

Protokoll

Wechselstromkreise

Simon Stahl, Nico Enhardt
Tutor: Bruno Serrano Datum: 10.11.2023

Abgabetermin: 16.11.2023

Nachbesprechung: 22.11.2023

Protokoll des Grundpraktikums 2

Fachbereich Physik
Freie Universität Berlin

0.1 Motivation, Aufgaben

Dieser Versuch behandelt das Verhalten von Spulen und Kondensatoren in Wechselstromkreisen. Wechselstromverhalten ist technisch vor allem deshalb relevant, weil das allgemeine Stromnetz auf Wechselstrom basiert und entsprechend auch viele elektrischen Geräte. In diesem Versuch wird der Entlade bzw. Aufladeprozess des Kondensators und die Frequenzabhängigkeit der Wechselstromwiderstände von Kondensator und Spule untersucht. Durch die unterschiedlichen Widerstände bei verschiedenen Frequenzen lassen sich Schaltungen bauen, die nur manche Frequenzen dämpfen. So lassen sich Hochpass- Tiefpass- und Bandpass-Filter realisieren, die bestimmte Frequenzen dämpfen und andere unbeeinträchtigt lassen. Diese Schaltungen werden im Versuch untersucht. Der Entladeprozess des Kondensators über einen Widerstand soll genutzt werden um die Kapazität des Kondensators zu ermitteln. Von den verschiedenen Frequenzfiltern sollen jeweils die Eckfrequenzen bestimmt werden, welche als Trennfrequenz zwischen Sperr- und Durchlassbereichen verstanden werden können. Außerdem soll die Flankensteilheit der Frequenzgänge für Hoch- und Tiefpass bestimmt werden.

1 Physikalische Grundlagen

1.1 Wechselstrom und Wechselstromwiderstände

Im Gegensatz zur Gleichspannungsquelle erzeugt eine Wechselspannungsquelle eine periodisch veränderliche Spannung. In Wechselstromkreisen zeigen Spulen und Kondensatoren besondere Eigenschaften.

Typischerweise wird Wechselstrom durch eine sinusförmige Wechselspannungsquelle erzeugt.

$$U(t) = U_0 \cdot \sin \omega t = U_0 \cdot \frac{1}{2} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \quad (1)$$

Da die relevanten Gleichungen alle linear sind kann fast immer ein komplexer Strom betrachtet werden, was Berechnungen erheblich vereinfacht.

$$U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}$$

Bei den Experimenten zum Wechselstromwiderstand wird außerdem nicht die Amplitudenspannung U_0 gemessen sondern die Effektivspannung $U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0$. Da dort aber nur Verhältnisse von Spannungen relevant sind ist dies unerheblich.

1.1.1 Kondensatoren

Ein Kondensator besteht aus zwei elektrisch voneinander getrennten Bereichen. Liegt auf einem der Bereiche mehr Ladung, dann besteht zwischen den Bereichen eine Spannung. Die Ladung ist proportional zur Spannung; den Proportionalitätsfaktor nennt man Kapazität (C), eine unveränderliche Kenngröße jedes Kondensators.

$$\begin{aligned} U_{Kond}(t) &= Q_{Kond}/C \\ \dot{U}_{Kond}(t) &= I_{Kond}/C \end{aligned} \quad (2)$$

Teilt man die Spannungskurve durch die Stromstärkekurve, so erhält man den Wechselstromwiderstand Z des Kondensators.

$$\begin{aligned} Z_{Kond} &= \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U(t)}{\dot{U}_{Kond}(t) \cdot C} = \frac{U_0 \cdot e^{i\omega t}}{U_0 \cdot i \cdot \omega e^{i\omega t} \cdot C} \\ Z_{Kond} &= \frac{-i}{\omega \cdot C} \end{aligned} \quad (3)$$

Den komplexen Charakter des Widerstands kann man insofern verstehen, als das Strom und Spannung am Kondensator um $\pi/2$ phasenversetzt laufen.

1.1.2 Spulen

Läuft ein Strom durch eine Spule, dann induziert dieser ein Magnetfeld um die Spule herum. Dieses kann durch einen Eisenkern verstärkt werden. Das stärker werdende Magnetfeld erzeugt induziert eine Spannung an der Spule, den Proportionalitätskoeffizienten L nennt man Induktivität:

$$U_{Spule} = \dot{I}_{Spule} \cdot L \quad (4)$$

Erneut wird der Wechselstromwiderstand Z_{Spule} berechnet:

$$Z_{Spule} = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{\dot{U}(t)}{\dot{I}(t)} = \frac{U_0 \cdot i\omega \cdot e^{i\omega t}}{U_0 \cdot e^{i\omega t}/L} \quad (5)$$

$$Z_{Spule} = i\omega \cdot L \quad (6)$$

1.2 Ladekurven am Kondensator

Beobachtet man die Entladung eines Kondensators mit Kapazität C über einen Widerstand R , so lässt sich seine Kapazität bestimmen. Ausgehend von einem gewissen Ladestand $Q_0 = Q(t = 0)$ des Kondensators und der korrespondierenden Startspannung $U_{C,0} = Q_0/C$, lässt sich die Differenzialgleichung in U aufschreiben. Nach der Maschenregel sind die Spannung am Kondensator und die Spannung am Widerstand gleich:

$$\begin{aligned} U_C + U_R &= 0 \\ Q/C &= -I \cdot R \\ \frac{dI}{dt} &= -I \cdot CR \\ \frac{dU_C}{dt} &= -U_C \cdot CR \end{aligned}$$

Die Lösung der Differenzialgleichung ist:

$$U_C(t) = U_{C,0} \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (7)$$

Beim Aufladeprozess startet der Kondensator mit der Ladung 0 und über Widerstand und Kondensator wird eine Externe Ladespannung U_{Ex} angelegt. Die Maschenregel für diesen Fall ist:

$$U_C + U_R = U_{Ex}$$

Was eine inhomogene Differenzialgleichung ist. Der homogene Teil stimmt mit dem der Entladekurve überein und die spezielle Lösung ist $U_S(t) = U_{Ex}$. So kommt man auf die Ladekurve für den Kondensator:

$$U_{C,Lade}(t) = U_{Ex} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) \quad (8)$$

Im Experiment wird die Entladekurve $U_C(t)$ gemessen und daraus soll die Kapazität C bestimmt werden: Dazu wird die Gleichung 7 linearisiert was eine Lösung durch lineare regression ermöglicht:

$$\begin{aligned} \ln \frac{U(t)}{U_0} &= -\frac{t}{RC} \\ \Rightarrow C &= -\frac{1}{R} \cdot \frac{dt}{d \ln \frac{U(t)}{U_0}} \end{aligned} \quad (9)$$

Wobei U_0 Die größte gemessene Spannung ist.

