

TRABAJO FINAL
Resolución de un sistema isostático de viga



Asignatura: Análisis Numérico para Ingeniería

Integrantes:

- Cazorla Martínez, Nicolas
- Coria, Emilia
- Correa Guzmán, Esteban Martín
- D'Amico, Stefanía

Profesor a cargo: Álvarez, Francisco José

Fecha de entrega: 22 de Diciembre

2020

Introducción

Para introducir el tema es necesario clarificar algunos conceptos que permitan establecer el marco de referencia dentro del cual se va a trabajar. El presente trabajo analizará mediante la utilización de diversos métodos numéricos las fuerzas intervinientes sobre una viga y los efectos que éstas provocan sobre la misma.

Las leyes de Newton son tres principios que permiten describir el movimiento de los cuerpos, basados en un sistema de referencias inerciales. Estas leyes que relacionan la fuerza, la velocidad y el movimiento de los cuerpos son la base de la mecánica clásica y la física. Son tres: *ley de la inercia*, *ley fundamental de la dinámica* y *el principio de acción y reacción*.

Un cuerpo está en equilibrio si sobre él no actúan fuerzas o actúan varias fuerzas cuya resultante es cero, es decir, que está en reposo o se mueve en línea recta con velocidad constante.

Para realizar un correcto análisis de estructuras, se parte de las leyes de Newton y de la condición de equilibrio, resultando en las siguientes dos ecuaciones:

$$\sum F_{ext_i} = 0 \quad \sum M_{ext_i} = 0$$

Las estructuras pueden estar limitadas por distintos tipos de vínculos, internos y externos, los cuales restringen su movilidad. Los vínculos externos más frecuentes son el empotramiento, la articulación fija y el apoyo simple, y los internos son la junta rígida y la rótula.

Un sistema isostáticamente determinado es aquel que puede resolverse utilizando únicamente las ecuaciones del equilibrio de la estática; es decir que pueden encontrarse las fuerzas cortantes, momentos flexionantes, fuerzas normales y momentos torsionantes, a partir de condiciones de equilibrio solamente. Así pues, un sistema isostático posee la misma cantidad de ecuaciones como vínculos incógnita a determinar (grados de libertad).

Una viga isostática es una estructura simple y en la cual se realiza un análisis bidimensional; en ella, el número de reacciones de los apoyos es igual al número de ecuaciones de equilibrio. Por este motivo, el número de grados de libertad es igual a tres. Las ecuaciones que se tienen en cuenta para resolver el sistema son:

$$\sum F_{ext_x} = 0 \quad \sum F_{ext_y} = 0 \quad \sum M_{ext_z} = 0$$

Se plantean en sumatorias tanto las fuerzas y momentos generados por perturbaciones externas, así como también las reacciones de vínculo que se quieren obtener.

Al ser la viga estáticamente determinada se pueden analizar dos casos:

1. Viga simplemente apoyada con un apoyo simple y uno doble.

2. Viga empotrada o con apoyo triple.

En cada uno de los casos, se analizan las reacciones de vínculo haciendo énfasis en los esfuerzos internos de corte; a partir de ellas se obtienen los momentos flectores y por último se realiza un análisis de la deformación de la viga, utilizando la ecuación diferencial exacta de la elástica de la viga:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M_z}{E \cdot I_z} \cdot \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}$$

A manera de ejemplo, se desarrollará el análisis numérico para el caso de una viga empotrada o con apoyo triple.

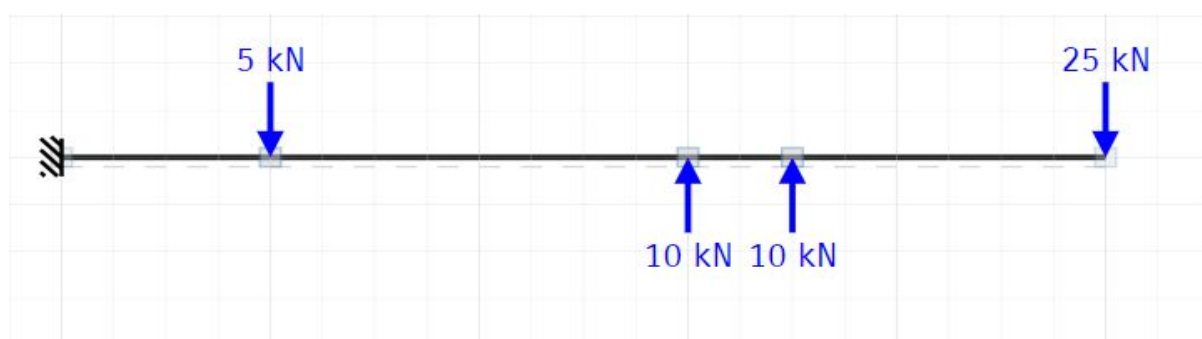
Procedimiento

Para el desarrollo del análisis del problema se implementó el lenguaje de programación conocido como Fortran 90. Se tuvieron en cuenta los siguientes datos:

1. Largo de la viga, junto con las medidas de su sección transversal.
2. Peso de la viga (despreciable o no).
3. Posición, ángulo y módulo de cada fuerza puntual (resultados recogidos en una matriz de fuerzas puntuales).
4. Módulo de Young.

Los datos ingresados para realizar un análisis en particular son: largo de la viga 10 metros, viga cuadrada de 0.1m de lado con un módulo de Young de 210 MPa. Se aplicaron cuatro fuerzas puntuales: la primera de 5 N a una distancia de 2 metros del empotramiento y con un ángulo de -90° ; la segunda de 10 N a una distancia de 6 metros y con un ángulo de 90° ; la tercera, de igual ángulo y módulo que la segunda, pero aplicada a 7 metros del empotramiento; y la cuarta se aplicó en el extremo de la viga con un módulo de 25 N e igual ángulo que la primera. Además, se consideró despreciable el peso de la viga.

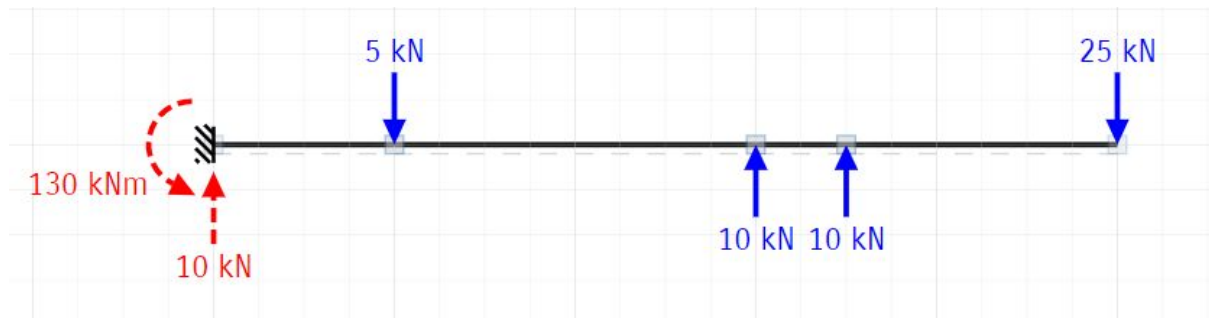
Una vez ingresados todos los datos iniciales en el programa se modelan procedimientos secuenciales para las distintas problemáticas a resolver.



< Figura 1. Viga solicitada >

Obtención de la fuerzas de vínculo

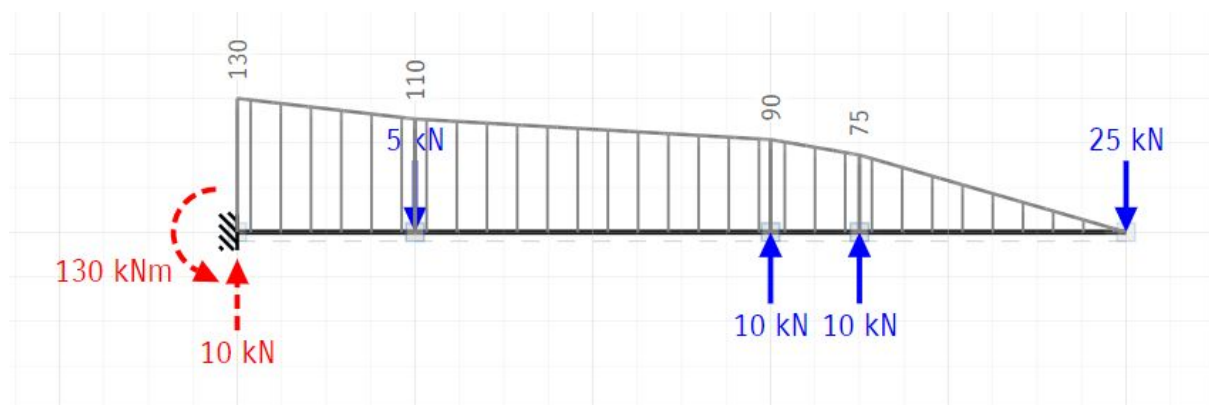
Se creó una subrutina en la cual, a través de las ecuaciones de equilibrio, se despejaron los valores de las reacciones de vínculo. En el caso de la viga empotrada, una fuerza horizontal, una vertical y un momento en el eje Z.



