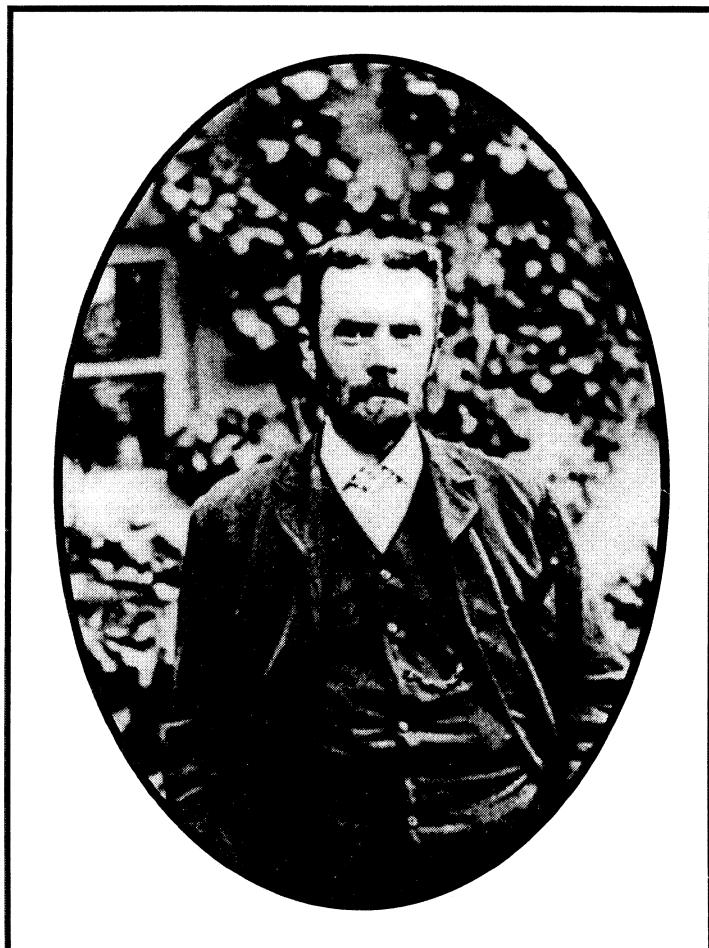


Grundlæggende Transmissionsledningsteori



Hans Ebert og Povl Raskmark

Aalborg Universitet 1998



Forord

Nærværende note er bestemt til anvendelse ved undervisningen i grundlæggende transmissionsledningsteori ved Institut for Elektroniske Systemer, Aalborg Universitet. Noten er tilvirket på grundlag af tidligere undervisningsnoter, der har været anvendt siden 1985. Udvalget og behandlingen af emner er direkte tilpasset niveauet, notationen og didaktikken i øvrigt i det tilhørende kursus. Det er forudsat, at læseren er bekendt med kredsløbsteorien herunder kompleks symbolsk notation. I appendiks findes en repetition af den komplekse symbolske metode i det omfang, denne disciplin skal anvendes i kurset.

Der findes mange eksempler noten igennem. Nogle af disse kan uden ulempe overspinges ved læsning, medens andre er et væsentlig supplement til forståelsen af stoffet. Det overlades til læseren selv at foretage en vurdering i de enkelte tilfælde. For at gøre noten mere anvendelig som opslagsbog er den forsynet med et stikordsregister. Bagest i noten findes en litteraturliste, hvori der uddover kildematerialet er angivet relevant supplerende litteratur.

De fysiske størrelser og enheder, der bruges i noten, er i overenstemmelse med SI (Système Internationale d'Unites) og dansk standard. Som nævnt er noten tilpasset et kursus i *grundlæggende* transmissionslednings teori, og den skal derfor ikke opfattes som en udtømmende reference udi teorien, dertil er den for kortfattet og begrænset i emnevalg. Noten er disponeret således, at hvert afsnit svarer til en kursusgang (et minimodul).

Der skal rettes en tak til sekretærerne ved Institut for elektroniske systemer, der har hjulpet med renskrivning af teksten: Karin Lange, Inge Lis Wollesen, Berit Christensen og Helle Sørensen. Og ikke mindst en tak til Søren Laursen, der har rentegnet figurene. Endvidere er vi de mange studerende, der i årene har fulgt det tilhørende kursus, taknemmelig for deres velvillige interesse, kritik og fejlfinding.

3. udgave, 2. revision, august 1998.

Afdeling for Kommunikationsteknologi, Institut for Elektroniske Systemer,
Aalborg Universitet.

Hans Ebert og Povl Raskmark

Forsidebillede:

Oliver Heaviside 1850 - 1925, engelsk elektrotekniker og fysiker. Heaviside har ydet meget betydningsfulde bidrag til transmissionslednings- og elektromagnetisk feltteori.

Indholdsfortegnelse

1 Model af ledninger	1
1.1 Kredsløbsmodel af ledninger	1
1.1.1 Model for et lille kabelstykke	1
1.2 Tabsfrit tilfælde	2
1.2.1 Løsning af bølgeligningerne	3
1.2.2 Spændingsudbredelse	4
1.2.3 Løsning for strømmen	7
1.2.4 Almindelige betegnelser	7
1.3 Refleksioner	8
1.3.1 Refleksionsfrit tilfælde	10
1.3.2 Tilfælde med refleksion	11
1.3.3 Refleksionsdiagrammer	14
2 Løsning med harmoniske signaler	23
2.1 Telegrafligningen med harmoniske signaler	23
2.1.1 Løsning til bølgeligningerne	24
2.1.2 Tabsfrit tilfælde	25
2.1.3 Løsning for strømmen	27
2.2 Generaliseret refleksionskoefficient og impedans	29
2.2.1 Generaliseret refleksionskoefficient	30
2.2.2 Generaliseret impedans	32
2.2.3 Spændings- og strømrefleksionskoefficienter	33
2.3 Forskellige modeller	38
2.3.1 Generelt tilfælde	38
2.3.2 Tabsfrit kabel	39
2.3.3 Forvrængningsfrit kabel	39
2.3.4 Kabler med små tab	41
2.3.5 Telefonkabler	43
2.3.6 Om valg af model	44
3 Signalforløb på ledningen	45

3.1	Spændingsforløb på ledningen	45
3.1.1	Regning med refleksionskort	45
3.1.2	Regning med ligninger	46
3.1.3	Regning over grænser	47
3.2	Matrix beskrivelse	49
3.2.1	Udledning af parametrene	50
3.2.2	Ækvivalent kredsløb	52
3.3	Stående bølger	54
3.3.1	Standbølgekurve	56
3.3.2	Standbølgeforsyning	61
3.4	Måling af standbølgeforsyning	64
3.4.1	Spændingsmåling langs kablet	64
3.4.2	Galvanisk tilkoblet resistiv reflektometer.	65
3.4.3	Løst tilkoblet reflektometer	67
3.5	Problemer med stående bølger	67
4	Smithkortet	68
4.1	Kortets konstruktion	70
4.2	Lidt matematik	76
4.3	Anvendelse af Smith-kortet	78
4.3.1	Standbølgeforsyning	78
4.3.2	Impedans/admittans transformationer	79
4.3.3	Serie tilpasning	81
4.3.4	Åbne og lukkede stubbe	83
4.3.5	Enkeltstubtilpasning	85
4.3.6	Andre tilpasninger	88
4.3.7	Kvartbølgertilpasning	89
5	Ledningstab og effektberegninger	93
5.1	Tab på ledninger	93
5.1.1	Attenuationskonstanten	93
5.2	Effektberegninger	97
5.2.1	Effekt på det tabsfri kabel	100
5.2.2	Afsluttende bemærkninger til effektberegninger	104

Appendices	105
A Formel resumé	106
B Kompleks symbolsk notation	110
C Koaxial- og parallellede konstanter	115
D Oversigt over kabeltyper	119
E Mikrostrip	122
F Smithkort	125
Litteraturliste	127
Stikordsregister	128

1 Model af ledninger

1.1 Kredsløbsmodel af ledninger

Ledninger består af to ledere, der over en lang strækning er anbragt i nærheden af hinanden med et isolationsmateriale (der kan være luft) imellem. Der vil være en vis ohmsk modstand i lederne og en vis afledning imellem dem. Endvidere udviser lederne en vis selvinduktion, ligesom der vil være en vis kapacitet imellem dem. Disse karakteristika kaldes ledningens *primære konstanter* og de opgives i Ω , S, H og F pr. meter. Komponenterne findes fint spredt ud over hele ledningen, vi taler om et system med *fordelte parametre*.

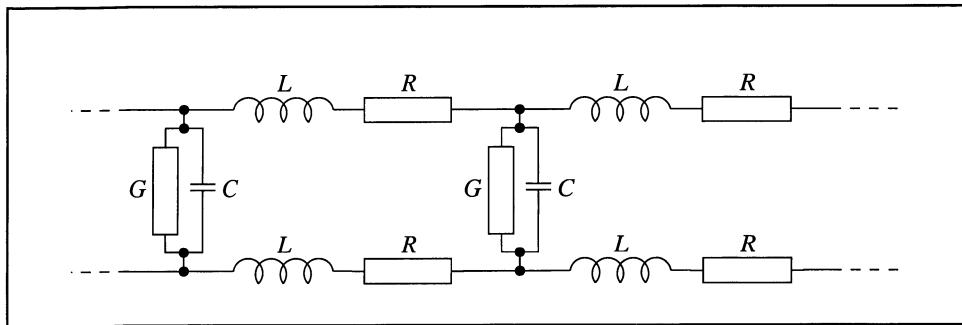


Fig. 1.1. En del af et kabel med fordelte model parametre.

1.1.1 Model for et lille kabelstykke

En smule ukorrekt kan følgende model opstilles for et kabelstykke med længden dx meter.

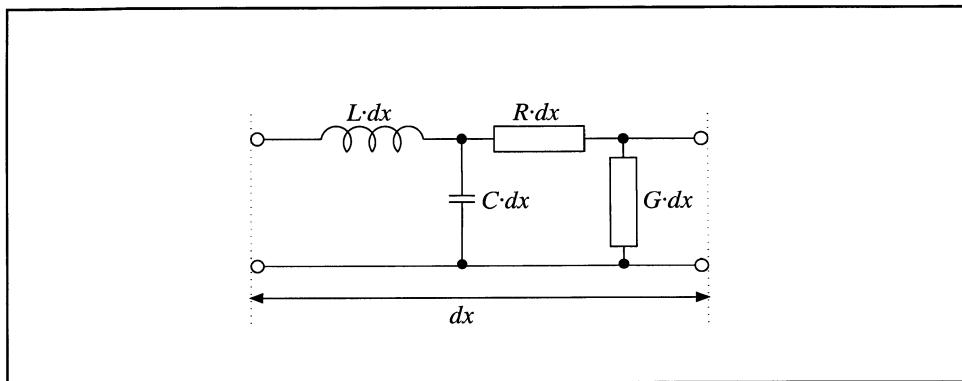


Fig. 1.2. Et meget lille stykke (dx) af en ledning.

De primære konstanter og deres enheder er:

L	C	R	G
H/m	F/m	Ω/m	S/m

Spændingsændringen over kabelstykket på dx m kan opskrives således:

$$dV_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx \quad (1.1)$$

$$dV_x = \frac{\partial I}{\partial t} \cdot L \cdot dx + I \cdot R \cdot dx \quad (1.2)$$

hvoraf fås:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial I}{\partial t} \cdot L - I \cdot R \quad (1.3)$$

Strømændringen over kabelstykket på dx m kan ligeledes udtrykkes således:

$$dI_x = -\frac{\partial I}{\partial x} \cdot dx = \frac{\partial V}{\partial t} \cdot C \cdot dx + V \cdot G \cdot dx \quad (1.4)$$

hvoraf fås:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial t} \cdot C - V \cdot G \quad (1.5)$$

Vi differentierer (1.3) partielt mht. x og (1.5) partielt mht. til t :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t} \cdot L - \frac{\partial I}{\partial x} \cdot R \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \cdot C - \frac{\partial V}{\partial t} \cdot G \quad (1.7)$$

Ved at indsætte (1.7) i (1.6) fås:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \left[LG \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + CR \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot GR \right] \quad (1.8)$$

For tilsvarende udtryk med strømmen I kan fås på samme måde:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + \left[LG \cdot \frac{\partial I}{\partial t} + CR \cdot \frac{\partial I}{\partial t} + I \cdot GR \right] \quad (1.9)$$

1.2 Tabsfrit tilfælde

Vi betragter tilfældet, hvor G og R er meget små eller ihvertfald hvor første led i (1.3) og (1.4) er dominerende. De tidligere viste ledninger simplificeres nu til de såkaldte *telegraf-ligninger*:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial I}{\partial t} \cdot L \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial t} \cdot C \quad (1.11)$$

Disse kan (som ved (1.8) og (1.9)) kombineres til de såkaldte éndimensionelle *bølgeligninger*.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad (1.13)$$

Undertiden kaldes (1.12) og (1.13) også telegrafligningerne. Matematisk set er de lineære, homogene, 2. ordens partielle differentialligninger. Løsningsmetoderne for at finde $V(x,t)$ og $I(x,t)$ - spænding og strøm på kablet - vil vi ikke komme ind på her; vi overtager den løsning matematikerne har fundet.

1.2.1 Løsning af bølgeligningerne

Vi ser på løsningen for $V(x,t)$, idet løsningen for $I(x,t)$ må være af samme form. Enhver funktion af $(t \pm \sqrt{LC}x)$ er en løsning til (1.12) fx. :

$$V(x,t) = \sin \omega (t + \sqrt{LC}x), \quad V(x,t) = \cos \omega (t - \sqrt{LC}x), \quad (1.14)$$

$$V(x,t) = e^{-(t-\sqrt{LC}x)}, \quad V(x,t) = (t - \sqrt{LC}x)^3. \quad (1.15)$$

Den komplette løsning er summen af alle specielle løsninger og vi skriver den:

$$V(x,t) = V^+ (t - \sqrt{LC}x) + V^- (t + \sqrt{LC}x) \quad (1.16)$$

hvor $V^+(x,t)$ og $V^-(x,t)$ foreløbigt er uspecificerede funktioner. Vi vil senere se, hvorfor der er anvendte betegnelserne $V^+(x,t)$ og $V^-(x,t)$ for de 2 funktioner.

Endvidere udtrykkes faktoren \sqrt{LC} altid således:

$$\sqrt{LC} = \frac{1}{v} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.17)$$

v kaldes *udbredelseshastigheden*. Enheden for v bliver meter pr. sekund:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{V \cdot s}{A \cdot m} \cdot \frac{A \cdot s}{V \cdot m}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{s^2}{m^2}}} = \frac{m}{s}$$

Eksempel 1.1

I laboratoriet kan man måle L og C ved fx. at måle strøm- og spændingskurveformer på 1 m af kablet. For parallelederne (lederradius a , afstand mellem leder centre D) og koaksialkabler (inderlederradius a , yderlederradius b) kan L og C findes ved følgende formler:

Parallel	Koaksial	Enhed
$L = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{D}{a}$	$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$	H/m
$C = \pi \epsilon \frac{1}{\ln \frac{D}{a}}$	$C = 2\pi \epsilon \frac{1}{\ln \frac{b}{a}}$	F/m

μ og ϵ er hhv. permeabiliteten og permittiviteten af isolerings materialet mellem lederne. Disse er materialkonstanter, der kan slås op eksempelvis i noten om feltteori.

Formlerne for parallelederen er tilnærmede, se også appendiks.

Hvis isolationsmaterialet er luft ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m og $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ F/m) bliver udbredelseshastigheden lig med lysets hastighed: $v = 300.000.000$ m/s eller 300 m/ μ s. For alle andre materialer er v mindre - for koaksialkabler (RG-58 og lign.) er den almindeligvis 200 m/ μ s.

1.2.2 Spændingsudbredelse

De 2 funktioner $V^+(x, t)$ og $V^-(x, t)$ i løsningen, som gentages her, er generelle løsninger for bølgeleqningen på et frit kabelstykke:

$$V(x, t) = V^+ \left(t - \frac{x}{v} \right) + V^- \left(t + \frac{x}{v} \right) \quad (1.18)$$

Funktionerne er afhængige af de aktuelle startbetingelser og af termineringen af kablet i hver ende, dvs, hvilket kredsløbskomponenter, der er tilsluttet. Vi ser på $V^+(x, t)$ og $V^-(x, t)$ hver for sig. Hvis kablet er termineret med ohmske modstande, vil de 2 funktioner have samme form, være forskudt i tid for hinanden, og kan være af forskellig amplitude. $V^+(x, t)$ kaldes den *fremadløbende* (eller fremadskridende eller indfaldende) bølge og $V^-(x, t)$ den *tilbageløbende* (eller reflekterede) bølge. Antag at $V^+(t - \frac{x}{v})$ har nedenstående udseende ved $x = 0$.

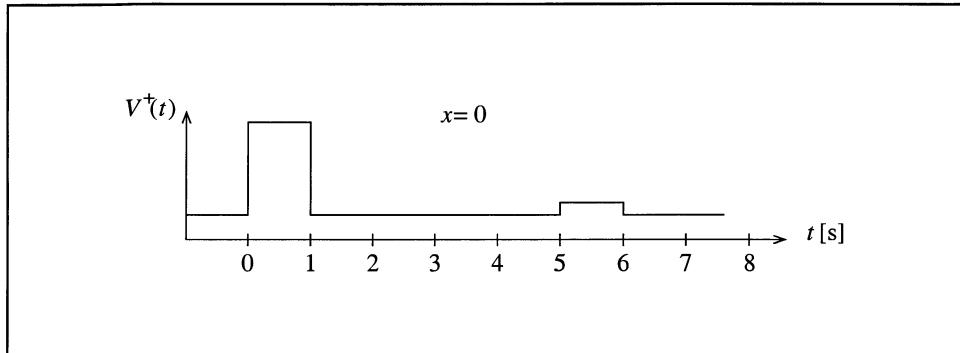


Fig. 1.3. Fremadløbende spændingsbølge som funktion af tiden ved $x = 0$ m.

Ved $x = v \cdot 1$ s vil vi få samme kurveform blot 1 sekund senere, og ved $x = v \cdot 2$ s sker igen det samme blot 2 sekunder forsinket. Betragter vi istedet udbredelsen af $V^+(t - \frac{x}{v})$ til et bestemt tidspunkt fx. $t = 10$ s ses nedenstående kurve:

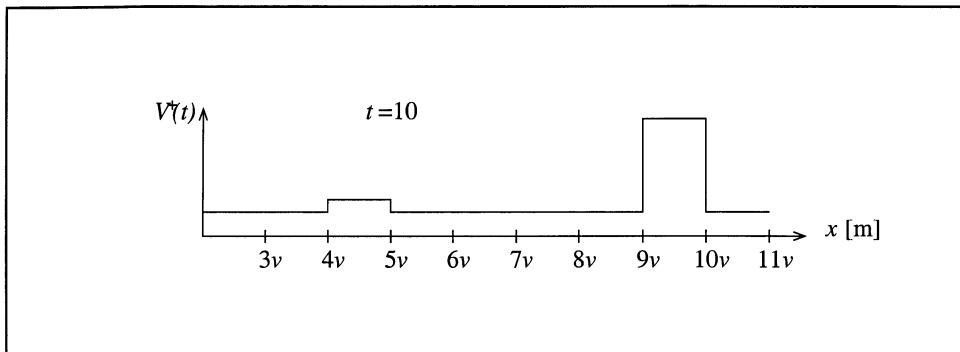


Fig. 1.4. Fremadgående spændingsbølge som funktion af stedet for $t = 10$ s.

Løsningen til differentialligninger siger os altså, at til et givet tidspunkt kan der måles en spændings variation hen ad kablet. Hele kurveformen har bevæget sig $\Delta t \cdot v$ i den positive retning af x- aksen, heraf navnet den *fremadløbende* bølge.

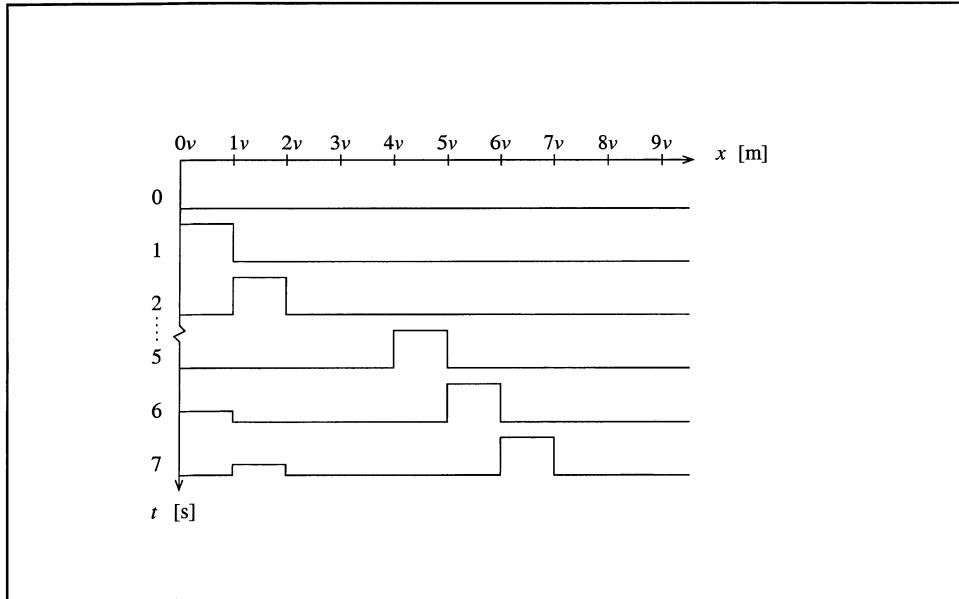


Fig. 1.5. Fremadskridende bølge til forskellige tidspunkter.

Tilsvarende vil $V^-(t + \frac{x}{v})$ løbe den anden vej, dvs. større værdier af t svarer til mindre værdier af x . Eksempelvis kan der observeres følgende: at forsinkelsen af V^- afhænger af placeringen af kablets terminering, og skaleringer af V^- afhænger af termineringens størrelse.

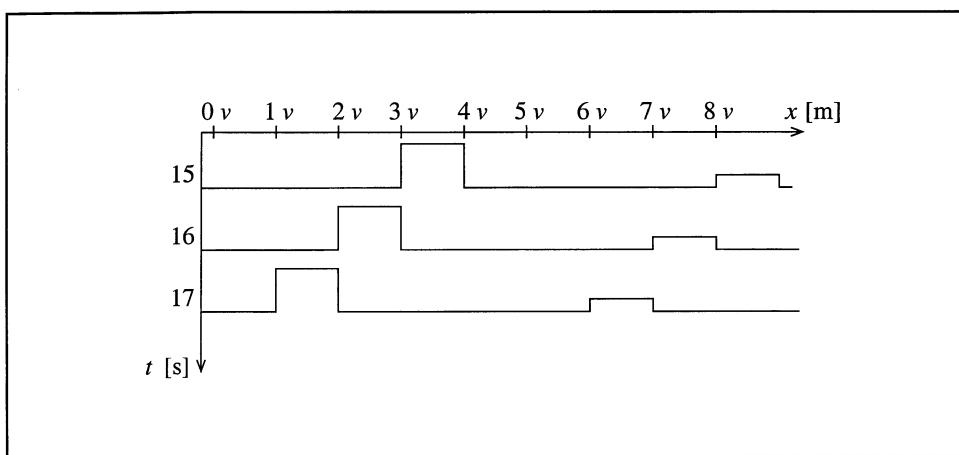


Fig. 1.6. Tilbageløbende bølge.

Den komplette løsning består af summen af $V^+(x, t)$ og $V^-(x, t)$. Vil vi betragte et bestemt punkt på $V^+(t - \frac{x}{v})$:

$$\left(t - \frac{x}{v}\right) = \text{konstant} \quad (1.19)$$

skal vi, som tiden går, bevæge os i den positive x-retning. Og vil vi betragte et bestemt punkt på $V^-(t + \frac{x}{v})$, skal vi bevæge os i den negative x-retning:

$$\left(t + \frac{x}{v}\right) = \text{konstant} \quad (1.20)$$

1.2.3 Løsning for strømmen

Ved en tilsvarende metode fås for strømmen.

$$I(x, t) = I^+ \left(t - \frac{x}{v}\right) + I^- \left(t + \frac{x}{v}\right) \quad (1.21)$$

Strømmen kan også udtrykkes på en anden måde, nemlig ved at indsætte løsningen for spændingen i den første telegrafligning:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial I}{\partial t} \cdot L \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{d}{d(t - \frac{x}{v})} V^+ \left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{1}{v} \frac{d}{d(t + \frac{x}{v})} V^- \left(t + \frac{x}{v}\right) \quad (1.23)$$

(1.23) indsættes i (1.22)

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{Lv} \frac{d}{d(t - \frac{x}{v})} V^+ \left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{1}{Lv} \frac{d}{d(t + \frac{x}{v})} V^- \left(t + \frac{x}{v}\right) \quad (1.24)$$

Ligningen integreres partielt med hensyn til t og vi får:

$$I(x, t) = \frac{1}{Lv} V^+ \left(t - \frac{x}{v}\right) - \frac{1}{Lv} V^- \left(t + \frac{x}{v}\right) \quad (1.25)$$

I (1.25) burde der stå en integrationskonstant (som kunne være afhængig af x), men indsættelse i de originale ligninger viser, at det kun kan være en konstant. Denne DC-strøm, der er ens over hele kablet, ser vi bort fra.

1.2.4 Almindelige betegnelser

Størrelsen $1/Lv$, som er en reel konstant, givet ved L og C for kablet, udtrykkes altid således:

$$\frac{1}{Lv} = \frac{\sqrt{LC}}{L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Z_0} \quad \Rightarrow \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1.26)$$

Enheden for Z_0 er ohm:

$$\sqrt{\frac{\frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}}{\frac{\text{A}\cdot\text{s}}{\text{V}\cdot\text{m}}}} = \sqrt{\frac{\text{V}^2}{\text{A}^2}} = \Omega \quad (1.27)$$

Z_0 kaldes ledningens *karakteristiske impedans*, og når kablet er tabsfrit ($R = G \sim 0$) er Z_0 rent ohmsk. Størrelserne v og Z_0 kaldes ledningens *sekundære konstanter*.

Vi har altså nu følgende løsninger for det tabsfrie kabel:

$$V(x, t) = V^+ \left(t - \frac{x}{v} \right) + V^- \left(t + \frac{x}{v} \right) \quad (1.28)$$

$$I(x, t) = I^+ \left(t - \frac{x}{v} \right) + I^- \left(t + \frac{x}{v} \right) \quad (1.29)$$

$$I(x, t) = \frac{V^+ \left(t - \frac{x}{v} \right)}{Z_0} - \frac{V^- \left(t + \frac{x}{v} \right)}{Z_0} \quad (1.30)$$

Hvilket også betyder:

$$I^+(x, t) = \frac{V^+(x, t)}{Z_0} \quad \text{og} \quad I^-(x, t) = -\frac{V^-(x, t)}{Z_0} \quad (1.31)$$

1.3 Refleksioner

Vi tænker os at kablet er afsluttet med en belastningsmodstand, Z_L (L for *load*) et sted på linien.

Ved x_{Z_L} gælder Ohms lov hen over Z_L til enhver tid. Hvilket vil sige for alle t :

$$V^+ + V^- = V_L = V(x_{Z_L}, t) \quad (1.32)$$

$$I^+ + I^- = I_L = \frac{V_L}{Z_L} \quad (1.33)$$

$$\frac{V^+}{Z_0} - \frac{V^-}{Z_0} = \frac{V_L}{Z_L} \quad (1.34)$$

Dette betyder, at hvis fx. $Z_L = Z_0$:

$$V^+ - V^- = V_L \quad \text{og} \quad V^+ + V^- = V_L \quad (1.35)$$

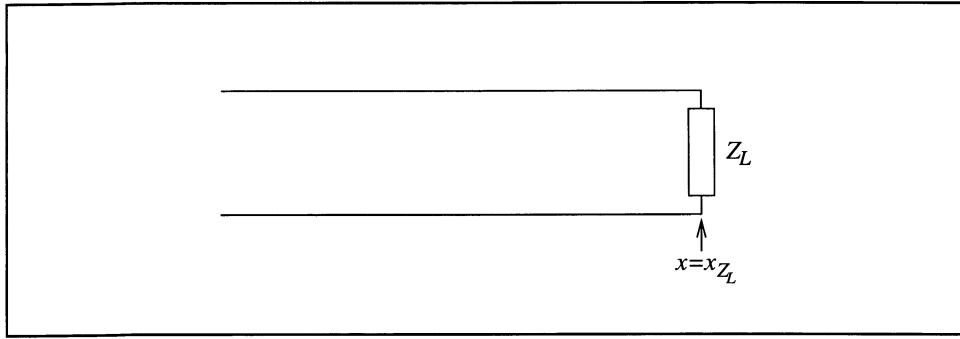


Fig. 1.7. Kabel med afslutningsimpedans.

Dette medfører at:

$$V^- = 0 \quad \text{og} \quad V^+ = V_L \quad (1.36)$$

og det samme på strømmen. $V^-(t + \frac{x}{v})$ findes slet ikke på kablet! Vi får altså kun en fremadskridende bølge:

$$V(x, t) = V^+ \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (1.37)$$

Forholdet mellem V^+ og V^- bestemmes af forskellen mellem Z_0 og Z_L . Af (1.32) og (1.34) fås:

$$V^+ + V^- = \frac{Z_L}{Z_0} (V^+ - V^-) \quad (1.38)$$

$$Z_0 (V^+ + V^-) = Z_L (V^+ - V^-) \quad (1.39)$$

$$V^+ (Z_L - Z_0) = V^- (Z_L + Z_0) \quad (1.40)$$

Man definerer nu den såkaldte *refleksionskoefficient*, K_L som forholdet mellem den tilbageløbende og den fremadløbende bølge. Indeks L angiver at det er ved belastningen:

$$K_L = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (1.41)$$

Af (1.41) ses, at K_L er uafhængig af t , samt at K_L er et reelt tal (ubenævnt), hvis Z_0 og Z_L er ohmske modstande.

Eksempel 1.2

Vi ser følgende værdier for K_L for karakteristiske værdier af Z_L :

Z_L	K
0	-1
Z_0	0
∞	1

Der ses, at gælder: $0 \leq |K_L| \leq 1$, dvs. den reflekterede (tilbageløbende) bølge kan aldrig være større end den indfaldende (fremadløbende).

1.3.1 Refleksionsfrit tilfælde

Vi betragter f.eks. eksempel, hvor $Z_0 = Z_L$ - hvilket iflg. (1.41) medfører $V^- (t + \frac{x}{v}) = 0$

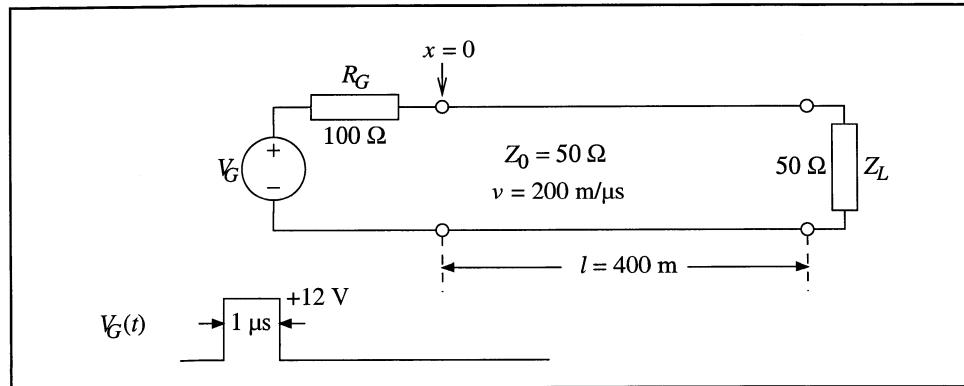


Fig. 1.8. Et kabel med pulsgenerator og afslutningsimpedans.

Vi har:

$$V(x, t) = V^+ \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad \text{og} \quad I(x, t) = \frac{V^+ \left(t - \frac{x}{v} \right)}{Z_0} \quad (1.42)$$

Ved generatorsiden, $x = 0$ gælder Ohms lov:

$$I(x, t) = \frac{V_G(t) - V^+ \left(t - \frac{x}{v} \right)}{R_G} \quad (1.43)$$

$$\frac{V^+ \left(t - \frac{x}{v} \right)}{Z_0} = I(x, t) = \frac{V_G(t) - V^+ \left(t - \frac{x}{v} \right)}{R_G} \quad (1.44)$$

Vi får altså:

$$V(x, t) = \frac{Z_0}{R_G + Z_0} \cdot V_G \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (1.45)$$

$$I(x, t) = \frac{1}{R_G + Z_0} \cdot V_G \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (1.46)$$

Dvs. disse fremadskridende impulser:

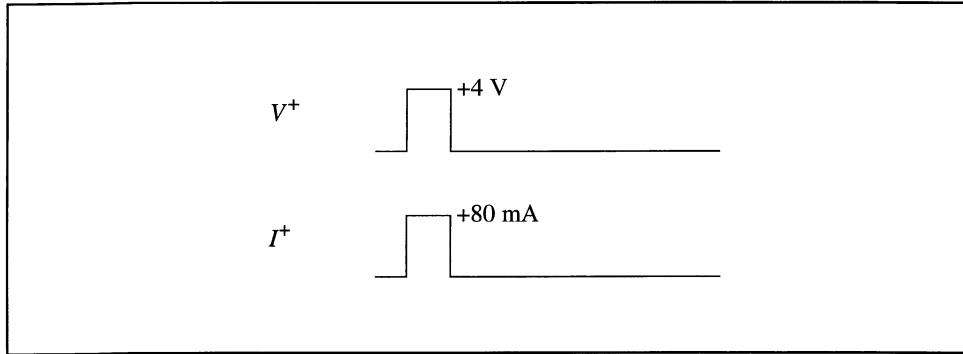


Fig. 1.9. Fremadskridende spændings- og strømpulser.

1.3.2 Tilfælde med refleksion

Betruger vi nu samme tilfælde, men hvor $Z_L = \infty$ (altså en åben ende), ser vi for det første, af (1.41) :

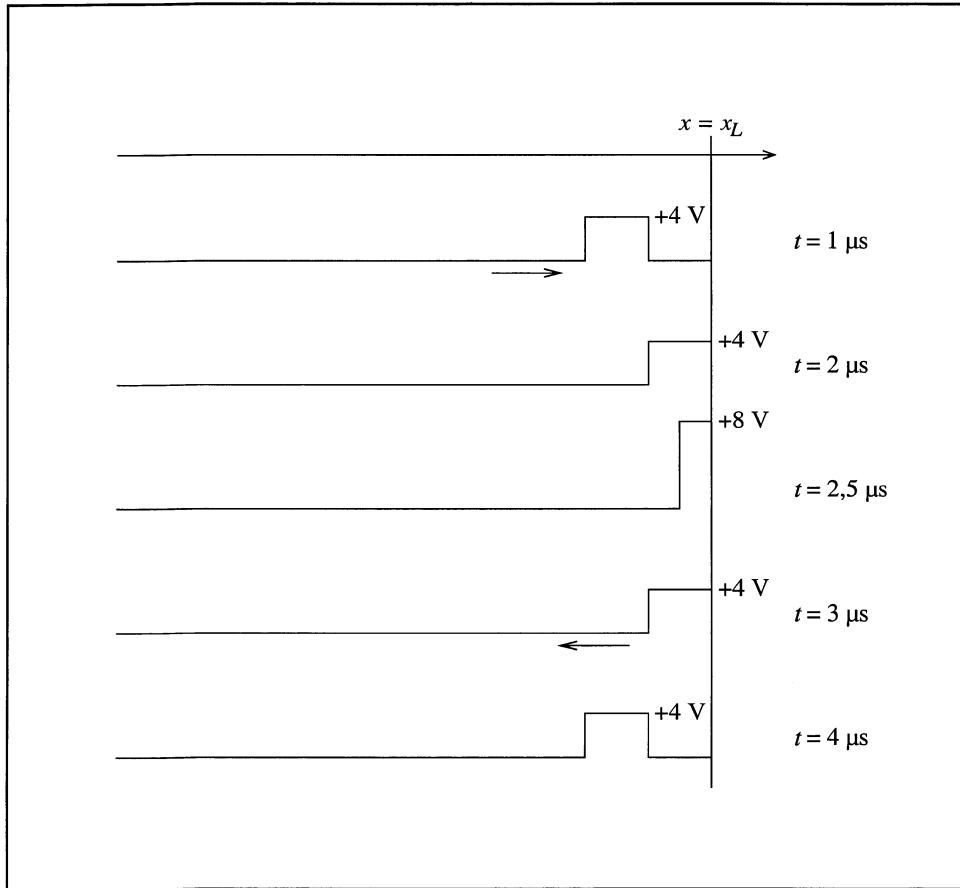


Fig. 1.10. Refleksion af en fremadgående puls.

$$K_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = +1 \quad (1.47)$$

Dette medfører for alle t :

$$V^+ \left(t - \frac{x_L}{v} \right) = V^- \left(t + \frac{x_L}{v} \right) \quad (1.48)$$

Vi vil postulere, at V^+ er den samme som i foregående tilfælde (Dette kan fås ved at anvende (1.31) og (1.32) i begge ender af kablet) Dette betyder, at når impulsen på 4 V efter $x_L/v = 2 \mu s$ når ud til Z_L , dannes der en puls på 4 V, der løber den modsatte vej. Ved Z_L gælder altid:

$$V^+ + V^- = V_L \quad (1.49)$$

$$\frac{V^+}{Z_0} - \frac{V^-}{Z_0} = \frac{V_L}{Z_L} \sim 0 \quad (1.50)$$

og vi får af (1.50), at der ligeledes dannes en reflekteret strømimpuls på -80 mA.

