INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

1. Introducción

Existen experiencias cuyo resultado final puede predecirse, siempre y cuando, se conocen las condiciones bajo las cuales se realizan. Por ejemplo, si se suelta una piedra desde cierta altura es posible determinar el tiempo que tardará en chocar contra el piso.

Hay otro tipo de experiencias que tienen la particularidad de generar resultados que no son susceptibles de predecirse con certeza; aún cuando se realicen repetidamente bajo condiciones análogas, existen factores no controlables que generan variación, y por lo tanto, no siempre se observa el mismo resultado. Éstos varían de una repetición a otra de manera imprevisible.

Si arrojáramos un dado, no podríamos predecir el número que saldría en la cara superior. Tampoco podríamos anticipar el tiempo de duración de una lámpara eléctrica, ni el número de automóviles que llegarían a un puesto de peaje en un período determinado de tiempo.

Se denomina aleatoriedad a la imposibilidad de predecir con certeza el resultado de una experiencia. Las experiencias con esas características se denominan aleatorias, por lo tanto, observar el número que sale en la cara superior de un dado, el tiempo de duración de una lamparita eléctrica o el número de autos que llegan a un puesto de peaje en un período de tiempo dado, constituyen experiencias aleatorias.

También suele utilizarse el término azar para hacer referencia al carácter imprevisible de esas experiencias.

La Teoría de Probabilidad proporciona las bases matemáticas y el lenguaje para la descripción de la variación implícita en las experiencias aleatorias. Muchos autores atribuyen el origen de esta teoría a la necesidad de comprender los juegos de azar, es decir, juegos de apuestas en que domina fuertemente una componente de incertidumbre. Pascal (1623-1662) y Fermat (1601-1665) consiguieron un auténtico y crucial progreso en la conceptualización de la probabilidad como denota su famosa correspondencia de 1654 donde aparece resuelto el primer problema que el Caballero de Meré le planteó a Pascal y que decía: "¿Al lanzar dos dados, cuántos lanzamientos son necesarios para tener una probabilidad no menor de 0.5, de conseguir al menos un doble seis"?

Otro problema de interés histórico propuesto a Galileo (1564 – 1642) plantea: "si se lanzan 3 dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea, respectivamente 9, 10, 11 ó 12?

El tratamiento de estos problemas permite apreciar lo importante que resulta explicitar el conjunto formado por todos los posibles resultados de una experiencia aleatoria, como así también un conjunto de posibles resultados. Por tal razón, nos interesa precisar las definiciones de estos conjuntos y llegar a la definición formal de probabilidad.

2. Experiencias aleatorias. Espacio muestral asociado a una experiencia aleatoria. Sucesos.

En lo que sigue presentamos ejemplos de **experiencias aleatorias**, para luego señalar particularidades en común que las caracterizan.

1) Se lanza un dado y se observa el número que sale en la cara superior.
2) Se lanza un dado y se observa si el número obtenido es par o impar.
3) Se lanza un dado dos veces y se observan los números que salen en la cara superior.
4) Se lanza un dado dos veces y se observa la cantidad de veces que se obtuvo un número par.
5) Se repite el lanzamiento de un dado hasta que el número tres aparece por primera vez y se registra el número de lanzamientos realizados.
6) Se cuenta el número de llamadas telefónicas que se reciben en un domicilio particular en un horario determinado.
7) De una caja que contiene cien azulejos se extrae uno al azar y se observa si tiene o no fallas.
8) De un proceso de producción de cojinetes se extrae uno al azar y se observa el diámetro medido en cm.

Estas experiencias tienen en común las siguientes características:

- Se realizan de acuerdo a reglas definidas.
- Se pueden repetir sin cambiar esencialmente las condiciones.
- Los resultados varían de una repetición a otra de una manera imprevisible, pero es posible definir el conjunto de todos los posibles resultados.
- Los resultados individuales parecen ocurrir de forma arbitraria. Sin embargo, cuando la experiencia se repite un gran número de veces, aparece un modelo definido de regularidad. Por ejemplo si repetimos <u>n</u> veces el lanzamiento de un dado equilibrado, observamos que la proporción de números pares e impares tiende a ser igual a 0.5 para valores de <u>n</u> convenientemente grandes.

Esa regularidad hace posible la construcción de un modelo matemático (representación abstracta y simplificada de un fenómeno real) con el cual se analiza la experiencia. A tal fin resulta útil la siguiente definición.

