Trabajo práctico 2 - Nicolás Baranowski

Ejercicio 1 - Validación Analítica

Objetivo. Encontrar el valor de un **put americano perpetuo**.

Ecuación de Black–Scholes (PDE)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\,\frac{\partial V}{\partial S} - rV \;=\; 0.$$

En el caso perpetuo, esta ecuación se transforma en una ODE ya que no depende del tiempo.

$$\frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2\,V''(S) + rS\,V'(S) - rV(S) = 0.$$

La solución propuesta es la siguiente función:

$$V_{L^*}(S) = \begin{cases} K - S, & 0 < S \le L^*, \\ \dfrac{K\sigma^2}{2r+\sigma^2}\left(\dfrac{2r+\sigma^2}{2r}\,\dfrac{S}{K}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}, & S \ge L^*, \end{cases} \qquad L^* = \frac{2r}{2r+\sigma^2}\,K.$$

Ahora, queremos comprobar que es realmente una solución al problema. Comenzamos buscando las derivadas $V'(S)$ y $V''(S)$ en la región de **continuación**

Definiciones para simplificar notación:

$$\alpha := \frac{2r}{\sigma^2}, \qquad A := \frac{K\sigma^2}{2r+\sigma^2}, \qquad c := \frac{2r+\sigma^2}{2rK}.$$

Entonces

$$V(S) = A\,(cS)^{-\alpha} = A\,c^{-\alpha}\,S^{-\alpha}.$$

Primera derivada

Regla de la potencia:

$$\frac{d}{dS}\,S^{-\alpha} = -\alpha\,S^{-\alpha-1}.$$

Aplicando constantes:

$$\boxed{V'(S) = -\alpha\,A\,c^{-\alpha}\,S^{-\alpha-1}}.$$

Equivalente: $V'(S) = -\alpha\,\dfrac{V(S)}{S}$.

Segunda derivada

Partiendo de $V'(S) = -\alpha\, V(S)\, S^{-1}$:

$$V''(S) = \frac{d}{dS}\big[-\alpha\, V(S)\, S^{-1}\big]$$
$$= -\alpha\Big(V'(S)\, S^{-1} \ -\ V(S)\, S^{-2}\Big).$$

Sustituyendo $V'(S) = -\alpha\, V(S)\, S^{-1}$:

$$V''(S) = -\alpha\Big[(-\alpha\, V(S)\, S^{-1})\, S^{-1} - V(S)\, S^{-2}\Big]$$
$$= -\alpha\Big[-\alpha\, V(S)\, S^{-2} - V(S)\, S^{-2}\Big]$$
$$= \alpha(\alpha+1)\, V(S)\, S^{-2}.$$

$$\boxed{V''(S) = \alpha(\alpha+1)\,\frac{V(S)}{S^2}}, \qquad \alpha = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

Sustituimos en la ODE para comprobar si es solución:

Sustituyo $V'(S)$ y $V''(S)$ en $\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V'' + rSV' - rV$:

$$= \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V'' + rSV' - rV$$
$$= \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Big[\alpha(\alpha+1)Ac^{-\alpha}S^{-\alpha-2}\Big] + rS\Big[-\alpha A c^{-\alpha}S^{-\alpha-1}\Big] - r\Big[Ac^{-\alpha}S^{-\alpha}\Big]$$
$$= Ac^{-\alpha}S^{-\alpha}\Big[\tfrac{1}{2}\sigma^2\,\alpha(\alpha+1) - r\alpha - r\Big].$$

Resolvemos $\alpha = \dfrac{2r}{\sigma^2}$ dentro del corchete y simplificamos:

$$= \tfrac{1}{2}\sigma^2\,\alpha(\alpha+1) - r\alpha - r$$
$$= \tfrac{1}{2}\sigma^2\Big(\tfrac{2r}{\sigma^2}\Big)\Big(\tfrac{2r}{\sigma^2}+1\Big) - r\Big(\tfrac{2r}{\sigma^2}\Big) - r$$
$$= \underbrace{\Big(\tfrac{1}{2}\sigma^2\cdot\tfrac{2r}{\sigma^2}\Big)}_{=r}\Big(\tfrac{2r}{\sigma^2}+1\Big) - \tfrac{2r^2}{\sigma^2} - r$$
$$= r\Big(\tfrac{2r}{\sigma^2}\Big) + r - \tfrac{2r^2}{\sigma^2} - r$$
$$= \cancel{\tfrac{2r^2}{\sigma^2}} + \cancel{r} - \cancel{\tfrac{2r^2}{\sigma^2}} - \cancel{r} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V'' + rSV' - rV = 0}$$