< **Figura 2.** Viga solicitada - Reacciones de vínculo >

Obtención de Momentos flectores a lo largo de la viga

Se creó una subrutina que utiliza la matriz de fuerzas puntuales y fuerzas distribuidas y desde el valor de V_0 "barre" la superficie de la viga hasta llegar a la primera fuerza.



< **Figura 3.** Viga solicitada - Diagrama de Momento Flector >

Obtención de la elástica de la viga

A partir de la expresión de momentos flectores a lo largo de la viga, mediante la ecuación de la elástica, se utilizaron los métodos numéricos correspondientes al problema de valor inicial.

Para el análisis del problema de valor inicial, se utilizó el siguiente esquema de implementación de vectores:

Vector de variables:

$$v(0)=x$$

$$v(1)=y$$

$$v(2)=y'$$

Vector de derivadas:

$$vp(0)=1$$

$$vp(1)=v(2)$$

$$vp(2)=y''$$

Siendo y'' , la expresión de la elástica de la viga:

$$vp(2)=((Mz)/(E*I_{zz}))*(1+(v(2))^{**2})^{**3/2}$$

Donde Mz es el momento flector a lo largo de la viga (expresión funcional), E el módulo de elasticidad lineal e I_{zz} el momento de inercia.

Condiciones de contorno:

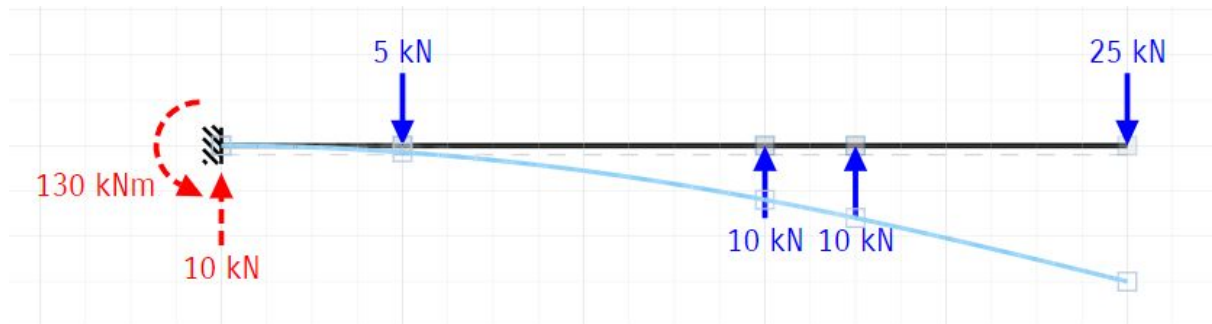
$$v(0)=0$$

$$v(1)=0$$

$$v(2)=0$$

Es decir, en el empotramiento ($x=0$), tanto la deflexión (y) como su pendiente (y') son nulas (condiciones de borde para el cálculo de la elástica en viga empotrada).

Una vez definido el vector de variables, derivadas, y las condiciones de borde, se utilizaron los métodos numéricos del problema de valor inicial, con el objetivo de obtener la elástica de la viga.



< **Figura 4.** Viga solicitada - Elástica de la viga >

Análisis de los resultados

Las reacciones de vínculo halladas son:

$$F_x=2.18E-6 \text{ N}$$

$$F_y=9.999 \text{ N}$$

$$M_z=129.99 \text{ Nm}$$

Comparando los resultados obtenidos con los reales, se observa una mínima discrepancia. Esto se debe al error de representación numérica, correspondiente a la utilización de los “números de máquina”.

Para analizar la deformación de la viga a partir de la ecuación diferencial exacta de su elástica se utilizaron variados métodos numéricos que permitieron obtener resultados con diferentes exactitudes y precisiones.

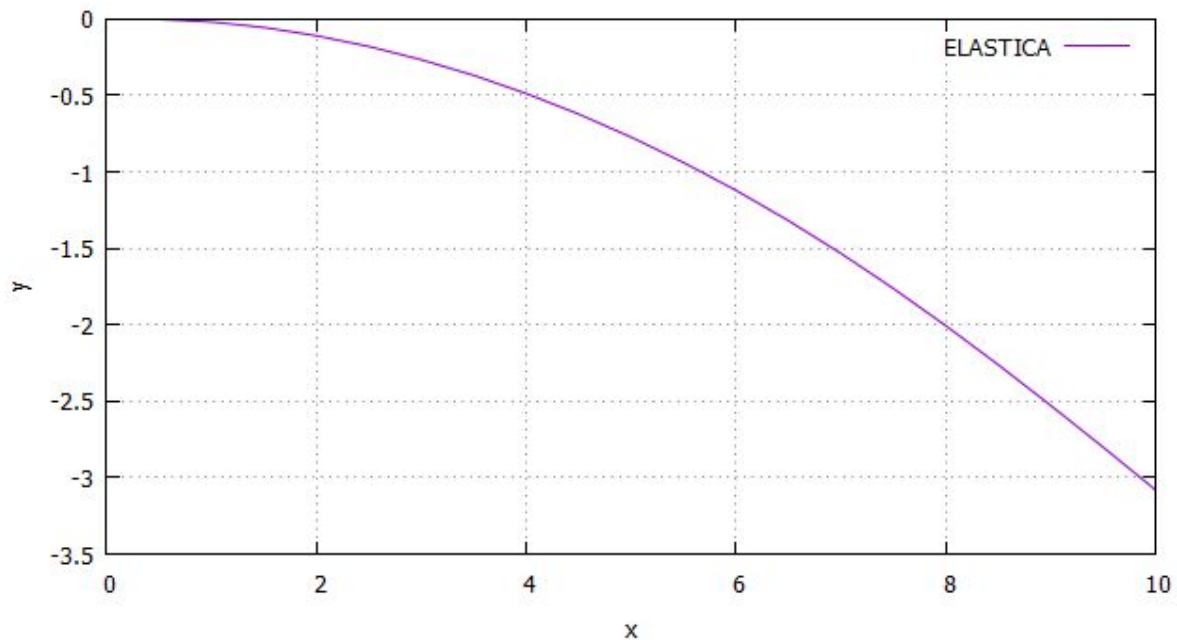
Euler Simple

Este método se basa en los primeros dos términos de la serie de Taylor:

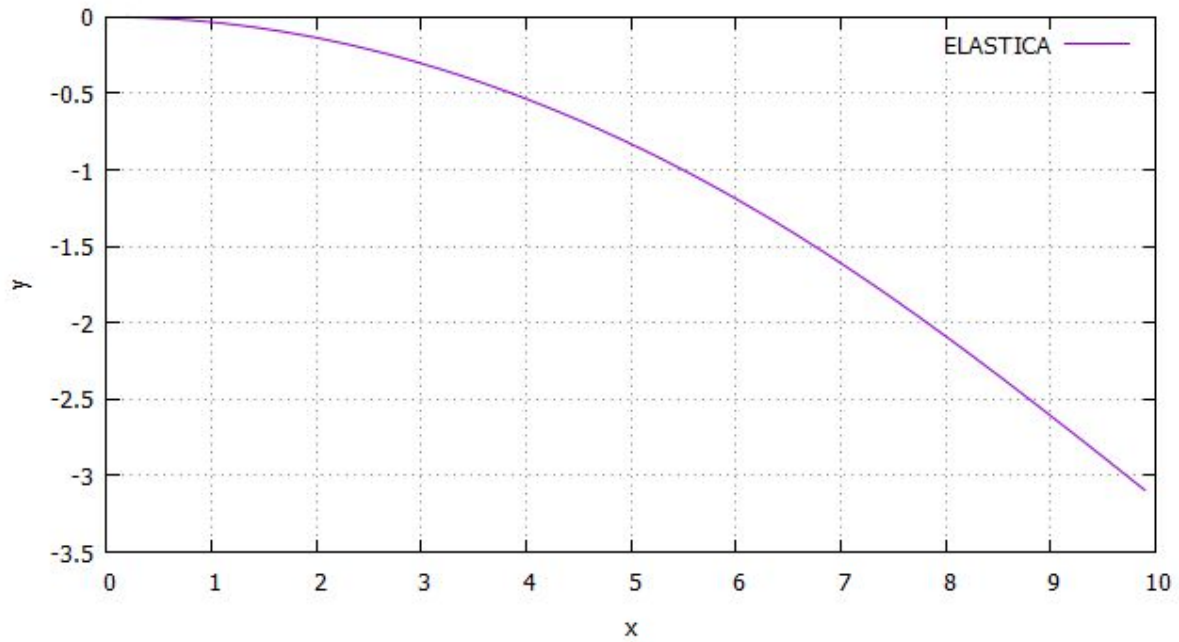
$$y(x_0+h) = y(x_0) + y'(x_0) \cdot h + (y''(\xi) \cdot h^2)/2!$$

Donde el tercer término es el error local.