Se llama **espacio muestral** asociado a una experiencia aleatoria, y simbolizamos con S, al conjunto formado por todos los resultados posibles de dicha experiencia.

Si notamos con S_i al espacio muestral asociado a la experiencia definida en el ejemplo i, entonces:

$S_1 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
$S_2 = \{ p, i \}$ (p e i representa par e impar respectivamente)
$S_3 = \{ (a, b)$ con $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$S_4 = \{ 0, 1, 2 \}$

$S_5 = \{ 1 , 2 , 3 , ...n.....\} = N$
$S_6 = \{ 0 , 1 , 2 , ...n.....\} = N_0$
$S_7 = \{ b , d \}$ (b y d denota bueno y defectuoso respectivamente)
$S_8 = \{ d \in R : d \geq 0 \}$

Observaciones:

Los espacios muestrales S_1 , S_2 , S_3 , S_4 y S_7 son finitos, S_6 y S_7 son infinitos numerables, en cambio S_8 es infinito no numerable (sus elementos no pueden ponerse en correspondencia biunívoca o biyectiva con los números naturales).

Un **suceso elemental** de un espacio muestral S, es un conjunto formado por un único resultado de S .

Un **suceso** A de un espacio muestral S, es un conjunto de resultados de S.

Algunos ejemplos:

El conjunto {2} es un suceso elemental del espacio muestral S_1 y A = {2, 4, 6 } es un suceso del mismo espacio muestral que corresponde a la proposición "se obtiene un número par".

Los conjuntos {(3 , 5)}, {(5 , 3)}, {(6 , 6)} son sucesos elementales del espacio muestral S_3.

B = { (1 , 1) , (2 , 2) , (3 , 3) , (4 , 4) , (5 , 5) , (6 , 6) } es un suceso del espacio muestral S_3 que se corresponde con la proposición "se obtiene el mismo número en ambas tiradas".

Propuestas

1) Explicite los elementos de los siguientes sucesos que se definen en relación a la experiencia dada en el ejemplo 3.

A : El primer número que se obtiene es par y el segundo número que se obtiene es impar.
B : Ambos números son pares
C : Ambos números son impares.
D: la suma de los números es igual a 6
E : el mínimo de los números es igual a 5.
F : El máximo de los números es igual a 4

2) En relación al ejemplo 6 considere los sucesos:

A: se reciben a lo sumo 3 llamadas.
B: se reciben por lo menos dos llamadas.
Explicite los elementos de los sucesos A y B.

3) En relación al ejemplo 8 considere el suceso A: el diámetro de un cojinete es superior a 2.19 cm. e inferior a 2.28 cm. Exprese el suceso A mediante un intervalo.

3. Relaciones entre sucesos

Sea A un suceso del espacio muestral S. Decimos que en una realización de la experiencia **ocurre el suceso A** si y sólo si el resultado de esa realización, que notamos con x, es un elemento de A. De lo contrario decimos que el suceso A no ha ocurrido, en cuyo caso $x \in \overline{A}$, lo que equivale a decir que **ocurre el suceso complementario**.

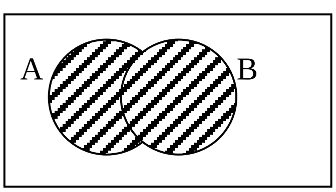
Si se extrae del proceso de producción un cojinete y se observa que el diámetro es igual a 2.20 decimos que ocurre el suceso A, en virtud de que 2.20 es superior a 2.19 e inferior a 2.28 cm. En cambio si el diámetro es igual a 2.10 decimos que el suceso A no ocurre. En este caso, ocurre el suceso complemento de A, que notamos $\overline{A}$.

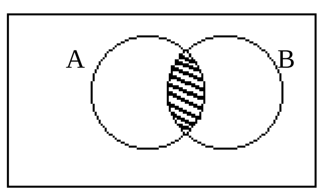
<u>Algunas observaciones:</u>

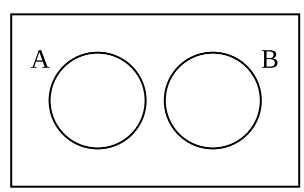
- El espacio muestral S es en particular un suceso que llamamos **suceso seguro o cierto** puesto que siempre ocurre ante la realización de la experiencia.
- El complemento de S es el suceso que nunca ocurre, lo llamamos **suceso imposible** y lo notamos Φ.
- El espacio muestral y los sucesos asociados a una experiencia aleatoria se representan a través de un diagrama de Venn.

