TP Optimización
Parte 2

Esta guía contiene varios problemas de optimización con y sin restricciones de igualdad para funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Adapte la clase optim2D convenientemente para dotarla de la funcionalidad necesaria para resolver los siguientes problemas y realizar las tareas solicitadas.

Adapte la solución que tiene para resolver también problemas de maximización.

En los casos de optimización sin restricciones se le pide que el algoritmo

- grafique los campos gradiente y las curvas de nivel de la función objetivo en un rango que contenga al óptimo local
- use los métodos de descenso por gradientes y polytopes para encontrar un óptimo global de la función y devuelva (x^*, y^*) y $f(x^*, y^*)$
- compute el hessiano de la función en el punto de optimo
- construya un gráfico que le permita ver al final de la optimización la trayectoria seguida por el algoritmo desde el punto inicial hasta el punto de convergencia final en superposición con el campo gradiente y/o las curvas de nivel de la función objetivo.

En los casos de optimización con restricción de igualdad, se le pide que el algoritmo:

- grafique los campos gradiente y las curvas de nivel de la función objetivo en un rango que contenga al óptimo local restringido y superpuesto con ellos la función implícita que define la restriccion. Identifique gráficamente la posición del óptimo local restringido
- grafique los campos gradiente y las curvas de nivel de la restricción en un rango que contenga al óptimo local restringido. Identifique las direcciones de movimiento que seguira el algoritmo en la primera parte del algoritmo en la búsqueda de un punto que satisfaga la restriccion.
- grafique conjuntamente el mapa de curvas de nivel de la función objetivo y la curva de nivel asociada a la restriccion (en otro color). Identifique el óptimo local restringido.
- encuentre el óptimo local restringido siguiendo el proceso de optimización visto en clase a partir de un punto de origen ingresado por el usuario.
- construya un gráfico que le permita ver al final de la optimización la trayectoria seguida por el algoritmo desde el punto inicial hasta el punto de convergencia final en superposición con el campo gradiente y/o las curvas de nivel de la función objetivo y la restricción.
- Verifique (de ser posible) que el vector gradiente de la función objetivo y el vector gradiente de la restricción son colineales en el punto de óptimo.

1. Busque máximos y mínimos locales para cada una de las siguientes funciones:
   (a) $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$
   (b) $f(x, y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$
   (c) $f(x, y) = x \; \sin(y)$
   (d) $f(x, y) = \cos\left(\frac{x^2+y^2}{10}\right) e^{-x^2}$

2. Resuelva los siguientes problemas con restricciones (busque el máximo y mínimo restringido en cada caso, si los hay)
   (a) $f(x, y) = xy$ sujeto a $x^2 + y^2 = a^2$, para algún $a \in \mathbb{R}$ de su elección.
   (b) $f(x, y) = \left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{y}\right)$ sujeto a $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2$ para un $a \neq 0$ de su eleccion
   (c) $f(x, y) = x + y$ sujeto a $xy = 16$
   (d) $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeto a $(x-1)^3 - y^2 = 0$