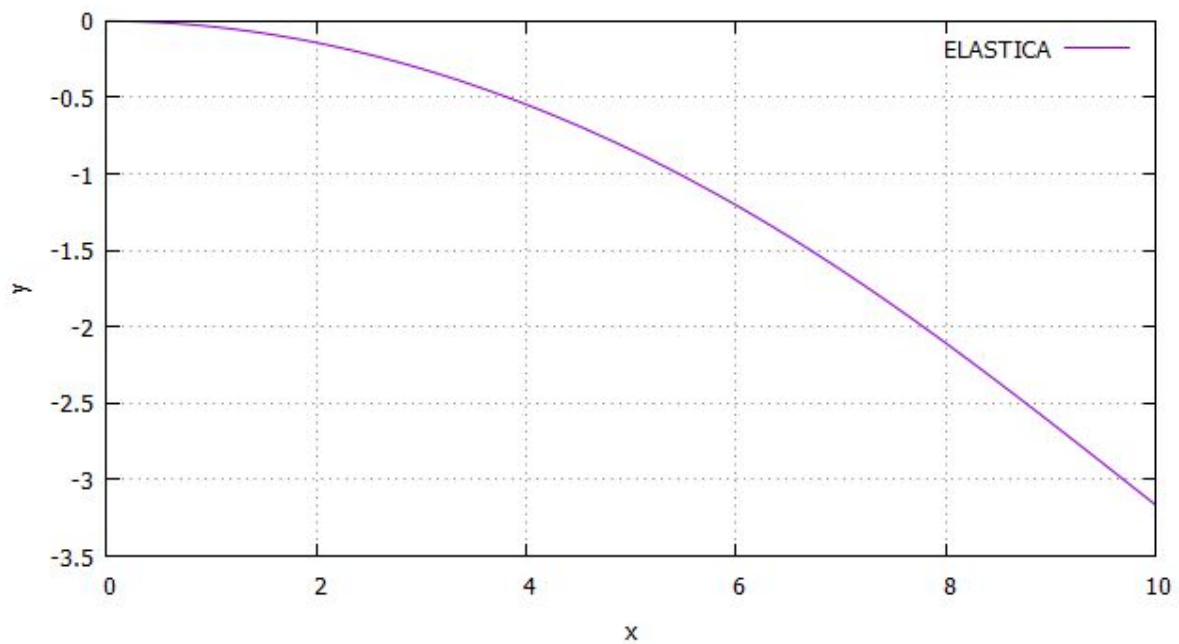
Euler simple es un método sencillo para el cual es necesario utilizar un valor pequeño de h para lograr cierta exactitud. El error global en este método aumenta a medida que nos alejamos del valor inicial; sin embargo, a medida que se disminuye el valor de h , el error se hace más pequeño, aumentando la exactitud de la solución numérica del método.



< **Gráfico 1.** Elástica de la viga con Euler Simple $h=0.5$ >



< **Gráfico 2.** Elástica de la viga con Euler Simple $h=0.1$ >



< **Gráfico 3.** Elástica de la viga con Euler Simple $h=0.01$ >

Euler modificado

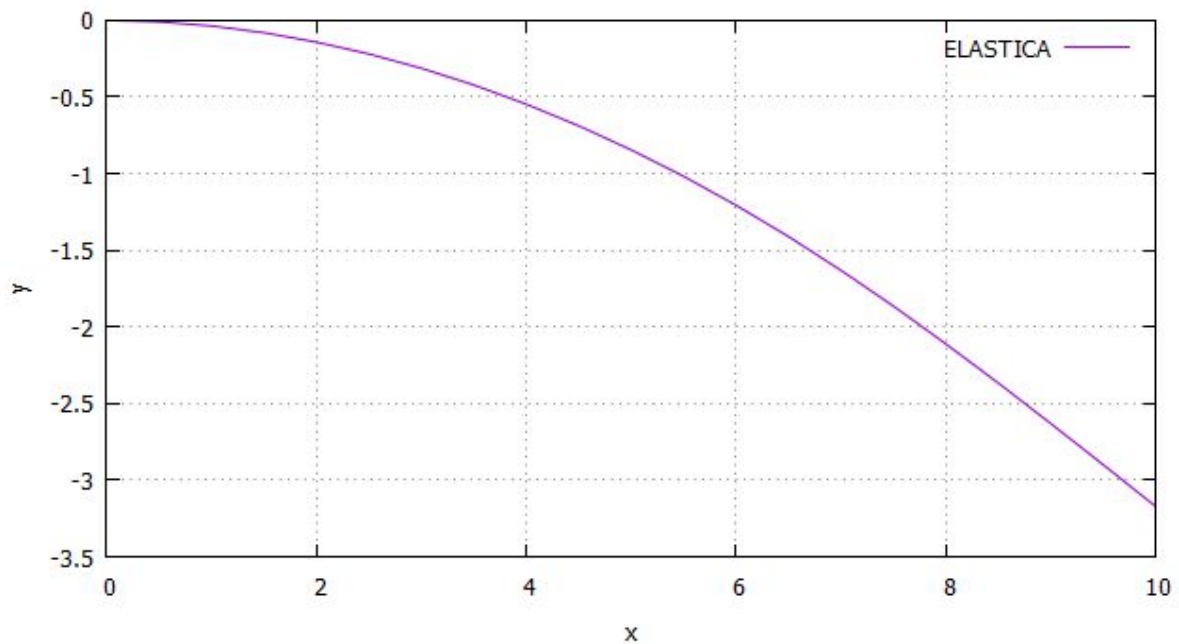
Se obtiene a partir de los tres primeros términos de la serie de Taylor:

$y_{n+1} = y_n + h \cdot y'_n + \frac{h^2 \cdot y''_n}{2!} + \frac{h^3 \cdot y'''(\xi)}{3!}$ donde el último término se considera el error local del método.

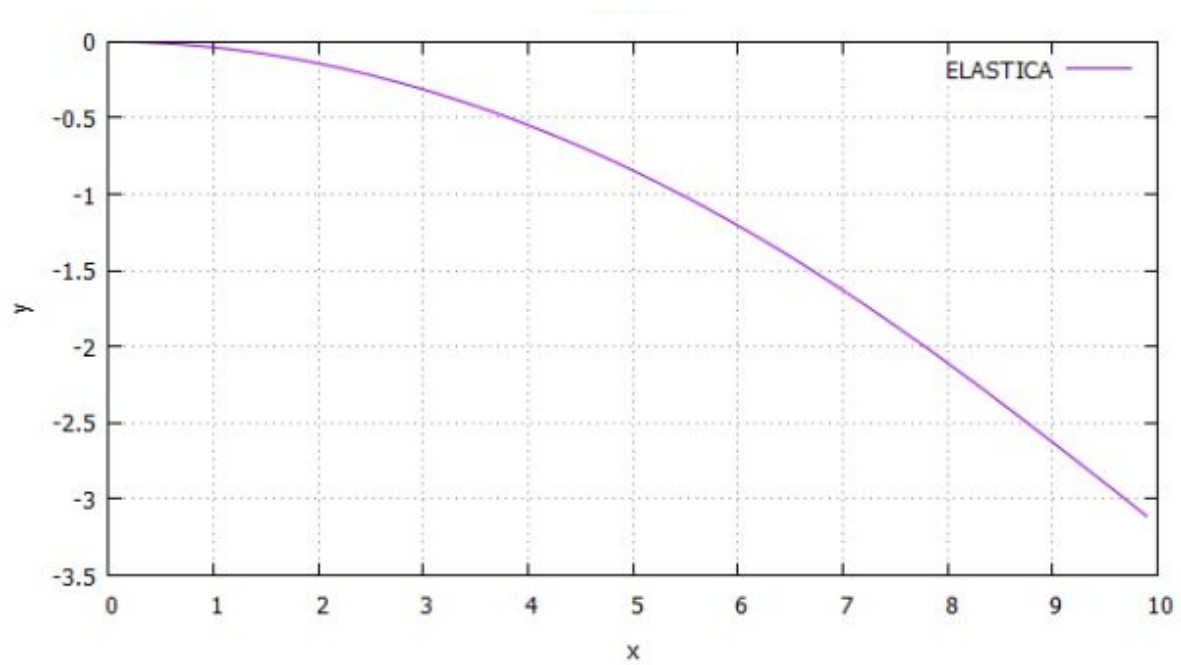
Luego de una serie de operaciones con el polinomio de la serie de Taylor, finalmente se obtiene: $y_{n+1} = y_n + h*(y'_{n+1} + y'_n)/2 + O(h^3)$ con $O(h^3)$ error local del orden de h^3 .

Con el método de Euler modificado se obtiene una mejora respecto al de Euler simple ya que considera en el cálculo el promedio de dos derivadas en lugar de considerar una sola.