La **función partida** verifica la ecuación de Black–Scholes en la región de continuación. En $S \le L^*$, $V(S) = K - S$ (ejercicio inmediato) y la ODE no aplica.

Por último, comprobamos que las condiciones de frontera se cumplen:

Coincidencia de valor: $V(L^*) = K - L^*$

$$V(S) = \frac{K\sigma^2}{2r+\sigma^2}\left(\frac{2r+\sigma^2}{2r}\,\frac{S}{K}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}, \qquad L^* = \frac{2r}{2r+\sigma^2}K.$$

$$\begin{aligned}
V(L^*) &= \frac{K\sigma^2}{2r+\sigma^2}\left(\frac{2r+\sigma^2}{2r}\,\frac{L^*}{K}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \\
&= \frac{K\sigma^2}{2r+\sigma^2}\left(\frac{2r+\sigma^2}{2r}\,\frac{\frac{2r}{2r+\sigma^2}K}{K}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \\
&= \frac{K\sigma^2}{2r+\sigma^2}\left(\frac{2r+\sigma^2}{2r}\cdot\frac{2r}{2r+\sigma^2}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \\
&= \frac{K\sigma^2}{2r+\sigma^2}\,(1)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \\
&= \frac{K\sigma^2}{2r+\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Comprobación “value matching”:

$$\begin{aligned}
&= K - L^* \\
&= \ K - \frac{2r}{2r+\sigma^2}K \\
&= K\left(\frac{2r+\sigma^2-2r}{2r+\sigma^2}\right) \\
&\boxed{\frac{K\sigma^2}{2r+\sigma^2} = V(L^*)}.
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que $V(L^*) = K - L^*$ se cumple.

Smooth Pasting: $V'(L^*) = -1$

Partiendo de la identidad válida en continuación:

$$V'(S) = -\alpha\,\frac{V(S)}{S}, \qquad \alpha = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

Evaluamos en $S = L^*$ y uso $V(L^*) = K - L^*$:

$$V'(L^*) = -\alpha\,\frac{V(L^*)}{L^*} = -\alpha\,\frac{K-L^*}{L^*}.$$

Escribo $L^* = \dfrac{\alpha}{1+\alpha}K \Rightarrow K - L^* = \dfrac{1}{1+\alpha}K$. Entonces

$$\frac{K-L^*}{L^*} = \frac{\frac{1}{1+\alpha}K}{\frac{\alpha}{1+\alpha}K} = \frac{1}{\alpha}.$$

Sustituyendo:

$$\boxed{V'(L^*) = -\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = -1}.$$

Límite al infinito: $\lim_{S\to\infty} V(S) = 0$

En continuación,

$$V(S) = \frac{K\sigma^2}{2r+\sigma^2}\left(\frac{2r+\sigma^2}{2r}\frac{S}{K}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} = \underbrace{\frac{K\sigma^2}{2r+\sigma^2}\left(\frac{2r+\sigma^2}{2rK}\right)^{-\alpha}}_{C>0} S^{-\alpha},$$

con $\alpha = \dfrac{2r}{\sigma^2} > 0.$

Como C es constante positiva y $S^{-\alpha}$ tiende a 0 cuando cuando $\alpha > 0$,

$$\boxed{\lim_{S\to\infty} V(S) = C \cdot \lim_{S\to\infty} S^{-\alpha} = 0}.$$

Cota inferior: $V(s) \geq (K-S)^+$

Convexidad en continuación $S \geq L^*$:

$$V''(S) = \alpha(\alpha+1)\frac{V(S)}{S^2} > 0 \quad (\alpha = \tfrac{2r}{\sigma^2} > 0,\ V(S) > 0),$$

luego V es **convexa** en $[L^*, \infty)$.

