \cdot s, V \cdot A \cdot s, N \cdot m$
Arbejde	U	J	$W \cdot s, V \cdot A \cdot s, N \cdot m$
Kraft	\bar{F}	N	$\frac{J}{m}, \frac{V \cdot A \cdot s}{m}$
Kapacitet	C	F	$\frac{A \cdot s}{V}, \frac{C}{V}, S \cdot s$
Selvinduktøn	L	H	$\frac{V \cdot s}{A}, \frac{Wb}{A}, \Omega \cdot s$
Permittivitet (Dielektricitetskonstant)	ϵ	F/m	$\frac{A \cdot s}{V \cdot m}, \frac{C}{V \cdot m}$
Permeabilitet	μ	H/m	$\frac{V \cdot s}{A \cdot m}, \frac{Wb}{A \cdot m}$

2.5.1 Mediekonstanter

Vi anvender følgende *mediekonstanter*, som er størrelser, der beskriver elektromagnetiske egenskaber for materialer. Index 0 anvendes til at beskrive *vakuum*, som er en forholdsvis god tilnærrelse til almindelig atmosfærisk luft.

$$\begin{aligned}
 \epsilon &= \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \text{ F/m} \\
 \mu &= \mu_r \cdot \mu_0 \text{ H/m} \\
 \epsilon_0 &= \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ F/m} \\
 \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \\
 \sigma &= \sigma_r \cdot \sigma_{CU} \text{ S/m} \\
 \sigma_{CU} &= 5,8 \cdot 10^7 \text{ S/m} \quad (\text{Ledningsevnen for kobber})
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Navne:

$J = \text{joule}$	$F = \text{farad}$	$\sigma = \text{sigma, konduktivitet}$
$T = \text{tesla}$	$H = \text{henry}$	
$Wb = \text{weber}$	$\mu = \text{my, permeabilitet}$	

C= coulomb ε = epsilon, permittivitet

Bemærkning

Vakuumpermeabiliteten μ_0 er *defineret* til $4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m *eksakt*. Lysets hastighed er i dag målt til $2,99792458 \cdot 10^8$ m/s, og via formel (2.31) fås derfor $\varepsilon_0 = 8,854187817 \cdot 10^{-12}$ F/m. Men vi bruger $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, hvilket ved tilbageregning giver værdien for vakuumpermittiviteten i formel (2.32).

2 Resumé af forudsætninger

3

Elektriske felter

3.1 Ladning

Udgangspunktet for denne feltbeskrivelse er begrebet *ladning*, som er en målelig egenskab ved punkter i rummet. Man kan ikke *se* ladning, men dens virkning har været observeret siden oldtiden. Man fastslog experimentelt, at der fandtes 2 typer ladning: ravladning og glasladning, senere omdøbt til *negative* og *positive ladninger*.

Man kan forestille sig denne egenskab knyttet til elektroner, som hver har ladningen $Q = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, men det er egentlig ikke nødvendig for denne feltbeskrivelse, ligesom man for beskrivelsen af tyngdefeltet (se eksempel 2.3, side 14) ikke behøver forestille sig egenskaben masse tilknyttet nogen elementarpartikel. (Ifølge nyere forskning menes desuden, at elektronen ikke er en elektrisk elementær partikel, men at den består af mindre ladninger, *quarks* af forskellig „farve“).

3.2 Elektrisk feltstyrke

Den (di)elektriske feltstyrke defineres som kraft pr. ladning, i lighed med tyngden, der var kraft pr. masse. Enheden bliver newton pr. coulomb, der er det samme som volt pr. meter:

$$\left[\frac{N}{C} = \frac{J/m}{A \cdot s} = \frac{W \cdot s}{a \cdot s \cdot m} = \frac{V \cdot A}{A \cdot m} = \frac{V}{m} \right] \quad (3.1)$$

Den elektriske feltstyrke beskrives smart ved et vektorfelt, som udtrykker størrelse og retning af den kraft, ladningen $+1\text{ C}$ udsættes for i feltet:

$$\bar{E} = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\bar{F}}{\Delta Q} \quad [\frac{N}{C} = \frac{V}{m}] \quad (3.2)$$

I princippet kan man undersøge, om der findes et elektrisk felt et givet sted ved at anbringe en lille testpartikel med kendt ladning på stedet og derefter måle retningen og størrelsen af den kraft partiklen måtte være udsat for.

At der anvendes en testpartikel ΔQ i stedet for blot $Q = 1\text{ C}$ skyldes den normale fysiske konvention om at målepartikler ikke selv må bidrage med nogen egenskaber og derfor skal være forsvindende; vi ønsker en „ideel observatør“.

Eksempel 3.1

På figur 3.1 er illustreret betydningen af, at der i et område findes et elektrisk felt med styrken 3 V/m .

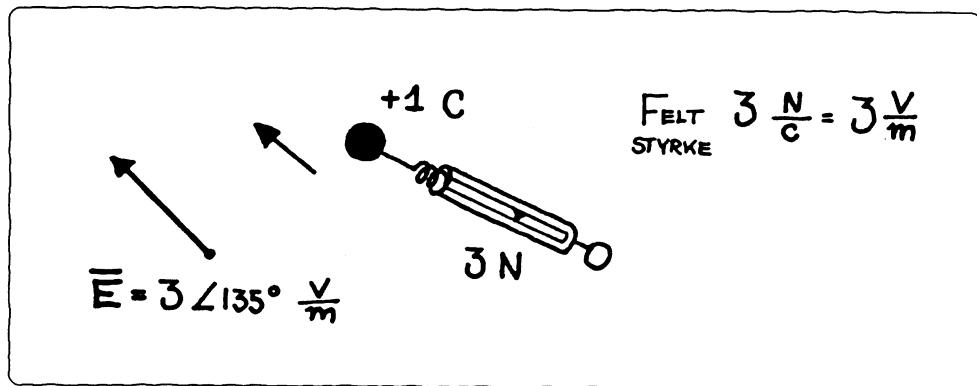


Fig. 3.1. Et elektrisk felt med styrken 3 V/m og retningen 135° vil påvirke en ladning på $+1\text{ coulomb}$ med en kraft på 3 newton i samme retning.



3.3 Coulombs lov

Den forrige feltdefinition siger *ikke* noget om disse E-felters *eksistens*. Definitionen siger blot: *Hvis* en ladning bliver påvirket, så vil vi sige, at der er et felt.

Men den *bliver* påvirket, det er bestemt via en experimentel lov, der i dag kaldes Coulombs lov. Loven blev oprindelig formuleret 1773 af Sir Henry Cavendish (1731-1810), men den blev færdigudviklet 1785 af Charles Augustin de Coulomb (1736-1806).

Coulomb fandt experimentelt ud af følgende:

1. Ens ladninger frastøder hinanden, forskellige ladninger tiltrækker hinanden
2. Kraften virker langs en linie mellem 2 ladninger
3. Kraften er ligefrem proportional med ladningernes størrelse
4. Kraften er omvendt proportional med kvadratet på afstanden mellem ladningerne
5. Kraften er afhængig af mediet, hvori ladningerne befinner sig.

Disse punkter udtrykkes formelt således:

Coulombs lov.

$$\bar{F} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon \cdot d^2} \cdot \hat{d} \quad [N] \quad (3.3)$$

Kraften \bar{F} er et vektorfelt, Q_1 og Q_2 er de 2 ladninger, $4\pi\varepsilon$ er en medieafhængig konstant, d er afstanden mellem Q_1 og Q_2 og \hat{d} er en enhedsretningsvektor. Figur 3.2 illustrerer retningsvektoren.

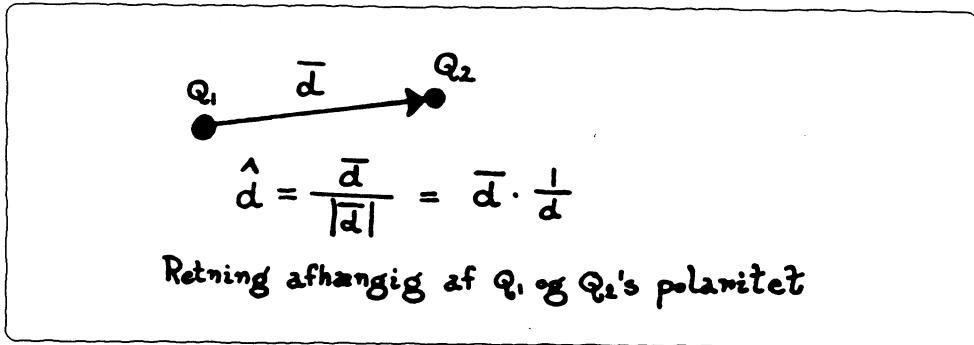


Fig. 3.2. Retningsvektoren fra punktladningen Q_1 til punktladningen Q_2 i Coulombs lov.

Tallet 4π er den tidligere nævnte rationaliserende konstant. Permittiviteten, ϵ opgives gerne relativt til vakuumpermittiviteten (et anden ord er dielektricitetskonstant):

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad [\frac{F}{m}] \quad (3.4)$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ F/m} \quad (3.5)$$

Det ses, at $4\pi\epsilon = \frac{1}{9} \cdot 10^{-9} \cdot \epsilon_r$ F/m. I figur 3.3 er angivet nogle eksempler på ϵ_r .

Luft	1	Olie	2,3	Nylon	3,4
Glas	9	PE	2,25	Teflon	2,1
Dest. vand	81	Jord	4	Porcelæn	6,5
Metaller	≈ 1	Rav	2,7	Titanoxid	100

Fig. 3.3. Eksempler på dielektricitetskonstanter. PE (polyethylén) er det isolationsmateriale, der anvendes i almindeligt coaxialkabel som fx. RG-58.

Dielektricitetskonstanten ϵ_r er en højest uberegnelig og væmmelig størrelse, der egentlig ikke fortjener at blive kaldt en konstant. Den varierer generelt temmeligt meget med temperaturen, trykket, frekvensen, positionen og retningen, ligesom den er ulineær og har hysterese („slør“).

Egentlig burde den opskrives som en matrix, en såkaldt *tensor*:

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{Bmatrix} \quad [\frac{F}{m}] \quad (3.6)$$

Men ϵ for de medier, vi skal se på, er:

1. Homogen (stedsuafhængig)
2. Isotrop (retningsuafhængig)
3. Lineær (feltstyrkeuafhængig)
4. Tidsinvariant (tidsuafhængig)

Vi vil derfor betragte ϵ_r som en konstant. Medier med disse egenskaber kaldes også *HILS-medier* (Homogenous, Isotropic, Linear, Stationary).

Kommer vi op i *optiske frekvenser*, ændrer ϵ_r sig meget og bliver nær 1 for alle stoffer. Vi husker måske fra fysikken beregning af brydningsindex for lystråler gennem prisma og linser. Her indgår ϵ_r , og det var alle med værdier mellem 1,0 og 1,7. Jeg synes at huske at diamant var det højste med $\epsilon_r = 2,5$.

Coulombs lov siger os, at der virkelig eksisterer noget, der hedder et E-felt, da Q_1 jo er påvirket af en kraft. Punktladningen Q_1 tiltrækkes/frastødes af Q_2 – altså må Q_1 befinde sig i et E-felt. Det samme gælder Q_2 – altså må Q_2 også befinde sig i et E-felt.

3.4 Felter om punktladninger

Ladninger skaber altså i sig selv et E-felt iflg. definitionen og Coulombs lov. Enheden C er en stor enhed, som ses af eksempel 3.2

Eksempel 3.2

To punktladninger på hver +1 C er anbragt 1 m fra hinanden i luft. De frastøder hinanden med kraften:

$$|\bar{\mathbf{F}}| = \frac{1 \cdot 1}{4\pi\epsilon_0 \cdot 1} = \frac{1}{\frac{1}{9} \cdot 10^{-9}} = 9 \cdot 10^9 \text{ N}$$

9 GN svarer til 1.000.000 t (en million tons). (1 kp = 9,81 N svarer til tyngdekraften på massen 1 kg).

Felterne vil være:

$$|\bar{\mathbf{E}}| = \frac{|\bar{\mathbf{F}}|}{Q} = \frac{9 \cdot 10^9}{1} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Figur 3.4 illustrerer felterne.

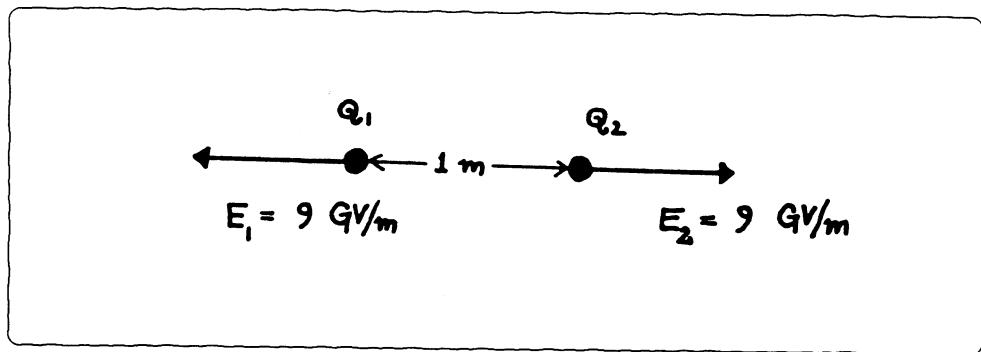


Fig. 3.4. Illustration af felterne ved to punktladninger på hver +1 coulomb. Kun et lille udsnit er vist.

Til sammenligning kan de nævnes, at E-feltet fra Frejlevs senderen ved Aalborg er af størrelsesordenen 1 mV/m.

■

Har vi en punktladning Q_p kan feltet måles ved at anbringe en testladning ΔQ i nærheden:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{\bar{F}}{\Delta Q} = \frac{Q_p \cdot \Delta Q}{4\pi\epsilon \cdot d^2 \cdot \Delta Q} \cdot \hat{d} \\ &= \frac{Q_p}{4\pi\epsilon \cdot d^2} \cdot \hat{d}\end{aligned}\quad [\frac{V}{m}] \quad (3.7)$$

Da ΔQ pr. definition er positiv, vil feltet om en ladning, $+Q_p$ pege udad (frastødning), og om en ladning $-Q_p$ pege indad. Feltet illustreres gerne ved såkaldte *feltlinier*, som overalt danner tangenter til feltvektorerne, og som tegnes tættere sammen jo kraftigere feltet er. Dette er vist på figur 3.5.

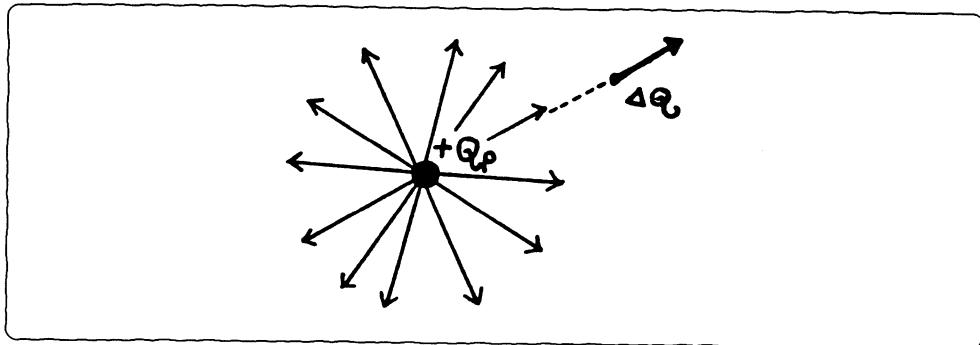


Fig. 3.5. Det elektriske felt om en punktladning illustreret ved feltlinier.

Feltet om punktladninger beskrives bekvemst i kuglekoordinater, da styrken kun afhænger af afstanden. Der er kuglesymmetri:

$$\bar{E} = \frac{Q_p}{4\pi\varepsilon \cdot r^2} \cdot \hat{r} \quad [\frac{V}{m}] \quad (3.8)$$

Feltlinierne starter på plusladninger og ender på minusladninger („feltet går fra plus til minus“), og vi ser, at alle feltlinier udgår fra en ladning. E-feltet siges at være et *kildefelt* (Andre udtryk er, at E-feltet er ikke-solenoidalt, eller $\text{Div } \bar{E} \neq 0$).

Ved hjælp af Coulombs lov kan vi tegne feltliniemønstre omkring enhver konfiguration af ladning, fx. som vist på figur 3.6, hvor feltet om to punktladninger er skitseret ved feltlinier. Feltet kan opskrives:

$$\bar{E}_{\text{total}}(x,y,z) = \bar{E}_{Q+} + \bar{E}_{Q-} \quad [\frac{V}{m}] \quad (3.9)$$

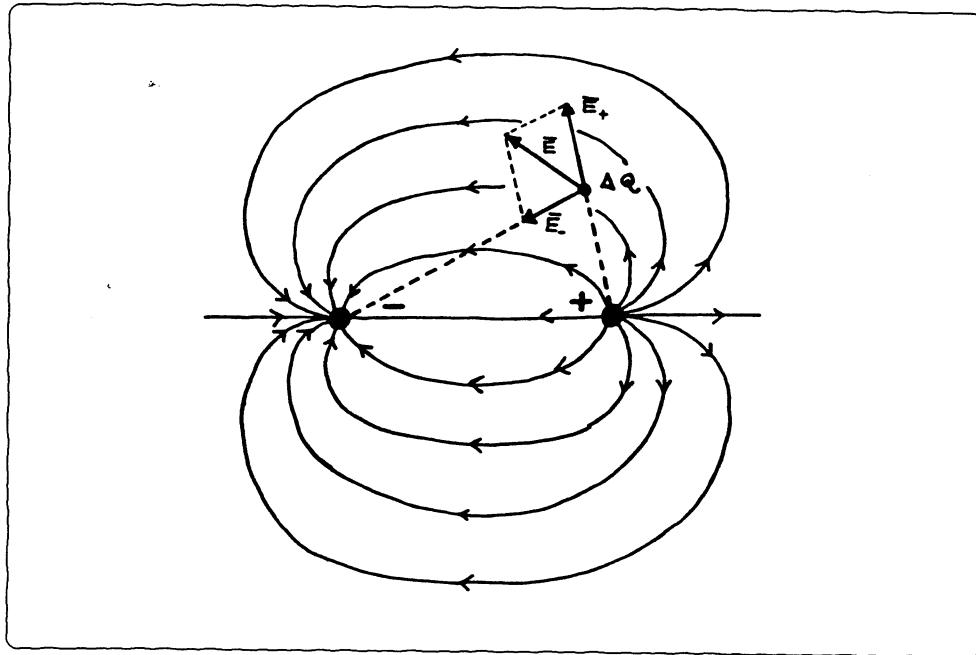


Fig. 3.6. Det elektriske felt i området omkring to punktladninger med modsatte polariteter.

Dette at konstruere feltlinier omkring forskellige ladningsfordelinger er en hel disciplin for sig (nok til et helt kursus), men vi skal ikke gøre mere ud af det her, blot nævne nogle enkelte ting uden bevis.

Ladningstæthed

Normalt regnes ikke med punktladninger, men med et skalarfelt, *ladningstætheden* (eller *den volumare ladning*), der udtrykker ladningsfordelingen:

$$\rho(x,y,z) \triangleq \frac{dQ}{dx dy dz} \quad [\frac{C}{m^3}] \quad (3.10)$$

Hvis et stof er en god leder, har ladningerne en vis mobilitet, og hvis en ledende genstand besidder ladning, vil de selvfølgelig indbyrdes frastøde hinanden, således at de søger længst muligt væk fra hinanden (minimerer det interne felt). Dette betyder, at al ladning på en ideel leder vil samle sig på genstandens overflade. Hvis der er spidse ender på genstanden, vil der være en høj koncentration af ladninger i spidserne.

Overfladeladning

Overfladeladning udtrykkes i coulomb pr. m^2 , og der anvendes symbolet ρ_s .

Følgende kan vises (se figur 3.7):

E-feltet på overfladen af en ideel leder står vinkelret på overfladen og har størrelsen $\frac{\rho_s}{\epsilon} \left[\frac{V}{m} \right]$.

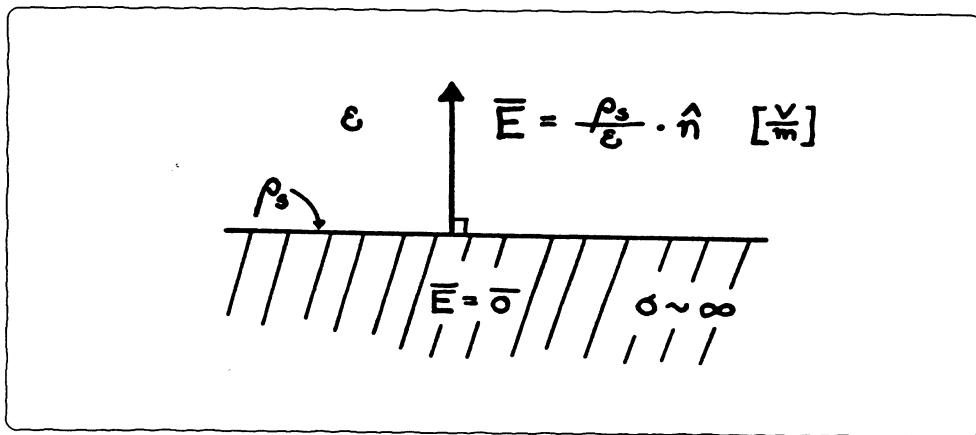


Fig. 3.7. Det elektriske felt nær overfladen af en god leder. Feltet er orthogonalt med overfladen.

3.4.1 Potentiale

Der er udfra det elektriske felt \bar{E} defineret et skalart potentialefelt $V(x,y,z,t)$ med enheden volt [V]. Dette har matematisk baggrund, vi ikke skal komme ind på her, så vi anvender i stedet nogle eksempler.

Hvis der i nogle punkter i rummet adskilt 1 m fra hinanden findes potentialerne 1 V, 2 V, 3 V, ... osv. (se figur 3.8), kan man til dette skalare V -felt beregne det tilhørende vektorfelt ∇V , spændingsgradienten. Man har definitionsmæssigt fastlagt:

$$\bar{E} = -\nabla V \quad [\frac{V}{m}] \quad (3.11)$$

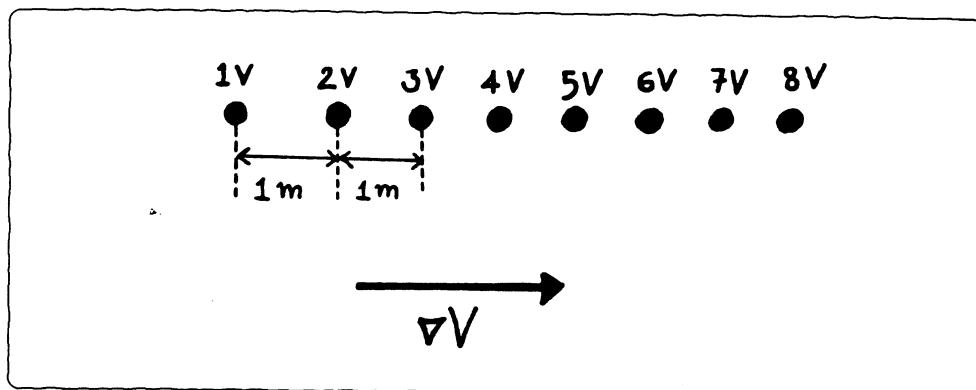


Fig. 3.8. Et skalart spændingsfelt og den tilhørende gradient. Spændingen måles i volt, og spændingsgradienten i volt pr. meter.

