

## UNION DE TRAFICO

Supongamos que se tiene un sistema de cola única con un solo servidor y que los clientes llegan al sistema por dos caminos diferentes y que al llegar si el servidor esta ocupado se juntan en esa cola por orden de llegada, todo lo cual se ve en el siguiente esquema:

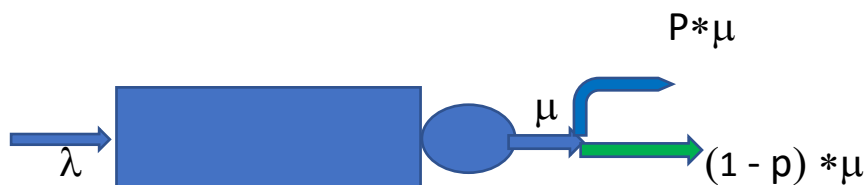


$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \longrightarrow \quad \rho = (\lambda_1 + \lambda_2) / \mu$$

## PARTICION DE TRAFICO

Otra cosa que puede ocurrir es que a la salida del servidor parte del trafico tome un camino y otra parte tome otro camino diferente. El trafico “se parte” no necesariamente en partes iguales. Podria también dividirse en 3 o mas partes.

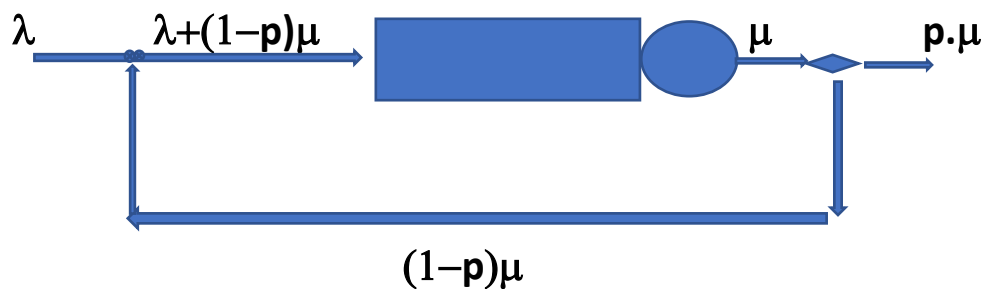
En el siguiente esquema consideramos la partición en 2



**Aclaracion:** la “p” de la partición es la probabilidad de tomar ese camino. Si, por ej, “p” fuera 0,7 significaría que el 70% del trafico tomaría ese camio y el 30% tomaría el otro.

## RETROALIMENTACION

Algo que podría ocurrir es que se tenga un sistema de cola única y un solo servidor cuya salida se particiona y con una probabilidad “p” el tráfico siguiera por un camino y con probabilidad  $(1 - P)$  volviese hacia atrás y alimentara nuevamente la entrada uniéndose al tráfico que esta arribando. El esquema es el siguiente:



## SISTEMAS DE COLAS TANDEM

¿Quién no conoce las sillas tándem? Están en muchos lugares de la universidad y en la gran mayoría de las salas de espera. Si, son esas que sobre un mismo caño hay varias sillas, una al lado de la otra.

También se podría decir que un tren es un tándem de vagones.

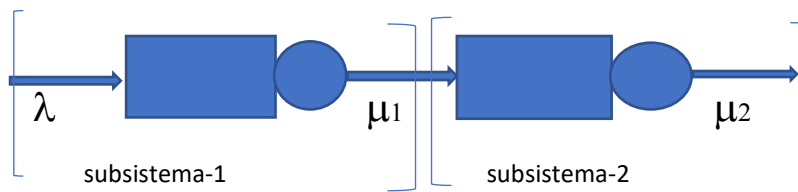
¿Y, entonces, que son los sistemas de colas tándem?

Como ya está claro, son secuencias de sistemas de colas en los cuales, a excepción de la entrada del primero y la salida del último, todos los sistemas vierten sus salidas al siguiente y todas las entradas provienen del anterior.