Recta tangente en L^* por value matching y smooth pasting:

$$V(L^*) = K - L^*, \qquad V'(L^*) = -1.$$

La **tangente** en L^* es

$$T(S) = V(L^*) + V'(L^*)(S-L^*) = (K-L^*) - 1\cdot(S-L^*) = K - S.$$

Una función convexa queda **por encima** de su tangente en cualquier punto del dominio de convexidad:

$$V(S) \ \geq \ T(S) = K - S, \qquad \forall\, S \geq L^*.$$

Además, en la región de ejercicio tenemos que si $S \leq L^*$: $V(S) = K - S = (K-S)^+$.

Conclusión:

$$\boxed{V(S) \ \geq \ (K-S)^+ \ \text{ para todo } S > 0}.$$

Ejercicio 2 - Shooting Method

Objetivo

Resolver numéricamente el problema usando el método de shooting, tratándolo como un problema de valor inicial iterativo.

Idea del Método

El **shooting method** convierte el problema de valor de frontera en múltiples problemas de valor inicial:

1. **Adivinar** un valor de L
2. **Disparar**: integrar la ODE desde $S = L$ hasta $S = S_{max}$ con condiciones iniciales:
   - $V(L) = K - L$ (value matching)
   - $V'(L) = -1$ (smooth pasting)
3. **Verificar**: ¿es $V(S_{max}) \approx 0$?
4. **Ajustar**: usar bisección para encontrar el L correcto

Implementación

```
class Shooting:
    def __init__(self, K=100, r=0.05, sigma=0.2):
        self.K = K
        self.r = r
        self.sigma = sigma
        self.L_star_teorico = (2 * self.r / (2 * self.r + self.sigma*›

    def ode_system(self, S, y):
        """Convierte ODE de 2° orden en sistema de 1° orden"""
        V, V_prime = y
        if S <= 1e-10:
            return np.array([V_prime, 0])

        V_double_prime = (self.r * V - self.r * S * V_prime) / (0.5 *
        return np.array([V_prime, V_double_prime])

    def shoot_from_L(self, L, S_max=1000, h=0.1):
        """Integra la ODE desde L hasta S_max"""
        y0 = np.array([self.K - L, -1])  # Condiciones iniciales
        S_vals, y_vals = self.runge_kutta_4(self.ode_system, [L, S_ma›
        return S_vals, y_vals[0], y_vals[1]  # S, V(S), V'(S)

    def boundary_condition_error(self, L):
        """Función objetivo: queremos V(S_max) ≈ 0"""
        S_vals, V_vals, _ = self.shoot_from_L(L)
        return V_vals[-1]  # Error = V en el punto más lejano
```

Proceso de Ejecución

```python
# Crear solver y buscar L óptimo
shooting = Shooting(K=100, r=0.05, sigma=0.2)
L_optimal = shooting.find_optimal_L()

# Validar solución
shooting.validate_solution(L_optimal)
```

Ventajas:

- Convierte problema complejo en múltiples problemas simples
- Muy preciso para ODEs
- Robusto ante diferentes condiciones iniciales

Desventajas:

- Necesita adivinar el valor de L^*
- Puede ser inestable para problemas inestables

Ejercicio 3 - Método de Diferencias Finitas

Objetivo

Resolver el problema discretizando el dominio completo y usando diferencias finitas con penalización.

Idea del Método

En lugar de "disparar", **discretizamos todo el dominio** $[0, S_{max}]$ en una grilla y resolvemos simultáneamente:

1. **Discretizar**: $S_i = i \cdot h$, donde $h = S_{max}/N$
2. **Aproximar derivadas**:
   - $V_i' \approx \frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{2h}$
   - $V_i'' \approx \frac{V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}}{h^2}$
3. **Penalizar restricciones**: Agregar $\lambda \max\{0, K - S - V\}$ para manejar $V \geq K - S$
4. **Resolver sistema**: $AV = b$ con relajación iterativa

