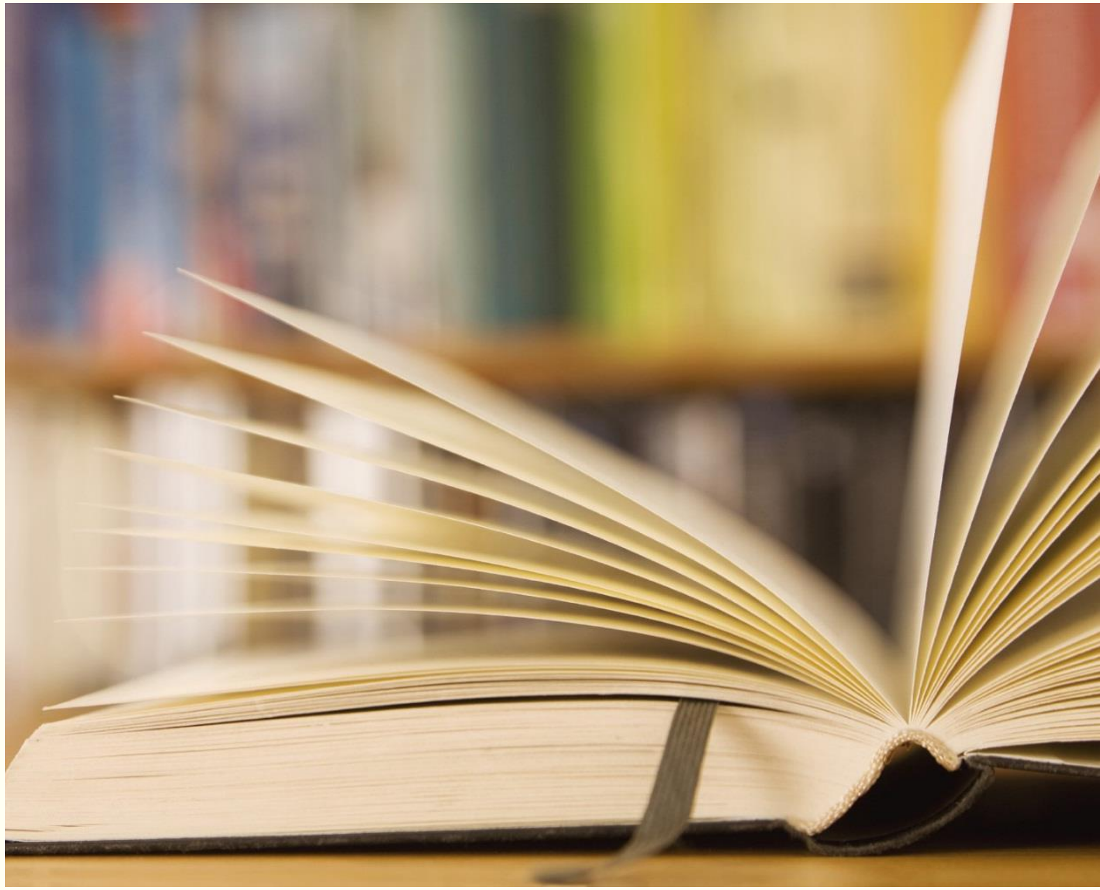
UNIDAD 3:
VARIABLE ALEATORIA



Cátedra: Estadística.
Prof. Lucía Primo Brochiero
luciaprimo@uca.edu.ar

¿Qué es una variable aleatoria?

Es una descripción numérica del resultado de un experimento aleatorio.

Se clasifican dependiendo del conjunto numérico que asuman, en:

- *Discretas*: puede tomar un número finito de valores o una sucesión infinita de valores.
- *Continuas*: puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo real dado o una colección de intervalos.

Ejemplos

Discretas

- Experimento: una persona presenta su examen final para recibirse y el mismo tiene 4 partes. Se define la variable aleatoria como:

X: "número de partes del examen aprobadas"

X puede tomar los valores 0, 1, 2, 3 o 4

- Experimento: observar los autos que pasan por un peaje durante un día determinado.

X: "número de autos que pasan por el peaje durante un día determinado"

X puede tomar los valores 0, 1, 2, …. (toma una sucesión infinita de valores)

Ejemplos

Continuas

- Experimento: observar las llamadas que llegan a cierta oficina de una empresa.

X: “Tiempo, en minutos, entre dos llamadas consecutivas”

Puede tomar cualquier valor real $x \geq 0$, o sea, un número infinito de valores.

- Experimento: Construir una biblioteca.