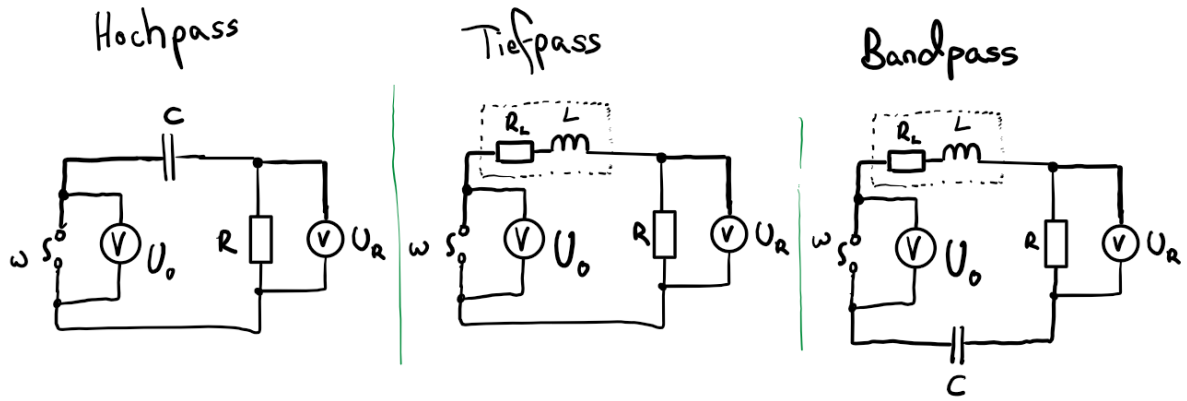


Abbildung 1: Frequenzabhängige Schaltkreise: Links - Hochpass, Mitte - Tiefpass, Rechts - Bandpass

1.3 Frequenzabhängige Schaltungen

1.3.1 R-C-Hochpass

Die Hochpassschaltung in 1 ist frequenzabhängig, d. h. die resultierende Spannung steigt mit steigender Frequenz. Das liegt an der Frequenzabhängigkeit des Kondensatorwiderstandes.

Die komplexe Gesamtimpedanz der Reihenschaltung aus Widerstand (R) und Kondensator (C) beträgt:

$$Z' = R + \frac{i}{\omega C} \quad (10)$$

Die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Stromf ist allerdings unerheblich für die Untersuchung der Frequenzabhängigkeit. Daher ist nur der Betrag der Impedanz relevant, da diese den Betrag von Strom und Spannung in Verhältnis setzt.

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \quad (11)$$

Der Frequenzgang einer Schaltung ist durch das Verhältnis von angelegter Spannung U_0 und am Ausgang resultierender Spannung U_R charakterisiert. Dabei ist die Abhängigkeit dieses Verhältnisses von der angelegten Frequenz ω entscheidend.

$$\begin{aligned} \frac{U_R}{U_0}(\omega) &= \frac{R \cdot I}{Z(\omega) \cdot I} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega^2 C^2)^{-1}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (R^2 \omega^2 C^2)^{-1}}} \end{aligned} \quad (12)$$

Der Funktion ist anzusehen, dass sie in ω monoton steigt, die Ausgangsspannung wird für große Frequenzen also größer woher auch die Bezeichnung Hochpass kommt. Charakteristisch für jeden Frequenzgang wie den Hochpass in Gleichung 12 ist die sog. Eckfrequenz die als Grenze zwischen Durchlassen und Blockieren von Frequenzen zu verstehen ist. Man definiert diese Eckfrequenz ω_E über die Bedingung, dass der reelle Anteil der komplexen Impedanz und der komplexe Anteil gleich groß sind.

$$\begin{aligned} R^2 &= 1/(\omega_E C)^2 \\ \Rightarrow \omega_E &= 1/(RC) \\ f_E &= 1/(2\pi RC) \end{aligned} \quad (13)$$

Bei der Eckfrequenz beträgt das charakteristische Spannungsverhältnis

$$\frac{U_R}{U_0}(\omega_E) = 1/\sqrt{2} \quad (14)$$

1.3.2 R-L-Tiefpass

Die Tiefpassschaltung in 1 ist frequenzabhängig, d. h. die resultierende Spannung sinkt mit steigender Frequenz. Das liegt an der Frequenzabhängigkeit des Wechselstromwiderstandes der Spule.

Wieder wird die Gesamtimpedanz aus dem Widerstand R , dem Widerstand des Spulendrahtes R_L und dem Wechselstromwiderstand der Spule berechnet, ohne den Phasenversatz von Strom und Spannung zu betrachten:

$$Z = \sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L^2)} \quad (15)$$

Der Frequenzgang des Tiefpasses ergibt sich dann als:

$$\begin{aligned} \frac{U_R}{U_0}(\omega) &= \frac{R \cdot I}{Z(\omega) \cdot I} = \frac{R}{\sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 + R_L/R)^2 + (\omega L^2)/R^2}} \end{aligned} \quad (16)$$

Hier ist die Eckfrequenz diejenige Frequenz des Frequenzgangs, bei der die resultierende Spannung beginnt abzuflachen. Sie ist definiert wie oben.

$$\begin{aligned} (R + R_L)^2 &= (\omega_E L)^2 \\ \implies \omega_E &= (R + R_L)/L \\ f_E &= (R + R_L)/(2\pi L) \end{aligned} \quad (17)$$

Das charakteristische Spannungsverhältnis bei der Eckfrequenz beträgt:

$$\begin{aligned} \frac{U_R}{U_0}(\omega_E) &= R/\sqrt{2 * (R + R_L)^2} \\ &= \left(\sqrt{2} \left(1 + \frac{R_L}{R} \right) \right)^{-1} \end{aligned} \quad (18)$$

1.3.3 Bandpass

Der Tiefpass-Effekt und der Hochpass-Effekt werden im Bandpass kombiniert, bei welchem Spule und Kondensator in Reihe geschaltet werden. In die Gesamtimpedanz fließen ein: Der Widerstand R und der Widerstand des Spulendrahtes R_L , sowie die Wechselstromwiderstände aus Spule und Kondensator. Dabei ist relevant, dass Impedanz von Spule und Kondensator beide imaginär sind und daher direkt voneinander subtrahiert werden

$$Z = \sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2} \quad (19)$$

Erneut wird die Frequenzabhängigkeit über das Verhältnis von U_0 und resultierender Spannung U_R charakterisiert.

$$\begin{aligned} \frac{U_R}{U_0}(\omega) &= \frac{R \cdot I}{Z(\omega) \cdot I} = \frac{R}{\sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 + R_L/R)^2 + (\omega L/R - 1/(R\omega C))^2}} \end{aligned} \quad (20)$$

Beim Bandpass beschreiben die Eckfrequenzen zwei Stellen, die den Rand des Maximumhügels markieren:

$$\begin{aligned} (1 + R_L/R)^2 &= (\omega L/R - 1/(R\omega C))^2 \text{ mit } R_L \ll R \\ \implies 1 &= \left(\omega_E \frac{L}{R} - \frac{1}{R\omega_E C} \right)^2 \\ \pm 1 &= \omega_E \frac{L}{R} - \frac{1}{R\omega_E C} \\ 0 &= \omega_E^2 \pm \omega_E \frac{R}{L} - \frac{1}{LC} \end{aligned} \quad (21)$$

Diese Gleichung hat vier Lösungen. Die Lösungen mit $\omega_E > 0$ sind:

$$\omega_E = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \quad (22)$$

bei kleinem Spuleninnenwiderstand gilt außerdem wieder: $\frac{U}{U_0}(\omega_E) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2 Durchführung

