

Преобразование базиса Грёбнера нульмерного идеала к иному мономиальноальному упорядочению.

Федоров Глеб М33351

Октябрь 2020

1 Оглавление

1.1 Постановка проблемы

1.2 Дополнительная теория

1.3 Алгоритм FGLM

1.4 Примерная архитектура программы

1.5 Используемая литература

2 Постановка проблемы

Дан базис Грёбнера нульмерного идеала, построенный на мономиальном упорядочении m_1 . Привести данный базис к иному мономиальному упорядочению m_2 .

3 Дополнительная теория

3.1 Исключающий идеал

Определение: Пусть дан $I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle \in F[x_1, \dots, x_n]$. Тогда l -м исключающим идеалом I_l называется идеал в $F[x_{l+1}, \dots, x_n]$, равный $I \cap F[x_{l+1}, \dots, x_n]$.

Теорема(об исключении): Пусть $I \subset F[x_1, x_2, \dots, x_s]$ - идеал и G - его базис Грёбнера по отношению к лек-упорядочению с $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Тогда $\forall l : 0 \leq l \leq n$ множество

$$G_l = G \cap F[x_1, x_2, \dots, x_s]$$

является базисом Грёбнера l -го исключающего идеала I_l .

Доказательство: Зафиксируем l в интервале $(0, n)$. Так как $G_l \in I_l$ по построению, достаточно показать, что

$$\langle LT(I_l) \rangle = \langle LT(G_l) \rangle$$

Включение в одну сторону очевидно ($\langle LT(G_l) \rangle \subset \langle LT(I_l) \rangle$ по построению). Докажем, что $\langle LT(I_l) \rangle \subset \langle LT(G_l) \rangle$. Для этого достаточно показать что $LT(f)$, где $f \in I_l$, делится на некоторый $g \in G_l$. Заметим, что $f \in I$, то есть $LT(f)$ делится на $LT(g)$ для некоторого g (т.к. G является базисом Грёбнера идеала I). Так как $f \in I_l$, то $LT(g)$ содержит только переменные x_{l+1}, \dots, x_n . Так как используется лек-упорядочение с $x_1 > x_2 > \dots > x_n$, то любой моном, содержащий хотя бы одну из переменных x_1, \dots, x_l , больше всех мономов из $F[x_{l+1}, \dots, x_n]$. Значит $g \in G_l$, что и требовалось доказать.

3.2 Соответствие идеала и многообразия

Определение: Пусть $I \in F[x_1, \dots, x_n]$ - некоторый идеал. Положим

$$V(I) = (a_1, \dots, a_n) \in F^n : f(a_1, \dots, a_n) = 0 \forall f \in I$$

Теорема: $V(I)$ является аффинным многообразием. В частности, если $I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$, то $V(I) = V(f_1, \dots, f_n)$

Доказательство: По теореме Гильберта о базисе идеал I конечно порождён, $I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$. Покажем, что $V(I) = V(f_1, \dots, f_n)$. Если $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ для всех полиномов $f \in I$, то $f_i(a_1, \dots, a_n) = 0$ (так как $f_i \in I$). Следовательно, $V(I) \subseteq V(f_1, \dots, f_n)$. С другой стороны, пусть $(a_1, \dots, a_n) \in V(f_1, \dots, f_n)$, и пусть $f \in I$. Так как $I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$, то

$$f = \sum_{i=1}^s h_i f_i$$

для некоторых $h_i \in F[x_1, \dots, x_n]$. Но тогда

$$f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^s h_i(a_1, \dots, a_n) f_i(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^s h_i(a_1, \dots, a_n) * 0 = 0$$

Следовательно, $V(f_1, \dots, f_n) \subseteq V(I)$, а значит эти два идеала равны.

Следствие: Многообразия определены идеалами.

3.3 Нульмерный идеал

Теорема: Пусть поле F алгебраически замкнуто и $I \in F[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Алгебра $A = F[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$ конечномерна над F .
2. $V(I) \subset F^n$ конечно.
3. Если G - базис Грёбнера идеала I , то

$$\forall i \exists m_i \geq 0 : x_i^{m_i} = LM(g)$$

для некоторого $g \in G$.

4. Для каждой переменной x_i исключающий идеал $I \cap F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ является ненулевым.

Доказательство: Идеал, удовлетворяющий данной теореме называется нульмерным

!!!Определение: Пусть нульмерный идеал I над $F[x_1, \dots, x_n]$ и G - его редуцированный базис Грёбнера. Натуральным базисом, определяемым G K -векторного пространства R/I , назовем базис $B(G)$, элементами которого являются приведенные мономы относительно G . Обозначим за $D(I)$ размерность K -векторного пространства R/I (степень идеала I).

!!!Определение: Пусть $B(G)$ - натуральный базис для R/I . Тогда положим, что

$$M(G) = \{x_i b \mid b \in B(G), 1 \leq i \leq n, x_i b \notin B(G)\}$$

граница G .

Теорема: Пусть I - нульмерный идеал и G - редуцированный базис Грёбнера данного идеала, и $B(G)$ - натуральный базис Грёбнера для R/I , тогда $\forall m \in M(G)$ выполнено одно из данных условий:

1. $\forall x_i : x_i | mt/x_i \in B(G)$, если m - это старший моном элементов G .
2. $m = x_j m_j$ для некоторых j и $m_k \in M(G)$

Доказательство:

1. Следует из определения редуцированного базиса Грёбнера и определения $B(G)$
2. Пусть x_j делит m и $m/x_j \notin B(G)$, тогда $m_k = m/x_j \in M(G)$.