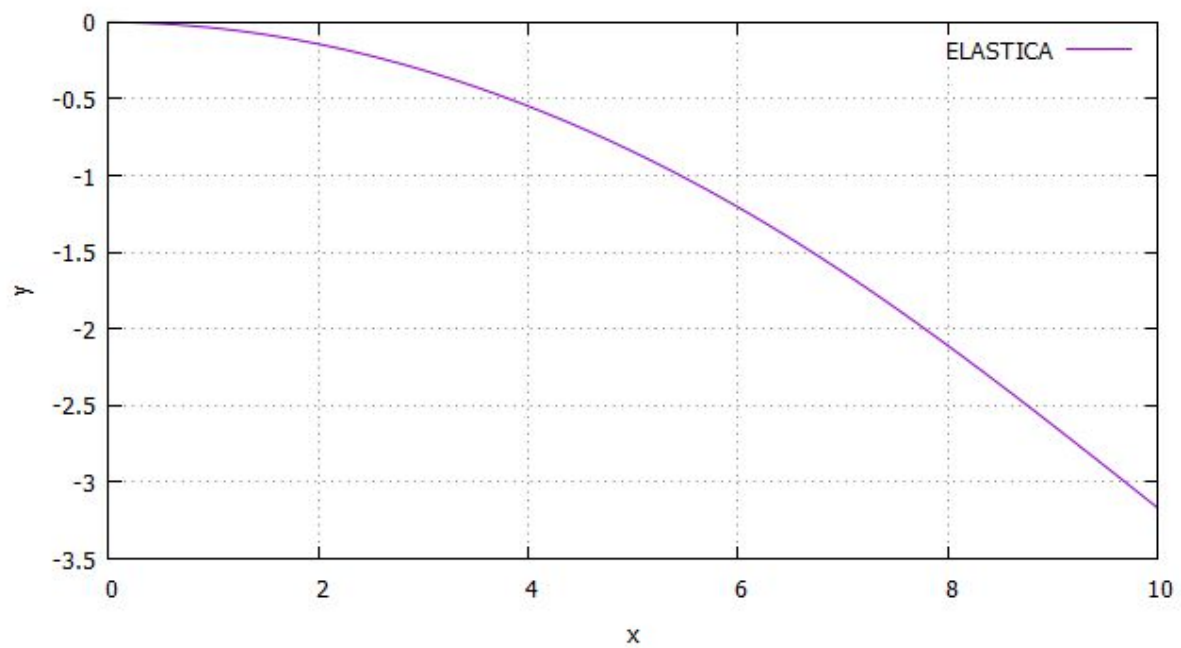
La derivada en el extremo derecho del intervalo se calcula en función del valor estimado de y_{n+1} , valor estimado por el método de Euler simple.



< **Gráfico 4.** Elástica de la viga con Euler Modificado $h=0.5$ >



< **Gráfico 5.** Elástica de la viga con Euler Modificado $h=0.1$ >



< **Gráfico 6.** Elástica de la viga con Euler Modificado $h=0.01$ >

Runge-Kutta de Cuarto orden

Este método se obtiene a partir de Runge-Kutta de Segundo orden. A medida que el orden del método aumenta, también lo hace la complejidad matemática (ya que cada vez se consideran más términos de la Serie de Taylor). En este caso la fórmula final queda expresada:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

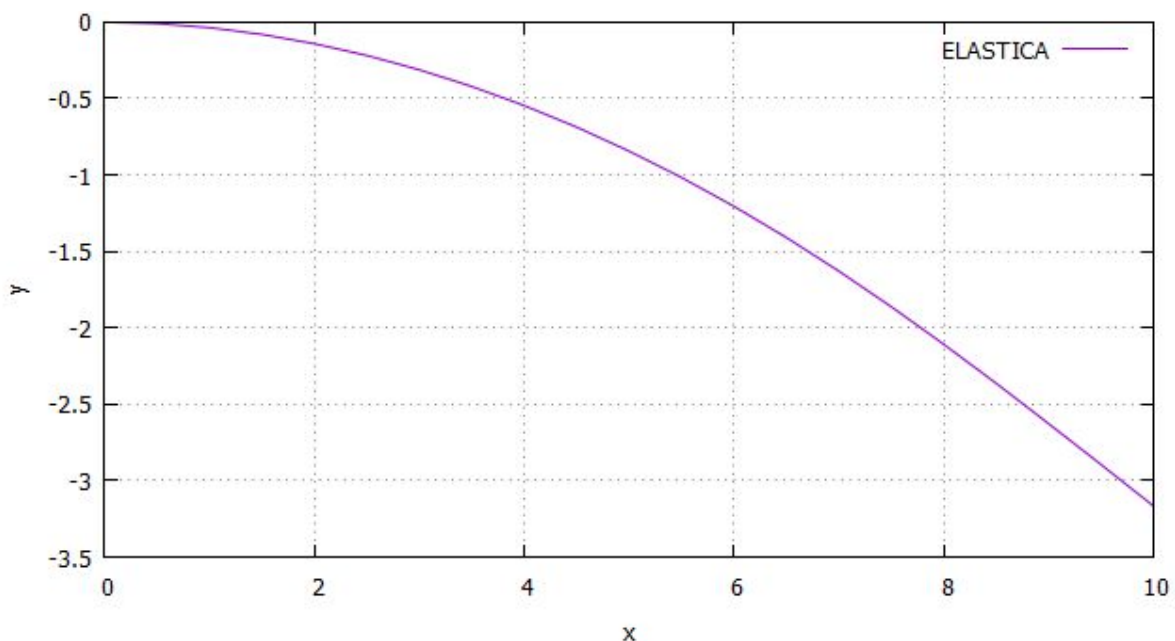
$$k_2 = h \cdot f(x_n + h/2, y_n + k_1/2)$$

$$k_3 = h \cdot f(x_n + h/2, y_n + k_2/2)$$

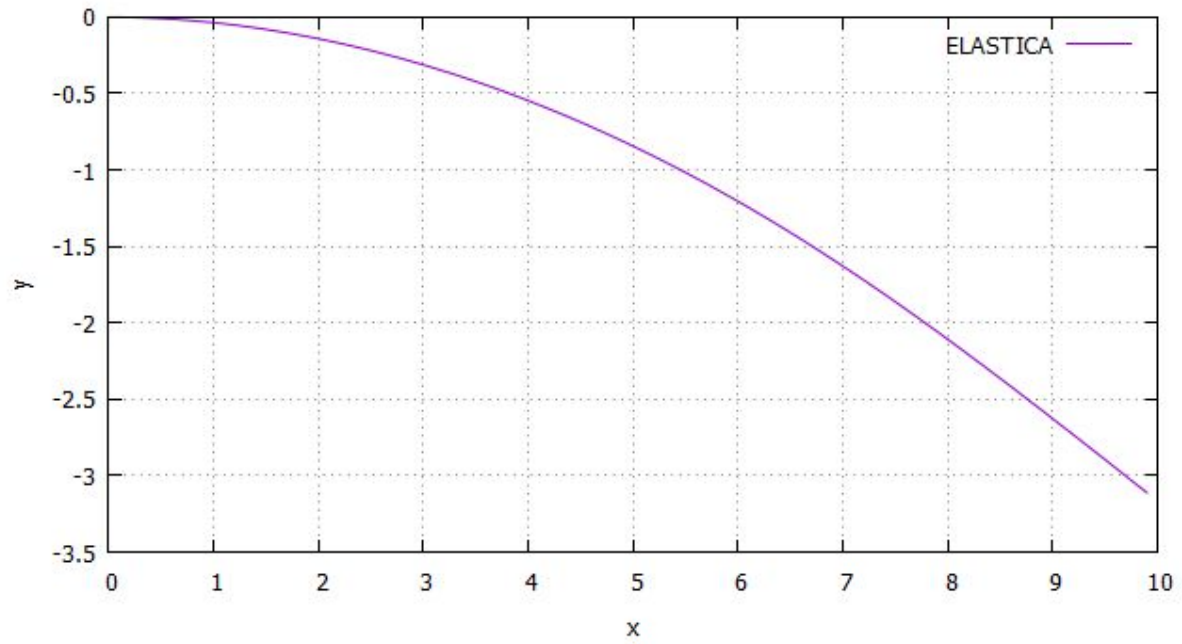
$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