Para mejor definirlos:

**SON SISTEMAS FORMADOS POR DOS O MAS SUBSISTEMAS DE COLAS EN LOS CUALES TODAS LAS ENTRADAS PROVIENEN DEL ANTERIOR Y TODAS LAS SALIDAS SON VERTIDAS AL SIGUIENTE, EXCEPTO LA ENTRADA DEL PRIMERO Y LA SALIDA DEL ULTIMO**

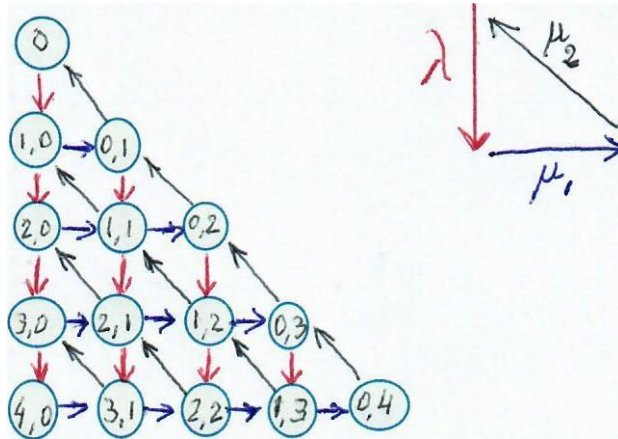
El esquema básico es el siguiente:



Ahora interesa desarrollar el diagrama de estados. Con dos subsistemas, como muestra el esquema anterior, es bidimensional; si fuesen tres sería tridimensional y el diagrama se complicaría.

Considerando dos subsistemas, los estados se van definir con dos uplas. Así, el estado en el cual los dos servidores están ociosos sería (0,0) y simplemente lo llamamos estado "0". El estado (1,0) es un cliente en subsistem-1 y 0 cliente en el subsistema-2; el estado (0,1) significa que no hay ningún cliente en el subsistema-1 y hay un cliente en el subsistema-2.

El diagrama de estados sería el siguiente:



Ahora interesa calcular la probabilidad de uno cualquiera de los estados, por ejemplo el estado "1,2". Para eso hay que considerar hasta la fila siguiente. El estado 1,2 representa 1 cliente en el subsistema 1 y 2 clientes en el subsistema 2, es decir, 3 clientes en todo el sistema. Hay que considerar también, entonces, la fila que empieza con 4,0, es decir la que tiene 4 clientes en total, empezando con 4 clientes en el subsistema-1 y 0 clientes en el subsistema-2, porque todo estado tiene interacciones con los que, en el diagrama, se representan en la línea inmediata inferior.

Viendo el diagrama, aplicando la ecuación de "estado estable o steady-state", que aca también es valida, resulta, para el estado 1,2 en estudio:

$$\text{ENTRADAS} = \text{SALIDAS}$$

$$\lambda \cdot \pi_{0,2} + \mu_1 \cdot \pi_{2,1} + \mu_2 \cdot \pi_{1,3} = \lambda \cdot \pi_{1,2} + \mu_1 \cdot \pi_{1,2} + \mu_2 \cdot \pi_{1,2}$$

$$\lambda \cdot \pi_{0,2} + \mu_1 \cdot \pi_{2,1} + \mu_2 \cdot \pi_{1,3} = \pi_{1,2} (\lambda + \mu_1 + \mu_2)$$

**entonces resulta:**

$$\pi_{1,2} = (\lambda \cdot \pi_{0,2} + \mu_1 \pi_{2,1} + \mu_2 \cdot \pi_{1,3}) / (\lambda + \mu_1 + \mu_2)$$

Cabe preguntarse ¿Cuándo se congestiona un sistema de colas tándem?

Pues, se congestiona si y solo si al menos uno de los subsistemas se congestiona, y uno cualquiera de los subsistemas se congestiona si y solo si su  $\rho \geq 1$ .

# REDES DE COLAS

¿Qué es una red de colas?

Es un sistema formado por dos o mas subsistemas de colas que se interrelacionan de modo tal que todos ellos tienen al menos su entrada proveniente de otro subsistema y/o vierten su salida hacia otro subsistema.