Implementación con Relajación

```python
class FiniteDifferences:
    def solve(self, S_max=120, N=2000, epsilon=1e-6, tol=1e-6, max_ite
        dx = S_max / N
        grid = np.linspace(0, S_max, N+1)
        u = np.maximum(self.K - grid, 0.0)  # Inicializar con payoff

        for k in range(max_iter):
            u_prev = u.copy()

            # Armar sistema lineal Mu = f
            M = np.zeros((N+1, N+1))
            f = np.zeros(N+1)

            # Condiciones de borde
            M[0, 0] = 1; f[0] = self.K      # V(0) = K
            M[N, N] = 1; f[N] = 0           # V(S_max) = 0

            # Nodos internos
            for j in range(1, N):
                S_j = grid[j]
                if self.K - S_j > u[j] + epsilon:
                    # Región de ejercicio: V = K - S
                    M[j, j] = 1
                    f[j] = self.K - S_j
                else:
                    # Región de continuación: aplicar ODE discretizad
                    sigma2_S2 = self.sigma**2 * S_j**2
                    r_S = self.r * S_j

                    M[j, j-1] = 0.5 * sigma2_S2 / dx**2 - 0.5 * r_S /
                    M[j, j] = -(sigma2_S2 / dx**2 + self.r)
                    M[j, j+1] = 0.5 * sigma2_S2 / dx**2 + 0.5 * r_S /
                    f[j] = 0

            # RELAJACIÓN
            u_new = np.linalg.solve(M, f)
            u = (1 - rho) * u_prev + rho * u_new  # u = θu_new + (1-θ

            if np.linalg.norm(u - u_prev, np.inf) < tol:
                break
```

Proceso de Ejecución

```python
# Crear solver y resolver con relajación
fd = FiniteDifferences(K=100, r=0.05, sigma=0.2)
results = fd.solve(S_max=300, N=2000, rho=0.1)  # rho = parámetro de
```

Importancia de la Relajación: Sin relajación ($\rho = 1$) el método puede oscilar y no converger. La relajación $V_{new} = \rho \cdot V_{target} + (1 - \rho) \cdot V_{old}$ suaviza los cambios entre iteraciones, garantizando convergencia estable.

Ventajas:

- No necesita adivinar L^* (emerge naturalmente)
- Maneja restricciones de desigualdad directamente
- Solución global simultánea

Desventajas:

- Requiere grilla fina para precisión
- Más intensivo computacionalmente
- Puede no converger si los parámetros no están bien ajustados