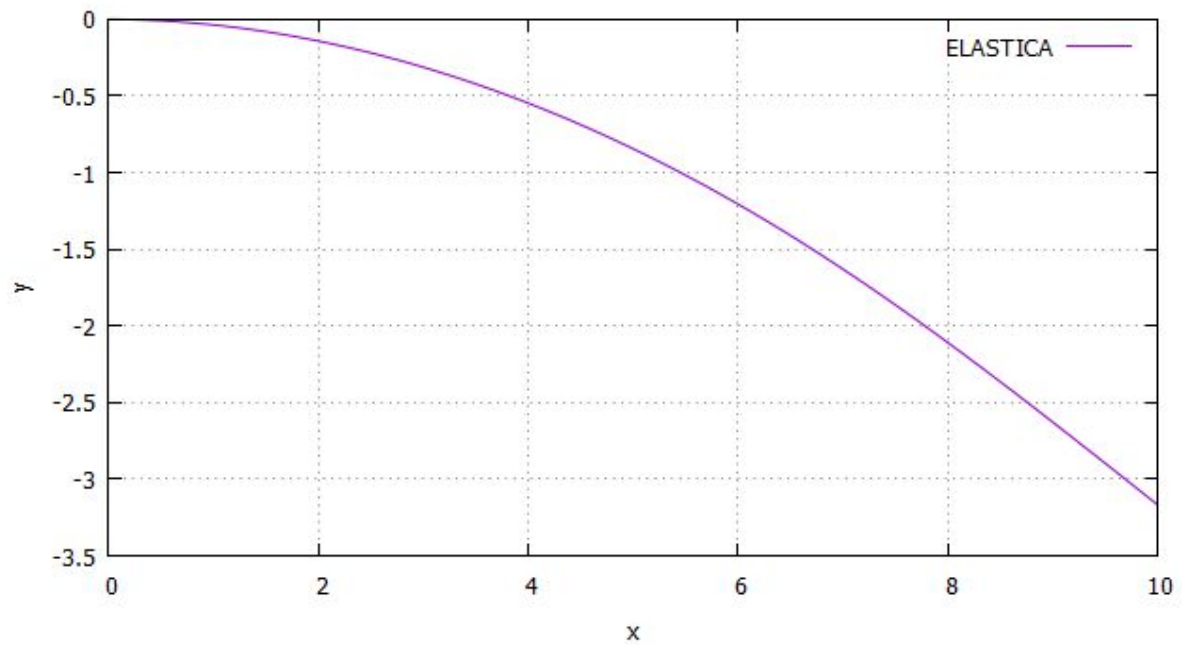
Este método tiene error local del orden (h^5) y error global de orden (h^4), por lo cual se observa una importante mejora comparándolo con métodos de segundo orden. Para poder determinar los valores de los coeficientes se deben elegir dos valores arbitrarios, debido a que hay menor cantidad de ecuaciones que de incógnitas.



< **Gráfico 7.** Elástica de la viga con Runge-Kutta-4 $h=0.5$ >



< **Gráfico 8.** Elástica de la viga con Runge-Kutta-4 $h=0.1$ >



< **Gráfico 9.** Elástica de la viga con Runge-Kutta-4 $h=0.01$ >

Runge-Kutta Fehlberg

En el método de Runge-Kutta de sexto orden se realizan seis evaluaciones funcionales por iteración y se calcula una estimación del error en cada paso. Mediante dicha estimación del error es posible, en cada paso, verificar el error y utilizando una reducción del valor de h se podrá obtener la precisión deseada.

La fórmula final queda expresada:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f(x_n + h/4, y_n + k_1/4)$$

$$k_3 = h \cdot f(x_n + 3h/8, y_n + 3k_1/32 + 9k_2/32)$$

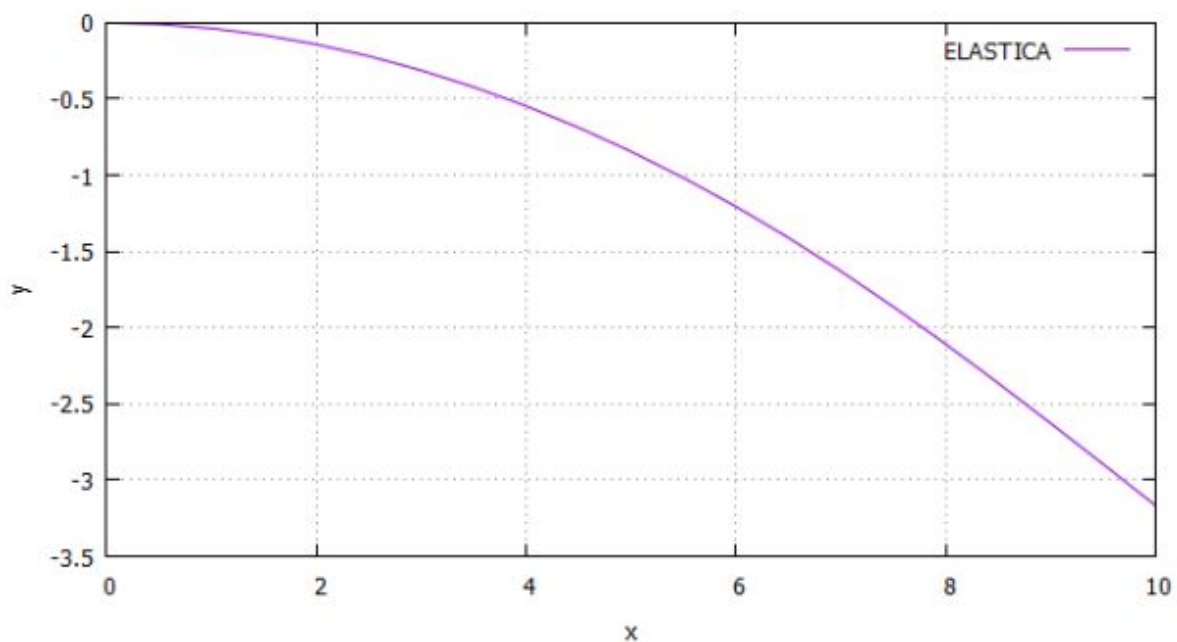
$$k_4 = h \cdot f(x_n + 12h/13, y_n + 1932k_1/2197 - 7200k_2/2197 + 7296k_3/2197)$$

$$k_5 = h \cdot f(x_n + h, y_n + 439k_1/216 - 8k_2 + 3680k_3/513 - 845k_4/4104)$$

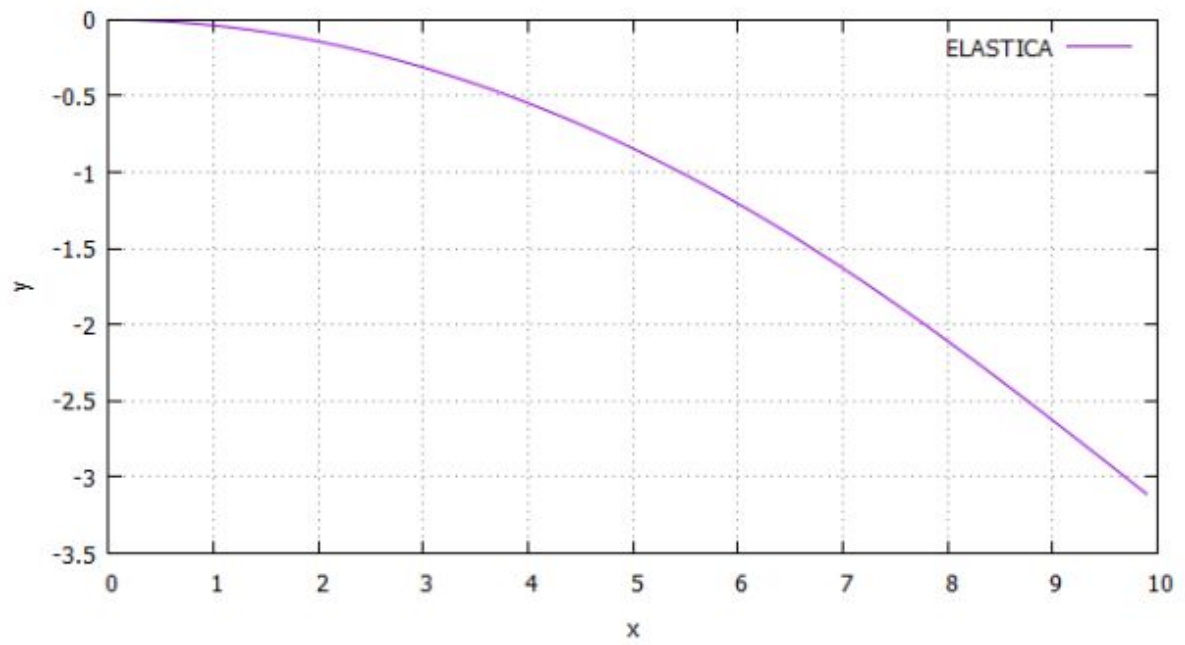
$$k_6 = h \cdot f(x_n + h/2, y_n - 8k_1/27 + 2k_2 - 3544k_3/2565 - 1859k_4/4104 - 11k_5/40)$$

