F210 Programacion Aplicada a Finanzas

Optimizacion Multivariada

1. Vamos a construir una clase `opt2d` para llevar a cabo optimizaciones en dos variables. Una instancia de esa clase se inicializa introduciendole una funcion de dos variables $f(x)$ que define fuera de la clase, en el main script. En este caso, x es una tupla de dos componentes, donde $x[0]$ corresponde a la variable x y $x[1]$ a la variable y. La funcion se almacena dentro del objeto en el atributo `self.f`.

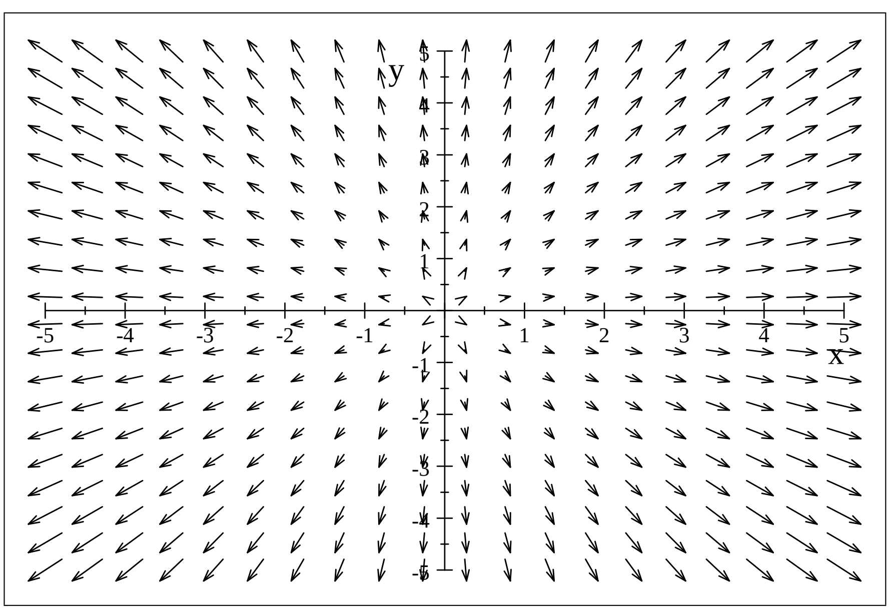
   Cada instancia de clase tendrá otros dos atributos, `self.hx` y `self.hy`, indicando el incremento que se utilizará para computar las derivadas parciales. Ambos serán seteados por defecto en 0.001, pudiendo luego ser modificados a voluntad.

   Se pide en primer lugar que la clase posea métodos `fx fy fxx fxy fyy` que devuelvan las derivadas parciales primeras, segundas y cruzadas

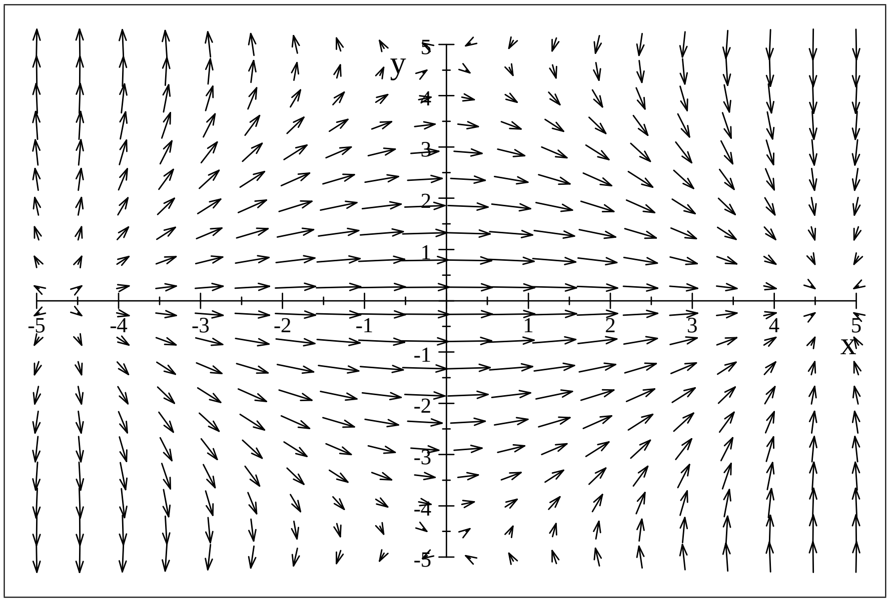
$$\begin{aligned}
\texttt{fx} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{f(x+h_x,y)-f(x-h_x,y)}{2h_x} \\
\texttt{fy} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{f(x,y+h_y)-f(x,y-h_y)}{2h_y} \\
\texttt{fxx} &= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) \\
\texttt{fyy} &= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \\
\texttt{fxy} &= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