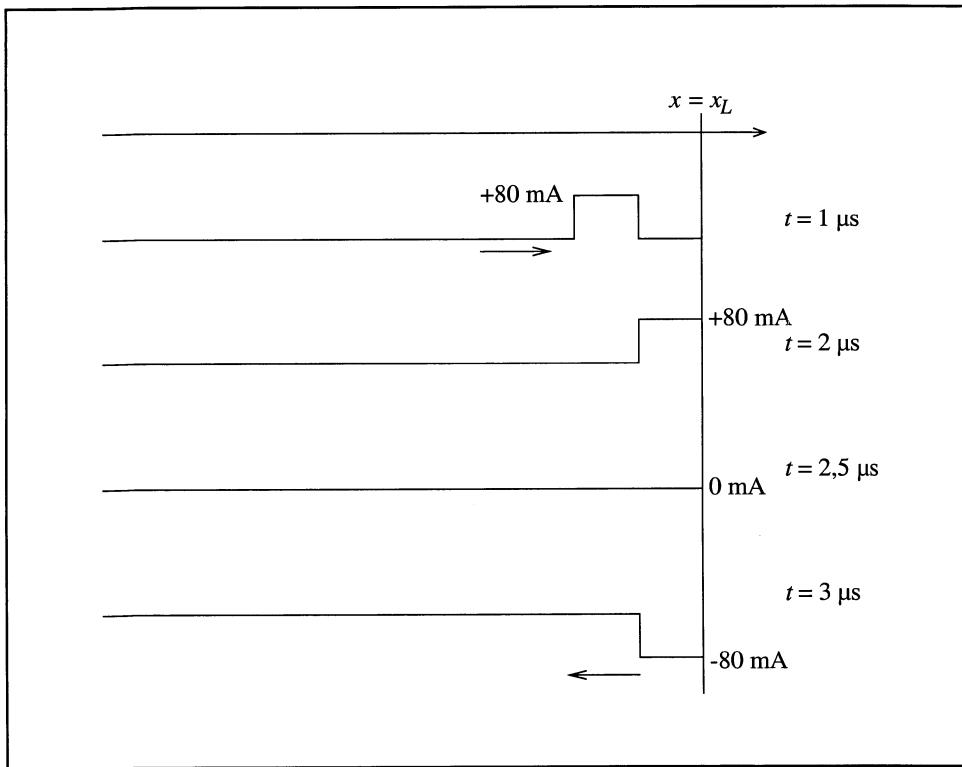


Fig. 1.11. Fremadgående strømpuls, der reflekteres.

Vi ser at der gælder:

$$I^+ = \frac{V^+}{Z_0} = \frac{4V}{50\Omega} = 80 \text{ mA} \quad I^- = -\frac{V^-}{Z_0} = -\frac{4V}{50\Omega} = -80 \text{ mA} \quad (1.51)$$

Når den tilbageløbende impuls efter yderligere $2 \mu\text{s}$ når tilbage til generatoren (indeks G) reflekteres den igen, denne gang med:

$$K_G = \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{1}{3} \quad (1.52)$$

og vi får en impuls på $4/3 \text{ V}$, der løber frem mod Z_L .

1.3.3 Refleksionsdiagrammer

For at illustrere forholdene på et kabelstykke, der transmitterer impulser, anvendes ofte de såkaldte refleksionskort, der er en normeret, grafisk fremstilling af refleksionerne. Stedaksen er en vandret akse i toppen af diagrammet og tidsaksen går lodret ned.

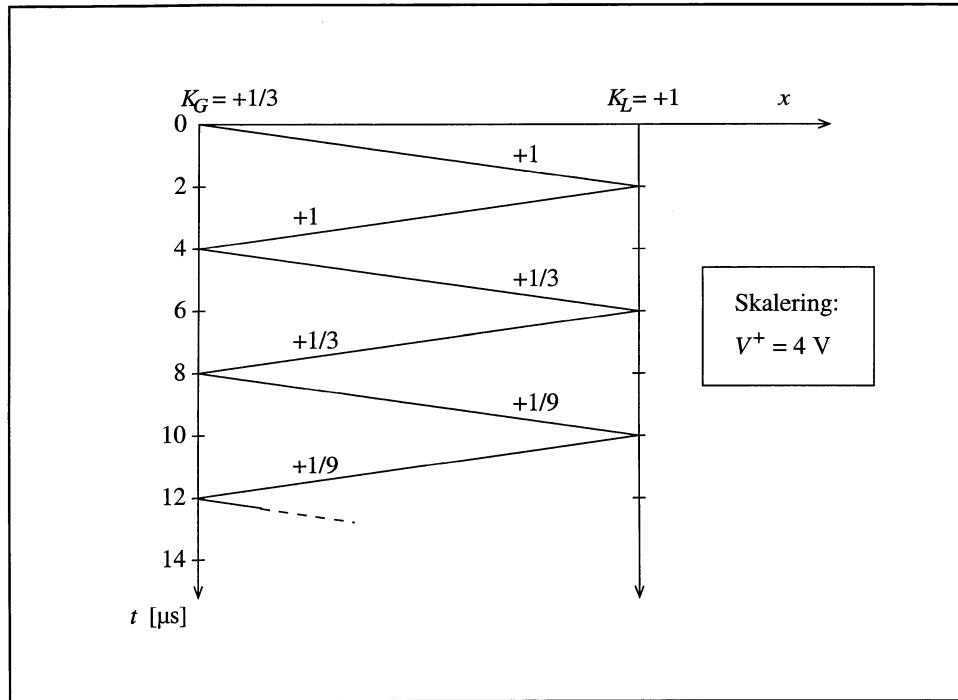


Fig. 1.12. Refleksionsdiagram for spænding.

Det sidste eksempel kan illustreres således:

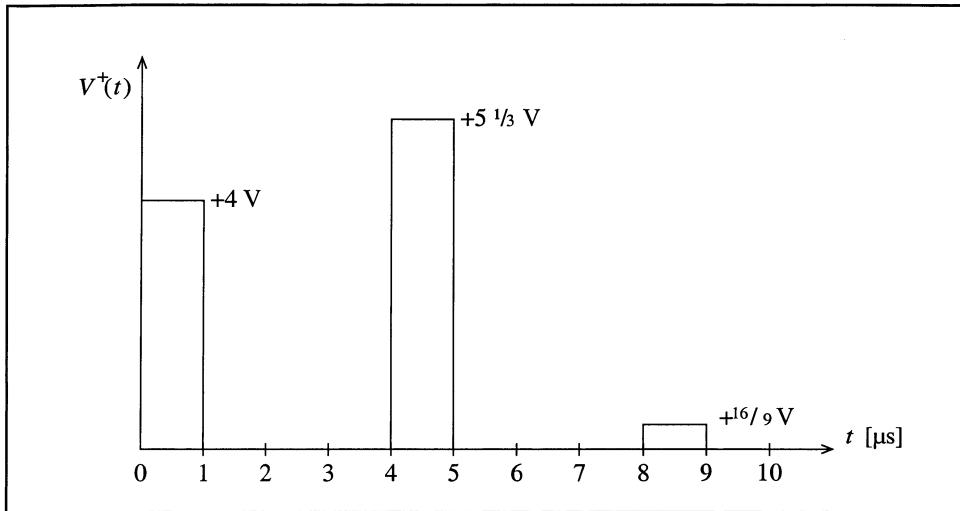


Fig. 1.13. Kurveform ved generatorsiden som funktion af tiden ($x = 0 \text{ m}$).

Tilsvarende diagram kan laves for strømmen. Ud fra refleksionskortet kan vi nu bestemme fx. kurveformen på generatorsiden af kablet. I tiden $4-5 \mu\text{s}$, medens impulsen er „ved at vende“ ved generatorsiden, vil den i $1 \mu\text{s}$ være $(1+\frac{1}{3}) \cdot 4 \text{ V}$. Betragter vi kurveformen midt på kablet ($x = 200 \text{ m}$) ses, vha. refleksionsdiagrammet:

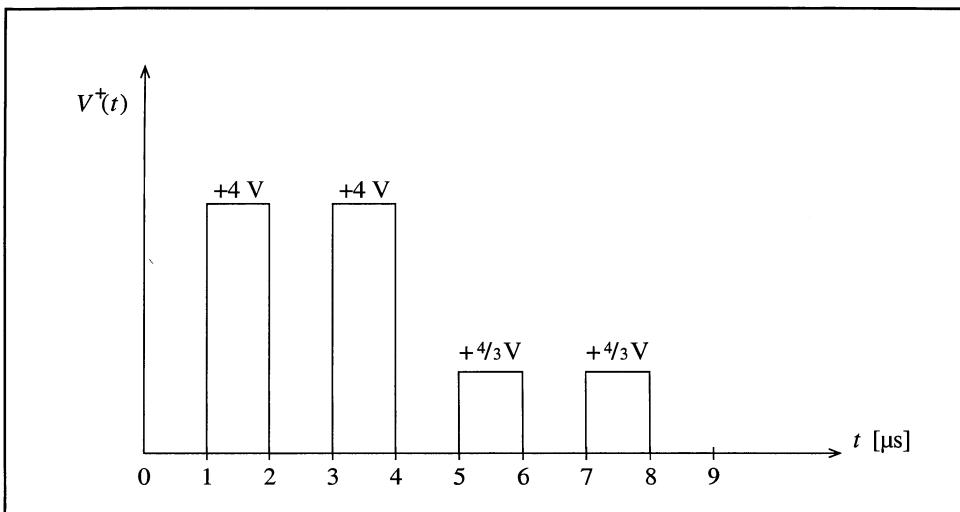


Fig. 1.14. Kurveform midt på kablet ($x = 200 \text{ m}$).

Eksempel 1.3

Betragt et kredsløb bestående af et 5 V batteri, en kontakt, en 5Ω modstand (ohmsk) og nogle forbindelsesledninger med længden l .

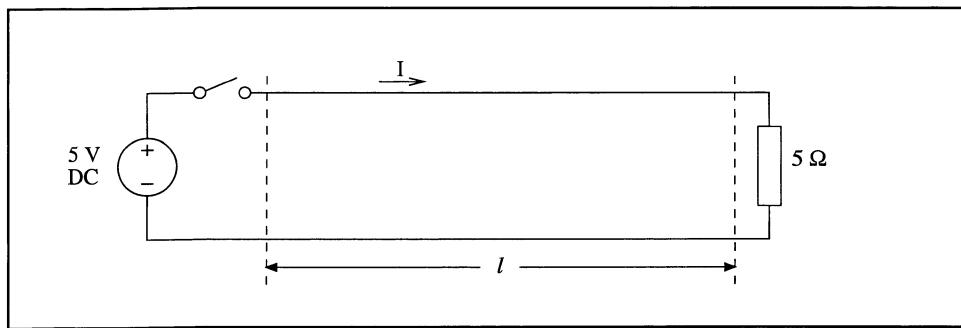


Fig. 1.15. Kabel med belastning der tilføres en puls.

Kredsløbet kan fx. illustrere en telegrafsendestation i Paris og en telegrafmodtagestation i Washington, hvor kablet så er det transatlantiske telegrafkable fra svundne tider (begyndelsen af dette århundrede). Ifølge Ohms lov (formuleret 1826) vil der gå 1 A i modstanden, når kontakten lukkes:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{5 \text{ V}}{5 \Omega} = 1 \text{ A}$$

Men ifølge Einstein o.a. kan udbredelsen af hvilken somhelst påvirkning højst ske med hastigheden c = lysets hastighed, så når kontakten lukkes, vil spændingsstigningen på 5 V først nå frem til modstanden efter τ sekunder:

$$\tau = \frac{l}{v}, \quad v \leq c$$

Så hvis fx. $l = 300.000$ km, varer det over 1 s inden de 5 V når ud til modstanden. Spørgsmålet er nu: hvis kontakten lukkes til tiden $t = t_0$, hvilken strøm løber der så i ledningen i tidsrummet fra t_0 til $(t_0 + \tau)$? Der løber vel næppe præcis 1 A, generatoren ”ved” jo ikke, at den τ sek. senere skal ind i en 5Ω modstand. Svaret er, at startstrømmen er uafhængig af modstandens størrelse, den afhænger kun af ledningens interne selvinduktion, kapacitet og modstand - med andre ord: af kablets fysiske dimensioner.

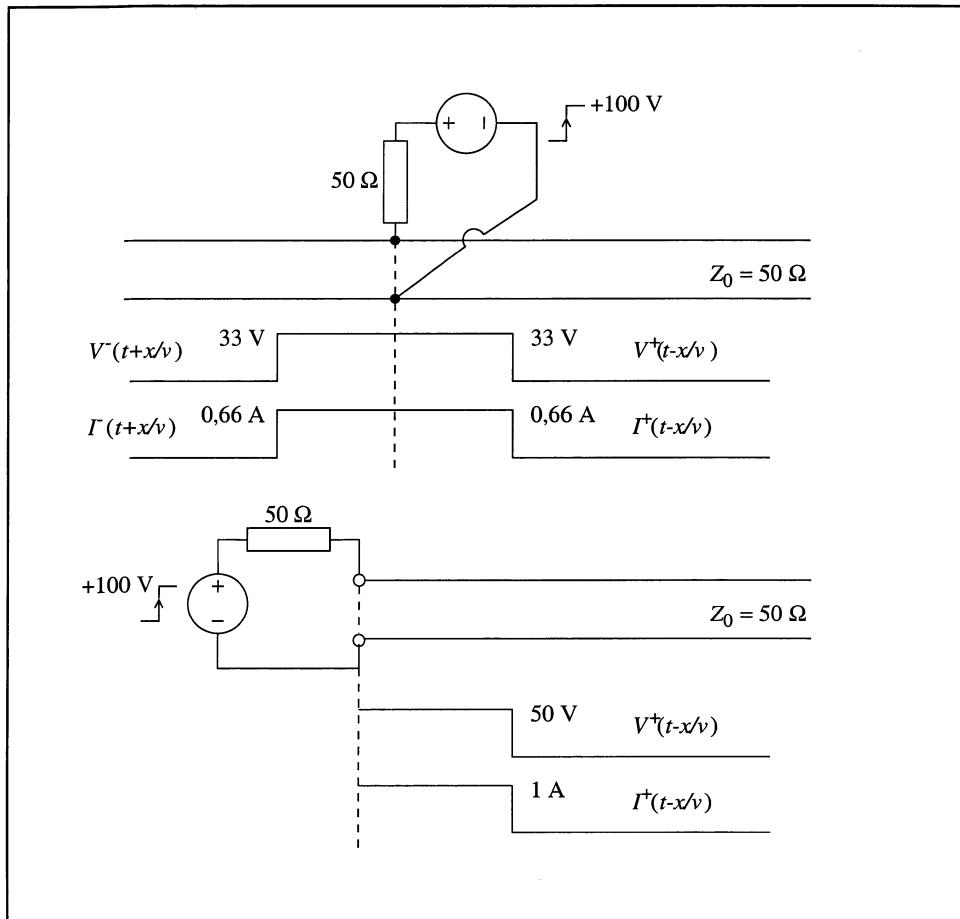
Eksempel 1.4


Fig. 1.16. To eksempler på pulsforløb. Øverst sender generatoren signal ud til begge sider, nederst sendes signalet kun fremad. Både Ohms lov og bølgeligningerne er opfyldt ved generatoren.

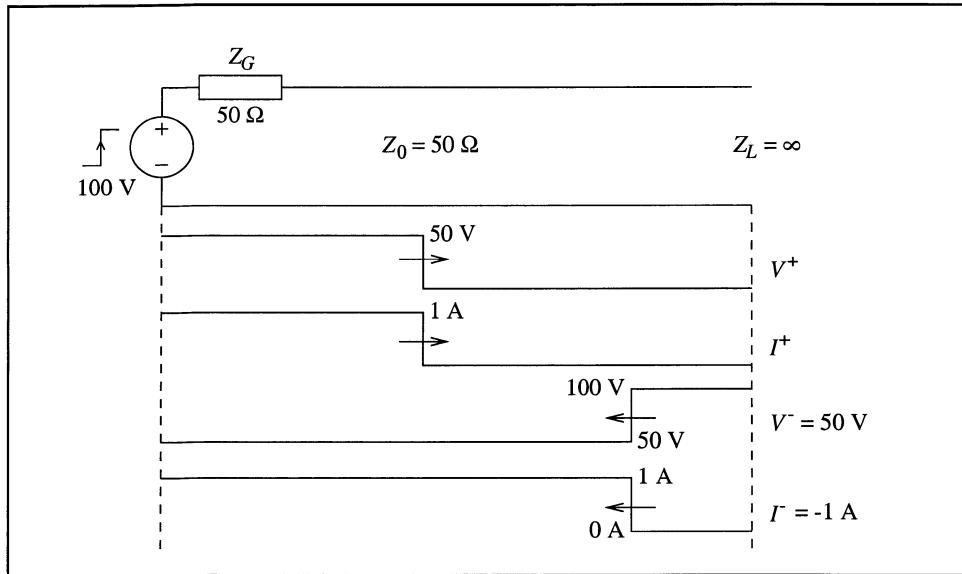
Eksempel 1.5

Fig. 1.17. Fremadgående puls reflekteres ved en afbrydelse. Bemærk forskelligt fortægn på strøm og spænding ved reflektionen.

Kablet er afsluttet med en åben ende, $Z_L = \infty$, $K_L = +1$. V^+ „kan ikke komme ud med strømmen“. Vi finder følgende slutværdi:

$$K_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{\infty}{\infty} = +1$$

$$V^- = K_L \cdot V^+ = 50 \text{ V} \quad \text{og} \quad I^- = -\frac{V^-}{Z_0} = -\frac{50}{50} = -1 \text{ A}$$

$$V^+ + V^- = 100 \text{ V} \quad \text{og} \quad I^+ + I^- = 0 \text{ A}$$

Eksempel 1.6

Kablet er afsluttet med en kortslutning, $Z_L = 0$, $K_L = -1$.

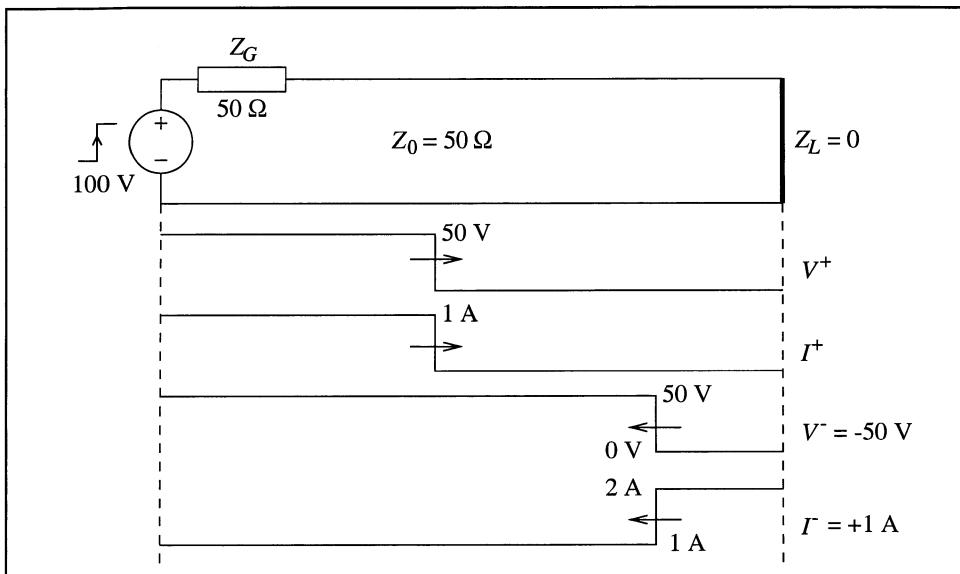


Fig. 1.18. Fremadgående puls reflekteres ved en kortslutning. Bemærk forskelligt fortægn på strøm og spænding ved reflektionen.

Vi finder følgende slutværdi:

$$K_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{-Z_0}{Z_0} = -1$$

$$V^- = K_L \cdot V^+ = -50 \text{ V} \quad \text{og} \quad I^- = -\frac{V^-}{Z_0} = -\frac{-50}{50} = 1 \text{ A}$$

$$V^+ + V^- = 0 \text{ V} \quad \text{og} \quad I^+ + I^- = 2 \text{ A}$$

Eksempel 1.7

Vi betragter en opstilling med følgende karakteristika: $Z_0 = 50 \Omega$, $v = 200 \text{ m}/\mu\text{s}$ og $Z_L = 17 \Omega$. Generatorimpedansen er 50Ω , og signalet er givet ved enhedstrin-funktionen u :

$$V_G = 100(u(t) - u(t - 1 \mu\text{s})) \text{ V}, \quad u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t \geq 0 \end{cases}$$

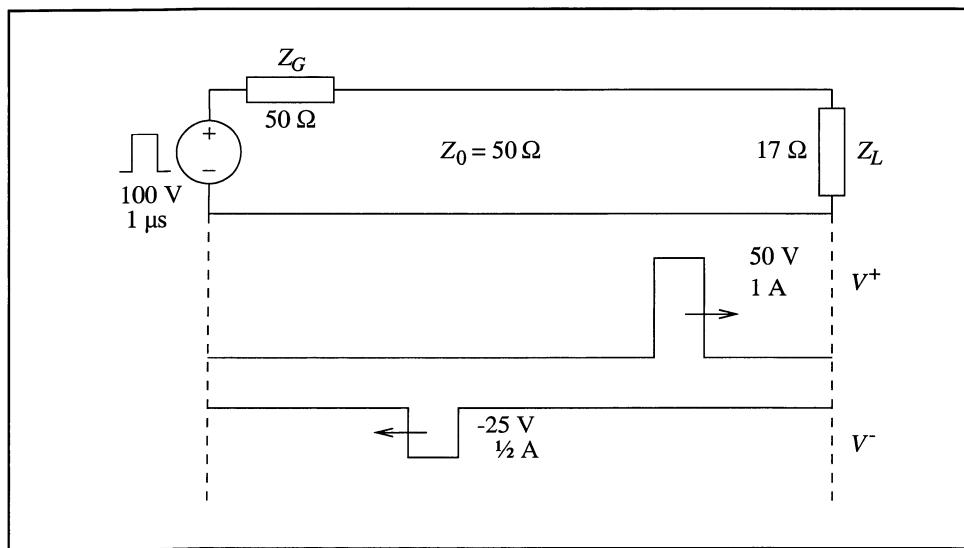


Fig. 1.19. Fremadgående og reflekteret signaler.

Vha. Ohms lov fås:

$$V^+(\tau) = 50u(\tau) - 50u(\tau - 1 \mu\text{s}) \text{ V}$$

$$\tau = t - \frac{x}{200 \cdot 10^6} \text{ s}$$

Vi udregner:

$$K_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -\frac{1}{2}$$

$$V^+ = 50 \text{ V} \quad \text{og} \quad V^- = K_L \cdot V^+ = -25 \text{ V}$$

$$I^+ = \frac{V^+}{Z_0} = 1 \text{ A} \quad \text{og} \quad I^- = -\frac{V^-}{Z_0} = \frac{1}{2} \text{ A}$$

Idet vi her anvender en forkortet notation.

Herunder er vist forholdende, medens impulsen er "inde at vende" i Z_L . Vi betragter et tidsinterval på $1 \mu\text{s}$ og et afstandsinterval på 200 m i omegnen omkring ankomsttidspunktet.

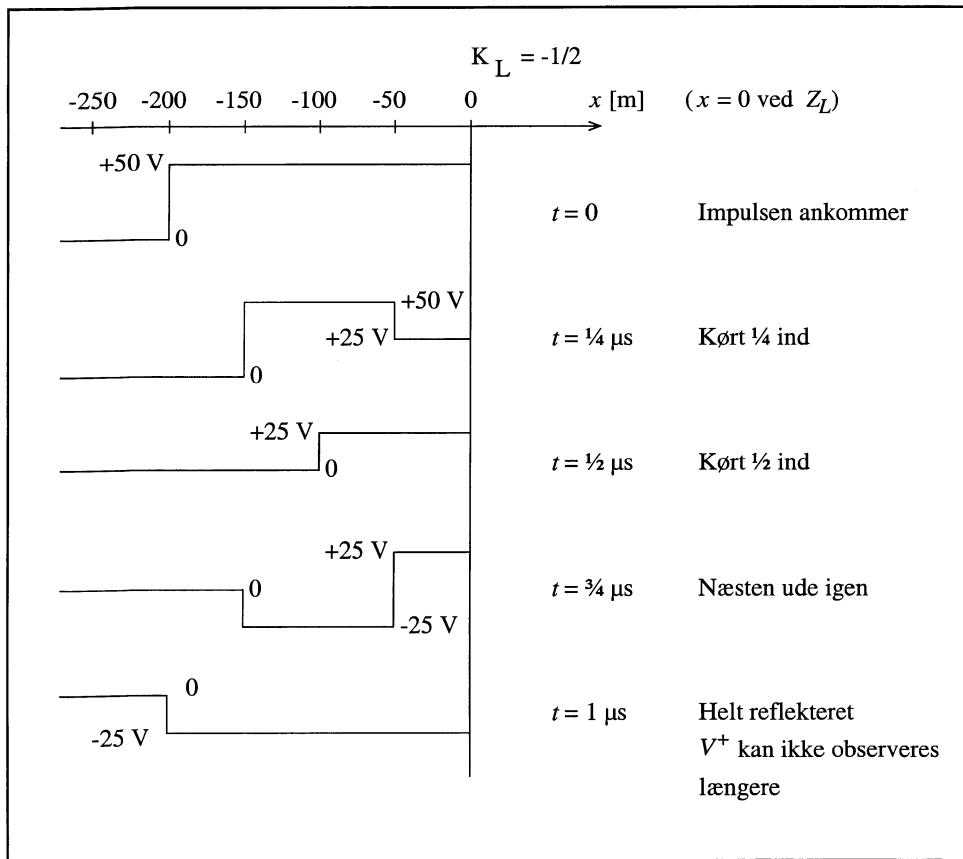


Fig. 1.20. Reflektion af pulsen til forskellige tidspunkter.

Eksempel 1.8

I eksempel 1.7 havde vi anbragt $x = 0$ ved Z_L , og dette har vi lov til, blot vi bevarer orienteringen af x -aksen: den positive retning mod højre, som oprindeligt vedtaget i uddelingen af telegrafligningen. Vi har nu lov at anbringe $x = 0$ et vilkårligt sted på linien, men det er almindeligt anvendt og oftest mest praktisk at sætte nulpunktet ved Z_L .

Herunder illustreres den fysiske betydning af fortægnene for strøm og spænding i et tilfælde hvor $K_L = +1$ (åben afslutning)

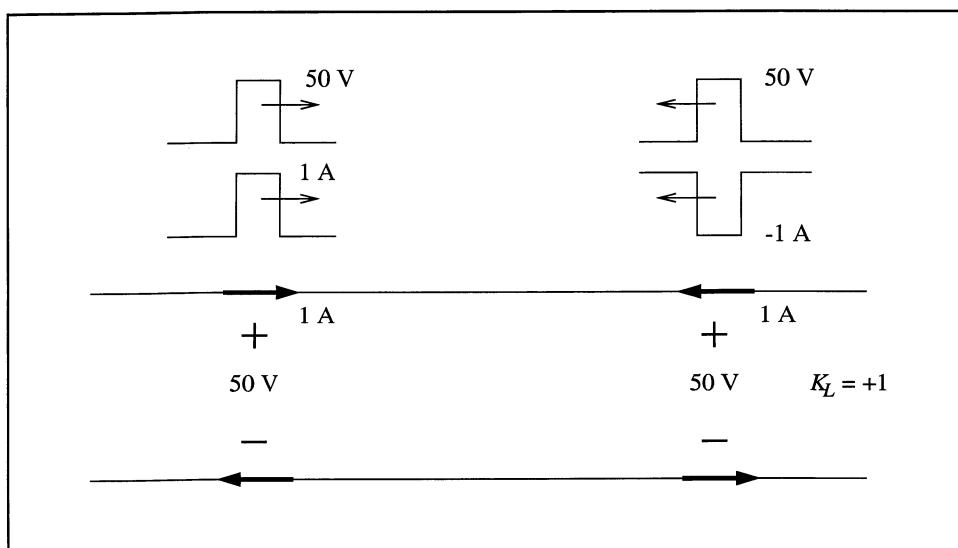


Fig. 1.21. Fortegn for spænding og strøm ved fremadgående og reflekterede signaler.

Det kan måske synes mærkeligt, at der i et lille stykke af kablet løber 1 A, men at der lige ved siden af ingen strøm løber; men denne strøm løber jo ned i kapaciteterne mellem lederne. Disse op- og aflades hele tiden.

2 Løsning med harmoniske signaler

Stillet over for en teknisk opgave udregner elektronikingeniører og andre gerne løsninger for harmoniske signaler, dvs. sinusformede signaler. Ethvert signal kan opløses i sinus- og cosinusfunktioner; idet disse er orthogonale funktioner. Faktisk kunne mange andre orthogonale funktioner være valgt, men nu er det altså blevet sinus og cosinus, og det holder vi os til. Der er udviklet og tabellagt mange hjælpeværktøjer til at gøre det let for os i den retning, tænk fx. på Fourier, Laplace, DFT, FFT, LPC etc., etc.

Vi vil derfor i resten af kurset fortrinsvis beskæftige os med harmoniske signaler, og vi vil benytte den komplekse symbolske metode. Der henvises til appendix, hvor der findes en beskrivelse af metoden.

2.1 Telegrafligningen med harmoniske signaler

Vi anvender nu igen Ohms og Kirchhoffs love på kredsløbsmodellen, idet vi denne gang bruger komplexe impedanser.

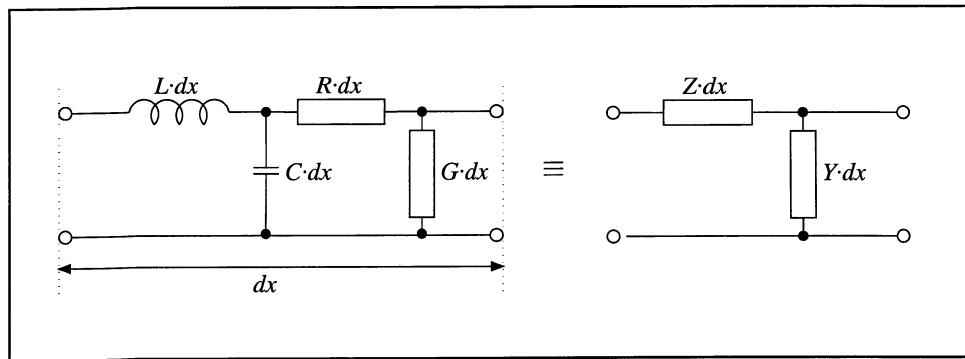


Fig. 2.1. Modeller for et lille kabelsegment.

Vi får:

$$\frac{dV}{dx} = -Z \cdot I \quad (2.1)$$

$$\frac{dI}{dx} = -Y \cdot V \quad (2.2)$$

Betydningerne i (2.1) og (2.2) er følgende:

$$V \equiv V e^{j\omega t}, \quad I \equiv I e^{j\omega t} \quad (2.3)$$

$$Z \equiv R + jX_L = R + j\omega L, \quad Y \equiv G + jB_C = G + j\omega C \quad (2.4)$$

(2.1) og (2.2) differetieres mht. x og vi får:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -Z \cdot \frac{dI}{dx} \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = -Y \cdot \frac{dV}{dx} \quad (2.6)$$

Af (2.1), (2.2), (2.5) og (2.6) fås nu *bølgeligningerne*:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = ZYV \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = ZYI \quad (2.8)$$

2.1.1 Løsning til bølgeligningerne

Vi ser på løsningen for spændingen (løsningen for strømmen må have samme form). Løsningen er simpel - vi skal finde en funktion, der 2 gange differentieret mht. x giver den samme funktion gange en konstant: det må være $e^{\pm\sqrt{k}x}$. Den komplette løsning er:

$$V(x) = V^+ e^{-\sqrt{ZY}x} + V^- e^{\sqrt{ZY}x} \quad (2.9)$$

Størrelsen \sqrt{ZY} er generelt et kompleks tal, og der anvendes følgende betegnelser for den:

$$\sqrt{ZY} = \gamma = \alpha + j\beta \quad (2.10)$$

Størrelsen γ kaldes for *udbredelseskonstanten*, og den har enheden:

$$\text{Enhed}(\gamma) \sim \sqrt{ZY} \sim \sqrt{\frac{\Omega S}{m m}} = \sqrt{\frac{1}{m^2}} = \frac{1}{m}$$

α kaldes *attenuationskonstanten* (angives i Neper/m) og β kaldes *fasekonstanten* (angives i rad/m).

$$V(x) = V^+ e^{-\gamma x} + V^- e^{\gamma x} \quad (2.11)$$

$$= V^+ e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + V^- e^{\alpha x} e^{j\beta x} \quad (2.12)$$

2.1.2 Tabsfrit tilfælde

Vi betragter igen det vigtige specialtilfælde: tabsfri udbredelse. Dette tilfælde fremkommer når reeldelen af Z er meget mindre end imaginærdelen og tilsvarende for Y , dvs.:

$$R \ll \omega L \quad \text{og} \quad G \ll \omega C \quad (2.13)$$

Dette er gældende ved høje frekvenser, for fx. coaxialkablet RG-58 i området 10-500 MHz. I (2.12) får vi nu:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{jX_L \cdot jB_C} = \sqrt{-\omega^2 LC} = j\omega\sqrt{LC} \quad (2.14)$$

Dette medfører:

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega\sqrt{LC} \quad (2.15)$$

Det ses, at enheden for β er rad/m som tidligere angivet.

Således bliver løsningen for spændingen:

$$V(x) = V^+ e^{-j\beta x} + V^- e^{j\beta x} \quad (2.16)$$

Som altså i virkeligheden står for:

$$\begin{aligned} V(x, t) &= V^+ e^{-j\beta x} e^{j\omega t} + V^- e^{j\beta x} e^{j\omega t} \\ &= V^+ e^{j(\omega t - \beta x)} + V^- e^{j(\omega t + \beta x)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Den virkelige, målelige spænding er $\text{Re}[V(x, t)]$. I (2.17) står V^+ og V^- for konstanter, nemlig amplituder af den indfaldende og den reflekterede bølge. Konstanterne er generelt komplexe. Vi bør være helt klar over, at notationen i (2.16) er en bekvem udtryksform, der står for noget helt bestemt.

Vi undersøger fasekonstanten β lidt nøjere. Ser vi på realdelen af den fremadskridende bølge:

$$V^+ \cos(\omega t - \beta x) \quad (\cdot k) \quad (2.18)$$

ses for det første, at for fastholdt x , fx. $x = 0$, kan vi observere en spænding, der varierer cosinusformigt med tiden:

$$V(x = 0, t) = V^+ \cos(\omega t) \quad (2.19)$$

For fastfrosset tid, fx. $t = 0$, ses, at der hen langs ledningen kan måles en cosinusformet spænding:

$$V(x, t = 0) = V^+ \cos(\beta x) \quad (2.20)$$

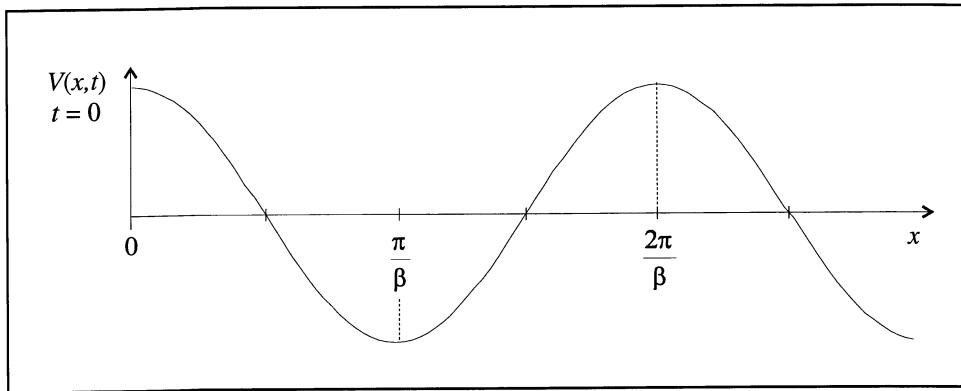


Fig. 2.2. Spændingsforløb langs ledningen med tiden fastholdt.

Afstanden mellem to punkter på kablet, hvorimellem der ligger en hel periode af $V(x, t)$ for fastholdt t , kalder vi bølgelængden, som altså er specifik for det bestemte kabel med den bestemte frekvens.

$$\beta(x_2 - x_1) = 2\pi$$

$$\beta \cdot \lambda = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.21)$$

λ er *bølgelængden*. Hvis vi endvidere lader $v = 1/\sqrt{LC}$ som tidligere, ses af (2.15)

$$\beta = \omega \sqrt{LC} = \frac{\omega}{v} \quad (2.22)$$

(2.15) og (2.21) giver:

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad v = f \cdot \lambda \quad (2.23)$$

Enhederne er for ω : rad/s, for v : m/s, for f : 1/s, for λ : m og for β : rad/m.

Fasehastigheden, v_p kan mere formelt udtrykkes således:

$$V(x,t) = V^+ \cos(\omega t - \beta x) \quad (2.24)$$

Kaldes argumentet til cos for øjebliksfasen af $V(x,t)$:

$$\varphi = \omega t - \beta x \quad (2.25)$$

Vi vil finde den hastighed, vi skal bevæge os med for at se konstant fase:

$$v \Big|_{\varphi \text{ konstant}} \triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (2.26)$$

$$\varphi = \text{konstant} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega t - \beta x) = 0 \quad (2.27)$$

$$\omega - \frac{dx}{dt} \cdot \beta = 0 \Rightarrow \omega - v_p \cdot \beta = 0 \quad (2.28)$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.29)$$

Vi ser, at V^+ virkelig er en fremadskridende bølge, da vi, som tiden går, skal bevæge os i positiv x-retning for at se konstant fase, $(\omega t - \beta x)$.

Det ses på samme måde, at V^- er en tilbageløbende bølge.

