Monografía sobre Teoría de Grafos

Nicolás Caro

Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile, Santiago.

ncaro@dim.uchile.cl

29 de septiembre de 2018

Índice general

Prólogo

El presente trabajo reúne material referente al curso de teoría de grafos dictado en el departamento de ingeniería matemática (DIM) de la universidad de Chile (primavera 2018).

Para la construcción de este material se utilizó la estructura seguida en el curso, a la cual se agregaron observaciones, material complementario y ejercicios considerados pertinentes.

Nicolás Caro

Capítulo 1

Conceptos Básicos

Introducción

NicoCaro: Insertar 'frase profunda' + 'Introducción pertinente'

1.1. Grafos

Un **grafo** corresponde a un objeto utilizado para modelar relaciones entre elementos de un sistema o conjunto. Su origen y denominación, se basan en la representación de estas relaciones por medio de esquemas gráficos caracterizados por segmentos entre *vértices* o (nodos) y *aristas*.

Definición 1.1 (Grafo)**.** Dados los conjuntos V y $E \subseteq \binom{V}{2}$ [1]. Se define como **grafo** al par $G = (V, E)$. En este contexto, el conjunto V se denota como el conjunto de **vértices** de G y E como su conjunto de **aristas**.

A modo de ejemplo, se muestra en la figura 1 una representación para un grafo con 9 vértices.

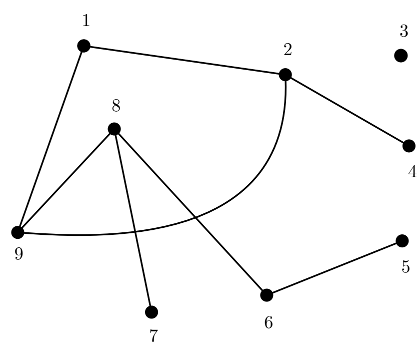


FIGURA 1. Representación del grafo $G = (V, E)$ dado por los vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Sus aristas corresponden a los segmentos que unen estos a vértices y se denotan con los pares $E = \{\{1, 2\}, \{1, 9\}, \{2, 4\}, \{2, 9\}, \{5, 6\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}, \{8, 9\}\}$. Si bien el vértice 3 esta presente en el grafo, no existe ninguna arista entre este vértice y otro del grafo.

Si G es un grafo, su conjunto de vértices de denota por $V(G)$ y sus aristas por $E(G)$. Como convención, cuando no exista ambigüedad, se escribirá $v \in G$, en vez

[1]Si X es un conjunto, se denota por $\binom{X}{2}$ al conjunto de pares (no ordenados) de la forma $\{u, v\}$ donde $u \neq v$ para $u, v \in X$.

de $v \in V(G)$ para un vértice de G. De manera análoga se escribe $e \in G$ para una arista de G. Un grafo de la forma $K^n = (V, \binom{V}{2})$, donde $|V| = n$, se denomina **completo** de n vértices o n-completo.

En cuanto a las aristas de un grafo G, se asume la notación $e = uv = vu$ para $e \in G$, donde $e = \{u, v\} \in E(G)$. El número de vértices de un grafo G, $|V(G)|$ se denomina como su **orden** y se denota por $|G|$ [2]. Por otra parte, su número de aristas $|E(G)|$, se denota por $||G||$.

Dos vértices $u, v \in V$ se dicen **vecinos** en G, si $uv \in E(G)$. El conjunto de vecinos de u en G se define por $N_G(u) \coloneqq \{v \in V(G) : uv \in E(G)\}$. De la misma manera, si $S \subseteq V(G)$ se puede definir el conjunto de vecinos del conjunto S por $N_G(S) \coloneqq \{v \in V(G) \setminus S : uv \in E(G)\}$.

Por otra parte, $u \in V(G)$ se dice **incidente** con $e \in E(G)$ si $v \in e$. El conjunto de aristas incidentes con u se define como $E_G(u) \coloneqq \{e \in E(G) : uv \in E(G)\}$. Cuando $u \in X \subseteq V(G)$ y $v \in Y \subseteq V(G)$ se denomina a la arista $e = uv \in E(G)$ como una $X - Y$ *arista*. Por tanto, para los conjuntos $X \subseteq V(G)$, $Y \subseteq V(G)$, es posible definir el conjunto de todas las $X - Y$ aristas $E(X, Y)$ como $E(X, Y) \coloneqq \{e \in E(G) : \exists u \in X, \exists v \in Y, e = uv\}$. Si X, Y son una partición de $V(G)$ ($X \cup Y = V(G)$ con $X \cap Y = \emptyset$), entonces $E(X, Y)$ se denomina **corte** de G. A modo de observación, cabe destacar que el conjunto $E(\{u\}, V(G))$, para $u \in V(G)$ es consistente con la definición de $E_G(u)$.