   La clase debe tener también un método `gradf` que devuelva el gradiente de f ,$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$,en forma de tupla, y otro llamado `fv` que, dado un punto (x,y) y un vector $\overrightarrow{v}$,regrese la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}} = \nabla f \; \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$.

2. Investigue qué hace la función `matplotlib.pyplot.arrow(x, y, dx, dy, hold=None, **kwargs)` y úsela para construir un método `campo_gradiente((xmin,xmax),(ymin,ymax),nx,ny)`que dibuja para cada punto de una grilla de puntos en el rango `(xmin,xmax)x(ymin,ymax)`el vector gradiente asociado. A modo de ejemplo se muestran los casos para las funciones $x^2 + y^2$



y $\sin\left(\frac{x}{3}\right) * \cos(\frac{y}{3})$



Indique en el caso de los gráficos recien presentados, dónde se encuentran los puntos extremos y a qué punto extremo representan.Suponga que ud diseña un algoritmo que se mueve en contra del vector gradiente, y en ambos gráficos inicia el movimiento desde el punto (4,2). Dibuje la trayectoria que seguiría el algoritmo, y muestre a qué puntos convergerían.

Grafique el campos gradiente para $f(x,y) = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)\ e^{-\frac{x^2}{2}}$.

3. Lo siguiente que debe tener el la clase, es un método `contour1(x0,y0,(xmin,xmax))`, que dibuje la curva de nivel que pasa por el punto (x_0, y_0) a partir de la siguiente estrategia:

   (a) Identifique el valor de nivel k haciendo $k = f(x_0, y_0)$.

   (b) Construya una grilla de puntos $x_i, x_{\min} \leq x_i \leq x_{\max}$ y busque secuencialmente para cada x_i la raiz y_i asociada correspondiente a la solución de la ecuacion $f(x_i, y_i) - f(x_0, y_0) = 0$. De haber varias raíces, busque la más próxima a la encontrada para el punto x_{i-1}. A fin de agilizar el algoritmo de búsqueda dispare cada búsqueda desde la raiz encontrada para el punto anterior, y_{i-1}.

   (c) Una vez barrida toda la grilla y construida la secuencia de tuplas $\{(x_i, y_i)\}$ haga una gráfica de linea conectando los puntos para obtener la curva de nivel $f(x,y) = f(x_0, y_0)$

   Construya otro método `contour2(x0,y0,(xmin,xmax))`que dibuje las curvas de nivel pero usando como estrategia el movimiento perpendicular al vector gradiente, mediante la siguiente estrategia:

   (a) En el punto $\overrightarrow{x}_0 = (x_0, y_0)^T$, obtenga el gradiente de f, $\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)^T$.

   (b) Obtenga el vector perpendicular al gradiente usando la matriz antisimétrica de rotación $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (rotación antihoraria de 90 grados), haciendo $\overrightarrow{v} = R\nabla f$

   (c) Calcule el siguiente punto $\overrightarrow{x}_1 = (x_1, y_1)^T$ sobre la curva de nivel haciendo $\overrightarrow{x}_1 = \overrightarrow{x}_0 + \delta\overrightarrow{v}$, para $\delta = 0.01$

   (d) Haciendo $\overrightarrow{x}_0 = \overrightarrow{x}_1$, repita 1000 veces los pasos a-c

   (e) Repita lo mismo, pero ahora con la matriz de rotacion $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (rotación horaria de 90 grados).