$$y_{n+1} = y_n + 25k_1/216 + 1408k_3/2565 + 2197k_4/4104 - k_5/5$$

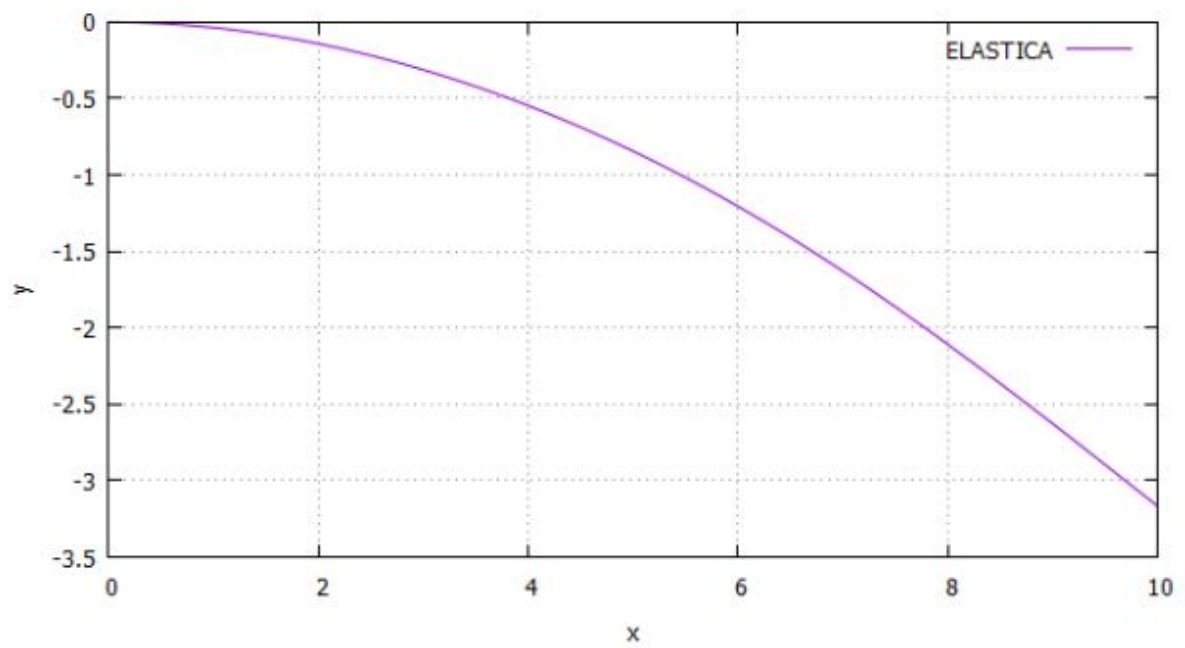
$$E = k_1/360 - 128k_3/4275 - 2197k_4/75240 + k_5/50 + 2k_6/55$$



< **Gráfico 10.** Elástica de la viga con Runge-Kutta 6 $h=0.5$ >



< **Gráfico 11.** Elástica de la viga con Runge-Kutta 6 $h=0.1$ >



< **Gráfico 12.** Elástica de la viga con Runge-Kutta 6 $h=0.01$ >

Observando los gráficos obtenidos, no es posible vislumbrar con exactitud los datos exactos, por lo cual se crearon tablas comparativas con los últimos tres datos:

Euler Simple		Euler Modificado		RK4		RKF	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
9.000000	-2.527421	9.000000	-2.629820	9.000000	-2.626976	9.000000	-2.626976
9.500000	-2.801150	9.500000	-2.898708	9.500000	-2.895386	9.500000	-2.895386
10.000000	-3.080171	10.000000	-3.170223	10.000000	-3.166414	10.000000	-3.166414

<Tabla comparativa con $h=0.5$ >

Euler Simple		Euler Modificado		RK4		RKF	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
9.700000	-2.986364	9.700000	-3.003771	9.700000	-3.003629	9.700000	-3.003629
9.800000	-3.040941	9.800000	-3.058002	9.800000	-3.057856	9.800000	-3.057856
9.900000	-3.095582	9.900000	-3.112274	9.900000	-3.112125	9.900000	-3.112125

<Tabla comparativa con $h=0.1$ >

Euler Simple		Euler Modificado		RK4		RKF	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
9.980000	-3.153957	9.980000	-3.155557	9.980000	-3.155555	9.980000	-3.155555
9.990000	-3.159391	9.990000	-3.160986	9.990000	-3.160985	9.990000	-3.160985
10.000000	-3.164824	10.000000	-3.166416	10.000000	-3.166414	10.000000	-3.166414

<Tabla comparativa con $h=0.01$ >

Tomando el último valor obtenido con RK6 utilizando un valor de $h=0.01$ como referencia, se calcula el porcentaje de error de los otros valores obtenidos:

	Euler Simple			Euler Modificado			RK4			RKF		
h	0.5	0.1	0.01	0.5	0.1	0.01	0.5	0.1	0.01	0.5	0.1	0.01
% error	2.72	2.23	5.02E-2	0.12	1.70	6.31E-6	0	1.71	0	0	1.71	0

<Tabla comparativa de error relativo>

A partir de la obtención de los datos y de las tablas comparativas, se puede observar que para cualquiera de los métodos, el error hallado es relativamente pequeño; dicha observación podría ser adjudicada a que en este caso la ecuación de momento utilizada es lineal, ya que se utilizan fuerzas puntuales.

Además, se demuestra que para los últimos dos métodos utilizados (RK4 y RK6) los resultados de la elástica de la viga son los mismos para cualquiera de los valores de h.

A pesar de que no se vislumbra una gran diferencia en los valores obtenidos, se puede afirmar que al disminuir el valor del paso h, los resultados son más precisos y con menos error.

Conclusión

Luego de un completo análisis de los resultados, se logró obtener la elástica de una viga empotrada, mediante el ingreso de los datos específicos para un determinado problema pero con la posibilidad de modificarlos para cada situación en particular.

En cuanto a los resultados obtenidos, si bien Euler Simple da un error relativo mayor, el mismo es imperceptible comparado con las dimensiones de la viga, debido a que la discrepancia entre la elástica obtenida y la real es del orden de los milímetros.

Por otro lado, y no menos importante, el hecho de que los métodos de Runge-Kutta de orden mayor requieran más esfuerzo computacional (mayor cantidad de operaciones por iteración), es un indicador de que Euler Simple es una buena aproximación, para el caso de los esfuerzos puntuales analizados.

Bibliografía

Mirco D. Chapetti. "Mecánica de materiales". Ediciones Al Margen, Primera Edición, 2005.

Simulación de vigas con esfuerzos aplicados

STRIAN- Online Structural Analysis <https://structural-analyser.com>

Anexo

Problemas con la elaboración del software y solución

El principal problema a la hora de definición de las ecuaciones diferenciales es que a medida que cambia el punto de análisis de la elástica de la viga su momento cambia, implicando una variación de la ecuación diferencial asociada a la misma.

Por este motivo, se decidió crear una subrutina que devuelva el valor del momento asociado al punto de análisis del método aplicado.

¿Cómo funciona?

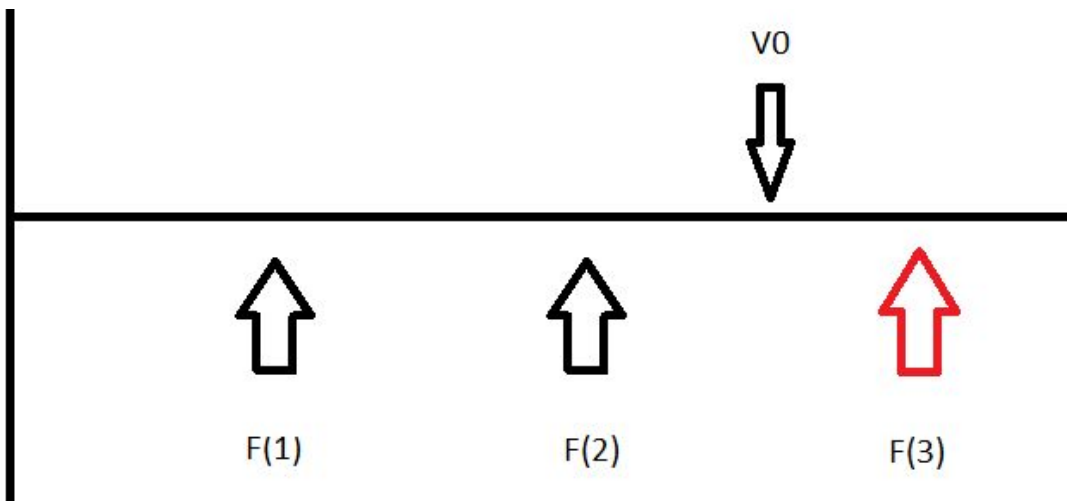
1)

```
REAL(8) :: TRAMO
INTEGER(8) :: I
I=cantidadF
TRAMO=-P*(V0)*(V0)/2.
DO WHILE (M(I,1)>=V0)
    I=I-1
END DO
```