Feltvektoren \bar{E} vil altså pege i den modsatte retning af gradientvektoren ∇V , som vist på figur 3.8.

Spændingen fra punkt 0 til punkt A kan beregnes som:

$$V(A) - V(0) = - \int_0^A \bar{E} \bullet d\bar{l} = + \int_0^A \nabla V \bullet d\bar{l} \quad (3.12)$$

Potentialefeltet omkring en positiv punktladning kan vha. formel (3.8) beregnes til:

$$\begin{aligned} V(A) - V(0) &= - \int_0^A \bar{E} \bullet d\bar{l} = \int_{r_A}^{r_0} \frac{K}{r^2} dr \\ &= K \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_0} = K \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_A} \right) \end{aligned} \quad [V] \quad (3.13)$$

Konstanten K er givet ved $K = \frac{Q_p}{4\pi\epsilon_0}$ [V · m].

Man anvender $r_0 = \infty$ som en reference, hvorved haves:

$$\begin{aligned} V(A) - V(0) &= \frac{K}{r_A} \\ V(A) &= \frac{K}{r_A} \\ V(0) &= 0 \end{aligned} \quad [V] \quad (3.14)$$

Potentialefeltet V bliver derved omkring en punktladning:

$$V(A) = \frac{Q_p}{4\pi\varepsilon \cdot r_A} \quad [V] \quad (3.15)$$

Potentialet (= „spændingen“) falder altså med afstanden fra punktet. E-feltet peger væk fra ladningen, og ∇V -feltet peger imod ladningen.

Eksempel 3.3

Vi betragter felterne omkring en ladning på $+4\pi\varepsilon$ coulomb ($= 0,11$ nC), således, at $K = 1$ V·m. Felterne er vist på figur 3.9.

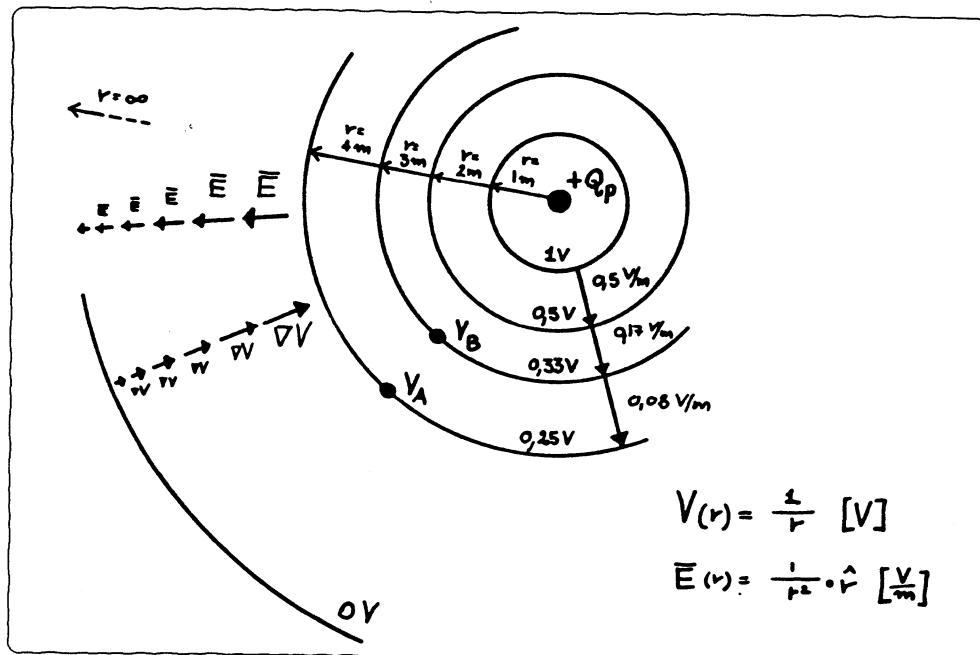


Fig. 3.9. Felterne omkring en punktladning på +0,11 nC.

Spændingen (potentialedifferencen) fra 0 til punktet A bliver:

$$V(A) = V(A) - V(0) = 0,25 - 0 = +0,25 \text{ V}$$

Spændingen fra punkt A til punkt B (=„spændingen i B i forhold til A“) bliver:

$$V_B - V_A = 0,33 - 0,25 = +0,08 \text{ V}$$

Udregnet ved hjælp af E-feltet fås:

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= - \int_A^B \bar{\mathbf{E}} \bullet d\bar{l} = \int_{r_B}^{r_A} \frac{1}{r^2} dr \\ &= \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_B}^{r_A} = \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 0,08 \text{ V} \end{aligned}$$

■

Når feltet V er defineret på denne måde, får det den betydning, at potentialet udtrykker det arbejde, det koster at føre ladningen +1 C fra A til B:

$$V(A) = - \int_0^A \bar{\mathbf{E}} \bullet d\bar{l} = - \frac{U_A}{Q} \quad [\text{V}] \quad (3.16)$$

Enheder: $\left[V = \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \text{m} = \frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot \text{m} = \frac{\text{Nm}}{\text{C}} = \frac{\text{J}}{\text{C}} \right]$

3.4.2 Energien i et elektrisk felt

Det at potentialet i ∞ afstand sættes til 0 V har en „dyb filosofisk betydning“, idet man tænker sig universet uden energi, hvilket ifølge ovenstående betyder, at i starten var alle ladninger jævnt fordelt i hele universet. Ved at fjerne nogle ladninger fra hinanden *fås* energi fra ét område, men dette betyder, at der i et andet område i universet må være *tilført* noget energi, dvs. ladninger er bragt nær hinanden. På denne måde kan der i universet dannes felter. Felterne indeholder energi. Beregnet på denne måde *fås* energien i et elektrisk felt til $\frac{1}{2}Q \cdot V$ [J] (og ikke som man måske skulle tro, blot ud fra enhederne $Q \cdot V$ [A·s·V]).

Vi sagde tidligere (side 39) udfra Coulombs lov, at E-feltlinier starter på $+Q$ ladninger og ender på $-Q$ ladninger. Men hvad men en enkelt ladning, som den i eksempel 3.3? Feltet stråler ud i alle retninger som vist på figur 3.10.

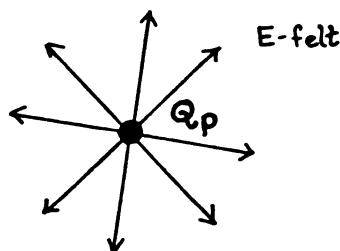


Fig. 3.10. Det elektriske felt omkring en punktladning.

Ja, men der må et eller andet sted i universet være en tilsvarende $-Q_p$ ladning, der er ensom, iflg. foregående fundamentale antagelse. De udstrålende feltlinier går ud til denne $-Q_p$. Dette adskiller elektriske felter fra magnetiske, som vi skal se senere. Elektriske $+Q$ og $-Q$ kan fjernes lige så langt fra hinanden, som man ønsker. Magnetiske poler $+Q_m$ og $-Q_m$ hører altid meget tæt sammen i par, der ikke kan fjernes fra hinanden.

Jeg kan ikke lade være med at nævne her, at en opdagelse i 1931 af P.A.M. Dirac antydede eksistensen af isolerede magnetiske poler. Disse er aldrig blevet observeret, men nyere undersøgelser har godtgjort, at hvis de eksisterer, må de være supertunge (ca. 20 ng eller 10^{16} protonmasser), og hvis de findes på jorden, må de derfor samle sig inde ved Jordens centrum. Man bygger derfor i dag detektorer for sådanne supertunge magnetiske monopoler og gennemsøger hele Jordkloden. I 1975 mente amerikanske forskere at have fundet en monopol, men beviset var for svagt. (Se *Scientific American*, april 1982 „Superheavy Magnetic Monopoles“ pp. 91-99)

Nå, men der dannes altså felter, både når man *fjerner* ladninger fra hinanden, og når man

nærmer dem til hinanden. Har jeg derfor ført coulomb på coulomb sammen i en dynge og skabt et felt, hvor fx. $Q \cdot V = 100 \text{ J}$, er energien i feltet altså kun $\frac{1}{2} \cdot Q \cdot V = 50 \text{ J}$, fordi der samtidig et andet sted i universet er skabt et felt ved fjernelse af ladninger, også på 50 J.

For QES gælder, at E-feltet er konservativt ligesom tyngdefeltet i eksempel 2.3, side 14. Dette er i øvrigt en forudsætning for, at der eksisterer et potentialefelt. Det elektriske potentielle er helt analogt med tyngdepotentialet i eksempel 2.5, side 21.

Det elektriske potentielle (=spændingen) er grundlaget for kredsløbsteorien. Når vi kommer op i højere frekvenser, er antagelsen om, at E-feltet er konservativt, ikke god længere, og kredsløbsteorien falder fra hinanden. At E-feltet er konservativt, betyder:

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0 \quad [V] \quad (3.17)$$

Jeg får derfor samme potentielforskell fra punktet A til punktet B på figur 3.11, uanset hvilken vej jeg integrerer.

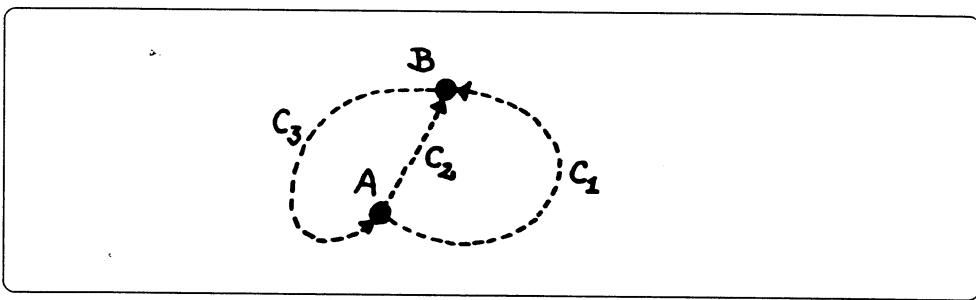


Fig. 3.11. Forskellige integrationsveje fra punkt A til punkt B.

Der gælder:

$$\int_{C_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_{C_2} \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \int_{C_3} \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad [V] \quad (3.18)$$

fordi „summen skal give 0“, når der integreres hele vejen rundt.

Eksempel 3.4

Lad os se på et kredsløbseksempel. I diagrammet på figur 3.12 repræsenterer stregerne punkter i rummet, der er udfyldt med materiale, som har $\sigma = \infty \text{ S/m}$, hvor σ er den specifikke ledningsevne (konduktans). Stregerne er altså ideelle ledere, og E-feltet står således vinkelret på overfladen. Kassen er punkter i rummet, der besidder endelig

ledningsevne. Tværsnitarealet er $A \text{ m}^2$, længde $\ell \text{ m}$. Jeg vil tale om ledningsevnen:

$$G = \frac{A \cdot \sigma}{\ell} \quad [\text{S}]$$

eller modstanden:

$$R = \frac{1}{G} \quad [\Omega]$$

En sådan materialekonfiguration kalder vi „en modstand“

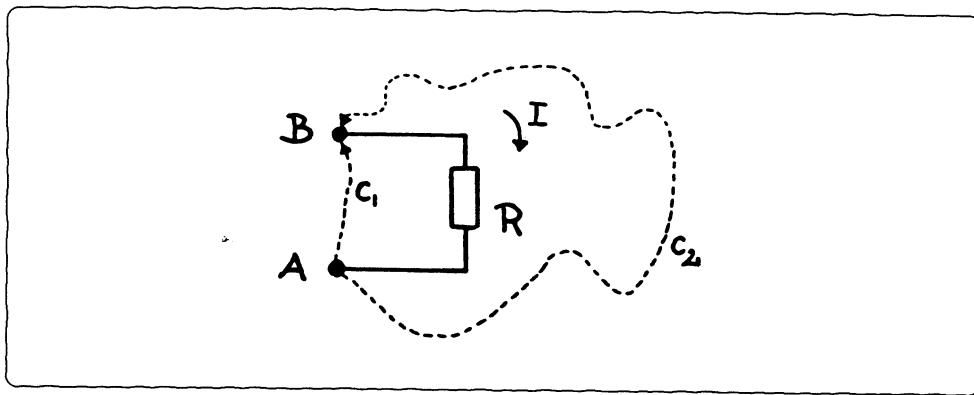


Fig. 3.12. Et udsnit af et elektrisk diagram.

Jeg vil finde spændingen i punkt B i forhold til punkt A , eller „spændingen mellem B og A' “. Denne kan jeg finde ved at integrere E-feltet i området, fx. langs C_1 eller C_2 vist på diagrammet – hvis E-feltet er konservativt, giver det samme resultat.

$$V_B - V_A = - \int_{C_1: A \rightarrow B} \bar{E} \bullet d\bar{l} = - \int_{C_2: A \rightarrow B} \bar{E} \bullet d\bar{l} \quad [\text{V}]$$

Men der findes en integrationsvej, der er smartere end alle andre: Hvis jeg integrerer rundt *lige i overfladen* af stregerne (ledningerne), integrerer jeg hele tiden *på tværs af E-feltet*, da det jo står vinkelret på overfladen (se side 44), og resultatet giver 0 – undtagen for modstanden. Denne modstand er ingen ideel leder, og feltet har derfor en hældning, der gør, at der bliver en feltkomposant i integrationsvejen langs overfladen, se figur 3.13 .

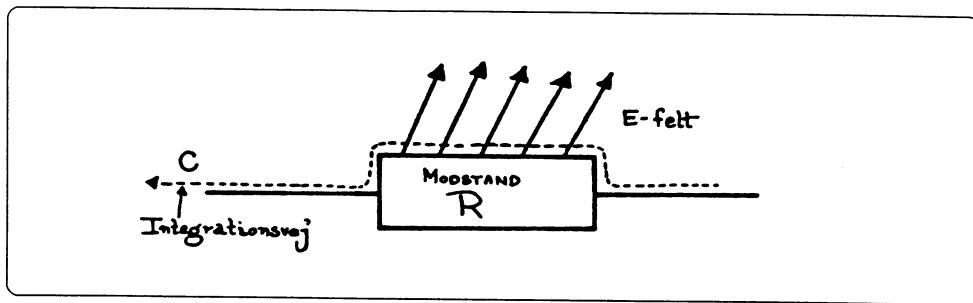


Fig. 3.13. Det elektriske felt ved en modstand.

Denne hældnings størrelse er afhængig af ladningsfordelingen i modstanden, hvilken igen afhænger af A , ℓ og σ for konfigurationen, samt strømmen af ladninger igennem den.

Dette kan være ret omstændeligt at regne på, og derfor har Georg Simon Ohm (1787-1854) én gang for alle regnet ud, hvad det giver, således at vi alle i dag kan regne det ud med almindelig købmandsregning. Ohms lov fra 1826 siger, at potentialedifferencen mellem modstandens ender uanset integrationsvejen er direkte proportional med strømmen igennem konfigurationen og den tidligere udtrykte egenskab, „modstand“ for konfigurationen.

Proportionalitetsfaktoren er, med de enheder, vi anvender i dag, lig med 1, og vi har *Ohms lov*:

$$V = I \cdot R \quad [V]$$

Dette eksempel har nær relation til nogle emner, vi senere skal undersøge: definition af kapacitet, definition af induktion, magnetiske kredsløb.

■

3.5 Kapacitet

Vi betragter en ledende genstand, der har en vis ladning. Ladningen er skabt ved at sende en strøm af ladninger $I = \frac{dQ}{dt}$ [A] ind i genstanden. Derved må der jo være skabt et felt et andet sted i universet iflg. foregående bemærkninger, idet denne strøm kommer et eller andet sted fra – hvor der jo så er fjernet ladninger.

Der dannes et E-felt rundt om genstanden, og vi regner her med, at genstanden er en god leder, så ladningerne fordeler sig ud over genstandens overflade. Konfigurationen er illustreret på figur 3.14.

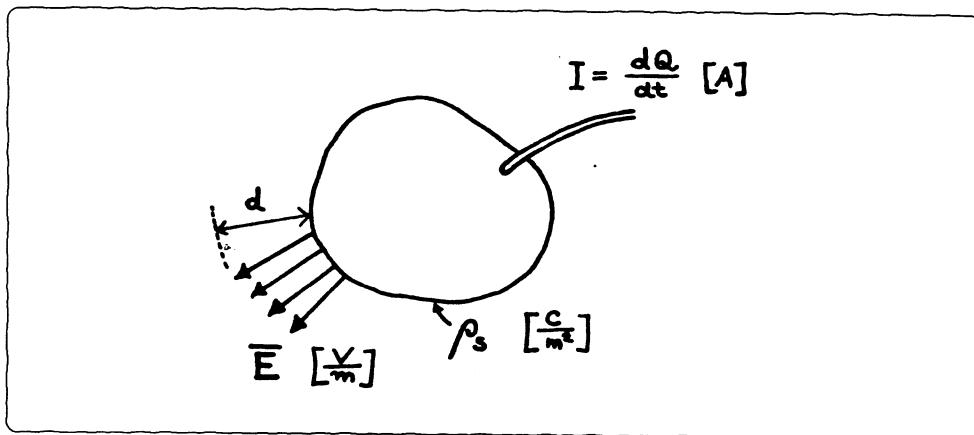


Fig. 3.14. En genstand, der tilføres en elektrisk strøm.

Vi har:

$$\rho_s = \frac{Q}{A} \quad [\frac{C}{m^2}] \quad \bar{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon} \quad [\frac{V}{m}] \quad (3.19)$$

hvor:

Q er den samlede ladning [C]
 A er genstandens overfladeareal [m^2]

Potentialet i afstanden d bliver:

$$\begin{aligned} V(d) &= \int \bar{E} \cdot d\bar{l} = E \cdot d \\ &= \frac{\rho_s}{\epsilon} \cdot d = \frac{Q}{A} \cdot \frac{1}{\epsilon} \cdot d \end{aligned} \quad [V] \quad (3.20)$$

Dette medfører, at:

$$Q = V \cdot \frac{A \cdot \epsilon}{d} \quad [Q] \quad (3.21)$$

Ovenstående udregning er *ikke* den samme, som omkring en punkt-ladning (\vec{E} varierer ikke med $\frac{1}{r^2}$).

Idet vi bruger kædereglen for sammensat differentiation ($\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{da} \cdot \frac{da}{dt}$) fås:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} \quad [A] \quad (3.22)$$

eller:

$$I = \frac{d}{dt} V \cdot C \quad [A] \quad (3.23)$$

hvor:

$$C \triangleq \frac{dQ}{dV} \quad \left[\frac{A \cdot s}{V} = F \right] \quad (3.24)$$

Størrelsen C er emnets *kapacitet*, målt i farad = amperesekunder pr. volt = coulomb pr. volt.

Der er altså en lineær sammenhæng mellem ladningen på genstanden og potentialet i en bestemt afstand. Hvis man kan beregne A , arealet og d , afstanden, anvendes formlen:

$$C = \frac{A \cdot \epsilon}{d} \quad [F] \quad (3.25)$$

Er dette ikke tilfældet anvendes den generelle formel (3.24).

Vi bemærker ligheden med modstandsbegrebet:

$$\begin{aligned} G &= \frac{dI}{dV} & G &= \frac{A \cdot \sigma}{\ell} \\ C &= \frac{dQ}{dV} & C &= \frac{A \cdot \epsilon}{\ell} \end{aligned} \quad [S] \quad [F] \quad (3.26)$$

Grundformlerne til højre viser hvorledes egenskaben beregnes på den lineære standardkonfiguration af materialer. Vi skal senere se at formlerne for selvinduktion følger samme mønster. Begrebet kapacitet er illustreret på figur 3.15.

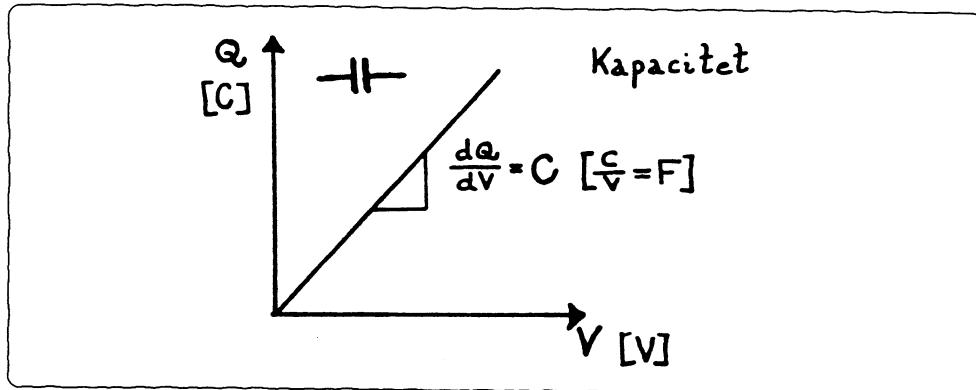


Fig. 3.15. Graf, der viser sammenhængen mellem ladning og spænding på et emne, der har en vis kapacitet.

Eksempel 3.5

Vi beregner kapaciteten af en ledende kugle med radius 9 cm („kapaciteten mod uendelig“). Kuglen svæver i luft, $\epsilon = \epsilon_0$. Overfladen af en kugle er $4\pi r^2$, og vi får følgende udtryk for kapaciteten:

$$C = \frac{A\epsilon}{d} = \frac{4\pi r^2 \cdot \epsilon_0}{r} = 4\pi r \cdot \epsilon_0 \quad [F]$$

Spændingen på kuglen beregnes til:

$$C = \frac{Q}{V} \quad [F]$$

$$\Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi r \cdot \epsilon_0} \quad [V]$$

Dette er samme resultat, som hvis vi havde anvendt potentialeformlen for en punktladning (formel (3.15), side 46). Kapaciteten kan beregnes til:

$$\begin{aligned} C &= 4\pi r \cdot \epsilon_0 = 4\pi \cdot 9 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \\ &= \frac{9}{9} \cdot 10^{-11} = 10 \cdot 10^{-12} \text{ pF} \end{aligned}$$

Hvis jeg fx. i 1 sekund sender $1 \mu\text{A}$ ind i kuglen, vil dens spænding i forhold til 0 være:

$$V = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{1}{10 \cdot 10^{-12}} \cdot 10^{-6} = 10^5 = 100 \text{ kV}$$

■

Pladekondensatoren

I en almindelig pladekondensator er d og A let identificerbare som pladerne afstand og areal. Hvis d er tilstrækkelig lille, er der praktisk taget ingen randfænomener, og hele feltet befinner sig jævnt inde mellem pladerne, som vist på figur 3.16. Det kan vises, at hvis d er af samme størrelsesorden som udstrækningen af pladerne, vil randfænomenerne gøre antagelsen meget forkert.