2.1.3 Løsning for strømmen

Vi har en løsning af samme form som for spændingen (2.16) :

$$I(x) = I^+ e^{-j\beta x} + I^- e^{j\beta x} \quad (2.30)$$

og der fås en løsning mere ved at anvende den første telegrafligning

$$-Z \cdot I = \frac{d}{dx} (V^+ e^{-j\beta x} + V^- e^{j\beta x}) = -j\beta V^+ e^{-j\beta x} + j\beta V^- e^{j\beta x} \quad (2.31)$$

$$I(x) = \frac{j\beta}{Z} V^+ e^{-j\beta x} - \frac{j\beta}{Z} V^- e^{j\beta x} \quad (2.32)$$

Igen findes der en særlig betegnelse for $j\beta/Z$ i (2.32) :

$$j \frac{\beta}{Z} = \frac{1}{Z_0} \quad (2.33)$$

heraf fås:

$$Z_0 = \frac{Z}{j\beta} = \frac{j\omega L}{j\omega\sqrt{LC}} = \frac{L}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.34)$$

Z_0 er kablets karakteristiske impedans, og den har enheden Ω som tidligere.

Vi har nu løsningerne:

$$V(x) = V^+ e^{-j\beta x} + V^- e^{j\beta x} \quad (2.35)$$

$$I(x) = I^+ e^{-j\beta x} + I^- e^{j\beta x} \quad (2.36)$$

$$= \frac{1}{Z_0} (V^+ e^{-j\beta x} - V^- e^{j\beta x})$$

V^+ , V^- , I^+ og I^- betegner her komplexe konstanter, nemlig amplitude/fase af fremadløbende og tilbageløbende spændings- og strømbølger. Af (2.34) ses endvidere at Z_0 altid er reel, når kablet er tabsfrit. β er altid reel.

Eksempel 2.1

For kablet RG-181/U opgives: den karakteristiske impedans $Z_0 = 125 \Omega$ og den fordelte kapacitet $C = 39,4 \text{ pF/m}$. Beregning af v , β og λ for $f=300 \text{ MHz}$:

$$v = \frac{1}{C \cdot Z_0} = \frac{1}{39,4 \cdot 10^{-12} \cdot 125} = 203 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{300 \cdot 10^6 \cdot 2\pi}{203 \cdot 10^6} = 9,29 \text{ rad/m} \quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{203 \cdot 10^6}{300 \cdot 10^6} = 0,68 \text{ m}$$

2.2 Generaliseret refleksionskoefficient og impedans

Da der ved løsning med harmoniske signaler for ethvert givet x altid findes et sinusformet tidssignal på kablet, kan vi for ethvert punkt bestemme en refleksionskoefficient (forholdet mellem $V^-(x)$ og $V^+(x)$) og en impedans (forholdet mellem $V(x)$ og $I(x)$).

Disse kaldes den *generaliserede refleksionskoefficient* og den *generaliserede impedans*.

Bemærk at dette ikke generelt var muligt, når vi betragtede vilkårlige tidssignaler. Det er almindeligt brugt at sætte $x=0$ ved belastningen, således at fx. $V(0)$ betegner spændinger over Z_L og $V(-l)$ spændingen ved generatoren.

Generaliseret refleksionskoefficient:

$$\begin{aligned} K(x) &\triangleq \frac{V^-(x)}{V^+(x)} = \frac{V^- e^{j\beta x}}{V^+ e^{-j\beta x}} = \frac{V^-(0)}{V^+(0)} \cdot e^{j2\beta x} = K(0) \cdot e^{j2\beta x} \\ &= K_L \cdot e^{j2\beta x} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Det ses:

$$|K(x)| = |K_L| \quad \text{og} \quad \angle K(x) = \angle K_L + 2\beta x \quad (2.38)$$

Generaliseret impedans:

$$\begin{aligned} Z(x) &\triangleq \frac{V(x)}{I(x)} = \frac{V^+ e^{-j\beta x} + V^- e^{j\beta x}}{\frac{1}{Z_0} (V^+ e^{-j\beta x} - V^- e^{j\beta x})} \\ &= Z_0 \cdot \frac{1 + K(x)}{1 - K(x)} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Idet $K_L = K(0)$ og $Z_L = Z(0)$ ses fig. sammenhæng:

$$Z(0) = Z_0 \cdot \frac{1 + K(0)}{1 - K(0)}, \quad Z_L = Z_0 \cdot \frac{1 + K_L}{1 - K_L} \quad (2.40)$$

$$\Rightarrow K_L = K(0) = \frac{V^-(0)}{V^+(0)} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (2.41)$$

Ligningerne (2.33) - (2.41) er vigtige og fundamentale for dette kursus. Vi ser lidt nøjere på en tolkning af dem.

2.2.1 Generaliseret refleksionskoefficient

Om refleksionskoefficenter ses af formlerne:

1. Størrelsen af $K(x)$ er altid mellem 0 og 1
2. Størrelsen af $K(x)$ er den samme over hele kablet $|K(x)| = |K(0)|$
3. Argumentet til $K(x)$ varierer som $e^{j2\beta x}$

Størrelsen $2\beta x$ kan skrives således:

$$2\beta x = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \quad (2.42)$$

Hvis vi angiver x i bølgelængder i stedet for i meter, dvs.

$$x_\lambda = \frac{x}{\lambda} \quad (2.43)$$

fås

$$2\beta x = 4\pi \cdot x_\lambda \quad (2.44)$$

Vi kan opfatte $K(x)$ som en vektor, der kører 1 gang rundt for hver halve bølgelængde x flytter sig:

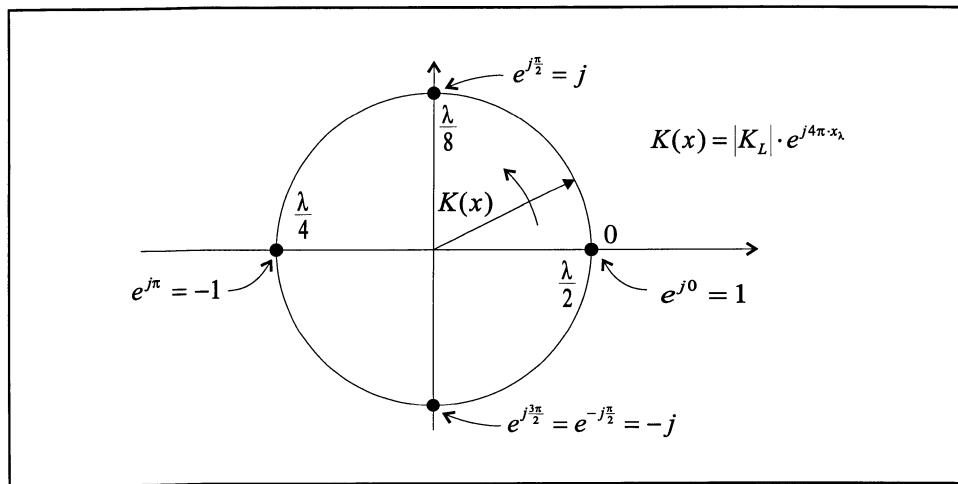


Fig. 2.3. Drejning af refleksionskoefficienten i et komplekst plan.

Af (2.42) ses f.eks. elementære værdier:

Z_L	K_L	Bemærkning
0	-1	Kortslutning, K_L reel
$= Z_0$	0	Tilpasning, $V^-(0) = 0$
∞	1	Åben, K_L reel
$= R$	$0 \leq K_L \leq 1$	K_L reel

Eksempel 2.2

Hvis kablet afsluttes med en spole med samme størrelse reaktans som størrelsen af Z_0 , ses, idet $|X_L| = |Z_0|$:

$$K_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{jX_L - Z_0}{jX_L + Z_0} = \frac{X_L^2 - Z_0^2 + j2X_LZ_0}{Z_0^2 + X_L^2} = \frac{j2X_L^2}{2X_L^2} = j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Dette betyder, at faseforskellen mellem V^- og V^+ over belastninger er $\pi/2$ (90°). $\lambda/4$ længere ned ad kablet mod generatoren er refleksionskoefficienter:

$$K_L \left(-\frac{\lambda}{4} \right) = K_L \cdot e^{j4\pi \cdot (-\frac{1}{4})} = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\pi} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

En halv bølgelængde væk findes:

$$K_L \left(-\frac{\lambda}{2} \right) = K_L \cdot e^{j2\beta x} = j \cdot e^{j2\frac{2\pi}{\lambda}(-\frac{\lambda}{2})} = +j$$

Alle steder er $|K(x)| = |K_L| = 1$

Eksempel 2.3

Hvis kablet er afsluttet med en kortslutning ses:

x	0	$-\frac{\lambda}{4}$	$-\frac{\lambda}{2}$	$-\frac{3\lambda}{4}$	$-\lambda$
$K(x)$	-1	+1	-1	+1	-1

2.2.2 Generaliseret impedans

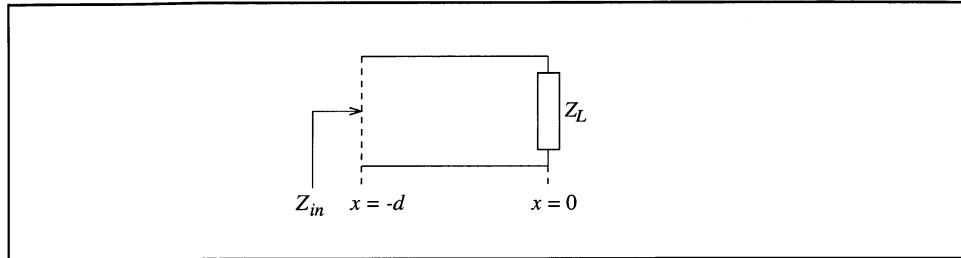


Fig. 2.4. Indgangsimpedans af en ledning.

$Z(x)$ betegner den impedans, vi ser ind i, når vi befinder os ved punkt x . $Z(x)$ er ikke så ligetil at udregne ved hovedregning. Som vi senere skal se, findes der udmærkede grafiske metoder til at overslagsberegne $Z(x)$ efter, væsentligst Smith-kortet. I tidligere tider anvendtes store Smith-kort til nøjagtig bestemmelse af $Z(x)$ ved dimensionering. I dag er en lommeregner, der kan regne med komplexe tal, en god hjælp. For bestemte simple værdier kan vi dog let udregne $Z_{in} (= Z(x))$.

Eksempel 2.4

x	0	$-\frac{\lambda}{4}$	$-\frac{\lambda}{2}$	$-\frac{3\lambda}{4}$
$Z(x)$	0Ω	$\infty \Omega$	0Ω	$\infty \Omega$

Tabelværdierne er når kablet er afsluttet med en kortslutning, og ses iflg. (2.38) . Dette betyder bl.a. at en kortslutning vil virke som en åben ende en kvart bølgelængde derfra, og at en åben ende vil virke som 0Ω $\lambda/4$ derfra.

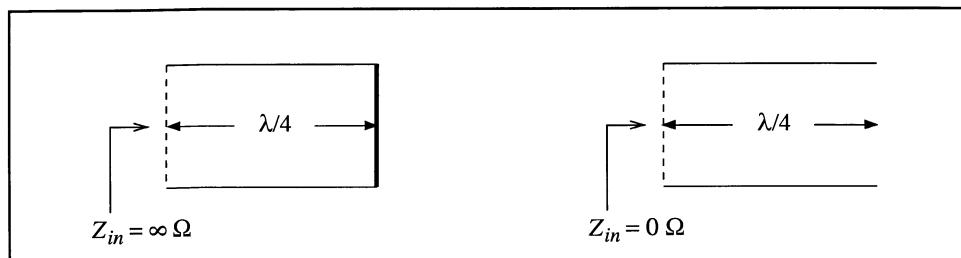


Fig. 2.5. Indgangsimpedans af en ledning med længden en kvart bølge afsluttet med kortslutning eller afbrydelse.

Endvidere vil en spole virke som en kondensator og omvendt, jvf. det tidligere eksempel.

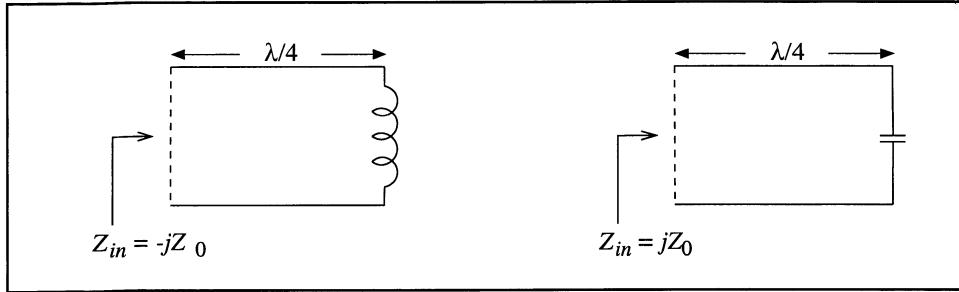


Fig. 2.6. Indgangsimpedans af kvart bølge ledning afsluttet med kondensator eller spole.

Lidt overvejelse vil vise, at det samme sker $\lambda/8$ fra en kortslutning og en afbrydelse; idet:

$$K\left(-\frac{\lambda}{8}\right) = K(0) \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jK(0)$$

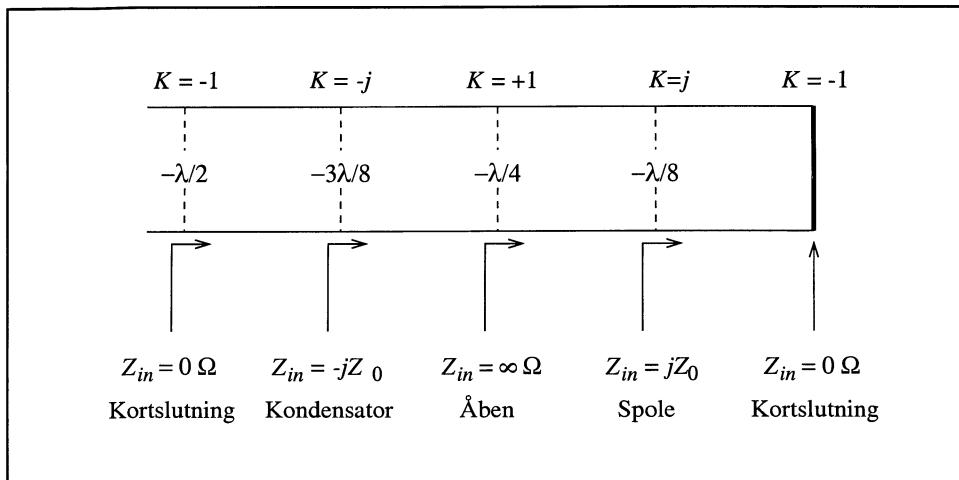


Fig. 2.7. Impedansforløb på en ledning afsluttet med en kortslutning.

2.2.3 Spændings- og strømrefleksionskoefficienter

Magnituden af spændingen langs kablet blev fundet til:

$$|V(x)| = |V^+(x)| \cdot |1 + K(x)| \quad (2.45)$$

da $V^+(x) = V^+ e^{-j\beta x}$ gælder at magnituden er den samme for alle x :

$$|V^+(x)| = |V^+| \quad (2.46)$$

Magnituden af strømmen er:

$$|I(x)| = |I^+(x)| \cdot |1 - K(x)| \quad (2.47)$$

idet vi har defineret betydningen af refleksionskoefficienten forskelligt for strøm og spænding. Tallet $K(x)$ i (2.46) og (2.47) er det samme, hvilket kan ses af sættet af duale ligninger: (x : udeladt i udtrykkene)

$$V = V^+ + V^- = Z_0 (I^+ - I^-) \quad (2.48)$$

$$I = I^+ + I^- = \frac{1}{Z_0} (V^+ - V^-) \quad (2.49)$$

$$V^+ + V^- \triangleq V^+ (1 + K_V) \quad ; \quad K_V = \frac{V^-}{V^+} \quad (2.50)$$

$$I^+ + I^- \triangleq I^+ (1 - K_I) \quad ; \quad K_I = -\frac{I^-}{I^+} \quad (2.51)$$

Vi får endvidere:

$$I^+ - I^- = I^+ (1 + K_I) \quad (2.52)$$

$$V^+ (1 + K_V) = Z_0 (I^+ - I^-) = Z_0 I^+ (1 + K_I) \quad (2.53)$$

$$\frac{V^+}{Z_0} (1 + K_V) = I^+ (1 + K_I) \quad (2.54)$$

Men da

$$\frac{V^+}{Z_0} = I^+ \quad (2.55)$$

fås

$$(1 + K_V) = (1 + K_I) : \Rightarrow K_V = K_I \quad (2.56)$$

Derfor regner vi kun med én refleksionskoefficient $K(x)$ og bruger formlerne:

$$V(x) = V^+(x)(1 + K(x)) \quad (2.57)$$

$$I(x) = I^+(x)(1 - K(x)) \quad (2.58)$$

Hvori, i begge tilfælde:

$$K(x) = K_L \cdot e^{-j2\beta x} \quad K_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (2.59)$$

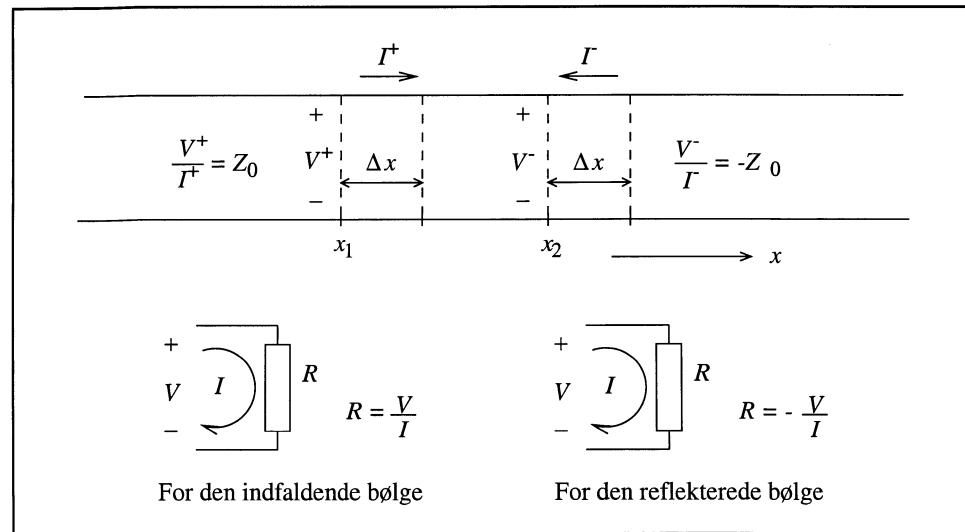


Fig. 2.8. Retninger for spænding og strøm.

Divideses (2.56) med (2.57) fås direkte den kendte ligning:

$$\frac{V(x)}{I(x)} = \frac{V^+(x)}{I^+(x)} \cdot \frac{1 + K(x)}{1 - K(x)} \quad (2.60)$$

$$Z(x) = Z_0 \cdot \frac{1 + K(x)}{1 - K(x)} \quad (2.61)$$

Minustegnet, der optræder i flere af ligningerne, skyldes at vi regner samme positive x-retning både for indfaldende bølge og for reflekteret bølge. For spændingen har dette ingen betydning: den går på tværs af x-aksen (dette er egentlig nogle meget fundamentale forudsætninger for hele modellen). For strømmen, som følger lederen, har retningen imidlertid betydning: i den indfaldende bølge løber strømmen frem og i den reflekterede løber den tilbage.

Forholdet mellem spænding og strøm i hver af bølgerne er Z_0 i størrelse. Når bølgerne, som ved stående bølger, adderer sig, får vi en anden impedans $Z(x)$.

Hvis kablet er afsluttet med $Z_L = Z_0$, bliver $K_L = 0$ iflg. (2.59) og (2.60) og vi har kun en indfaldende bølge, impedansen er Z_0 overalt på kablet. Det samme vil være tilfældet, hvis kablet er uendeligt langt, da den evt. reflekterede bølge fra den fjerne ende aldrig vil nå tilbage (den mangler til enhver endelig tid at gennemløbe ∞ meter). I praksis vil dette også gælde for et endeligt, men meget langt kabel, pga. den uundgåelige dæmpning.

Eksempel 2.5

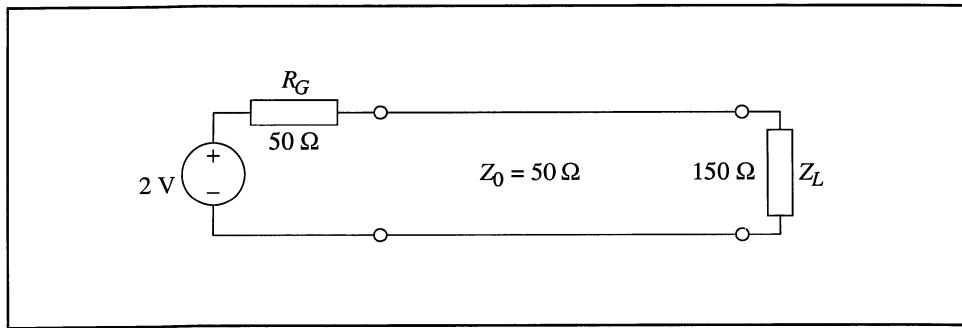


Fig. 2.9. Ledning med generator og belastning.

Ved Ohms lov ser vi:

$$V^+ = 2 \text{ V} \cdot \frac{Z_0}{R_G + Z_0} = 2 \text{ V} \cdot \frac{50}{50 + 50} = 1 \text{ V}, \quad I^+ = \frac{2 \text{ V}}{R_G + Z_0} = 20 \text{ mA}$$

Vi får en fremadløbende bølge på 1 V og 20 mA, og den generaliserede impedans er:

$$\frac{1 \text{ V}}{20 \text{ mA}} = 50 \Omega$$

Denne bølge løber ud til Z_L og opdager at Ohms lov ikke passer for de 150Ω . For at det skal passe, skal V tillægges $1/2$ og I fratrækkes $1/2$ gange.

$$\frac{V^+ \cdot (1 + \frac{1}{2})}{I^+ \cdot (1 - \frac{1}{2})} = \frac{1 \text{ V} \cdot 1,5}{20 \text{ mA} \cdot 0,5} = \frac{1,5 \text{ V}}{10 \text{ mA}} = 150 \Omega$$

Der opstår altså en tænkt generator på dette sted, som frembringer

$$\frac{+0,5 \text{ V}}{-10 \text{ mA}} = -50 \Omega$$

Denne bølge udbreder sig i alle retninger, men kablet slutter jo her, så vi får kun en tilbageløbende bølge.

Formlerne ses at være så tilpas indrettet, at både den fremadgående og den tilbagegående bølge har størrelsen 50Ω , samtidigt med at Ohms lov passer i begge ender. Den samlede spænding og strøm ved generatoren afhænger af kablets længde (da det ikke er korrekt termineret). Er kablet fx $\lambda/4$ langt, vil den oprindelige indfaldende bølge være blevet phasedrejet svarende til for en tur/retur hen ad kablet:

$$e^{-j\beta l} \cdot e^{+j\beta(-l)} = e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -1$$

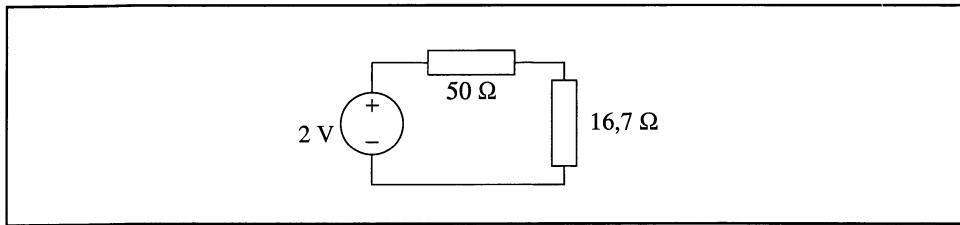


Fig. 2.10. Åkvivalentdiagram ved generatoren.

Ved generatoren har vi det oprindeligt indfaldende signal på 1 V og 20 mA samt et reflekteret signal på -0,5 V og +10 mA. Dette giver en impedans på dette sted:

$$\frac{(1 - 0,5) \text{ V}}{(20 + 10) \text{ mA}} = \frac{0,5 \text{ V}}{30 \text{ mA}} = 16,7 \Omega$$

Havde vi vidst dette, kunne vi have lavet følgende åkvivalentdiagram ved generatoren og direkte anvende Ohms lov:

I dette eksempel havde vi altså:

$$K_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{150 - 50}{150 + 50} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$$

$$K\left(-\frac{\lambda}{4}\right) = K_L \cdot e^{j\beta 2\left(-\frac{\lambda}{4}\right)} = \frac{1}{2} e^{-j\pi} = -\frac{1}{2}$$

$$Z\left(-\frac{\lambda}{4}\right) = Z_0 \cdot \frac{1 + K(x)}{1 - K(x)} = 50 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{50}{3} = 16,7 \Omega$$

$$K_V = \frac{V^-}{V^+} = \frac{0,5 \text{ V}}{1 \text{ V}} = 0,5 \quad \text{og} \quad K_I = -\frac{I^-}{I^+} = \frac{-10 \text{ mA}}{20 \text{ mA}} = 0,5$$

2.3 Forskellige modeller

Det endelige mål med undersøgelsen af forholdene på transmissionsledninger er at opklare hvorledes Z_0 og Z_L skal være, for at ledningen overfører maximal effekt uden at forvrænge signalet. De væsentligste elementer i beregningerne er:

1. Omregning mellem primære konstanter: L , C , R , G og sekundære: Z_0 , γ
2. Omregning mellem $K(x)$ og $Z(x)$
3. Beregning af $K(x)$ ud fra Z_0 , Z_L og Z_G .

Vi har foreløbigt set på det tabsfrie kabel. Nu vil vi se på, hvorledes Z_0 og γ beregnes i andre tilfælde. Det helt generelle tilfælde er uoverskueligt, så man normalt ikke bruger dette, men vælger istedet en passende simplificeret model. Da endvidere visse fundamentale forudsætninger ikke er helt opfyldt, vil det være spildt arbejde at bruge den generelle model i praksis: resultaterne vil ikke være mere nøjagtige. Vi skal senere i feltteorien vende tilbage til disse fundamentale forudsætninger (fx. at spændingsfeltet står fuldstændig vinkelret på udbredelsesretningen). De modeller, der skal omtales i forskellig detaljeringsgrad, er:

1. Generelt tilfælde (for sammenligning).
2. Tabsfri kabel (er behandlet).
3. Forvrængningsfrit kabel.
4. Kabler med små tab (den almindelige model).
5. Telefonkabler (den gamle model).

2.3.1 Generelt tilfælde

For det helt betingelsesløse tilfælde haves:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \alpha + j\beta \quad (2.62)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \quad (2.63)$$

Når vi skal tage kvadratroden af et komplex tal, tager vi roden af modulus og halverer argumentet. Derfor ses γ altid at ligge i 1. kvadrant, dvs. α og β er altid positive.

Men vi ser det ubehagelige, at både α og β er ulineært afhængige af frekvensen, hvilket betyder at forskellige frekvenser i et signal udbreder sig med forskellig hastighed. (For det tabsfrie tilfælde havde vi jo $\beta = \omega/v$, altså en lineær afhængighed).

2.3.2 Tabsfrit kabel

$$R = G = 0 \quad (2.64)$$

Her havde vi:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = j\beta = j\omega\sqrt{LC} \quad (\alpha = 0) \quad (2.65)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{reel}) \quad (2.66)$$

Vi ser at β (faseskydningen pr. m) er lineært afhængig af frekvensen

$$\beta = \omega\sqrt{LC} = \frac{\omega}{v} \quad (2.67)$$

hvilket betyder at alle frekvenser forsinkes lige meget i tid. Derfor vil de forskellige frekvens-komposanter placering bevares, når signalet sendes gennem tabsfrit kabel.

2.3.3 Forvrængningsfrit kabel

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad (2.68)$$

Hvis den ovenstående betingelse er opfyldt har vi et kabel som er fordelagtigt, dels fordi vi kan regne bekvemt på det, og dels fordi β er lineært afhængig af ω , således at alle frekvenser forsinkes lige meget. Vi vil gennemgå dette tilfælde lidt mere detaljeret og herunder forklare betydningen af $\alpha =$ realdelen af γ .

Vi indfører A og får derved:

$$A = \frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad (2.69)$$

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{L(A + j\omega)C(A + j\omega)} \quad (2.70)$$

$$= \sqrt{LC}(A + j\omega) = A\sqrt{LC} + j\omega\sqrt{LC}$$

hvilket vil sige:

$$\alpha = A\sqrt{LC} = \frac{R}{L}\sqrt{LC} = \frac{G}{C}\sqrt{LC} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = G\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \beta = \omega\sqrt{LC} \quad (2.71)$$

Vi ser at β bliver som for det tabsfri, og at α bliver uafhængigt af ω , endvidere:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{L(A + j\omega)}{C(A + j\omega)}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.72)$$

Z_0 er også reel, og α kan nu skrives:

$$\alpha = \frac{R}{Z_0} = G \cdot Z_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_0} + G \cdot Z_0 \right) \quad (2.73)$$

Vi kan nu anvende formelsættet fra det tabsfri tilfælde idet vi ganger faktoren $e^{\alpha x}$ på de steder hvor $e^{j\beta x}$ optræder:

$$V(x) = V^+ e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + V^- e^{\alpha x} e^{j\beta x} \quad (2.74)$$

$$I(x) = I^+ e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + I^- e^{\alpha x} e^{j\beta x} \quad (2.75)$$

$$K(x) = \frac{V^-(x)}{V^+(x)} \cdot \frac{V^-(0)}{V^+(0)} \cdot \frac{e^{\alpha x} e^{j\beta x}}{e^{\alpha x} e^{j\beta x}} = K_L \cdot e^{2\alpha x} \cdot e^{j2\beta x} \quad (2.76)$$

$$Z(x) = Z_0 \frac{1 + K(x)}{1 - K(x)} \quad (2.77)$$

Faktoren $e^{\alpha x}$ får den betydning, at bølgens amplitude dæmpes ud ad kablet samtidig med at vi får den "normale" fasedrejning hidrørende fra $e^{j\beta x}$.

Med de given forudsætninger har vi en ikke frekvens-forvrængende dæmpning hen ad kablet.

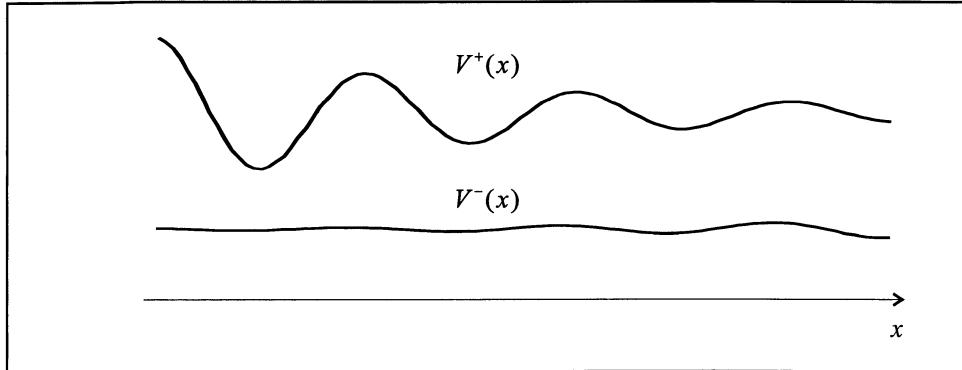


Fig. 2.11. Dæmpning af fremadgående og reflekteret signal.

2.3.4 Kabler med små tab

$$\omega L \gg R \quad \omega C \gg G \quad (2.78)$$

Dette er det almindeligste tilfælde; ved de fleste anvendelser vil man vel vælge et kabel, der har mindst muligt tab i det givne anvendelsesområde. Ofte er de anvendte kabler så korte, så præcise beregninger af tabet ikke er nødvendige. Vi vil se, at de tilnærmede værdier af γ og Z_0 faktisk er de samme som for det forvrængningsfrie tilfælde.

Ved udregning af de sekundære kabelkonstanter kan med fordel anvendes vektorregning. Er tilnærmelserne ikke gode nok til et aktuelt tilfælde, må man selvfølgelig „tage næste led med“. En tilnærmelse vises her:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \left| \sqrt{ZY} \right| \angle \frac{1}{2}(\angle Z + \angle Y) \quad (2.79)$$

Vi anvender komplement vinklerne θ_1 og θ_2 til hhv. $\angle Z$ og $\angle Y$. Hvis θ_1 og θ_2 er små (under ca. 10°) gælder: $\tan \theta \sim \theta$, $\sin \theta \sim \theta$ og $\cos \theta \sim 1$

$$\theta_1 \sim \frac{R}{\omega L}, \quad \theta_2 \sim \frac{G}{\omega C} \quad (2.80)$$

Dette gælder når tabene er små. Vi ser også:

$$\left| \sqrt{ZY} \right| = \left| \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \right| \sim \left| \sqrt{-\omega^2 LC} \right| \sim \omega \sqrt{LC} \quad (2.81)$$

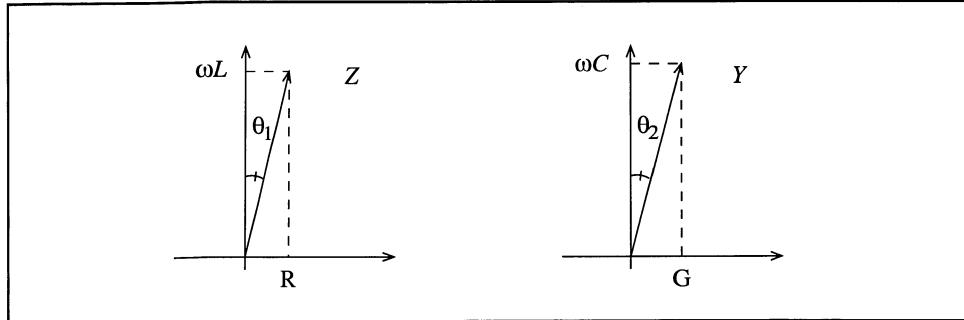


Fig. 2.12. Vinklerne θ_1 og θ_2 .

Vi får nu:

$$\begin{aligned}\alpha &= \operatorname{Re}[\gamma] = \left| \sqrt{ZY} \right| \sin \left[\frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right] \sim \omega \sqrt{LC} \cdot \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) \\ &\sim \omega \sqrt{LC} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C} \right) \sim \frac{1}{2} \left(R \sqrt{\frac{C}{L}} + G \sqrt{\frac{L}{C}} \right)\end{aligned}\quad (2.82)$$

$$\beta = \operatorname{Im}[\gamma] \left| \sqrt{ZY} \right| \cos \left[\frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right] \sim \left| \sqrt{ZY} \right| \sim \omega \sqrt{LC} \quad (2.83)$$

For Z_0 ses følgende, hvorved α kan findes:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \left| \sqrt{\frac{Z}{Y}} \right| \angle \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \left| \sqrt{\frac{R+\omega L}{G+\omega C}} \right| \angle \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1) \sim \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.84)$$

$$\alpha \sim \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_0} + G \cdot Z_0 \right) \quad (2.85)$$

Eksempel 2.6

For det såkaldte „tykke walkiekabel“, RG-8 A/U er opgivet følgende data ved 100 MHz:
 $Z_0 = 52 \Omega$, $C = 97 \text{ pF/m}$, $v/c = 0,66$ og dæmpning $7,9 \text{ dB/100 m}$.
 Forholdet v/c kaldes også forkortningsfaktoren ff , som vi skal se på senere (i feltteorien).
 Regner vi på disse tal ses:

$$v = c \cdot ff = 3 \cdot 10^8 \cdot 0,66 = 198 \text{ m}/\mu\text{s}$$

$$L = \frac{Z_0}{v} = \frac{52}{198 \cdot 10^6} = 263 \text{ nH/m}$$

$$\alpha = 7,9 \cdot \frac{1}{8,69} \cdot \frac{1}{100} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ Np/m}$$

Forestiller vi os nu at kablet forvrænger mest muligt, dvs. $G = 0$ ses af (2.85) :

$$\alpha \sim \frac{R}{2Z_0}$$

$$R \sim 2\alpha Z_0 = 0,945 \Omega/\text{m}$$

Hvad bliver da vinklen på Z , og en mere nøjagtig værdi af Z_0 ?

$$\angle Z = \arctg \frac{\omega L}{R} = \arctg \frac{2\pi 10^8 \cdot 263 \cdot 10^{-9}}{945 \cdot 10^{-3}} = 89,67^\circ$$

dvs. Z er meget nær rent reaktiv.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{0,945 + j165}{j0,06095}} = 52,03 \angle -0,16^\circ$$

dvs. Z_0 er meget nær rent reel.

2.3.5 Telefonkabler

$$R \gg \omega L, \quad G \ll \omega C \quad (2.86)$$

For telefonkabler (gode gammeldags parsnoede kabler) gælder at modstanden pr. m (R) er større end den induktive reaktans pr. m ved de anvendte frekvenser (300 - 3000 Hz). Derfor forvrænger telefonkabler.

Alt dette havde amerikaneren M. Pupin indset, og han fandt derfor på at forøge L ved at indsætte spoler i telefonkablerne for at rette op på R/L forholdet, så forvrængningsfri overførsel kunne opnås. Spolerne skulle selvfølgelig helst fordeles fint over kabernes længde, men ved talefrekvenser er bølgelængden meget stor, så blot spolerne „sidder tæt“ i forhold til λ , hvor $\lambda > 100$ km, virker det fint. Spolerne kaldes pupinspoler og telefonfolk taler om pupiniserede kabler.

For det upupiniserede telefonkabel har vi det specielle forhold, at Z_0 ikke er ohmsk idet

der tilnærmet gælder $\angle Z_0 = 45^\circ$. Vi skal ikke behandle dette tilfælde yderligere her, blot anføre tilnærmende værdier af γ og Z_0 .