Los sucesos pueden combinarse para obtener nuevos sucesos. En lo que sigue presentamos las operaciones de unión e intersección, como así también el concepto de sucesos excluyentes.

- Decimos que **ocurre el suceso $A \cup B$** $\Leftrightarrow$ al menos uno de los sucesos A ó B ocurre.
- Decimos que **ocurre el suceso $A \cap B$** $\Leftrightarrow$ A y B ocurren simultáneamente.
- Decimos que A y B son **sucesos excluyentes** $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \Phi$.







$A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ $A \cap B = \Phi$.

<u>Propuestas</u>

1- Sea A, B y C sucesos de un espacio muestral S. Exprese los siguientes enunciados en notación de conjunto y represente en un diagrama de Venn.

✓ Ninguno de los sucesos A, B y C ocurre.

- ✓ Solamente ocurre el suceso A.
- ✓ Exactamente uno de los tres sucesos ocurre.
- ✓ Ocurre a lo sumo uno de los tres sucesos.
- ✓ Al menos uno de los tres sucesos ocurre.
- ✓ Ocurren los sucesos A y C y no ocurre el suceso B.
- ✓ Ocurren exactamente dos de los tres sucesos.
- ✓ Ocurren los tres sucesos.

2- Exprese $A \cup B$ como unión de tres sucesos excluyentes.

4. Probabilidad de ocurrencia de un suceso

Si A es un suceso del espacio muestral asociado a una experiencia aleatoria, no podemos decir a priori si A ocurrirá o no, al realizar la experiencia. Por tal razón interesa asociar con cada suceso del espacio muestral un número que mida, de alguna manera, la posibilidad que tiene A de ocurrir. Esta tarea nos conduce al concepto de probabilidad.

Si consideramos el suceso A: sale un número par al tirar un dado, resulta razonable considerar que ese suceso tiene una posibilidad de ocurrir igual a 0,5 en virtud de que el 50 % de los resultados posibles pertenecen al suceso A.

Este razonamiento es factible en virtud de que:

- ♦ podemos calcular el porcentaje de resultados que hay en A, con respecto al espacio muestral S, ya que éste tiene un número finito de elementos.
- ♦ suponemos que cada resultado de S tiene la misma posibilidad de ocurrir.

Esta última consideración es admisible si el dado está bien construido (dado equilibrado) y en consecuencia las seis caras tienen la misma posibilidad de salir.

El primer intento de definir con rigor matemático el concepto de probabilidad es debido a Laplace (1812) quien dio la definición que se conoce con el nombre de **definición clásica**, y dice:

La probabilidad de un suceso es igual al cociente entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles, siempre y cuando todos los resultados tengan igual posibilidad de ocurrir.

Esta definición, incluso para la misma época, resulta circular y restrictiva, y sólo ofrece un método práctico de cálculo para algunas situaciones.

<u>Un ejemplo</u>

Un bolillero contiene 20 bolillas numeradas de 1 a 20. Si se elige al azar una bolilla, ¿cuál es la probabilidad de que el número de la bolilla elegida sea divisible por 3 ?

Si notamos con A al suceso: “el número de la bolilla elegida al azar es divisible por 3” resulta A = {3 , 6 , 9 , 12 , 15 , 18 }.
Siendo el conjunto de todos los resultados posibles S = {1 , 2 , 3 , ...20 }, la probabilidad del suceso A es igual a $\frac{6}{20}$, y notamos P(A) = $\frac{6}{20}$

En los siguientes problemas te proponemos calcular probabilidades a partir de la definición clásica. En cada caso te sugerimos reflexionar sobre el cumplimiento de las condiciones establecidas en la definición.

Propuestas

1) Calcule la probabilidad de que al elegir al azar un alumno de la clase, el mismo resulte: a) un varón, b) una mujer.

2) Calcule la probabilidad de los sucesos A, B, C, D, E, F, $B \cup C$, definidos en relación a la experiencia aleatoria presentada en el ejemplo 3.

