F210 Programación Aplicada a Finanzas

1. Encuentre la mínima distancia entre el cuadrado de vértices {(1,0),(0,1),(-1,0) y (0,-1)} y el círculo de radio 1 centrado en el punto (3,0). Formule el problema como uno de optimización con restricciones y utilice la librería desarrollada en el curso de descenso por gradientes para resolverlo.

   Version 1: *Formulacion del problema : el punto (x_1, x_2) pertenece al círculo de radio 1 y centro (3,0) mientras que el punto (x_3, x_4) pertenece al cuadrado de vertices {(1,0),(0,1),(-1,0) y (0,-1)} – era trivial que había que considerar al cuadrado como una figura y no su contorno, sino las rectas que definen el cuadrado jamas darian lugar a una interseccion valida–*

   Queda entonces como variable de optimización un vector en $\mathbb{R}^4$, de coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) y el problema queda.

$$\min_{(x_1,x_2,x_3,x_4)} \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2}$$

   sujeto a la condicion de que (x_1, x_2) pertenezca al circulo

$$1 - (x_1 - 3)^2 - x_2^2 \geq 0$$

   y el punto (x_3, x_4) este contenido en las 4 rectas que delimitan el cuadrado

$$\begin{aligned} 1 - x_3 - x_4 &\geq 0 \\ x_4 - x_3 + 1 &\geq 0 \\ 1 - x_4 + x_3 &\geq 0 \\ x_3 + x_4 + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

   GRUPO 1 resuelve con gdescent en $\mathbb{R}^4$ y GRUPO 2 con polytopes.

   Version 2. *Hay que buscar el punto (x_1, x_2) sobre el circulo para el que la distancia al cuadrado es mínima. Es decir, se busca*

$$\min_{(x_1,x_2)} F(x_1, x_2)$$

   con (x_1, x_2) en el círculo de radio 1 y centro (3,0)

$$1 - (x_1 - 3)^2 - x_2^2 \geq 0$$

   y

$$F(x_1, x_2) = \min_{(x_3,x_4)} \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2}$$

   con (x_3, x_4) *perteneciente al cuadrado de vertices {(1,0),(0,1),(-1,0) y (0,-1)}*

$$\begin{aligned} 1 - x_3 - x_4 &\geq 0 \\ x_4 - x_3 + 1 &\geq 0 \\ 1 - x_4 + x_3 &\geq 0 \\ x_3 + x_4 + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

   Vale decir que para cada valor posible (x_1, x_2) hay que encontrar el valor de $F(x_1, x_2)$ resolviendo el problema de optimizacion para (x_3, x_4) y optimizar sobre (x_1, x_2) en el círculo de radio 1 y centro (3,0). Claramente es mas ineficiente y complejo que trabajar en $\mathbb{R}^4$, pero quizas les sirva para usar sus librerias 2D.

2. Usted es un estratega militar y le plantean el siguiente problema. Debe defender tres posiciones A, B, y C, ubicadas en los puntos (10,0), (0,1) y (0,-2) respectivamente. Informes de inteligencia le dicen que la probabilidad de que cada posición sea atacada es 0.5, 0.2 y 0.3 respectivamente. Usted dispone de dos pelotones y debe decidir las posiciones óptimas (x_1,y_1) y (x_2,y_2) desde donde aguardará el ataque. Ud considera que lo óptimo es minimizar la distancia esperada que deberá recorrer el peloton más próximo a la posición atacada. Por una cuestión de apoyo logístico, los pelotones no pueden estar más lejos que 3 unidades entre sí.

   Formulacion del problema : Las posiciones de los pelotones se llamaran (x_1, x_2) y (x_3, x_4) respectivamente. Queda nuevamente definido un vector en $\mathbb{R}^4$ para resolver el problema. Dadas las probabilidades de ataque para los distintos puntos la funcion objetivo es

$$\min_{(x_1,x_2,x_3,x_4)} \Big[0.5 \min(\sqrt{(10-x_1)^2+(0-x_2)^2}, \sqrt{(10-x_3)^2+(0-x_4)^2}) + \\ + 0.2 \min(\sqrt{(0-x_1)^2+(1-x_2)^2}, \sqrt{(0-x_3)^2+(1-x_4)^2}) + \\ + 0.3 \min(\sqrt{(0-x_1)^2+(-2-x_2)^2}, \sqrt{(0-x_3)^2+(-2-x_4)^2}) \Big]$$

   y las restriccion es

$$(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2 \leq 3^2$$

   que reescribimos en nuestra notacion como

$$9-(x_1-x_3)^2-(x_2-x_4)^2 \geq 0$$

   GRUPO 1 resuelve con polytopes y penalidad P=10. GRUPO 2 resuelve con gdescent. Repetir para la terna de probabilidades 0.9,0.1 y 0.