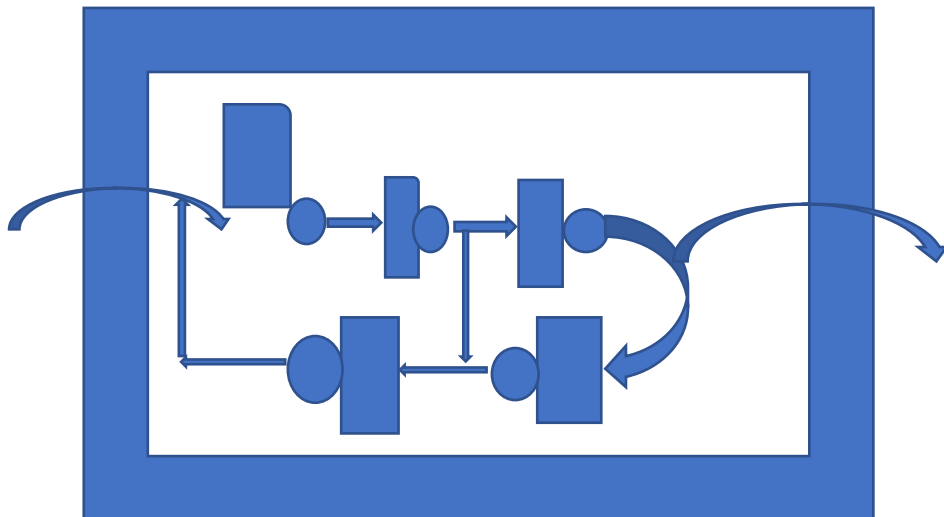
Queda claro que el sistema de colas tándem es la red de colas mas sencilla que existe.

Las redes de colas se pueden clasificar en redes abiertas y en redes cerradas.

Son abiertas aquellas que tienen al menos una entrada proveniente del exterior o tienen al menos una salida que es vertida al exterior.

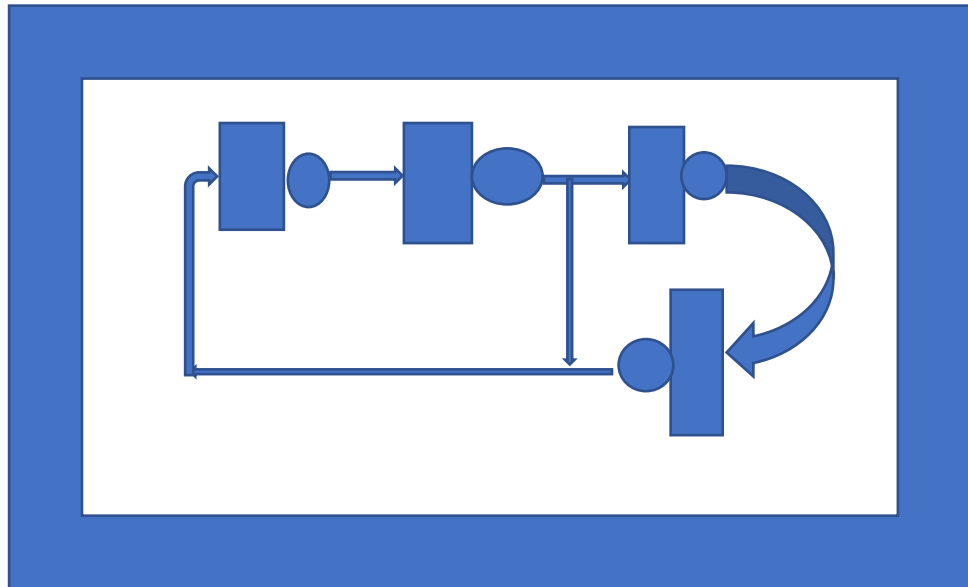
Las redes abiertas reciben también el nombre de redes de Jackson.

**RED ABIERTA:**



En el esquema precedente hay una entrada y una salida. Con una sola de las dos hubiese bastado para que fuese abierta. El recuadro es solo una forma de definir “el adentro” y el “afuera” del sistema. Es el contorno.

## RED CERRADA



Notese que ninguna flecha cruza la frontera. Todas provienen de otro subsistema y constituyen la entrada de alguno de los subsistemas.

## TEOREMA DE JACKSON:

### Enunciado:

Si se tiene una red formada por  $n$  subsistemas de colas tales que todos ellos reciben sus entradas desde otro subsistema o del exterior y vierten sus salidas a otro subsistema o al exterior y todos los arribos se distribuyen Poisson y sus tiempos de servicio se distribuyen exponencial, entonces es posible particionarla en todos sus subsistemas y tratar a cada una de ellos como una  $M/M/1$  independiente.

¿Cuál es la importancia de este teorema?

**Que, permite tratar a cada subsistema por separado y hacer modificaciones (cambiar el servidor) a condición que no se congeestione el subsistema siguiente**