Definición 1.2 (Grado de un vértice)**.** El **grado** de u en G se define por $d_G(u) \coloneqq |N_G(u)|$. Asociados a G se definen también sus grados *máximo* $\Delta(G)$ y *mínimo* $\delta(G)$ por:

$$\Delta(G) \coloneqq \max_{v \in V} d_G(v) \qquad \text{y} \qquad \delta(G) \coloneqq \min_{v \in V} d_G(v)$$

Si $\Delta(G) = \delta(G)$ entonces G se dice $\Delta(G)$ - *regular*. Un grafo G se dice *cúbico* si $\Delta(G) = \delta(G) = 3$.

Teorema 1.3 (Suma de grados)**.** En un grafo $G = (V, E)$ se cumple:

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2\ ||G|| \tag{1.1}$$

Demostración. Para demostrar el teorema anterior, se hace uso de *doble conteo* [3]. En efecto, la cantidad $\sum_{v \in V} d_G(v)$ puede ser reescrita como:

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V} \sum_{e \in E} [v \in e] = \sum_{e \in E} \sum_{v \in V} [v \in e] \tag{1.2}$$

Donde $[v \in e]$ corresponde a la función indicadora:

$$[v \in e] \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{si } xv \in e \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

[2]Como es posible deducir de la definición (1.1), un grafo puede tener una cantidad infinita de vértices, para efectos prácticos, se considerarán grafos de orden finito a menos que se indique lo contrario.

[3]El doble conteo corresponde a una técnica de demostración en combinatoria, por la cual se muestra que dos cantidades son iguales al contar los elementos de un mismo conjunto de dos maneras distintas

Como cada arista $e \in E$ posee exactamente 2 vértices incidentes, se obtiene:

$$\sum_{v\in V} d_G(v) = \sum_{e\in E}\sum_{v\in V}[v \in e] = 2\ |E| = 2\ ||G||$$

■

Del teorema (1.3), se obtiene de manera inmediata el siguiente resultado:

Corolario 1.3.1. El número de vértices de grado impar en un grafo es siempre par.

Usando las definiciones anteriores, es posible referirse al **grado promedio** de G, $d(G)$ definido por

$$d(G) \coloneqq \frac{1}{|V(G)|}\sum_{v\in V(G)} d_G(v) \tag{1.3}$$

del cual se deduce $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$. Por otra parte, al definir la relación $\varepsilon(G) \coloneqq ||G||/|G|$. Usando el teorema (1.3), se puede establecer la relación:

$$||G|| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V} d_G(v) = \frac{1}{2}d(G)\cdot|G| \tag{1.4}$$

es decir,

$$\varepsilon(G) = \frac{1}{2}d(G) \tag{1.5}$$

esta última relación, permite analizar ambas propiedades (globales) de un grafo directamente.

La unión de dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ se define por $G \cup G' \coloneqq (V \cup V', E \cup E')$, de manera análoga, la intersección $G \cap G' \coloneqq (V \cap V', E \cap E')$. Si $G \cap G' = \emptyset$, los grafos G y G' se dicen *disjuntos*. El grafo $\overline{G}$ se dirá complemento de G si $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$. El grado de cada vértice $u \in \overline{G}$ se relaciona con su símil en G.

Proposición 1. Dado $G = (V, E)$ y su complemento $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$. Entonces se verifica la relación,

$$d_{\overline{G}}(u) = |V| - 1 - d_G(u) \tag{1.6}$$

para todo $u \in V$.

Demostración. En efecto, para todo $u \in V$, se tiene $d_{\overline{G}}(u) = |N_{\overline{G}}(u)|$ de donde se obtiene:

$$\begin{aligned}|N_{\overline{G}}(u)| &= \sum_{e\in\binom{v}{2}\setminus E}[u \in e] = \sum_{e\in\binom{v}{2}}[u \in e] - \sum_{e\in E}[u \in e]\\ &= \sum_{e\in\binom{v}{2}}[u \in e] - |N_G(u)|\end{aligned}$$