Следствие: Пусть k число образующих редуцированного базиса Грёбнера для нульмерного идеала. Тогда $k \leq nD(I)$

4 Алгоритм FGLM

4.1 Вычисление нормальной формы

Определение: Обозначим $T(G) = (t_{ijk})$ тензор $n \times D(I) \times D(I)$, чьи элементы: $t_{ijk} = j$ -ая координата относительно $B(G)$ с элементами $x_i b_k (b_k \in B(G))$.

4.2 Смена упорядочения

Теорема: Пусть I - нульмерный идеал и (G_1, m_1) - его редуцированный базис Грёбнера, построенный для мономиального упорядочения m_1 , m_2 - иное мономиальное упорядочение. Тогда можно построить базис Грёбнера (G_2, m_2) за $O(nD(I)^3)$.

Доказательство: Из (G_1, m_1) мы можем построить $B(G_1) = a_1, \dots, a_{D(I)}$, $M(G_1)$ и $T(G_1)$, как было показано в предыдущей главе. Построим матрицу C в которой i -й столбец будет координатами элемента $b_i \in B(G_2)$ относительно $B(G_1)$. Будем строить новый базис итеративно. Пусть $B(G_2) := 1$ и $M(G_2) := \emptyset$. Пусть $m = \min_{m_2} x_j b_i | 1 \leq j \leq n, b_i \in B(G_2), x_j b_i \notin B(G_2) \cup M(G_2)$. Может возникнуть три случая:

1. m - старший терм g , какого-либо $g \in G_2$
2. m был добавлен в $B(G_2)$
3. m был добавлен в $M(G_2)$, но m - умножение старших членов для некоторых $g \in G$.

Проверка того, что m удовлетворяет третьему пункту - старший член g строго меньше чем m при любом допустимом упорядочении и g уже добавлен в $M(G_2)$. Поскольку по построению, $m = x_j b_i$ мы можем посчитать его координаты $c(m)_h$ относительно $B(G_1)$ используя матрицу C и тензор $T(G_1) = (t_{ijk})$:

$$m = x_j b_i = x_j * \sum_k c_{ki} * a_k = \sum_k x_j * c_{ki} * a_k = \sum_k c_{ki} * \sum_h t_{jhk} * a_h = \sum_h \left(\sum_k t_{jhk} c_{ki} \right) = \sum_h c(m)_h a_h$$

Если вектор $c(m)$ линейно независим от векторов из C , то выполняется второй пункт, и мы нашли новый $g \in G_2$.

Algorithm 1 Псевдокод

```
1: Input
2:    $m_2$  ▷ новое упорядочение
3:   oldBasis ▷ Базис Грёбнера нульмерного идеала относительно упорядочения  $m_1$ 
4: EndInput

5: Output
6:   newBasis ▷ Базис Грёбнера нульмерного идеала относительно упорядочения  $m_2$ 
7: EndOutput

8: Subfunctions
9:   NormalForm(polynom) ▷ Возвращает редуцированную форму полиному относительно упорядочения  $m_1$ 
10:  NextMonom() ▷ Возвращает первый элемент ListOfNexts или nil, если ListOfNexts пуст. Первый элемент удаляется
11:  InsertNexts(monon) ▷ Добавляет в ListOfNexts произведение монома со всеми переменными, после чего сортирует лист и удаляет дубли
12: EndSubfunctions

13: LocalVariables
14:   staircase ▷ Список ведущих мономов из NewBasis
15:   MBasis ▷ Список пар  $[a_i, b_i]$ , где  $[a_i]$  - лист мономов в нормальной форме относительно нового базиса и  $b_i = NormalForm(a_i)$ , нормальная форма  $a_i$  относительно старого базиса.
16:   ListOfNexts ▷ Список "следующих" мономов. Отсортирован относительно  $m_1$ 
17: EndLocalVariables

18: while monom  $\neq$  nil do
19:   MBasis := []; staircase := []; newBasis := []; ListOfNexts := []; monom := 1;
20:   if monom не делится на какие-нибудь элементы из staircase then
21:     vector := NormalForm(monon) ▷
22:     if есть линейная зависимость vector +  $\sum_{v \in MBasis} \lambda_v second(v) = 0$  then
23:       pol := monom +  $\sum_{v \in MBasis} \lambda_v first(v)$ 
24:       newBasis := cons(pol, newBasis)
25:       staircase := cons(monon, staircase)
26:     else
27:       MBasis := cons([monom, vector], MBasis)
28:       InsertNexts(monon)
29:   monom := NextMonom
```

Доказательство корректности:

5 Используемая литература

1. Faugère, J.C., Gianni, P., Lazard, D., Mora, T. Efficient computation of zero-dimensional gröbner bases by change of ordering (1993) Journal of Symbolic Computation, 16 (4), pp. 329-344.
2. <http://halgebra.math.msu.su/groebner.pdf>
3. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия, кольца. Стр. 108. Стр. 153.
4. https://www.math.lsu.edu/system/files/Groebrepresentation_final.pdf