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \sim \sqrt{j\omega RC} \quad (2.87)$$

$$|\gamma| \sim \left| \sqrt{j\omega RC} \right| \sim \sqrt{\omega RC} \quad \angle \gamma \sim \frac{1}{2} \angle Y \sim 45^\circ \quad (2.88)$$

$$\alpha = \operatorname{Re}[\gamma] = |\gamma| \cos \angle \gamma \sim \sqrt{\omega RC} \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{\omega RC} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (2.89)$$

$$\beta = \operatorname{Im}[\gamma] = |\gamma| \sin \angle \gamma \sim \sqrt{\omega RC} \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{\omega RC} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (2.90)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega RC}{2}} (1 + j) \quad (2.91)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \sim \sqrt{\frac{R}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{R}{2\omega C}} (1 - j) \Omega \quad (2.92)$$

Vi ser, at $\alpha = \beta$ og at de begge er propertiale med ω . Z_0 er induktiv. Kablet forvrænger, da v ikke er ens for alle frekvenser:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{k_1 \cdot \sqrt{\omega}} = k_2 \cdot \sqrt{\omega} \quad (2.93)$$

2.3.6 Om valg af model

Ved de fleste praktiske og teoretiske opgaver får vi opgivet v , Z_0 , α samt ω og vi kan så blot regne på tilfældet, som om det var forvrængningsfri med β og Z_0 reelle. (Hvis den opgivne Z_0 er komplex, skal man tænke sig om to gange).

Får vi opgivet de primære konstanter L , C , R og G kan man i de fleste tilfælde lade som om kablet er forvrængningsfrit eller med små tab. Det er dog nødvendigt at undersøge om forudsætningerne for modellerne er opfyldte!

Kan vi ikke anvende tilnærmelsen (eller er man i tvivl) må man bruge de helt generelle formler.

I appendiks findes kabelkonstanter for forskellige kabeltyper, herunder koaksialkablet.

3 Signalforløb på ledningen

Vi kan nu anvende telegrafligningerne til at beregne spændings- og strømforløb hen langs med et kabel. Oftest er det kun spændingen ved belastningen vi er interesseret i, og så forenkles beregninger naturligvis.

I det afsnit vil forskellige metoder til beregninger af spændingsforløb blive vist, og som noget vigtigt vil stående bølger blive gennemgået tilslut.

3.1 Spændingsforløb på ledningen

En transmissionsledning, der er afsluttet med en impedans lig med den karakteristiske impedans, og forsynet fra en generator med en tilsvarende generatorimpedans, er nem at regne på. Den fremadgående spænding V^+ er blot det halve af generatorspændingen, og denne spænding føres videre til belastningen med en fasedrejning og eventuelle tab.

Det er noget mere kompliceret når der ikke er tilpasning hverken ved generator eller belastning. I det følgende behandles tre tilfælde, der er valgt for at vise tre forskellige metoder. Metoderne skulle, hvis alt går vel, give samme resultat, vi vil dog anvende dem til at finde spændinger forskellige steder.

3.1.1 Regning med refleksionskort

Refleksionskortet kan sagtens benyttes til harmoniske signaler, man skal blot multiplicere udtrykkende svarende til udbredelseskostanten ($e^{-\gamma l}$) istedet for at multiplicere med tidsforsinkelsen.

Samtidig huskes på, at refleksionskortet viser hele indsvingningsforløbet fra de første transiente. Vi er ved harmoniske signaler kun interesseret i de stationære løsninger dvs sammen af alle bidrag.

Vi beregner refleksionskoefficienter som normalt ved belastning og generator. På kortet findes den linie, svarende til det ønskede sted på kablet. Alle bidrag fra de krydsende streger på denne linie skal summeres fra tiden lig nul til uendelig. Vi kan finde denne sum ud fra førstede a og kvotienten x :

$$a \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{a}{1-x} \quad \text{for } |x| < 1 \quad (3.1)$$

Benyttes dette eksempelvis ved belastningen (se følgende figur), hvor det første led regnes som både det fremadgående og reflekterede signal, samt at første bidrag spændingsdeles ved generatoren findes:

$$a = (1 + K_L) e^{-\gamma l} \quad (3.2)$$

$$k = K_L K_G e^{-2\gamma l} \quad (3.3)$$

$$V_L = V_G \cdot \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} \cdot \frac{(1 + K_L) e^{-\gamma l}}{1 - K_L K_G e^{-2\gamma l}} \quad (3.4)$$

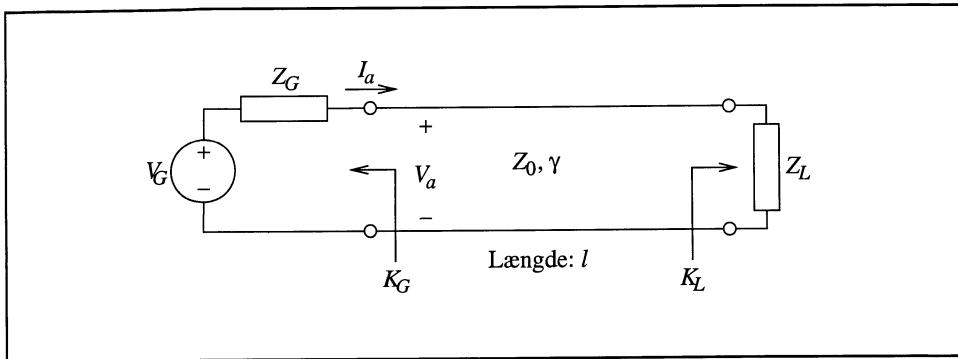


Fig. 3.1. Opstilling til beregning af spændingsforløb.

3.1.2 Regning med ligninger

Vi kan også benytte definitionerne på fremadgående og reflekteret signaler for på den måde at opstille et ligningssystem ved generatoren. I det følgende vises hvorledes spændingen ved generatorsiden kan findes med denne metode.

Betingelserne ved generatoren giver (indeks a angiver generatorenden af ledningen):

$$V_a = V_G \cdot \frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_G} \quad \text{og} \quad I_a = \frac{V_a}{Z_{in}} \quad (3.5)$$

$$V_a = V^+ + V^- \quad \text{og} \quad I_a = \frac{1}{Z_0} (V^+ - V^-) \quad (3.6)$$

Løses (3.6) med hensyn til den fremadgående spænding findes:

$$V^+ = \frac{1}{2} (V_a + Z_0 I_a) = \frac{V_a}{2} \cdot \left(1 + \frac{Z_0}{Z_{in}} \right) \quad (3.7)$$

$$= \frac{V_G}{2} \cdot \frac{Z_{in} + Z_0}{Z_{in} + Z_G}$$

Den samlede spænding over enden ved a består også af det reflekterede signal V^- , der kan udtrykkes ved refleksionskoefficienten og der kan findes:

$$V_a = V^+ \cdot (1 + K_L \cdot e^{-2\gamma l}) \quad (3.8)$$

$$= V_G \cdot \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} \cdot \frac{1 + K_L e^{-2\gamma l}}{1 - K_L K_G e^{-2\gamma l}}$$

3.1.3 Regning over grænser

To serieforbundne transmissionsledninger afsluttet med en belastningsimpedans er umidelbart mere kompliceret at regne på. Der vil være refleksioner fra overgangen imellem de to ledninger, der påvirker overføringsfunktionen.

Vi kan benytte den generaliserede refleksionskoefficient til beregningerne og det er især vigtigt at bemærke grænsebetingelserne imellem de to ledninger. Denne metode vil vi anvende meget indenfor feltteorien.

Det er hensigtsmæssigt at indlede beregningerne ved belastningerne, regne refleksionskoefficienterne tilbage til indgangssiden. Herefter regne forlæns med spændingen indtil den ønskede spænding over belastningen er fundet.

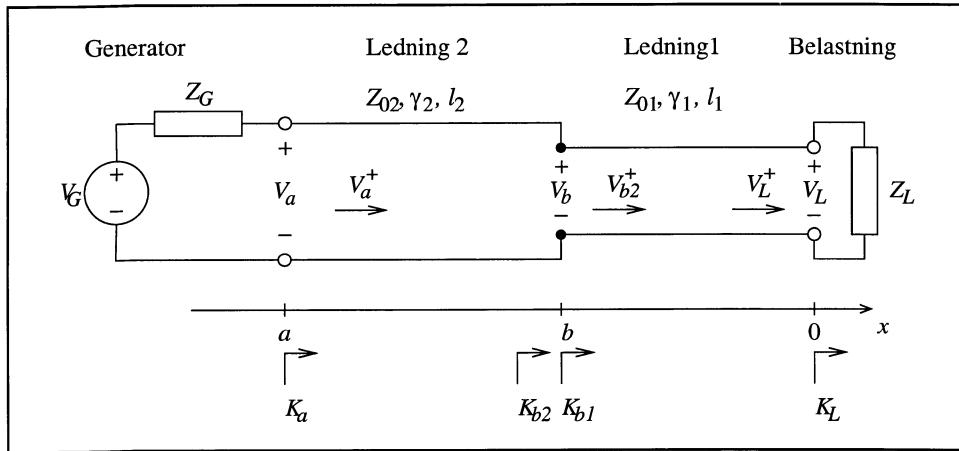


Fig. 3.2. To ledninger efterfulgt af en belastning.

Ved belastningen findes refleksionskoefficienten K_L på sædvanlig vis og den regnes „baglæns“ på ledning 1:

$$K_{b1} = K_L \cdot e^{-2\gamma_1 l_1} = \left(\frac{Z_L - Z_{01}}{Z_L + Z_{01}} \right) \cdot e^{-2\gamma_1 l_1} \quad \text{hvor : } K_L = \frac{Z_L - Z_{01}}{Z_L + Z_{01}} \quad (3.9)$$

3 Signalforløb på ledningen

Indeks $b1$ betyder, at refleksionskoefficienten er regnet frem til grænsen mellem de to ledninger, men stadig er i ledning 1. Da refleksionskoefficienten *ikke* er kontinuert i grænseovergangen imellem de to ledninger (der anvendes jo forskellige referenceimpedanser), skal der omregnes til impedans. Impedansen er kontinuert i grænsen, idet både spænding og strøm skal være den samme på hver sin side af ledningssammenkoblingen.

$$Z_{b2} = Z_{b1} = Z_{0_1} \cdot \frac{1 + K_{b1}}{1 - K_{b1}} \quad (3.10)$$

Der omregnes til refleksionskoefficient med reference til ledning 2 og regnes „baglæns“ ad ledning 2:

$$K_a = K_{b2} \cdot e^{-2\gamma_2 l_2} \quad \text{hvor :} \quad K_{b2} = \frac{Z_{b2} - Z_{0_2}}{Z_{b2} + Z_{0_2}} \quad (3.11)$$

Nu kan indgangsimpedansen ved a findes:

$$Z_a = Z_{0_2} \cdot \frac{1 + K_a}{1 - K_a} \quad (3.12)$$

Idet generatorspændingen er V_G kan vi finde den totale spænding på indgangen af ledningen, ud fra spændingsdelingen mellem generatorimpedansen og indgangsimpedansen Z_a . Men for at regne fremad er det nødvendigt at finde V_a^+ :

$$V_a^+ = \frac{V_a}{1 + K_a} \quad \text{hvor :} \quad V_a = V_G \cdot \frac{Z_a}{Z_G + Z_a} \quad (3.13)$$

Denne fremadgående spændingsbølge regnes frem til grænsen imellem de to ledninger ved hjælp af bølgeudbredelseskonstanten γ_2 :

$$V_{b2}^+ = V_a^+ \cdot e^{-\gamma_2 l_2} \quad (3.14)$$

Da V^+ *ikke* er kontinuert i grænseovergangen er det nødvendigt at omregne til den totale spænding, der skal være den samme i sammenføjningen af ledninger :

$$V_b = (1 + K_{b2}) \cdot V_{b2}^+ = (1 + K_{b1}) \cdot V_{b1}^+ \quad (3.15)$$

Af denne ligning kan den fremadgående spænding i ledning 1 findes ud fra den fremadgående spænding i ledning 2, og på sædvanligvis regnes frem til belastningen:

$$V_{b1}^+ = V_{b2}^+ \cdot \frac{1 + K_{b2}}{1 + K_{b1}} \quad V_L^+ = V_{b1}^+ \cdot e^{-\gamma_1 l_1} \quad (3.16)$$

Og dermed kan den totale spænding findes over belastningen, idet den er summen af V^+

og V^- :

$$V_L = V_L^+ \cdot (1 + K_L) \quad (3.17)$$

3.2 Matrix beskrivelse

Ofte er vi ikke interesseret i spændings-eller strømforløbet hen langs med ledningen, men kun hvad der sker ved ledningens ender. Ledningen kan betragte som en to-port, hvor hver ledningsende kaldes en port. Det kan også kaldes en firpol, hvor der er to terminaler i hver ledningsende.

Ledningen kan nu betragtes som et linært kredsløb, der beskrives med en parametermodel med fire parametre opstillet på matrixform. I kredsløbsteorien benyttes seks forskellige modeller, der alle har to uafhængige variable(spændinger eller strømme) som indgangsvariable, herpå multipliceres en parameter-matrix og resultatet bliver de afhængige variabl.

Især tre parameter modeller er anvendelige indenfor transmissionslednings teorien, enten til at finde ækvivalentkredsløb eller til at beregne overføringsfunktioner.

Admittansparametre, kaldes også y- eller kortslutnings-parametre. Enheden er [S] for alle fire parametre:

$$\begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Impedansparametre, kaldes også z- eller tomgangs-parametre. Enheden er [Ω] for alle fire parametre:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Impedansparametrene kan findes ved invertering af admittansmatricen:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} = \frac{1}{\Delta \mathbf{Y}} \cdot \begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\Delta \mathbf{Y} = (y_{11} \cdot y_{22}) - (y_{21} \cdot y_{12})$$

Kæde-, ABCD-, transmissions- eller iterative-parametre (latin: itero, jeg gentager). A og D er enhedsløse, B har enheden [Ω] og C det reciproke [S]:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Kædeparametrene er velegnet til at beregne overførings-funktionen for serieforbundne kredsløb som feks. to ledninger med forskellig karakteristiske impedans forbundet efter hinanden. Parametrene udtrykker sammenhængen mellem ind- og udgangsterminal for to-porten, og en serieforbindelse svarer derfor til en multiplikation af de individuelle matricer.

I parantes bemærkes, at der indenfor højfrekvens teknikke anvendes en tilsvarende parametermodel: transmissions-parametre, der dog er defineret på grundlag af S-parametre (Scattering-parametre), og derfor ikke er helt mage til ABCD parametrene.

Bemærk, at der i definitionen er et minustegn foran I_2 , det skyldes at der i kredsløbsteorien anvendes den konvention at strømmen „peger ind i“ to-porten. Dette er det modsatte af det vi anvender indenfor transmissionsledningen, hvor strømmen på udgangen (port 2) „peger ud af“ ledningen. I det følgende vil vi anvende vores sædvanlige notation, og der skal derfor ikke være et minustegn foran I_2 i (3.21).

3.2.1 Udledning af parametrene

Udgangspunktet for udledningen er spændings- og strøm-ligningerne udtrykt ved fremadgående- og reflekterede-spændinger. Med anvendelse af indeks 1 ved port 1 svarende til generatorsiden og indeks 2 svarende til belastningssiden, kan vi umiddelbart opstille to ligningssæt. X-aksen er hermed orientere således, at $x = 0$ er ved port 1, og $x = l$ er ved port 2, idet ledningens længde er l .

Ved belastningssiden, port 2, findes:

$$\begin{Bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \\ Y_0 \cdot e^{-\gamma l} & -Y_0 \cdot e^{\gamma l} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V^+ \\ V^- \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Og ved generatorsiden, port 1:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Y_0 & -Y_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V^+ \\ V^- \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Hvor vi har anvendt den karakteristiske admittans:

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} \quad (3.24)$$

Nu skal V^+ og V^- eliminieres fra ligningerne og hvis vi feks. gerne vil finde kædeparametrene kan følgende fremgangsmåde anvendes: ligningen ved belastningssiden løses mht V^+ og V^- :

$$\begin{Bmatrix} V^+ \\ V^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \\ Y_0 \cdot e^{-\gamma l} & -Y_0 \cdot e^{\gamma l} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} V_2 \\ V_1 \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Inverteres matricen findes:

$$\begin{Bmatrix} V^+ \\ V^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot e^{\gamma l} & \frac{1}{2Y_0} \cdot e^{\gamma l} \\ \frac{1}{2} \cdot e^{-\gamma l} & \frac{-1}{2Y_0} \cdot e^{-\gamma l} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_2 \\ V_1 \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

Dette resultat indsættes i ligningen ved generatorsiden og løses:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ Y_0 & -Y_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot e^{\gamma l} & \frac{1}{2Y_0} \cdot e^{\gamma l} \\ \frac{1}{2} \cdot e^{-\gamma l} & \frac{-1}{2Y_0} \cdot e^{-\gamma l} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} V_2 \\ I_1 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Udføres matrix multiplikationen efter følgende fremgangsmåde (n er matrix dimensionen, der regnes ens for alle rækker og søjler):

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad \mathbf{C} = (c_{jk}) = \left(\sum_{x=1}^n a_{jx} \cdot b_{xk} \right) \quad (3.28)$$

Og anvendes hyperboliske funktioner, der er defineret således:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (3.29)$$

Findes kædematricen til:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_0 \cdot \sinh(\gamma l) \\ Y_0 \cdot \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

Admittans og Impedans parametrene kan også findes ved løsning af ligningerne eller der kan anvendes konverteringstabeller. Resultatet er for hhv. Z- og Y-parametre:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} = Z_0 \cdot \begin{bmatrix} \coth(\gamma l) & \frac{1}{\sinh(\gamma l)} \\ \frac{1}{\sinh(\gamma l)} & \coth(\gamma l) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = Y_0 \cdot \begin{bmatrix} \coth(\gamma l) & \frac{-1}{\sinh(\gamma l)} \\ \frac{-1}{\sinh(\gamma l)} & \coth(\gamma l) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

Matrix egenskaber

At de to diagonal parametre (indeks 11 og 22) er ens betyder, at to-porten er symmetrisk. Ens parametrene ved siden af diagonalen betyder, at kredsløbet er reciprokt.

Dette ser ud til at gælde for transmissionsledningen, hvilket er naturligt da ledningen har samme tværsnit overalt, og da det er ligegyldigt hvilken vej signalet sendes igennem ledningen.

3.2.2 Ækvivalent kredsløb

En ledning kan direkte ækvivaleres med et T- eller π -netværk ved benyttelse af enten Z- eller Y-parametre.

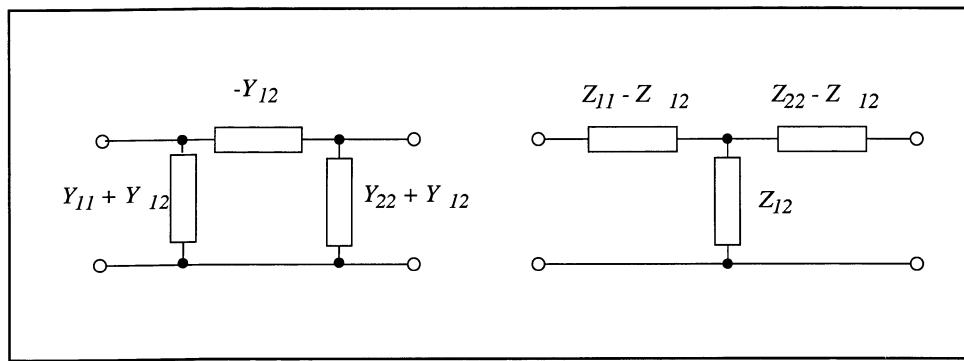


Fig. 3.3. π - og T-led med angivelse af parameterværdier.

Af figuren kan ækvivalentværdierne for T-netværket umiddelbart findes:

$$Z_a = Z_c = Z_{11} - Z_{12} = Z_0 \coth(\gamma l) - Z_0 \frac{1}{\sinh(\gamma l)} = Z_0 \cdot \frac{(\cosh(\gamma l) - 1)}{\sinh(\gamma l)} \quad (3.33)$$

$$= Z_0 \cdot \tanh\left(\frac{\gamma l}{2}\right)$$

$$Z_b = Z_{12} = Z_0 \cdot \frac{1}{\sinh(\gamma l)} \quad (3.34)$$

Tilsvarende for π netværket:

$$Y_a = Y_{11} + Y_{12} = Y_0 \cdot \tanh\left(\frac{\gamma l}{2}\right) \quad (3.35)$$

$$Y_b = -Y_{12} = \frac{Y_0}{\sinh(\gamma l)} \quad (3.36)$$

De beregnede ækvivalentkomponenter gælder ved en frekvens, eller med tilnærmelse i et lille frekvensområde, da kredsløbsteorienes komponenter alle har en påen frekvensafhængighed som feks. ω^{-1} eller ω^1 , i modsætning til transmisjonsledningstoriens frekvensafhængighed af mere transcendental karakter.

Eksempel 3.1

Ækvivalentkredsløbene kan benyttes til at dimensionere et 20 dB dæmpningsled (en attenuator) med en ind- og udgangsimpedans svarende til den karakteristiske impedans på 50 Ω . Der skal ikke være nogen fasedrejning, derfor er $\beta = 0$ og attenueringskonstanten kan findes ved omregning fra dB til Np:

$$\gamma l = \alpha l = \frac{20}{8,686} = 2,30 \quad \text{Np} \quad (3.37)$$

Vælges et π kredsløb ses det at komponenterne er udelukkende resistive og værdierne for de tre modstande kan beregnes til:

$$R_a = R_c = \frac{Z_0}{\tanh\left(\frac{\gamma l}{2}\right)} = 61,1 \quad \Omega \quad (3.38)$$

$$R_b = Z_0 \cdot \sinh(\gamma l) = 247,5 \quad \Omega \quad (3.39)$$

Eksempel 3.2

I dette eksempel findes en ækvivalentmodel for en 10 m lang tabsfri ledning ($R=G=0$) med den karakteristiske impedans 50 Ω og hvor udbredelses hastigheden er $200 \cdot 10^6$ m/s.

Benyttes T-ækvivalentmodellen kan komponentværdierne for de to serie-spoler L og parallel-kapaciteten C findes af Z-parametrene:

$$Z_L = j\omega L = Z_0 \cdot \tanh\left(\frac{\gamma l}{2}\right) \quad (3.40)$$

$$L = \frac{Z_0}{j\omega} \tanh\left(\frac{\gamma l}{2}\right) \quad (3.41)$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{Z_0}{\sinh(\gamma l)} \quad (3.42)$$

$$C = \frac{\sinh(\gamma l)}{j\omega Z_0} \quad (3.43)$$

Ud fra oplysningerne om ledningen kan de fordelte parametre findes til: $C = 100 \text{ pF/m}$ og $L = 250 \text{ nH/m}$, og dermed udbredelseskoefficienten γ :

$$\gamma = \sqrt{L \cdot C} = j\omega \cdot 5,0 \cdot 10^{-9} \text{ 1/m} \quad (3.44)$$

T-ækvivalentmodellens komponenter kan beregnes for forskellige frekvenser:

f [Hz]	L [μH]	C [nF]
10 k	1,249998	1,000002
100 k	1,249897	1,000165
1 M	1,239819	1,016531
10 M	0,729847	3,676078

Det ses tydeligt, at op til en vis frekvens er ækvivalentmodellens komponenter stort set uændret. Komponenterne er samme størrelse som de fordelte komponenter ganget med længden af ledningen idet L jo er delt i to.

Over en denne frekvens, der afhænger af den afvigelse der kan accepteres, sker der væsentlige ændringer og T-modellen skal anvendes. Grænsen findes omrentlig, hvor ledningens elektriske længde er ca. 10 % af bølgelængden.

3.3 Stående bølger

Vi vil nu antage, at generatoren er tilpasset ledningen $Z_G = Z_0$ og undersøge mere i detaljer hvorledes signalerne varierer langs ledningen.

$K(x)$ og $Z(x)$ vil altid variere periodisk hen ad kablet med perioden $\lambda/2$ som vist -undtaget hvis $Z_L = Z_0$, idet vi så får $K(x) = 0$ og $Z(x) = Z_0$ overalt på hele ledningen. Der vil så kun være en fremadgående bølge, og hvis Z_0 er reel (tabsfri ledning) vil strøm og spænding være i fase. Al effekt overføres fra generatorer til belastninger.

Hvis der *ikke* er tilpasning, $Z_L \neq Z_0$, vil der være *både* $V^+ e^{-j\beta x}$ og $V^- e^{+j\beta x}$ på kablet, og disse vil interferere med hinanden, så der opstår stående bølger.

Hvis fx. $Z_L = \infty$ får vi:

$$K(0) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = +1 = \frac{V^-(0)}{V^+(0)} \quad (3.45)$$

$$\Rightarrow V^-(0) = V^+(0) \quad (3.46)$$

En kvart bølgelængde derfra vil vi måle spændingen 0, idet øjebliksværdierne er:

$$V(t) = V^+ \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + V^- \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (3.47)$$

idet:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Spændingen vil altid være 0 i dette punkt $x = -\lambda/4 \Rightarrow \beta x = \pi/2$ uanset hvad t er.

For hver $\lambda/2$ vil vi få et spændingsløst punkt. Dette kan også ses af (idet $V^+ = V^-$):

$$V(x) = V^+ e^{-j\beta x} + V^- e^{j\beta x} \quad (3.48)$$

$$= V^+ (e^{-j\beta x} + e^{j\beta x})$$

Da $2 \cos x = e^{jx} + e^{-jx}$ fås:

$$V(x) = 2V^+ \cos \beta x \quad (3.49)$$

Hvilket viser at for $\beta x = -\pi/2, -3\pi/2, -5\pi/2, \dots$ vil $V(x)$ være 0.

Ganger vi den „underforståede“ cosinus på, får vi:

$$V(x,t) = 2V^+ \cos(\omega t) \cdot \cos(\beta x) \quad (3.50)$$

Dette gælder kun når kablet er åbent i enden!

3 Signalforløb på ledningen

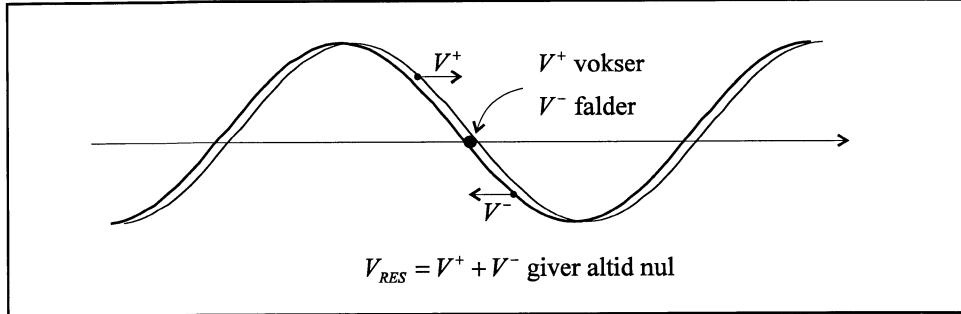


Fig. 3.4. Stående bølger hvor summen er nul.

3.3.1 Standbølgekurve

Spændingen langs kablet kan helt generelt skrives:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= V^+(x) + V^-(x) = V^+(x) \left(1 + \frac{V^-(x)}{V^+(x)} \right) \\
 &= V^+(x) (1 + K(x)) = V^+(x) (1 + K_L \cdot e^{j2\beta x}) \\
 |V(x)| &= |V^+| \cdot |(1 + K_L \cdot e^{j2\beta x})|
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Refleksionskoefficienten for strømmen er defineret som minus forholdet mellem reflekteret og fremadgående strøm:

$$K_I(x) = -\frac{I^-(x)}{I^+(x)} \tag{3.52}$$

Hvorved vi får for strømmen, idet $e^{j\pi} = -1$:

$$I(x) = I^+(x) (1 - K_L \cdot e^{j2\beta x}) = I^+(x) (1 + K_L \cdot e^{j2\beta x + \pi}) \tag{3.53}$$

$$|I(x)| = |I^+(x)| \cdot |(1 + K_L \cdot e^{j2\beta x + \pi})| \tag{3.54}$$

Heraf ses, at den såkaldte *standbølgekurve*, der beskrives af (3.51) og (3.54), for spænding og strøm har samme form, men de 2 ligger forskudt $\lambda/4$ for hinanden:

$$2\beta x = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot x \quad \Rightarrow \quad 2\beta x + \pi = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \left(x + \frac{\lambda}{4} \right) \tag{3.55}$$

V^+ og I^+ fås ved at indsætte værdier for x , hvor impedansen er kendt, dvs. ved belastningen og ved generatoren.

Spændingen langs kablet kan anskueliggøres som følger: Hvis vi normerer mht. $|V^+|$ er $V(x)$ vektorsummen af en fast vektor af længden 1 og en roterende vektor af længden K_L eftersom vi bevæger os hen ad kablet. Bevæger vi os fra belastningen mod generatoren, kører K_L -vektoren med uret:

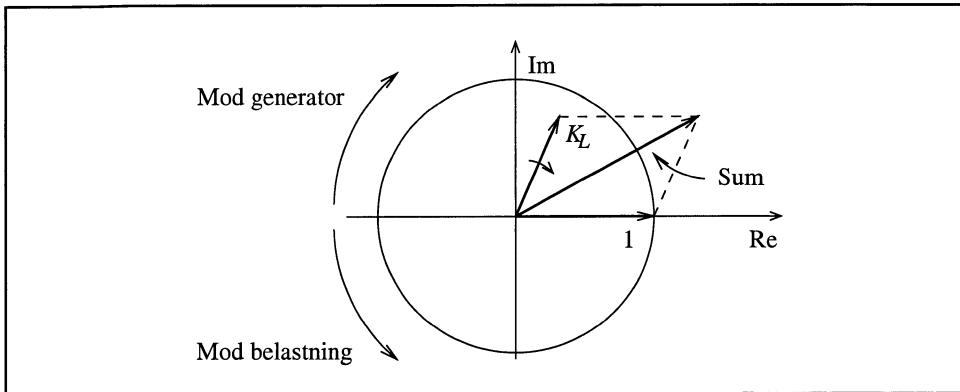


Fig. 3.5. Rotering af K_L og dertil svarende spænding $V(x)$.

Det ses at når $|K_L| = 1$ fås en spænding, der varierer mellem 0 og 2 normerede volt. Forholdene ved stående bølger er vist i et følgende eksempel.

Vi kan omskrive ligningerne for spændingen et sted x , for at tydeliggøre standbølgemønsteret:

$$V(x) = V^+ (e^{-j\beta x} + K_L e^{j\beta x}) \quad (3.56)$$

$$= V^+ ((1 - K_L) e^{-j\beta x} + 2 \cdot K_L \cos \beta x)$$

Første led i (3.56) ses at være en „almindelig“ vandre bølge, medens det sidste led (\cos) er en stående bølge, der beskriver indhyllingskurven, der er fastfrosset på ledningen kun bestemt af belastningen.

Størrelsen af spændingen kan nu skrives:

$$|V(x)| = |V^+| \sqrt{1 + |K_L|^2 + 2 \cdot |K_L| \cos(2\beta x + \theta_L)} \quad (3.57)$$

hvor refleksionskoefficienten er givet ved dens størrelse og vinkel (θ_L).

Eksempel 3.3

Vi betragter en tabsfri transmissionsledning, der er tilsluttet som vist. $l = 3,0 \text{ m}$, $v = 300 \text{ m}/\mu\text{s}$ og $Z_0 = 50 \Omega$.

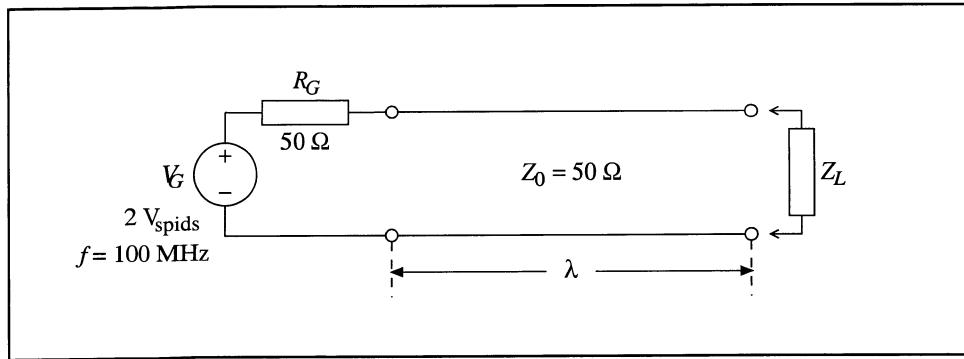


Fig. 3.6. Transmissionsledning med tilsluttet generator og belastning.

Standbølgekurvene for spændingen konstrueres for forskellige belastninger. Vi bemærker at kablet er en bølgelængde lang:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{300 \cdot 10^6}{100 \cdot 10^6} = 3 \text{ m} = l$$

Derfor vil $Z_{in} = Z_L$, og $V(-\lambda) = V(0)$. Punktet $x = 0$ er placeret ved Z_L .

Vi udregner K_L :

$$K_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = K(-\lambda)$$

Z_L	50	0	∞	100	25	$50+j35$
K_L	0	-1	+1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \angle 70^\circ$

I alle tilfælde ses at $V^+ = 1 \text{ V}$, da $R_G = Z_0$, så der opstår ikke multiple refleksioner:
For $x = -\lambda$ er

$$e^{-j\beta x} = e^{+j\beta x} = e^{-j2\pi} = 1$$

$$K(-\lambda) = K_L \cdot e^{j2\beta(-\lambda)} = K_L$$

$$V(-\lambda) = V^+ + V^- = V(1 + K_L)$$

$$\begin{aligned} V(-\lambda) &= 2 \text{ V} \cdot \frac{Z_{in}}{Z_{in} + R_G} = 2 \text{ V} \cdot \frac{Z_0 \frac{1+K_L}{1-K_L}}{Z_0 \frac{1+K_L}{1-K_L} + R_G} \\ &= 2 \text{ V} \cdot \frac{(1+K_L)}{(1+K_L) + (1-K_L)} = 1 \text{ V} \cdot (1+K_L) \end{aligned}$$

$$V^+ (1 + K_L) = 1 \text{ V} \Rightarrow V^+ = +1 \text{ V}$$

Derefter kan standbølgekurven konstrueres

$$|V(x)| = 1 \text{ V} \cdot |(1 + K(x))| \quad (3.58)$$

Her skal kun vises beregninger fra tilfældet $Z_L = 50 + j35 \Omega$ (en 50Ω modstand i serie med en spole på $55,7 \text{ nH}$).

$$K_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{50 + j35 - 50}{50 + j35 + 50} = 0,109 + j0,312$$

$$= 0,330 \angle 70,71^\circ$$

Maksimum og minimum af $|V(x)|$ findes når K_L har største og mindste værdi:

$$|V(x)|_{\max} = 1 \text{ V} (1 + 0,330) = 1,33 \text{ V}$$

$$|V(x)|_{\min} = 1 \text{ V} (1 - 0,330) = 0,67 \text{ V}$$

3 Signalforløb på ledningen

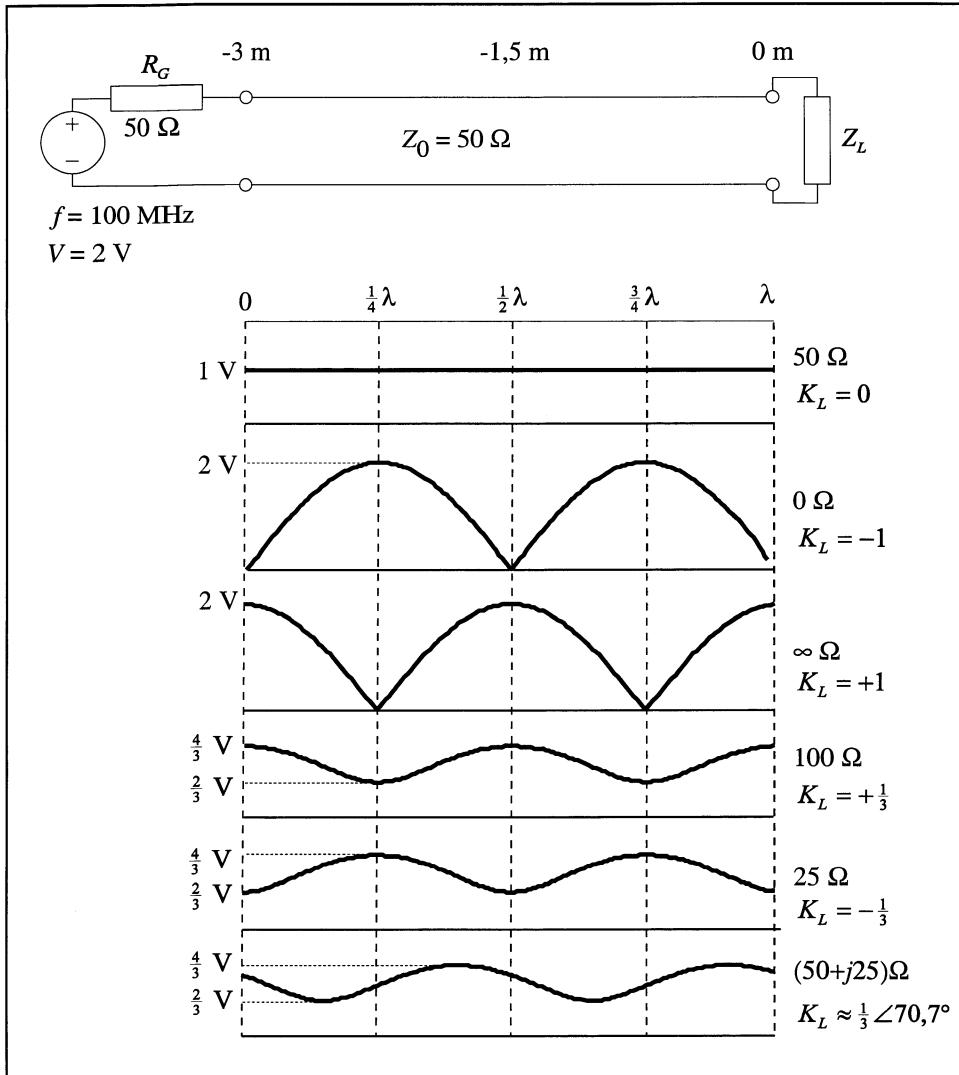


Fig. 3.7. Standbølgekurver for de forskellige belastninger i eksemplet.