   (f) Grafique.

Considere la función $f\left(x,y\right)$ que resulta de hacer la siguiente operacion matricial (forma cuadrática)

$$f\left(x,y\right)=\left(x,y\right)\left[\begin{array}{cc} 9 & 3 \\ 3 & 4 \end{array}\right]\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)$$

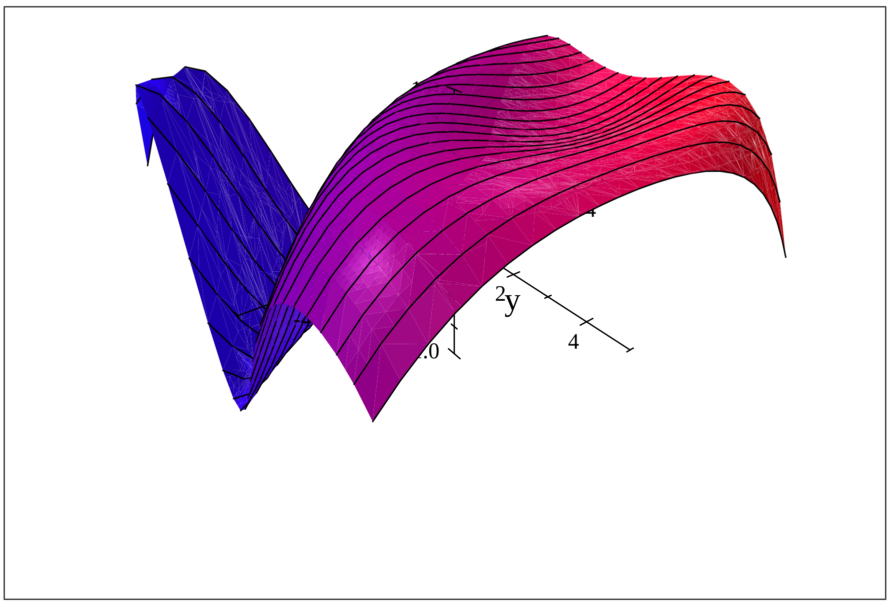
Construya las curvas de nivel usando los métodos contour1 y contour2 que pasen por los puntos $(1,0)\ \ (2,0)\,,(3,0)\,.$ Compare los resultados obtenidos.

4. Desarrolle un método `gdescent(x0,y0,delta=0.01,tol=0.001,Nmax=100000)` que busque un punto extremo de la función f asociada a la instancia de la clase, moviéndose en contra del gradiente, y comenzando la búsqueda a partir del punto (x0,y0). El algoritmo debe iterativamente ir minimizando el valor de la función usando el método de descenso por gradientes

$$\overrightarrow{x}_{n+1}=\overrightarrow{x}_{n}\ -\delta\nabla f\left(\overrightarrow{x}_{n}\right)$$

hasta que $n\geq N_{\max}$ o $\left\Vert \overrightarrow{x}_{n+1}-\overrightarrow{x}_{n}\right\Vert <tol.$

5. Encuentre el minimo local $\overrightarrow{x}^{*}$de la función $f\left(x,y\right)\ =\ \sin\left(\frac{9x^2+6xy-33x-26y+4y^2+133}{100}\right)$



usando `gdescent.`Verifique que el $\nabla f\left(\overrightarrow{x}_{n}\right)\sim0$ y construya la matriz Hessiana en el punto extremo

$$H\left(\overrightarrow{x}^{*}\right)=\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^{2}f\left(\overrightarrow{x}^{*}\right)}{\partial x^{2}} & \frac{\partial^{2}f\left(\overrightarrow{x}^{*}\right)}{\partial xy} \\ \frac{\partial^{2}f\left(\overrightarrow{x}^{*}\right)}{\partial yx} & \frac{\partial^{2}f\left(\overrightarrow{x}^{*}\right)}{\partial y^{2}} \end{array}\right]$$

que despues usaremos para ver si estamos en presencia de un minimo relativo, maximo relativo o punto de silla.