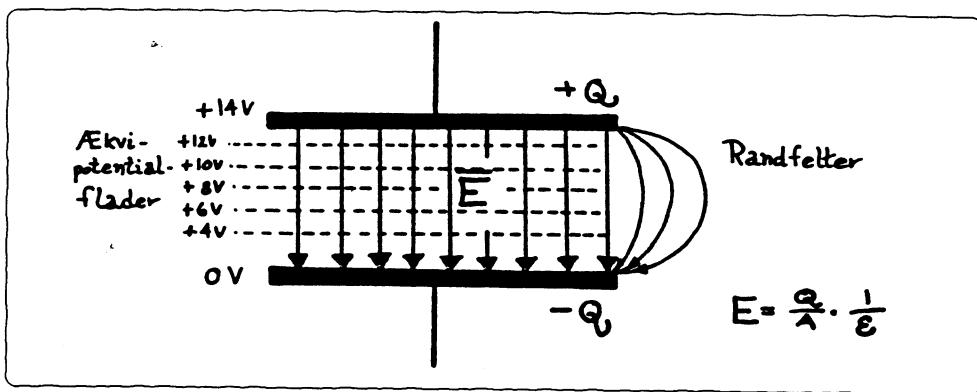


Fig. 3.16. Felterne i en pladekondensator.

Eksempel 3.6

Vi beregner her kapaciteten af en lille keramisk skivekondensator. Skiverne er cirkelformede med diameter 1 cm og de er 0,01 mm fra hinanden, adskilt af et dielektrikum med $\epsilon_r = 6$.

Kapaciteten beregnes til:

$$C = \frac{A\epsilon}{d} = \frac{(0,5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 6}{0,01 \cdot 10^{-3}} = 1,6 \text{ nF}$$



Efter denne forholdvis summariske gennemgang af elektriske quasistationære felter, går vi herefter over til at se på magnetfelter på nogenlunde samme måde.

På side 79 findes en sammenligning mellem elektriske og magnetiske felter, kapacitet, induktion, etc.

4

Magnetiske felter

4.1 Oversigt

Vi skal undersøge flg. felter og størrelser:

- \bar{B} : Den magnetiske fluxtæthed.
Måles i Wb/m^2 eller T (tesla) eller undertiden G (gauss).

$$1 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = 1 \text{ T} = 10^4 \text{ G} \quad (4.1)$$

- \bar{H} : Den magnetiske feltstyrke.
Måles i A/m , undertiden \emptyset (ørsted).

$$1 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 4\pi \cdot 10^{-3} \emptyset \quad (4.2)$$

- $\bar{\Phi}$: Den magnetiske flux eller kraftlinietallet.
Måles i Wb, undertiden Mx (maxwell).

$$1 \text{ Wb} = 10^8 \text{ Mx} \quad (4.3)$$

- μ Permeabiliteten, en materialekonstant.
Måles i H/m (henry pr. meter), som er det samme som Wb/Am .
Opgives som regel relativt til μ_0 , vakuumpermeabiliteten:

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0 \quad [\frac{\text{H}}{\text{m}}] \quad (4.4)$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad (4.5)$$

Den relative permeabilitet, μ_r er dimensionsløs.

Symbolet \bar{B} betegner en tredimensionel vektorfunktion, og det skal forstås som:

$$\bar{B}(x,y,z,t) = \begin{Bmatrix} B_x \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)} \\ B_y \cdot e^{j(\omega t + \varphi_y)} \\ B_z \cdot e^{j(\omega t + \varphi_z)} \end{Bmatrix} \quad [\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}] \quad (4.6)$$

Vi har altså hele to vektornotationer blandet ind i det: Dels de rumlige koordinater, og dels tidsvektornotationen hidrørende fra KSN. De firkantede parenteser [] bliver anvendt til at angive dimensionen af udtryk. Jeg anser det for ret vigtigt for forståelsen hele tiden at holde rede på, hvilken enhed der „kommer ud“ af en formel:

Vi vil anvende forkortede skrivemåder, hvor det ikke kan misforstås.

4.2 Magnetfelter

4.2.1 B-feltet

Anbringes et strømmoment, $I d\bar{l}$ i et magnetfelt, vil det iflg. Laplaces lov blive påvirket af en kraft:

$$d\bar{F} = I d\bar{l} \times \bar{B} \quad [\text{N}] \quad (4.7)$$

Dette er „BIL-reglen“ fra skolens fysiktimer, blot i vektornotation.

Et strømmoment er et lille orienteret liniestykke $d\bar{l}$ [m], hvori der løber en strøm I [A]. Vi husker også „lillefingerreglen“:

Hold højre hånd med fingrene i strømmens retning og magnetfeltet ind i håndfladen; ledningen vil da slå ud til lillefingersiden.

Lapaces lov og lillefingerreglen er illustreret på figur 4.1 .

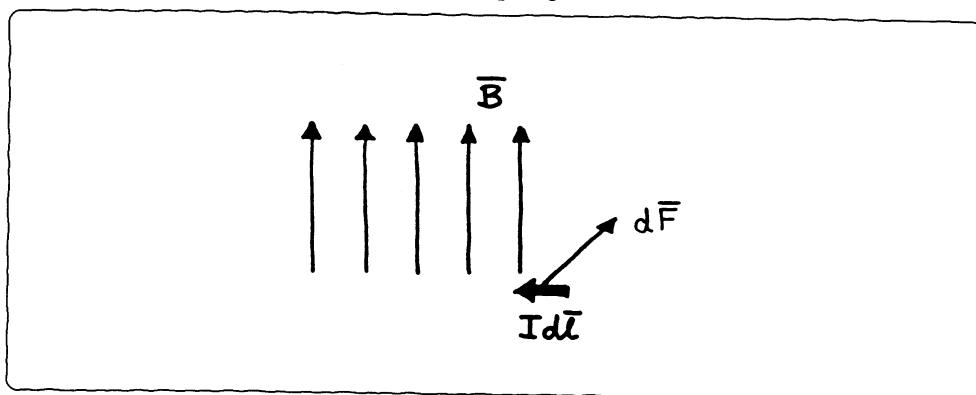


Fig. 4.1. Hvorledes et magnetfelt påvirker en strømførende ledning med en kraft.

Ovenstående kan tages som udgangspunkt for definitionen af den magnetiske fluxtæthed \mathbf{n} . B-feltet i et givet punkt i rummet udtrykker størrelse og retning af den kraft, et enhedsstrømmmoment i punktet vil være udsat for:

$$\bar{\mathbf{B}} \triangleq \lim_{I\bar{d} \rightarrow 0} \frac{|\bar{\mathbf{F}}|}{|I\bar{d}|} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad [\frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}] \quad (4.8)$$

Enhedsregning giver:

$$\left[\frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \frac{\text{J}}{\text{m} \cdot \text{A} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \right]$$

Normalenhedsvektoren $\hat{\mathbf{n}}$ er givet ved:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\bar{\mathbf{F}} \times d\bar{l}}{|\bar{\mathbf{F}} \times d\bar{l}|} \quad (4.9)$$

Biot-Savarts lov

B-feltet i et punkt P i nærheden af en strømførende ledning beregnes ved Biot-Savarts lov (se figur 4.2):

$$\bar{\mathbf{B}}(P) = \frac{\mu}{4\pi} \oint_C \frac{I\bar{d} \times \hat{\mathbf{d}}}{d^2} \quad [\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}] \quad (4.10)$$

hvor:

P er punktet, hvor feltstyrken beregnes

\bar{d} er en retningsvektor fra $d\bar{l}$ til P

d er længden af \bar{d}

$\hat{\mathbf{d}}$ er en retningsvektor for \bar{d}

Vi har:

$$\begin{aligned} \bar{d} &= d \cdot \hat{\mathbf{d}} \\ d &= \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

B-feltet ses at være *afhængig* af det omgivende medium, da μ indgår i formlen. Jo større μ , desto kraftigere felt.

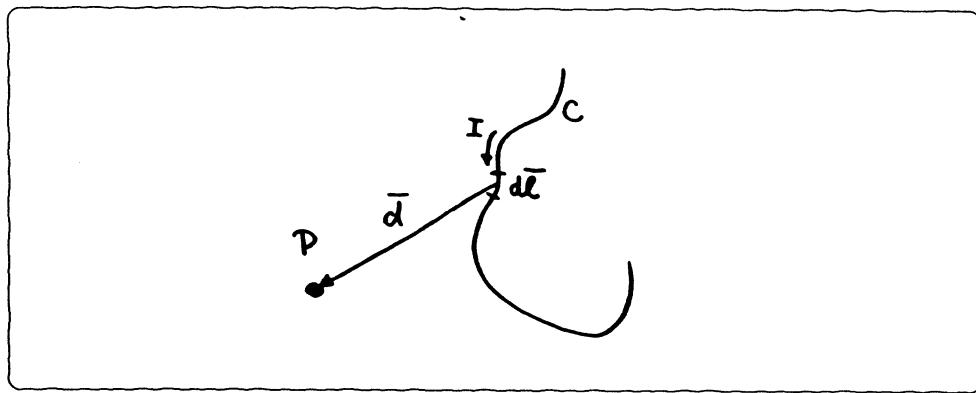


Fig. 4.2. Illustration af kurver og vektorer, der indgår i Biot-Savarts lov.

Endvidere defineres *kraftlinetallet* eller *fluxen*:

$$\Phi = \int_S \bar{B} d\bar{a} \quad [\text{Wb}] \quad (4.12)$$

Hvis B -feltet er konstant over den anvendte flade S , fås det simpelere udtryk:

$$\Phi = |\bar{B}| \cdot A \quad [\text{Wb}] \quad (4.13)$$

hvor A står for arealet i m^2 , og B -feltet forudsættes at være normalt til fladen.

Notationen for fladeintegralet skal forstås således (se figur 4.3):

$$\int_S \bar{B} d\bar{a} = \iint \bar{B} \bullet \hat{n} dA \quad [\text{Wb}] \quad (4.14)$$

hvor \hat{n} er en positiv normalenhedsvektor til fladen S , og dA er *arealelementet*.

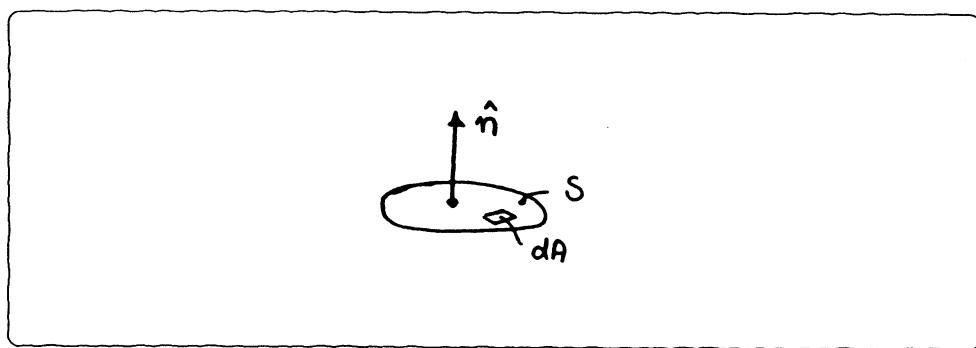


Fig. 4.3. Størrelser, der indgår i notationen for et fladeintegral.

Hvis fladen fx. er placeret i xy -planet fås:

$$\int_S \bar{B} d\bar{a} = \iint \bar{B} \bullet \hat{z} dy dx = \iint B_z dy dx \quad [\text{Wb}] \quad (4.15)$$

Resultatet af integralet bliver en skalar. Enheden for \bar{B} bliver multipliceret med m^2 .

Ampères resultat

Biot-Savarts lov er for indviklet til at bruges i praksis i mange tilfælde. Vi vil én gang for alle regne ud, hvad feltet er omkring en uendelig lang lige leder, der fører strøm. Denne model kan anvendes i mange tilfælde - også selvom lederen ikke er uendelig. Vi kommer derved frem til Ampères lov. Faktisk har Ampère også lavet Biot-Savarts lov, så begge love burde hedde Ampères lov, men det er almindeligt at kalde lovene de navne, jeg angiver her (André-Marie Ampère 1775-1836).

Magnetfeltet om en lang, lige ledning

Vi udregner B -feltet i et punkt P , og anvender bekvemt cylinderkoordinater, hvor ledningen placeres i z -aksen. Ledningen er vist på figur 4.4.

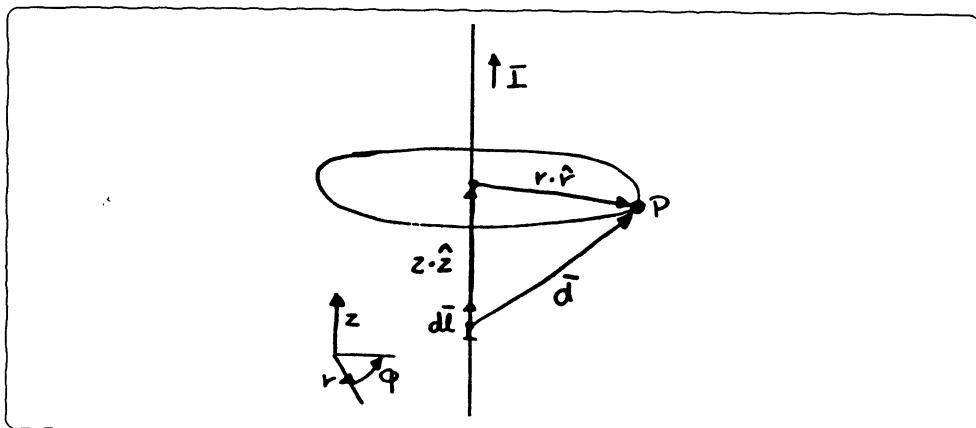


Fig. 4.4. En uendelig lang lige strømførende ledning. Orientering og type af det anvendte koordinatsystem er angivet.

Vi regner nu:

$$\bar{B}(P) = \frac{\mu}{4\pi} \oint_C \frac{I d\bar{l} \times \hat{d}}{d^2} \quad \left[\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \right] \quad (4.16)$$

hvor:

$$\begin{aligned} d\bar{l} &= dz \cdot \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{d}} &= \frac{\bar{\mathbf{d}}}{d} = \frac{z \cdot \hat{\mathbf{z}} + r \cdot \hat{\mathbf{r}}}{\sqrt{z^2 + r^2}} \\ d^2 &= z^2 + r^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Krydsproduktet under integraltegnet bliver:

$$d\bar{l} \times \hat{\mathbf{d}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\varphi} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & dz \\ \frac{r}{d} & 0 & \frac{z}{d} \end{vmatrix} \quad (4.18)$$

Vi får nu ved at indsætte de aktuelle størrelser i (4.16):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}} &= \frac{I\mu}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r \cdot \hat{\varphi}}{d^3} dz \\ &= \frac{I\mu}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r}{(z^2 + r^2)\sqrt{z^2 + r^2}} dz \cdot \hat{\varphi} \\ &= \frac{I\mu}{4\pi} \cdot \left(\frac{2}{r}\right) \cdot \hat{\varphi} \\ &= \frac{I\mu}{2\pi r} \cdot \hat{\varphi} \end{aligned} \quad [\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}] \quad (4.19)$$

Vi ser, at B-feltet kun har en φ -komposant, og at denne er konstant for konstant radius. B-feltet afhænger af strømmen, af μ og af radius (= den vinkelrette afstand fra lederen).

4.2.2 H-feltet

Vi definerer nu et medieuafhængigt magnetfelt: Den magnetiske feltstyrke, $\bar{\mathbf{H}}$:

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \bar{\mathbf{B}} \quad [\frac{\text{A}}{\text{m}}] \quad (4.20)$$

Det til B-feltet i ligning (4.19) hørende H-felt kan skrives:

$$\bar{\mathbf{H}} = H_\varphi \cdot \hat{\varphi} = \frac{I}{2\pi r} \cdot \hat{\varphi} \quad [\frac{\text{A}}{\text{m}}] \quad (4.21)$$

Ampères lov

Ampères lov opskrevet med vektornotation er givet ved:

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = I_{\text{total}} \quad [\text{A}] \quad (4.22)$$

Cirkulationen af den magnetiske feltstyrke er lig med den totale omsluttede strøm.

Viser at H -feltet kan siges at ligge som ringe om en strømførende ledning, og at højrehåndsreglen gælder (se figur 4.5):

Grib om lederen med højre hånd med tommelfingeren i strømmens retning. Magnetfeltet peger da i fingerspidsernes retning.

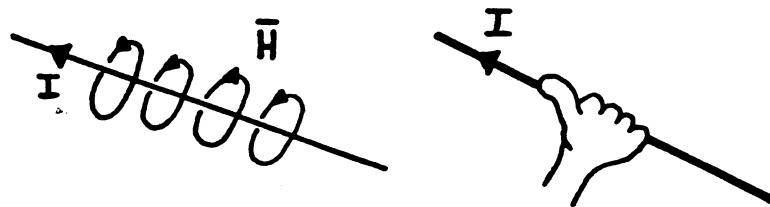


Fig. 4.5. Illustration af højrehåndsreglen for magnetfelter.

Ampères lov gælder for en vilkårlig valgt kurve i et strømfelt, \bar{J} [$\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$], der ikke nødvendigvis behøver at være indeholdt i en ledning, se figur 4.6.

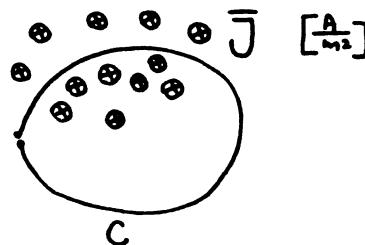


Fig. 4.6. Ampères lov.

I mange tekniske tilfælde er strømmen ikke opgivet som et strømfelt, men som et antal

viklinger, hvori der løber samme strøm:

$$I_{\text{total}} = \int_S \bar{\mathbf{J}} \cdot d\bar{a} = N \cdot I \quad [\text{Av}] \quad (4.23)$$

Av står for *amperevindinger*.

Formelt siger Ampères lov os, hvordan man kan regne strømmen ud, når man kender H-feltet; men vi bruger lige så tit loven omvendt: Da vi ved, at feltlinierne ligger som ringe med konstant felt i konstant afstand, kan vi udregne H_φ når vi kender strømmen.

Hvis vi som kurve vælger en cirkel, bliver integralet simpelt, hvis feltet kun har en φ -komposant, se figur 4.7 :

$$\oint_C \hat{\varphi} d\bar{l} = \text{omkredsen} = 2\pi r \quad [\text{m}] \quad (4.24)$$

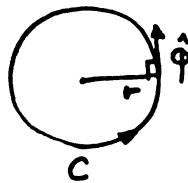


Fig. 4.7. Integrationsvejen rundt i en cirkel.

Hvis der igennem C går N ledninger med samme strøm fås:

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = N \cdot I = H_\varphi \cdot 2\pi r \quad [\text{A}] \quad (4.25)$$

$$H_\varphi = \frac{N \cdot I}{2\pi r} \quad [\frac{\text{A}}{\text{m}}] \quad (4.26)$$

For en spole som vist på figur 4.8 gælder også en højrehåndsregel:

Fat om spolen med højre hånd, fingerspidserne i strømmens retning. Magnetfeltet peger da i tommelfingerens retning.

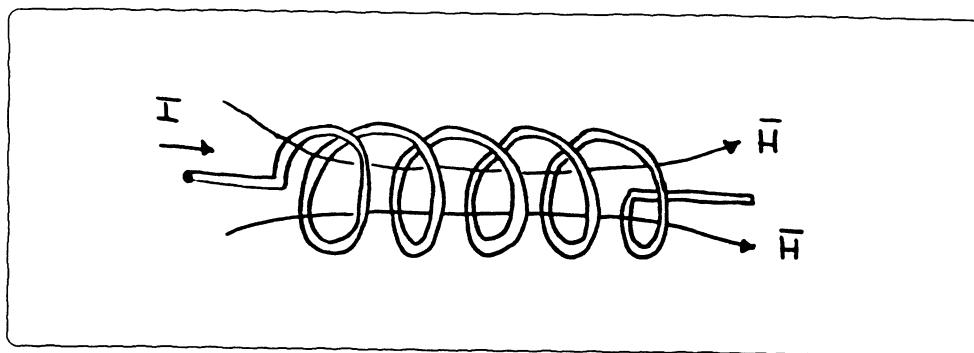


Fig. 4.8. En spole med flere vindinger.

I mange tilfælde findes der en integrationsvej, der er smartere end alle andre, i lighed med eksempel 3.4, side 49.

Når vi beregner transformerkerner integrerer vi rundt den vej, hvor vi ved, at fluxen findes, fordi μ_r her er høj, se figur 4.9.

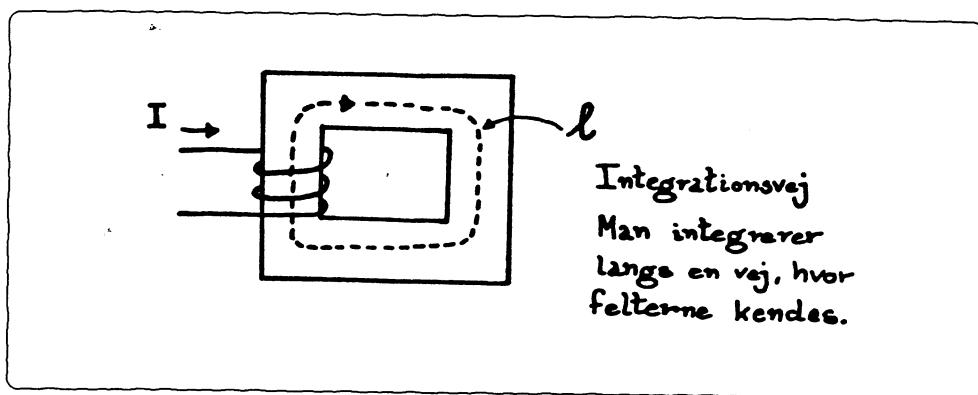


Fig. 4.9. En transformatorkerne.