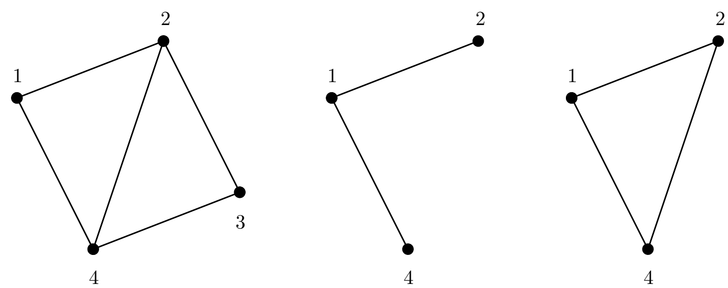
Debido a que u ocurre $|V| - 1$ veces en $\binom{V}{2}$, se tiene finalmente:

$$d_{\overline{G}}(u) = |V| - 1 - d_G(u)$$

■

Si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, entonces $G' \subseteq G$ y G' se denota como *subgrafo* de G. En tal caso, se dice que V' *induce* o *genera* a G' en G, lo cual se denota por $G' \eqqcolon G[V']$. Por tanto, si $U \subseteq V$ es un conjunto de vértices, $G[U]$ corresponde al grafo cuyos vértices son U, siendo sus aristas, aquellas presentes en G con ambos vértices en U.

Un subgrafo, no necesariamente es un subgrafo inducido, en la figura (2) se muestra tal hecho.



(a) (b) (c)

FIGURA 2. En (a) se muestra $G = (V, E)$ donde $|G| = 4$. Al tomar $V' = \{1, 2, 4\}$ se obtiene el subgrafo $H = (V', \{12, 14\})$ de (b). Finalmente en (c) se muestra $G[V']$. Claramente $H \subseteq G$ pero $H \neq G[V']$.

Si U es un conjunto de vértices de G, se escribe $G - U$ para denotar al subgrafo inducido $G[V \setminus U]$. La operación $G - U$ se denota como **borrado** de vértices de G. En el caso $G - V(G')$ se escribe $G - G'$. Para $F \subseteq \binom{V}{2}$ se escribe $G - F \coloneqq (V, E \setminus F)$ y $G + F \coloneqq (V, E \cup F)$. En el caso de operar sobre singletons, tanto para aristas como para vértices, se escribe $G \pm x$ en vez de $G \pm \{x\}$. La siguiente proposición permite relacionar las cantidades $\varepsilon(G)$ y $\varepsilon(H)$ para dos grafos $H \subseteq G$.

Proposición 2. Todo grafo G con al menos una arista, tiene un subgrafo H con $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.

DEMOSTRACIÓN. Se construye una sucesión $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots$ de subgrafos inducidos por G. En esta sucesión, si el grafo i - ésimo , G_i tiene un vértice v_i de grado $d_{G_i}(v_i) \leq \varepsilon(G_i)$ se genera $G_{i+1} \coloneqq G_i - v_i$. En caso contrario, se termina la sucesión y se define $H \coloneqq G_i$.

Por la elección de v_i se tiene que $\varepsilon\left(G_{i+1}\right) \geqslant \varepsilon\left(G_i\right)$. Esto se observa directamente de la relación,

$$\frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|} = \frac{|E(G_i)| - \varepsilon(G_i)}{|V(G_i)| - 1}$$

para todo i en la sucesión. Por construcción, se tendrá entonces $\varepsilon(H) \geqslant \varepsilon(G)$.

Por otra parte, se observa que K^1 (grafo consistente de un vértice), cumple $\varepsilon\left(K^1\right) = 0 < \varepsilon(G)$. Según la relación anterior, se tendrá entonces que K^1 no pertenece a la sucesión, por lo que en particular $H \neq \emptyset$. Como H es minimal en el sentido de la construcción (no se pueden borrar más vértices), se tendrá que $\delta(H) > \varepsilon(H)$.

$\blacksquare$

Dados dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ disjuntos, se denota $G * G'$ como su *join*, al grafo $G * G' \coloneqq G \cup G' + \{xy : x \in V, y \in V'\}$ es decir, $G * G'$ es el grafo resultante al unir G con G', agregando las aristas resultantes al conectar cada vértice de G con cada vértice de G'.

Por otra parte, para dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ disjuntos, se define el **producto cartesiano** o simplemente **producto** entre grafos $G \,\square\, G'$ como el grafo cuyo conjunto de aristas es $V(G \,\square\, G') \coloneqq (V \times V')$. Donde las aristas $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ serán adyacentes, si $u_1 = v_1$ y $u_2 \in N_{G'}(v_2)$ o $u_2 = v_2$ y $u_1 \in N_{G'}(v_1)$. La figura (3) muestra el join y el producto de dos grafos.

