Test de Hipótesis

FLORENCIA GONZALEZ

Test de Hipótesis

La prueba de hipótesis se refiere a los procedimientos formales utilizados por los estadísticos para aceptar o rechazar las hipótesis estadísticas.

La mejor manera de determinar si una hipótesis estadística es cierta sería examinar a toda la población, pero eso a menudo es poco práctico, cuando no imposible. Es así que los investigadores suelen examinar una muestra aleatoria de la población.

Se presentan dos tipos de hipótesis estadísticas:

- La hipótesis nula, denotada por H_0, que por lo general es la hipótesis de que los resultados de las observaciones de la muestra son producto exclusivamente del azar.

- La hipótesis alternativa, denotada por H_1 o H_a, es la hipótesis de que las observaciones de la muestra se ven influidas por alguna causa no aleatoria, determinando entonces que el efecto que se sospecha puede llegar a ser cierto.

Test de Hipótesis

De esta manera, el proceso consistirá en determinar si la evidencia que se manifiesta en la muestra poblacional refuta la hipótesis nula y conlleva a la valoración de la hipótesis alternativa, o viceversa. Los pasos son:

- Plantear las dos hipótesis, H_0 y H_a
- Se extrae la muestra y se analiza, llegando a la conclusión de si los resultados son viables si la H_0 fuera cierta.
- Si esos resultados son poco probables de ocurrir cuando H_0 es cierta, se rechaza esa hipótesis y se sustenta la otra, que no queda automáticamente demostrada, pero por lo menos no tenemos evidencia **suficiente** para rechazarla.

Para decidir si los resultados son compatibles o no con H0 se deberá establecer de antemano, una regla o criterio de decisión, que se basa en la distribución muestral del estimador del parámetro sobre el cual estamos intentando establecer las hipótesis.

Test de Hipótesis

De esta manera, el proceso consistirá en determinar si la evidencia que se manifiesta en la muestra poblacional refuta la hipótesis nula y conlleva a la valoración de la hipótesis alternativa, o viceversa. Los pasos son:

- Plantear las dos hipótesis, H_0 y H_a
- Se extrae la muestra y se analiza, llegando a la conclusión de si los resultados son viables si la H_0 fuera cierta.
- Si esos resultados son poco probables de ocurrir cuando H_0 es cierta, se rechaza esa hipótesis y se sustenta la otra, que no queda automáticamente demostrada, pero por lo menos no tenemos evidencia **suficiente** para rechazarla.

Para decidir si los resultados son compatibles o no con H0 se deberá establecer de antemano, una regla o criterio de decisión, que se basa en la distribución muestral del estimador del parámetro sobre el cual estamos intentando establecer las hipótesis.

Test de Hipótesis

Ejemplo 1

Supongamos que queremos determinar si una moneda está trucada.

Aplicando todo lo anteriormente aprendido tendremos:

- La variable que expresa el resultado obtenido al arrojar la moneda, que llamaremos x.
- Dos valores para x, CARA (lo simbolizamos c), y ceca (cruz, lo simbolizamos +)
- Las probabilidades de c y ✗, P(X=c) =p, P(X=✗)=1-p
- Dos hipótesis que se basan en la confirmación (o refutación) de si la moneda está trucada

$$H_0: \quad p = 0,5$$
$$H_a: \quad p \neq 0,5$$

Test de Hipótesis

Comenzamos nuestro experimento, que constará en arrojar 100 veces la moneda y anotar el resultado obtenido.

Por la teoría de probabilidad y de las variables aleatorias, se sabe que si p = ½, la distribución muestral de $\hat{p}$ tendrá distribución normal con media 0.5 y desviación típica 0.05. Esto quiere decir que, antes de realizar el experimento y calcular la proporción de caras entre las 100 tiradas, ya sabemos que, si la moneda no está trucada, encontraremos una distribución de los valores que cumple con lo teóricamente establecido.

Supongamos entonces que obtuvimos 61 caras ($\hat{p} = 0.61$). ¿Qué responderíamos a nuestra cuestión? ¿La moneda está trucada o no?