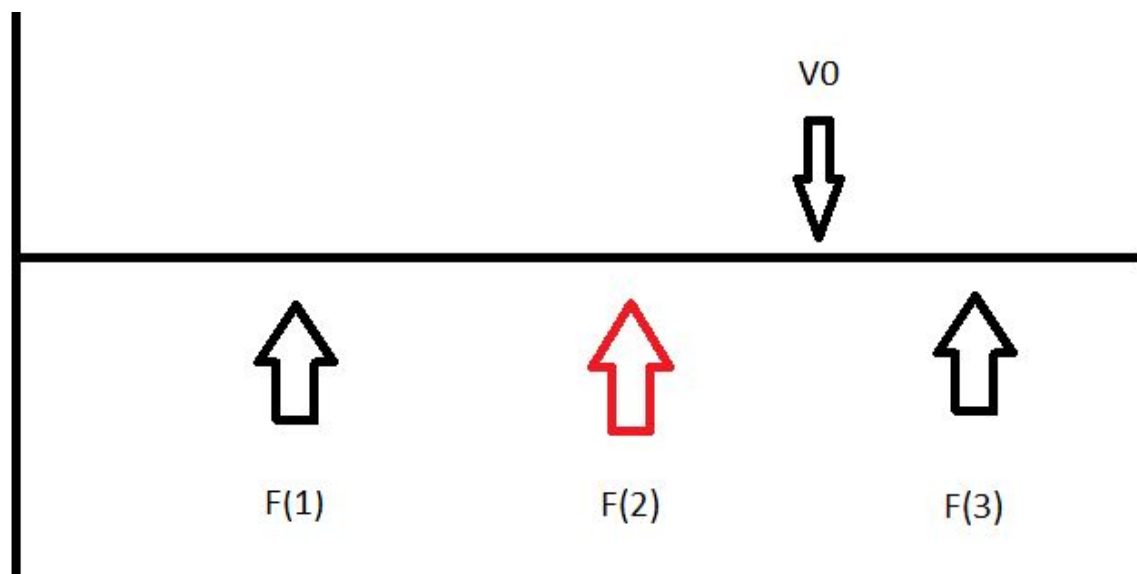
En primer lugar, inicializa la variable tramo en $-P \cdot (V_0) \cdot (V_0) / 2$, es decir que crea el momento del peso considerándolo como una fuerza distribuida.

Luego, con una sentencia “do while” recorre desde la fuerza más lejana de la matriz, preguntándose si se encuentra más alejada de la pared.

A manera de ejemplo, se adjunta el siguiente gráfico que ilustra la viga empotrada y las fuerzas aplicadas a el. En este caso, comienza analizando $f(3)$ ya que es la que se encuentra más lejos que v_0 de la pared. De esta manera, ingresa el programa a la sentencia “do while”.



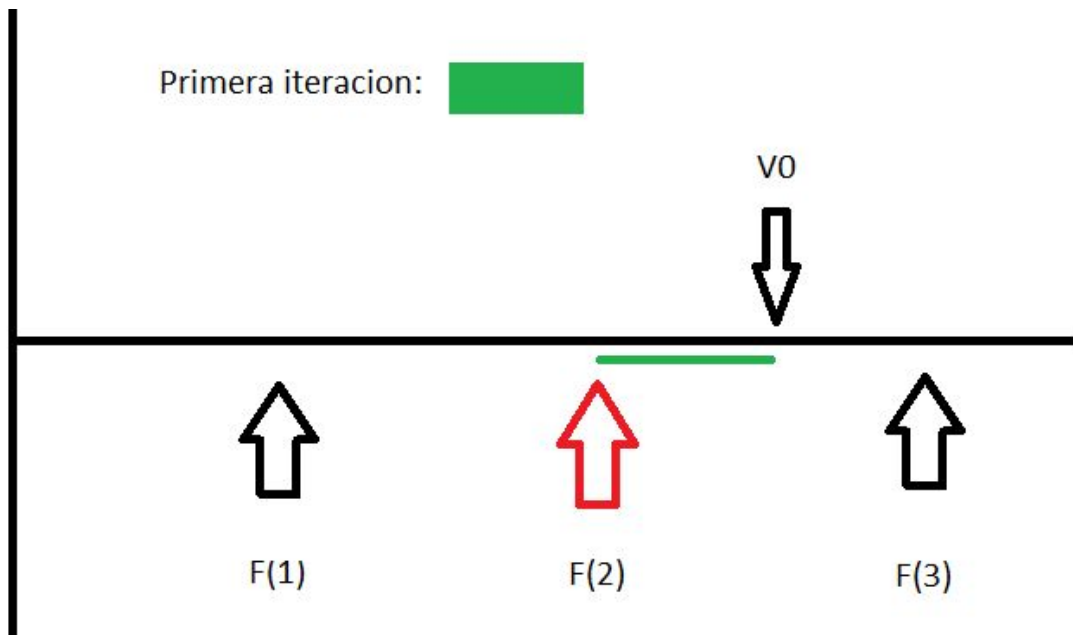
Luego, analiza la siguiente fuerza, $f(2)$ que se encuentra más cerca que $v0$ del empotramiento, cerrando el ciclo while con un índice 2.



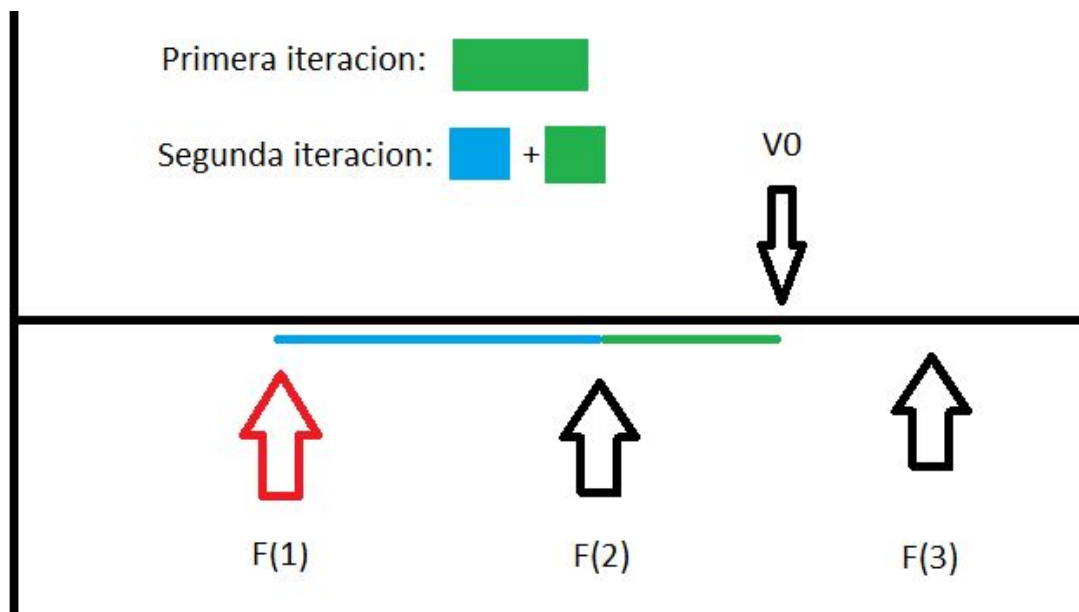
2)

```
DO WHILE (I>0)
    TRAMO=TRAMO+M(I,3)*sin(M(I,2))*(V0-M(I,1))
    I=I-1
END DO
```

En el próximo ciclo se crean los tramos con respecto a $V0$. En el primer ciclo se calcula únicamente este momento.



De esta manera, en el segundo ciclo daría:



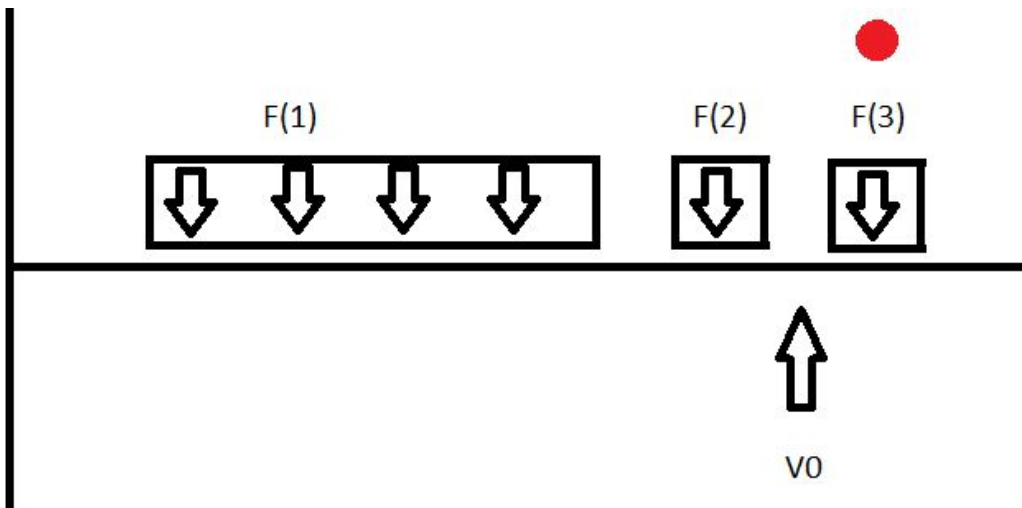
ACLARACIÓN: El momento que se encuentran a la izq de la fuerza $F(1)$ se calcula en la función v_prima