Al resolver los problemas propuestos, aplicando la definición clásica de Laplace, habrá observado que:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(S) = 1$
- Si A y B son sucesos excluyentes entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Como señalamos anteriormente, la definición de Laplace resulta restrictiva y no permite asignar probabilidades a los sucesos de espacios muestrales que no son finitos, o que siendo finitos, no se cumple la condición de que todos los resultados son igualmente posibles.
Surge la pregunta: ¿cómo asignar las probabilidades de sucesos en estos casos?

Supongamos que estamos interesados en determinar la probabilidad del suceso A: el diámetro de un cojinete extraído al azar es superior a 2.10 e inferior a 2.20.

Una primera aproximación podría ser la siguiente. Repetimos n veces la experiencia de extraer un cojinete y medimos su diámetro. Luego observamos la cantidad de valores medidos que se encuentran en el intervalo definido por el suceso A (frecuencia absoluta del suceso A). Sea n_A dicho número. El cociente $\frac{n_A}{n}$ (frecuencia relativa del suceso A) puede usarse como una medida de la posibilidad de que A ocurra.

Si bien es cierto que el valor de la frecuencia relativa puede variar cada vez que se realizan n observaciones, esta variación tiende a ser insignificante en la medida que n es convenientemente grande. ***Dicho de otra manera, la frecuencia relativa de A varía en cada muestra de*** n ***observaciones, pero a la larga surge cierta regularidad; la frecuencia relativa de A tiende a estabilizarse alrededor de un valor constante.***

Ese valor constante, que llamaremos probabilidad del suceso A y que notamos P(A) puede imaginarse como la frecuencia relativa en "la población infinita" que resulta de observar indefinidamente el diámetro de los cojinetes que se extraen de un proceso de producción que funciona de manera continua y estable.

En esta aproximación, el concepto de probabilidad de un suceso surge como el valor hacia el cual tiende la frecuencia relativa en una larga serie de observaciones. En la práctica carece de sentido hablar de una infinidad de observaciones, de modo que ese valor constante sólo puede determinarse en forma empírica con una precisión limitada.

Este mismo procedimiento podría utilizarse para estimar, por ejemplo, la probabilidad de obtener un número igual a tres al lanzar un dado. Si el dado es equilibrado la frecuencia relativa del valor tres tiende a estabilizarse alrededor del valor $\frac{1}{6}$.

Analicemos cuál es la diferencia entre este enfoque y la definición dada por Laplace.

En el modelo introducido por Laplace la probabilidad de un suceso se determina a priori a partir de ciertas hipótesis, sin necesidad de realizar experiencias, en tanto que la probabilidad que se estima a través de las frecuencias relativas es una probabilidad experimental, determinada a posteriori a partir de resultados empíricos. Lo importante es que ambas tienden a coincidir, siempre y cuando se cumplen las hipótesis o supuestos que se realizan y el número de repeticiones de la experiencia es convenientemente grande.

<u>Propuestas</u>

1) Los siguientes datos son los resultados observados al lanzar 400 veces un dado.

1162	5155	2531	4132	1133
3562	3643	3162	4535	4145
4224	1443	4631	4211	2333
2444	6424	6634	5256	6162
5155	4233	1631	3241	4633
3266	5332	1232	5224	3624
4263	4164	4326	6425	1451
6562	2236	4353	1413	5215
5161	6444	3422	3361	5514
6123	4334	2652	5325	2623
5112	6114	6643	3451	2525
6261	5312	2662	4363	5632
1215	1334	3423	3425	5525
5626	6424	2551	1253	2253
1442	6322	6165	3463	5264
3245	6535	1435	3125	4626

4344	6346	6635	5152	6134
6336	3645	5126	2615	2232
1414	4266	4641	3615	2643
6536	4114	5261	5641	2613

a) Determine la frecuencia relativa de cada número utilizando:

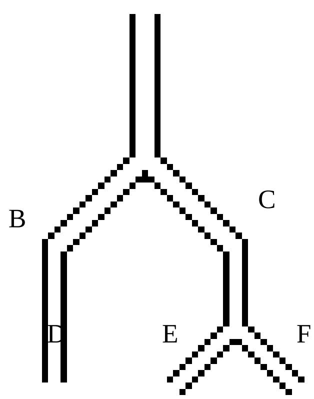
- las primeras 200 observaciones.
- las siguientes 200 observaciones.
- las 400 observaciones

b) Realice las gráficas de las "distribuciones de frecuencias relativas", para cada caso. Sobre el eje horizontal represente los valores de la variable y sobre cada valor levante un bastón cuya longitud sea proporcional a la frecuencia relativa observada.