Minima optræder ved $x = m$, der findes på følgende måde

$$K_L \cdot e^{j2\beta m} = -0,33 \quad \Rightarrow$$

$$e^{j2\beta m} = -0,33 \frac{1}{K_L} = \frac{-0,33}{-0,33 \cdot e^{j70^\circ}} = -e^{-j70^\circ} = e^{-j(180+70)^\circ} \Rightarrow$$

$$j2\beta m = -j(180 + 70)^\circ$$

$$m = -\frac{250^\circ}{2 \cdot \frac{360^\circ}{\lambda}} = -\frac{250}{720} \cdot \lambda = -0,348\lambda \quad \left(\pm n \cdot \frac{\lambda}{2} \right)$$

Tilsvarende ses maxima at optræde ved

$$x = -0,848\lambda \quad \left(\pm n \cdot \frac{\lambda}{2} \right)$$

I det sidste eksempel er kun de stående spændingsbølger konstrueret, men de er ledsaget af stående bølger i strømmen også. Disse kan konstrueres på samme måde, jvf. ligning (3.57).

3.3.2 Standbølgeforhold

Standbølgeforholdet (SWR = Standing Wave Ratio) er et tal, der anvendes meget ved praktisk arbejde med antenner, sendere og modtagere. SWR siger ikke mere om forholdene på ledningen end K_L gør, idet $SWR = f(K_L)$, men SWR er mere håndgribelig og kan bl.a. måles direkte, med særlige instrumenter. SWR er altid et reelt tal og fordelingen af SWR er mere bekvem til at udtrykke godheden af en tilpasning. Undertiden anvendes betegnelsen VSWR Voltage Standing Wave Ratio for at understrege, at der anvendes spændingsbølger.

SWR er defineret som forholdet mellem størrelserne af den maximale og den minimale spænding på kablet:

$$SWR = \frac{|V|_{\max}}{|V|_{\min}} \quad (3.59)$$

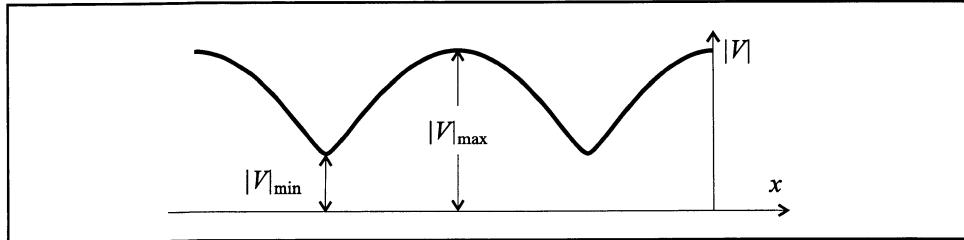


Fig. 3.8. Definition af standbølgeforside.

Vi ser, at hvis kablet er korrekt afsluttet, er der ingen stående bølger, og SWR = 1. Af formlerne (3.54) og (3.55) fås:

$$|V(x)| = |V^+(x)| |1 + K(x)| \quad (3.60)$$

$$|V(x)|_{\max} = |V^+(x)| (1 + |K(x)|) \quad (3.61)$$

$$|V(x)|_{\min} = |V^+(x)| (1 - |K(x)|) \quad (3.62)$$

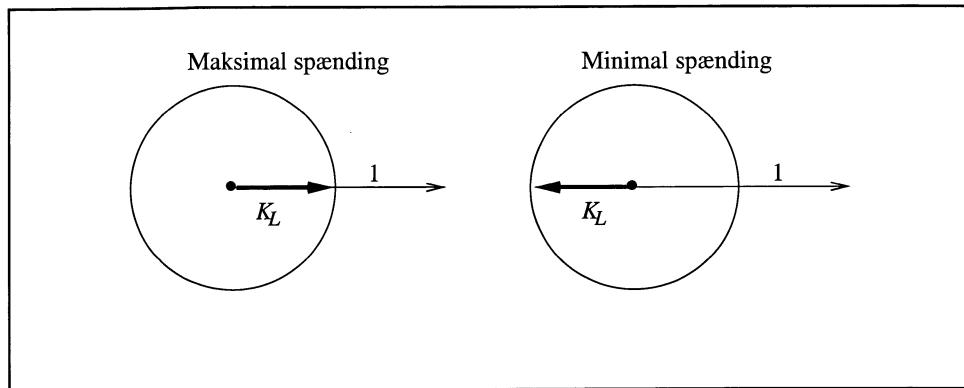


Fig. 3.9. Maksimal og minimal spænding.

(3.61) og (3.62) giver:

$$\text{SWR} = \frac{|V(x)|_{\max}}{|V(x)|_{\min}} = \frac{1 + |K(x)|}{1 - |K(x)|} = \frac{1 + |K_L|}{1 - |K_L|} \quad (3.63)$$

Ifølge det foregående gælder også

$$\text{SWR} = \frac{|I(x)|_{\max}}{|I(x)|_{\min}} \quad (3.64)$$

K_L	SWR	Bemærkning
0	1	Korrekt terminering
$\pm 0,1$	1,2	Næsten korrekt terminering
$\pm 0,5$	3	Dårlig terminering
± 1	∞	Afbrudt eller kortsluttet kabel

Vi ser at der er flg. sammenhæng mellem SWR og K_L

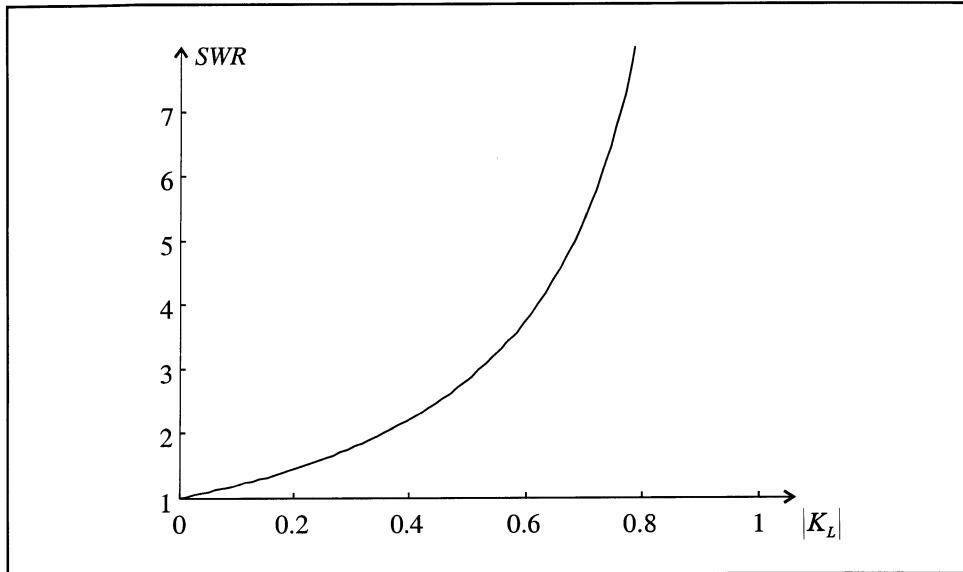


Fig. 3.10. SWR som funktion af reflektionskoefficientens størrelse.

Vi kan selvfølgelig også ”vende” denne formel, og få:

$$|K_L| = \frac{\text{SWR} - 1}{\text{SWR} + 1} \quad (3.65)$$

Mht. impedansen på kablet ses:

$$Z(x) = Z_0 \cdot \frac{1 + K(x)}{1 - K(x)} \quad (3.66)$$

$$|Z(x)|_{\max} = |Z_0| \cdot \frac{1 + |K(x)|}{1 - |K(x)|} = |Z_0| \cdot \text{SWR} \quad (3.67)$$

$$|Z(x)|_{\min} = |Z_0| \cdot \frac{1 - |K(x)|}{1 + |K(x)|} = |Z_0| \cdot \frac{1}{\text{SWR}} \quad (3.68)$$

Har vi et 50Ω kabel med $\text{SWR} = 3$, er den største spænding og strøm altså 3 gange større end den mindst målelige, og den højeste hhv. laveste impedans 150Ω og $16,7 \Omega$ (sammenlign. med det tidligere viste eksempel).

Hvis Z_L og Z_0 begge er reelle ses:

$$\text{SWR} = \frac{1 + |K_L|}{1 - |K_L|} = \frac{1 + \left| \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \right|}{1 - \left| \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \right|} \quad (3.69)$$

$$\text{SWR} = \begin{cases} \frac{Z_L}{Z_0} & \text{for : } Z_L > Z_0 \\ \frac{Z_0}{Z_L} & \text{for : } Z_0 > Z_L \end{cases} \quad (3.70)$$

SWR er forholdet mellem Z_0 og Z_L eller omvendt, således at $\text{SWR} > 1$.

3.4 Måling af standbølgeforsør

3.4.1 Spændingsmåling langs kablet

Hvis man flytter en højimpedanset måleprobe langs kablet, kan man, hvis bølgelængden ikke er for lang, finde stedet med den højeste spænding og stedet med den laveste spænding, og derved direkte udregne:

$$\text{SWR} = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} \quad (3.71)$$

Hvis frekvensen for signalerne er kendt, kan man udregne v for kablet ved at udmåle afstanden mellem V_{\max} -punktet og det nærmeste V_{\min} -punkt:

$$|x_{V_{\max}} - x_{V_{\min}}| = \frac{\lambda}{4} \quad (3.72)$$

$$v = f \cdot \lambda \quad (3.73)$$

Hvis man endvidere mäter afstanden fra belastningen til nærmeste V_{\max} -punkt, kan man som tidligere vist udregne vinklen for K_L . Denne metode er ikke særlig praktisk, især ikke for koaxialkabler og lange bølgelængder.

3.4.2 Galvanisk tilkoblet resistiv reflektometer.

Vi mäter spændingen i et bestemt punkt og deler den ved hjælp af en spændingsdeler med k , hvor k er en indtil videre arbitrer konstant.

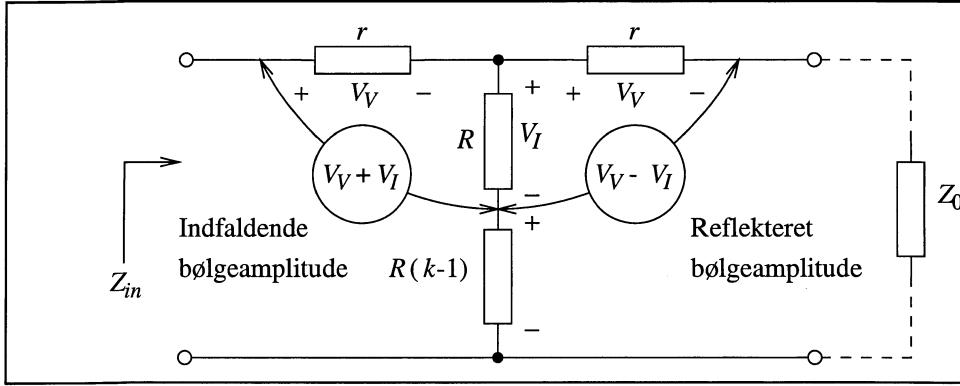


Fig. 3.11. Opstilling til måling af indfaldende og reflekteret signal.

$$V_V = \frac{1}{k} \cdot V(x) = \frac{1}{k} (V^+(x) + V^-(x)) \quad (3.74)$$

og samtidig mäter vi strømmen ved at indskyde en modstand på $r \Omega$ og mæle spændingsfaldet over den

$$V_I = r \cdot I(x) = \frac{r}{Z_0} (V^+(x) - V^-(x)) \quad (3.75)$$

Hvis vi nu sørger for at $1/k = r/Z_0$ ses, for summen og differensen af (3.74) og (3.75)

$$V_V + V_I = \frac{2}{k} V^+(x) \quad \text{og} \quad V_V - V_I = \frac{2}{k} V^-(x) \quad (3.76)$$

Af dette kan vi udregne K_L

$$|K_L| = \frac{|V_V - V_I|}{|V_V + V_I|} \quad (3.77)$$

Indsætter vi nu en extra modstand på $r \Omega$ kan vi ved at tilkoble 2 voltmetre passende, direkte få udlæst spændinger proportionalt med fremadgående og reflekteret signal.

Vi vil kræve at $r \ll Z_0$ og at den fysiske udstrækning af måleopstillingen er meget mindre end $\lambda/4$. Vi må yderligere forlange at indgangs impedansen af opstillingen er lig med Z_0 , hvilket betyder:

$$\frac{(r + Z_0) \cdot Rk}{(r + Z_0) + Rk} + r = Z_0 \quad (3.78)$$

$$R = \frac{Z_0}{2} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \quad \text{idet} \quad r = \frac{Z_0}{k} \quad (3.79)$$

Der vil være forskellige fejl, i resultatet bl.a. fordi: at vi har ikke indregnet instrumenternes indre modstand, når der er stående bølger, er Z netop ikke lig med Z_o til højre for instrumentet, hvorfor indgangsimpedansen for retningskablen ikke bliver Z_o . (Det samme gælder med generatoren). Og endelig modstande og instrumenter udviser også selvinduktioner og kapacitanser.

Eksempel 3.4

Hvis vi lader $r = 1 \Omega$ fås følgende værdier, når der skal måles på et 50Ω kabel: $k = 50$ og $R = 24,9900 \Omega$

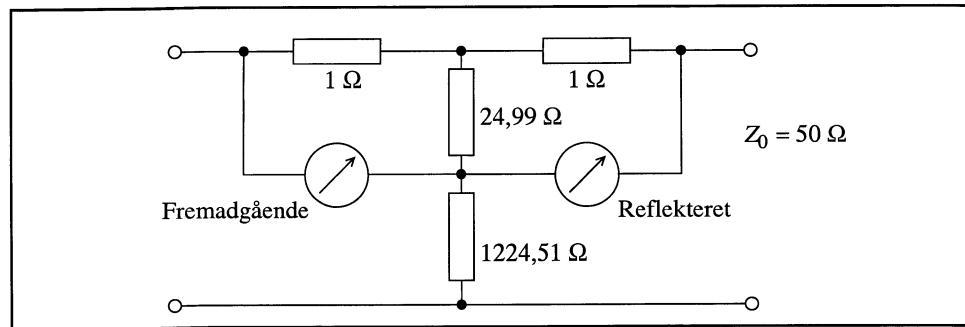


Fig. 3.12. Retningskabler med beregnede modstande.

3.4.3 Løst tilkoblet reflektometer

Dette vil vi ikke behandle detaljeret, men blot nævne, at man kan anvende en kapacitiv spændingsdeler til spændingsmålingen og en transformer til strømmålingen, således at kredsløbet bliver som vist herunder.

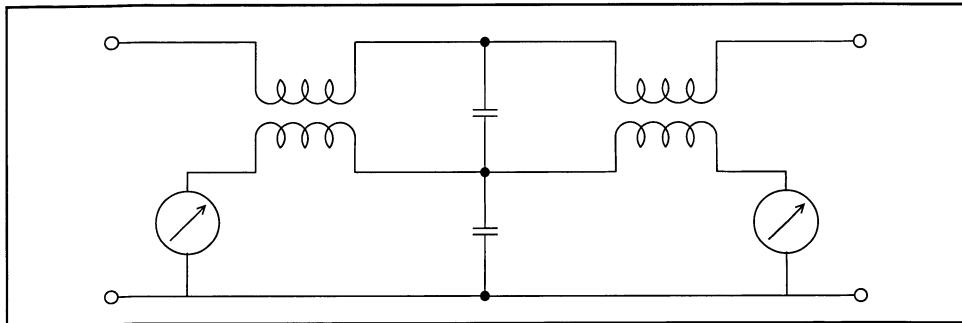


Fig. 3.13. Retningskabler opbygget med transformatorer.

3.5 Problemer med stående bølger

Stående bølger er uønskede fordi:

1. Der er ikke optimal effektoverførsel til belastningen pga. mistilpasning.
2. Der er risiko for overslag (gennembrænding) i isolationsmaterialet pga. de lokale høje spændinger.
3. Der er risiko for at lederne overophedes eller smelter pga. de lokale høje strømstyrker.
4. Indgangsimpedansen af kablet er afhængig af kablets længde og af signalets frekvens.
5. Der opstår refleksioner af en overlejret indhyllingskurve på signalet der findes ved modulation.

Senere skal vi se, at det er muligt at tilpasse en transmissionsledning, selvom hverken Z_G eller Z_L er lig med Z_0 . Hvis vi kun anvender reaktive komponenter til tilpasningen, vil der ikke opstå tab af effekt.

4 Smithkortet

Som tidligere nævnt, er vort mål med undersøgelsen af forholdene på en transmissionsledning at finde ud af kravene til Z_G og Z_L , for at få overført maximal effekt igennem ledningen. Der kan også være andre mål, dem kommer vi ikke ind på her, ligesom de fundne metoder kan anvendes til meget andet end beregninger på transmissionsledninger (som fx. ved beskrivelse af elektromagnetiske felter og ved filterberegninger).

De formler, det drejer sig om, er væsentligst dem, der beskriver sammenhængen mellem generaliseret impedans og generaliseret refleksionskoefficient:

$$Z(x) = Z_0 \cdot \frac{1 + K(x)}{1 - K(x)} \quad \text{og} \quad K(x) = \frac{Z(x) - Z_0}{Z(x) + Z_0} \quad (4.1)$$

$Z(x)$ og $K(x)$ er, som ses, bundet sammen af en funktion:

$$K(x) = f(Z(x)) \quad (4.2)$$

I det følgende vil vi undlade betegnelsen (x) , hvor det ikke kan misforstås. Normalt starter vi med at have x , derefter beregne K og til sidst Z , eller omvendt:

$$K = f(x), \quad Z = f(K) \quad (4.3)$$

Beregninger med (4.2) involverer besværlige manipulationer af komplexe tal, idet K og Z er komplexe. Vi bruger her følgende benævnelser på komposanterne:

$$Z = R + jX \quad \text{og} \quad K = U + jV \quad (4.4)$$

Sådanne beregninger er i dag ikke noget større problem, men det er stadigvæk vanskeligt at skaffe sig et overblik over funktionens opførsel. For at skaffe sig dette overblik, tegner man normalt en graf over funktionen. Problemet er her, at både K og Z er komplexe, således at funktionen afbilder et plan over i et andet plan.

Amerikaneren P.H. Smith fandt i 1939 på at lave en graf for denne komplexe afbillede, og det viste sig at være en glimrende hjælp ved beregninger på transmissionsledninger; især da man normalt kun havde regnestokken som beregningshjælp dengang.

Afbildningen af koordinatakserne i Z -planen over i K -planen kalder vi et Smithkort og kortet beskriver grafisk funktionen, idet dog Z normeres mht. Z_0 :

$$K = f(z) \quad (4.5)$$

4 Smithkortet

4.1 Kortets konstruktion

Vi anvender impedansen, der er *normeret* mht. Z_0 , således at et kort kan anvendes til alle kabler: vi skal blot skalere op og ned med Z_0 . Den normerede impedans betegner vi med z_n , dette understreges ved anvendelse af et lille bogstav med indeks n .

$$z_n = \frac{Z}{Z_0} = \frac{R}{Z_0} + j \frac{X}{Z_0} = r + jx \quad (4.6)$$

Kortet fremstiller afbildningen:

$$z_n = \frac{Z}{Z_0} = \frac{1+K}{1-K} \quad \text{eller} \quad K = \frac{z_n - 1}{z_n + 1} = \frac{\frac{Z}{Z_0} - 1}{\frac{Z}{Z_0} + 1} \quad (4.7)$$

For de tilfælde, vi behandler er r altid positiv og $|K| \leq 1$ så afbildningen afbilder højre halvplanet over i det indre af en cirkel med radius 1 i K -planet.

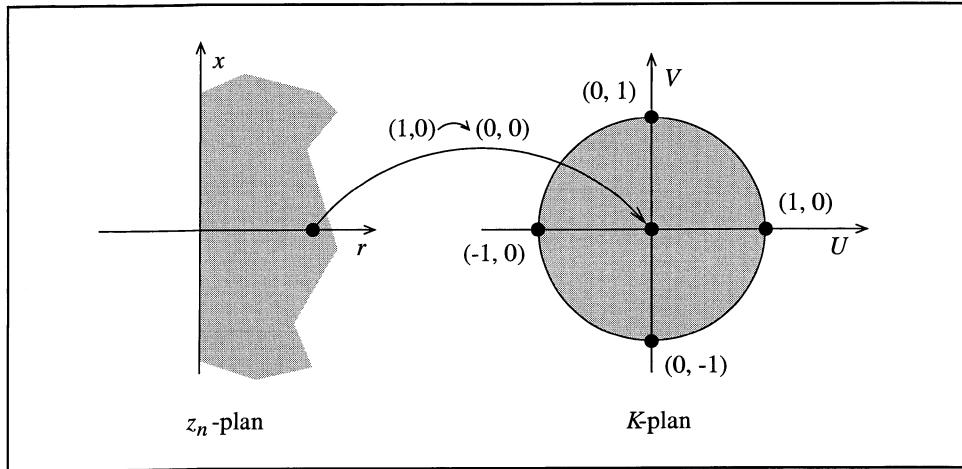


Fig. 4.1. Afbildning af z_n -plan over i K -plan.

Idet vi går ud fra, at Z_0 altid er reel, ses følgende samhørende sæt af punkter, som vi også tidligere har fundet:

z_n	K	Bemærkninger
(1,0)	(0,0)	$K_L = 0$ for $Z_L = Z_0$
(0,0)	(-1,0)	$K_L = -1$ for $Z_L = 0$
(∞ ,0)	(+1,0)	$K_L = +1$ for $Z_L = \infty$

Vi vil nu kun beskæftige os med området indenfor enhedscirklen i K -planet, idet billedet

af alle (passive) impedanser befinder sig her. Vi vil finde billedet af koordinatnettet i z_n -planet ovre i K -planen, altså de linier hvor $r = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ osv. og $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ osv.

Ved anvendelse af (4.4), (4.5) og (4.6) findes, at både real- og imaginærdel af z_n er en funktion af både U og V .

$$z_n = \frac{1+K}{1-K} = \frac{(1+U)+jV}{(1-U)-jV} \quad (4.8)$$

$$r + jx = \frac{1 - U^2 - V^2}{(1 - U)^2 + V^2} + j \frac{2V}{(1 - U)^2 + V^2} \quad (4.9)$$

$$r = f(U, V) \quad \text{og} \quad x = f(U, V) \quad (4.10)$$

Vi omarrangerer formlerne så vi kan se hvorledes U og V skal være for at holde hhv. r og x konstant, idet dette må repræsentere koordinatnettet i z_n :

For r isoleres realdelene i (4.9) :

$$r = \frac{1 - U^2 - V^2}{(1 - U)^2 + V^2} \quad \Rightarrow \quad (4.11)$$

$$\left(U - \frac{r}{r+1} \right)^2 + V^2 = \left(\frac{1}{r+1} \right)^2 \quad (4.12)$$

Dette er formlen for cirkler: en cirkel med centrum (a, b) og radius R kan beskrives ved:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (4.13)$$

Så vi ser at de rette linier $r = \text{konstant}$ i z_n -planen afbildes over i cirkler i K -planen. Radius og centrum for r-cirklerne er:

$$\text{Radius : } \frac{1}{r+1} \quad \text{Centrum : } \left(\frac{r}{r+1}, 0 \right) \quad (4.14)$$

For x isoleres imaginærdelene i (4.9)

$$x = \frac{2V}{(1 - U)^2 + V^2} \quad \Rightarrow \quad (4.15)$$

$$(U - 1)^2 + \left(V - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \quad (4.16)$$

De vandrette linier $x = \text{konstant}$ i z_n -planet afbides også i cirkler i K -planet:

$$\text{Radius : } \frac{1}{|x|} \quad \text{Centrum : } \left(1, \frac{1}{x}\right) \quad (4.17)$$

Vi kan nu afbilde z_n -gradnettet i K . De vigtigste kurver er vist herunder:

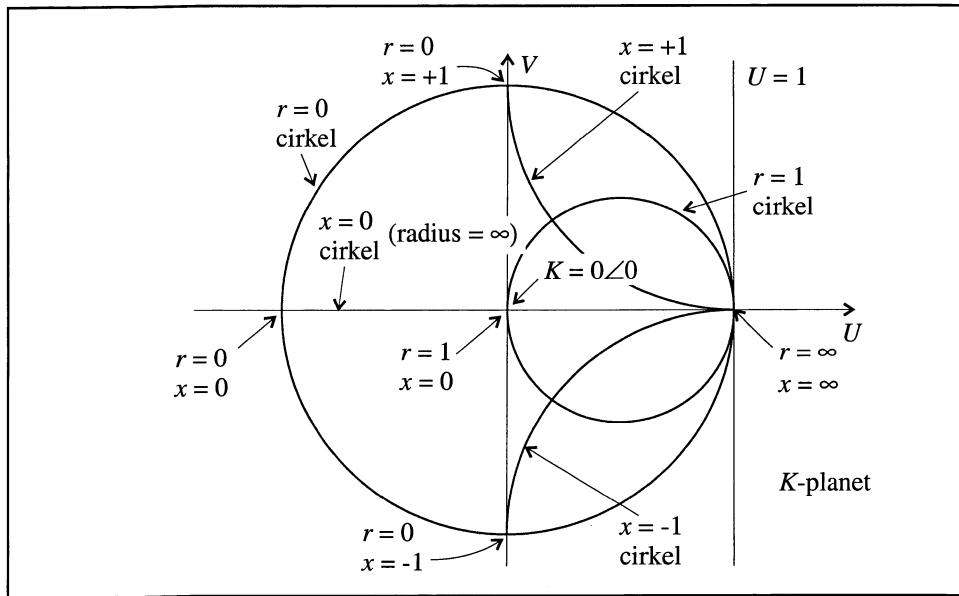


Fig. 4.2. De vigtigste linjer i et Smith kort.

Vi ser at r -cirklerne alle har centrum på $v = 0$ aksen og at x -cirklerne alle har centrum på $u = 1$ aksen, og at de begge bliver mindre og mindre, jo større r og z bliver. Tilsidst får de radius = 0 i uendeligheds punktet $K = (1, 0)$.

Med afbildningen af dette gradnet kan vi nu direkte udsætte K , når vi kender z_n , istedet for at regne det ud.

Et lidt forenklet Smithkortet er vist på figur 4.3, en version med flere inddelinger findes i appendiks

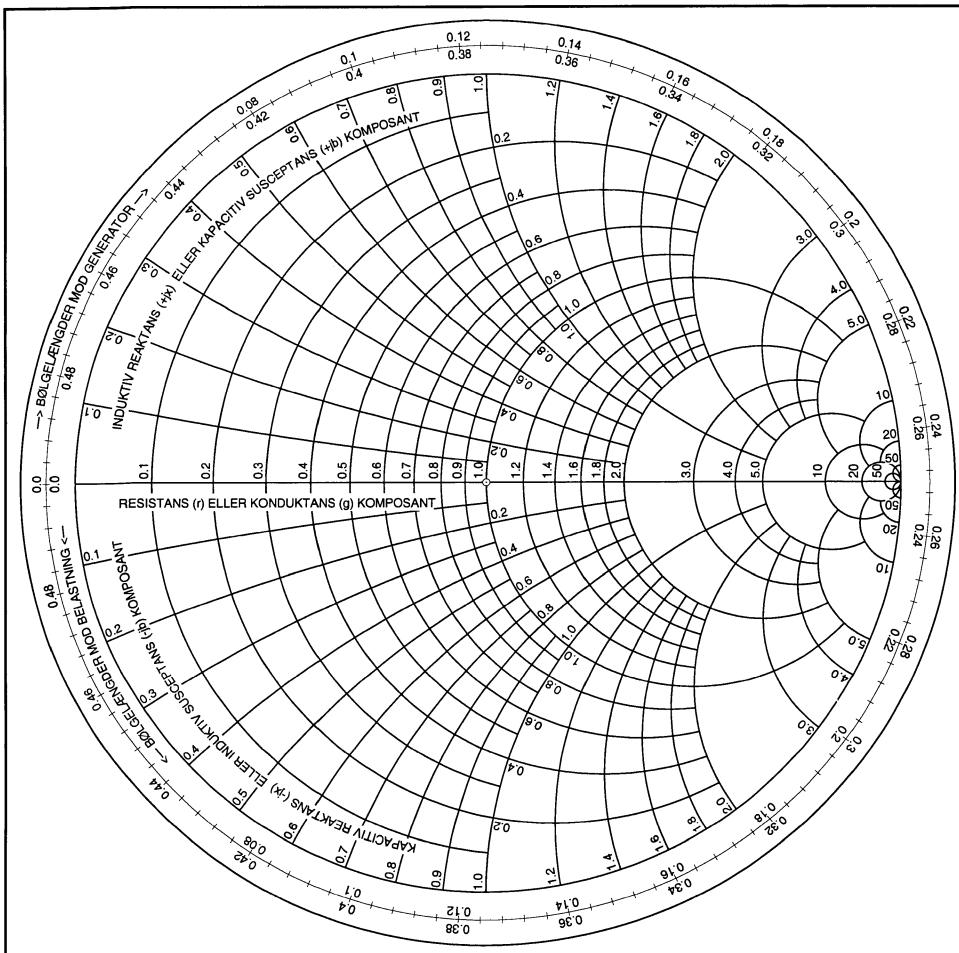


Fig. 4.3. Smithkort (se også appendiks).

Eksempel 4.1

For et 50Ω kabel, find K_L for $Z_L = 50 + j50 \Omega$. Hvis vi regner det ud, får vi:

$$K_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{50 + j50 - 50}{50 + j50 + 50} = \frac{1}{5} + j\frac{2}{5} = 0,45 \angle 63^\circ$$

4 Smithkortet

Bruges Smith-kortet:

$$z_n = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{50 + j50}{50} = 1 + j$$

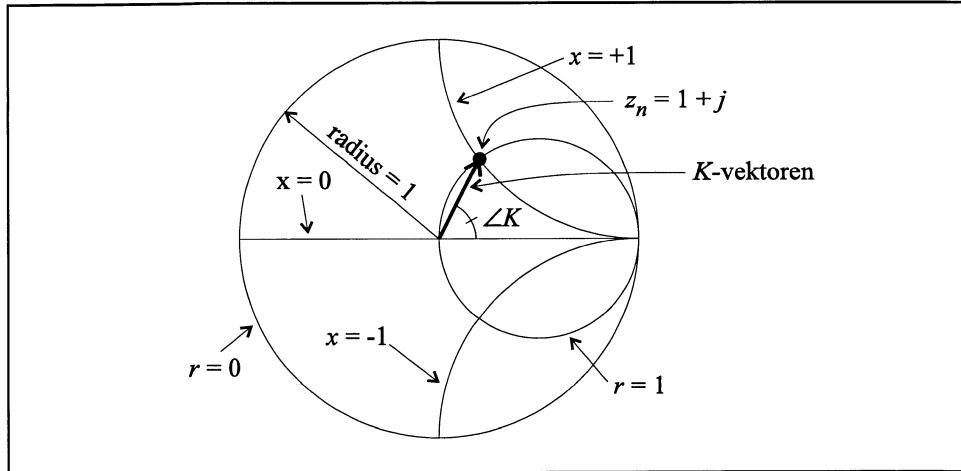


Fig. 4.4. Afsætning af punktet $z_n = 1 + j$ og aflæsning af dertilhørende K .

Når vi bevæger os ned ad kablet, kender vi K -vektorens opførsel fra tidligere: Den drejer rundt som viseren på et ur - en omdrejning for hver halve λ .

$$K(x) = K_L \cdot e^{j2\beta x} \quad (4.18)$$

Magnituden af K ændres ikke for det tabsfri tilfælde, kun argumentet:

$$|K| = |K_L| \quad (4.19)$$

$$\angle K = \angle K_L + 2\beta x = \angle K_L + \frac{2 \cdot 2\pi}{\lambda} x = \angle K_L + \left(2\pi \cdot \frac{x}{\lambda}\right) \quad (4.20)$$

Normalt sætter vi $x = 0$ ved belastningen således, at x bliver mere og mere negativ, når vi bevæger os mod generatoren.

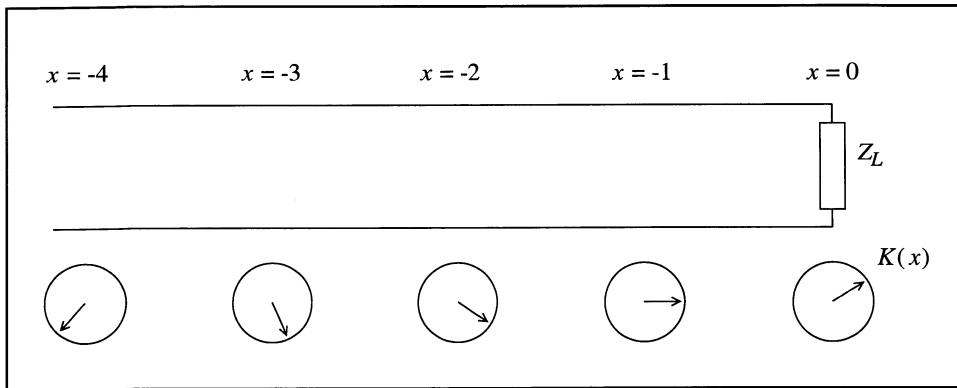


Fig. 4.5. Når vi går mod generator drejer K med uret.

Vi kan derfor inddale perimetren af enhedscirklen i K -planet i brøkdele af en bølgelængde, således at der bliver en halv bølgelængde hele vejen rundt.

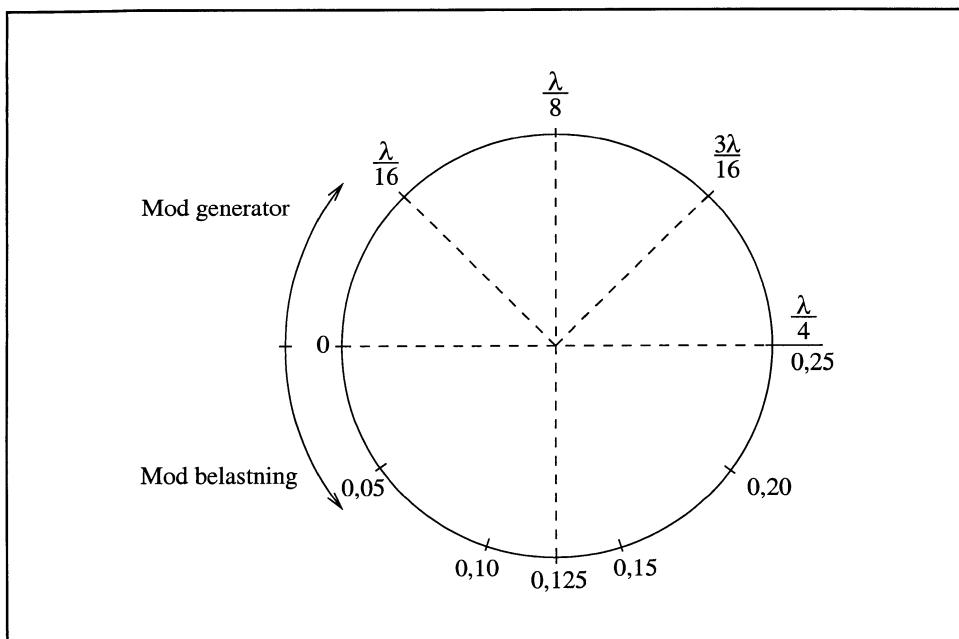


Fig. 4.6. Inddeling af perimetrene på Smithkortet.

På denne skitse er skalaen kun ført halvvejs rundt, men på de færdigtrykte Smith-kort, der købes, er der som regel 2 skalaer, der går hele vejen rundt - hver sin vej. Med denne normering mht. Z_0 og λ kan samme Smith-kort altså anvendes til alle kabelimpedanser og alle frekvenser. Efter løsning af en opgave kan z_n igen regnes om til Ω og λ til meter. Vil

man udmåle $K(x)$ i kortet, skal man skalere med radius i K -enhedscirklen eller benytte den tilhørende skala.

Eksempel 4.2

Beregn vha. Smith-kortet indgangsimpedansen for et 50Ω kabel, $0,286 \lambda$ langt, som er belastet med $100 + j150 \Omega$.

$$z_n = \frac{100 + j150}{50} = 2 + j3$$

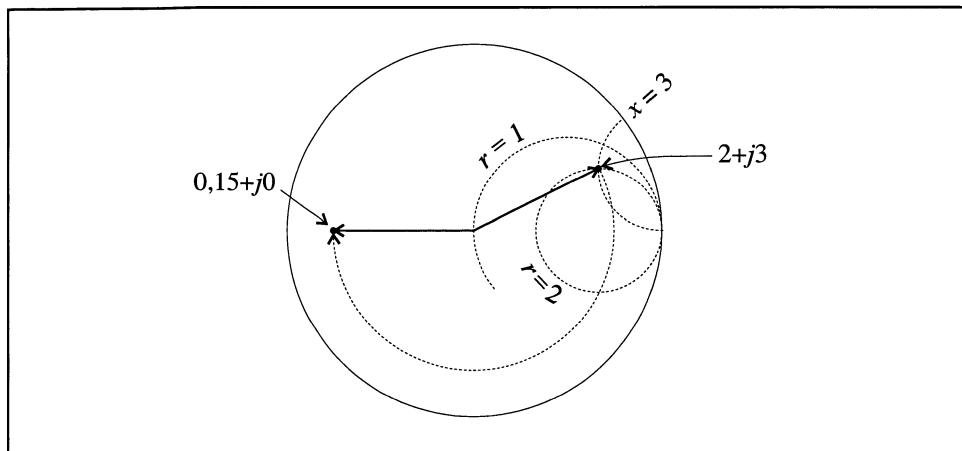


Fig. 4.7. Afsætning af z_n i Smith-kort med efterfølgende drejning af K vektoren og aflæsning af z_{in} .