2.1 Materialien

- Funktionsgenerator Voltcraft 8202
 - integrierte Messung der Ausgangsfrequenz
 - Fähig zum Erzeugen von Rechteck und Sinusspannungen
 - unbekannter Innenwiderstand
- analoges Oszilloskop HM303-6
- 2 Multimeter VC920 zum Messen von Effektivwechselspannungen mit Genauigkeiten im Messbereich 4V:
 - 45Hz - 1kHz: $\pm(0,5\% + 40\text{digits})$
 - 1kHz - 10kHz: $\pm(2\% + 40\text{digits})$
 - 10kHz - 120kHz: $\pm(6\% + 40\text{digits})$
- Bauteile für Messung der Entladekurve
 - Widerstand $(18 \pm 0,9)k\Omega$ (angegebener Wert)
 - Kondensator $0,1\mu F$
- Bauteile für Hoch und Tieffpass
 - Widerstand 8Ω
 - Spule $4,7mH$ Innenwiderstand $4,8\Omega$
 - Kondensator $3,3\mu F$
- Bauteile für Bandpass
 - Widerstand 8Ω
 - Spule $0,5mH$ Innenwiderstand(gemessen) $0,4\Omega$
 - Kondensator $50\mu F$

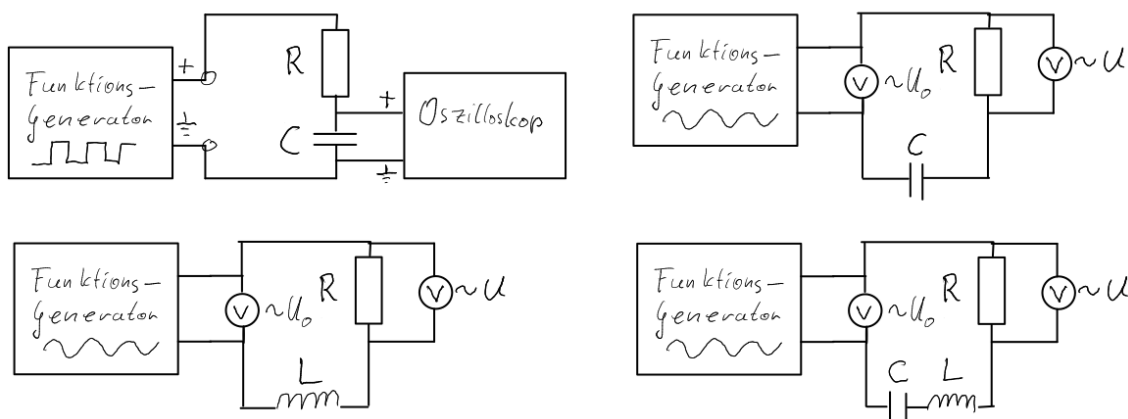


Abbildung 2: Schaltpläne für die Experimente von links oben nach rechts unten: Entladekurve, Tiefpass, Hochpass, Bandpass

2.2 Messung der Auf- und Entladekurve eines Kondensators

Zunächst wurde die Schaltung gemäß dem entsprechenden Schaltplan 2 mit $R = 18k\Omega$ sowie $C = 0,1\mu F$ aufgebaut. Dabei wurde darauf geachtet, dass die Erdung des Oszilloskops an der Erdung des Funktionsgenerators lag. Dann wurde der Funktionsgenerator im Rechteckmodus eingestellt. Danach wurde die Frequenz des generierten Signals sowie die Triggerbedingungen, Zeit- und Spannungsskalen am Oszilloskop so eingestellt, dass die Entladekurve des Kondensators bis zum nächsten Aufladeprozess auf dem Oszilloskop zu sehen ist und möglichst den ganzen Bildschirm bedeckt. Die Zeitskalierung war bei der Messung $1ms/Division$. Dann wird der zeitliche Verlauf der Spannung $U(t)$ anhand von 10 Punkten im gleichen Abstand gemessen. Als Ablesefehler werden jeweils 0,1 Divisions genutzt, also $\Delta t = 0,1ms$ und $\Delta U = 0,1div$. Die Skalierung der Spannung ist nicht weiter relevant, da nur die Spannungsverhältnisse für die Auswertung von Bedeutung sind.

2.3 Messung der Spannungsgänge

Für die Messung der Spannungsgänge wird jeweils die Schaltung zur Messung gemäß den Schaltplänen in Abb. 2 aufgebaut. Der Funktionsgenerator wird auf die Erzeugung einer sinusförmigen Wechselspannung eingestellt. Die Multimeter sind im Messbereich 4V Wechselspannung. zur Aufnahme des Frequenzgangs wird die Frequenz der Spannung zunächst auf 20 Hz gestellt und schrittweise erhöht bis 20kHz erreicht sind. Da die Messwerte später logarithmisch aufgetragen werden sollen werden für größere Frequenzen auch größere Schritte gemacht. Im Bereich der erwarteten Eckfrequenzen werden allerdings zusätzliche Messwerte für aufgenommen. Jeder Messwert besteht dabei aus der Frequenz f , der am Multimeter gemessenen Eingangsspannung U_0 und der Ausgangsspannung am Widerstand U . Es wird angenommen, dass der Fehler der Frequenz durch die letzte angezeigte Stelle bestimmt ist, die keine Schwankungen zeigt. Dadurch ergab sich, dass f auf drei Signifikante Stellen genau ist. Es gilt also ungefähr $\frac{\Delta f}{f} \approx 0,01$. Die Amplitude der Wechselspannung wurde während den Messungen nicht geändert.

3 Auswertung

3.1 Messung der Auf- und Entladekurve eines Kondensators

Zur Bestimmung der Kapazität aus der Zeitkonstante der Entladung werden die gemessenen Spannungen auf den größten gemessenen Wert U_{max} normiert und in Abbildung 3 über die Zeit aufgetragen. Der Fehler dieser Darstellung wird über die Fehlerfortpflanzung bestimmt. Dann wird eine numerische lineare Regression durchgeführt, welche allerdings nur die Fehler der Spannungswerte berücksichtigt, die der Zeit werden vernachlässigt. Diese liefert als Steigung τ :

$$\tau = \frac{d \ln \frac{U(t)}{U_0}}{dt} = (-0,666 \pm 0,014) \frac{1}{ms} = (-666 \pm 14) \frac{1}{s}$$

Dieser Wert kann zusammen in Gleichung 9 eingesetzt werden um die Kapazität zu erhalten. Den Fehler erhält man über die Fehlerfortpflanzung. Dabei ist $R = (18 \pm 0,9)k\Omega$

$$C = -\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\tau}$$
$$\Rightarrow \Delta C = C \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \tau}{\tau}\right)^2}$$

Einsetzen der Werte liefert:

$$C = (8,3 \pm 0,5) \cdot 10^{-8} F = (0,083 \pm 0,005) \mu F \quad (23)$$

3.2 Messung des Frequenzganges eines Hoch-, Tief- und Bandpasses

Zur qualitativen Auswertung der Frequenzgänge werden die Verhältnisse von Ausgangs- zu Eingangsspannung $\frac{U}{U_0}$ logarithmisch in Dezibel über den Logarithmus zur Basis zwei der Frequenz aufgetragen. Die Fehler werden über die Fehlerfortpflanzung bestimmt. Die Darstellung in Dezibel ist dabei definiert über:

$$20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U}{U_0} \right) = \log_{10} \left(\frac{U}{U_0} \right) \text{ dB}$$