3. **GRUPO 1** En los problemas de portafolio, en general se omiten los costos de transacción. Ello tiene consecuencias a la hora de hacer el rebalanceo de la cartera, porque cuando se omiten dichos costos, los cambios sugeridos por el modelo tienden a ser mayores a los que efectivamente conviene hacer, perdiéndose dinero en comisiones.

   Hay diferentes formas de lidiar con los costos de transacción durante el rebalanceo de una cartera. Una de ellas es hacerlo de manera explícita, imputando un costo al vender y comprar los diferentes activos. Otra forma, la que usaremos aqui, es imponiendo cotas a la variación que puede experimentar el ponderador de cada activo, evitando el excesivo costo en comisiones a expesas de mantener un portafolio subótpimo desde la perspectiva de la función objetivo. Las cotas de cada activo serán más restrictivas cuanto mayores sean los costos de transacción asociados. Supongamos entonces que usted trabaja en un fondo que diseña el portafolio con preferencias a la Markowitz del tipo

$$\max_{w} \; w^T \mu - \lambda w^T \Sigma w$$

   donde w es, como siempre, el vector de ponderacion de los distintos activos. El coeficiente de aversión a riesgo que emplean es de $\lambda = 1.0$, y para determinar μ y Σ utilizan información de mercado sobre los únicos 3 activos en los que les está permitido invertir

	ACN.N	AMZN.O	AAPL.O
Timestamp	Trade Close	Trade Close	Trade Close
31/12/2006	36,93	39,46	12,12
31/12/2007	36,03	92,64	28,30
31/12/2008	32,79	51,28	12,19
31/12/2009	41,50	134,52	30,10
31/12/2010	48,49	180,00	46,08
31/12/2011	53,23	173,10	57,86
31/12/2012	66,50	250,87	76,02
31/12/2013	82,22	398,79	80,15
31/12/2014	89,31	310,35	110,38
31/12/2015	104,50	675,89	105,26
31/12/2016	117,13	749,87	115,82
31/12/2017	153,09	1.169,47	169,23

   El documento constitutivo del fondo especifica además que no está autorizada la venta en corto de activos.

   Al 01/01/2018 el fondo tenía una capitalización de mercado de \$100,000,000 con ponderadores $w = [0.50, 0.39, 0.11]$. Ese día, llega una notificación del board indicando que el perfil de riesgo del fondo se volvería más conservador, aumentando λ a 1.5; lo que implica realizar un rebalanceo de la cartera y pasar de weights w a w'. A fin de no incurrir en excesivos costos de transacción, el board impone los siguientes límites a la variación de posiciones:

$$-0.15 \leq w'_{ACN} - w_{ACN} \leq 0.10$$
$$-0.10 \leq w'_{AMZN} - w_{AMZN} \leq 0.05$$
$$-0.10 \leq w'_{AAPL} - w_{AAPL} \leq 0.05$$

   Lleve a cabo el rebalanceo de portafolio resolviendo el nuevo problema de cartera teniendo en cuenta las restricciones, utilizando el optimizador de su elección. Explique brevemente si la variación obtenida en los ponderadores tiene sentido en base a la modificación realizada en λ, e indique en qué casos la restricción por costos de transaccion termina siendo binding.

Formulaciòn del problema: El vector de variables es $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. *El indice 1 corresponde a ACN, el 2 a AMZN y el 3 a AAPL. Se supone que tienen correctamente computado* μ *y* Σ. *La optimización queda*

$$\min_x -(x^T\mu - \lambda x^T\Sigma x)$$

con función objetivo

$$f(x) = -(x^T\mu - \lambda x^T\Sigma x)$$

para los valores dados y encontrados de λ, μ *y* Σ.

Las restricciones son el budget constraint

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

y las que derivan del costo de transaccion

$$\begin{aligned} x_1 &\geq -0.15 + 0.5 = 0.35 \\ -x_1 &\geq -0.5 - 0.1 = -0.6 \\ x_2 &\geq -0.10 + 0.39 = 0.29 \\ -x_2 &\geq -0.39 - 0.05 = -0.44 \\ x_3 &\geq -0.10 + 0.11 = 0.01 \\ -x_3 &\geq -0.11 - 0.05 = -0.16 \end{aligned}$$

Note que en virtud de lo anterior, no es necesario plantear la condicion que prohibe hacer shortselling. Despejando en la forma usual nos queda:

$$\begin{aligned} x_1 - 0.35 &\geq 0 \\ -x_1 + 0.6 &\geq 0 \\ x_2 - 0.29 &\geq 0 \\ -x_2 + 0.44 &\geq 0 \\ x_3 - 0.01 &\geq 0 \\ -x_3 + 0.16 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dejar planteado y resuelva con el metodo de su preferencia.