Test de Hipótesis

Generalizando, podemos hablar de distintos planteos de pruebas de hipótesis para los parámetros de una población:

Considerando que θ es un parámetro de la población, y siendo θ_0 un posible valor del parámetro, se pueden plantear 3 tipos de pruebas típicas:

a) Prueba bilateral o de dos colas
   H_0) $\theta = \theta_0$ (El parámetro θ es igual a θ_0), contra
   H_a) $\theta \neq \theta_0$ (el valor de θ se ha modificado)

b) Prueba unilateral de cola izquierda

   H_0) $\theta \geq \theta_0$ (El parámetro θ es igual a θ_0 o mayor), contra
   H_a) $\theta < \theta_0$ (el valor de θ ha disminuido)

c) Prueba unilateral de cola derecha

   H_0) $\theta \leq \theta_0$ (El parámetro θ es igual a θ_0 o menor), contra
   H_a) $\theta > \theta_0$ (el valor de θ ha aumentado)

Errores de decisión

Dos tipos de errores pueden resultar de una prueba de hipótesis.

- **Error de tipo I**

  Se produce cuando el investigador rechaza la hipótesis nula cuando es verdadera. La probabilidad de cometer un error de tipo I se llama nivel de significación. Esta probabilidad también se llama alfa, y con frecuencia se denota por α.

- **Error tipo II**

  Se produce cuando el investigador no puede rechazar una hipótesis nula que es falsa. La probabilidad de cometer un error de tipo II que se llama Beta, y con frecuencia se denota por β.

Reglas de decisión

El plan de análisis incluye las reglas de decisión para rechazar la hipótesis nula. En la práctica, los estadísticos describen estas reglas de decisión de dos maneras: con referencia a un valor de P o con referencia a una región de aceptación.

- **P-valor**

  En este caso la fuerza de la evidencia en apoyo de una hipótesis nula se mide por el valor de p. Supongamos que el estadístico de prueba es igual a S. El valor P es la probabilidad de observar un estadístico de prueba tan extrema como la S, suponiendo que la hipótesis nula es verdadera. Si el valor de p es menor que el nivel de significación, rechazamos la hipótesis nula.

- **Región de aceptación**

  La región de aceptación es un intervalo de valores. Si la estadística de prueba cae dentro de la región de aceptación, la hipótesis nula no se rechaza. La región de aceptación se define de modo que la posibilidad de incurrir en un error de tipo I es igual al nivel de significación. El conjunto de valores fuera de la región de aceptación se denomina la región de rechazo. Si la estadística de prueba cae dentro de la región de rechazo, la hipótesis nula es rechazada. En tales casos, se dice que la hipótesis ha sido rechazada en el nivel de significación α.

Ambos enfoques son equivalentes. Algunos textos de estadística utilizan el método del valor p, mientras que otros utilizan la región de aceptación.

Pasos básicos de un test de hipótesis

1° Formular las hipótesis

- Hipótesis nula (H_0): es la afirmación inicial que se asume cierta hasta que se demuestre lo contrario. Suele ser una declaración de igualdad (por ejemplo, "la media es igual a 50").
- Hipótesis alternativa (H_1 o H_a): es lo que se desea probar, y usualmente es una afirmación de diferencia o cambio (por ejemplo, "la media es diferente de 50").

Pasos básicos de un test de hipótesis

2° Elegir un nivel de significancia

- Este valor, comúnmente 0.05 o 0.01, representa la probabilidad de cometer un error tipo I, que es rechazar la hipótesis nula cuando en realidad es cierta.

3° Calcular el estadístico de prueba

- Dependiendo del tipo de distribucción (trabajaremos con normal), se calcula un valor que compara los datos observados con lo que se espera bajo H_0

4° Determinar el valor de p

- El valor p es la probabilidad de obtener un resultado al menos tan extremo como el observado, bajo la suposición de que H_0 es cierta.
- Si el valor p es menor que α, se rechaza H_0.