Observe en relación a la propuesta que el espacio muestral asociado a la experiencia de lanzar un dado y observar el número que sale en la cara superior es S ={1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6}. En cambio los 400 datos, conformados por valores de S, constituye una muestra de tamaño 400 de una población "teórica", la que resulta de observar indefinidamente el número que se obtiene al lanzar un dado.

Si el dado es equilibrado, la frecuencia relativa de cada valor se estabiliza en $\frac{1}{6}$. Este valor puede considerarse como la frecuencia relativa en la población, por lo tanto, es la probabilidad de obtener cualquiera de los números, al tirar un dado equilibrado.

2) Se deja caer una bola por la abertura A. Calcule la probabilidad de que la bola salga por cada uno de los orificios D, E y F.



a) Si se arrojan 1000 bolas por la abertura A, ¿aproximadamente qué proporción de bolas salen por cada orificio?

3) Los siguientes datos corresponden al diámetro de 100 cojinetes, extraídos de un proceso de producción. Los datos se presentan ordenados en forma creciente. El número entre paréntesis indica las veces que el valor se repite.

1,79 1,80 1.84 1.85 1,86 (3) 1,87 (2) 1,88 (3) 1,89 (2) 1,90 (2) 1,91(3) 1,92 (2) 1,93 (3) 1,94 (2) 1,95 (6) 1,96 (3) 1,97 (4) 1,98 1,99 (2) 2,00 (2) 2,01 (4) 2,02 (3) 2,03 (6) 2,04 (5) 2,05 (3) 2,06 (4) 2,07 (3) 2,08 (5) 2,09 (4) 2,10 (4) 2,11 2,12 (5) 2,13 2,15 (2) 2,16 (2) 2,17 2,18 (2) 2,25.

La frecuencia relativa del suceso A: el diámetro de un cojinete es superior a 2.10 cm. e inferior a 2.20 cm es igual a 0.14. Por lo tanto diremos 0.14 es una estimación de la probabilidad del suceso A, basada en una muestra de tamaño 100.

Si la estimación de la probabilidad del suceso A se realizara en base a una muestra de tamaño 1000 obtendríamos, en general, una estimación más precisa.

4) Se considera que los cojinetes cuyos diámetros superan el valor 2.20 y son inferiores a 1.80 son defectuosos. Ante la evidencia de la muestra obtenga una estimación de la probabilidad del suceso A: un cojinete extraído del proceso de producción es defectuoso.

Veamos algunas propiedades de la frecuencia relativa

Si notamos con f_A la frecuencia relativa de un suceso A entonces:

- $0 \leq f_A \leq 1$ $(0 \leq n_A \leq n \leq 1)$
- $f_S = 1$, siendo S el espacio muestral asociado a la experiencia. $(n_S = n)$
- Si $B \cap C = \Phi$ entonces $f_{B \cup C} = f_B + f_C$ $(n(B \cup C) = n(B) + n(C) = n_B + n_C)$

Si B y C son sucesos excluyentes entonces $n(B \cup C)$, la cantidad de elementos de $B \cup C$, es igual a la suma de la cantidad de elementos en B con la cantidad de elementos en C.

(Entre paréntesis se consigna la clave de la demostración de la propiedad)

La interpretación de la probabilidad como una frecuencia relativa a largo plazo es debida al matemático austríaco Richard von Mises

El paso definitivo, en el proceso de incorporación del Cálculo de Probabilidades a la Matemática es dado en 1933 por el matemático ruso Kolmogorov, quien profundizando en las ideas de von Mises, establece una definición axiomática, que consiste en introducir el concepto a partir de un conjunto de axiomas o postulados, que enuncian ciertas propiedades de las probabilidades. Estas propiedades están motivadas por las propiedades de la frecuencia relativa.

Definición axiomática de probabilidad

Sea S el espacio muestral asociado a una experiencia aleatoria. Con cada suceso A asociamos un número, P(A), que llamamos probabilidad del suceso A y que verifica las siguientes axiomas:

A_1: $P(A) \geq 0$
A_2: $P(S) = 1$
A_3: Si $B \cap C = \Phi$ entonces $P(B \cup C) = P(B) + P(C)$

Observamos que los axiomas de la definición no indican cómo asignar las probabilidades, sin embargo restringen la forma de su asignación y formalizan de hecho propiedades de la frecuencia relativa.