Vi kunne selvfølgelig vælge en vej rundt ude i luften, men der kender vi ikke størrelserne, så det kan vi ikke beregne – det kan vi derimod i jernet.

4.3 Ampère og Faraday

I 1831 opdagede Faraday, at et varierende magnetfelt kunne skabe en strøm. Dette står i modsætning til Ørsteds duale opdagelse i 1820: En konstant strøm kan skabe et magnetfelt. Ligesom Ampère opfandt udtrykket „magnemotorisk kraft“, fandt Faraday på „elektromotorisk kraft“. Disse udtryk er lidt misvisende; det drejer sig jo ikke om kræfter.

Faradays lov siger:

$$\text{emf} = -\frac{d}{dt}\Phi \quad [\text{V}] \quad (4.27)$$

Den inducerede emf („spænding“) er lig med minus den tidsaflede af kraftlinietallet. Kraftlinietallet kan ændres på flere måder:

1. Det kan varieres elektrisk
2. Man kan flytte permanente magneter i nærheden
3. Man kan bevæge den ledning, spændingen induceres i.

Vi skal her kun besætte os med metode 1. I forbindelse med *transducere* skal vi undersøge de andre metoder.

Faradays lov anvendes ofte sammen med Lenz' lov:

Den inducerede spænding har en sådan retning, at den vil drive en strøm, der forsøger at fjerne det magnetfelt, der har skabt den.

Hvis vi imidlertid anvender vektornotation, slipper vi for en masse forklaringer, og fortægnene kommer helt af sig selv. Derfor vil vi nu skrive både Ampères og Faradays love op i den form, vi skal anvende dem her. De kredsløb, vi skal behandle, er karakteriseret ved:

1. Integrationsvejene er fast opkoblede simple geometriske figurer
2. Vi regner felterne konstante langs kurverne
3. Vi regner felterne konstante over de betragtede arealer
4. Integrationskurverne har ofte N vindinger, dvs. N cirkler lagt oven i hinanden, elektrisk serie forbundne.

4.3.1 Ampères lov

Ampères lov (se figur 4.10) er i vektorform givet ved:

$$\text{mmf} = \oint_C \bar{H} d\bar{l} = \int_S \bar{J} d\bar{a} \quad [\text{A}] \quad (4.28)$$

Opskrevet på „transformerform“ lyder loven:

$$\text{mmf} = H \cdot \ell = n \cdot I \quad [\text{Av}] \quad (4.29)$$

Enheden [Av] er *amperevindinger*, størrelsen $N \cdot I$ er den totale strøm, og ℓ [m] er længden af integrationsvejen:

$$N \cdot I = \int_S \bar{J} d\bar{a} \quad [\text{A}] \quad (4.30)$$

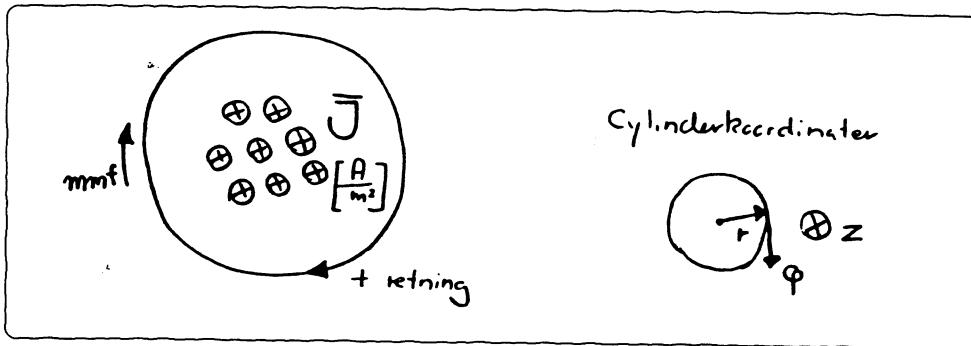


Fig. 4.10. Ampères lov.

Eksempel 4.1

En ledning, der bærer 10 A, er viklet 10 gange omkring en jernkerne. Den magnemotoriske kraft i kernen fås ved at integrere rundt som vist på figur 4.11. En anden vej uden for kernen giver samme resultat for samme ℓ .

$$\text{mmf} = N \cdot I = 100 \text{ Av}$$

$$H \cdot \ell = \text{mmf} = 100 \text{ Av}$$

$$H = \frac{\text{mmf}}{\ell} = \frac{100}{0,5} = 200 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

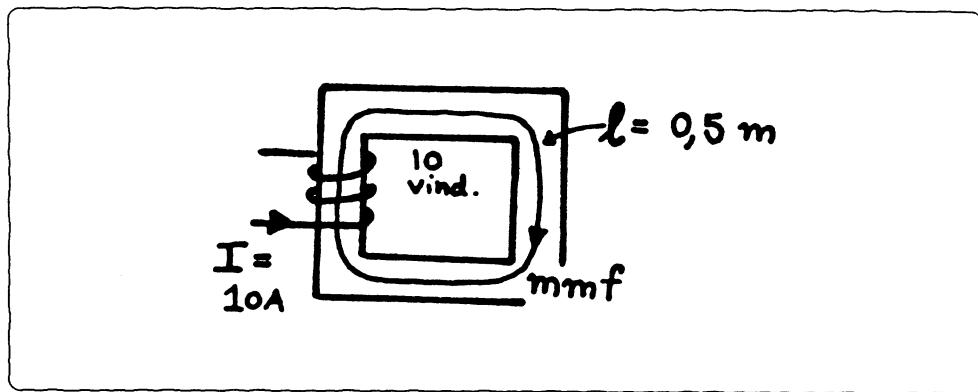


Fig. 4.11. Den magnemotoriske kraft i en transformørkerne.

■

4.3.2 Faradays lov

Faradays lov (se figur 4.12) er i vektorform givet ved:

$$\text{emf} = \int_C \bar{E} d\bar{l} = \int_S -\frac{d}{dt} \bar{B} d\bar{a} \quad [\text{V}] \quad (4.31)$$

Opskrevet på „transformerform“ lyder loven:

$$\text{emf} = -\frac{d}{dt} \Phi \cdot N = -\frac{d}{dt} BAN \quad [\text{V}] \quad (4.32)$$

Størrelsen A er arealet [m^2], der omsluttes, N er antallet af gange C går rundt i kanten af A . Størrelsen $\Lambda = \Phi \cdot N = BAN$ kaldes *den omfattede flux*.

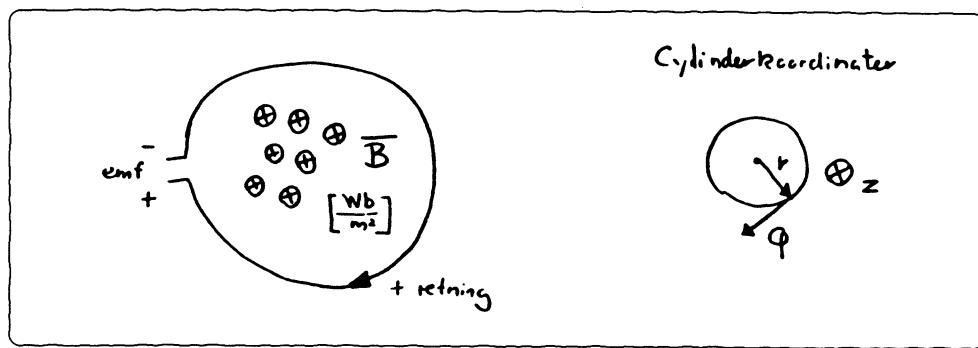


Fig. 4.12. Faradays lov.

Eksempel 4.2

Vi har en spole (se figur 4.13) med 10 vindinger med radius 1 m, der er placeret i et felt, der varierer som t , og som er givet ved:

$$B = t \quad \left[\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \right]$$

Vi har dermed arealet $\pi \text{ m}^2$, og $N = 10$, og den inducerede spænding bliver:

$$\begin{aligned} \text{emf} &= -\frac{d}{dt}\Lambda = -\frac{d}{dt}BAN \\ &= -1 \cdot \pi \cdot 10 = -10\pi \text{ V} \end{aligned}$$

Fortegnet vil blive som vist på figuren.

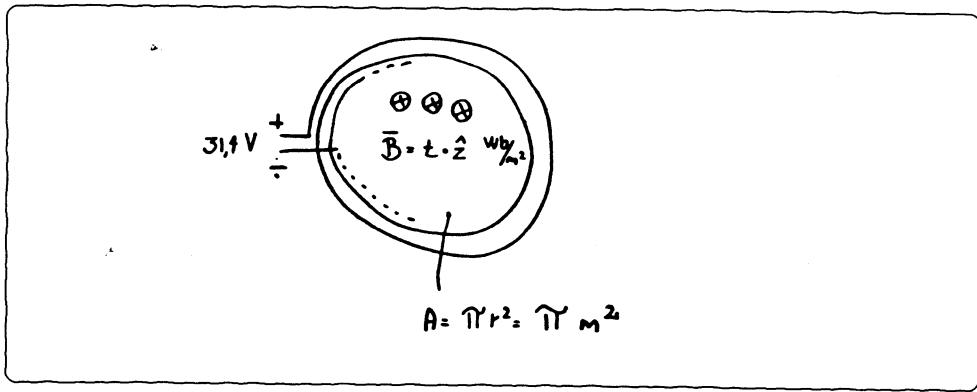


Fig. 4.13. En spole, hvori der induceres en elektromotorisk kraft.

4.4 Selvinduktion

Ampères lov siger, at en varierende strøm i en ledning skaber et varierende magnetfelt, \bar{H} . H -feltet svarer til et bestemt B -felt, som igen svarer til et bestemt Φ -felt, for en betragtet flade, der er den flade, der omsluttet af ledningen, se figur 4.14.

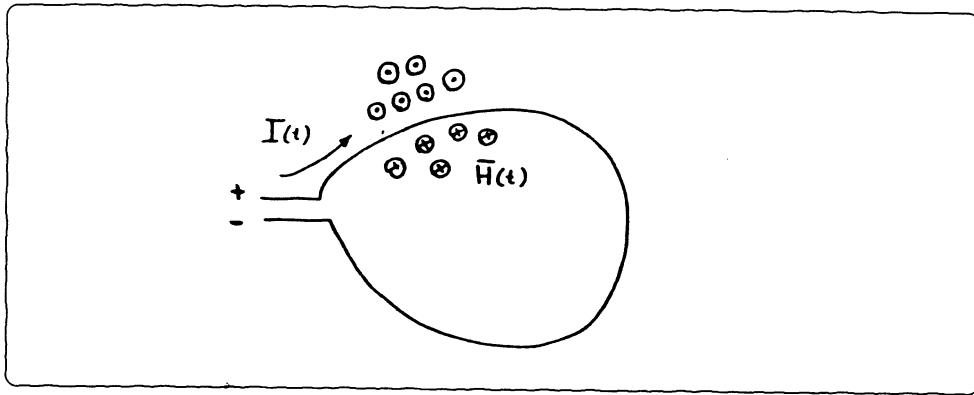


Fig. 4.14. En ledningssløjfe, hvori der løber en vekselstrøm.

Hvis vi regner μ konstant og $\bar{H}(t)$ jævn i hele fladen, kan kraftlinetallet beregnes ved:

$$\Phi(t) = \mu \cdot H(t) \cdot A \quad [\text{Wb}] \quad (4.33)$$

hvor $H(t)$ er H -feltets amplitude, og A er sløjfens areal.

Ifølge Faradays lov induceres der en emf („spænding“) i samme ledning, som er givet ved:

$$\text{emf} = -\frac{d}{dt} \Phi \cdot N = \oint_C \bar{E} d\bar{l} \quad [\text{V}] \quad (4.34)$$

Polariteten bliver som vist på figuren.

For ΦN anvendes ofte i disse sammenhænge enheden *weber vindinger* [Wbv]. Hvis der findes en vej med konstant μ , hvor al feltet ligger indenfor arealet A , kan (4.33) skrives:

$$\Phi(t) = \mu \cdot \frac{N \cdot I(t)}{\ell} \cdot A \quad [\text{Wb}] \quad (4.35)$$

Når (4.35) indsættes i (4.34) fås:

$$\text{emf} = -\frac{d}{dt} I(t) \cdot \frac{\mu N A}{\ell} \cdot N \quad [\text{V}] \quad (4.36)$$

Den sidste del af (4.36) er en konstant, som har enheden henry [H], som er det samme

som weber pr. ampere [$\frac{\text{Wb}}{\text{A}}$]. Størrelsen kaldes kredsens *selvinduktion*.

Sidste del af (4.36) kan vha. (4.35) omskrives til:

$$\frac{\mu N A}{\ell} \cdot N = \frac{\Phi(t)}{I(t)} \cdot N \quad [\text{H}] \quad (4.37)$$

Udtrykkes $\Phi(t) \cdot N$ kaldes *den omsluttede flux*, Λ , og enheden er, som før nævnt [Wbv]:

$$\Lambda \triangleq \Phi(t) \cdot N \quad [\text{Wbv}] \quad (4.38)$$

Den inducerede spænding kan dermed skrives:

$$\text{emf} = -\frac{d}{dt} I(t) \cdot \frac{\Lambda}{I(t)} \quad [\text{V}] \quad (4.39)$$

Hvis μ ikke er lineær, og/eller hvis feltet ikke er konstant over ℓ og A , kan $\Phi(t)$ skrives:

$$\Phi(t) = \mu(I) \cdot \frac{N \cdot I(t)}{\ell} \cdot A \cdot \xi = \Phi_0 + \frac{d}{dt} \Phi \cdot I(t) \quad [\text{Wb}] \quad (4.40)$$

Når (4.40) indsættes i (4.34), forsvinder Φ_0 pga. differentieringen. Selvinduktionen med symbolet L kan herefter skrives:

$$L \triangleq \frac{d\Lambda}{dI} \quad [\text{H}] \quad (4.41)$$

For det lineære tilfælde og med $\xi = 1$ i formel (4.40) ser vi, at selvinduktionen bliver:

$$L = \frac{\mu \cdot A}{\ell} \cdot N^2 \quad [\text{H}] \quad (4.42)$$

Selvinduktion er omsluttet flux pr. ampère.

Eksempel 4.3

Hvis hver feltlinie på figur 4.15 repræsenterer 1 Wb, ses det at den omsluttede flux bliver:

$$\begin{aligned} \Lambda &= 1 \text{ Wb} \cdot 5 \text{ v} + 1 \text{ Wb} \cdot 4 \text{ v} + 1 \text{ Wb} \cdot 3 \text{ v} + 1 \text{ Wb} \cdot 1 \text{ v} + 1 \text{ Wb} \cdot 2 \text{ v} \\ &= 15 \text{ Wb} \end{aligned}$$

Selvinduktionen bliver:

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{15}{10} = 1,5 \text{ H}$$

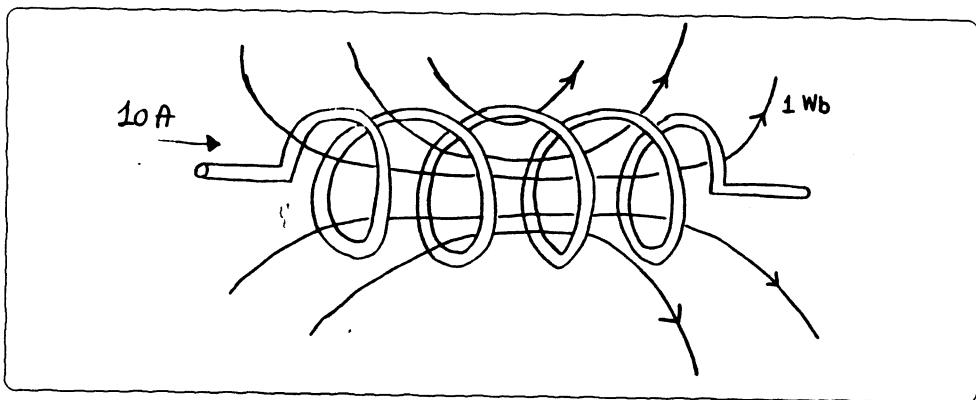


Fig. 4.15. En spole med feltlinier for en strøm på 10 ampere.

Det bemærkes, at vi ikke kender ξ , men at vi i stedet for kender den $\Phi(t)$, der opstår som følge af en bestemt strøm.

■

Der findes mange forskellige tabeller og håndformler, der foreslår, hvad ξ skal være for forskellige udformninger af spoler. Her skal gengives nogle få eksempler.

4.4.1 Formler for spoler

Wheelers formel

Denne formel gælder for en et-lags luftspole. Den indsættes i SI-enheder. Selvinduktionen er givet ved (se figur 4.16):

$$L = N^2 \cdot \frac{a^2}{9a + 10l} \cdot 40 \cdot 10^{-6} \quad [\text{H}] \quad (4.43)$$

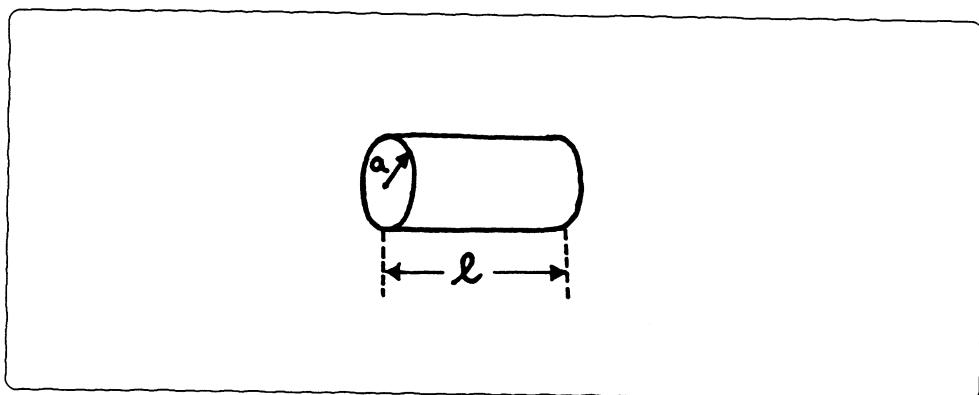


Fig. 4.16. Et-lags luftspole efter Wheelers formel.

Blakeys formel

Denne formel gælder for en flerlags luftspole. Der indsættes i SI-enheder. Selvinduktionen er givet ved (se figur 4.17):

$$L = N^2 \cdot \frac{a^2}{6a + 10t + 9\ell} \cdot 32 \cdot 10^{-6} \quad [\text{H}] \quad (4.44)$$

hvor:

a er middelradius [m]

t er tykkelsen af viklingslaget [M]

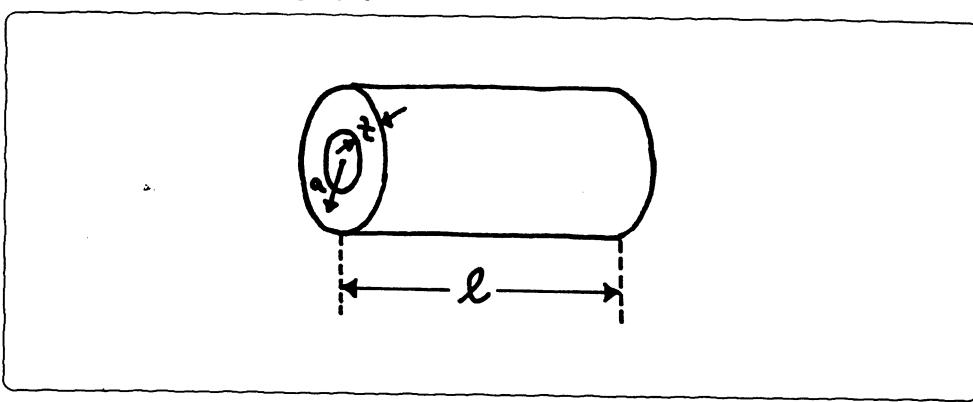


Fig. 4.17. Flerlags luftspole efter Blakeys formel.

Efter Ampères lov

Denne formel gælder for en et-lags luftspole. Der indsættes i SI-enheder. Selvinduktionen er givet ved (se figur 4.18):

$$L = \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{A}{\ell} \quad [\text{H}] \quad (4.45)$$

hvor:

A er arealet [m^2]

ℓ er spolens længde [m]

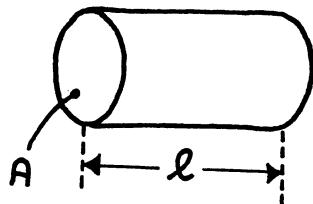


Fig. 4.18. Et-lags luftspole efter Ampères lov.

4.5 Gensidig induktion

Vi betragter to strømkredse C_1 og C_2 , som vist på figur 4.19. Noget af den flux Φ_1 , der dannes i C_1 , går igennem C_2 . Denne del, som vi vil kalde Φ_{21} , vil udover at inducere en spænding i C_1 , også vil inducere en spænding i C_2 . Vi vil opstille et udtryk for denne inducerede spænding.

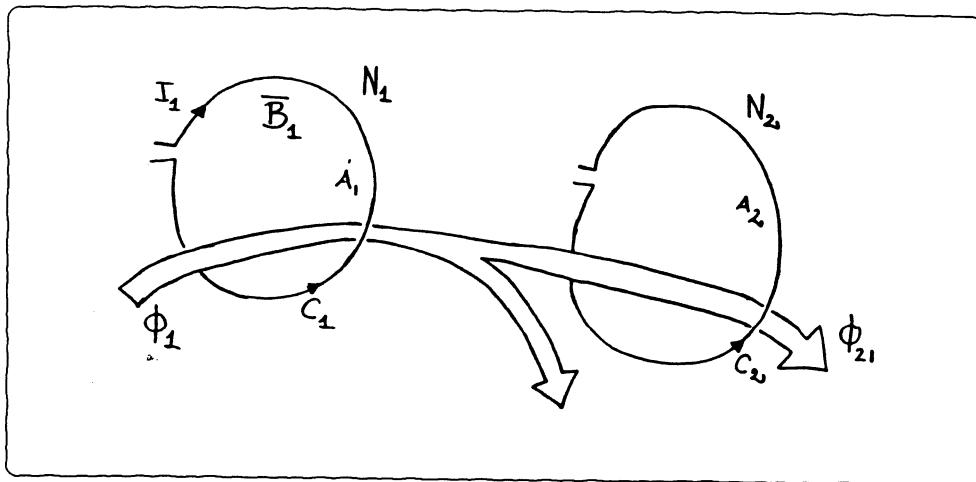


Fig. 4.19. To strømkredse, der indvirker på hinanden via magnetfelter. Strømmen I_1 vil inducere en spænding både i kreds 1 og kreds 2.

