CLASE 5

Eventos condicionados. Sucesos independientes. Teoría de contero. Arreglos. Combinaciones. Permutaciones. Regla de Bayes. Variable aleatoria discreta. Función de probabilidad para una variable aleatoria discreta.

Gonzalez Florencia

PROBABILIDAD CONDICIONAL

- Un evento se relaciona con otro que ya ha ocurrido.
- Sea un evento A con la P(A). Supongamos que conocemos que otro evento relacionado con él ya ha ocurrido, llamémosle B.
- Es útil calcular la probabilidad de A nuevamente, de la siguiente manera.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- También puede calcular se:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Recordar: $P(AB) = \ (A \cap B)$

Ejemplo

Supongamos que una fábrica tiene 100 máquinas, algunas son eléctricas (E) y otras manuales (M). Algunas son nuevas (N) y otras, usadas (U). La tabla da el número de máquinas en cada categoría:

	E	M	Total
N	40	30	70
U	20	10	30
Total	60	40	100

Se elige una máquina al azar, y se descubre que es nueva.

¿Cuál es la probabilidad de que sea eléctrica?

SUCESOS INDEPENDIENTES

Dos o más sucesos pertenecientes a un mismo Espacio Muestral son sucesos independientes sí, y sólo si la presentación de uno de ellos no modifica el valor de la probabilidad del o de los otros.

En símbolos:

Dos sucesos A y B son independiente si se cumple que

$P(A/B) = P(A)$ ***La primera expresión P(A/B) se lee: "Probabilidad de A sabiendo que ocurrió B". Entonces si es igual a la P(A) quiere decir que B no condiciono nada.***

Y

$P(B/A) = P(B)$. ***Esta expresión P(B/A) se lee: "Probabilidad de B sabiendo que ocurrió A". Entonces si es igual a la P(B) quiere decir que A no condiciono nada.***

$$P(A|B) = P(A) \qquad P(B|A) = P(B)$$

Ejemplo 1

En el departamento de reclamos de una empresa trabajan tres empleados, Andrés, Carlos y Juan. La probabilidad de que Andrés esté ausente un día cualquiera es 0,04, de que Carlos esté ausente un día cualquiera es 0,11 y de que Juan esté ausente un día cualquiera es 0,08. Calcular la probabilidad de que en un día cualquiera estén presente los tres.

REGLA DEL PRODUCTO $P(AB) = P(A \cap B)$

Dados dos sucesos A y B definidos en un espacio muestral E.

$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$ que también se puede expresar como

$P(B \cap A) = P(B).P(A/B)$

Si dos o más sucesos son independientes, entonces la probabilidad conjunta es igual al producto de las probabilidades marginales de cada uno de ellos.

Para dos sucesos

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Para ***k*** sucesos,

$$P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \ldots P(A_k)$$

Ejemplo 2:

Una caja contiene 3 bolas rojas y 2 bolas azules. Sea A el suceso definido como: "la primera bola que se saca es azul" y el suceso B definido como: "la segunda bola que se saca es azul". Las bolas no se regresan a la caja luego que se sacaron. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas extraídas sean azules?

TEOREMA DE BAYER

Entonces, partiendo de la fórmula para el cálculo de la probabilidad total de un suceso B

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

el teorema de Bayes nos propone encontrar:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)}$$

$P(A_i/B)$ se lee "Probabilidad de Ai sabiendo que se da B" o "Probabilidad de Ai conociendo B", y recordemos que P(B) es la probabilidad total de un suceso B.

Este teorema se utiliza para conocer la probabilidad de que un suceso ocurra cuando se conoce la probabilidad de otro sucesos y que de alguna manera condiciona al primero.

Ejemplo 3:

En una empresa contamos con tres máquinas (M1, M2 y M3) que fabrican un determinado tipo de sillas. Conocemos los porcentajes que cada máquina aporta al total de la producción y también la probabilidad de sillas defectuosas que produce cada máquina.