Recuerde que las probabilidades calculadas a partir del modelo de Laplace cumplen las mismas propiedades que las enunciadas en los axiomas. En consecuencia la definición dada por Laplace puede considerarse como un caso particular de la definición axiomática.

Consecuencias de los axiomas

1) $P(\Phi) = 0$
2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3) Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$
4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Propuestas

1) Las probabilidades de que un conmutador telefónico reciba 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o más llamadas en un determinado período de una hora son respectivamente: 0.02, 0.08, 0.15, 0.20, 0.20, 0.16, 0.10, 0.06 y 0.03.

Calcule la probabilidad de que en ese período de una hora se reciban:

a) menos de 4 llamadas
b) al menos 3 llamadas
c) a lo sumo 4 llamadas
d) más de 1 llamada
e) entre 2 y 6 llamadas, inclusive.

2) Un laboratorio de resistencia de materiales, después de realizar ensayos de elongación y torsión sobre varillas de un nuevo material plástico, informa al departamento de producción que la probabilidad de que una varilla resulte con fallas de elongación, fallas de torsión, o ambas fallas a la vez es 0.06, 0.04 y 0.015 respectivamente. Calcule la probabilidad de que una varilla seleccionada al azar no presente fallas.

5. Probabilidad condicional

5.1 Ejemplo introductorio

Se lanza un dado equilibrado dos veces y se observa el par de números que se obtiene. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos números sea igual a seis si se sabe que el resultado del primer lanzamiento es un dos?

Ya hemos determinado que $\frac{5}{36}$ es la probabilidad de que la suma sea igual a seis, en razón de que existen 5 casos favorables: (1 , 5) ; (2 ,4) ; (3 , 3) ; (4 , 2) y (5 , 1) sobre un total de 36 casos posibles e igualmente probables .

Los sucesos elementales que tienen un dos como primer resultado son :
(2 , 1) ; (2 , 2) ; (2 , 3) ; (2 , 4) ; (2 , 5) y (2 , 6).

Solo uno de estos resultados, el (2 , 4), verifica la condición de que la suma es seis.

En consecuencia la probabilidad de que la suma sea seis cuando el resultado del primer lanzamiento es un dos, ya no es $\frac{5}{36}$ sino $\frac{1}{6}$.

Cuando se conoce que el primer número es un dos los casos posibles se reducen de 36 a 6, y solo uno de esos resultados verifica la condición de que la suma es seis.

Sean los sucesos:

A: la suma de los dos lanzamientos es igual a seis.
B : el resultado del primer lanzamiento es un dos.
Si notamos con $P(A \mid B)$ la probabilidad condicional de que la suma es seis cuando se conoce que el resultado del primer lanzamiento es un dos, entonces $P(A \mid B) = \frac{1}{6}$

Le proponemos verificar que: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A.\cap B)}{P(B)}$

$P(A \mid B)$ **es la probabilidad de ocurrencia del suceso A, en un espacio muestral reducido al suceso B.**

La relación $P(A \mid B) = \dfrac{P(A.\cap B)}{P(B)}$ válida para el ejemplo anterior es general y nos da un medio para definir formalmente la probabilidad condicional.

5.2 Definición de probabilidad condicional

Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral S.
Se define la probabilidad condicional del suceso A, cuando se sabe que el suceso B ha ocurrido, y se nota $P(A \mid B)$ al cociente:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ siempre y cuando } P(B) > 0$$

Como consecuencia inmediata de la definición se tiene que:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)\, P(A)$$

Propuesta

El personal de una compañía se encuentra separado en dos secciones: administración (A) y operación de planta (P). La siguiente tabla muestra el número de empleados en cada sección clasificados por sexo.

	Mujer (M)	Hombre (H)
Administración (A)	30	10
Operación de planta (P)	20	140

Sean los sucesos:
A: un empleado trabaja en administración
P: un empleado trabaja en planta
M: un empleado de la compañía es mujer
H: un empleado de la compañía es varón

Se elige al azar un empleado de la compañía, calcule la probabilidad de que ocurra cada uno de los siguientes sucesos:

a) es un hombre
b) trabaja en planta
c) es hombre y trabaja en planta
d) trabaja en planta sabiendo que es un hombre
e) trabaja en planta sabiendo que es una mujer
f) trabaja en administración sabiendo que es una mujer

En relación al problema resuelto observa que:

- $P(P \mid H) + P(P \mid M) \neq 1 \quad (M = \overline{H})$

  En general $P(A \mid B) + P(A \mid \overline{B}) \neq 1$ o equivalentemente $P(A \mid \overline{B}) \neq 1 - P(A \mid B)$

- $P(P) < P(P \mid H)$ y $P(P) > P(P \mid M)$

Si nos restringimos a los empleados de la compañía que son hombres la proporción de los mismos que trabajan en planta es mayor que la proporción de empleados que trabajan en la compañía, en cambio la relación se invierte cuando nos restringimos a los empleados de la compañía que son mujeres.