Den såkaldte *fælles omsluttede flux* fra 1 til 2 er givet ved:

$$\Phi_{21} = \int_{A_2} \bar{B}_1 d\bar{a} \quad [\text{Wb}] \quad (4.46)$$

Iflg. formel (4.40) eller (4.35) kan vi regne størrelsen af feltet \bar{B}_1 proportional med I_1 , og iflg. formel (4.38) og (4.41) kan denne proportionalitetsfaktor skrives som en slags selvinduktion. Vi vil her kalde den L_{21} , *den gensidige induktion fra 1 til 2*:

$$\Phi_{21} \cdot N_2 = L_{21} \cdot I_1 \quad [\text{WbV}] \quad (4.47)$$

Vi inddrager her samtidigt, at kredsen C_2 har N_2 vindinger.

Vi definerer nu følgende, i overensstemmelse med formlerne for selvinduktion:
Fælles flux fra 1 til 2:

$$\Phi_{21} \cdot N_2 = \Lambda_{21} \quad [\text{WbV}] \quad (4.48)$$

Induktionen fra 1 til 2:

$$L_{21} = \frac{d\Lambda_{21}}{dI_1} \quad [\text{H}] \quad (4.49)$$

Den anden vej (fra 2 til 1) får vi:

$$\Lambda_{21} = \Phi_{21} \cdot N_1 \quad [\text{Wb}v] \quad (4.50)$$

$$L_{21} = \frac{d\Lambda_{21}}{I_2} \quad [\text{H}] \quad (4.51)$$

Det kan vises, at der gælder:

$$L_{12} = L_{21} \quad [\text{H}] \quad (4.52)$$

Disse 2 størrelser vil vi under ét kalde *den gensidige induktion*. Man kalder fænomenet reciprocitet for gensidig induktion.

Der findes naturligvis også gensidig induktion mellem flere end to kredse, og mellem kredse, der bevæger sig i forhold til hinanden. I sådanne tilfælde passer ikke alle de ovenstående formler. Vi skal for nuværende kun bruge det her gennemgåede, og det vil derfor ikke blive uddybet yderligere.

Vi bemærker, at vi nu også kan definere selvinduktion som „den gensidige induktion fra 1 til 1“ :

$$\text{Selvinduktion: } L_{11} = \frac{d\Lambda_{11}}{dI_1} \quad [\text{H}] \quad (4.53)$$

I kredsløbssammenhæng forsvinder minusset i formel (4.36) pga. den fortegnskonvention, der anvendes for spændingspotentialer:

$$\text{emf} = \int_C \bar{\mathbf{E}} \cdot d\bar{l} = \int_C -\nabla V \cdot d\bar{l} \quad [\text{V}] \quad (4.54)$$

Dette kan også ses ved et eksempel: Hvis man integrerer den rigtige vej rundt osv. fås de fortægner på strømme og spændinger, der er vist på figur 4.20 .

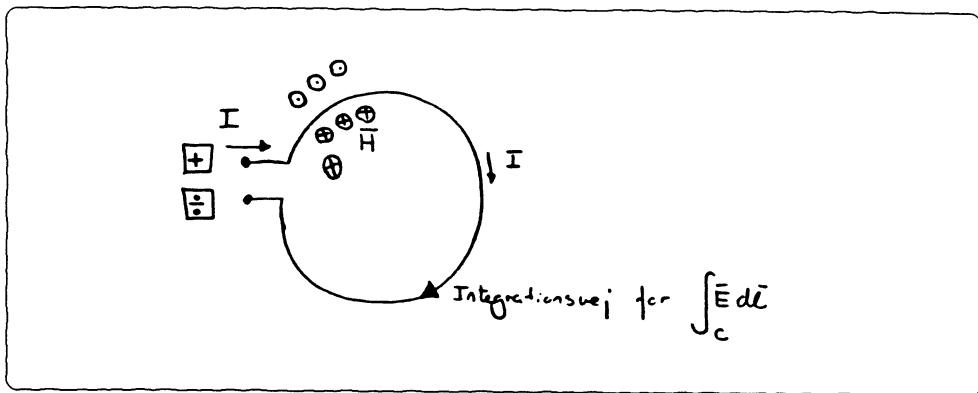


Fig. 4.20. Demonstration af fortegn i forbindelse med selvinduktion.

Når KSN anvendes fås:

$$V = -(-j\omega I) \cdot L \quad [\text{V}] \quad (4.55)$$

$$\frac{V}{I} = Z_L = j\omega L \quad [\Omega] \quad (4.56)$$

5

Dualiteter

Man bemærker den enshed, der findes i formlerne for modstand, kapacitet og selvinduktion, ligesom den stærkt udtrykte dualitet mellem QES og MQS. Jeg dropper i dette afsnit midlertidigt den N -notation, der anvendes teknisk indenfor MQS. Den er principielt unødvendig; hvis man er matematiker, integrerer man blot N gange rundt, i stedet for at gange med „ N vindinger“.

I dette afsnit gengives disse formler samlet for at indbyde læseren til at foretage en sammenligning og derved få udvidet forståelsen af de bagvedliggende elektriske og magnetiske fænomener.

5.1 Formler

Vi har følgende formler for konduktivitet, kapacitet og induktivitet:

$$\begin{aligned} G &= \frac{dI}{dV} & [\frac{A}{V} = S = \frac{1}{\Omega}] \\ C &= \frac{dQ}{dV} & [\frac{As}{V} = \frac{C}{V} = F] \\ L &= \frac{d\Phi}{dI} & [\frac{Vs}{A} = \frac{Wb}{A} = H] \quad (5.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \frac{A \cdot \sigma}{\ell} & [S] \\ C &= \frac{A \cdot \epsilon}{d} & [F] \\ L &= \frac{A \cdot \mu}{\ell} & [H] \quad (5.2) \end{aligned}$$

For mediekonstanterne har vi:

$$\sigma = \sigma_{CU} \cdot \sigma_r \quad [S] \quad (5.3)$$

$$\sigma_{CU} = 58 \cdot 10^6 \frac{S}{m} \quad (5.4)$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad \left[\frac{F}{m} \right] \quad (5.5)$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{F}{m} \quad (5.6)$$

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r \quad \left[\frac{H}{m} \right] \quad (5.7)$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \quad (5.8)$$

Sammenhængen mellem de forskellige størrelser er vist på figurerne 5.1 til 5.3

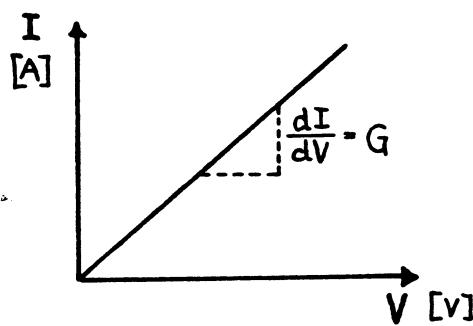


Fig. 5.1. Grafisk afbildning af sammenhængen mellem spænding, strøm og konduktans.

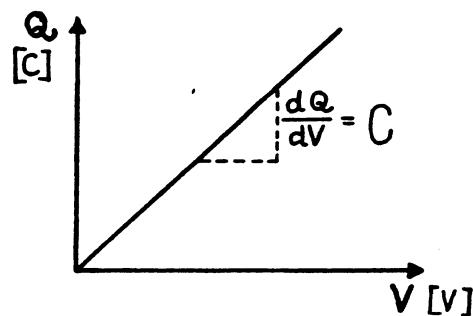


Fig. 5.2. Grafisk afbildning af sammenhængen mellem spænding, ladning og kapacitet.

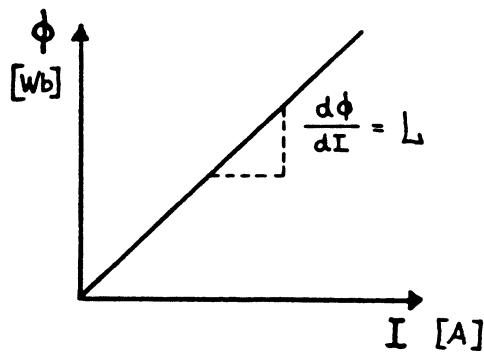


Fig. 5.3. Grafisk afbildning af sammenhængen mellem strøm, kraftlinietal og induktans.

For felterne gælder:

Medieafhængige	\bar{B}	$[\frac{V \cdot s}{m^2}]$
Medieuafhængige	\bar{H}	$[\frac{A}{m}]$
	\bar{E}	$[\frac{V}{m}]$
	\bar{D}	$[\frac{A \cdot s}{m^2}]$

Man bemærker, at større μ giver *kraftigere* felt, hvorimod større ϵ giver *svagere* felt. Dette ses af formlerne for hhv. \bar{B} og \bar{E} i afstanden d fra de skabende elementer:

$$\bar{B} = \int \frac{Id\hat{l} \times \hat{d}}{4\pi \frac{1}{\mu} d^2} \quad [\frac{Wb}{m^2}] \quad (5.9)$$

$$\bar{E} = \frac{Q_p \cdot \hat{d}}{4\pi \epsilon d^2} \quad [\frac{V}{m}] \quad (5.10)$$

Hvis ϵ er stor i en kondensator, skal der mange coulomb til at give et vist potentiale, da feltet er svagt. Hvis μ er stor i en spole, vil en lille strøm give masser af kraftlinier. Begge dele svarer til en stejl kurve i diagrammerne på figurerne 5.3 og 5.2.

C	L
$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dV} \cdot \frac{dV}{dt}$ $= C \cdot \frac{d}{dt} V$ amperesekunder pr. volt siemens-sekunder	$V = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dI} \cdot \frac{dI}{dt}$ $= L \cdot \frac{d}{dt} I$ voltsekunder pr. ampere ohm-sekunder

5.2 Analogier

Da mange af disse formler ligner hinanden, er det ofte fordelagtigt at anvende såkaldte *analogier*.

Den elektriske kredsløbsteorি er højt udviklet og grundigt studeret, hvorfor man ofte overfører et problem, der skal løses, til dette domæne.

I næste afsnit vil vi regne på magnetiske kredsløb under anvendelse af en sådan kredsløbsanalogi. Man kan også overføre fx. mekaniske problemer til kredsløbsverdenen.

Idéen er, at man identificerer nogle sammenhænge, der svarer til kredsløbslove, fx. Ohms lov, og derefter oversætter hele problemet via en analogi-oversætterliste, man selv laver, til et elektrisk kredsløb. Derefter udføres beregninger på kredsløbet, og resultatet oversættes tilbage igen.

Ofte er flere forskellige analogier mulige for det samme problem. I mekaniske problemer kan man fx. lade hastighed svare til enten strøm eller til spænding. Ved begge valg kan formlerne bringes til at passe.

6

Magnetiske kredsløb

I magnetiske apparater er man interesseret i at udregne hvilken Φ , en spole producerer, da det er denne Φ , der andre steder i apparatet inducerer en spænding iflg. Faradays lov (formel (4.27), side 66).

En spole på N vindinger, hvori der går en strøm på I ampere, producerer en mmf på NI amperevindinger, men hvad bliver Φ ? Ja, det afhænger af \bar{H} , arealet og i særdeleshed μ , idet:

$$\Phi = B \cdot A = \mu \cdot H \cdot A \quad [\text{Wb}] \quad (6.1)$$

H afhænger igen, iflg. Ampéres lov (formel (4.29), side 67) af mmf og længden ℓ :

$$\Phi = \mu \cdot \frac{\text{mmf}}{\ell} \cdot A = \mu \cdot \frac{NI}{\ell} \cdot A \quad [\text{Wb}] \quad (6.2)$$

Dette er fuldstændig i lighed med den duale situation for elektriske felter: Hvis der i et område er en potentialefoskel (i volt), må der også være et elektrisk felt \bar{E} (i volt pr. meter), men om der går en strøm, er afhængig af ledningsevnen i det medium, der er tilstede:

$$\bar{J} = \sigma \cdot \bar{E} \quad \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2}\right] \quad (6.3)$$

Størrelsen σ [$\frac{\text{S}}{\text{m}}$] er den *specifikke konduktivitet*, målt i siemens pr. meter, som for øvrigt er den reciprokke af den *specifikke resistans*, ρ [$\Omega \cdot \text{m}$], som vi lærte i skolen.

Vi betragter en lukket jernkerne med højt μ , hvorom der er lagt et antal vindinger, og vi vil nu beregne Φ , se figur 6.1 .

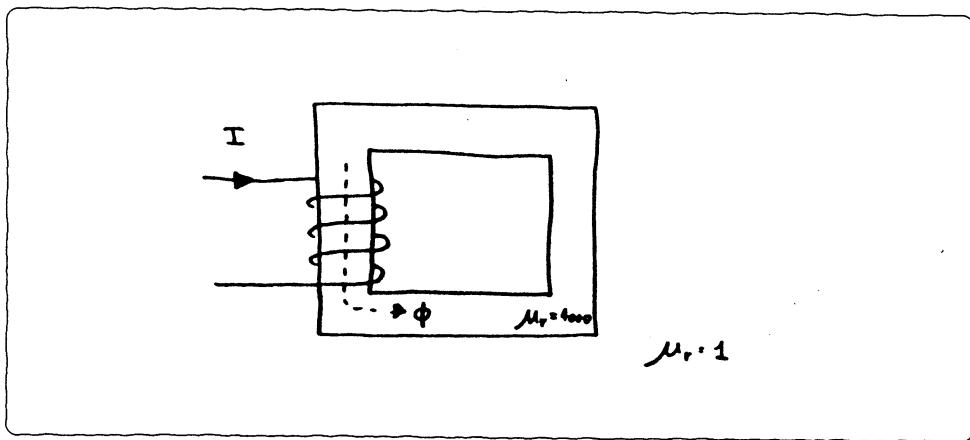


Fig. 6.1. En transformatorkerne med høj permeabilitet, μ_r .

Hvis fx. $\mu_r = 4.000$ for jernet, kan vi iflg. foregående betragtninger regne med, at størsteparten af den samlede flux befinder sig i jernkernen.

Når vi kender A , tværsnitsarealet af kernen og ℓ , middelvejlængden rundt i den kurve rundt i kernen, hvor vi vil beregne mmf, kan vi iflg. formel (6.2) finde Φ :

$$\Phi = \text{mmf} \cdot \frac{\mu A}{\ell} \quad [\text{Wb}] \quad (6.4)$$

Faktoren længst til højre er en *konstant*, der er karakteristisk for netop den aktuelle jernkerne, og den udtrykker den *magnetiske ledenevn* i kernen: Jo større μ og jo større areal desto flere kraftlinier, og jo større vejlængde desto færre kraftlinier.

Man definerer den *magnetiske modstand* eller *reluktansen* af en kerne, som det reciprokke af ledenevnen:

$$\mathcal{R} \triangleq \frac{\ell}{\mu \cdot A} \quad \left[\frac{\text{A}}{\text{Wb}} \right] \quad (6.5)$$

Enheden ampere pr. weber kan også udtrykkes som „pr. henry“. Ledenevnen, altså faktoren i formel (6.4) kaldes også *permeansen* (symbol Λ , enhed H). Formel (6.4) kan nu skrives:

$$\text{mmf} = \Phi \cdot \mathcal{R} \quad [\text{Av}] \quad (6.6)$$

Vi har desuden:

$$\text{mmf} = N \cdot I = H \cdot \ell \quad [\text{Av}] \quad (6.7)$$

$$\Phi = B \cdot A = \mu \cdot H \cdot A \quad [\text{Wb}] \quad (6.8)$$

Når man skal regne på sådanne magnetiske kredsløb anvendes ofte elektriske ækvivalentdiagrammer (elektrisk analogi), idet formel (6.6) jo ligner Ohms lov.

6.1 Elektrisk analogi

Vi kan opstille nedenstående *elektriske analogi* (se figur 6.2).

Magnetisk	Elektrisk
mmf	V (spænding)
Φ	I (strøm)
\mathcal{R}	R (modstand)
μ	σ (spec. konduktivitet)

Fig. 6.2. Analogi mellem magnetiske og elektriske størrelser.

Modstanden i en metaltråd er givet ved:

$$R = \frac{\ell}{\sigma \cdot A} \quad [\Omega] \quad (6.9)$$

hvilket svarer til formel (6.5) for magnetiske kredsløb.

For mmf anvendes undertiden symbolet F . Et ækvivalentdiagram til det magnetiske kredsløb på figur 6.1, side 84 ser nu ud som vist på figur 6.3.

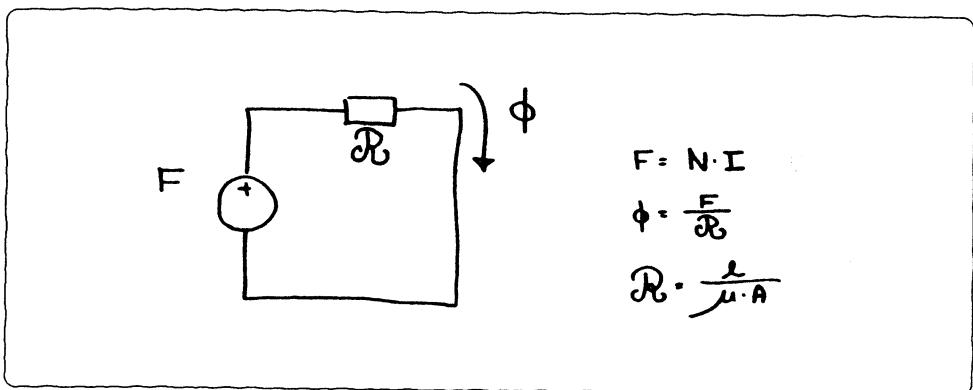


Fig. 6.3. Et ækvivalentdiagram for transformatorkernen på figur 6.1.

I det her viste eksempel er analogien naturligvis trivial. Men regner vi nu med, at μ ikke er lineær, ja så svarer det i kredsløbsteorien til, at vi har modstande, hvis størrelse varierer

med strømmen.

For godt transformerjern begås dog ikke nogen større fejl ved at regne μ konstant (se side 100). Tilfældet med ulineær μ og μ med „hukommelse“ behandles i næste afsnit.

Magnetiske kredsløb kan indeholde flere serie- og parallelforbundne reluktanser og F -generatorer, og så kommer analogien til sin fulde ret. Betragt fx. transformeren vist på figur 6.4 samt det tilhørende ækvivalentdiagram på figur 6.5 .

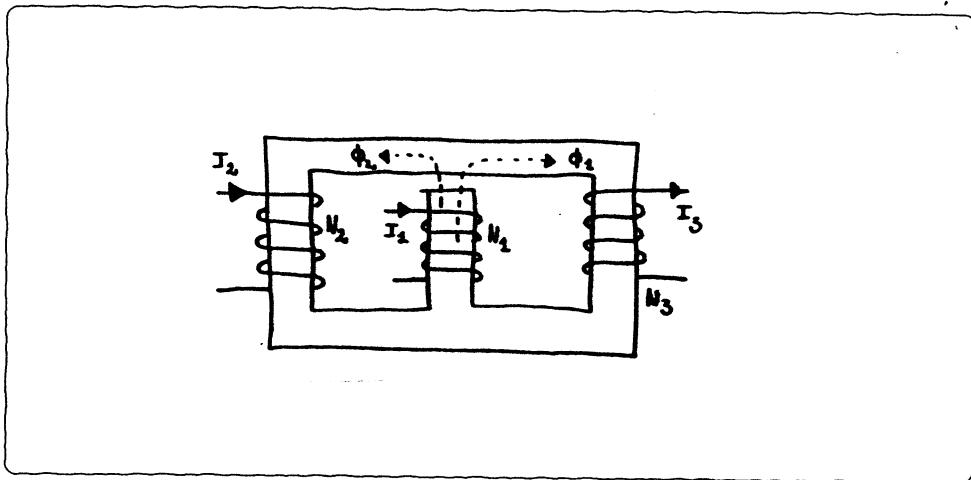


Fig. 6.4. En transformator med tre viklinger.

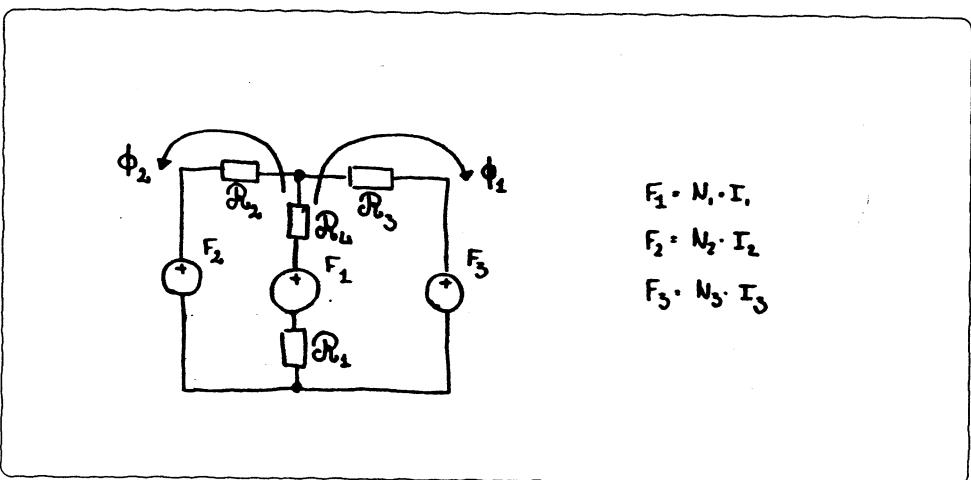


Fig. 6.5. Ækvivalentdiagram for det magnetiske kredsløb for figur 6.4 .

Reluktansen \mathcal{R}_L er den magnetiske modstand i luftspalten. Sådanne små luftspalter på 0,1 - 2 mm anvendes ofte dels for at linearisere kredsløbet, og dels for at begrænse kraftlinietallet („strømmen“). Da $\mu_r = 1$ for luftspalten, og $\mu_r = 1.000 - 5.000$ for jernet, bliver \mathcal{R}_L gerne langt den største modstand i kredsløbet.

Figurerne 6.6 og 6.7 illustrerer grundlaget for at anvende magnetiske ækvivalentdiagrammer for transformatorer.

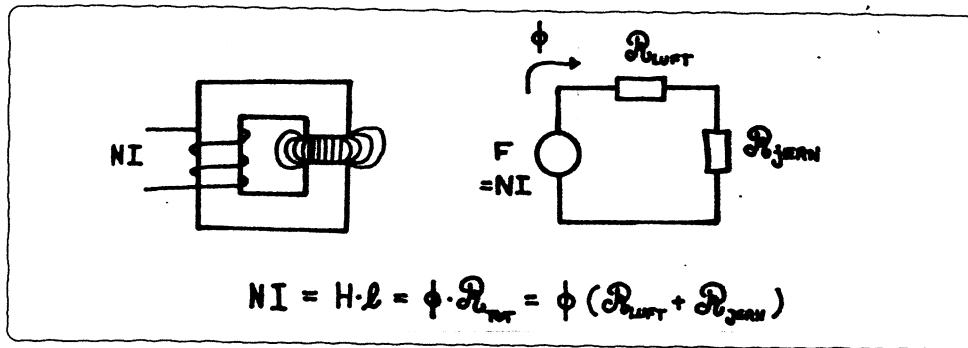


Fig. 6.6. En beviklet transformatorkerne med luftspalte og det tilhørende magnetiske ækvivalent-diagram.