X: “Porcentaje del proyecto realizado en 6 meses”

X puede tomar valores reales de 0 a 100: $0 \leq x \leq 100$

Distribuciones de probabilidad

- Describen cómo se distribuyen las probabilidades entre los distintos valores de una variable aleatoria.

Distribuciones de probabilidad

Para variables aleatorias discretas, la distribución se da por una *función de probabilidad* $p(x)$, la misma da la probabilidad de cada valor de la variable aleatoria. Esto es:

$$P(X = x_k) = p(x_k)$$

También tenemos la *función de distribución acumulada* de una variable aleatoria X, que muestra la probabilidad de la variable aleatoria HASTA un valor específico.

$$F(x_k) = P(X \leq x_k)$$

Ejemplo

Experimento: lanzar al aire 3 monedas equilibradas y observar el resultado.

Espacio muestral: $\Omega = \{(C,C,C),(C,C,X),(C,X,C),(X,C,C),(C,X,X),(X,C,X),(X,X,C),(X,X,X)\}$

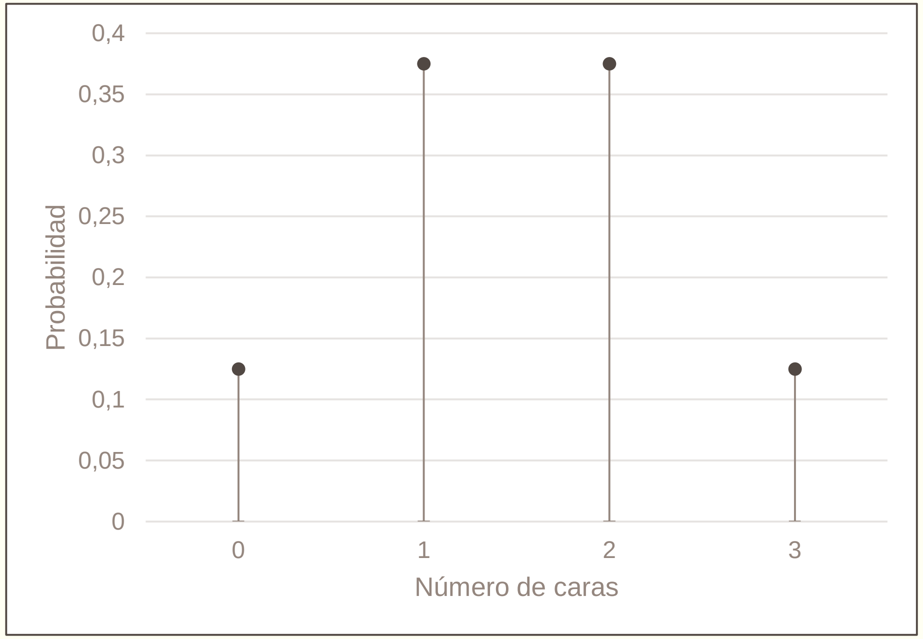
Cada realización del espacio muestral tiene la misma probabilidad de ocurrencia.