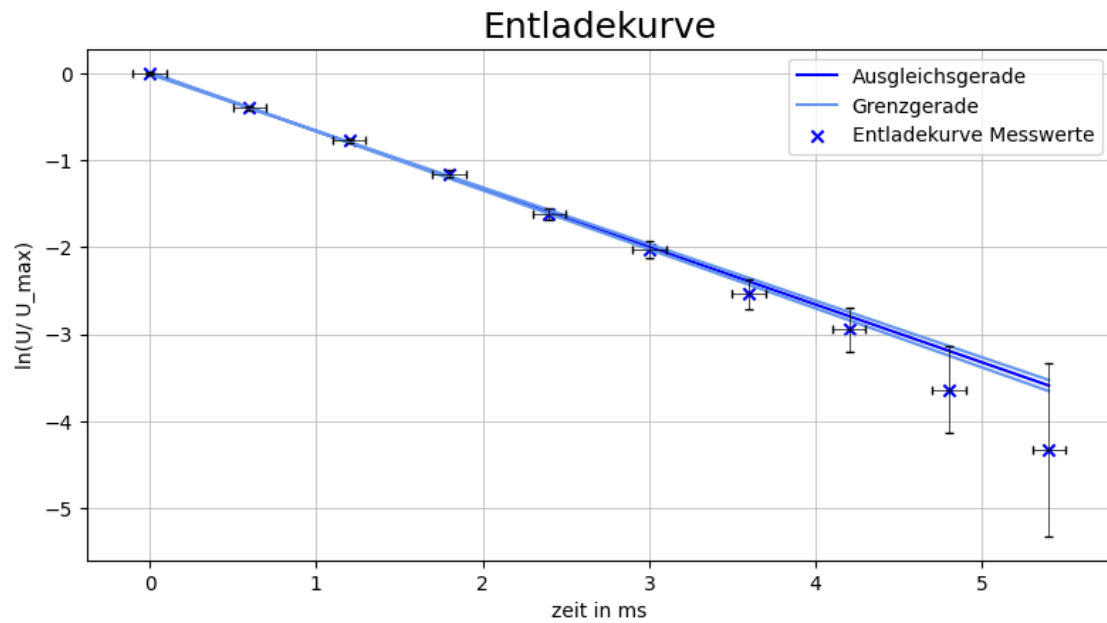


Abbildung 3: logarithmische Darstellung der Entladekurve mit Ausgleichsgerade

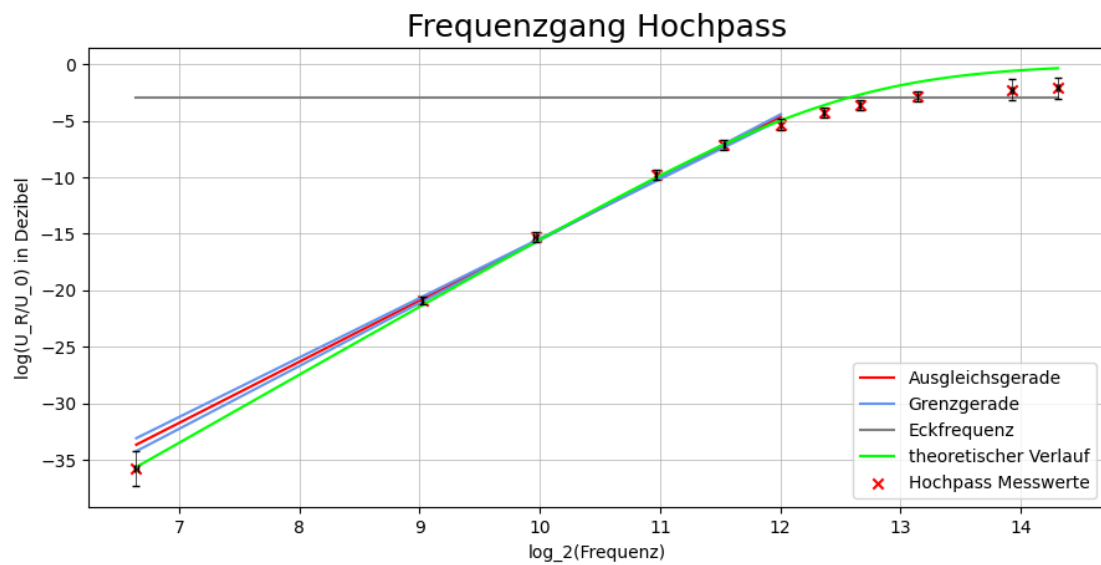


Abbildung 4: Frequenzgang des RC-Hochpasses

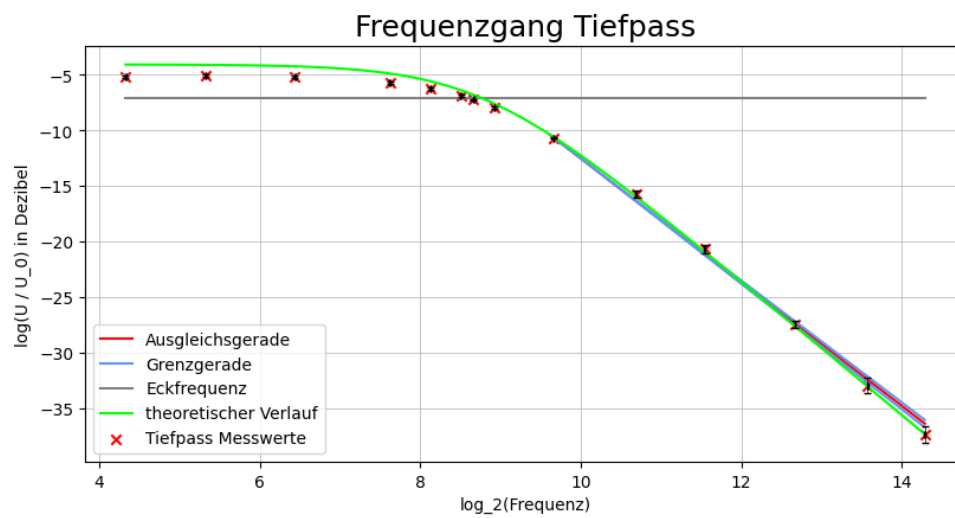


Abbildung 5: Frequenzgang des RL-Tiefpasses

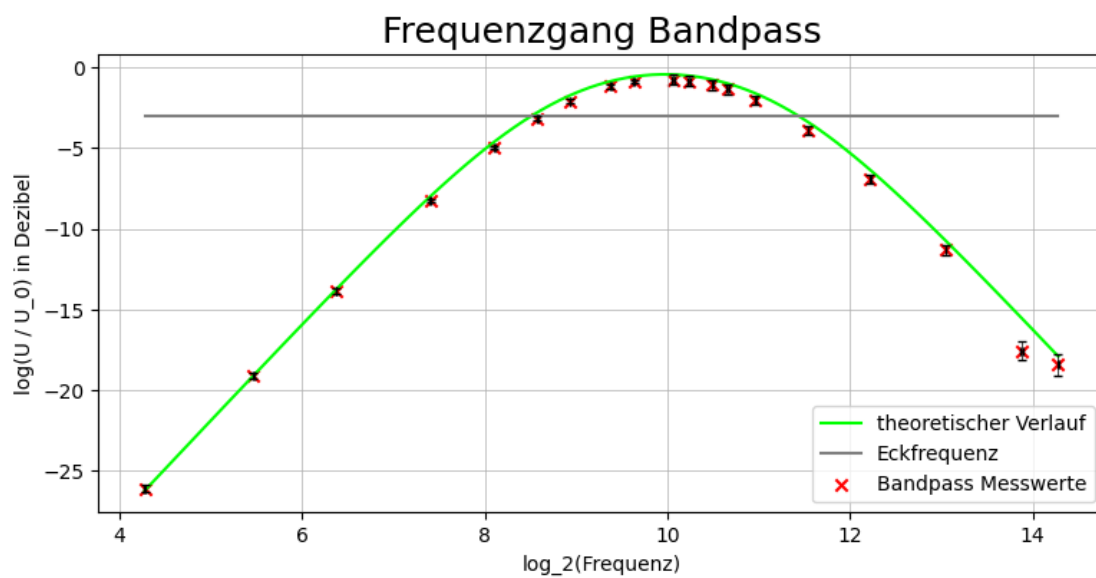


Abbildung 6: Frequenzgang des RCL-bandpass

Die Flankensteilheit des Frequenzganges ist definiert als Steigung eben dieser doppelt logarithmischen Auftragung. Diese wird beim Frequenzgang des Hoch- und Tiefpasses mit einer linearen Regression ermittelt. Dabei wird die Regression nur für jene Punkte durchgeführt, die annähernd lineares Verhalten zeigen. Da die Erhöhung des Logarithmus zur Basis zwei der Frequenz um 1 einer Oktave entspricht ist die Einheit der so ermittelten Flankensteilheit Dezibel/Oktave.

Um die Eckfrequenzen zu bestimmen werden die Frequenzen gesucht, deren Spannungsverhältnis oberhalb und unterhalb des Wertes an der Eckfrequenz liegen. Es ist davon auszugehen, dass die Eckfrequenz zwischen diesen beiden Messpunkten liegt. Der geschätzte Wert für die Eckfrequenz ist dann die mittlere Frequenz zwischen diesen Frequenzen und der Fehler der halbe Abstand. Außerdem werden die theoretisch zu erwartenden Frequenzgänge aufgetragen, die sich mit den entsprechenden Werten für L, C und R jeweils aus Gleichung 12, 16, 20 ergeben.

3.2.1 R-C-Hochpass

Nach Gleichung 13 beträgt die Eckfrequenz eines R-C-Hochpasses mit $R = 8\Omega$ und $C = 3,3\mu F$:

$$f_E = 1/(2\pi RC) = 2947 \text{ Hz} \quad (24)$$

Die Fehlertoleranz der Kondensator-Kapazität war nicht angegeben. Daher wählen wir den relativen Fehler δC als 10 %. Als theoretischen Wert für die Exkfrequenz $f_{E,T}$ ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \Delta f_{E,T} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + (\delta C)^2} \cdot f_{E,T} \\ &= 11\% \cdot 2947 \text{ Hz} = 320 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (25)$$

$$f_{E,T} = (6000 \pm 700) \text{ Hz} \quad (26)$$

An der Eckfrequenz ist dabei nach Gleichung 14 $\frac{U}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Betrachtung von Abbildung 4 lässt darauf schließen, dass drei ausgemessene Frequenzen mit der Eckfrequenz verträglich sind. Als experimentelle Eckfrequenz wird $f_{E,Ex} = (9000 \pm 3000) \text{ Hz}$ verwendet, da der Messwert mit $f = 9020 \text{ Hz}$ fast exakt getroffen wird und der nächstliegende Messwert bei $f = 6400 \text{ Hz}$ aufgenommen wurde. Die lineare Regression ergab eine Flankensteilheit von $5,4 \pm 0,2$ Dezibel/Oktave.

3.2.2 R-L-Tiefpass

Nach Gleichung 17 beträgt die Eckfrequenz eines R-L-Tiefpasses mit $L = 4,7 \text{ mH}$ und $R_L = 4,8\Omega$ und $R = 8\Omega$.

$$f_{E,T} = (R + R_L)/(2\pi L) = 433 \text{ Hz} \quad (27)$$

Die Fehlertoleranz der Widerstände, sowie der Induktivität war nicht angegeben. Daher wählen wir $\delta R = \delta L = \delta R_L$ als 5 %.