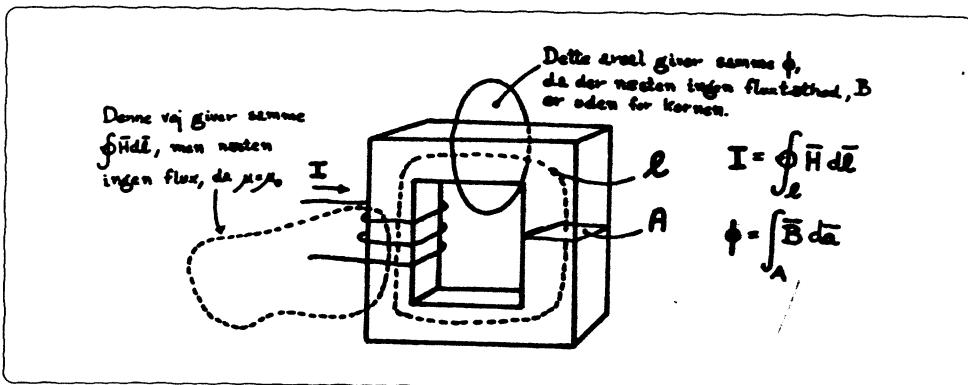


Fig. 6.7. Illustration af integrationsveje og integrationsarealer, der anvendes, når der beregnes magnetiske kredsløbsmodeller for transformatorer.

Eksempel 6.1

En kerne har $A = 9 \text{ cm}^2$, $l = 24 \text{ cm}$ og $\mu_r = 3.000$. Hvad er kernens reluktans?

Vi får:

$$\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu A} = \frac{0,24}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3.000 \cdot 9 \cdot 10^{-4}} = 71 \text{ k}\frac{\text{A}}{\text{Wb}}$$

Hvad vil reluktansen af en 1 mm luftspalte i kernen være?

Vi får:

$$\mathcal{R}_L = \frac{\ell}{\mu A} = \frac{0,001}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^{-4}} = 884 \text{ k}\frac{\text{A}}{\text{Wb}}$$

■

Feltlinierne vil gerne sprede sig lidt i luftspalten. Derfor regnes ofte med et lidt større areal. Enten regnes med en empirisk faktor for bestemte kernetyper eller også bruges standardfaktoren $(1 + f)$, hvor f er et tal, der er givet ved:

$$f = \frac{2\ell}{\sqrt{A}} \quad (6.10)$$

Det synes rigtigt, at jo større ℓ er, desto større bliver det effektive areal af luftspalten, se figur 6.8 .

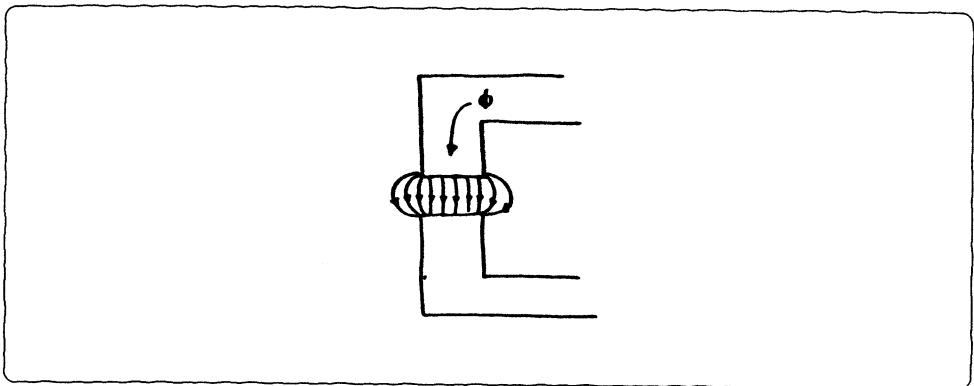


Fig. 6.8. Effektivt areal for en luftspalte. De magnetiske kraftlinier vil sprede sig noget, afhængig af afstanden i luftspalten.

Hvis dette medtages, fås i eksempel 6.2 :

$$f = \frac{2\ell}{\sqrt{A}} = \frac{2 \cdot 0,001}{\sqrt{9 \cdot 10^{-4}}} = 66,7 \cdot 10^{-3} \quad (6.11)$$

og dermed:

$$\mathcal{R}'_L = \mathcal{R}_L \frac{1}{1+f} = 829 \text{ k} \frac{\text{a}}{\text{Wb}} \quad (6.12)$$

Da vi alligevel anvender grove tilnærmelser i mange af vores beregninger, anvendes ofte et fast tal for „små luftspalter“, som regel 10% forøgelse:

$$A_{luft} = A_{jern} \cdot 1,1 \quad [\text{m}^2] \quad (6.13)$$

6.2 Magnetiske ækvivalentdiagrammer med ulineariteter

Når vi skal analysere et magnetisk kredsløb med forskellige reluktanser i transformersammenhæng mere detaljeret, regner vi med at jernet er ulineært og beskrevet ved en BH-kurve, se side 100. Dette er en tilnærmelse, idet jernet også har hysterese, men hvis det drejer sig om godt transformerjern, er hysteresekurven smal, og tilnærmelsen er ganske hæderlig. Vi vil antage, at reluktansen af spalten er lineær og har $\mu = \mu_0$.

Anvendelsen af en arbejdslinie for luftspalten i BH-diagrammet forklares lettest ved et lille elektrisk eksempel.

Eksempel 6.2

Vi vil bestemme diodestrømmen og -spændingen i det lille kredsløb, der er vist på figur 6.9.

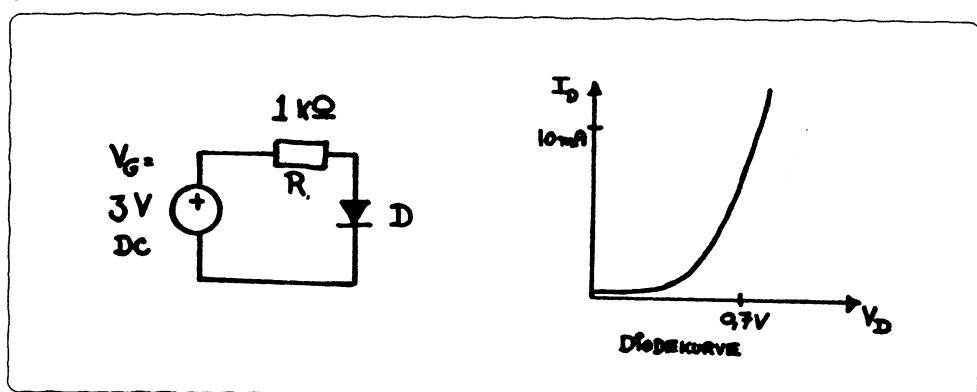


Fig. 6.9. Et simpelt diodekredsløb. Modstanden er et lineært element og dioden et ulineært. Diodens spænding/strøm sammenhæng er vist til højre.

Vi har følgende, idet strømmen I er fælles for diode og modstand:

$$V_G = V_R + V_D$$

$$V_R = R \cdot I$$

$$V_D = V_G - R \cdot I$$

Vi bruger kurven for dioden og indlægger samtidig arbejdslinien for R , idet I er fælles, og $V_D + V_R = \text{konstant}$. Diagrammet for strøm og spænding i dioden, når den sidder i kredsløbet er vist på figur 6.10.

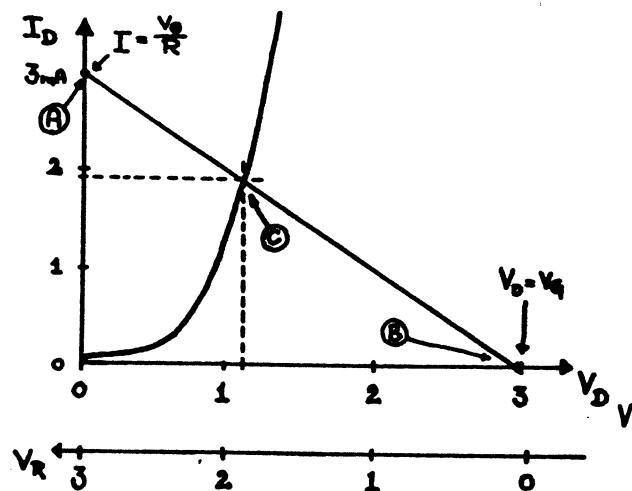


Fig. 6.10. Strøm/spændingskurve for dioden i kredsløbet.

De 2 punkter A og B på figur 6.11 bestemmes ved:

$$A : \quad V_D = 0 \quad \Rightarrow I = \frac{V_G}{R}$$

$$B : \quad I = 0 \quad \Rightarrow V_D = V_G$$

De to ligninger giver en løsning, der bestemmer punktet C:

$$V_D = 1,1 \text{ V}$$

$$V_R = 1,9 \text{ V}$$

$$I_R = I_D = 1,9 \text{ mA}$$

■

Metoden i eksempel 6.3 kan anvendes for magnetiske kredsløb. Man kunne, for kendt ℓ og A optegne en graf for Φ som funktion af NI , som vist på figur 6.11.

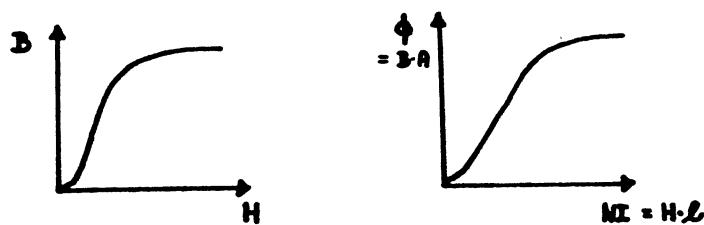


Fig. 6.11. En graf for BA som funktion af $H\ell$ ud fra et materiales BH-kurve.

Dette besværliggøres lidt af, at A og ℓ er forskellig for luften og jernet. Derfor vælger vi at beholde den originale BH-kurve, og så vægte værdierne med de gældende A og ℓ .

Vi får tilsvarende eksempel 6.3 følgende beregninger (se figur 6.12). Vi anvender disse notationer for de to materialer:

$$\begin{aligned} \text{For luft: } & \ell_1, A_1, \mu_0, \mathcal{R}_1, \Phi \\ \text{For jern: } & \ell_2, A_2, \mu, \Phi \end{aligned} \quad (6.14)$$

Vi har for kredsløbet følgende:

$$\begin{aligned} H\ell_2 &= NI - \mathcal{R}_1\Phi \quad [\text{Av}] \\ \mathcal{R}_1 &= \frac{\ell_1}{\mu_0 \cdot A_1} \quad [\frac{\text{A}}{\text{Wb}}] \end{aligned} \quad (6.15)$$

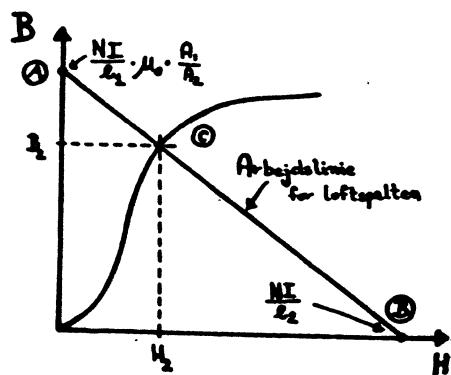


Fig. 6.12. En BH-graf til bestemmelse af arbejdspunktet for et transformørkerne med luftspalte.

De to punkter A og B er givet ved:

$$\begin{aligned} A : \quad H\ell_2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \Phi = \frac{NI}{R_1} \\ B : \quad \Phi = 0 \quad &\Rightarrow \quad H\ell_2 = NI \end{aligned} \tag{6.16}$$

Videre omregning giver:

$$\begin{aligned} \text{Punkt A: } \quad \Phi &= \frac{NI}{R_1} = NI \frac{\mu_0 A_1}{\ell_1} \quad [\text{Wb}] \\ B &= \frac{\Phi}{A_2} = \frac{NI}{\ell_1} \cdot \mu_0 \cdot \frac{A_1}{A_2} \quad \left[\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \right] \\ \text{Punkt B: } \quad H &= \frac{NI}{\ell_2} \quad \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right] \end{aligned} \tag{6.17}$$

Løsningen findes i skæringspunktet. Pga. de forskellige magnetiske egenskaber er H og B forskellig for jern og luft, kun Φ er fælles:

$$\begin{aligned} \text{For luft: } \quad &H_1, B_1, \Phi \\ \text{For jern: } \quad &H_2, B_2, \Phi \end{aligned} \tag{6.18}$$

I kredsløbsanalogien svarer B til strømtæthedens $\left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right]$ og H til spændingsgradienten $\left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$. Man kan godt forestille sig at strømtæthed og spændingsgradient er forskellig for modstanden og dioden i eksempel 6.3, samtidig med at den fælles strøm er 1,9 mA.

Størrelsen af H_2 og B_2 kan udlæses direkte af kurven. Størrelsen af H_1 kan findes af:

$$H_2\ell_2 + H_1\ell_1 = NI$$

$$H_1\ell_1 = NI - H_2\ell_2$$

$$H_1 = \frac{NI}{\ell_1} - H_2 \frac{\ell_2}{\ell_1} \quad (6.19)$$

Størrelsen af B_1 kan findes af:

$$B_1 A_1 = \Phi = B_2 A_2$$

$$B_1 = B_2 \cdot \frac{A_2}{A_1} \quad (6.20)$$

Eksempel 6.3

Vi analyserer det magnetiske kredsløb på figur 6.13 og 6.14 vha. arbejdsliniemetoden.

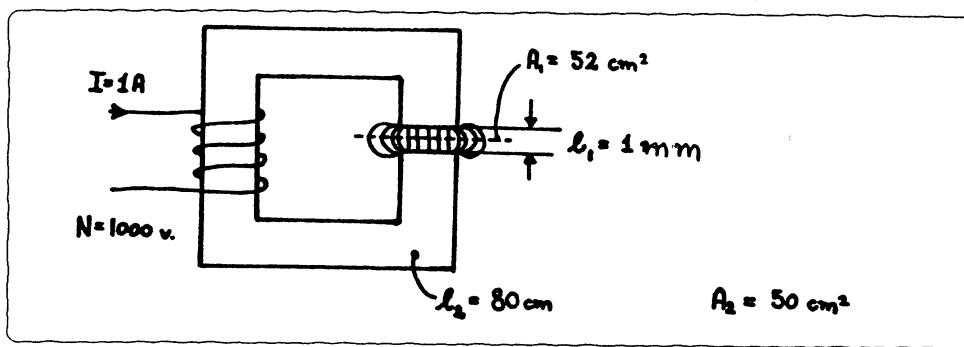


Fig. 6.13. En transformørkerne med luftspalte samt den tilhørende primærvikling.

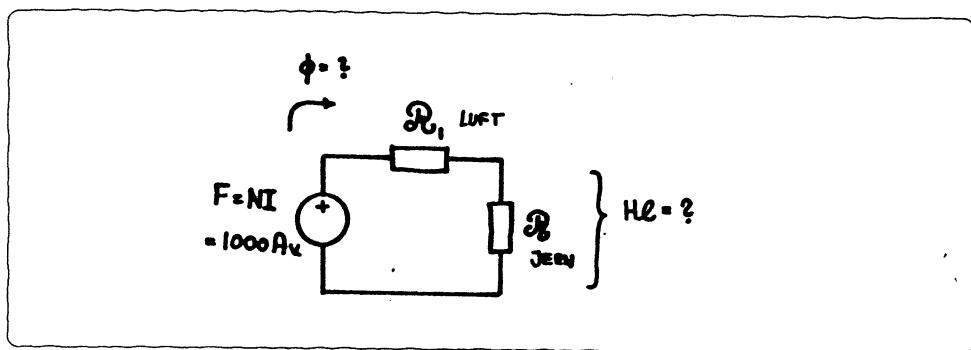


Fig. 6.14. Magnetisk ækvivalentskema for transformeren på figur 6.13.

Vi bestemmer endepunkterne for arbejdslien for luftspalten:

$$\begin{aligned}\Phi = 0 \text{ Wb} &\Rightarrow H_2 = \frac{NI}{\ell_2} = \frac{1.000}{0,8} = 1.250 \frac{\text{A}}{\text{m}} \\ H_2 = 0 \frac{\text{A}}{\text{m}} &\Rightarrow B_2 = \frac{NI}{\ell_1} \cdot \mu_0 \cdot \frac{A_1}{A_2} \\ &= \frac{1.000}{0,001} \cdot \mu_0 \cdot \frac{52}{50} = 1,3 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}\end{aligned}$$

Løsningen for arbejdspunktet, som er fundet grafisk, er vist på figur 6.15.

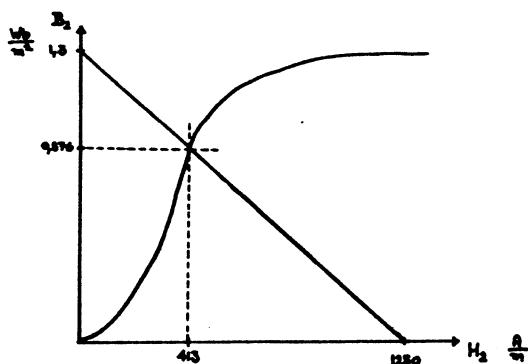


Fig. 6.15. Karakteristikfelt med arbejdselinie og arbejdspunkt.

Løsningen for fluxen bliver:

$$\Phi = B_2 A_2 = 0,876 \cdot 50 \cdot 10^{-4} = 4,38 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Den magnetiske spænding over jern og luft bliver:

$$H_2 \ell_2 = 413 \cdot 0,8 = 330 \text{ Av}$$

$$H_1 \ell_1 = NI - H_2 \ell_2 = 1000 - 330 = 670 \text{ Av}$$

Dette kunne også bestemmes ved:

$$\begin{aligned} H_1 \ell_1 &= \Phi \cdot R_1 = 4,38 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\ell_1}{\mu_0 A_1} \\ &= 4,38 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{0,001}{\mu_0 \cdot 52 \cdot 10^{-4}} = 670 \text{ Av} \end{aligned}$$

Det magnetiske ækvivalentskema med værdier er vist på figur 6.16.

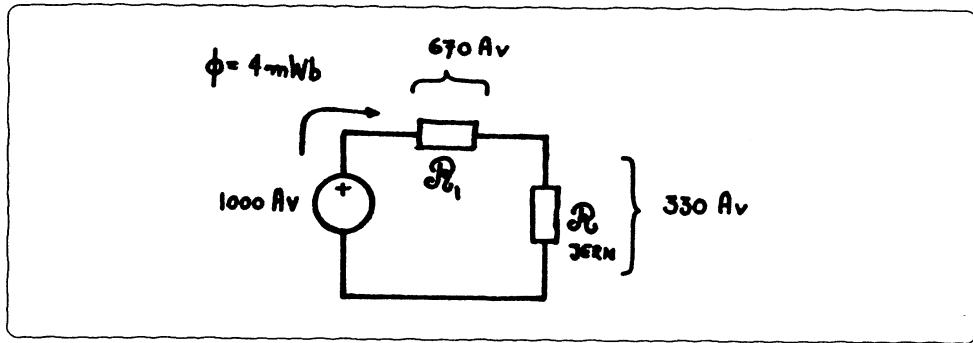


Fig. 6.16. Magnetisk ækvivalentskema for transformeren mede de beregnede værdier for „strøm“ og „spænding“.

I det fundne arbejdspunkt gælder:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{B}{H} = \frac{0,876}{413} = 2,1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{A}}{\text{m}} \\ \mu_r &= \frac{\mu}{\mu_0} = 1.688 \end{aligned}$$

■

Den fremstillede arbejdslinie for luftpalten gælder strengt taget kun for jævnstrømsmagnetisering. I en transformator magnetiseres der med vekselstrøm. Det drejer sig her ikke blot om små udsving omkring et fast arbejdspunkt, men om store udsving omkring $H = 0 \frac{\text{A}}{\text{m}}$.

Arbejdslinien vil i så tilfælde køre op og ned, som det kan ses af formel (6.17):

$$\begin{aligned} H_2 &= I \cdot \text{konstant} \\ B_2 &= I \cdot \text{konstant} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Der følges, hvis man skal være nøjagtig, forskellige BH-kurver under op- og nedturen, se figur 6.17. Forløbet gentager sig periodisk symmetrisk omkring H-aksen.

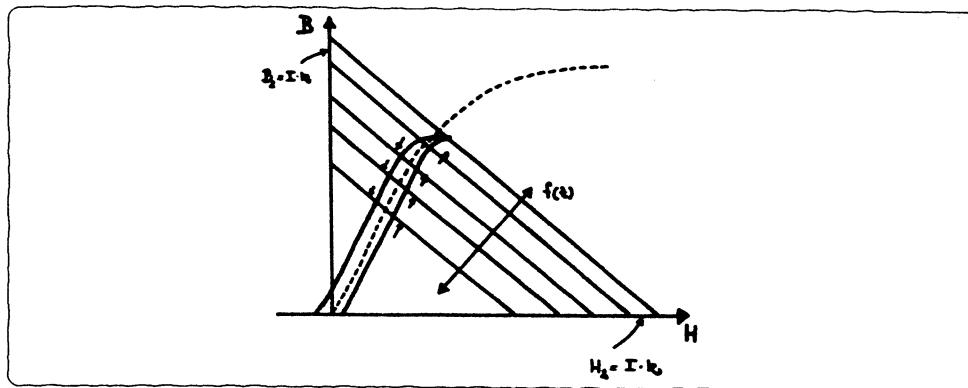


Fig. 6.17. Op- og afmagnetisering af en jernkerne, der har magnetisk hysterese.

7

Ferromagnetiske materialer

Hvad vi indtil nu har betegnet som „konstanten μ “ i formlen:

$$\bar{\mathbf{B}} = \mu \cdot \bar{\mathbf{H}} \quad [\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}] \quad (7.1)$$

er i virkeligheden en kompliceret funktion. Kun hvis mediet er:

1. Homogent (ens i alle positioner)
2. Isotrop (ens i alle retninger)
3. Lineært (uafh. af feltstyrken)
4. Tidsinvariant

er μ virkelig en konstant. Medier, hvor disse fire egenskaber findes, kaldes i øvrigt *HILS-medier* (for homogeneous, isotropic, linear, stationary). I andre tilfælde må man regne med μ som en matrix (en *tensor*):

$$\mu(x,y,z,t, \bar{\mathbf{H}}) = \begin{Bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{Bmatrix} \quad [\frac{\text{H}}{\text{m}}] \quad (7.2)$$

De medier, vi skal beskæftige om med, vil vi betragte som værende isotrope, homogene, tidsinvariante, *men ikke lineære*.