Para el caso que mencionamos anteriormente de las máquinas M1, M2, M3 que producen sillas sabemos que los porcentajes de la fabricación total son respectivamente 50%, 30% y 20%, y que la probabilidad de que fabriquen una silla defectuosa son 0,1 para la máquina M1, 0,25 para la M2 y 0,3 para la M3.

Si tomamos una silla y resulta que es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina M1?

TEORÍA DE CONTEO

FACTORIAL: Es un operado matemático que se multiplica sucesivamente números enteros positivos.

- Se denota: n! significa " factorial n"
- Se calcula multiplicando al número por su antecesor y después multiplicando por el antecesor por su antecesor y después por el antecesor por antecesor del antecesor… y así sucesivamente hasta llegar 1.
- $n! = n.(n-1).(n-2)\ldots.1$
- Ejemplo: $5!=5.4.3.2.1=120$

Permutaciones

El número de **permutaciones** son todas las posibles formas en que se puede ordenar un conjunto de elementos distintos. Cada cambio en el orden es una permutación.

Ejemplo:

- Son permutaciones las formas en que pueden llegar a la meta 10 corredores.
- Las palabras con o sin sentido que podemos formar con las letras, sin repetir, de la palabra MESA.
- Los números de 5 cifras distintas que se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5.

El número de permutaciones de un conjunto de n elementos se designa por P_n, y se lee *permutaciones de n elementos*.

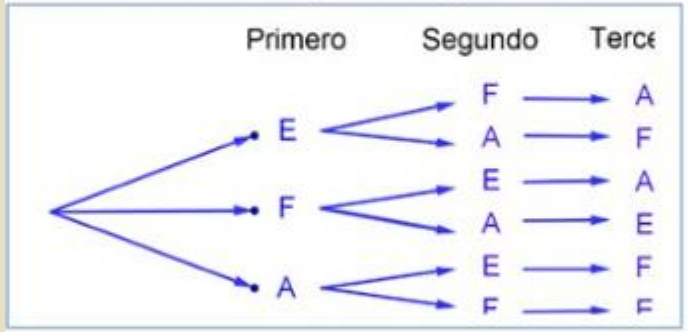
A este número se le llama factorial de n, y se indica $n!$

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Son n situaciones con n, $n-1$, $n-2$, ... , 3, 2, 1 posibilidades de elección respectivamente.

EJEMPLO

- En la fase preparatoria de un campeonato del mundo están en el mismo grupo España, Francia y Alemania. Indica de cuántas formas pueden quedar clasificados.



Son permutaciones de 3 elementos: P_3. Hacemos un diagrama de árbol. Pueden quedar primeros España (E), Francia (F) o Alemania (A). Si ha ganado España, pueden optar por el segundo puesto F o A. Y si ya hubiesen ganado España y luego Francia, para el tercer puesto sólo quedaría Alemania.

Pueden quedar de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas distintas.

En general para calcular las permutaciones de n elementos se multiplica n por $n-1$, y así, bajando de uno en uno, hasta llegar a 1:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Variaciones

2.1. Variaciones con repetición

Ya sabes que las quinielas consisten en adivinar los resultados de 14 partidos de futbol señalando con un 1 si pesamos que gana el equipo de casa, un 2 si gana el visitante y X si hay empate. En una misma jornada, ¿cuántas quinielas distintas podían rellenarse?

Observa que ahora si puedes **repetir** los símbolos 1, 2 y X, y una quiniela es distinta de otra si cambia tanto el **orden** como los **elementos**.

Se llaman variaciones con repetición de m elementos (los 3 símbolos) tomados de n en n (los 14 partidos) y se designa $VR_{m,n}$.

En el caso de las quinielas son $VR_{3,14}$.

- El número de quinielas distintas son $VR_{3,14} = 3^{14} = 4782969$. La probabilidad de que te toque una quiniela en una jugada es por tanto de 1/4782969.