I Smithkortet afsættes z_n , derefter drejes $0,286 \lambda$ med uret, og den normerede z_{in} for kablet kan nu aflæses. For at finde den rigtige Z_{in} skal vi denormalisere.

$$Z_{in} = z_n \cdot 50 \Omega = 0,15 \cdot 50 \Omega = 7,5 \Omega$$

Check selv efter i det store Smithkort. Bemærk lettelsen i forhold til at skulle beregne en komplex K_L , gange den med $e^{-j4\pi \cdot 0,286}$ og derefter udregne Z_{in} .

4.2 Lidt matematik

Funktioner

$$K = f(z_n) = \frac{z_n - 1}{z_n + 1} \quad (4.21)$$

er en såkaldt Möbius-transformation (eller en lineær bruden funktion), hvis generelle form er:

$$K = \frac{az_n + b}{cz_n + d} \quad (ad - bc \neq 0) \quad (4.22)$$

hvor alle størrelser er komplexe. Afbildningen er en-entydig, og den bøjer så at sige x -aksen i z_n planet sammen til en cirkel i K -planet. Gradnettet bliver tilsyneladende forvrænget kraftigt.

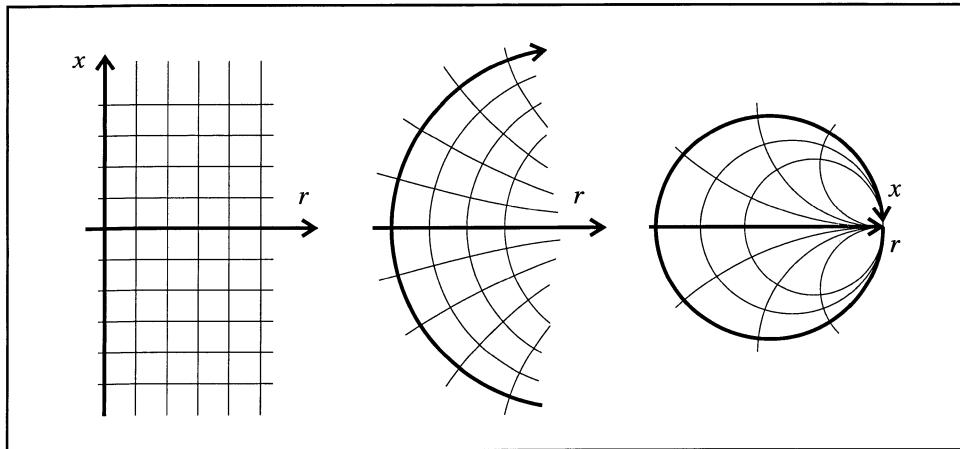


Fig. 4.8. Möbius transformation.

Denne specielle Möbiustransformation (4.21), vi har fat i, kaldes Cayley-transformationen, og den er analytisk. Når transformationen er analytisk bliver afbildningen konform, dvs. vinkelbevarende. Derfor skærer x - og r -gradnettets linier i Smith-kortet hinanden i rette vinkler, fordi det gør de jo i z_n -planet og disse vinkler bevares. At krumme linier skærer hinanden retvinklet, vil sige at tangenterne i skæringspunkterne danner rette vinkler med hinanden.

Der gælder for Möbiustransformationer:

1. Rette linier og cirkler afbildes på rette linier og cirkler. (Det har vi set)
2. Der findes højst 2 fixpunkter, dvs. tal der lades uforandret af transformationen.

Her ser vi, at $z_n = (0, +1) \mapsto K = (0, +1)$ og $z_n = (0, -1) \mapsto K = (0, -1)$. Vi ved altså, at der ikke findes flere af den slags punkter.

En funktion er analytisk, når den opfylder Cauchy-Riemann kriteriet:

$$K = f(z_n) = U(r, x) + jV(r, x) \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{og} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad (4.24)$$

Hvis (4.24) er overholdt er funktionen analytisk, dvs. differentiabel, og differentialkoefficienten er:

$$\frac{d}{dz_n} K = \frac{\partial U}{\partial r} + j \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x} - j \frac{\partial U}{\partial x} \quad (4.25)$$

Prøver man at udregne disse partielle differentialer for formel (4.9), kan man se, at det er korrekt, at Cayley-transformationen er analytisk og at Smith-kortet dermed er konformt med z_n -planet.

4.3 Anvendelse af Smith-kortet

Vi har indtil nu set, at vi kan anvende kortet til direkte at plotte belastningsimpedanser ind og derefter ved geometrisk konstruktion beregne impedansen et vilkårligt sted på kablet. (Måske skulle det lige indføjes her, at vi stadig kun beskæftiger os med harmoniske signaler, og foreløbigt kun betragter tabsfri kabler). Vi skal herefter se, hvorledes man vha. Smith-kortet kan tilpasse vilkårlige generatorimpedanser og belastningsimpedanser til et givet kabel. Først skal vi imidlertid undersøge nogle forskellige forhold, som er:

1. Aflæsning af SWR.
2. Impedans/admittans transformationer.
3. Serie- og shuntnilpasning.
4. Åbne og lukkede stubbe.

4.3.1 Standbølgeforhold

Vi har tidligere fundet $Z(x)_{\max}$ se side 64, og at den optræder, når $\angle K(x) = 0^\circ$.

$$\text{SWR} = \left| \frac{Z(x)_{\max}}{Z_0} \right| \quad (4.26)$$

$$\text{SWR} = z_n |_{\angle K=0^\circ} \quad (4.27)$$

Altså kan vi direkte aflæse SWR, når vi har plottet Z_L ind i kortet.

Eksempel 4.3

Hvad er SWR for et 50Ω kabel belastet med $100 + j50 \Omega$?

$$z_n = \frac{100 + j50}{50} = 2 + j$$

Vi plotter punktet ind, tager passeren med centrum i kortets midte og fører punktet med på U -aksen; her står der $r = 2,6$ så $\text{SWR} = z_n = 2,6$ (idet $\angle K$ her er 0°)

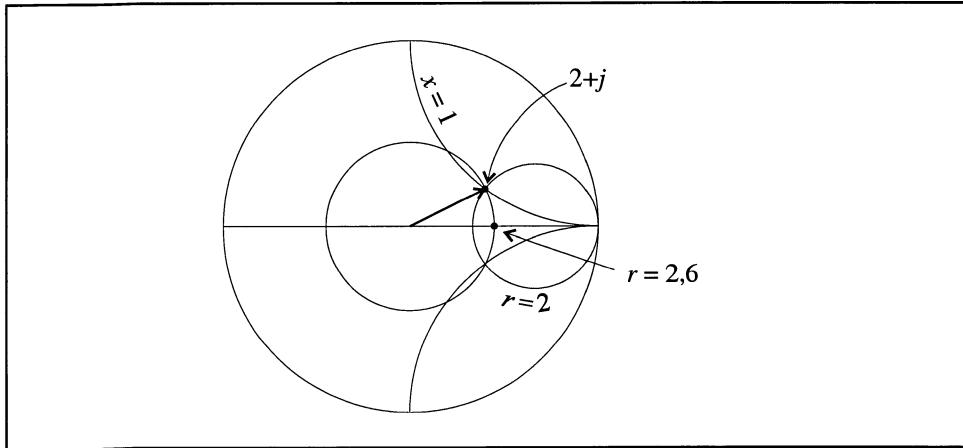


Fig. 4.9. Aflæsning af $\text{SWR} = 2,6$.

4.3.2 Impedans/admittans transformationer

Vi vil få brug for at regne med admittanser, idet vi vil ønske at sætte ting i parallel. Parallelforbindelser af admittanser udregnes som summen af del-elementerne, og det er lettere end først at skulle tage reciprokvaerdier af impedanser. Det viser sig at være let at transformere en impedans over i den tilsvarende admittans i Smith-kortet. Når vi bruger Smith-kortet som admittansdiagram skal vi normere mht. Y_0 , hvor:

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} \quad (4.28)$$

Vi ser:

$$\frac{1}{z_n} = \frac{Z_0}{Z} \quad \text{dermed: } y_n = \frac{Y}{Y_0} = \frac{Y}{\frac{1}{Z_0}} = Y \cdot Z_0 = \frac{1}{Z} \cdot Z_0 = \frac{1}{z_n} \quad (4.29)$$

I de fleste af opgaverne er $Z_0 = 50 \Omega$, hvorved $Y_0 = 20 \text{ mS}$.

Ser vi nu på afbildningen:

$$K = \frac{z_n - 1}{z_n + 1} = \frac{\frac{1}{y_n} - 1}{\frac{1}{y_n} + 1} = \frac{1 - y_n}{1 + y_n} = - \left(\frac{y_n - 1}{y_n + 1} \right) \Rightarrow \quad (4.30)$$

$$-K = \frac{y_n - 1}{y_n + 1} \quad (4.31)$$

Det ses, at hvis fx. K_1 svarer til en bestemt impedans vil $-K_1$ svarer til den modsvarende admittans. Med andre ord kan vi altså transformere z_n til y_n , ved at finde det diametralt modsatte punkt i kortet. Gradnettet angiver nu:

$$y_n = g + jb \quad (4.32)$$

hvor g er konduktansen og b susceptansen.

Afbildningerne i (4.30) og (4.31) har fuldstændig samme form, så gradnettets udseende er det samme. I kortet ses fx. at $z_n = \infty$ svarer til $y_n = 0$ og omvendt.

Eksempel 4.4

I et 50Ω kort indsætter vi punktet svarende til $Z = 100 + j150 \Omega$

$$z_n = \frac{100 + j150}{50} = 2 + j3$$

Vi tager linealen og lægger gennem kortets midte, og går vha. en passer et tilsvarende stykke ud på den anden side. Her aflæses:

$$y_n = 0,153 - j0,23$$

Hvis vi denormerer med $Y_0 = 20 \text{ mS}$, ses:

$$Y = 20 \cdot 10^{-3} (0,153 - j0,23) = 0,00307 - j0,0046 \text{ S} \quad (4.33)$$

Hvilket er samme resultat, som hvis vi havde udregnet

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{100 + j150} = 0,00307 - j0,0046 \text{ S}$$

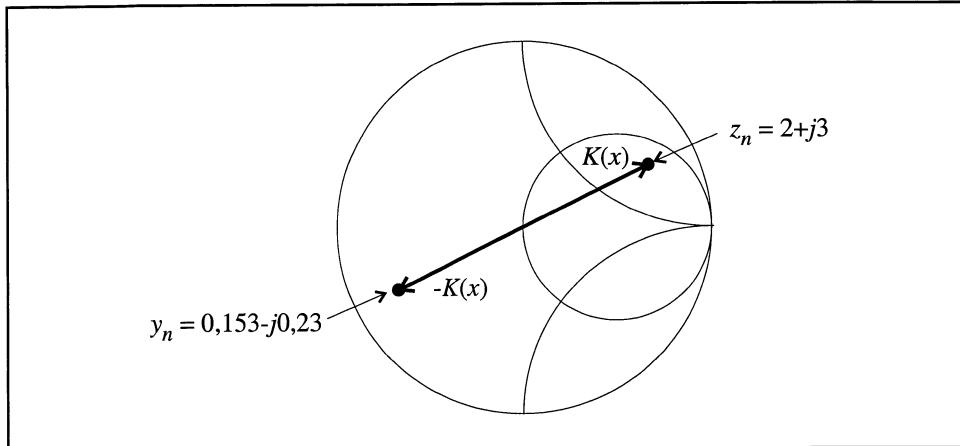
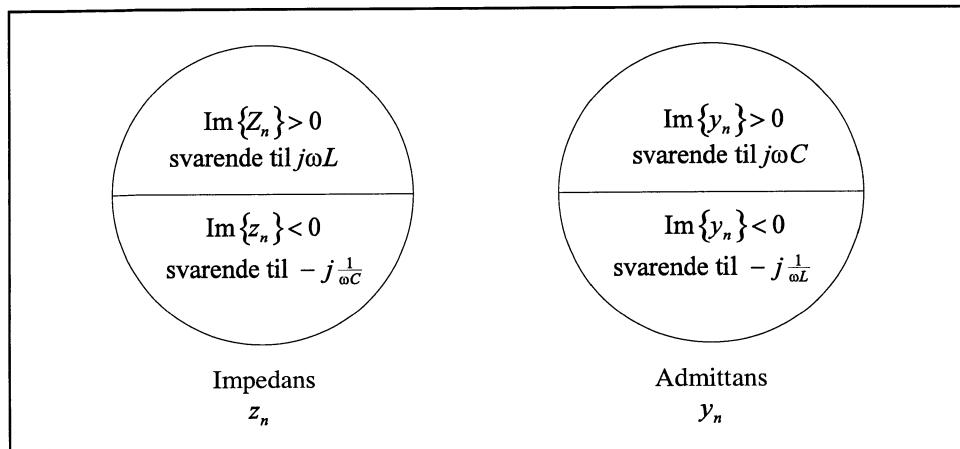
Fig. 4.10. Spejling af K .

Fig. 4.11. Kapacitiv og induktiv del af impedans og admittans kort.

I løbet af en opgave kan vi flere gange transformere frem og tilbage mellem admittans og impedans, vi skal blot hele tiden holde rede på „hvor vi er“. Det er værd at bemærke, at i impedanskortet repræsenterer den øverste halve cirkel induktive reaktanser og den nederste kapacitive impedanser. Transformerer vi admittans bliver det omvendt.

4.3.3 Serie tilpasning

Vi skal nu se, hvorledes man vha. Smithkortet tilpasser en belastning Z_L til et givet kabel med impedansen Z_0 . Problemet kan kort beskrives således: Når Z_L er udsat i kortet, hvorledes bringes dette punkt ind til kortets midte?

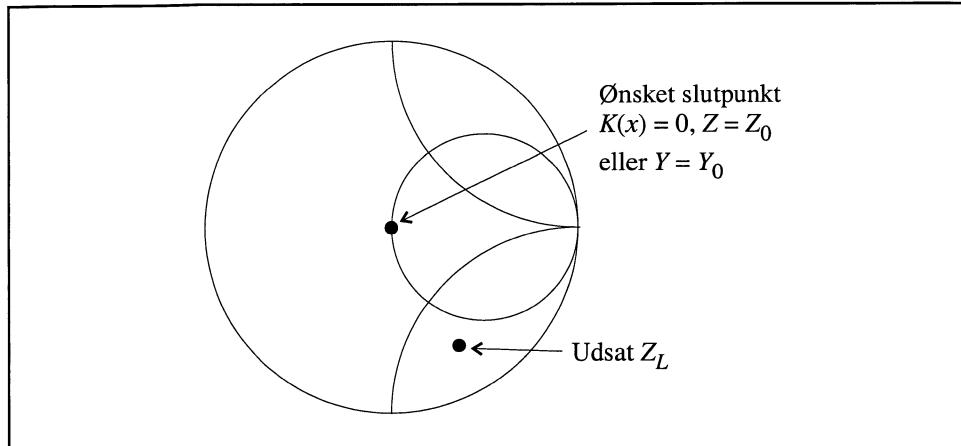


Fig. 4.12. Z_L og ønsket slutpunkt i midten af Smithkortet.

De operationer, vi har tilrådighed er:

1. Drejning omkring $(0,0)$, ved at indsætte en kabellængde.
2. Udligning af $\pm jx$ ved at sætte en komponent ind i serie eller parallel.

Vi opdeler nu i de 2 tilfælde serie- og shunntilpasning, der har hhv. en komponent i serie og parallel med ledningen. Den mest enkle form for tilpasning er serie tilpasningen som vist på følgende figur.

En vilkårlig belastningsmodstand kan ved at indskyde en passende ledningslængde ændres til en impedans med realdelen svarende til vores karakteristiske impedans ($r = 1$). I dette punkt kan indgangsimpedansen have en imaginær del, og den kan fjernes ved blot at addere en imaginær del med modsat fortegn.

Fremgangsmåden er altså: der drejes fra Z_L (punkt A) mod generatoren til skæring med $r = 1$ cirklen, her findes to muligheder. Den øverste (punktet B) er induktiv, og her skal adderes en kapacitiv størrelse, den nederste (punktet C) er kapacitiv og her skal adderes en selvinduktion.

Den nødvendige ledningslængde, der skal benyttes til drejningen kan aflæses enten som grader eller direkte som bølgelængder. Seriekomponenter kan direkte beregnes af den aflæste imaginær del, idet der huskes på, at der er tale om normerede værdier:

$$C_{\text{serie}} = \frac{1}{x \cdot Z_0 \omega} \quad \text{og} \quad L_{\text{serie}} = \frac{|x| \cdot Z_0}{\omega} \quad (4.34)$$

Istedet for diskrete komponenter er det muligt at benytte ledninger i form af stubbe.

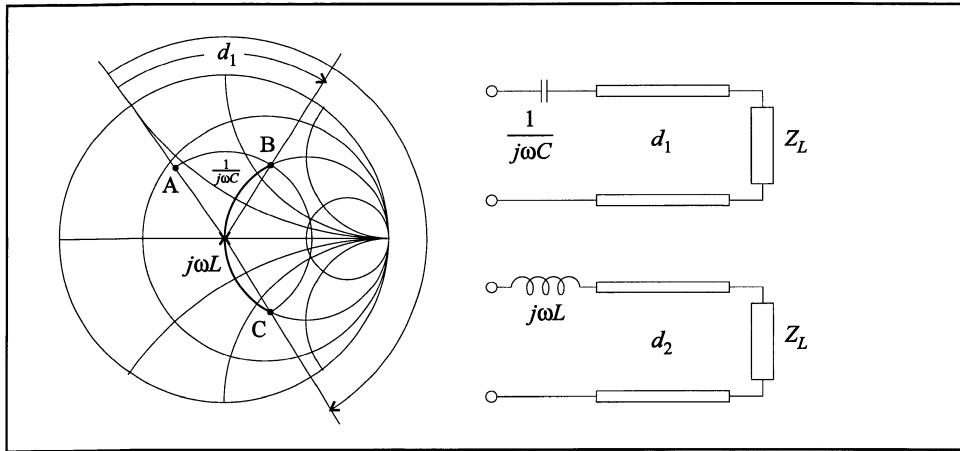


Fig. 4.13. Tilpasning med serie komponenter. Den lange buede pil angiver d_2 .

4.3.4 Åbne og lukkede stubbe

Kortsluttets et kabel, dvs. $Z_L = 0$, vil dette afbildes til venstre på enhedscirklen i K -planet. Når man derefter bevæger sig mod generatoren, kører punktet rundt på randen af enhedscirklen. Efter $\lambda/4$ er vi kommet til ∞ -punktet og kortslutningen virker som en åbenhed (en afbrydelse). Efter yderligere $\lambda/4$ er vi tilbage ved 0-punktet og ser igen en kortslutning, $Z_{in} = 0$. Den samme vekslen mellem 0 og ∞ fremkommer, hvis vi starter med et afbrudt kabel. Vi bemærker, at da randen af enhedscirklen repræsenterer $r = 0$, kan vi kun opleve reaktive impedanser (med skiftende fortegn), når $Z_L = 0 \Omega$ eller $\infty \Omega$. Selvom vi foretager $z_n \leftrightarrow y_n$ transformeringer vil vi stadig ende på randen af enhedscirklen.

Et åbent eller kortsluttet kabelstykke kan altså virke som:

1. En kortslutning: $z_n = 0$
2. En afbrydelse: $z_n = \infty$
3. En spole: $z_n = jx$
4. En kondensator: $z_n = -jx$

alt efter længden af kabelstykket, men aldrig en ohmsk modstand.

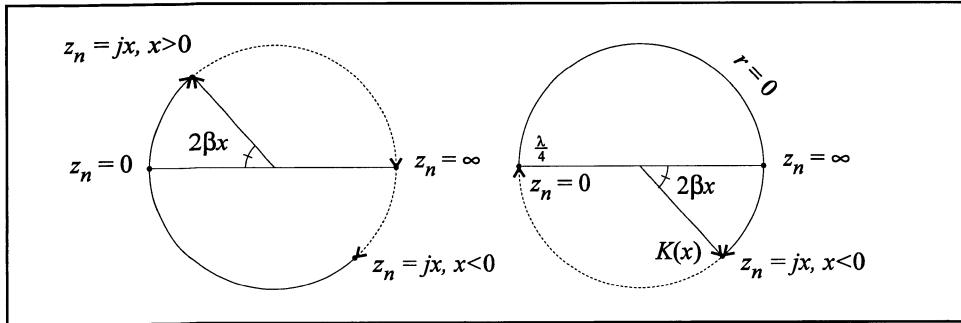


Fig. 4.14. Drejning på enhedscirklen.

Eksempel 4.5

Vi ser på et stykke 50Ω kabel, 8 cm langt, der er kortsluttet i enden. Frekvensen er 150 MHz og $v = 200 \text{ m}/\mu\text{s}$.

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{200 \cdot 10^6}{150 \cdot 10^6} = 1,3 \text{ m}$$

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{8 \text{ cm}}{1,3 \text{ m}} = 0,06$$

I Smith-kortet aflæses $z_n = +j0,4$. Dette svarer til en spole på:

$$Z = z_n \cdot Z_0 = 50 \cdot j0,4 = j20 \Omega$$

$$L = \frac{Z}{j\omega} = \frac{20}{15 \cdot 10^7} = 133 \text{ nH}$$

Bruges kortet som admittanskort ses:

$$y_n = -j2,5$$

Spolen kan nu beregnes således:

$$Y = y_n \cdot Y_0 = 20 \cdot 10^{-3} \cdot -j2,5 = -j50 \text{ mS}$$

$$L = \frac{1}{Y \cdot j\omega} = \frac{1}{15 \cdot 10^7 \cdot 50 \cdot 10^{-3}} = 133 \text{ nH}$$

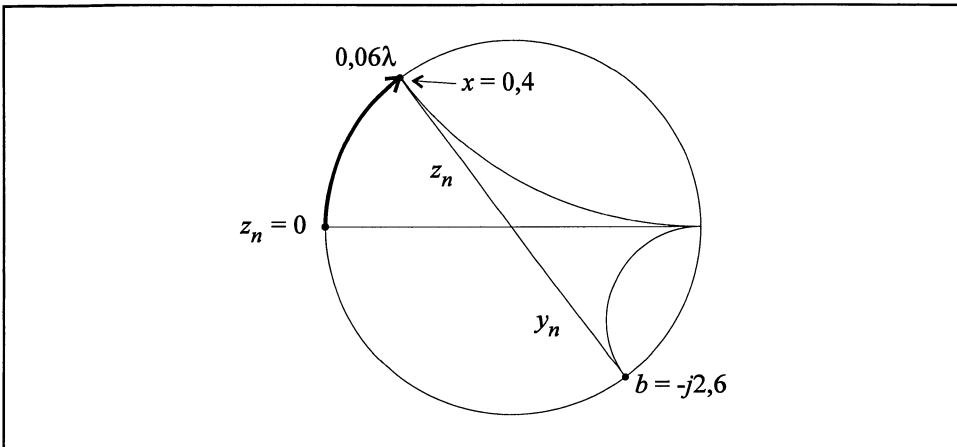


Fig. 4.15. Afsætning af en kortslutning med efterfølgende drejning.

4.3.5 Enkeltstubtilpasning

Det er upraktisk at anvende stubbe i forbindelse med serieltpasning idet der vil være signal på begge ledere i kablet. Anvendes fx koaksialkabel vil der kobles signal til omgivelserne og det giver store praktiske problemer.

Anvendes i stedet shuntpasning, hvor tilpasningskomponenten parallelforbindes skal alle yderledere (skærme) forbindes sammen og dermed kobles der ikke noget signal til omgivelserne. Derfor er „enkeltstubtilpasning“ synonym for shuntpasning med anvendelse af kabler.

Den væsentlige forskel er den nødvendige omregning til admittans inden selve tilpasningen kan konstrueres. Tilpasningen foregår nu således:

1. z_n omregnes til y_n ved spejling om $(0,0)$.
2. y_n drejes om $(0,0)$ så vi ender på $g = 1$ - cirklen; nu passer realdelen af y_n . Vi drejer ved at indsætte et kabel.
3. jb -delen fjernes ved at sætte en åben eller lukket stub parallel over y_n . Stubben beregnes således at den får impedansen $-jb$ - dette gøres ved at dreje langs randen af Smith-kortet.

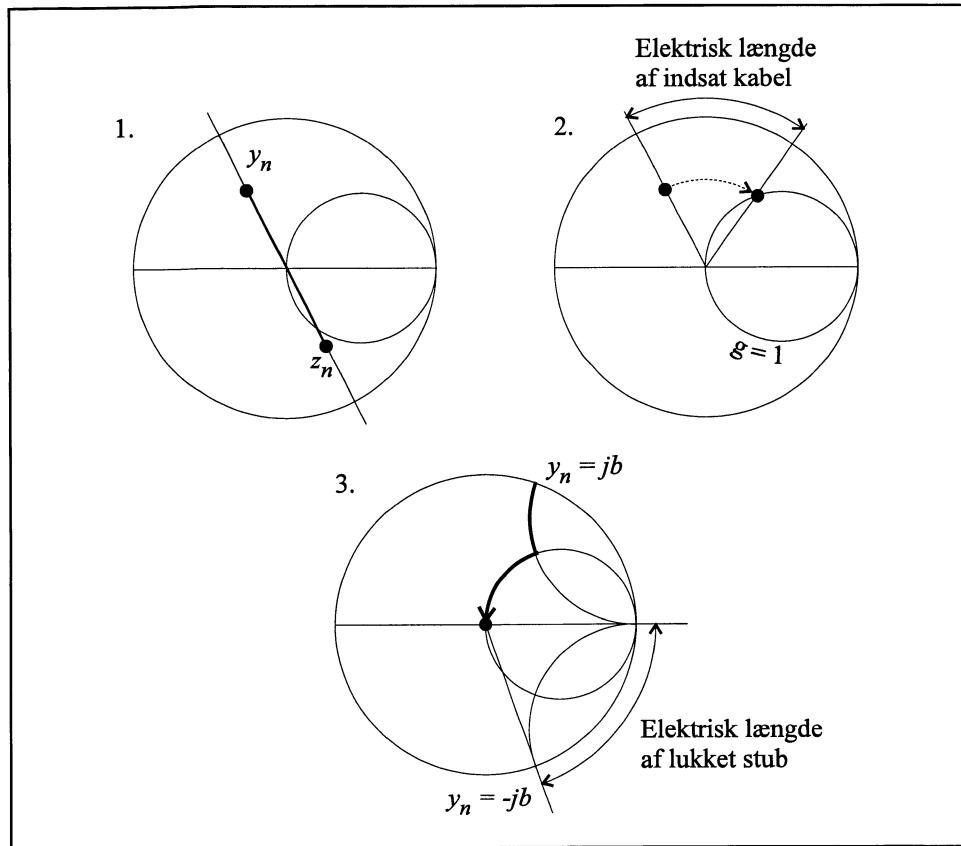


Fig. 4.16. Tilpasning med enkeltstubtuner. Afsættelse af z_n , spejling til y_n drejning til $g = 1$ cirkel og endelig beregning af stub.

Eksempel 4.6

I et 50Ω system ($v = 200 \text{ m/s}$) ønskes en belastning på $15 - j25 \Omega$ tilpasset til kablet. Frekvensen er 150 MHz.

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{200 \cdot 10^6}{150 \cdot 10^6} = 1,33 \text{ m} \quad z_n = \frac{15 - j25}{50} = 0,3 - j0,5$$

Kablets længde skal være:

$$B - A = 0,321 \lambda - 0,172 \lambda = 0,149 \lambda \quad \text{dvs :}$$

$$l_1 = 0,149 \cdot 1,33 \text{ m} = 19,87 \text{ cm}$$

Stubben, der er åben ($y_n = 0$ svarende til $z_n = \infty$) skal være:

$$l_2 = 0,161\lambda = 0,161 \cdot 1,33 \text{ m} = 21,47 \text{ cm}$$

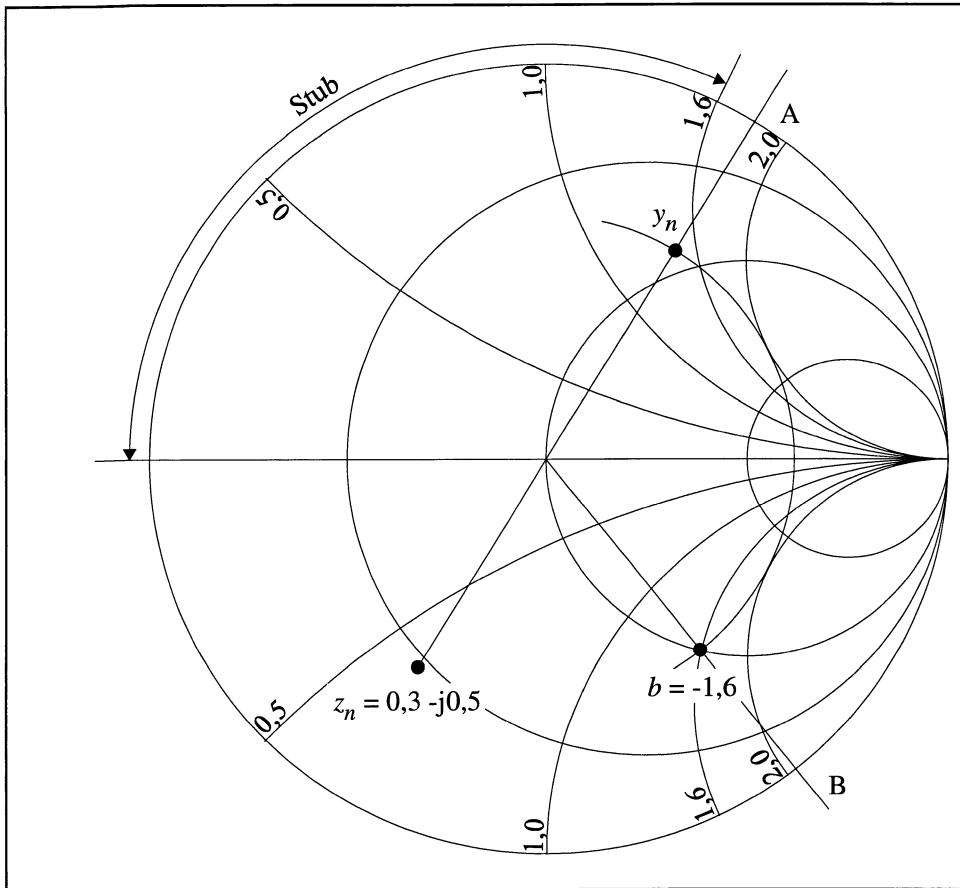


Fig. 4.17. Tilpasning af $15 - j25 \Omega$ i et 50Ω system.

Vi kunne også have anvendt en lukket stub. Den skulle så være:

$$l_3 = l_2 + \frac{\lambda}{4} = 54,8 \text{ cm}$$

Man kunne også have valgt at standse, når $g = 1$ rammes første gang, men så bliver l_1

meget lille og skal tilklippes meget nøjagtig.

Alle kabellængder kan endvidere efter behag tilføjes længder på $\lambda/2$ - idet det blot svarer til en extra omdrejning på kortet.

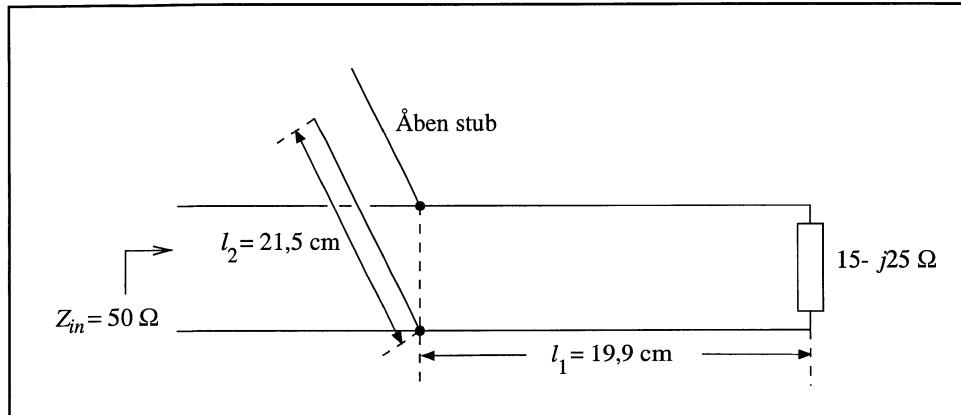


Fig. 4.18. Tilpasning med linje stykke og åben stub.

Problemt med at finde kabellængderne i en enkelt stubtuner kan løses analytisk, og der findes formler velegnet til implementering i „lommeregner“ se fx. /Pozar/.

4.3.6 Andre tilpasninger

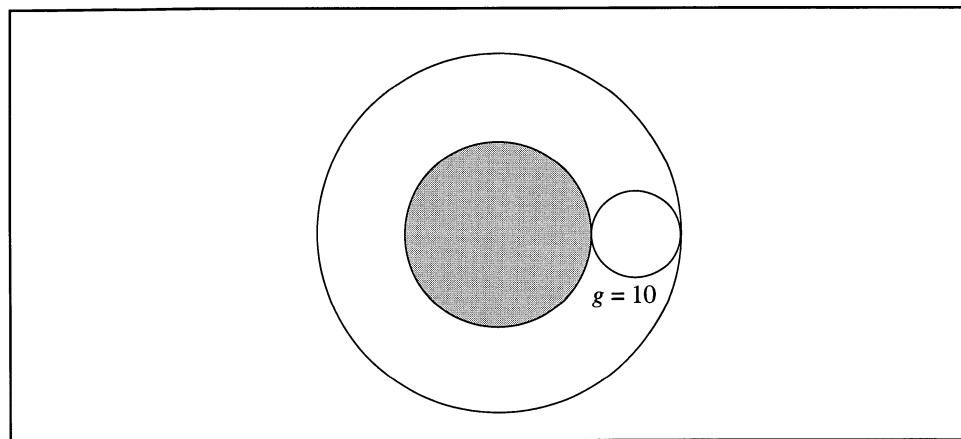


Fig. 4.19. Forsøg på tilpasning til 500Ω i et 50Ω system.

Tilpasninger som i foregående eksempel kan altid lade sig gøre, fordi uanset hvilken værdi z_n har, kan den altid drejes ind på $g = 1$ - cirklen.

Ofte anvendes Smith-kortet til helt generelle tilpasningsopgaver, hvor der ikke specielt fokuseres på transmissionsledningen i de 2 kabelstykker på l_1 og l_2 (i enkeltstubtilfældet) betragtes blot som en slags transformator der transformerer Z_L om til en ønsket værdi. Og i sådanne tilfælde findes der måske ikke altid løsninger af en bestemt type.

Hvis vi fx. i et 50Ω system vil tilpasse Z_L til 500Ω , ønsker vi altså på Smith-kortet at ende på $g = 10$ - cirklen og derefter fjerne imaginærdelen.

Det ses at alle z_n i det skraverede område ikke kan tilpasses, da vi ved drejning ikke rammer $g = 10$.

En løsning kunne her fx. være at anvende 500Ω kabler til tilpasningen. Sådanne kabler existerer imidlertid ikke i praksis.

4.3.7 Kvartbølgertilpasning

En kvartbølgetransformator er en smart metode, der i mange tilfælde kan anvendes ved tilpasning, som man har fundet på for længe siden. Metoden anvendes til meget andet end lige netop transmissionsledninger, fx. skal vi senere se at coatning på brilleglas, fotooptikker, kikkerter osv. grunder sig på dette princip, ligesom visse akustiske systemer.

I Smith-kortet ses, at z_n bliver til y_n ved en spejling om $(0,0)$, eller ved at dreje punktet 180° - svarende til en kvartbølge.

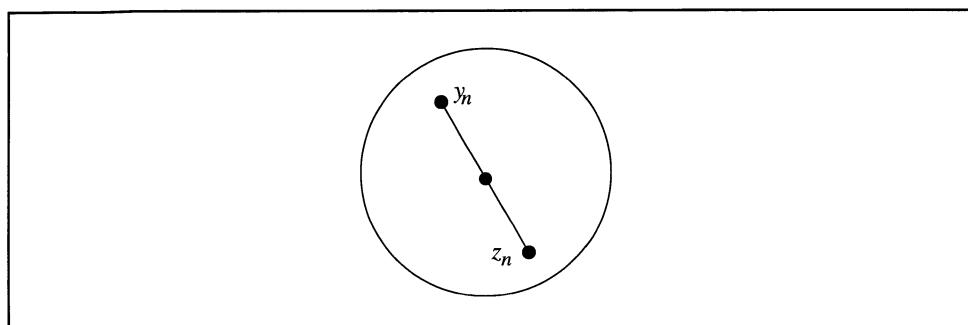


Fig. 4.20. Drejning omkring centrum i Smithkortet svarer til en quart bølgelængde.

Et kabelstykke på en quart bølgelængde belastet med Z_L udviser altså impedansen:

$$z_{in,n} = \frac{1}{z_{L,n}} \quad \text{dvs:} \quad \frac{Z_{in}}{Z_0} = \frac{1}{\frac{Z_L}{Z_0}} \quad (4.35)$$

$$Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L} \quad \Rightarrow \quad Z_0 = \sqrt{Z_{in} \cdot Z_L} \quad (4.36)$$

Har vi derfor en bestemt Z_L , der ønskes tilpasset en bestemt Z_{in} , kan vi gøre dette ved at indsætte en kvartbølgelængde kabel med $Z_0 = \sqrt{Z_{in} Z_L}$.

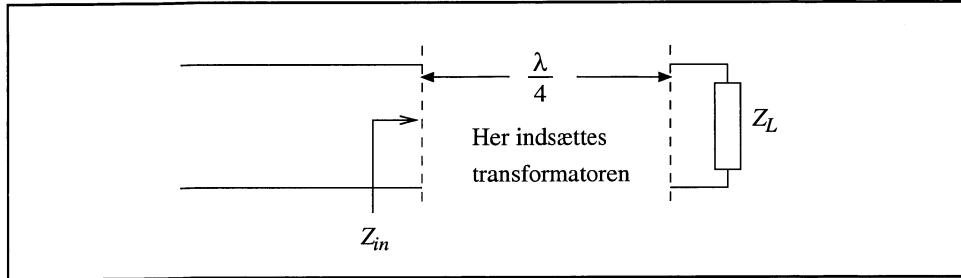


Fig. 4.21. Tilpasning med kvartbølgetransformator.