Ud fra et magnetisk synspunkt kan medier inddeltes i 3 grupper:

1. Diamagnetiske, $\mu_r < 1$ og $\mu_r \approx 1$. Lineær.
Frastødes svagt af en magnet.
2. Paramagnetiske. $\mu_r > 1$ og $\mu_r \approx 1$. Lineær.
Tiltrækkes svagt ved en magnet.
3. Ferromagnetiske. $\mu_r \gg 1$. Ulineær.
Tiltrækkes kraftigt af en magnet.

7.1 Eksempler på permeabiliteter

I tabellen på figur 7.1 er vist nogle eksempler på permabiliteter fra de tre ovenfor nævnte grupper. Der gælder i øvrigt:

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0 \quad [\frac{H}{m}] \quad (7.3)$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \quad (7.4)$$

Stof	Relativ permeabilitet
Diamagnetiske	
Kobber	0,999991
Bly	0,999983
Sølv	0,999980
Paramagnetiske	
Aluminium	1,00002
Luft	1,0000004
Palladium	1,0008
Ferromagnetiske	
Supermalloy	10^6
Kemisk rent jern	$2 \cdot 10^3$
Siliciumlegeret jern	7.000
Alm. godt transformerjern	4.500
Nikkel	600

Fig. 7.1. Tabel over relativ permeabilitet for forskellige stoffer.

Normalt anvendes $\mu_r = 1$ for alle stoffer, undtagen de „jernlignende“. Vi kan antage, at jern i al almindelighed ligger i området 1.000 - 1.500 for μ_r .

7.2 Hysteresekurven

En graf, der afbilder B som funktion af H (B og H står for størrelsen af hhv. \bar{B} og \bar{H}) danner den karakteristiske *hysteresesløjfe* (af græsk *hysterein* = „at være bagud“). En sådan kurve er vist på figur 7.2.

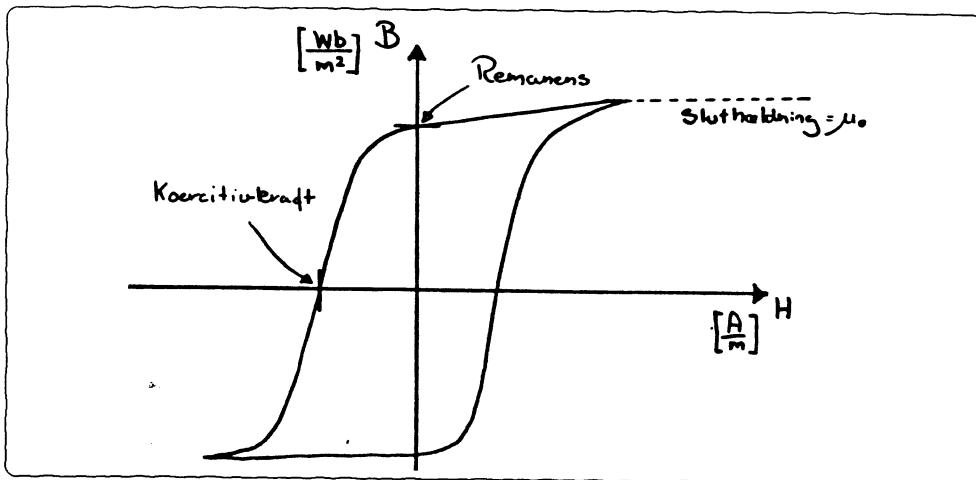


Fig. 7.2. En hysteresekurve for et ferromagnetisk materiale.

Remanensen (eller *residualmagnetismen*) er den blivende kraftlinietæthed, der er tilbage i jernet efter at magnetiseringen fjernes ($H = 0$). *Koercitivkraften* (eller *koercitiviteten*) er den modsatrettede magnetisering, der skal til for at fjerne residualmagnetismen.

Den energitæthed, der bindes i magnetfeltet, kan vises at være:

$$U_M = \int_{B_1}^{B_2} H dB \quad [\frac{J}{m^3}] \quad (7.5)$$

Hver gang sløjfen køres én gang rundt, mistes der energi (som bliver til varme i jernet). Betragt fx. 1. kvadrant på figur 7.3.

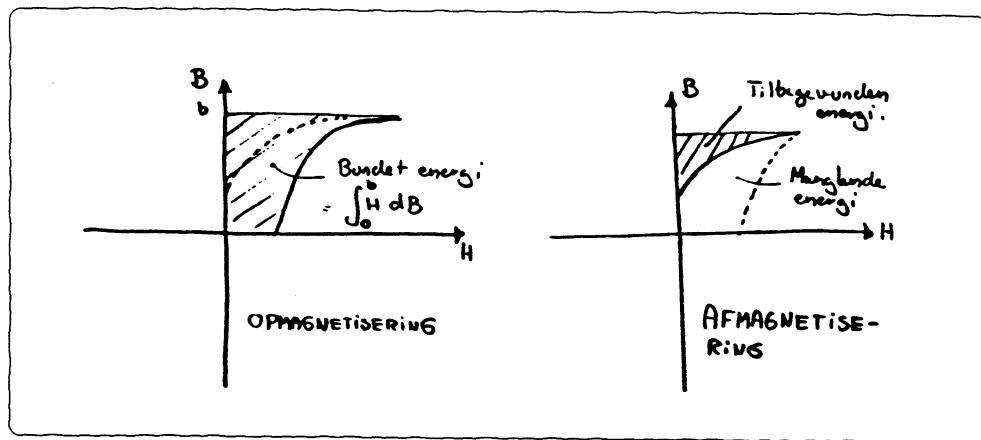


Fig. 7.3. Energier i forbindelse med op- og afmagnetisering af et ferromagnetisk materiale.

Der mistes lige så meget energi som arealet af hysteresesløjfen, for hver rundtur.

Enhedsregning giver:

$$B \cdot H \quad \left[\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]$$

Til anvendelse i transformatorer er man derfor interesseret i materialer, der har så smal en sløjfe som muligt, tenderende imod, at μ bliver lineær. Disse materialer har *lille remanens* og *lille koercitivkraft*. På figur 7.4 er vist en hysteresekurve for et materiale, der er velegnet til anvendelse i transformatorkerner.

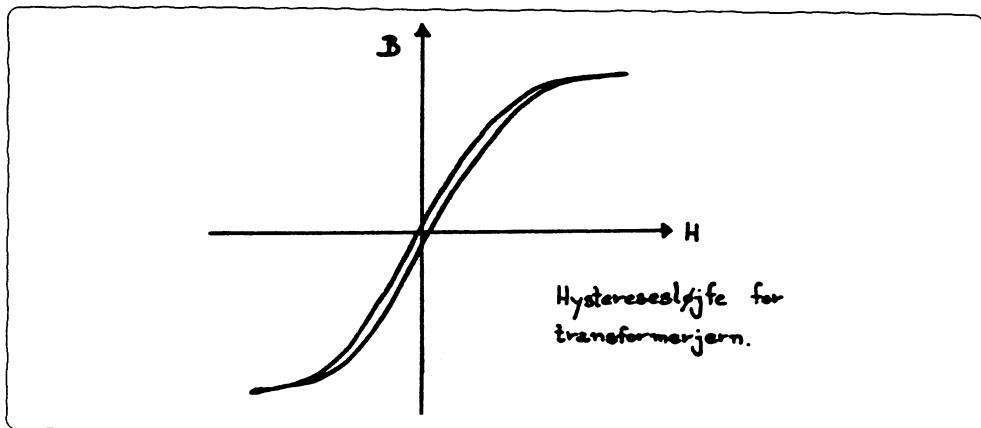


Fig. 7.4. Hysteresekurve for et godt transformatorjern. Sløjfen skal være så smal som mulig.

Når vi regner på transformatorer, vil vi anvende forskellige modeller, der forudsætter

lineære parametre. Derfor vil vi som regel antage, at μ er lineær og så tilføje en ekstra komponent (en ohmsk modstand), der svarer til tabet. Når vi holder os inden for et bestemt *frekvensområde* og *amplitudeområde*, bliver fejlen ikke alt for stor.

Hvis μ er lineær, fås et udtryk for den oplagrede magnetiske energi således:

$$\begin{aligned}
 U_M &= \int H dB = \frac{1}{\mu} \int B dB = \frac{1}{\mu} \int_0^B x dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot B^2 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot B \cdot H
 \end{aligned} \quad [\frac{\text{J}}{\text{m}^3}] \quad (7.6)$$

Denne energi er *ikke* gået tabt; den oplagres og afleveres igen i hver periode, ligesom ladingen på en kondensator i et vekselstrømskredsløb. Jern, der har en smal hysteresesløjfe kaldes (magnetisk) blødt jern.

Materialer med stor remanensens og koercivitet kaldes *hårdt jern*. Disse materialer er velegnet til lagring af data, og de anvendes til alle former for magnetbånd (kassettebånd, videobånd, datamat-lagerbånd), disketter (floppy-disk, harddisk) og tidligere tiders feritlagre. Hysteresekurven for hårdt jern er vist på figur 7.5.

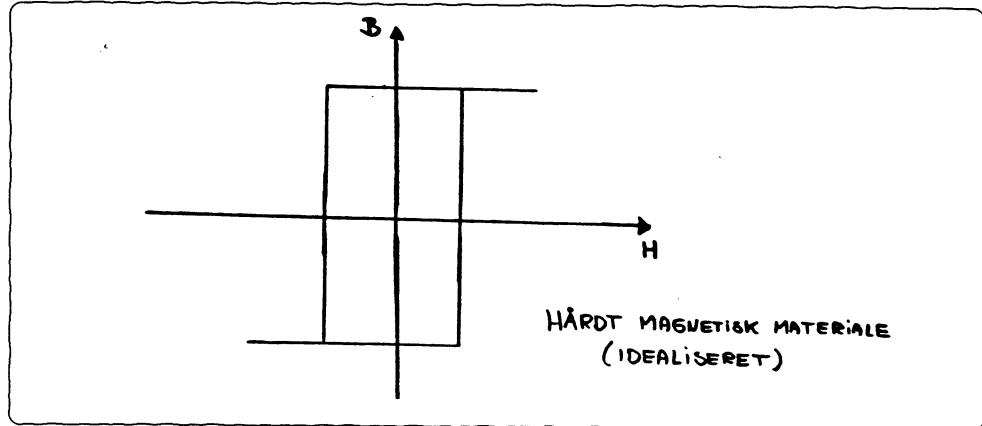


Fig. 7.5. Hysteresekurve for magnetisk hårdt jern. Materialer med denne egenskab er velegnet til magnetisk lagring af data.

7.3 B-H diagrammer

Hysteresekurven afbilder jernets induktion, B som funktion af den magnetisering H , jernet er udsat for.

Kurven er ulineær og vi må anvende grafiske metoder, når vi skal analysere magnetiske kredsløb. Der kan stadigvæk anvendes elektrisk kredsløbsanalogi, thi også indenfor kredsløbsteorien arbejder vi med ulineære elementer, tænk fx. på diode- og transistor-kredsløb. Modstanden igennem en diode afhænger af den påtrykte spænding, akkurat som μ for en transformørkerne afhænger af den påtrykte H .

I dette afsnit vil vi uddybe behandlingen af et simpelt magnetisk kredsløb med en luftspalte. Dette eksempel er en god repræsentant for de problemer, der kan mødes i mere indviklede kredsløb.

7.4 Permeabilitet

Følgende permeabilitetsbegreber, som er illustreret grafisk på figur 7.7 , anvendes (se figur 7.6).

μ_0	Vakuumpermeabiliteten, $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$
μ_r	Relativ permeabilitet, $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$
μ_i	Initialpermeabilitet, μ for små B -værdier
μ_{\max}	Maximal permeabilitet
μ_{ac}	Inkremental permeabilitet
μ_{av}	μ over for små ændringer
	Middelpermeabiliteten

Fig. 7.6. Permeabilitetsbegreber.

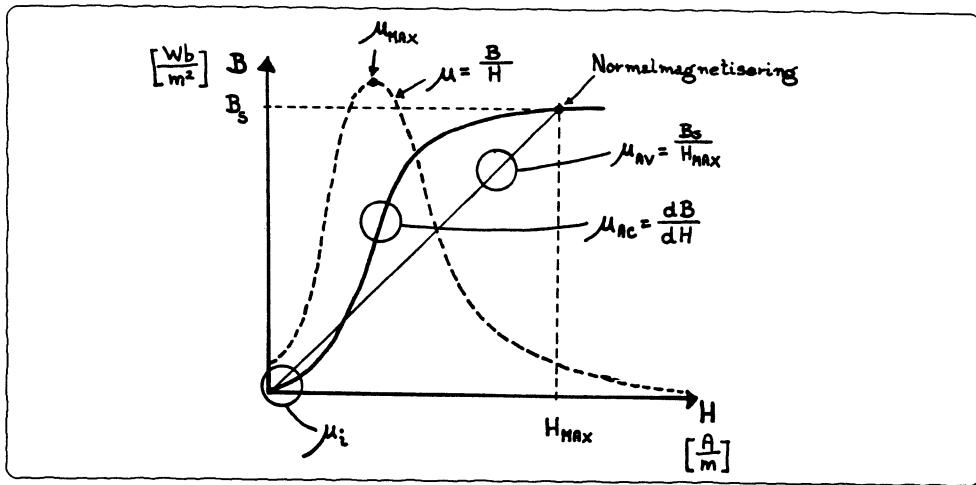


Fig. 7.7. Grafisk anskueliggørelse af de forskellige permeabiliteter for et ferromagnetisk materiale.

Kurven, der er vist på figur 7.7, gælder for *jævnstrømsmagnetisering*, og det er den såkaldte *jomfrukurve*, hvilket betyder, at jernet ikke har været magnetiseret før.

På kurven findes:

B_s Mætningsfluxtæthed. Den fluxtæthed, hvor $\mu_{ac} \approx \mu_0$

H_{max} Den magnetisering, der skal til for at opnå B_s i jernet.

Slutværdien for μ (for voksende H) er $\mu_0 \text{ H/m}$, hvorimod slutværdien for μ_{ac} er μ_0 , dvs. jernets stigning i fluxtæthed er den samme, som hvis det blot havde været luft.

7.5 Magnetisering af jern

Foretages der en magnetisering med vekselstrøm fås den karakteristiske hysteresesløjfe, om hvilken, der kort kan siges:

1. *Remanensen*, B_r er den blivende induktion, der bliver tilbage i jernet, når magnetiseringen fjernes.
2. *Koercitivkraften*, H_c er den modsat rettede magnetisering, der skal til for at fjerne remanensen.
3. Forholdet $\frac{B_s}{B_r}$ kaldes kurvens *firkantethed*, s (squareness).
4. Kurvens areal er udtryk for den energi pr. volumen, der bliver til varme, ved én tur rundt i kurven. Måles i $\frac{J}{m^3}$.
5. Magnetisk *blødt* materiale har en smal sløjfe; dvs. lille H_c , B_r og s , samt lille hysteresetab.
6. Magnetisk *hårdt* materiale har en firkantet sløjfe, dvs. høj H_c og B_r , samt stort tab. Firkantetheden er ca. 1.

Undertiden anvendes følgende formel som tilnærmelse til hysteresesløjfen:

$$B = B_s \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{H - H_c}{H_c} \cdot \operatorname{tg}(\pi \cdot \frac{s}{2}) \right] \quad [\frac{Wb}{m^2}] \quad (7.7)$$

På figur 7.8 er vist en typisk hysteresekurve for blødt jern.

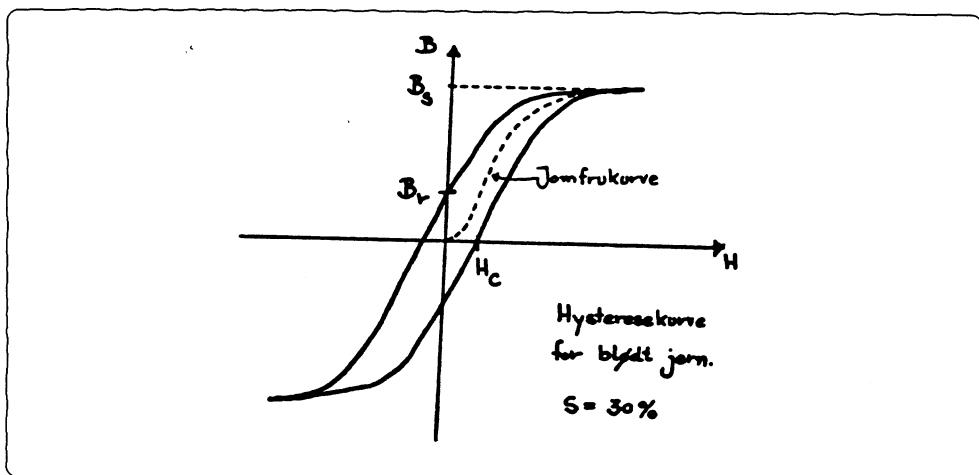


Fig. 7.8. Hysteresekurve for blødt jern. Kurvens firkantethed s er 0,3 (eller 30%).

Foretages der en jævnstrømsmagnetisering med overlejret vekselsstrømsmagnetisering, fås den såkaldte *anhysteriske remanenskurve*, se figur 7.9 og 7.10.

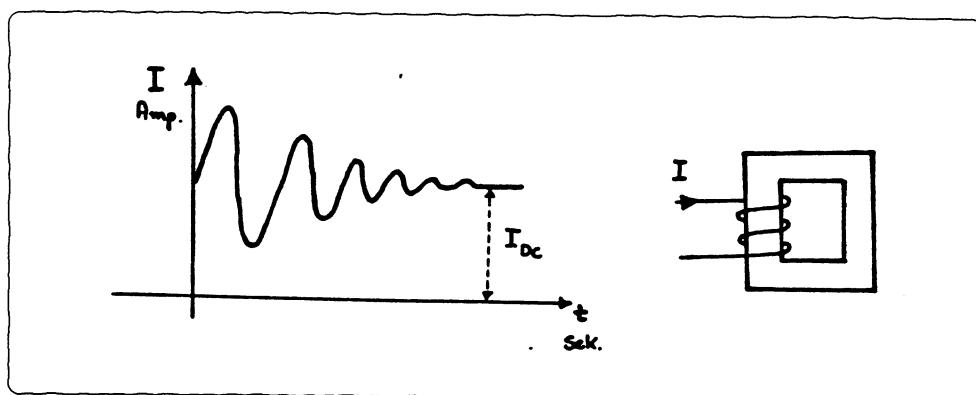


Fig. 7.9. Illustration af en metode til måling af den anhysteresiske remanenskurve.

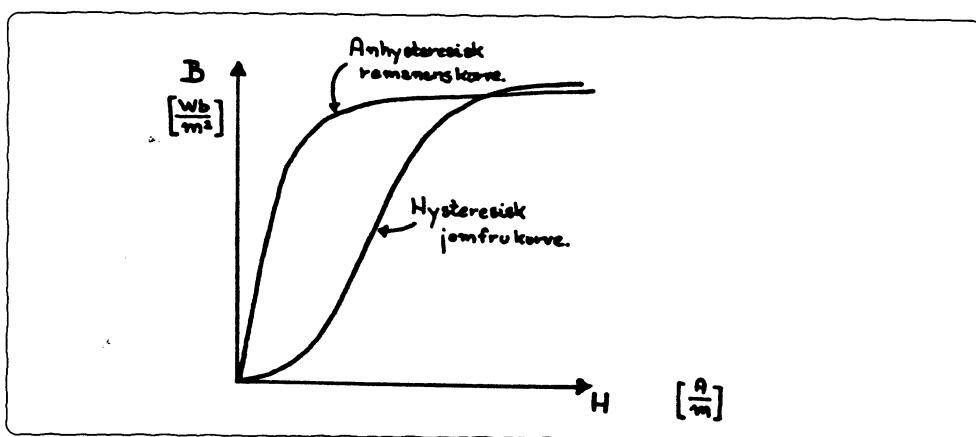


Fig. 7.10. Et eksempel på en anhysteresisk remanenskurve.

Denne kurve anvendes fx. når man analyserer båndoptagerhoveder med AC-formagnetisering.

Når vi skal analysere jernkerner til transformatorer, kan vi med en god tilnærmelse regne med jomfrukurven, fordi transformerjern fremstilles så blødt som muligt, hvilket vil sige, at hysteresesløjfen er meget smal, se figur 7.11 .

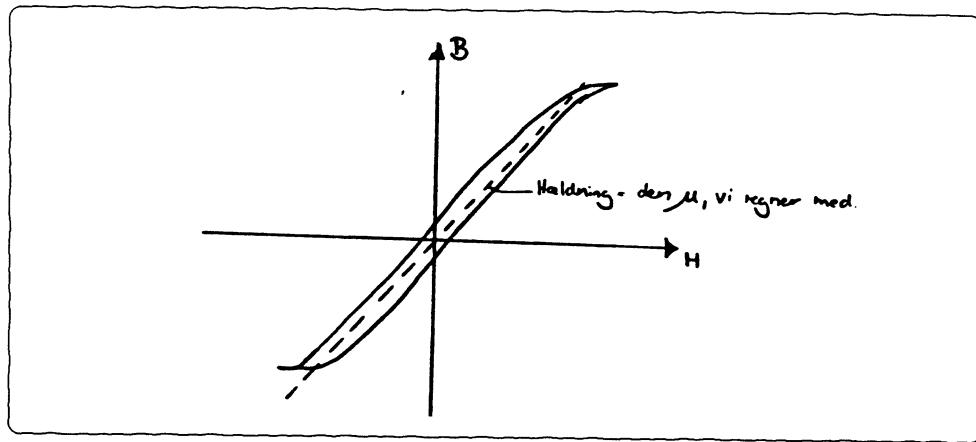


Fig. 7.11. Et eksempel på en hysteresekurve for transformérjern. Kurven beskriver blødt jern, og den er meget smal, hvilket betyder, at energitabet er lille, samt at jomfrukurven ikke er meget forskellig fra hysteresekurven.