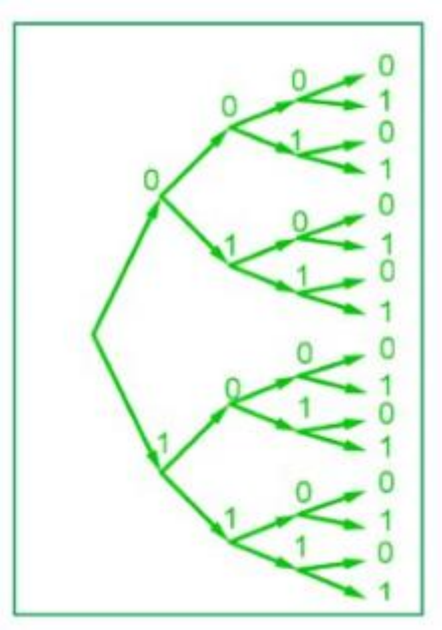
En general, $VR_{m,n} = m^n$.

EJEMPLO

- Con dos símbolos, 0 y 1, ¿cuántas tiras de 4 símbolos se pueden escribir?

Son variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 4 en 4. Hacemos el diagrama de árbol. Observamos que en el primer lugar de la tira podemos poner los dos símbolos. En el segundo lugar, aunque hayamos puesto el 0, como se puede repetir, podemos volver a poner el 0 y el 1. Lo mismo en el tercer y en el cuarto lugar.

Por tanto $VR_{2,4} = 2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^4 = 16$ tiras distintas.



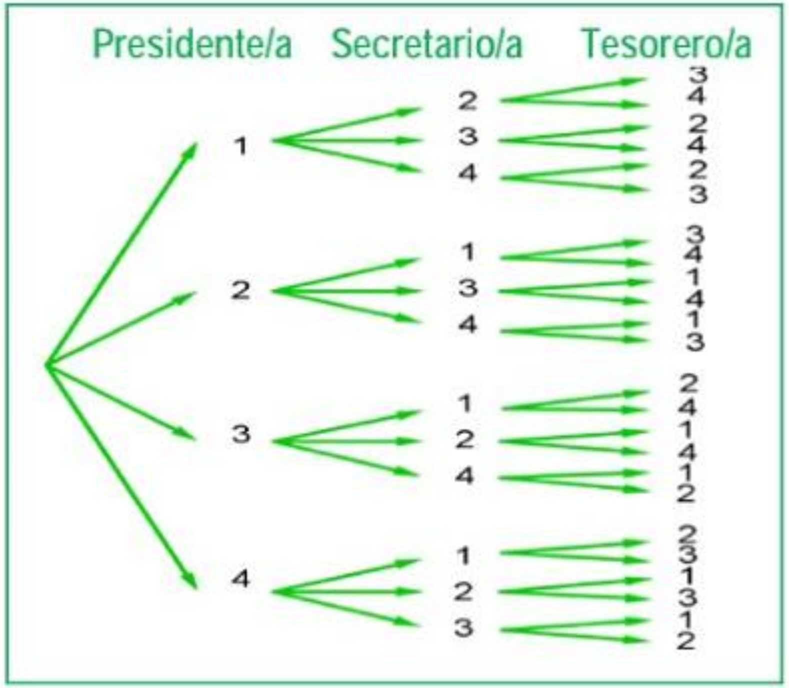
Variaciones

2.2. Variaciones sin repetición

Ejemplo

- Una asociación de vecinos van a tener elecciones a la junta directiva. Ésta consta de 3 cargos, presidente/a, secretario/a, y tesorero/a. a) Sólo hay 4 candidatos. ¿De cuántas maneras puede estar formada la junta? b) Antes de que empiece la votación se presentan 2 candidatos más, ¿cuántas juntas podrán formarse ahora?

Confeccionamos nuestro diagrama en árbol. Numeramos del 1 al 4 a los candidatos. A presidente/a pueden optar los 4 candidatos, pero si el candidato 1 ya ha sido elegido, no puede ser presidente/a y además secretario/a, por lo que entonces en ese caso, sólo saldrán del árbol las ramas a 2, 3 y 4. Si hubiese sido elegido 1 de presidente/a y 2 de secretario/a entonces para elegir al tesorero/a únicamente hay dos opciones, 3 o 4.