Eksempel 4.7

Har vi en belastning $Z_L = 100 \Omega$, der skal tilpasses et 300Ω kabel, kan vi indsætte et kabelstykke med den karakteristiske impedans som er $\lambda/4$ ved den givne frekvens:

$$Z_0 = \sqrt{100 \cdot 300} = 173 \Omega$$

Hvis vi anvender de sædvanlige formler, ses:

$$K_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{100 - 173}{100 + 173} = -0,27$$

$\lambda/4$ inverterer $K(x)$, som huskes (idet $e^{j\beta 2x} = -1$) og vi får

$$K\left(\frac{\lambda}{4}\right) = -K_L = 0,27 \quad \Rightarrow$$

$$Z\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{1 + K(x)}{1 - K(x)} \cdot Z_0 = \frac{1 + 0,27}{1 - 0,27} \cdot 173 = 1,732 \cdot 173 = 300 \Omega$$

Eksempel 4.8

I dette eksempel udledes formlen for tilpasning med kvartbølgetransformatoren på grundlag af multiple refleksioner.

Betrages en ledning med længden l og karakteristisk impedans Z_0 , hvor den ene ende er tilsluttet en generator med generatorimpedansen Z_G og den anden ende er afsluttet med belastningen Z_L . Ved hjælp af refleksionskort kan summen af reflektionerne ved generatoren findes. K_0 er den refleksionskoefficient generatoren i begyndelsesøjeblikket „ser ind i“, dvs. den første reflektion. K er den samlede sum af reflektioner, der svarer til den stationære løsning, af refleksionkortet findes:

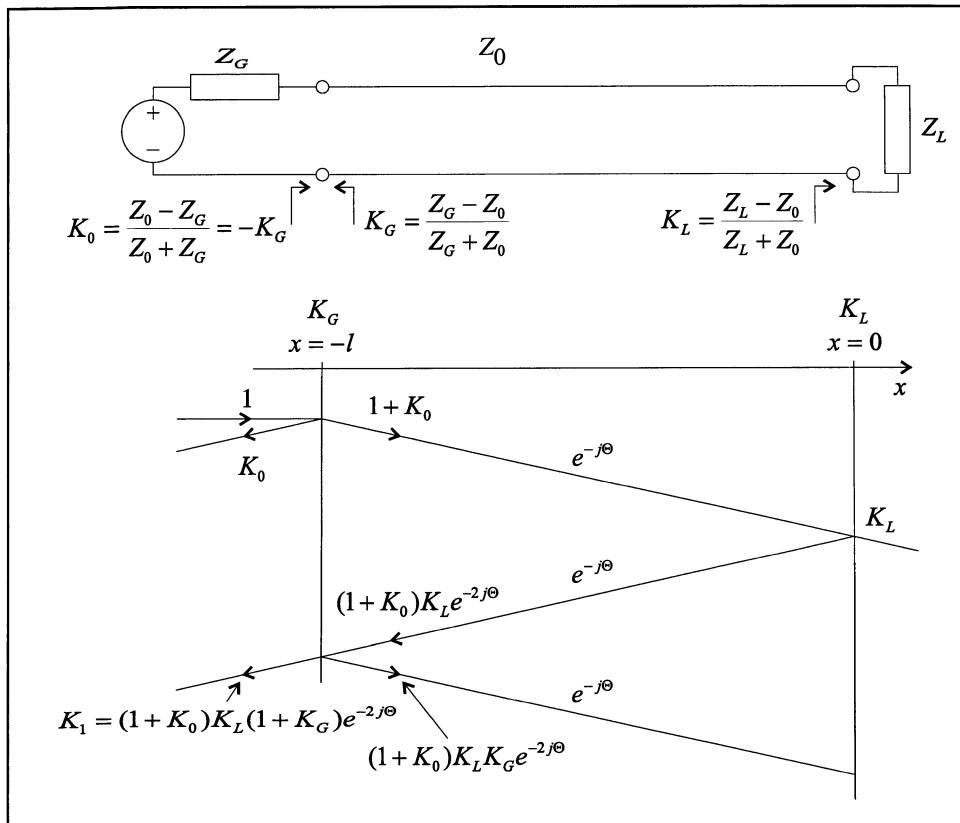


Fig. 4.22. Refleksionskort for kvartbølgetransformatoren

$$K = K_0 + (1 + K_0)(1 + K_G)K_L e^{-j2\Theta} \sum_{n=0}^{\infty} K_G^n K_L^n e^{-j2n\Theta} \quad (4.37)$$

hvor:

$$\Theta = \beta l \quad (4.38)$$

Benyttes den geometriske serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{for } |x| < 1 \quad (4.39)$$

findes, idet $K_0 = -K_G$:

$$K = -K_G + \frac{(1 - K_G)(1 + K_G)K_L e^{-j2\Theta}}{1 - K_G K_L e^{-j2\Theta}} \quad (4.40)$$

$$= \frac{K_L e^{j2\Theta} - K_G}{1 - K_G K_L e^{-j2\Theta}}$$

For kvartbølgetransformatoren gælder, at $\Theta = 90^\circ$ og dermed $e^{-j2\Theta} = -1$ den foregående formel kan derfor forenkles til:

$$K = \frac{-K_L - K_G}{1 + K_G K_L} \quad (4.41)$$

For de værdier af Z_L og Z_G hvor $K_G = -K_L$ vil den totale refleksion K ved indgangen være 0, og dermed er der tilpasning. Dette kan omskrives til:

$$\frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0} = \frac{Z_0 - Z_L}{Z_0 + Z_L} \quad \Rightarrow \quad Z_l Z_G = Z_0^2 \quad (4.42)$$

Dette er den samme løsning som tidligere fundet. Det ses, at for reelle værdier (R_L og R_G) kan en kvartbølgetransformator tilpasses med en reel karakteristisk impedans R_0 .

Af udledningen fremgår, at der på kvartbølgetransformatoren findes refleksioner, der blot opnærer hinanden under den netop fundne betingelse (4.42).

Formel (4.40) kan iøvrigt også benyttes til at finde en kvartbølgetransformators frekvensafhængighed. Typisk er kvartbølgetransformatorer meget smalbandede omkring designfrekvensen.

5 Ledningstab og effektberegninger

5.1 Tab på ledninger

Dette ubehagelige fænomen at en enkelt afsendt impuls giver anledning til et helt pulstog af reflekterede og genreflekterede impulser, hvis kablet er mistilpasset, er heldigvis sjældent så grelt i virkeligheden. Dette skyldes at praktiske kabler har tab, som betyder at impulsernes strøm og spænding aftager eksponentielt, når de løber hen ad kablet. Derved dæmpes de genreflekterede impulser meget.

Medtager vi R og G i den oprindelige kabelmodel fra side 3 bliver bølgeligningerne mere komplicerede:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (LG + CR) \frac{\partial V}{\partial t} + VGR \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (LG + CR) \frac{\partial I}{\partial t} + IGR \quad (5.2)$$

Som regel anvendes $j\omega$ -metoden ved løsningen. Med den regnekraft, vi har i dag, selv i efterhånden almindelige lommeregnere med komplex talbehandling, er det ikke noget større problem altid at udregne den generelle løsning, hvor både L , C , R og G medregnes.

I den generelle tilfælde er Z_0 komplex og v afhænger ikke kun af L og C , men også af R og G .

5.1.1 Attenuationskonstanten

Når der er tab får vi den sekundære kabelkonstant: α , attenuationskoefficienten eller dæmpningskonstanten målt i Neper pr. m, Np/m.

Løsningen får nu tilnærmet følgende form:

$$V(\tau) = e^{-\alpha x} V^+(\tau) + e^{+\alpha x} V^-(\tau) \quad \text{hvor } \tau = t \pm \frac{x}{v} \quad (5.3)$$

Dæmpningskonstanten (eller attenuationskoefficienten) α udtrykkes i neper pr. meter (Np/m). Neper er en logaritmisk måleenhed, der bruges til at angive forholdet mellem 2 amplitudestørrelser, i modsætning til (deci) bel, der angiver forholdet mellem effektstørrelser.

Tallet A udtrykt i Np og omvendt fås ved

$$A_{\text{Np}} = \ln A \quad \text{og} \quad e^{A_{\text{Np}}} = A \quad (5.4)$$

1 Np svarer altså til en faktor e (= 2,71828....). Man kan omregne mellem Np og dB således:

$$10 \frac{A_{dB}}{20} = e^{A_{Np}} \Rightarrow \frac{A_{dB}}{20} = \log(e^{A_{Np}}) = A_{Np} \cdot \log e \quad (5.5)$$

$$A_{dB} = A_{Np} \cdot 20 \log e = 8,69 \cdot A_{Np} \quad (5.6)$$

Eksempel 5.1

For kablet RG-58 er opgivet en dæmpning på 15 dB/km for en bestemt frekvens. Hvad er α for dette kabel?

$$15 \text{ dB/km} = \frac{15}{8,686} \text{ Np/km} = 1,727 \text{ Np/km} \Rightarrow \alpha = 1,727 \cdot 10^{-3} \text{ Np/m}$$

En indfaldende impuls har amplituden +10 V. Hvor langt skal denne impuls løbe for at blive dæmpet til + 5 V?

$$\frac{5 \text{ V}}{10 \text{ V}} = \frac{1}{2} \text{ gange} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0,69 \text{ Np}$$

$$-\alpha \cdot x = -0,69 \text{ Np} \Rightarrow x = \frac{0,69}{1,727 \cdot 10^{-3}} = 401,4 \text{ m}$$

Nedenstående formler gælder exakt for forvrængningsfri kabler, og med god tilnærmelse for kabler med små tab.

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_0} + G \cdot Z_0 \right) = \sqrt{RG} \text{ [Np/m]} \quad (5.7)$$

I det generelle tilfælde udregnes således:

$$\alpha = \operatorname{Re} \left[\sqrt{ZY} \right] \text{ [Np/m]} \quad \text{hvor : } Z = R + j\omega L \quad Y = G + j\omega C \quad (5.8)$$

(5.7) viser at dæmpningen, varierer med frekvensen, selv hvis de primære konstanter L , C , R og G er frekvensuafhængige, hvilket de i øvrigt overhovedet slet ikke er. Men inden for et lille frekvensområde, med en vis usikkerhed, osv. osv... - kan vi bruge vores model.

Eksempel 5.2

Følgende primære konstanter er opgivet for et RG 58-lignende kabel: $L = 250 \text{ nH/m}$, $C = 100 \text{ pF/m}$, $R = 0,1 \Omega/\text{m}$ og $G = 20 \mu\text{S}/\text{m}$.

Udregnes efter de tilnærmede formler fås flg. sekundære konstanter:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 50 \Omega \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 200 \text{ m/s}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_0} + G \cdot Z_0 \right) = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Np/m} = 13 \text{ dB/km}$$

Udregnet efter de exakte, generelle formler fås ved 100 Mhz:

$$Z = R + j\omega L = 0,1 + j157,1 \Omega \quad Y = G + j\omega C = 20 \cdot 10^{-6} + j62,8 \cdot 10^{-3} \text{ S}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = 50,00 - j7,96 \cdot 10^{-3} \Omega \quad v = \frac{\omega}{\text{Im} \left[\sqrt{ZY} \right]} = 199,999996 \text{ m/s}$$

$$\alpha = \text{Re} \left[\sqrt{ZY} \right] = 1,4999998 \cdot 10^{-3} \text{ Np/m}$$

Tilnærmelsen er altså her ganske god.

Eksempel 5.3

To USART'er kommunikerer med hinanden med 96 kbaud og anvender 5 V impulser. Kablet er 20 m langt og har følgende karakteristika:

$$Z_0 = 110 \Omega \quad v = 180 \text{ m}/\mu\text{S} \quad \alpha \sim 9 \text{ dB/km}$$

USART'ernes ud- og indgange er ulineære, men hvis vi regner med Z_{in} ca. 500 k Ω og Z_{out} ca. 10 k Ω har vi ækvivalentdiagrammet som vist på figuren. Vi kan sætte: $K_G \sim K_L \sim +1$ og vi får 0,18 dB's dæmpning på 20 m. Hvis USART'en sampler indgangssignalet midt i hver bitrække, vil der til den tid være forekommet (se refleksionskortet):

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot 10,4 \mu\text{S}}{111 \text{ nS}} = 46,8 \text{ refleksioner}$$

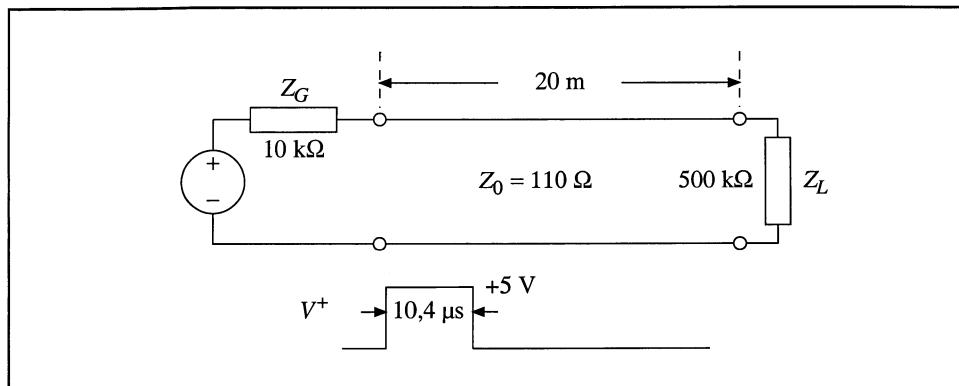


Fig. 5.1. Model af to USARTer, der kommunikerer via et kabel.

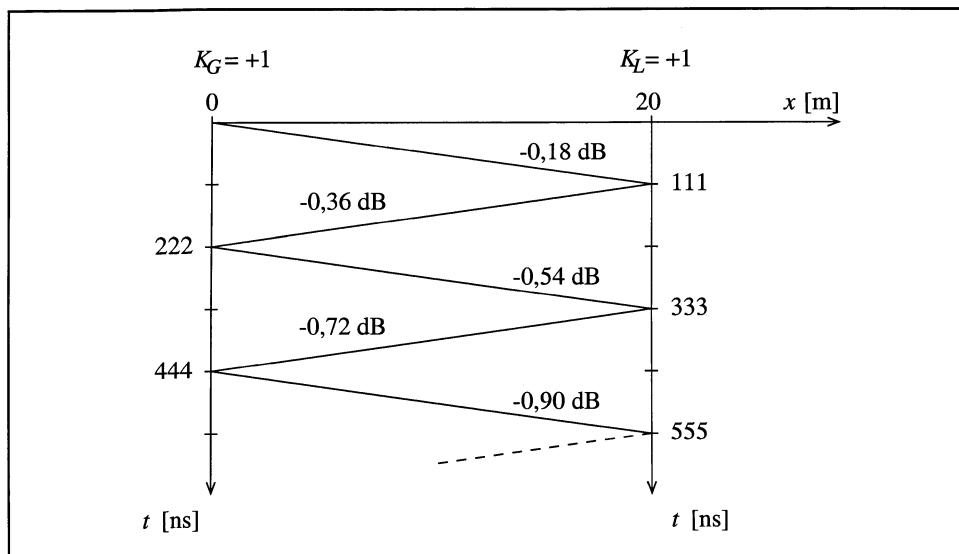


Fig. 5.2. Refleksionskort for spændingen. dB er angivet relativ til den første indfaldende puls.

Da det er de „ulige gange“, modtageren ser signalet, regner vi dæmpningen ud for den 45. gang:

$$d = 45 \cdot 0,18 \text{ dB} \Rightarrow +5 \text{ V} - 8,1 \text{ dB} \Rightarrow 1,97 \text{ V}$$

Men der er noget galt!

Man skal huske på, at alle signalerne er tilstede på en gang: var den ingen dæmpning, ville der på USART'ens indgang være $5 \text{ V} \cdot 45 = 225 \text{ V}$ til dette tidspunkt. Vi må regne med, at den ulineære ind- og udgang sammen med kablets lave impedans dæmper første V^+ til måske 50 mV. Uanset om der er dæmpning eller ej, vil man på indgangen kunne observere fig. kurveform, der ligner opladningskurven for en reaktiv komponent:

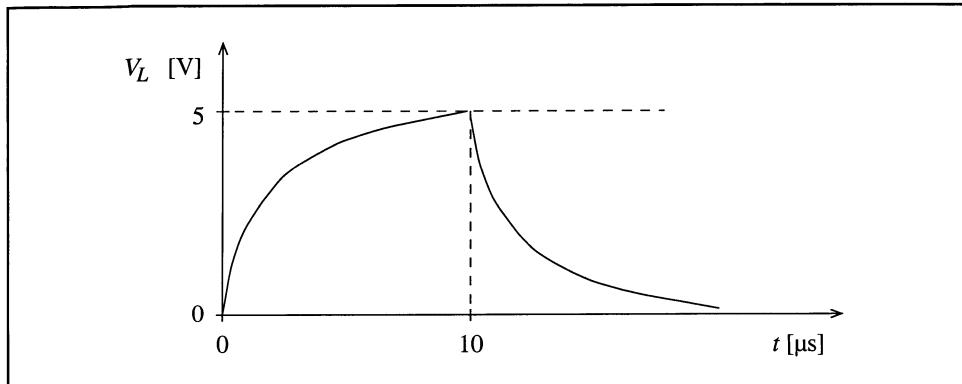


Fig. 5.3. Pulsoverføring på kabel med tab.

Kurven består af mange små trappetrin, der starter med at være måske 50 mV, og aftager eksponentielt og som er 222 ns brede. (Vi har ikke illustreret disse trin). Sådan siger teorien; praksis siger ofte noget lidt andet pga. forhold vi ikke har medtaget i modellen.

5.2 Effektberegninger

Dæmpningskonstanten (eller attenuationskoefficienten) α udtrykkes i neper pr. meter (Np/m). Det kan iøvrigt nævnes, at regner man med effektforhold, kan tallet $P = (P_1/P_2)$ udtrykkes:

$$P_{\text{dB}} = 10 \cdot \log P \quad (5.9)$$

$$P_{\text{NP}} = \frac{1}{2} \cdot \log P \quad (5.10)$$

Men omregningsfaktoren er selvfølgelig stadig 8,69.

Et kabel med tab er gunstigt fordi det dæmper refleksioner, men samtidigt dæmper det jo også det fremadgående signal, vi ønsker overført via kablet.

Den fremadgående bølge vil vi associere med følgende effekt

$$P_{\text{trans}}(x) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} V^+(x,t) \cdot I^+(x,t) dt \quad (5.11)$$

Hvori $P_{\text{trans}}(x)$ står for den overførte middeleffekt.

Denne overførte effekt, som måles i watt reduceres hen ad kablet pga. effektabet, som måles i watt pr. meter. Effektabet er den afsatte effekt i R og G i kablet, og skyldes altså udelukkende virkningen af α , attenuationskonstanten. Vi regner her ikke med refleksioner; som vi senere skal se bevirker refleksioner også reduktion af den overførte effekt. I sådan tilfælde taler vi ikke om tab af effekt.

$$P_{\text{tab}}(x) \triangleq -\frac{\partial}{\partial x} P_{\text{trans}}(x) \quad (5.12)$$

Som tidligere vist kan vi udregne $P_{\text{trans}}(x)$ ved komplex symbolsk notation således:

$$P_{\text{trans}}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V^+(x,t) \cdot I^{+\ast}(x,t)] \quad (5.13)$$

Vi får endvidere brug for følgende regneregler for konjugering af komplexe tal (z står her for et vilkårligt kompleks tal):

$$z \cdot z^* = |z|^2 \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*} \quad (5.14)$$

$$\frac{1}{z^*} = \frac{z}{|z|^2} \quad (z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \quad (5.15)$$

Expanding og reduktion af (5.13) giver:

$$P_{\text{trans}}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V^+ e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \cdot I^{+\ast} e^{-\alpha x} e^{j\beta x}] \quad (5.16)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[V^+ \frac{V^{+*}}{Z_0^*} e^{-2\alpha x} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} Z_0 \cdot e^{-2\alpha x} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{V^+}{Z_0} \right|^2 \cdot \operatorname{Re}[Z_0] \cdot e^{-2\alpha x}$$

For det tabsfrie tilfælde og tilfældet med forvrængningsfrit kabel er Z_0 rent reel. I mange andre tilfælde regnes Z_0 også reel, som senere skal ses. (5.16) kan for disse tilfælde skrives:

$$P_{\text{trans}}(x) = \frac{|V^+|^2}{2 Z_0} \cdot e^{-2\alpha x} \quad (5.17)$$

$$= \frac{|I^+|^2}{2} \cdot Z_0 \cdot e^{-2\alpha x} \quad [\text{W}]$$

Tabseffekten kan nu udregnes:

$$P_{\text{tab}} = -\frac{\partial}{\partial x} P_{\text{trans}} = 2\alpha \cdot \frac{|V^+|^2}{2Z_0} \cdot e^{-2\alpha x} = 2\alpha \cdot P_{\text{trans}} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}} \right] \quad (5.18)$$

Af (5.18) kan vi nu udregne α for et kabel:

$$\alpha = \frac{P_{\text{tab}}}{2P_{\text{trans}}} \left(= \frac{-\frac{\partial}{\partial x} P(x)}{2P(x)} \right) \quad \left[\frac{\text{Np}}{\text{m}} \right] \quad (5.19)$$

Den maximalt opnåelige overførte effekt for et kabel er rådighedseffekten P_{av} der kan findes både ud fra den fremadgående spænding og strøm:

$$P_{\text{av}} = \frac{|V^+|^2}{2 \cdot Z_0} = \frac{1}{2} |I^+|^2 Z_0 \quad (5.20)$$

Den totale tabte effekt for en kabellængde er:

$$P_{\text{tab, total}} = \int_0^x P_{\text{tab}} dx = \int_0^x -\frac{\partial}{\partial x} P_{\text{trans}} dx = 2\alpha \int_0^x P_{\text{trans}} dx \quad (5.21)$$

$$= \frac{2\alpha}{-2\alpha} [P_{\text{av}} \cdot e^{-2\alpha x}]_0^x = P_{\text{av}} (e^{-2\alpha x} - 1)$$

Eksempel 5.4

Vi ser på et 50Ω kabel, der dæmper 10 dB/km .

$$\alpha = \frac{10}{20 \log e} = \frac{10}{8,686} = 1,15 \text{ Np/km}$$

Kablet er korrekt termineret i begge ender og der sendes 100 V (effektiv) ind på kablet.
Ser vi på effekten 1 m efter start ses:

$$P(1 \text{ m}) = 200 \text{ W} \cdot e^{-2\alpha x} = 199,54 \text{ W}$$

$$P_{\text{tab}} = (200 - 199,54) \text{ W/m} = 0,459 \text{ W/m} = 459,5 \text{ W/km}$$

$$\frac{P_{\text{tab}}}{2P_{\text{trans}}} = \frac{459,5}{2 \cdot 200} = 1,149 \sim \alpha$$

Afstand	0 km	1 km	2 km
Spænding	100 V	31,6 V	10
Strøm	2 A	0,63 A	0,2 A
Effekt	200 W	20 W	2 W
dB	0 dB	-10 dB	-20 dB
$e^{-\alpha x}$	1	0,316	0,10
$e^{-2\alpha x}$	1	0,1	0,01

Det samlede effekttab over den første km bliver:

$$P_{\text{tab},1\text{km}} = \int_0^1 \frac{\partial P(x)}{\partial x} dx = \int_0^1 2\alpha \left[\frac{|V^+|^2}{Z_0} e^{-2\alpha x} \right] dx$$

$$= 200 \text{ W} \cdot 2\alpha \int_0^1 e^{-2\alpha x} dx = -200 \text{ W} (e^{-2\alpha x} - 1) \Big|_0^1 = 179,9 \text{ W}$$

Når man i datablade og andre steder ser opgivelser som disse, skal man være opmærksom på, at flere forskellige enheder anvendes, som vist i eksemplet. Spænding og strøm kan være opgivet i effektiv- eller spidsværdier, α i dB/km , dB/m , Np/m , NP/km osv. osv.

5.2.1 Effekt på det tabsfri kabel

Vi vil behandle effektforholdene på det tabsfrie kabel her på dette sted, for at kunne sammenligne med det foregående.

I det foregående har vi regnet på effektabet på det korrekt afsluttede kabel, nu vil vi se på den overførte effekt i et kabel uden tab, der ikke er korrekt afsluttet.

For det tabsfri kabel er $\alpha = 0$ og $Z_0 = \text{Re}(Z_0)$. Da $\alpha = 0$ må den transmitterede effekt være den samme for alle x . Endvidere er P_{trans} en reel konstant i sagens natur.

Vi udregner:

$$V(x) = V^+(x)(1 + K(x)) \quad \text{og} \quad I(x) = \frac{V^+(x)}{Z_0}(1 - K(x)) \quad (5.22)$$

$$P_{\text{trans}} = \frac{1}{2} \text{Re}[V(x) \cdot I^*(x)] \quad (5.23)$$

$$V(x) \cdot I^*(x) = \frac{V^+(x) \cdot V^{+*}(x)}{Z_0^*} (1 + K(x))(1 - K(x))^* \quad (5.24)$$

$$= \left| \frac{V^+(x)}{Z_0} \right|^2 \cdot Z_0 (1 + K(x))(1 - K(x))^* \quad (5.25)$$

(da $1^* = 1$). Endvidere:

$$(1 + K(x))(1 - K(x))^* = 1 - |K(x)|^2 + 2 \text{Im}[K(x)] \quad (5.26)$$

$$= 1 - |K_L|^2 + 2 \text{Im}|K(x)|$$

(da $|K(x)| = |K_L|$), og får nu da Z_0 er reel:

$$P_{\text{trans}} = \frac{1}{2} \left| \frac{V^+(x)}{Z_0} \right|^2 \text{Re}[Z_0] (1 - |K_L|^2) = \frac{|V^+(x)|^2}{2 \cdot Z_0} (1 - |K_L|^2) \quad (5.27)$$

En anden form er:

$$P_{\text{trans}} = \frac{|I^+(x)|^2 \cdot Z_0}{2} (1 - |K_L|^2) \quad (5.28)$$

Vi kan opfatte den transmitterede effekt som differensen mellem en fremadgående effekt

og en reflekteret effekt:

$$P_{\text{trans}} = P^+ - P^- \quad (5.29)$$

Hvis kablet er korrekt afsluttet ved generatoren ($Z_G = Z_0$) vil den fremadgående effekt netop være rådighedseffekten:

$$P^+ = \frac{|V^+(x)|^2}{2 \cdot Z_0} \quad (5.30)$$

I så tilfælde kan vi af (5.28) - (5.30) se

$$\frac{P^-}{P^+} = |K_L|^2 \quad (5.31)$$

hvilket kan tolkes som at refleksionskoefficienten for effekt er $|K_L|^2$. Bemærk at dette kun gælder, når der ikke er multiple refleksioner.

Eksempel 5.5

Selv om der ikke er involveret en transmissionsledning, kan man ofte med fordel bruge samme model. Har vi fx. en generator med en indre impedans Z_G , kan man ved visse effektberegninger forestille sig den tilkoblet en transmissionsledning uden tab og med $Z_G = Z_0$.

Vi vil udregne den afsatte middeleffekt i Z_L .

$$P_{\text{av}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|V^+|^2}{Z_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2}{50} = 1 \text{ W}$$

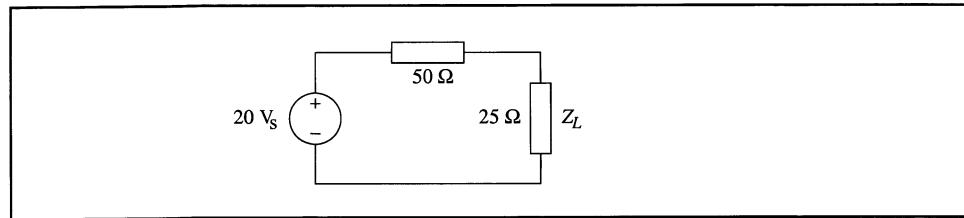


Fig. 5.4. Generator belastet med en impedans.

Vi kan altså maksimalt få afsat 1 W i Z_L , nemlig hvis der ingen refleksioner er. Her har vi:

$$K_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{25 - 50}{50 + 25} = -\frac{1}{3}$$

$$P^- = 1 \text{ W} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \text{ W} \quad \text{og} \quad P^+ = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{ W} = \frac{8}{9} \text{ W}$$

Bruges istedet Ohms lov etc. fås:

$$V_L = 20 \cdot \frac{25}{50 + 25} = \frac{20}{3} \text{ V} \quad \text{og} \quad I_L = \frac{20}{50 + 25} = \frac{20}{75} \text{ A}$$

$$P_L = \frac{1}{2} [V \cdot I^*] = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{3} \cdot \frac{20}{75} = \frac{400}{6 \cdot 75} = \frac{8}{9} \text{ W}$$

Havde generatorimpedansen været fx. $(50 + j25) \text{ k}\Omega$ skulle vi have tænkt os et kabel med denne Z_0 , men så havde det ikke været så let, vi skulle så anvende (5.21) og (5.23). Kablet ville ikke være tabsfrit, men hvis $l = 0$ gør det ikke noget.

Eksempel 5.6

Vi ser på følgende kredsløb med et tabsfrit 50Ω kabel, og vi vil udregne den opsatte middeleffekt i Z_L ved forskellige metoder.

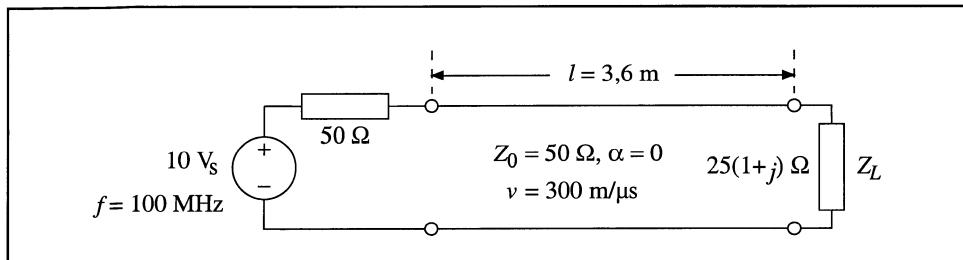


Fig. 5.5. Opstilling til beregning af middeleffekt.

Vi udregner β , kablets elektriske længde og reflektionskoefficienten:

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi 10^8}{3 \cdot 10^8} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/m} \quad \Rightarrow \quad \beta l = 2,4\pi \text{ rad} = 432^\circ$$

$$K_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -0,2 + j0,4 = 0,4472 \angle 117^\circ$$

Rådighedseffekten svarer til den fremadgående og reflekterede effekt:

$$P^+ = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0} = \frac{5^2}{2 \cdot 50} = 0,25 \text{ W} \quad P^- = |K_L|^2 P^+ = 0,2 \cdot 0,25 = 0,05 \text{ W}$$

Overført effekt = effekt afsat i Z_L

$$P_{\text{trans}} = P^+ - P^- = (0,25 - 0,05) \text{ W} = 0,2 \text{ W}$$

Vi kunne også (mere besværligt) først udregne Z_{in} og derefter anvende Ohm og Kirchhoffs love på indgangen:

$$K(-l) = K_L \cdot e^{-2\beta l} = 0,4472 \angle 117^\circ \cdot 1 \angle -864^\circ = 0,4472 \angle -27^\circ$$

$$Z_{in} = Z_0 \cdot \frac{1 + K(-l)}{1 - K(-l)} = 50 \cdot \frac{1 + 0,45 \angle -27^\circ}{1 - 0,45 \angle -27^\circ} = 110,8 \angle -27^\circ \Omega$$

$$V(-l) = 10 \text{ V} \cdot \frac{Z_{in}}{Z_G + Z_{in}} = 10 \cdot \frac{110,8 \angle -27^\circ}{50 + 110,8 \angle -27^\circ} = 7,061 \angle -8^\circ \text{ V}$$

$$I(-l) = \frac{10 \text{ V}}{Z_G + Z_{in}} = \frac{10}{50 + 110,8 \angle -27^\circ} = 63,71 \angle 19^\circ \text{ mA}$$

På indgangen er spænding og strøm ude af fase med hinanden og med generatoren.

$$P(-l) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V(-l) \cdot I^*(-l)] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[0,4 - j0,2058] = 200 \text{ mW}$$

5.2.2 Afsluttende bemærkninger til effektberegninger

Når vi regner effekt deles problemerne op i 2 tilfælde:

- 1 Korrekt afsluttet kabel. Regning med $e^{-\alpha x}$. ($K_L = 0, \alpha \neq 0$)
- 2 Refleksioner. Regning med $|K_L|^2$. ($K_L \neq 0, \alpha = 0$)

Har vi et kabel med tab, som ikke er korrekt afsluttet, skal vi regne med begge formelsæt, og så bliver det kompliceret.

Appendices

A Formel resumé

Primære konstanter L, C, R og G :

$$Z = R + j\omega L \quad Y = G + j\omega C \quad (A.1)$$

Sekundære konstanter Z_0 og γ , generel model:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{ZY} \quad (A.2)$$

$$\alpha = \text{Re} [\sqrt{ZY}] \text{ [Np/m]} \quad \beta = \text{Im} [\sqrt{ZY}] \text{ [rad/m]} \quad (A.3)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \quad [\Omega] \quad (A.4)$$

$$A_{dB} = 8,69 \cdot A_{Np} \quad (A.5)$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} \quad (A.6)$$

$$v = f \cdot \lambda \quad (A.7)$$

Tabsfri transmissionsledningsmodel:

$$R = G = 0 \quad (A.8)$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega\sqrt{LC} \quad (A.9)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (A.10)$$

Forvrængningsfri model (Z_0 som tabsfri):

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad (A.11)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_0} + G \cdot Z_0 \right) \quad \beta = \omega \sqrt{LC} \quad (A.12)$$

Små tab model (α , β og Z_0 som forvrængningsfri):

$$\omega L \gg R \quad \text{og} \quad \omega C \gg G \quad (A.13)$$

Telefonkabel model (RC model):

$$R \gg \omega L \quad \text{og} \quad \omega C \gg G \quad (A.14)$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega RC}{2}} \quad (A.15)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R}{2\omega C}} (1 - j) \quad (A.16)$$

Generelle Løsninger:

$$V(x) = V^+ e^{-\gamma x} + V^- e^{\gamma x} \quad (A.17)$$

$$I(x) = I^+ e^{-\gamma x} + I^- e^{\gamma x} = \frac{1}{Z_0} (V^+ e^{-\gamma x} - V^- e^{\gamma x}) \quad (A.18)$$

$$V^+(x) = I^+(x) \cdot Z_0 \quad V^-(x) = -I^-(x) \cdot Z_0 \quad (A.19)$$

Impedans og refleksionskoefficient:

$$K(x) = \frac{V^-(x)}{V^+(x)} = -\frac{I^-(x)}{I^+(x)} \quad (A.20)$$

$$K(x) = K_L \cdot e^{2\gamma x} \quad (A.21)$$

$$K_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (A.22)$$

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} \quad (A.23)$$

$$Z(x) = Z_0 \cdot \frac{1 + K(x)}{1 - K(x)} \quad (A.24)$$

Spændingsoverføring:

$$V_L = V_G \cdot \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} \cdot \frac{(1 + K_L) e^{-\gamma l}}{1 - K_L K_G e^{-2\gamma l}} \quad (A.25)$$

Stående bølger:

$$\text{SWR} = \frac{|V(x)|_{\max}}{|V(x)|_{\min}} = \frac{1 + |K_L|}{1 - |K_L|} \quad (A.26)$$

$$|Z(x)|_{\max} = |Z_0| \cdot \text{SWR} \quad |Z(x)|_{\min} = |Z_0| \cdot \frac{1}{\text{SWR}} \quad (A.27)$$

$$\text{SWR} = \begin{cases} \frac{Z_L}{Z_0} & \text{for : } Z_L > Z_0 \\ \frac{Z_0}{Z_L} & \text{for : } Z_0 > Z_L \end{cases} \quad (A.28)$$

$$|x_{V_{\max}} - x_{V_{\min}}| = \frac{\lambda}{4} \quad (A.29)$$

Effektberegninger:

Korrekt afsluttet ledning ($K_L = 0$):

$$P_{\text{trans}}(x) = P_{\text{av}} \cdot e^{-\alpha x} \quad (A.30)$$

Tabsfri ledning ($\alpha = 0$):

$$P_{\text{trans}} = P^+ - P^- = P_{\text{av}} \left(1 - |K_L|^2 \right) \quad (A.31)$$

$$P_{\text{av}} = \frac{|V^+|^2}{2 \cdot Z_0} = \frac{1}{2} |I^+|^2 Z_0 \quad (A.32)$$

A Formel resumé

B Kompleks symbolsk notation

Vi har ofte brug for at reducere lineære trigonometriske udtryk som:

$$\frac{k_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + k_2 \cos(\omega t + \varphi_2) + \dots}{g_1 \cos(\omega t + \theta_1) + g_2 \cos(\omega t + \theta_2) + \dots} \quad (B.1)$$

Dette kan lade sig gøre ved arbejdelse af forskellige trigonometriske identiteter, men det er meget besværligt. Vi anvender derfor den såkaldte $j\omega$ -metode eller komplex, symbolsk notation, som er udviklet i USA af Bedell, Crehore og Steinmetz i 1893. Ved denne metode repræsenteres et signal af en vektor med længden = signalets amplitude og vinklen med x-aksen = signalets fase. At dette er lovligt, skyldes at enhver vektor kan opnødes i en x-komponent og en y-komposont:

$$\bar{A} = A_x \cdot \hat{x} + A_y \cdot \hat{y} \quad (B.2)$$

(Vi regner her kun med 2-dimensionelle vektorer. I (B.2) betegner \hat{x} og \hat{y} enhedsvektorer i x- og y-retningerne) Ethvert cosinussignal kan opnødes i et sinus- og cosinussignal med ωt som argument:

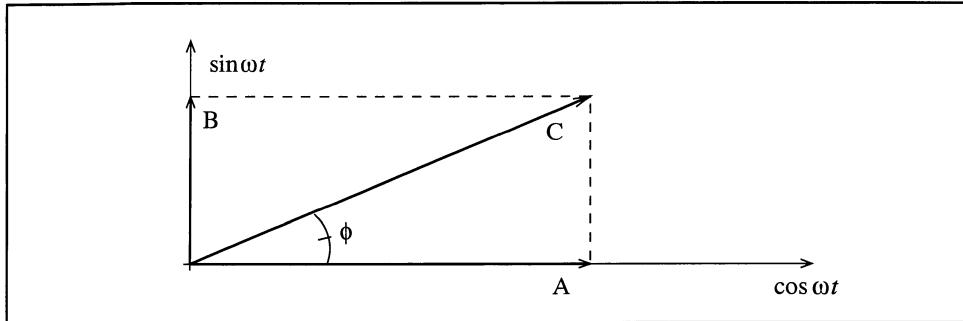


Fig. B.1.

$$C \cdot \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (B.3)$$

idet:

$$A = C \cdot \cos \varphi \quad B = -C \cdot \sin \varphi \quad (B.4)$$

Udfra denne trigonometriske identitet:

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \left(x - \arctg \frac{B}{A} \right) \quad (B.5)$$

C i (B.3) kaldes signalets amplitude og φ signalets fase. (eller mere konkret er $(\omega t + \varphi)$ fasen og φ faseforskydningen, men vi anvender ordet fase for φ for kortheds skyld)

Signalet i (B.3) kan nu illustreres således, idet vi afsætter cosinus-amplituder ud ad x-aksen og sinusamplituder ud ad y-aksen: De udførte beregninger svarer fuldstændigt til de fra vektorregning kendte, og vi kan udnytte dette til at reducere mere komplicerede udtryk som, hvor φ og θ er vilkårlige:

$$A \cos(\omega t + \varphi) + B \sin(\omega t + \theta) \quad (B.6)$$

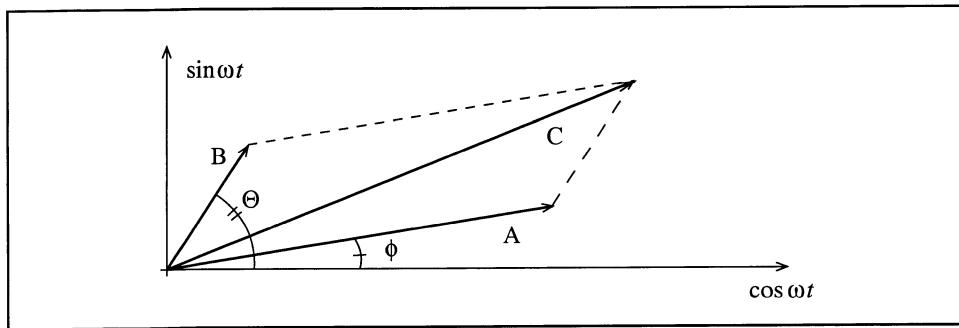


Fig. B.2.