Este ejemplo nos muestra que la probabilidad condicional de un suceso puede ser mayor o menor que la probabilidad incondicional del suceso.

Si A y B son sucesos de un espacio muestral *S*, también puede darse que P(A | B) = P(A).

En lo que sigue estudiaremos e interpretaremos situaciones en que P(A |B) = P(A)

6. Sucesos Independientes

Propuesta

1) Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral S, ambos con probabilidad distinto de cero y uno.

   Pruebe que:

- ✓ si A y B son excluyentes entonces P (A | B) = 0
- ✓ si $B \subset A$ entonces P (A | B) = 1

En cada caso, sabiendo que ocurrió el suceso *B*, se nos da una información precisa acerca de la probabilidad de ocurrencia del suceso A. Más aún, $P(A \mid B) \neq P(A)$, lo que nos indica que la probabilidad de ocurrencia A se ve afectada por la ocurrencia del suceso B.

Veamos ahora un ejemplo en que esto no ocurre.

En relación a la experiencia de lanzar un dado equilibrado y observar el número que sale en la cara superior, consideremos los siguientes sucesos:
A: se obtiene un número par.
B: se obtiene un múltiplo de tres.

A = {2 , 4 , 6} y B = { 3 , 6 }

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Observa que: $P(A \mid B) = \frac{1}{2}$, $P(B \mid A) = \frac{1}{3}$ y por lo tanto :

- ➢ $P(A \mid B) = P(A)$
- ➢ $P(B \mid A) = P(B)$
- ➢ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Las tres igualdades que se verifican en relación al ejemplo en estudio nos indican respectivamente que:

- ♦ la información de que el suceso B ha ocurrido no modifica la probabilidad de ocurrencia del suceso A,
- ♦ que la ocurrencia de *A* tampoco modifica la probabilidad de ocurrencia del suceso B,
- ♦ que la probabilidad de la ocurrencia de A y B es igual al producto de la probabilidades de A y B.

Propiedad para la caracterización de sucesos independientes

Si A y B son dos sucesos de un espacio muestral *S* con probabilidades distintas de cero entonces las siguientes condiciones son equivalentes (la validez de una de ellas implica la validez de cualquiera de las restantes).

1- $P(A \mid B) = P(A)$
2- $P(B \mid A) = P(B)$
3- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Definición de sucesos independientes

Decimos que los suceso A y B de un espacio muestral S, son **independientes**, si y sólo si se verifica cualquiera de las condiciones de la propiedad anterior.

Se demuestra que si A y B son sucesos independientes entonces también lo son:

- A y $\overline{B}$
- $\overline{A}$ y B
- $\overline{A}$ y $\overline{B}$

7. Teorema de la probabilidad total

Antes de probar el teorema de la probabilidad total le proponemos reflexionar sobre el siguiente problema resuelto.

Una provincia se ha dividido en tres regiones: N (norte), C (centro) y S (sur). En cada región se ha determinado el porcentaje de la población que es desocupada obteniéndose los siguientes valores. En el norte el 10 % de la población es desocupada, en cambio en el centro y en el sur estos porcentajes son el 8 y 5 % respectivamente. Asimismo se conoce que en el norte vive el 50 % de la población total de la provincia, mientras que en el centro y en el sur viven respectivamente el 30 % y 20 % de la población.

¿Permite esta información determinar el porcentaje de desocupados en toda la provincia?

Si notamos con **x** al total de la población de la provincia entonces, **x** · 0.5 representa el número de habitantes del norte y **x ·** 0.5 · 0.10 el número de desocupados que viven en el norte.

De manera análoga se establece que **x** · 0.30 · 0.08 y **x** · 0.20 · 0.05 representan el número de desocupados en el centro y sur respectivamente.