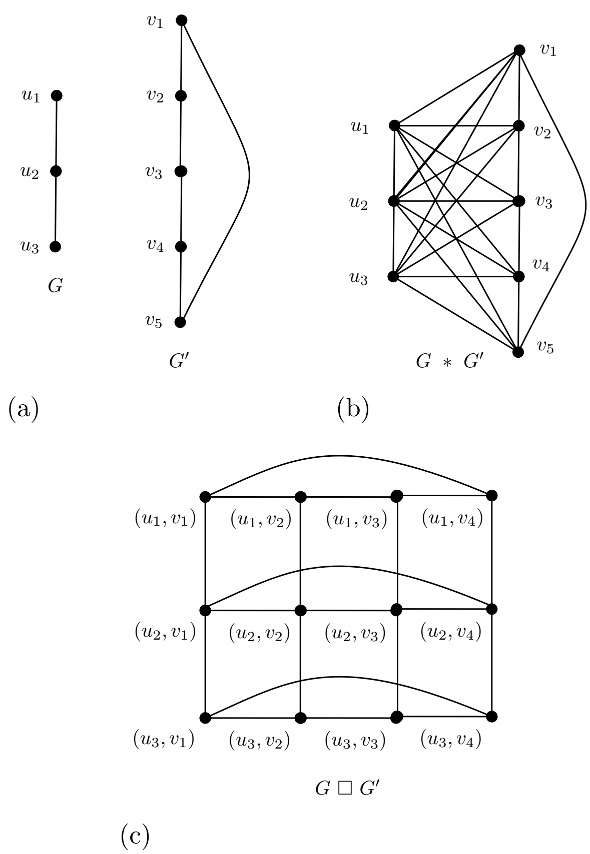


FIGURA 3. En (a) se muestran los grafos disjuntos G y G'. El resultado de $G*G'$ se observa en (b). Finalmente en (c) se muestra $G \,\square\, G'$.

Dados dos grafos G y H, es posible definir la noción de **morfismo** o transformación entre ambos.

Definición 1.4 (morfismo)**.** Dados dos grafos G y H, un **morfismo** f de G a H se define como una función $f : V(G) \to V(H)$, que verifica $\forall\ uv \in E(G) \implies f(u)f(v) \in E(H)$.

EJERCICIO 1.1 (morfismos entre caminos). *Se define el grafo $P_n = (V, E)$ según la estructura secuencial $V = \{v_0, \ldots, v_n\}$ donde $v_i \neq v_j,\ \forall i \neq j$. Se tiene además*

*$e_i = v_i v_{i+1}$ para $E = \{e_0, \ldots, e_{n-1}\}$. Los grafos del tipo P_n se denotan como **caminos** de largo n. En el caso $n = 0$ se considera $E = \emptyset$.*

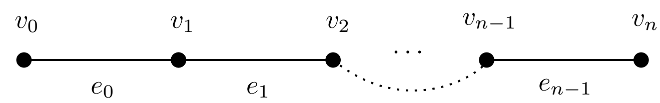


FIGURA 4. Representación de un camino P_n

Estudiar la posibilidad de construir un morfismo entre caminos del tipo P_n y P_{n-1} para $n \geq 1$.

SOLUCIÓN. *Para el caso $n = 1$ no es posible obtener un morfismo, pues P_0 no tiene aristas. Para $n \geq 1$, se definen los caminos P_n con vertices $V = \{v_0, \ldots, v_n\}$ y P_{n-1} con vértices $V' = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$, cada arista de P_n se denota por e_i para $i = 0, \ldots, n-1$. De manera análoga (hasta $n-2$) se denotan las aristas de P_{n-1}.*

En este caso es posible construir un morfismo $f : V \to V'$ a través de :

$$f(v_i) = \begin{cases} v_i, & \text{para } i = 0, \ldots, n-1 \\ v_{n-2}, & \text{para } i = n \end{cases}$$

Por medio de f, para cada arista $e_i = v_i v_{i+1} \in E(P_n)$ existe su arista idéntica $f(v_i)f(v_{i+1}) = e_i \in E(P_{n-1})$ para $i = 1, \ldots, n-2$. Finalmente para la arista $e_{n-1} = v_{n-1}v_n$ existe $f(v_{n-1})(v_n) = v_{n-1}v_{n-2} = v_{n-2}v_{n-1} \in E(P_{n-1})$. Por lo que se confirma que f es un morfismo entre P_n y P_{n-1}.

1.2. Camino y Ciclos

Un **camino** es un grafo no vacío $P = (V, E)$ de la forma

$$V = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}, \quad E = \{x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{k-1}x_k\}$$

donde los vértices x_i son todos distintos. Los vértices de un camino se dicen *conectados* por P, en particular x_0 y x_k están conectados por P y se denominan como sus *extremos*. Por otra parte, los vértices $x_1, \ldots, x_{k-1}$ son sus *vértices internos*. El número de aristas en P se denota como su **largo**. Un camino de largo n se denota como P_n.