$$\begin{aligned} \delta(R + R_L) &= \frac{\delta R \cdot R + \delta R_L \cdot R}{R + R_L} \\ &= 5\% \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Delta f_{E,T} &= \sqrt{(\delta(R + R_L))^2 + (\delta C)^2} \cdot f_E \\ &= 7\% \cdot 433 = 30 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (29)$$

Die theoretisch ermittelte Eckfrequenz beträgt also

$$f_{E,T} = (430 \pm 30) \text{ Hz} \quad (30)$$

Nach Gleichung 18 beträgt das Spannungsverhältnis an der Eckfrequenz mit den Werten $R = 8\Omega$ und $R_L = 4,8\Omega$:

$$\frac{U}{U_0}(\omega_E) = \frac{1}{\sqrt{2} \left(1 + \frac{R_L}{R}\right)} \approx 0,44$$

Betrachtung des Frequenzgangs in Abbildung 5 liefert, dass die Eckfrequenz zwischen den Frequenzen 364Hz und 406Hz liegt. Die experimentelle Eckfrequenz ist schätzungsweise der Mittelwert der beiden Frequenzen:

$$f_{E,Ex} = (385 \pm 42) \text{ Hz}$$

Die Flankensteilheit ergab sich durch lineare Regression als $(5,57 \pm 0,08)$ Dezibel/Oktave.

3.2.3 Bandpass

Nach Gleichung 22 betragen die Eckfrequenzen eines Bandpasses mit $L = 0,5mH$ und $R = 8\Omega$ sowie $C = 50\mu F$. Die Näherung $R_L \ll R$ kann wegen $0,4 \ll 8$ benutzt werden. Fehler der Werte von Spule und Kondensator waren nicht angegeben und werden auf 10% geschätzt. Für die theoretische Eckfrequenz folgt mit Anwendung der Fehlerfortpflanzung:

$$f_{E,T} = \frac{1}{2\pi} \left(\pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \right) \quad (31)$$

$$f_{E1,T} = (350 \pm 100) \text{ Hz} \quad f_{E2,T} = (2900 \pm 400) \text{ Hz}$$

wobei an diesem Punkt wegen des relativ kleinen Spuleninnenwiderstands $\frac{U}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt. Betrachtung von Abbildung 6 liefert, dass die erste Eckfrequenz zwischen 382Hz und 490Hz liegt und die zweite zwischen 2000Hz und 2980Hz. Als Eckfrequenz wird der Mittelwert und als Fehler der halbe Abstand zwischen diesen Frequenzen benutzt.

$$f_{E1,Ex} = (400 \pm 100) \text{ Hz} \quad f_{E2,Ex} = (2500 \pm 500) \text{ Hz} \quad (32)$$

4 Fazit

Die Aufgenommene Entladekurve in Abbildung 7 zeigt qualitativ das erwartete Verhalten. Nur bei den kleineren Spannungen gibt es eine Systematische Abweichung der Messwerte nach unten. Dies ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass am Oszilloskop die Spannungen mit einem konstanten Offset abgelesen wurden. Die gemessene Kapazität von $(0,083 \pm 0,005)\mu F$ ist allerdings nur mit der Nennkapazität des Kondensators $0,1\mu F$ verträglich, wenn davon Ausgegangen wird, dass der Nennwert einen Fehler von 10% hat. Gründe hierfür könnten in den systematischen Abweichungen liegen. Vor allem der Innenwiderstand des Funktionsgenerators wurde nicht betrachtet und ist nicht bekannt, auch wenn dieser wahrscheinlich klein im Vergleich zum $18k\Omega$ Widerstand ist. Außerdem könnte ein systematischer Fehler der Zeitwerte dadurch entstehen, dass die Zeitskala des Oszilloskops nicht exakt auf 1ms/Division gestellt wurde.