4. GRUPO 2. Vamos a considerar costos de transacción en problema de armado de portafolio. En este caso usted tiene M unidades monetarias para invertir y debe decidir cuanto dinero M_i asignar a cada activo i en la cartera. Supongamos por simplicidad que $M_i \geq 0$ (prohibición en posiciones cortas). En presencia de costos de transacción, **no todo el dinero M_i asignado es invertido en el activo i**, sino una cantidad menor $M_i(1-c_i)$, donde $0 \leq c_i \leq 1$ es el costo en comisiones y fees que debe pagar al momento de adquirir el activo.

El inversionista posee preferencias a las Markowitz de la forma usual

$$\max_w \; w^T\mu - \lambda w^T \Sigma w$$

donde w es, como siempre, el vector que indica **la proporción de dinero efectivamente invertida** en los distintos activos. El inversionista tiene un coeficiente de aversión a riesgo de $\lambda = 0.5$, y para determinar μ y Σ utiliza la siguiente información de mercado sobre los únicos 3 activos en los que está considerando invertir.

	ACN.N	AMZN.O	AAPL.O
Timestamp	Trade Close	Trade Close	Trade Close
31/12/2006	36,93	39,46	12,12
31/12/2007	36,03	92,64	28,30
31/12/2008	32,79	51,28	12,19
31/12/2009	41,50	134,52	30,10
31/12/2010	48,49	180,00	46,08
31/12/2011	53,23	173,10	57,86
31/12/2012	66,50	250,87	76,02
31/12/2013	82,22	398,79	80,15
31/12/2014	89,31	310,35	110,38
31/12/2015	104,50	675,89	105,26
31/12/2016	117,13	749,87	115,82
31/12/2017	153,09	1.169,47	169,23

Al 01/01/2018 el inversionista dispone de $M = \$1,000,000$ en total para invertir. Suponga que los costos de transaccion para $ACN.N, AMZN.O$ y $AAPL.O$ son, respectivamente $c_1 = 0.01$, $c_2 = 0.10$ y $c_3 = 0.05$. Escriba un código que resuelva el problema de optimización de cartera (con el método de optimización de su preferencia) que incluya ahora los costos de transaccion (explique en un bloque de comentarios del script el problema que planteara) e indique cuales serían los montos a asignar a cada uno de los 3 activos (redondeado al centavo). Compare la asignación óptima y los ponderadores de la cartera con el caso sin costos de transaccion. Explique la diferencia encontrada.

(Consejo: para evitar errores de redondeo al manejar números grandes y pequeños, formule y resuelva el problema no en función de los M_i sino de la fracción $f_i = \frac{M_i}{M}$ asignada a cada activo. Encontrados los f_i, reporte luego los M_i)

Formulaciòn del problema: Dada la cantidad de dinero M_i asignada al activo i, solamente $M_i(1-c_i)$ es invertida en en el activo i, por lo que los ponderadores que entran al problema de Markowitz quedan

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{M_i(1-c_i)}{\sum_i M_i(1-c_i)} \\ &= \frac{\frac{M_i}{M}(1-c_i)}{\sum_i \frac{M_i}{M}(1-c_i)} \\ &= \frac{f_i(1-c_i)}{\sum_i f_i(1-c_i)} \end{aligned}$$

donde f_i es la fraccion del dinero total asignada al activo i.

La función objetivo F debe recibir entonces como argumento un vector $f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^3$,calcular como paso intermedio los weights

$$w_i(f) = \frac{f_i(1-c_i)}{\sum_i f_i(1-c_i)}$$

y devolver a la salida

$$F(f) = -\left[w(f)^T \mu - \lambda w(f)^T \Sigma w(f)\right]$$

bajo el supuesto que su optimizador minimizará la funcion objetivo.El problema de optimización queda entonces

$$\min_f F(f)$$

sujeto a las restricciones de no negatividad

$$f_1 \geq 0, \quad f_2 \geq 0, \quad f_3 \geq 0$$

y el budget constraint

$$\sum_i f_i = 1$$

Dejar planteado y resuelva con el metodo de su preferencia.