La junta puede estar formada de 4 · 3 · 2 = 24 maneras.

Si en lugar de 4 candidatos **fuesen 6, podría estar formada de 6 · 5 · 4 =** 120 maneras.

Son variaciones sin repetición. En las variaciones, tanto con repetición como sin repetición, influye el **orden** y los **elementos** que aparecen. En las variaciones con repetición pueden repetirse los elementos. En el ejemplo anterior no tendría sentido que un mismo candidato ocupara dos cargos, **no se repiten los elementos**.

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Combinaciones

- En una librería tienen los 6 libros más leídos este verano. Quieren hacer paquetes de 3 libros. ¿Cuántos paquetes diferentes podrán hacer?

Ahora cada paquete se diferenciará de otro sólo en los elementos (los libros), no en el orden.

Se llaman **combinaciones** de *m* elementos tomados de *n* en *n* y se designan $C_{m,n}$ a los grupos de *n* elementos que se pueden formar de modo que dos grupos se diferencien entre sí en los **elementos** que lo forman (no en el orden).

Llamamos a los libros A, B, C, D, E y F.

Paquetes con A				Paquetes sin A pero con B			Paquetes sin A ni B pero con C		
ABC				BCD			CDE		
ABD	ACD			BCE	BDE		CDF	CEF	DEF
ABE	ACE	ADE		BCF	BDF	BEF			
ABF	ACF	ADF	AEF						

Hemos formado primero todos los paquetes que tienen al libro A, hay 10; Luego seguimos formando los que no tienen al libro A pero si tienen a B. Luego los que no tienen ni a A ni a B pero si a C. Y por último el paquete DEF que no tiene a los libros A, B ni C. Hay en total 20 paquetes distintos. $C_{6,3} = 20$.

$$\binom{m}{n} = C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

EJEMPLO

- Un test consta de 10 preguntas y se deben responder a 6 para aprobar. ¿De cuántas formas puedes elegir esas 6 preguntas?

No influye el orden, tampoco pueden repetirse (no tiene sentido que respondas 3 veces la primera pregunta), sólo influye las preguntas (los elementos) luego son combinaciones, $C_{10,6}$.

$$C_{10,6} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210 \text{ maneras.}$$

RESUMEN

		Ejemplos
Permutaciones	Influye sólo el **orden**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variaciones con repetición	Influye el **orden** y los **elementos**. Los elementos pueden **repetirse**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variaciones sin repetición	Influye el **orden** y los **elementos**. Los elementos NO pueden repetirse. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$
Combinaciones	Influyen sólo los **elementos**. $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$

ACTIVIDADES PROBABILIDAD CONDICIONAL

1. En una fábrica de pernos, las máquinas A, B y C fabrican 25, 35 y 40 % de la producción total, respectivamente. De lo que producen, 5, 4 y 2 % son defectuosos. ¿Cuáles son las probabilidades respectivas de que el perno provenga de la máquina A, B o C?

2. Sean A y B dos eventos asociados con un experimento. Supóngase que P (A) =0.4, mientras que P (A U B) = 0.7. Sea P (B) = p.
    a. Para que elección de p son A y B mutuamente excluyentes
    b. Para qué elección de p son A y B independientes

3. Se A el evento de que una familia tenga hijos del mismo sexo, y B el evento de que la familia tenga como máximo 1 varón. Verificar:

a. Que los eventos son independientes si la familia tiene 3 hijos.
b. Que son dependientes si la familia tiene 2 hijos.

4. La probabilidad de que aumenten las ventas de automóviles para el próximo mes (A) es estimada en 0,4. La probabilidad de que aumente la venta de repuestos (R) se calcula en 0,5. La probabilidad de que ambas industrias experimenten un aumento en las ventas se calcula en 0,1.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que las ventas de automóviles hayan aumentado durante el mes, dado que las ventas de repuestos han aumentado?
   b. Si las ventas de automóviles se han incrementado durante el mes, ¿Cuál es la probabilidad de que las ventas de repuestos aumenten?
   c. Determinar si los eventos son o no independientes.

