Trabajo Práctico: Métodos de ODE – Put Americano Perpetuo

Finanzas Computacionales

Contexto teórico

El valor $V(S,t)$ de una opción satisface la PDE de Black–Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Para una opción perpetua, V no depende de t: $\partial V/\partial t = 0$. En la región de continuación (es decir, cuando no se ejerce todavía, con $S > L^*$) se obtiene la siguiente ODE:

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 V''(S) + rSV'(S) - rV(S) = 0. \qquad (*)$$

En $S < L^*$, la opción se ejerce.

Condiciones de frontera

- Coincidencia de valor: $V(L^*) = K - L^*$.
- Smooth Pasting: $V'(L^*) = -1$.
- Límite en infinito: $\lim_{S\to\infty} V(S) = 0$.
- Cota inferior: $V(S) \geq (K-S)^+$.

Ejercicio 1 - Validación Analítica (20pts)

La solución es la siguiente:

$$V_{L^*}(S) := \begin{cases} K - S, & 0 < S \leq L^* = \dfrac{2r}{2r+\sigma^2}K, \\ \dfrac{K\sigma^2}{2r+\sigma^2}\left(\frac{2r+\sigma^2}{2r}\,\frac{S}{K}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}, & S \geq L^* = \dfrac{2r}{2r+\sigma^2}K, \end{cases}$$

Verifique que la solución cumple la ODE (*) en la región de continuación, y se respetan las condiciones de frontera.

Ejercicio 2 – Método de Shooting (35pts)

Queremos resolver (*) imponiendo, $V(L^*) = K - L^*, V'(L^*) = -1$ y $V(S_{max}) \approx 0$ para un S_{max} grande. Como L^* es desconocido, trataremos a L como un parámetro. Vamos a integrar la ODE con las condiciones iniciales [$V(L)$, $V'(L)$]:

- Reformule la ODE como sistema de primer orden.
- Integre desde $S = L$ hasta S_{max} imponiendo $V(L) = K - L, V'(L) = -1$.
- Ajuste L hasta que $V(S_{\max}) \approx 0$.

Parte B – Diferencias Finitas (35pts)

El problema se puede formular de la siguiente manera:

$$\max\{\tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 V'' + rSV' - rV,\ K - S - V\} = 0.$$

Una forma de resolverlo es introducir un término de penalización. La idea es modificar la ecuación de modo que la restricción $V(S) \geq K - S$ quede incorporada como un término adicional:

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 V''(S) + rSV'(S) - rV(S)\ +\ \lambda \max\{0,\ K - S - V(S)\} = 0,$$

donde $\lambda \gg 1$ es un parámetro de penalización.

- Si $V(S) > K - S$, el término de penalización se anula y se recupera la ODE de la región de continuación.
- Si $V(S) < K - S$, el término es positivo y fuerza a la solución a acercarse a la cota $V(S) = K - S$.
- En el límite $\lambda \to \infty$, la solución penalizada converge a la solución exacta.

A continuación:

- Discretice el dominio $[0, S_{\max}]$.
- Imponga $V(0) = K, V(S_{\max}) = 0$.
- Identifique L^* como el nodo de cruce de V con $K - S$.

Comparación y análisis (10pts)

Grafique las tres soluciones (analítica, shooting y diferencias finitas). Compare errores relativos y discuta robustez y sensibilidad.

Entrega

1. Informe con métodos, resultados y discusión.
2. Código (Python).
3. Tablas de comparación de errores y de L^*.