Variable aleatoria X: “número de caras”, $X = \{0,1,2,3\}$

x	0	1	2	3
$\mathrm{p}(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	1

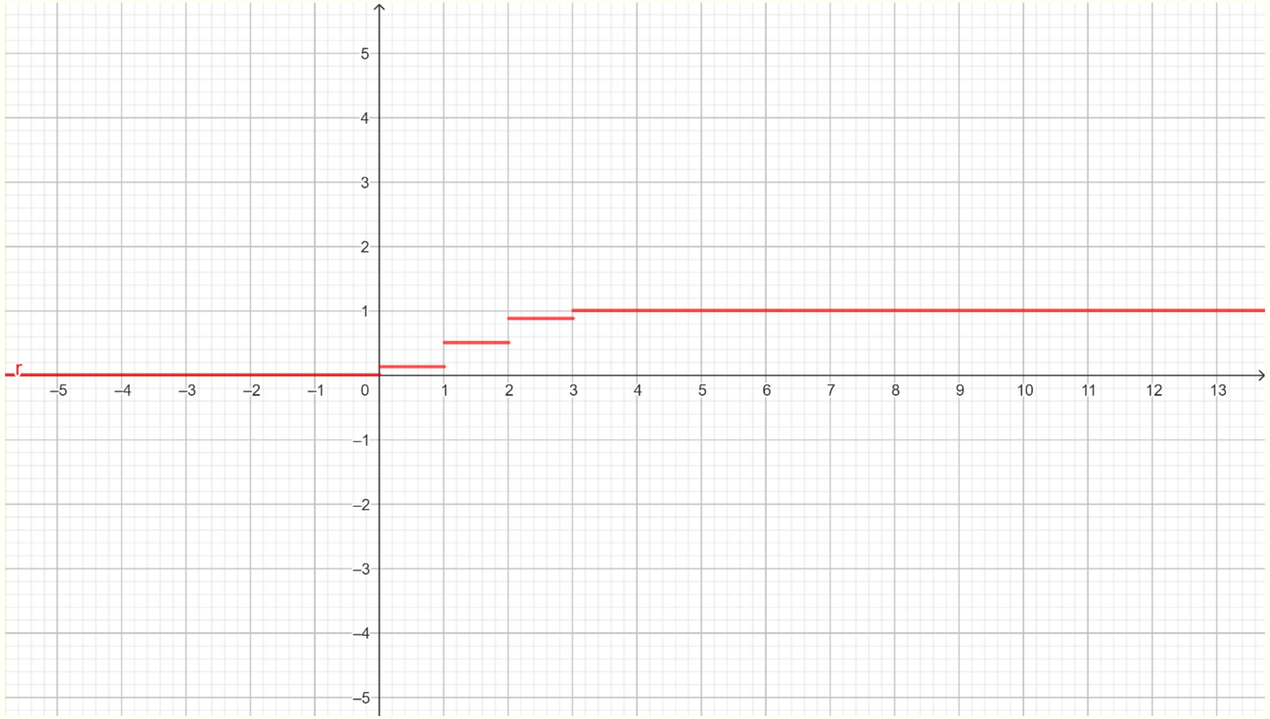
¿Cómo se consiguieron estos valores?

Ejemplo



Distribución de probabilidad

Función de distribución acumulada



Valor esperado o esperanza de una variable aleatoria discreta

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)$$

Siendo x_i los valores que puede tomar la variable aleatoria, y p(x_i) su probabilidad

- Observar que, el valor esperado no tiene por qué ser un valor que asume la variable aleatoria.
- Se lo puede pensar como un promedio ponderado de los valores que toma la variable, siendo el peso, la probabilidad de cada valor.

En el ejemplo anterior:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{3} x_i \cdot p(x_i) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

Varianza y desvío estándar de una variable aleatoria discreta

$$Varianza \leftarrow \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i)$$

$$Desvío\ estándar \leftarrow \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i)}$$

En el ejemplo anterior:

$$V(X) = \sum_{i=0}^{3} (x_i - \frac{3}{2})^2 \cdot p(x_i) = (0 - \frac{3}{2})^2 \cdot \frac{1}{8} + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

Distribución binomial

Está relacionada con un experimento de pasos múltiples al que se le llama *experimento binomial*.

<u>Propiedades de un experimento binomial</u>:

1. El experimento consiste en una serie de n ensayos idénticos.
2. En cada ensayo hay dos resultados posibles. A uno de estos resultados se le llama *éxito* y al otro se le llama *fracaso*.
3. La probabilidad de éxito, que se denota p, no cambia de un ensayo a otro. La probabilidad de fracaso, $1-p$, tampoco cambia de un ensayo a otro.
4. Los ensayos son independientes.

- Lo que interesa es el número éxitos de *n* ensayos.
- X: "número de éxitos en *n* ensayos", $X\colon \{0, 1, 2, 3, \ldots., n\} \longmapsto$ Variable aleatoria discreta.

<u>EJEMPLO</u>

Experimento: "lanzar una moneda 5 veces y observar si cae cara o cruz hacia arriba"

Interesa calcular el número de caras que aparecen en los 5 lanzamientos.

¿Qué variable aleatoria se define?

¿Tiene las características de un experimento binomial?

Distribución de probabilidad binomial

X: número de éxitos en las n pruebas

X tiene una distribución binomial de parámetros n y p. $X \sim Bi(n,p)$

$$f(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

$$n: número\ de\ ensayos$$

$$x: cantidad\ de\ éxitos\ buscada, x = 0,1,2 \ldots . n$$

$$p: probabilidad\ de\ éxito$$

$$q = 1 - p: probabilidad\ de\ fracaso$$

También se define para este tipo de variable, su valor esperado y su varianza.

$$E(X) = n \cdot p$$

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

<u>Ejemplo</u>: Se lanza un dado 5 veces y se registra la cantidad de veces que sale un número menor a 3.