	Eckfrequenz theoretisch	Eckfrequenz experimentell	Flankensteilheit
Hochpass	$6000 \pm 700 \text{ Hz}$	$9000 \pm 3000 \text{ Hz}$	$(5,4 \pm 0,2) \frac{dB}{\text{Oktave}}$
Tiefpass	$430 \pm 30 \text{ Hz}$	$385 \pm 42 \text{ Hz}$	$(5,57 \pm 0,08) \frac{dB}{\text{Oktave}}$
Bandpass	$350 \pm 100 \text{ Hz}$ $2900 \pm 400 \text{ Hz}$	$436 \pm 108 \text{ Hz}$ $2500 \pm 500 \text{ Hz}$	

Tabelle 1: alle ermittelten Werte der Frequenzgänge

Grundsätzlich stimmen alle ermittelten Eckfrequenzen formal mit den theoretisch berechneten Werten überein. Nur beim Tiefpass ist anzumerken, dass aufgrund des flachen Frequenzgangs (vgl. Abb. 4) bei der Eckfrequenz der Fehler so groß ist, dass der experimentelle Wert kaum aussagekräftig ist. Auch sind die theoretischen Verläufe zumindest qualitativ mit den gemessenen Werten verträglich, auch wenn die Abweichungen wesentlich größer als die berechneten Fehler sind. Daher muss es noch einen systematischen Fehler geben. Am Naheliegensten ist, dass der Innenwiderstand des Funktionsgenerators die Kurve verfälscht. Dies wird dadurch gestützt, dass bei den Messreihen sehr starke Schwankungen der Spannung U_0 am Funktionsgenerator beobachtet wurden, was auf einen hohen Innenwiderstand hindeutet.

Literatur

1: Skript zum Grundpraktikum 2 der FU Berlin

5 Anhang

5.1 Tabellen

Tabelle 2: Messwerte für die Entladekurve

t in ms	U/U_{max}	$\ln U/U_{max}$
0 ± 0.1	1 ± 0.013	0 ± 0.013
0.6 ± 0.1	0.671 ± 0.013	-0.399 ± 0.02
1.2 ± 0.1	0.461 ± 0.013	-0.775 ± 0.029
1.8 ± 0.1	0.316 ± 0.013	-1.153 ± 0.042
2.4 ± 0.1	0.197 ± 0.013	-1.623 ± 0.067
3 ± 0.1	0.132 ± 0.013	-2.03 ± 0.1
3.6 ± 0.1	0.079 ± 0.013	-2.54 ± 0.17
4.2 ± 0.1	0.053 ± 0.013	-2.94 ± 0.25
4.8 ± 0.1	0.026 ± 0.013	-3.64 ± 0.5
5.4 ± 0.1	0.013 ± 0.013	-4.3 ± 1

Tabelle 3: Messwerte der Bandpass-Schaltung

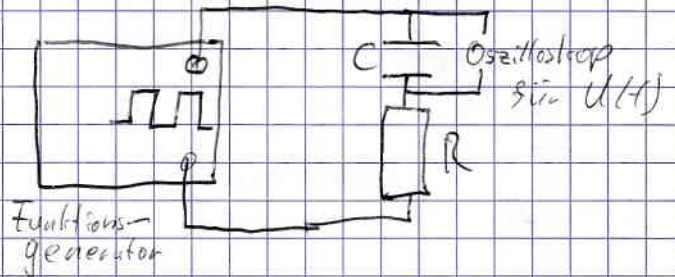
U_0 in V	U_R in V	f in Hz	U_R/U_0	$20 \cdot \log_2(f)$	$20 \cdot \log_{10}(U_R/U_0)$
5.481 ± 0.067	0.2714 ± 0.0054	19.4 ± 0.1	0.0495 ± 0.0012	4.278 ± 0.0074	-26.1 ± 0.2
4.534 ± 0.063	0.5031 ± 0.0065	44.3 ± 0.1	0.111 ± 0.0021	5.4692 ± 0.0033	-19.1 ± 0.16
3.319 ± 0.057	0.6701 ± 0.0074	83.2 ± 0.1	0.2019 ± 0.0041	6.3785 ± 0.0017	-13.9 ± 0.18
2.003 ± 0.014	0.7739 ± 0.0079	170 ± 1	0.3864 ± 0.0048	7.4094 ± 0.0085	-8.26 ± 0.11
1.422 ± 0.011	0.8034 ± 0.008	276 ± 1	0.5649 ± 0.0072	8.1085 ± 0.0052	-4.96 ± 0.11
1.1673 ± 0.0098	0.8129 ± 0.0081	382 ± 1	0.6964 ± 0.0091	8.5774 ± 0.0038	-3.14 ± 0.11
1.0376 ± 0.0092	0.8172 ± 0.0081	490 ± 1	0.788 ± 0.01	8.9366 ± 0.0029	-2.07 ± 0.12
0.9395 ± 0.0087	0.8206 ± 0.0081	666 ± 1	0.873 ± 0.012	9.3794 ± 0.0022	-1.18 ± 0.12
0.9092 ± 0.0085	0.8218 ± 0.0081	794 ± 1	0.904 ± 0.012	9.633 ± 0.0018	-0.88 ± 0.12
0.897 ± 0.022	0.823 ± 0.02	1070 ± 10	0.918 ± 0.032	10.063 ± 0.013	-0.75 ± 0.3
0.906 ± 0.022	0.823 ± 0.02	1210 ± 10	0.908 ± 0.032	10.241 ± 0.012	-0.84 ± 0.3
0.932 ± 0.023	0.823 ± 0.02	1440 ± 10	0.883 ± 0.031	10.492 ± 0.01	-1.08 ± 0.3
0.961 ± 0.023	0.822 ± 0.02	1620 ± 10	0.856 ± 0.03	10.6618 ± 0.0089	-1.35 ± 0.3
1.035 ± 0.025	0.82 ± 0.02	2000 ± 10	0.793 ± 0.027	10.9658 ± 0.0072	-2.02 ± 0.3
1.277 ± 0.03	0.815 ± 0.02	2980 ± 10	0.638 ± 0.022	11.5411 ± 0.0048	-3.9 ± 0.3
1.767 ± 0.039	0.797 ± 0.02	4780 ± 10	0.451 ± 0.015	12.2228 ± 0.003	-6.92 ± 0.29
2.718 ± 0.058	0.738 ± 0.019	8490 ± 10	0.2717 ± 0.009	13.0515 ± 0.0017	-11.32 ± 0.29
3.86 ± 0.24	0.51 ± 0.014	15100 ± 100	0.1324 ± 0.0089	13.8823 ± 0.0096	-17.56 ± 0.58
4.42 ± 0.31	0.529 ± 0.015	19900 ± 100	0.1197 ± 0.0089	14.2805 ± 0.0072	-18.44 ± 0.65