1Bis)

```
I=cantidadFD
DO WHILE (MD(I,2)>=V0)
  I=I-1
END DO
```

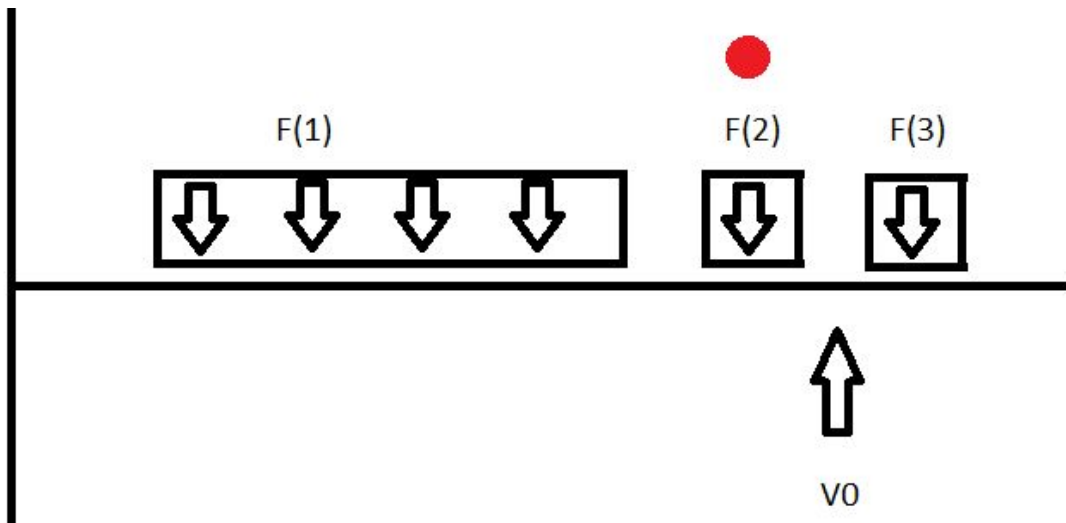
En esta parte del código se calcula exactamente de la misma manera que en el apartado (1) pero con la diferencia de que se utiliza para las fuerzas distribuidas.

Primera iteración:



Como F(3) está más lejos que V0 del empotramiento, ingresa a la sentencia “do while”.

Segunda iteración:



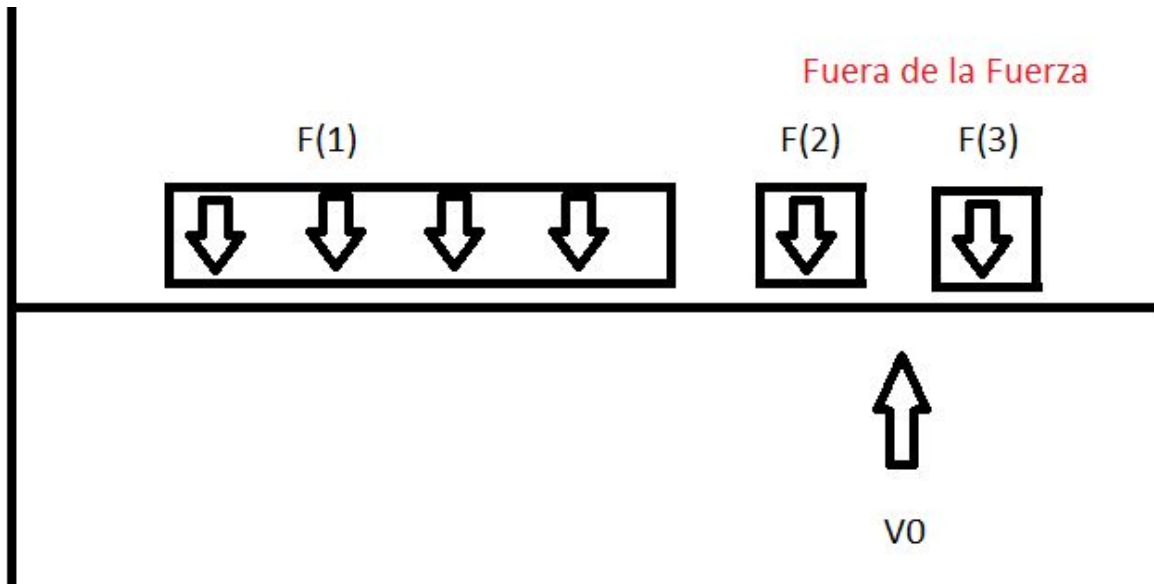
Como F(2) está más cerca que V0 de la pared, sale del ciclo while con un índice de 2.

3)

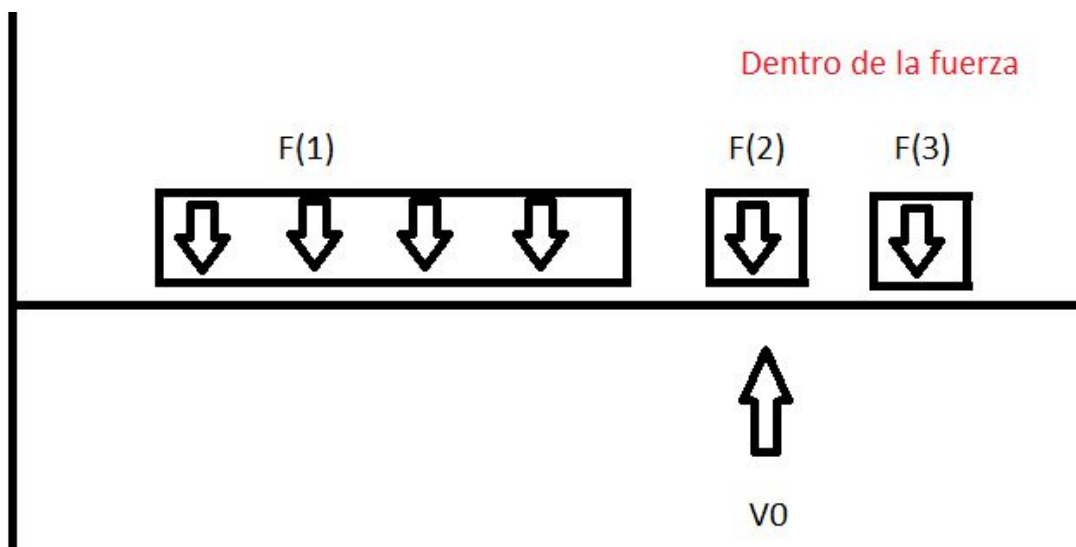
```
IF (MD(I,2)<=V0) THEN !V0 FUERA DE LA ZONA DE LA CARGA DISTRIBUIDA
    TRAMO=TRAMO+MD(I,3)*(MD(I,2)-MD(I,1))*(V0-((MD(I,2)-MD(I,1))/2.))+MD(I,1))
ELSE !V0 DENTRO DE LA ZONA DE LA CARGA DISTRIBUIDA
    TRAMO=TRAMO+MD(I,3)*(V0-MD(I,1))*((V0)-MD(I,1))/2.
END IF
```

En este punto pueden ocurrir dos situaciones:

1. V_0 se encuentra fuera del alcance de la fuerza distribuida.



2. V_0 se encuentra dentro del alcance de la fuerza distribuida.



En el primer caso, la fuerza distribuida se tiene en cuenta como una carga puntual por lo tanto se multiplica su módulo, que está expresado en u/mts , por el largo de la fuerza distribuida; luego se multiplica por la diferencia entre V_0 y el punto medio de la fuerza.

En el segundo caso, la fuerza distribuida se analiza como una función cuadrática y se calcula como el producto entre la fuerza unitaria de la fuerza y la diferencia entre V_0 y la posición inicial de la fuerza. Luego, este resultado se multiplica por la diferencia entre V_0 y la posición inicial de la fuerza dividido por 2.

4)

```

DO WHILE (I>0)
    TRAMO=TRAMO+MD(I,3)*(V0-MD(I,1))*((V0)-MD(I,1))/2.
    I=I-1
END DO

```

Dicha sentencia suma los momentos creados por las fuerzas distribuidas, las cuales son vistas como fuerzas puntuales.

5)

```

I=cantidadM
DO WHILE (MM(I,1)>=V0)
    I=I-1
END DO
DO WHILE (I>0)
    TRAMO=TRAMO+MM(I,1)
END DO

```

Este ciclo realiza el mismo procedimiento que los ciclos anteriores para cálculo de los momentos por matriz, pero en este caso la matriz MM tiene solo momento, siendo la representación del giro de la viga respecto al punto de apoyo, en este caso el empotramiento.