Pasos básicos de un test de hipótesis

5° Conclusión

- Rechazar H_0: Si el valor p es menor que α, se concluye que hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula en favor de la hipótesis alternativa.
- No rechazar H_0: Si el valor p es mayor que α, no hay suficiente evidencia para rechazar H_0.

Ejemplo

Se ha determinado el punto de fusión de cada una de las 16 muestras de cierta marca de aceite vegetal, con resultado $\overline{x}$ = 94.32. Supongamos que la distribución del punto de fusión es normal con σ = 1.20

Probar H_0 μ = 95 contra $H_a \neq$ 95, utilizando una prueba de nivel 0.01 de dos colas.

Hipótesis:

- Hipótesis nula (H_0): $\mu = 95$
- Hipótesis alternativa (H_a): $\mu \neq 95$

Datos:

- Tamaño de la muestra (n) = 16
- Media muestral ($\bar{X}$) = 94.32
- Desviación estándar (σ) = 1.20
- Nivel de significancia (α) = 0.01
- Prueba de dos colas.

Cálculo del estadístico de prueba (Z): Utilizamos la fórmula del estadístico Z para una prueba de hipótesis sobre la media con desviación estándar conocida:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$Z = \frac{94.32 - 95}{\frac{1.20}{\sqrt{16}}} = \frac{-0.68}{0.30} \approx -2.27$$

Ejemplo

Determinar el valor crítico: Como es una prueba de dos colas con $\alpha = 0.01$, dividimos α entre 2 para cada cola: $\frac{0.01}{2} = 0.005$. Buscamos el valor crítico $Z_{0.005}$ en una tabla de la distribución normal estándar, y obtenemos $Z_{\text{crítico}} = \pm 2.575$.

Decisión: El valor del estadístico de prueba es $Z = -2.27$, que no está en la región de rechazo (no es menor que -2.575 ni mayor que 2.575). Por lo tanto, **no rechazamos** H_0. No hay suficiente evidencia para decir que la media del punto de fusión es diferente de 95 al nivel de significancia 0.01.

ACTIVIDADES

Un fabricante afirma que el diámetro de cierto tipo de bola de rodamiento es de 20 mm. Para verificar esta afirmación, se toma una muestra aleatoria de 40 bolas y se encuentra que el diámetro medio es de 19.8 mm, con una **desviación estándar poblacional conocida** de 0.5 mm. Se asume que los diámetros siguen una distribución normal.

- Probar $H_0 : \mu = 20$ contra $H_a : \mu \neq 20$, utilizando un nivel de significancia de 0.05.

Una empresa de lácteos asegura que el contenido de grasa en su leche es de 3.5%. Para verificar esta afirmación, se selecciona una muestra aleatoria de 50 botellas de leche y se encuentra que el contenido de grasa promedio es de 3.45%, con una **desviación estándar poblacional conocida** de 0.1%. Se supone que el contenido de grasa sigue una distribución normal.

- Probar $H_0 : \mu = 3.5$ contra $H_a : \mu \neq 3.5$, utilizando un nivel de significancia de 0.01.

ACTIVIDADES

Un nutricionista afirma que un nuevo suplemento reduce el peso promedio de una persona en más de 5 kg después de 6 semanas de uso. Para verificar esta afirmación, se toma una muestra aleatoria de 30 personas y se encuentra que la pérdida de peso promedio es de 5.3 kg, con una **desviación estándar poblacional conocida** de 1.2 kg. Se supone que la pérdida de peso sigue una distribución normal.

- Probar $H_0 : \mu = 5$ contra $H_a : \mu > 5$, utilizando un nivel de significancia de 0.05.

Un fabricante de bombillas afirma que la vida útil promedio de sus bombillas es de al menos 1,000 horas. Para verificar esta afirmación, se selecciona una muestra aleatoria de 50 bombillas y se encuentra que la vida útil promedio es de 980 horas, con una **desviación estándar poblacional conocida** de 80 horas. Se asume que la vida útil de las bombillas sigue una distribución normal.

- Probar $H_0 : \mu = 1,000$ contra $H_a : \mu < 1,000$, utilizando un nivel de significancia de 0.01.