Tabelle 4: Messwerte der Hochpass-Schaltung

U_0 in V	U_R in V	f in Hz	U_R/U_0	$20 \cdot \log_2(f)$	$20 \cdot \log_{10}(U_R/U_0)$
1.3736 ± 0.0041	0.0224 ± 0.004	100 ± 1	0.0163 ± 0.0029	6.644 ± 0.014	-35.8 ± 1.6
1.1656 ± 0.0045	0.1056 ± 0.004	520 ± 1	0.0906 ± 0.0035	9.0224 ± 0.0028	-20.86 ± 0.33
0.88 ± 0.022	0.1517 ± 0.007	1000 ± 10	0.1723 ± 0.009	9.966 ± 0.014	-15.27 ± 0.46
0.557 ± 0.015	0.1806 ± 0.0076	2000 ± 10	0.324 ± 0.016	10.9658 ± 0.0072	-9.79 ± 0.44
0.428 ± 0.013	0.1881 ± 0.0078	2960 ± 10	0.44 ± 0.022	11.5314 ± 0.0049	-7.14 ± 0.44
0.354 ± 0.011	0.1914 ± 0.0078	4110 ± 10	0.541 ± 0.028	12.0049 ± 0.0035	-5.33 ± 0.45
0.315 ± 0.01	0.1929 ± 0.0079	5270 ± 10	0.612 ± 0.032	12.3636 ± 0.0027	-4.27 ± 0.45
0.2931 ± 0.0099	0.1937 ± 0.0079	6480 ± 10	0.661 ± 0.035	12.6618 ± 0.0022	-3.6 ± 0.46
0.27 ± 0.0094	0.1942 ± 0.0079	9020 ± 10	0.719 ± 0.038	13.1389 ± 0.0016	-2.86 ± 0.46
0.252 ± 0.019	0.194 ± 0.016	15600 ± 100	0.771 ± 0.085	13.9293 ± 0.0092	-2.26 ± 0.96
0.249 ± 0.019	0.195 ± 0.016	20300 ± 100	0.783 ± 0.087	14.3092 ± 0.0071	-2.13 ± 0.96

1. Auf- und Entladekurve eines RC-Kreises

An die RC-Reihenschaltung wird eine Rechteckspannung mit Amplitude U_0 und Frequenz f angelegt.



Der zeitliche Spannungsverlauf $U(t)$ wird mit einem Oszilloskop gemessen. Es wird Triggerspannung, Offset und Skalierungen des Oszilloskops so eingestellt, dass die Entladekurve den ganzen Bildschirm bedeckt.

Dann ~~wird $U(t)$ abgelesen~~ werden 10 Werte für von $U(t)$ abgelesen.

~~Material~~ Der Fehler für U und t ist dann der Ableserfehler. Dabei ~~wird die Span~~ ~~wird nur die~~ relative Spannung abgelesen, da ~~sie~~ diese für die Auswertung logarithmiert ~~ist~~ wird.

~~Material~~
- Funktionsgenerator
Vollcraft 8202

- Oszilloskop
HM303-6

- Widerstand $18k\Omega \pm 5\%$

- Kondensator $0,1\mu F$

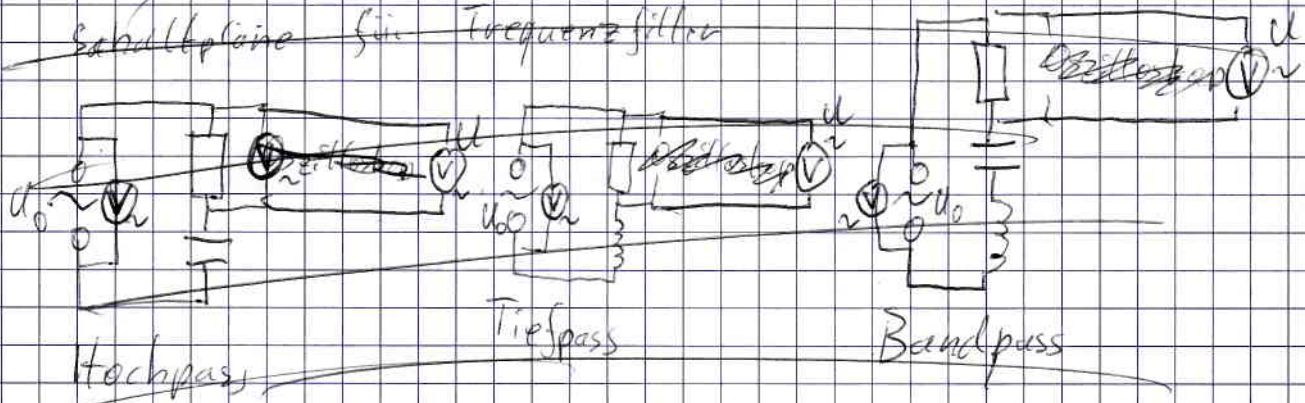
Bei der Messung
~~wurde~~ wurde $f = 61474 \text{ Hz}$
benutzt

sowie 1 ms/division
und ca 20 mV/division
am Oszilloskop

Messwerte	
t in ms	U in divisions
0	7,6 7,6
0,6	5,1
1,2	3,5
1,8	2,4
2,4	2,5
3	1
3,6	0,6
3,6 4,2	0,4
4,8	0,2
5,2 4	0,1
Ableserfehler $\pm 0,1 \text{ ms}$ Ableserfehler $0,1 \text{ div}$	

Aufgabe 2: Frequenzgang von Hoch-, Tief- und Bandpass

Schaltpläne für Frequenzfilter



~~theoretisch~~ An die Frequenzfilter wird eine harmonische Wechselspannung mit ~~effektiver~~ Amplitude U_0 und Frequenz f angelegt.

~~theoretisch erwartete Frequenzgänge:~~

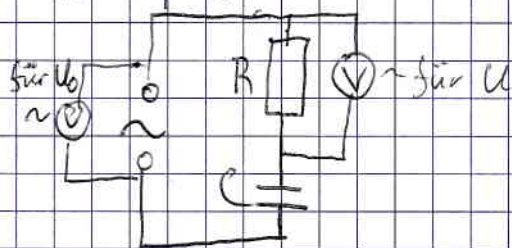
~~Hochpass:~~

~~U~~

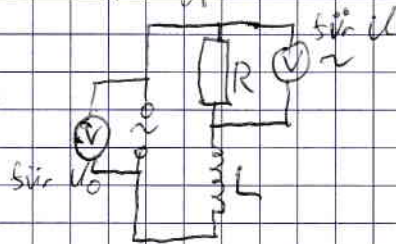
Aufgabe 2: Frequenzgänge von Hoch-, Tief- und Bandpass

Schaltpläne für Frequenzfilter

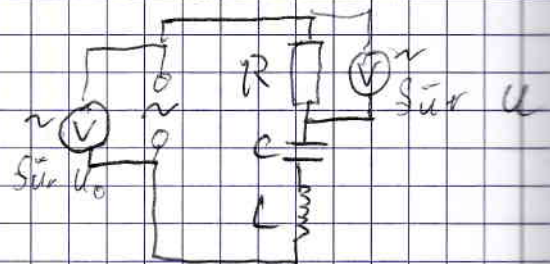
Hochpass



Tiefpass



Bandpass



An die Frequenzfilter wird eine harmonische Wechselspannung mit effektive Spannung U_0 und Frequenz f angelegt.

