TP Optimización

Parte 3

Resuelva los siguientes problemas de optimizacion. En caso de ser necesario, adapte la formulación matemática para transformarlo en un problema de la forma que sabemos resolver. Algunos problemas van a requerir que extienda sus soluciones a espacios mayores que $\mathbf{R}^2$.

1. (a) Sea la funcion de utilidad Cobb Douglass sobre una canasta de dos bienes (x, y)

$$u(x,y) = x^\alpha y^\beta, \qquad 0 < \alpha, \beta < 1$$

encuentre la canasta (x^*, y^*) que maximiza dicha utilidad sujeto a restricciones de no negatividad $x \geq 0,\ y \geq 0$, y a la restricción de presupuesto $p_x x + p_y y \leq m$. Resuelva para el caso $\alpha = \beta = 0.5$, $p_x = p_y = 1$ y $m = 10$. Reporte el valor de utilidad máxima encontrada $u^* = u(x^*, y^*)$ y el gasto incurrido en adquirir la canasta (x^*, y^*) .Mantenga el ingreso constante y varie el precio p_y alrededor de $p_y = 1$ (vaya de 0.7 a 1.3 de a 0.05). Almacene los resultados obtenidos y grafique x^* e y^*como funciones de p_y. Provea una explicación intuitiva del resultado. Deje ahora fijos los precios y el ingreso, y varíe β alrededor de 0.5 (vaya de 0.2 a 0.8 de a 0.05). Almacene los resultados obtenidos y grafique x^* e y^*como funciones de β. Provea una explicación intuitiva del resultado. Grafique las curvas de nivel de $u(x,y)$ para distintos pares α, β y trate de entender porque tienen la forma que tienen. Haga lo mismo para la restriccion presupuestaria, variando cada uno de los precios y el ingreso.

(b) Repita lo analizado en el problema anterior, pero ahora con la funcion de utilidad de Leontief:

$$u(x,y) = \min(x^\alpha, y^\beta)$$

y compare los resultados obtenidos con lo obtenido en el punto a.

(c) Encuentre la mínima y la máxima distancia entre las curvas (dibujelas)

$$\begin{aligned} h_1(x,y) &= \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{xy}{4} - 1 = 0 \\ h_2(x,y) &= \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{xy}{4} - 1 = 0 \end{aligned}$$

(d) En estos tiempos que aprietan, ud decide no maximizar su utilidad, sino minimizar el gasto en la canasta de bienes (x, y) que vaya a comprar.Suponga que los precios son los mismos que los del problema 1,$p_x = p_y = 1$ y su utilidad tambien. $u(x,y) = x^{0.5}y^{0.5}$. Como buen argento (nunca menos) no aceptará una canasta que le de menos que la utilidad $u^* = u(x^*, y^*)$ encontrada en el punto 1. Así que ahora su problema se vuelve

$$\min_{x,y}\ p_x x + p_y y$$
$$s.a$$

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ u(x,y) &\geq u^* \end{aligned}$$

Encuentre la canasta óptima que minimiza el gasto de nuestro ajustado consumidor. Comparela con la del punto a. Ensaye una explicación de porqué esto podría ser asi.

(e) En Marxilandia hay dos insumos de produccion: capital K y trabajo L. De ambos insumos se dispone una cantidad fija K^*, L^*. Esos recursos se pueden destinar a la produccion de dos bienes finales, llamémoslos A y B. Dada cantidades (K_A, L_A) y (K_B, L_B) las cantidades de A y B producidas son las siguientes:

$$\begin{aligned} A(K_A, L_A) &= K_A^{\frac{1}{3}} L_A^{\frac{2}{3}} \\ B(K_B, L_B) &= K_B^{\frac{2}{3}} L_B^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Al planificador central de Marxilandia (un tal Karl) le interesa encontrar la frontera de posibilidades de producción que tiene la economía (es decir, el conjunto de pares de cantidades (A^*, B^*) que es posible producir con los recursos disponibles tal que no sea posible producir más de uno de los bienes sin necesariamente disminuir la cantidad del otro bien), juntamente con las cantidades óptimas a asignar de capital y trabajo en la producción de cada par (A^*, B^*). El problema que debe resolver es entonces

$$\max_{K_A, L_A, K_B, L_B} A(K_A, L_A)$$
$$s.a$$

$$\begin{aligned} K_A + K_B &\leq K^* \\ L_A + L_B &\leq L^* \\ L_A, L_B, K_A, K_B &\geq 0 \\ B(K_B, L_B) &\geq B^* \end{aligned}$$

Sea bueno y resuelvale el problema a Karl.

(f) Un tipo de torta requiere 200g de harina y 25g de manteca, y otro tipo de torta requiere 100g de harina y 50g de manteca. Encuentre el número máximo total de pasteles (puede ser un número fraccionario) que se pueden hacer con 5kg de harina y 1kg de manteca.