5. Tres máquinas producen respectivamente el 50%, 30% y el 20% de la producción total de la fábrica. El porcentaje de producción defectuosa de estas máquinas es respectivamente: 3%, 4% y 5%. Si un artículo se selecciona al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que resulte defectuoso?

ACTIVIDADES TEORÍA DE CONTEO

4. ¿De cuántas formas pueden repartirse 4 personas, 4 pasteles distintos comiendo cada persona un pastel?
5. En una carrera de caballos participan 5 caballos con los números 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Cuál de ellos puede llegar el primero? Si la carrera está amañada para que el número 4 llegue el primero, ¿cuál de ellos puede llegar el segundo? Si la carrera no está amañada, ¿de cuántas formas distintas pueden llegar a la meta? Haz un diagrama en árbol para responder.
6. ¿De cuántas maneras puedes meter 4 objetos distintos en 4 cajas, si sólo puedes poner un objeto en cada caja?
7. ¿Cuántos países forman actualmente la Unión Europea? Puedes ordenarlos siguiendo diferentes criterios, por ejemplo por su población, o con respecto a su producción de acero, o por la superficie que ocupan. ¿De cuántas maneras distintas es posible ordenarlos?
8. En el año 1973 había 6 países en el Mercado Común Europeo. ¿De cuántas formas puedes ordenarlos?
9. El desempleo aumenta y en una oficina de colocación hay 7 personas. ¿ De cuántas formas distintas pueden haber llegado?

16. Con los 10 dígitos, ¿cuántos números distintos pueden formarse de 6 cifras?
17. Con los 10 dígitos y 27 letras del alfabeto, ¿cuántas matriculas de coche pueden formarse tomando 4 dígitos y 3 letras?
18. Un byte u octeto es una secuencia de 0 y 1 tomados de 8 en 8. ¿Cuántos bytes distintos pueden formarse?
19. Calcula: a) $VR_{4,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{11,2}$; d) $VR_{2,11}$.
20. Expresa con una fórmula:
    a) Las variaciones con repetición de 3 elementos tomadas de 5 en 5.
    b) Las variaciones con repetición de 7 elementos tomadas de 2 en 2.
    c) Las variaciones con repetición de 5 elementos tomadas de 4 en 4.
21. Disparamos al plato 4 veces. En cada disparo puede que des en el blanco (B) o que no des en el blanco (NB). ¿Cuántos resultados distintos hay?
22. Escribe cuantas palabras de tres letras (con significado o no) puedes formar que empiecen por consonante y terminen con la letra R.

23. Tres personas van a una pastelería en la que sólo quedan 4 pasteles distintos. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir su pastel si cada una compra uno?

24. Con los 10 dígitos se desean escribir números de 4 cifras, todas ellas distintas. ¿Cuántas posibilidades hay para escribir la 1ª cifra? Una vez elegida la primera, ¿cuántas hay para elegir la 2ª? Una vez elegidas las dos primeras, ¿cuántas hay para la 3ª? ¿Cuántas posibilidades hay en total?

25. Si tienes 9 elementos diferentes y los tienes que ordenar de 5 en 5 de todas las formas posibles, ¿cuántas hay?

Con las letras A, B y C, ¿cuántas palabras de 2 letras no repetidas podrías escribir?

26. Con los dígitos 3, 5, 7, 8, 9, ¿cuántos números de 3 cifras distintas puedes formar?

29. Tenemos 5 bombones (iguales) y hay 7 amigos, ¿de cuántas formas se pueden repartir los bombones si a ninguno le vamos a dar más de un bombón?

30. Juan quiere regalar 3 DVDs a Pedro de los 10 que tiene, ¿de cuántas formas distintas puede organizar el regalo?

31. En el juego del póker se dan 5 cartas a cada jugador de las 52 que tiene la baraja, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden recibir?