Gemessen wird die Effektivspannung U am Widerstand.

theoretische Frequenzgänge:

Hochpass $\left(\frac{U}{U_0}\right)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}}$ Tiefpass Eckfrequenz $\omega_E = \frac{1}{RC}$

Tiefpass $\left(\frac{U}{U_0}\right)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}$ Eckfrequenz $\omega_E = \frac{R}{L}$

Bandpass $\left(\frac{U}{U_0}\right)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}$ Eckfrequenz $\omega_E =$

~~Vorbereitung~~

Materialien

- Funktionsgenerator - Voltcraft 8202
 - 2 Multimeter VC 920 für Effektivspannung
- Fehler bei 4U Messbereich:

45 Hz - 1 kHz: $\pm 0,5\% + 40 \text{ digits}$
1 kHz - 10 kHz: $\pm 2\% + 40 \text{ digits}$
10 kHz - 20 kHz: $\pm 16\% \pm 40 \text{ digits}$

Hochpass

- Kondensator $3,3 \mu F$
- Widerstand 8Ω
- Eckfrequenz $f_E \approx 6 \text{ kHz}$

~~Durchführung erhöhe f immer um Faktor 2~~

Beginne mit $f = 20 \text{ Hz}$ und erhöhe zunächst immer um den Faktor 2, im Bereich der Eckfrequenz in

kleineren Schritten. Der Amplitudenregler am dem Funktionsgenerator wird nicht verändert, aufgrund des hohen Innenwiderstands ändert sich U_0 trotzdem sehr stark.

Messwerte

Hochpass

 f in Hz U_0 in V U in V~~Messbereich~~

20,0	1,3858	0,0010
100	1,2736	0,0224
520	1,1656	0,1056
$1,00 \cdot 10^3$	0,8803	0,1517
$2,00 \cdot 10^3$	0,5572	0,1806
$2,96 \cdot 10^3$	0,4279	0,1881
$4,11 \cdot 10^3$	0,3535	0,1914
$5,27 \cdot 10^3$	0,3154	0,1929
$6,48 \cdot 10^3$	0,2937	0,1937
$9,02 \cdot 10^3$	0,2700	0,1942
$1,56 \cdot 10^4$	0,2520	0,1942
$2,03 \cdot 10^4$	0,2490	0,1949

Tiefpass:

- Widerstand 8Ω - Spule $4,7 \text{ mH}$, $4,8 \Omega$ $\Rightarrow 12,8 \Omega = R$ Spannung aber nur über 8Ω gemessenerwartete Eckfrequenz: 406 Hz

Messwerte:

f in Hz	U_0 in V	U in V
20,0	1,7462	0,9653
40,1	1,7500	0,9726
86,8	1,7718	0,9749
197	1,8698	0,9717
280	1,9869	0,9687
364	2,1336	0,9638
406	2,2162	0,9602
848	2,3824	0,9536
808	3,1284	0,9139
$1,65 \cdot 10^3$	4,837	0,7873
$2,99 \cdot 10^3$	6,327	0,5834
$6,54 \cdot 10^3$	7,444	0,3149
$1,22 \cdot 10^4$	7,754	0,1738
$2,00 \cdot 10^4$	7,819	0,1058

Bandpass:

Spalte 0,5 mH Innenwiderstand nicht angegeben gemessen 0,4 Ω

— Kondensator 50 μF

— Widerstand 8 Ω

Messwerte:

f in Hz	U_0 in V	U_{in} V
19,4	5,481	0,2714
44,3	4,534	0,5031
88,2	3,3190	0,6707
170	2,0029	0,7739
276	1,4222	0,8034
382	1,1673	0,8129
490	1,0376	0,8172
666	0,9395	0,8206
794	0,9092	0,8213
$1,07 \cdot 10^3$	0,8966	0,8228
$1,21 \cdot 10^3$	0,9059	0,8227
$1,44 \cdot 10^3$	0,9318	0,8226
$1,62 \cdot 10^3$	0,9607	0,8221
$2,00 \cdot 10^3$	1,0353	0,8205
$2,28 \cdot 10^3$	1,2772	0,8148
$4,78 \cdot 10^3$	1,7671	0,7970
$8,49 \cdot 10^3$	2,7176	0,7384
$15,7 \cdot 10^3$	3,8554	0,6105
$1,99 \cdot 10^4$	4,420	0,5291

BR

Tabelle 5: Messwerte der Tiefpass-Schaltung

U_0 in V	U_R in V	f in Hz	U_R/U_0	$20 \cdot \log_2(f)$	$20 \cdot \log_{10}(U_R/U_0)$
1.3736 ± 0.0041	0.0224 ± 0.004	100 ± 1	0.0163 ± 0.0029	6.644 ± 0.014	-35.8 ± 1.6
1.1656 ± 0.0045	0.1056 ± 0.004	520 ± 1	0.0906 ± 0.0035	9.0224 ± 0.0028	-20.86 ± 0.33
0.88 ± 0.022	0.1517 ± 0.007	1000 ± 10	0.1723 ± 0.009	9.966 ± 0.014	-15.27 ± 0.46
0.557 ± 0.015	0.1806 ± 0.0076	2000 ± 10	0.324 ± 0.016	10.9658 ± 0.0072	-9.79 ± 0.44
0.428 ± 0.013	0.1881 ± 0.0078	2960 ± 10	0.44 ± 0.022	11.5314 ± 0.0049	-7.14 ± 0.44
0.354 ± 0.011	0.1914 ± 0.0078	4110 ± 10	0.541 ± 0.028	12.0049 ± 0.0035	-5.33 ± 0.45
0.315 ± 0.01	0.1929 ± 0.0079	5270 ± 10	0.612 ± 0.032	12.3636 ± 0.0027	-4.27 ± 0.45
0.2931 ± 0.0099	0.1937 ± 0.0079	6480 ± 10	0.661 ± 0.035	12.6618 ± 0.0022	-3.6 ± 0.46
0.27 ± 0.0094	0.1942 ± 0.0079	9020 ± 10	0.719 ± 0.038	13.1389 ± 0.0016	-2.86 ± 0.46
0.252 ± 0.019	0.194 ± 0.016	15600 ± 100	0.771 ± 0.085	13.9293 ± 0.0092	-2.26 ± 0.96
0.249 ± 0.019	0.195 ± 0.016	20300 ± 100	0.783 ± 0.087	14.3092 ± 0.0071	-2.13 ± 0.96