X: “cantidad de números menores a 3 en 5 lanzamientos de un dado”

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5-2} = 10 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{27} = 0{,}329$$

$$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{3} = 1{,}67$$

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 1{,}11$$

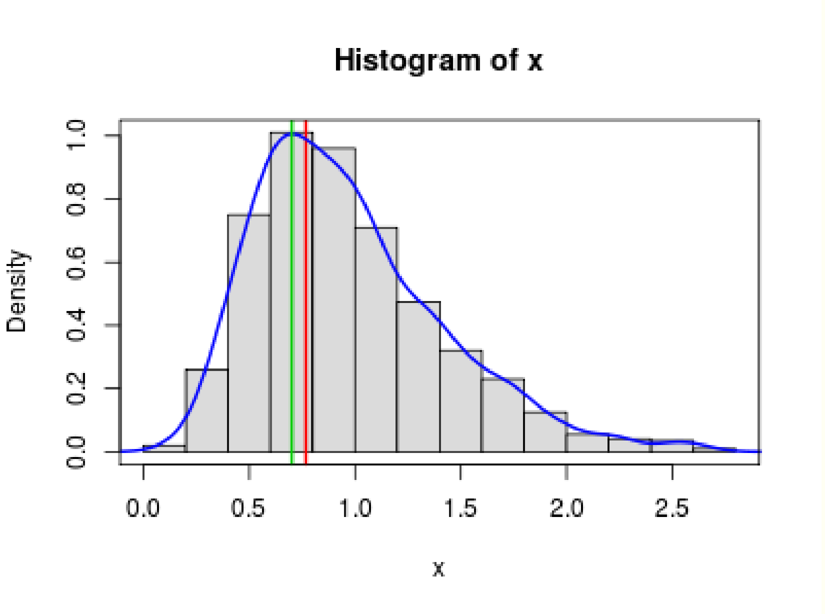
Densidad de probabilidad

Para variables aleatorias continuas, tenemos la función densidad de probabilidad, f(x).

En un histograma el área de cada rectángulo representa la frecuencia de cada clase. Si transformamos el eje de modo que el área de cada barra sea igual a la proporción de unidades en cada clase y dibujamos una curva suave del histograma, tendremos la función de densidad.

$f(x)$ satisfice lo siguiente:

- $f(x) \geq 0 \; para \; todo \; x$.
- El área total bajo la curva $f(x)$ es 1.
- $P(a \leq X \leq b)$ es el área bajo la curva $f(x)$ entre a y b.



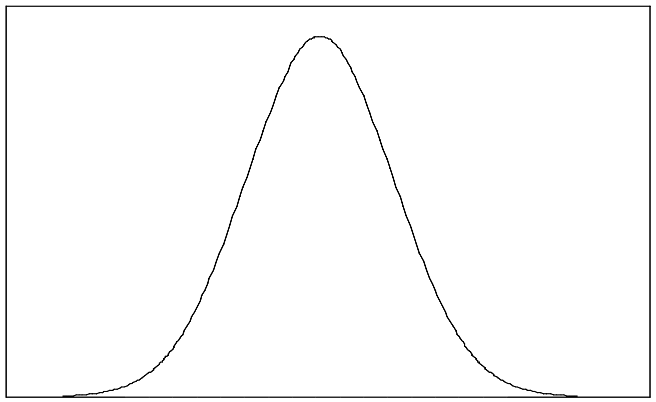
Distribución normal

Dentro de las variables continuas, veremos las que tienen *distribución normal*.

Su función de densidad es: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{\frac{-1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2}$, siendo μ la media y σ el desvío estándar.

La media puede tomar cualquier valor real y la varianza puede tomar cualquier valor positivo.

Gráficamente, tiene una representación en formato de campana.



La campana de Gauss

Particularidades:

- Es simétrica.
- Es asintótica al eje x.
- μ es su centro de gravedad (mediana, media y moda).
- σ es la distancia desde el eje de simetría a los puntos de inflexión de la curva.
- Entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ se acumula aproximadamente el 68% del área total bajo la curva. Entre $\mu - 2\sigma\ y\ \mu + 2\sigma$, el 95% y entre $\mu - 3\sigma\ y\ \mu + 3\sigma$, el 99,7%.

Distribución normal estándar

Para cualquier $X \sim N(\mu, \sigma)$, la variable $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ tiene una distribución normal estándar,

con $E(Z) = 0 \; y \; V(Z) = 1$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot} e^{\frac{-1}{2} z^2}$$

La función de distribución acumulada de Z, $P(Z \leq z)$, está tabulada y permite calcular probabilidades para cualquier distribución normal.