---

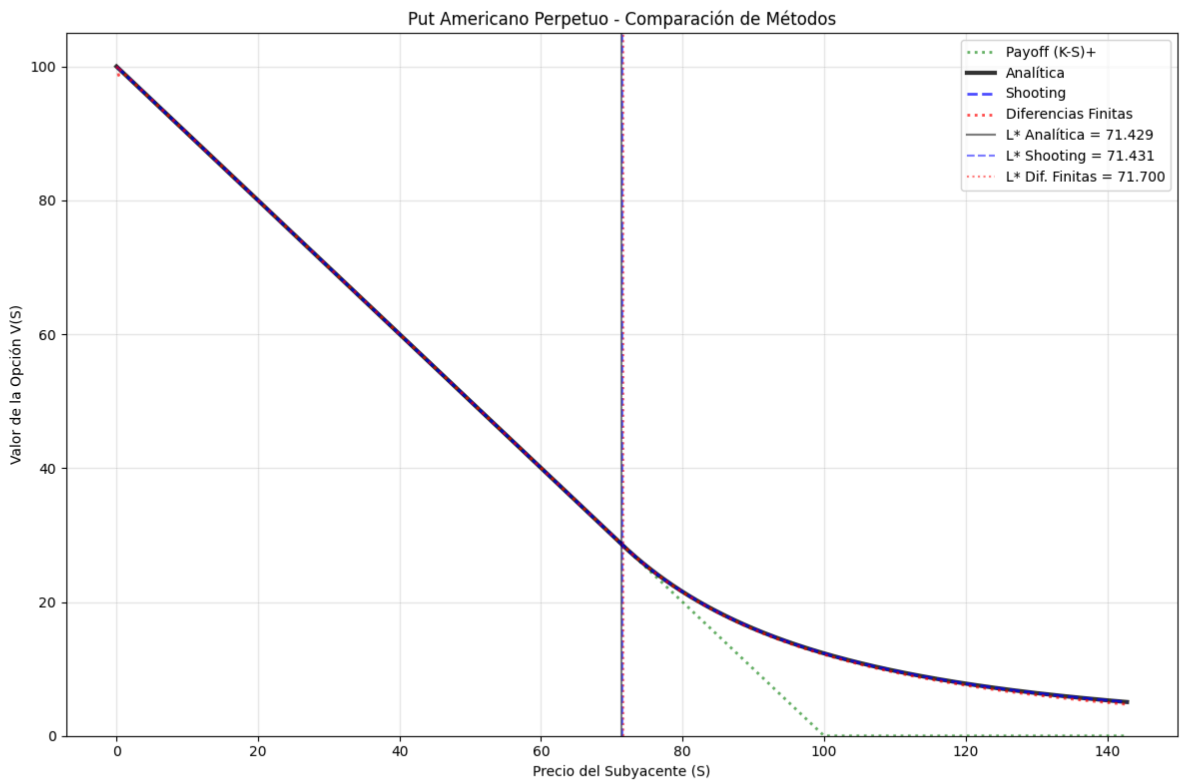
Comparación y Análisis

Resultados Obtenidos

Para los parámetros $K = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$:

Método	L*	Error (%)
Analítico	71.428571	0.000
Shooting	71.430925	0.003
Diferencias Finitas	71.700000	0.380

Análisis Visual



La gráfica muestra:

1. **Región de Ejercicio** ($S \leq L^*$): Todas las soluciones coinciden con $V(S) = K - S$
2. **Región de Continuación** ($S > L^*$):
   - **Analítica** y **Shooting** prácticamente idénticas
   - **Diferencias Finitas** muestra pequeñas diferencias debido a la discretización
3. **Frontera de Ejercicio**: Los tres métodos identifican L^*

Análisis de Precisión

Shooting Method:

- Error relativo: 0.003%
- Excelente precisión debido a integración continua
- Limitado por tolerancia de bisección y paso de RK4

Diferencias Finitas:

- Error relativo: 0.380%
- Precisión limitada por espaciado de grilla ($h = S_{max}/N$)
- Mejora con grillas más finas, pero aumenta costo computacional

Robustez y Sensibilidad

Shooting:

- Sensible a condiciones iniciales problemáticas
- Puede fallar si L^* está fuera del rango de búsqueda
- Excelente para problemas bien condicionados

Diferencias Finitas:

- Más robusto ante diferentes parámetros
- La relajación evita problemas de convergencia
- Maneja naturalmente restricciones complejas

Parámetros

Shooting Method:

```
L_min = 0.1 * K      # Rango de búsqueda inferior
L_max = 0.9 * K      # Rango de búsqueda superior
h = 0.1              # Paso de integración RK4
tol = 1e-6           # Tolerancia de bisección
```

Diferencias Finitas:

```python
N = 2000              # Puntos de grilla (más = mayor precisión)
rho = 0.1             # Relajación (0.1-0.3 recomendado)
epsilon = 1e-6        # Tolerancia para identificar ejercicio
max_iter = 2000       # Iteraciones máximas
```

Recomendaciones de Uso

- **Para máxima precisión**: Usar **Shooting Method**
- **Para robustez y casos complejos**: Usar **Diferencias Finitas con relajación**

Limitaciones

Shooting Method:

- Requiere rango de búsqueda apropiado para L^*
- Puede fallar si ODE es stiff

Diferencias Finitas:

- Precisión limitada por discretización
- Requiere relajación para convergencia
- Mayor costo computacional con grillas finas

Ejecución:

```python
# Comparar todos los métodos
resultados = comparar_metodos(K=100, r=0.05, sigma=0.2)
graficar_comparacion(resultados)
```

El análisis confirma que ambos métodos numéricos convergen correctamente a la solución analítica, con el shooting method ofreciendo mayor precisión y las diferencias finitas mayor robustez.