Vi skriver kort signalet $C \cos(\omega t + \varphi)$ som $C \angle \varphi$, idet det er underforstået:

1. At vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi f$ er kendt.
2. At ω er den samme i alle udtryk.

Dette er den symbolske notation.

Inddrages Eulers formel vil vi repræsentere signalet $C \cos(\omega t + \varphi)$ som et komplext tal, der udtrykt på polær- og rektangulær (eller carthesisk) form bliver:

$$C \cdot e^{j\varphi} = C (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (B.7)$$

For at komme fra den komplexe symbolske notation til det virkelige målelige signal skal vi udføre:

1. Gang med $e^{j\omega t}$.
2. Tag realdelen af resultatet.

(Vi kunne lige så godt have valgt imaginærdenen Im , men det er almindeligt at bruge Re)
 Signal:

$$C \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}[C \cdot e^{j\varphi} e^{j\omega t}] \quad (B.8)$$

Notation:

$$C \cdot e^{j\varphi} \quad (B.9)$$

Når der anvendes komplex symbolsk notation får vi den fordel at differentiation og integration bliver algebraiske operationer.

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad \frac{d}{dx} \cos \omega x = -\omega \sin \omega x \quad (B.10)$$

Der gælder:

Signal	Notation	Værdi
$\cos \omega t$	e^{j0}	$= 1$
$\sin \omega t = \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$= -j$
$\frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega \sin \omega t$	$-\omega e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$= j\omega$
$\int \cos \omega t dt = \frac{1}{\omega} \sin \omega t$ $= \frac{1}{\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$	$\frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$= \frac{-j}{\omega} = \frac{1}{j\omega}$

At differentiere et signal mht. t udføres ved at gange $j\omega$ på den komplexe symbolske repræsentation, og at integrere udføres ved at dividere med $j\omega$.

$$I \downarrow \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ C \end{array} \begin{array}{l} + \\ \text{---} \\ - \end{array} V$$

$$V \text{ står for } V e^{j\omega t}$$

$$I_c = \frac{dV}{dt} \cdot C$$

$$\Updownarrow$$

$$Z_c = \frac{V}{I} = \frac{V}{j\omega V C} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$I = j\omega V \cdot C$$

Fig. B.3. Eksempel på anvendelse

Bemærkninger til KSN

Det er vigtigt i beregninger at argumentet til cosinus altid udtrykkes i radianer, idet

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x; \quad x \text{ i radianer} \quad (B.11)$$

men

$$\frac{d}{dy} \cos y = -\frac{180}{\pi} \sin y; \quad y \text{ i grader} \quad (B.12)$$

derfor skal frekvenser, f altid omregnes til vinkelfrekvenser: $\omega = 2\pi f$.

Vi ser endvidere at sinusformede signaler, der udsættes for lineære operationer altid giver sinusformede signaler som resultat.

Ved ikke-lineære operationer skal vi passe på, som fx. ved effektberegninger: Hvis vi blot multiplicerer de komplexe symbolske billede, får vi forkert resultat:

$$V e^{j\varphi} \cdot I e^{j\theta} = VI \cdot e^{(\varphi+\theta)} \quad (B.13)$$

Det rigtige svar er:

$$P_{\text{øjeblik}} = V \cos(\omega t + \varphi) \cdot I \cos(\omega t + \theta) \quad (B.14)$$

$$= \frac{1}{2}VI \cos(\varphi - \theta) + \frac{1}{2}VI \cos(2\omega t + \varphi + \theta)$$

$$= (\text{middel effekten}) + (\text{varierende del med middel} = 0)$$

Middeleffekten fås ved anvendelse af KSN ved:

$$P_{\text{middel}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V \cdot I^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V e^{j\varphi} \cdot I e^{-j\theta}] \quad (B.15)$$

$$= \frac{1}{2}VI \operatorname{Re}[e^{j(\varphi-\theta)}] = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}VI \cos(\varphi - \theta) + j \sin(\varphi - \theta)\right]$$

$$= \operatorname{Re}[\text{aktiv effekt (W)} + \text{reakтив effekt (VAR)}]$$

C Koaxial- og parallelleder konstanter

Der findes formler for mange kabeltype, efter hvilke L , C , R og G kan udregnes, når man kender de primære mediekonstanter for isolationsmaterialet og lederne.

Da det imidlertid er de sekundære parametre vi anvender vil vi, i dette appendiks, kun gengive Z_0 og γ for de vigtigste kabeltyper. Udbredelseskonsanten opgives med α og β separat hvor det er muligt; det er ikke for alle kabel typer at disse data findes.

I de følgende formler anvendes ϵ og μ for isolationsmaterialet, hvor intet andet er angivet er der indsat σ for kobber. For isolationsmaterialet anvendes tabsfaktoren δ , dette tab α_d er ofte meget lille. $1/\sqrt{\epsilon_r}$ kaldes også forkortningsfaktoren ff . Se iøvrigt noten Grundlæggende Maxwellsk Feltteori for yderligere data.

Koaxalkabel

Diameteren af inderlederen er d og af yderlederen D .

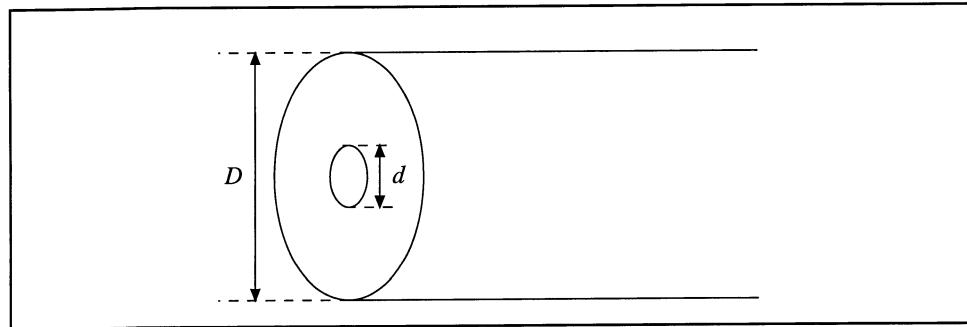


Fig. C.1. Koaxalkabel

$$Z_0 = \frac{\eta}{2\pi} \ln \left(\frac{D}{d} \right) \quad [\Omega] \quad (C.1)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (C.2)$$

$$\alpha_c = \left(\frac{0,014272\sqrt{f}}{Z_0} \right) \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) \quad [\text{dB/m}] \quad (C.3)$$

$$\alpha_d = 0,091207 f \sqrt{\epsilon_r} \operatorname{tg} \delta \quad [\text{dB/m}] \quad (C.4)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (C.5)$$

$$\lambda_c \sim \frac{\pi (D + d)}{2,0} \quad (C.6)$$

β er for ledninger med små tab, λ_c svarer til cutoff frekvensen: den korteste bølgelængde kablet kan overføre udelukkende i quasi-TEM mode. Når der er anvendt samme ledermateriale kan der findes et optimalt forhold D/d . For største gennemslags spænding er forholdet 2,718. For optimal effektoverførelse: 1,65 og for minimum attenuering: 3,59.

Det almindelige sorte koaxialkabel, vi kender fra laboratoriet, kaldes almindeligvis „RG-58“, selvom det ofte i realiteten er en anden, lignende type, og for dette gælder $Z_0 = 50 \Omega$; og vi regner med at $v = 200 \text{ m}/\mu\text{s}$. Isolationsmaterialet er polyæthylen, kaldet PE, for hvilket ret nøjagtigt gælder $\epsilon_r = 2,25$ for et meget stort frekvensområde.

Yderligere data over andre kabeltyper kan findes i appendiks D.

I Wadell findes formler for Z_0 for partielt fyldte, runde eksentriske og kvadratisk med formede coaxialkabler.

Parallellederkabel

Ledningernes diameter er d og afstanden mellem ledningernes centre er D . Ledningerne antages at have samme ledningssevne og være omgivet af et (uendeligt stort) dielktrikum med den relative permittivitet ϵ_r .

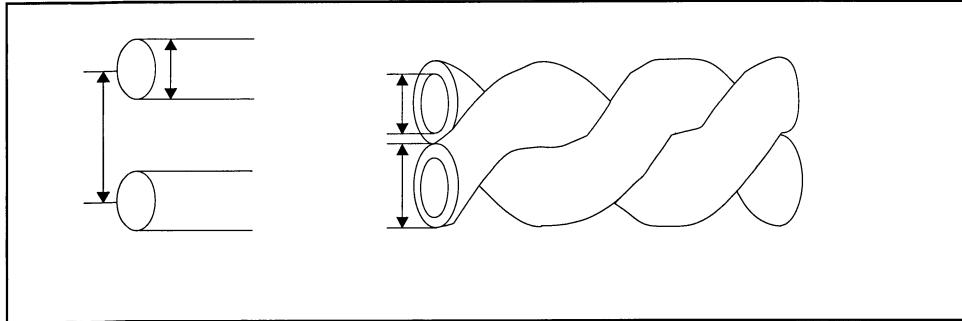


Fig. C.2. Parallellederkabel. Til højre som snoet par

$$Z_0 = \frac{\eta_0}{\pi\sqrt{\epsilon_r}} \cosh^{-1} \left(\frac{D}{d} \right) \quad [\Omega] \quad (C.7)$$

$$\alpha_c = \frac{P}{2,0 \cdot d} \frac{\sqrt{\frac{f_\epsilon}{\sigma}}}{\cosh^{-1} v} \quad (C.8)$$

$$P = \frac{v}{\sqrt{v^2 - 1,0}}$$

$$v = \frac{D}{d}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad (C.9)$$

P er en „nærhedsfaktor“ (proximity factor) der tage højde for at strømfordelingen på ledningen ændres når ledningerne anbringes tæt på hinanden. Nærhedseffekten giver en forøget modstand R . β er igen for ledninger med lavt tab.

For den meget anvendte snoede parledning kan der benyttes samme ligninger blot skal ϵ_r er stattes med den effektive værdie ϵ_{eff} , der inkluderer at felterne udbredes både i isolationsmaterialet og i luft.

$$\epsilon_{eff} = 1,0 + q (\epsilon_r - 1,0) \quad (C.10)$$

$$q = 0,25 + 0,0004\theta^2 \quad (C.11)$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} (T\pi D) \quad (C.12)$$

T er snoninger pr længde hvor T og D har samme længde enheder og θ er stigningsvinklen: vinklen mellem det snoede pars centerlinie og snoningen. En optimal værdi er imellem 20 og 45° større værdier får ledningerne til at brække og mindre værdier gør snoningen for løs.

Anvendes bløde isolationsmaterialer som PTFE skal q istedet være:

$$q = 0,25 + 0,001\theta^2 \quad (C.13)$$

Den totale længde før snoningen kan findes af:

$$l = N\pi D \sqrt{1,0 + \frac{1,0}{\operatorname{tg}^2 \theta}} \quad (C.14)$$

I Fields and Waves findes formler for parallelleder med skærm og i Wadell findes formler for fire leder kabler.

Eksempel C.1

For almindelig netledning er a/d - forholdet ca. $2,6$ og ϵ_r ca. 2.9 . Derved fås:

$$ff = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = 0,583$$

$$Z_0 = \ln(2 \cdot 2,6) \cdot 120 \cdot ff = 115 \Omega$$

$$v = c \cdot ff = 175 \text{ m}/\mu\text{s}$$

D Oversigt over kabeltyper

På figur D.1 findes en oversigt over de væsentligste data for et udvalg af almindeligt anvendte coax transmissionsledningstyper. Forklaring til figuren findes efterfølgende.

RG type	Z_0	C	ff	V_{max}	Diam. udv.	Cent. leder	Dielek. diam.	Dielek. type	Dæmpn. + note
	Ω	pF/m		kV	mm	mm	mm		
6/U	71	56,8	0,78	2,7	6,86	1×1,02	4,57	FPE	A
6A/U	75	66,6	0,66	2,7	8,53	1×0,72	4,70	PE	A (4)
8/U	52	96,8	0,66	4,0	10,28	7×0,73	7,24	PE	B
8A/U	52	97,7	0,66	4,0	10,28	7×0,73	7,24	PE	B
9B/U	50	99,4	0,66	4,0	10,67	7×0,73	7,11	PE	B
11/U	75	67,6	0,66	4,0	10,28	7×0,40	7,24	PE	B
11A/U	75	67,6	0,66	5,0	10,28	7×0,40	7,24	PE	B
22B/U	95	52,5	0,67	1,0	10,67	7×0,39	7,24	PE	(7)
26A/U	48	164,0	0,42	10,0	12,83	19×0,30	7,32	SR	
27A/U	48	164,0	0,42	15,0	17,02	19×0,47	11,56	SR	
34B/U	75	70,6	0,63	6,5	24,00	7×0,64	11,68	PE	
55/U	53,5	94,5	0,66	1,9	5,23	1×0,81	2,95	PE	B
55B/U	53,5	94,5	0,66	1,9	5,23	1×0,81	2,95	PE	B
57A/U	95	55,8	0,63	3,0	15,88	7×0,72	12,00	PE	(7)
58/U	53	94,5	0,66		4,95	1×0,81	2,95	PE	
58A/U	50	100,0	0,66		4,95	19×0,18	2,95	PE	
58C/U	50	100,0	0,66	1,9	4,95	19×0,18	2,95	PE	
59/U	75	70,2	0,66	2,3	6,15	1×0,64	3,71	PE	
59/U	75	56,8	0,78	2,3	6,15	7×0,25	3,71	FPE	
62/U	93	43,0	0,84		6,15	1×0,64	3,71	SSP	
62A/U	93	43,3	0,84	0,75	6,60	1×0,64	3,71	SSP	
63B/U	125	31,5	0,84	1,0	10,54	1×0,64	7,49	SSP	
65A/U	950	144,4	0,024	1,0	10,29	3,25	7,24	PE	(2)
71B/U	93	43,3	0,84	0,75	6,35	1×0,64	3,71	SSP	
79B/U	125	32,8	0,81	1,0	12,1	1×0,64	7,24	PE	
84A/U	75	70,6	0,63	10,0	25,4	1×2,65	17,27	PE	

RG type	Z_0	C	ff	V_{max}	Diam. udv.	Cent. leder	Dielek. diam.	Dielek. type	Dæmpn. + note
	Ω	pF/m		kV	mm	mm	mm		
88/U	48	164,0	0,42	10,0	13,08	19×0,30	7,32	SR	(6)
130/U	95	55,8	0,63	8,0	15,88	7×0,72	12,00	PE	(7)
144/U	75	67,3	0,66	5,0	10,41	7×0,45	7,24	PTFE	(5)
158/U	25	255,9	0,52	15,0	18,42	37×0,72	11,56	PE,SR	(3)
174/U	50	102,0	0,66		2,54	7×0,16	1,52	PE	
178B/U	50	93,1	0,70	1,0	1,80	7×0,10	0,86	TFE	(5)
179B/U	75	64,3	0,70	1,2	2,54	7×0,10	1,60	TFE	(5)
180B/U	95	51,5	0,70	1,5	3,56	7×0,10	2,59	TFE	(5)
181/U	125	39,4	0,68	3,5	16,26	7×0,40	5,33	PE	(8)
187A/U	75	64,0	0,70	1,2	2,67	7×0,10	1,52	TFE	(5)
188A/U	50	92,8	0,70		2,69	7×0,10	1,52	TFE	
191/U	25	278,9	0,49	15,0	37,08	1×0,24	27,05	SR	(3)
196A/U	53	91,2	0,70	1,0	1,93	7×0,101	0,86	TFE	(5)
211A/U	50	95,1	0,70	7,0	18,54	1×4,83	15,75	PTFE	(5)
213/U	50	101,0	0,66	5,0	10,46	7×0,75	7,24	PE	
214/U	50	101,0	0,66	5,0	10,97	7×0,75	7,24	PE	
217/U	50	96,8	0,66	7,0	13,84	1×2,59	9,40	PE	
220/U	50	96,8	0,69	14,0	28,45	1×6,60	23,11	PE	
223/U	50	103,3	0,66	1,9	5,38	1×0,91	2,94	PE	
225/U	50	96,8	0,69	5,0	10,92	7×0,79	7,24	PTPE	
226/U	50	95,1	0,70	7,0	12,70	19×0,65	9,40	SST	(9)
301/U	50	95,1	0,70	3,0	6,22	7×0,52	4,70	PTFE	(1)
307A/U	75	65,6	0,68	0,4	6,86	17×0,15	0,74	FPE	
802.3	50	85,0	0,78		10,28	1×1,66	6,27	FPE	(3)
Video	75	67,9	0,66		7,72	1×0,81	5,08	PE	(6)

Forklaring til tabellerne

I det følgende findes uddybende forklaringer til figur D.0 . De angivne kabeltyper findes beskrevet i standarderne EIA RS-199 „Solid Dielectric Transmission Lines“ og MIL-HDBK-216 „RF Transmission Lines and Fittings“. Centerleder angives med antal og diameter, f_f er forkortningsfaktoren.

Dielektrika	
PE	polyethylen
FPE	skum-polyethylen
TFE	tetrafluorethylen
PTFE	polytetrafluorethylen (Teflon)
SR	syntetisk gummi (Butylgummi)
SST	semimassivt teflon

Forkortelser for materialer, der anvendes som dielektrikum (isolationsmateriale) i kabler.

Note 1: Højattenuationskabel. Inderleder og skærm består af „Karma wire“.

Note 2: Kabel med stor forsinkelse. Inderlederen er spiralsnoet med den angivne diameter af spiralen. Forsinkelsen opgives til $0,138 \mu\text{s}/\text{m}$ ved 5 MHz. DC-resistansen er $23,0 \Omega / \text{m}$.

Note 3: Dobbeltskærmet kabel.

Note 4: Højtemperaturkabel. Inderleder temperatur op til 250°C tillades.

Note 5: Kabel med 4 skærme.

Note 6: Kabel med 2 ledere og 1 skærm.

Note 7: Kabel med 2 ledere og 2 fælles skærme.

Note 8: Kabel med 2 ledere med hver sin skærm samt en fælles ydre skærm.

Note 9: Armeret kabel.

Note 10: Halvflexibelt kabel, der kan anvendes ved omgivelsestemperatur fra -55°C til $+200^\circ \text{C}$.

E Mikrostrip

En mikrostrip er opbygget med en lederbane på et dielektrikum med jordplan. Herved opnås en transmissionsledning, der er meget nem at fremstille og anvende sammen med forskellige komponenter.

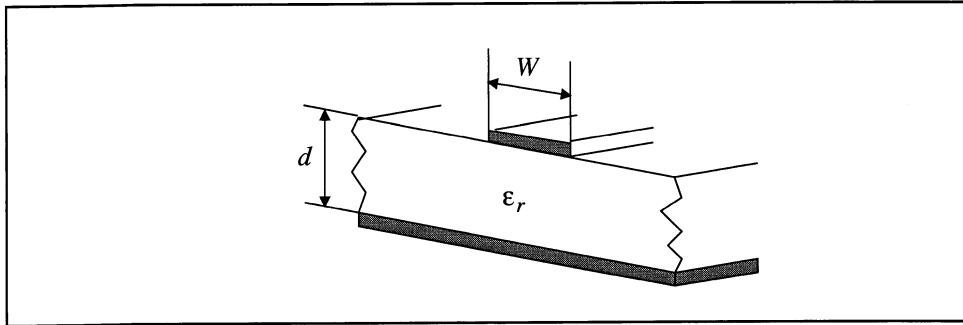


Fig. E.1. Mikrostrip struktur.

Da felterne i en mikrostrip udbredes med forskellig hastighed i dielektrikummet og i luften, er en analyse vanskeligere end for ex. koaksialledningen. Det antages ofte, at bølgeudbredelsen er quasi-TEM: Tilsyneladende transversal elektromagnetisk. Med et givet dielektrikum med tykkelsen d kan en ønsket karakteristisk impedans realiseres med en stripbredde W givet ved følgende tilnærmede formelsæt. Endelig kan signalets bølgelængde på mikrostrippen findes, idet ϵ_e findes af det anvendte dielektrikum ϵ_r korrigeret med en fyldningsfaktor, svarende til at en del af feltet udbredes i luft.

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_e}} \quad \text{hvor} \quad \epsilon_e = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 12d/W}} \quad (E.1)$$

$$\frac{W}{d} = \frac{8e^A}{e^{2A} - 2} \quad \text{for} \quad \frac{W}{d} < 2 \quad \text{ellers:} \quad (E.2)$$

$$\frac{W}{d} = \frac{2}{\pi} \left[-1 - \ln(2B - 1) + B + \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r} \left[\ln(B - 1) + 0,39 - \frac{0,61}{\epsilon_r} \right] \right] \quad (E.3)$$

$$A = \frac{Z_0}{60} \sqrt{\frac{\epsilon_r + 1}{2}} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left[0,23 + \frac{0,11}{\epsilon_r} \right] \quad \text{og} \quad B = \frac{377\pi}{2Z_0\sqrt{\epsilon_r}} \quad (E.4)$$

Hvor: λ_0 er bølgelængden i luft i m, λ_g er mikrostripbølgelængden i m, ϵ_r er den relative dielektricitetskonstant, d er tykkelsen af dielektrikummet i m, W er mikrostrippens bredde

i m og Z_0 er den ønskede karakteristiske impedans i Ω .

De tilnærmede designformler tager ikke hensyn til tykkelsen af strippe og til dispersion (frekvensafhængighed). Ved anvendelser, hvor bølgelængden er væsentligt større end tykkelse og bredde, vil formlerne have nogle få procents unøjagtighed.

Mikrostrip diskontinuiteter

Det er nødvendigt at tage hensyn til ændringer i transmissionsledningens tværsnit. I det følgende behandles to typer. I /Wadell/ findes designformler for flere diskontinuiteter, både for mikrostrip og for andre ledningstyper.

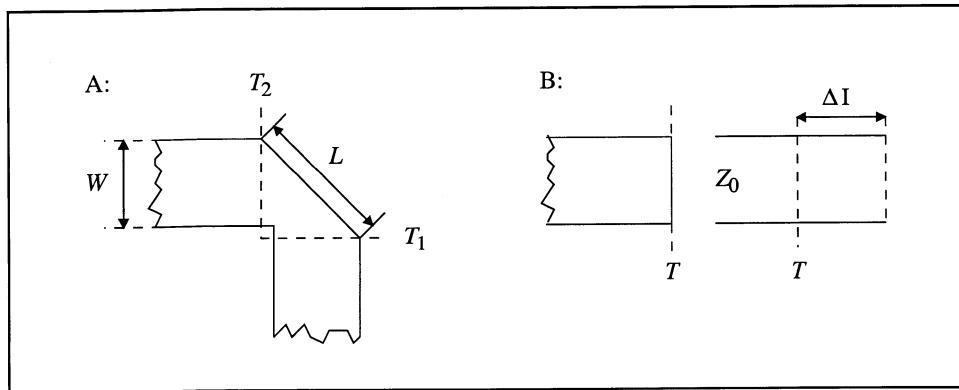


Fig. E.2. Mikrostrip korrektioner. A: Vinkel og B: Afbrydelse.

En mikrostrip, der ændrer retning for kraftigt, vil også ændre den karakteristiske impedans. Der korrigeres som vist på figur E.2, hvor der i den retvinklede drejning er skåret noget af hjørnet. En åben afslutning svarer til en ekstra kapacitet for enden af ledningen, eller tilsvarende et ekstra stykke ledning Δl med samme karakteristiske impedans Z_0 .

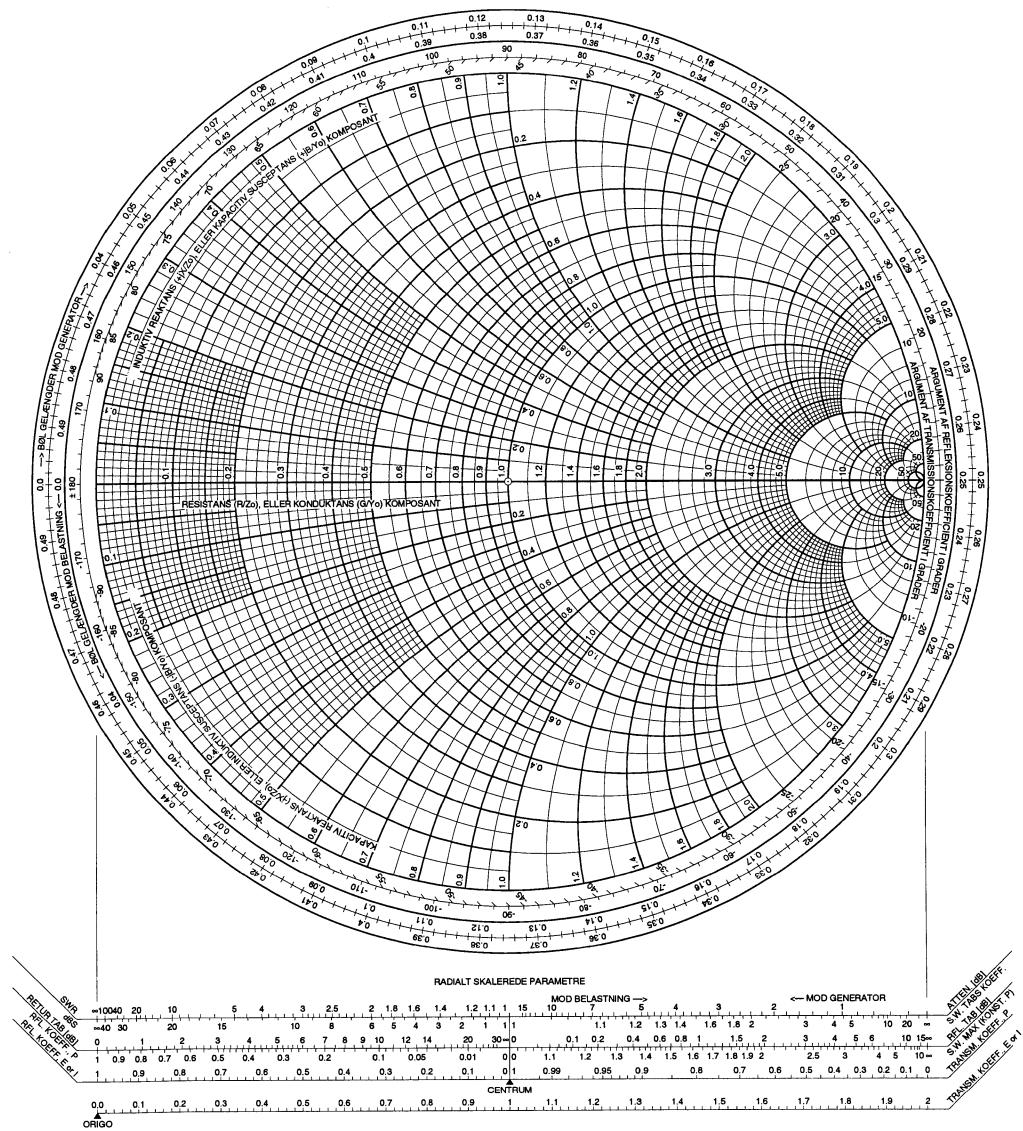
$$\frac{L}{W} = \left(1,47 + 1,84 e^{-1,35 \frac{W}{d}} \right) \quad L_e = T_1 - T_2 = \frac{L}{\sqrt{2}} \quad (E.5)$$

$$\frac{\Delta l}{d} = 0,412 \frac{\epsilon_e + 0,3}{\epsilon_e - 0,258} \cdot \left[\frac{\frac{W}{d} + 0,264}{\frac{W}{d} + 0,8} \right] \quad (E.6)$$

Hvor: W er mikrostrippens bredde i m, d er tykkelsen af dielektrikummet i m, L_e er den elektriske længde af hjørnet i m, T er referenceplaner og Δl den ækvivalente ekstra længde i m.

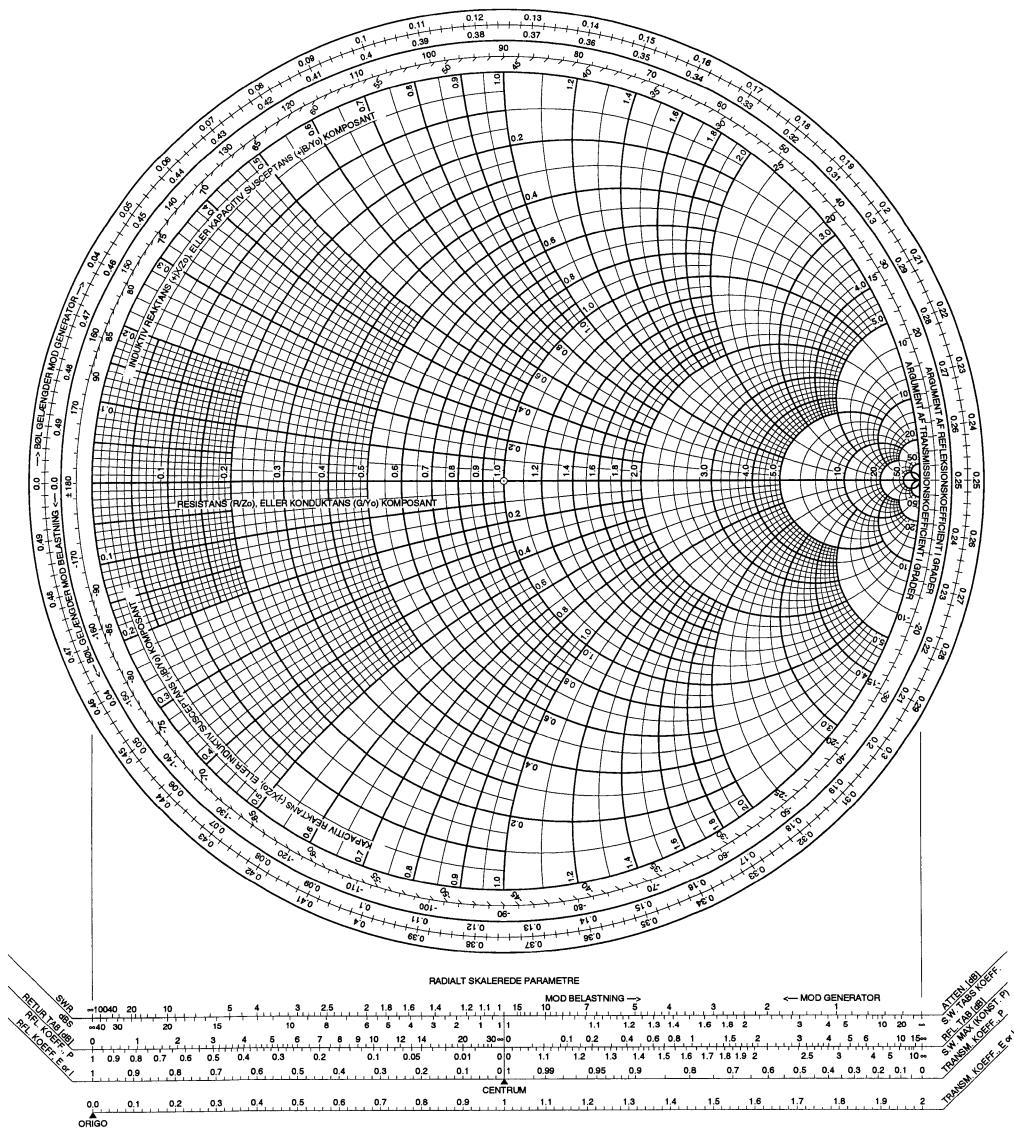
F Smithkort

Smithkort
Dansk version



F Smithkort

Smithkort
Dansk version



F Smithkort

Litteraturliste

1. Brown, Sharpe, Hughes & Post :
Lines, Waves, and Antennas.
John Wiley & Sons, Inc. USA, 1973,
ISBN 047-106677-X.
2. Cheng, David K. :
Field and Wave Electromagnetics.
Addison-Wesley Publishing Company. USA, 1987,
ISBN 020-110132-7.
3. Chipman, R. A. :
Theory and Problems of Transmission Lines.
Schaums outline, McGraw-Hill Book Company. Ohio, 1968.
4. Gardiol, Fred E. :
Lossy Transmission Lines.
Artech House Inc. Pully, (Switzerland) 1987.
5. Pozar, David M. :
Microwave Engineering.
Addison Wesley, USA 1991,
ISBN 0-201-50418-9.
6. Ramo, S., Whinnery, J. R. and van Duzer, T. :
Fields and Waves in Communication Electronics.
John Wiley & Sons, Inc. New York, USA, 1965,
ISBN 047-170721-X.
7. Sinnema, W. :
Electronic Transmission Technology.
Prentice Hall, 2.ed. 1988,
ISBN 0 13 2 52 412 - 0.
8. Wadell, Brian C. :
Transmission Line Design Handbook.
Artech House Inc, USA 1991,
ISBN 0-86341-048-0.

Stikordsregister

- a**
 - admittans i Smitkort, 79
 - attenueringskoefficient, 93
 - attenuationskonstant, 24
- b**
 - bølgelængde, 26
 - bølgeligninger, 24
- d**
 - dæmpningskonstant, 93
- e**
 - effekt refleksionskoefficient, 102
 - enkeltstubtuner, 85
 - endimensionel bølgeligning, 3
- f**
 - fasehastigheden, 27
 - fasekonstanter, 24
 - fordelte parametre, 1
 - forkortningsfaktor, 42
 - forvrægningsfri model, 39
 - fremadgående effekt, 98
 - fremadløbende bølge, 5
- g**
 - generaliseret impedans, 29
 - generaliseret refleksionskoefficient, 29
 - generel model, 39
- i**
 - impedans i Smitkort, 79
- k**
 - kabelkonstanter, 115
 - karakteristisk impedans, 8
 - kortsluttet stub, 83
 - kompleks symbolsk notation, 111
 - koaxialleder konstanter, 115
 - kvartbølgetransformator i Smithkort, 89
- l**
 - lednings modeller, 38
- m**
 - mikrostrip, 123
 - Møbiustransformation, 77
- n**
 - neppe, 93
 - normeret impedans, 70
- p**
 - parallelleder konstanter, 117
 - primære konstanter, 1
 - pupinisering, 43
- r**
 - refleksionskoefficient, 10
 - reflekteret effekt, 101
 - RG kabedata, 119
 - rådighedseffekt, 99
- s**
 - serie tilpasning, 82
 - sekundære konstanter, 8
 - Smithkort, anvendelse, 78
 - Smithkort, 69
 - små-tab model, 41
 - spændingsudbredelse, 4
 - standbølgekurve, 56
 - stående bølger, 54
 - stubbe, 83
 - stub tilpasning, 85
 - standbølgeforhold, 61
 - SWR i Smitkort, 78
 - SWR måling, 64
 - SWR, 61
 - symbolsk notation, 112
- t**
 - tabsfrit tilfælde, 25
 - tabsfri model, 39
 - telefonkabel model, 43
 - telegrafligninger, 3
 - tilbageløbende bølge, 5
- u**
 - udbredelseskonstant, 24
 - udbredelseshastighed, 4
- v**
 - VSWR, 61
- å**
 - åben stub, 83