Typiske tal for godt siliciumlegeret transformérjern er:

$$\begin{aligned}
 B_s &= 1,8 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \\
 H_{\max} &= 13.000 \frac{\text{A}}{\text{m}} \\
 U_M &= 300 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Det reelle hysteresesatab er altså 300 J/m^3 . Produktet af B_s og H_{\max} er:

$$B_s \cdot H_{\max} = 1,8 \cdot 13.000 = 23.400 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Sløjfens areal er altså $300 / 23.400 = 1,3\%$ af den „omskrevne firkant“. (Almindelige værdier af U_M for transformérjern er $10 - 500 \text{ J/m}^3$, se også side 101)

7.6 B-H-diagrammer

For almindelige mennesker er BH-kurver ret vanskelige at analysere og måle nøjagtigt, dels fordi jernet er ulineært, og dels fordi man som regel mangler konkrete oplysninger om jernet. Selv jernfabrikantens datablad angiver meget store tolerancer. Endvidere er det vanskeligt ved målinger at kontrollere sine resultater.

Tabel over BH-værdier

På figur 7.12 er vist en tabel over BH-værdier for almindeligt trafojern for og siliciumlegeret trafojern (kendes på at lamellerne er lette at bøje samtidigt med at de knaser lidt). Tabellen viser et typisk eksempel på de nævnte jerntyper. På figurerne 7.13 og 7.14 er tabellen afbildet grafisk.

B $\frac{Wb}{m^2}$	Alm. trafojern		Siliciumlegeret	
	H A/m	μ_r	H A/m	μ_r
	—	—	—	—
0,2	48	3.340	40	4.000
0,4	69	4.600	56	5.720
0,6	88	5.450	72	6.670
0,8	118	5.400	102	6.250
1,0	181	4.380	158	5.020
1,2	306	3.120	287	3.340
1,4	867	1.280	780	1.430
1,6	3.422	372	3.772	338
1,8	11.857	121	13.130	109

Fig. 7.12. Tabel over samhørende værdier af B , H og μ_r for to typer jern, der anvendes til transformatorer.

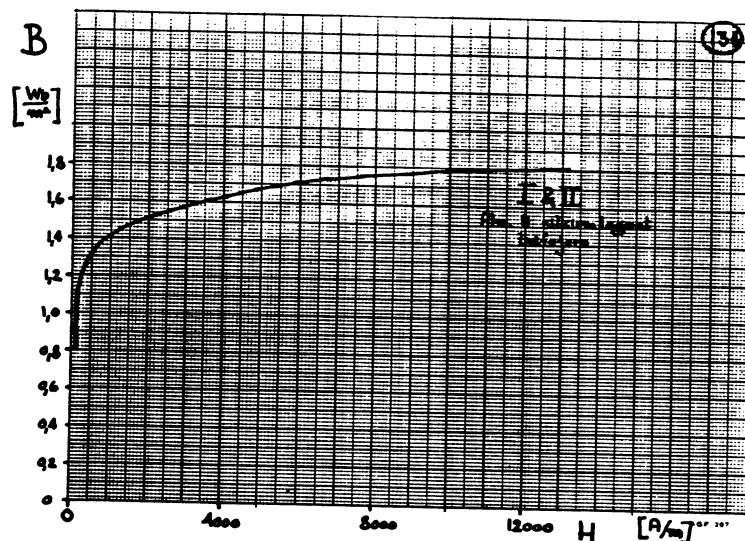
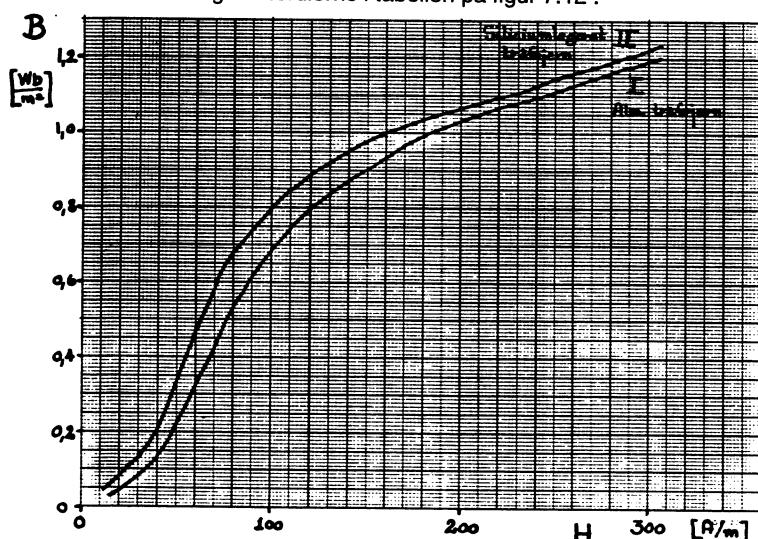


Fig. 7.13. Grafisk afbildning af værdierne i tabellen på figur 7.12 .

Fig. 7.14. Grafisk afbildning for de små B - og H -værdier i tabellen på figur 7.11 .

På figurerne 7.15 og 7.16 er vist BH-diagrammer for forskellige typer transformatorjern efter *Edminster* i kildelisten.

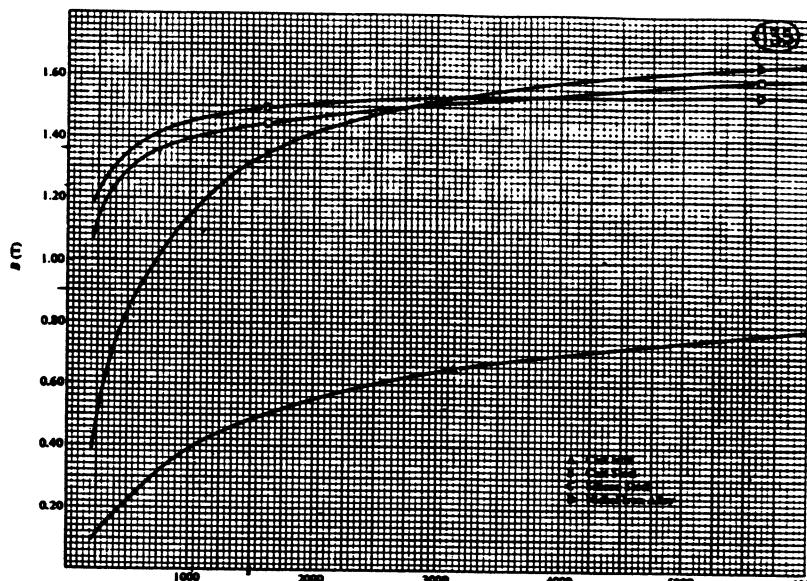


Fig. 7.15. Grafisk afbildning af B - og H -værdierne for typiske materialer til transformerkerner.

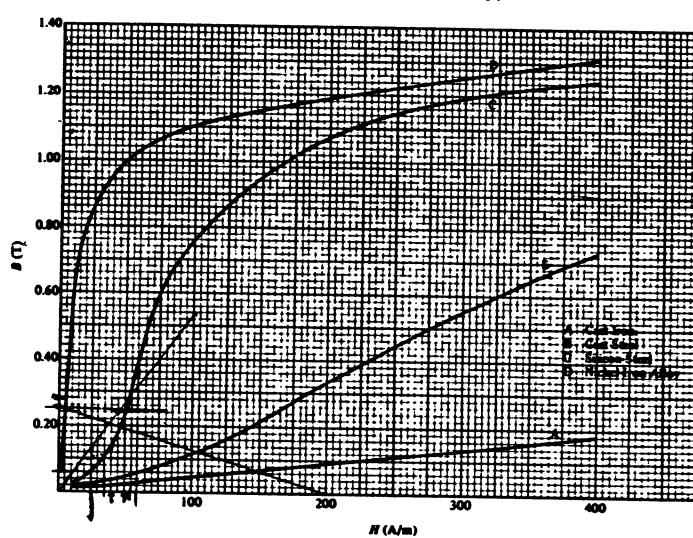


Fig. 7.16. Grafisk afbildning for de små B - og H -værdier på figur 7.15 .

På figur 7.17 er vist en kurve, der er beregnet efter formlen:

$$B = B_s \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{H - H_c}{H_c} \cdot \operatorname{tg} \left(\pi \cdot \frac{s}{2} \right) \right] \quad [\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}] \quad (7.9)$$

Følgende værdier er anvendt:

$$\begin{aligned}
 B_s &= 2 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \\
 B_r &= 0,6 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \\
 H_c &= 700 \frac{\text{A}}{\text{m}} \\
 s &= 0,3
 \end{aligned}$$

Kurven er lavet i MATLAB med nedenstående program, der først er kørt med $H_c=700$ og bagefter med $H_c=-700$.

```

Bs=2;
Hc= 700; % (Anden gang kres Hc=-700)
s= 0.3; % Firkantethed Br=Bs*s
Faktor= tan(pi*s/2);
Vinkel= atan(sign(Hc)*Faktor*(H-Hc)./Hc);
B= (2*Bs/pi).*Vinkel;
plot(H,B);

```

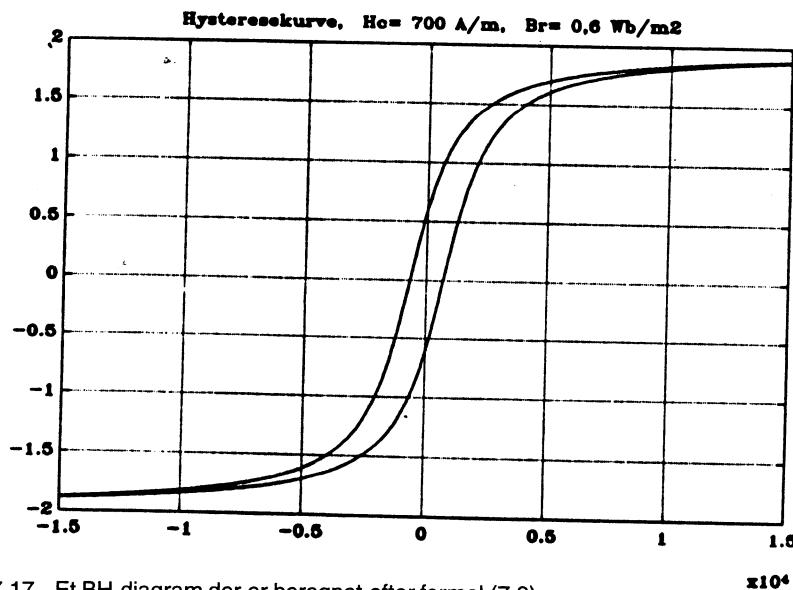


Fig. 7.17. Et BH-diagram der er beregnet efter formel (7.9).

8

Litteraturliste

1. Halliday, D. & Resnick R.:
Physics. Part I & Part II
John Wiley & Sons, Inc., USA, 1966.
ISBN 047-134528-8.
2. Edminister, Joseph A.:
Electromagnetics
Schaum's Outline Series.
McGraw-Hill Book Comp., USA, 1979.
ISBN 007-018990-0.
3. Cheng, David K.:
Field and Wave Electromagnetics.
Addison-Wesley Publ. Comp., USA, 1983.
ISBN 020-110132-7.
4. Lorrain, P., Corson, D.P. & Lorrain, F.:
Electromagnetic Fields and Waves, 3.ed.
W.H. Freeman & Comp., New York, USA, 1987.
ISBN 071-671869-3.
5. Christopoulos, Christos:
An Introduction to Applied Electromagnetism
John Wiley & Sons, England, 1990
ISBN 047-192761-9.

9

Formler

9.1 Størrelser og enheder

Elektriske			Magnetiske		
Elektrisk fluxtæthed	\bar{D}	$\frac{C}{m^2}$	Magnetisk fluxtæthed	\bar{B}	$\frac{Wb}{m^2}$
Elektrisk feltstyrke	\bar{E}	$\frac{V}{m}$	Magnetisk feltstyrke	\bar{H}	$\frac{A}{m}$
Elektrisk flux, ladning	\bar{Q}	C	Magnetisk flux	$\bar{\Phi}$	Wb
Kapacitet	C	$F = \frac{As}{V} = \frac{C}{V}$	Selvinduktion	L	$H = \frac{Vs}{A} = \frac{Wb}{A}$

9.2 Definitions ligninger

E-felter

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{\bar{\mathbf{F}}}{Q} \quad [V/m] \quad (9.1)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \varepsilon \bar{\mathbf{E}} \quad [C/m^2] \quad (9.2)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \quad [F/m] \quad (9.3)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \quad F/m \quad (9.4)$$

M-felter

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{|\bar{\mathbf{F}}|}{|I\Delta\ell|} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad [Wb/m^2] \quad (9.5)$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\bar{\mathbf{F}} \times I\Delta\ell}{|\bar{\mathbf{F}} \times I\Delta\ell|} \quad (9.6)$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \cdot \bar{\mathbf{B}} \quad [\text{A/m}] \quad (9.7)$$

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r \quad [H/m] \quad (9.8)$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \quad H/m \quad (9.9)$$

9.3 Love

Coulomb

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot d^2} \cdot \hat{\mathbf{D}} \quad [\text{N}] \quad (9.10)$$

Laplace

$$d\bar{\mathbf{F}} = I d\bar{l} \times \bar{\mathbf{B}} \quad [\text{N}] \quad (9.11)$$

Bio-Savart

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{I\mu}{4\pi} \oint_C \frac{d\bar{l} \times \hat{\mathbf{d}}}{a^2} \quad \left[\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \right] \quad (9.12)$$

Ampère

$$\text{mmf} = \oint_C \bar{\mathbf{H}} \bullet d\bar{l} = H \cdot \ell = NI = \int_S \bar{\mathbf{J}} \bullet d\bar{a} \quad [\text{Av}] \quad (9.13)$$

Faraday

$$\text{emf} = - \int_S \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{B}} \bullet d\bar{a} = - \frac{d}{dt} \Phi \cdot N = - \frac{d}{dt} \Lambda = \oint_C \bar{\mathbf{E}} \bullet d\bar{l} \quad [\text{V}] \quad (9.14)$$

9.4 Kredsløbselementer

Kapacitet

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} \quad [\text{A}] \quad (9.15)$$

$$I = C \cdot \frac{dV}{dt} \quad [\text{A}] \quad (9.16)$$

$$C = \frac{dQ}{dV} \quad [\text{F}] \quad (9.17)$$

$$C = \frac{A\varepsilon}{d} \quad [\text{F}] \quad (9.18)$$

Selvinduktion

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{d\Lambda}{di} \cdot \frac{di}{dt} \quad [\text{V}] \quad (9.19)$$

$$-V = L \cdot \frac{dI}{dt} \quad [\text{V}] \quad (9.20)$$

$$L = \frac{d\Lambda}{dI} \quad [\text{H}] \quad (9.21)$$

$$L = \frac{A\mu}{\ell} \cdot N^2 \quad [\text{H}] \quad (9.22)$$

Gensidig induktion

$$L_{21} = \frac{d\Lambda_{21}}{dI_1} \quad [\text{H}] \quad (9.23)$$

$$\Lambda_{21} = \Phi_{21} \cdot N_2 \quad [\text{WbV}] \quad (9.24)$$

$$\Phi_{21} = \int_{A_2} \bar{\mathbf{B}}_1 \bullet d\bar{a} = \Phi_{11} \cdot \xi \quad [\text{Wb}] \quad (9.25)$$

Induktionen fra kreds 1 på kreds 2:

$$L_{21} = L_{12} \quad [\text{H}] \quad (9.26)$$

$$V_1 = L_{11} \cdot \frac{d}{dt} I_1 \quad [\text{V}] \quad (9.27)$$

$$V_2 = L_{21} \cdot \frac{d}{dt} I_1 \quad [\text{V}] \quad (9.28)$$

9.5 Feltberegning

E-felt om punktladning

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{Q_p}{4\pi\varepsilon \cdot d^2} \cdot \hat{\mathbf{d}} \quad [\frac{\text{V}}{\text{m}}] \quad (9.29)$$

M-felt om lang, lige leder

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{I\mu}{2\pi d} \cdot \hat{\varphi} \quad [\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}] \quad (9.30)$$

Potentiale

$$V = - \int_C \bar{E} \bullet d\bar{l} \quad [V] \quad (9.31)$$

9.6 Magnetiske kredsløb

Størrelse	Enhed	Formler	Analogi
mmf, F	Av	$NI = H\ell$	spænding
Φ	Wb	$\Phi = B \cdot A$	strøm
\mathcal{R}	$\frac{A}{Wb}, \frac{1}{H}$	$\frac{\ell}{\mu A}$	modstand

Ohms lov for magnetiske kredsløb:

$$\text{mmf} = \Phi \cdot \mathcal{R} \quad [\text{Av}] \quad (9.32)$$

Stikordsregister

A

absolut enhedssystem, 32
 Ampères lov, 115
 Ampères lov ved transformere, 65
 Ampères spoleformel, 74
 amperevindinger, 64, 67
 analogi, elektrisk, 85
 analogier, 82
 anhysteresisk remanenskurve, 104

B

B-felt, 57
 BIL-reglen, 58
 Biot-Savarts lov, 59, 115
 Blakeys formel, 73
 blødt jern, 101, 104
 B_r , 104

C

Coulombs lov, 39, 39, 115

D

determinantnotation, 19
 diamagnetisme, 97
 dielektricitetskonstant, 34, 40

E

elektrisk analogi for magnetkredsløb, 85
 elektrisk felt, 114
 elektrisk feltstyrke, 38
 elektronens ladning, 37
 energi, magnetisk oplagret, 101
 energitab ved magnetisering, 100
 enheder, EM-, 113
 enhedssystemer, 32
 EQS, 5

F

f for luftspalte, 88
 F , symbol for mmf, 85
 farad, 116
 Faradays lov, 66, 115
 fasor, 26
 felt, elektrisk, 114
 felt, irrotationelt, 25
 felt, kilde-, 43
 felt, konservativt, 24
 felt, magnetisk, 114
 felt, potentiale, 22
 felt, skalar-, 12
 felt, vektor-, 12
 feltlinier, 42
 feltstyrke elektrisk, 38
 feltstyrke, magnetisk, 57, 62
 ferromagnetisme, 97
 Φ -felt, 57
 firkantetethed af hysteresekurve, 104
 fladeelement, 60
 flux, omfattet, 68
 fluxtæthed, magnetisk, 57
 formler for spoler, 72
 Fourierrække, 26
 funktioner, orthogonale, 26
 fælles omsluttet flux, 75

G

gauss, 57
 gensidig induktion, 75, 117
 Georgi enhedssystem, 32

H

harmoniske signaler, 26
 H_c , 104
 henry, 71, 116
 H-felt, 57, 62

HILS-medier, 41, 97
 historie, elektricitetens, 6
 hysteresekurve, 99
 hysteresesløjfe, 104
 højrehåndet system, 11
 hårdt jern, 101, 104

I

Idl, 58
 indre produkt, 17
 induktion (B), 102
 induktion, gensidig, 75, 117
 initial permeabilitet, 102
 inkremental permeabilitet, 102
 integral, kurve, 21
 irrotationelt felt, 25

J

jernlignende stoffer, 98
 jomfrukurve for jern, 103

K

kapacitet, 52, 116
 kapaciteten af en kugle, 54
 karthesiske koordinater, 10
 kildefelt, 43
 koercitikkraft, 104
 koercitivkraft, 99
 komplex symbolsk notation, 26
 kondensator, plade-, 55
 konduktans, specifik, 49
 konduktivitet, specifik, 83
 konservativt felt, 24
 koordinatsystemer, 10
 korrektsfaktor for luftspalte, 88
 kraftlinietal, magnetisk, 57
 kraftlinietæthed, magnetisk, 57
 kredsløb, magnetisk, 118
 kredsløb, magnetiske, 83
 krydsprodukt, 19
 KSN, 26
 kurveintegral, 21

L

ladning, 37
 ladningstæthed, 44
 Λ , 71, 84
 Laplaces lov, 58, 115
 ledeevne, magnetisk, 84
 ledningsevne, specifik, 49
 Lenz' lov, 66
 lillefingerreglen, 58
 linieelement, 21
 luftspalte i magn. kredsløb, 87
 luftspalte, lille, 89
 lyshastigheden, 33

M

magnetfelt, 114
 magnetisering (H), 102
 magnetisering, energitab ved, 100
 magnetisk blødt jern, 101
 magnetisk blødt materiale, 104
 magnetisk feltstyrke, 57, 62
 magnetisk fluxtæthed, 57
 magnetisk fluxtæthed, definition, 59
 magnetisk hårdt materiale, 104
 magnetisk kraftlinietal, 57
 magnetisk kredsløb, 118
 magnetisk ledeevne, 84
 magnetisk modstand, 84
 magnetisk oplagret energi, 101
 magnetiske kredsløb, 83
 magnetiske monopoler, 48
 maximal permeabilitet, 102
 maxwell, 57
 mediekonstanter, 34
 mediekonstanter for vakuum, 34
 middelpermeabilitet, 102
 MKSA enhedssystem, 32
 mmf, 85
 modstand, magnetisk, 84
 MQS, 5
 μ , 57
 mætningsfluxtæthed, 103

O

- Ohms lov, 51
 Ohms lov for magnetfelter, 118
 omfattet flux, 68
 omsluttet flux, 71
 optiske frekvenser, 41
 orthogonale funktioner, 26
 orthogonale vektorer, 18
- P**
 paramagnetisme, 97
 permeabilitet, 34, 57, 98
 permeabilitetsbegreber, 102
 permeans, 84
 permittivitet, 34
 permittivitet, eksempler, 40
 pladekondensator, 55
 potentiale, elektrisk, 118
 potentiælfelt, 22, 45
 pr. henry (permeans), 84
 prikprodukt, 17
 produkt, indre, 17
 produkt, ydre, 19
 punktladning, elektrisk felt om en, 42
- Q**
 quarks, 37
- R**
 rationaliseret enhedssystem, 32
 ratonaliseret Georgi-system, 32
 reciprocitetssætningen, 76
 rektangulært koordinatsystem, 10
 remanens, 99, 104
 residualmagnetisme, 99
 resistans, specifik, 83
- S**
 selvinduktion, 71, 116
 SI, enhedssystem, 32
 σ , 83
 skalarfelt, 12
 skalarprodukt, 17
 specifik konduktivitet, 83, 83
 specifik ledningsevne, 49
- spoler, formler for, 72
 spændingsgradient, 45
 squareness, 104
 strømmoment, 58
 størrelser, EM-, 113
 supertunge magnetiske monopoler, 48
- T**
 tensor, 40, 97
 tesla, 57
 tidsvektor, 26
 transformatorer, materialer for, 100
 transformerjern, 100
 transformerkerne, 65
 tæthed, ladnings-, 44
- U**
 ulineære magnetiske medier, 97
- V**
 vakuum, mediekonstanter for, 34
 vakuumpermeabiliteten, 57
 vektorfelt, 12
 vektorprodukt, 19
 viser, 26
 volumar ladning, 44
- W**
 weber, 57
 webervindinger, 70, 71
 Wheelers formel, 72
- Y**
 ydre produkt, 19
- Ø**
 ørsted, 57