En consecuencia **x** · 0.5 · 0.10 + **x** · 0.30 · 0.08 + **x** · 0.20 · 0.05 representan el total de desocupados en la provincia.

Aplicando el modelo de Laplace se tiene que la probabilidad, **p**, de que al elegir al azar un habitante de la provincia resulte un desocupado es: **p =** 0.5 . 0.10 + 0.30 . 0.08 + 0.20 . 0.05= 0.084

Por lo tanto el 8.4 % de la población es desocupada.

Hemos determinado el porcentaje de desocupados en la provincia a partir de la información de los porcentajes de desocupados en cada región y conociendo cuánto representa la población de cada región, respecto a la población total de la provincia.

Si notamos con

D: un habitante elegido al azar es desocupado
N: un habitante elegido al azar habita en el norte
C: un habitante elegido al azar habita en el centro
S: un habitante elegido al azar habita en el sur

entonces, $P(D) = P(N) \cdot P(D \mid N) + P(C) \cdot P(D \mid C) + P(S) \cdot P(D \mid S)$

El resultado obtenido constituye un caso particular del teorema de la probabilidad total que pasamos a considerar.

Decimos que los sucesos $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ constituyen **una partición del espacio muestral S** cuando:

- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n = S$
- $A_i \cap A_j = \Phi \quad \forall\ i \neq j$
- $P(A_i) > 0 \quad \forall\ i$

El teorema de la probabilidad total permite calcular la probabilidad de un suceso $B \subset S$ cuando se conocen:

$P(B \mid A_i)$ y $P(A_i)$ $\forall\ i = 1, 2, \ldots\ldots n$; siendo $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ una partición de S.

En efecto:

$$B = B \cap S = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots\ldots \cup (B \cap A_n)$$

$$P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)]$$

Siendo $B \cap A_1$, $B \cap A_2$, ... $B \cap A_n$ sucesos excluyentes, resulta:

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots\ldots + P(B \cap A_n)$ y por lo tanto

$$P(B) = P(B \mid A_1)\, P(A_1) + P(B \mid A_2)\, P(A_2) + \ldots\ldots + P(B \mid A_n)\, P(A_n) =$$

$$= \sum_{1}^{n} P(B \mid A_i)\, P(A_i).$$

El resultado obtenido se conoce como Teorema de la Probabilidad Total

Le proponemos probar como una consecuencia del teorema de la probabilidad total que:

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(B \mid A_k)\, P(A_k)}{\sum_{1}^{n} P(B \mid A_i)\, P(A_i)}$$

Este resultado se conoce con el nombre de **Teorema de Bayes**

Propuestas

1) En relación al problema introductorio:

a) Calcula la probabilidad de que un habitante elegido al azar pertenezca a cada región cuando se sabe que se trata de un desocupado.

b) ¿Cuánto suman las probabilidades calculadas en a)?

2) Una planta recibe microcircuitos provenientes de tres fabricantes A, B y C. El 50% del total se compra a A mientras que a B y a C se le compra el 25% a cada uno. El porcentaje de circuitos defectuosos producidos por A, B y C es de 3%, 5% y 6% respectivamente. Los circuitos se almacenan en la planta sin importar quien fue el proveedor.

a) Calcule la probabilidad de que una unidad armada en la planta contenga un circuito defectuoso.

b) Si se elige al azar un circuito que resulta no defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que provenga del proveedor B?

BIBLIOGRAFÍA

- Canavos, George. "Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos". México. McGraw Hill. 1988.
- Devore Jay L. "Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias". México. Thomson Editores 1998.
- Hines William, Montgomery Douglas, Goldsman David, Borror Connie. "Probabilidad y Estadística para Ingeniería". México. CECSA. 2006.
- Meyer Paul L. "Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas". México. Addison Wesley Iberoamericana .1993.
- Miller Irwin y Freund J. "Probabilidad y Estadística para Ingenieros". Prentice Hall. 1993.
- Montgomery Douglas, Runger George. "Probabilidad y Estadística Aplicadas a la Ingeniería". México. McGraw Hill 1996.
- Navidi William. "Estadística para Ingenieros y Científicos". México. McGrawHill. 2006.
- Scheaffer R., MaClave James. "Probabilidad y Estadística para Ingeniería" . México. Grupo Editorial Iberoamericana.1993.
- Walpole Ronald, Myers Raymond. "Probabilidad y Estadística". México. Pearson Educación. 1999.