¿Qué es una variable aleatoria?

Es una descripción numérica del resultado de un experimento aleatorio.

Se clasifican dependiendo del conjunto numérico que asuman, en:

- *Discretas*: puede tomar un número finito de valores o una sucesión infinita de valores.
- *Continuas*: puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo real dado o una colección de intervalos.

Ejemplos

Discretas

- Experimento: una persona presenta su examen final para recibirse y el mismo tiene 4 partes. Se define la variable aleatoria como:

X: “número de partes del examen aprobadas”

X puede tomar los valores 0, 1, 2, 3 o 4

- Experimento: observar los autos que pasan por un peaje durante un día determinado.

X: “número de autos que pasan por el peaje durante un día determinado”

X puede tomar los valores 0, 1, 2, …. (toma una sucesión infinita de valores)

Distribuciones de probabilidad

- Describen cómo se distribuyen las probabilidades entre los distintos valores de una variable aleatoria.

Para variables aleatorias discretas, la distribución se da por una *función de probabilidad* $p(x)$, la misma da la probabilidad de cada valor de la variable aleatoria. Esto es:

$$P(X = x_k) = p(x_k)$$

También tenemos la *función de distribución acumulada* de una variable aleatoria X, que muestra la probabilidad de la variable aleatoria HASTA un valor específico.

$$F(x_k) = P(X \leq x_k)$$

Valor esperado o esperanza de una variable aleatoria discreta

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)$$

Siendo x_i los valores que puede tomar la variable aleatoria, y p(x_i) su probabilidad

- Observar que, el valor esperado no tiene por qué ser un valor que asume la variable aleatoria.
- Se lo puede pensar como un promedio ponderado de los valores que toma la variable, siendo el peso, la probabilidad de cada valor.

En el ejemplo anterior:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{3} x_i \cdot p(x_i) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

La distribución binomial

La distribución binomial es una **distribución discreta** muy significativa que surge en muchas aplicaciones industriales de control de calidad, bioestadísticas, sistemas de producción, etc. Esta distribución aparece al realizar repeticiones independientes de un experimento que t**enga respuesta binaria**, como aquellas que dan "verdadero" o "falso", "correcto" o "incorrecto", "éxito" o "fracaso", "encendido" o "apagado" y otros por el estilo.

La variable discreta que cuenta el número de éxitos en n pruebas independientes de ese experimento, cada una de ellas con la misma probabilidad de "éxito" igual a p, sigue una distribución binomial de parámetros n y p.

Distribución binomial

Está relacionada con un experimento de pasos múltiples al que se le llama *experimento binomial*.

Propiedades de un experimento binomial:

1. El experimento consiste en una serie de n ensayos idénticos.
2. En cada ensayo hay dos resultados posibles. A uno de estos resultados se le llama *éxito* y al otro se le llama *fracaso*.
3. La probabilidad de éxito, que se denota p, no cambia de un ensayo a otro. La probabilidad de fracaso, $1-p$, tampoco cambia de un ensayo a otro.
4. Los ensayos son independientes.

- Lo que interesa es el número éxitos de *n* ensayos.
- X: “número de éxitos en *n* ensayos”, X: $\{0, 1, 2, 3, \ldots.., n\} \longmapsto$ Variable aleatoria discreta.

<u>EJEMPLO</u>

Experimento: “lanzar una moneda 5 veces y observar si cae cara o cruz hacia arriba”

Interesa calcular el número de caras que aparecen en los 5 lanzamientos.

¿Qué variable aleatoria se define?

¿Tiene las características de un experimento binomial?

Distribución de probabilidad binomial

X: número de éxitos en las n pruebas

X tiene una distribución binomial de parámetros n y p. $X \sim Bi(n, p)$

$$f(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

$$n: número\ de\ ensayos$$

$$x: cantidad\ de\ \text{é}xitos\ buscada, x = 0,1,2 \ldots . n$$

$$p: probabilidad\ de\ \text{é}xito$$

$$q = 1 - p: probabilidad\ de\ fracaso$$

También se define para este tipo de variable, su valor esperado y su varianza.

$$E(X) = n \cdot p$$

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Ejemplo: Se lanza un dado 5 veces y se registra la cantidad de veces que sale un número menor a 3.

X: “cantidad de números menores a 3 en 5 lanzamientos de un dado”

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5-2} = 10 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{27} = 0{,}329$$

$$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{3} = 1{,}67$$

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 1{,}11$$

La distribución Poisson

Analizaremos a continuación otra distribución de variable aleatoria discreta que fue desarrollada por el matemático francés Siméon Denis Poisson (1781-1840). Se trata de una distribución límite de la distribución binomial, utilizada principalmente cuando un n muy grande se corresponde con un p muy pequeño, y se dificultan los cálculos en la distribución binomial. Es así como esta distribución se utiliza cuando se buscan éxitos en pruebas que son medidas por unidad. Habitualmente se habla de unidades de tiempo, por ejemplo:

- La cantidad de clientes que entran por hora.
- La cantidad de unidades vendidas por día, por semana, o por mes.

- la distribución de Poisson sirve para modelizar variables aleatorias que describen el número de veces que se repite un fenómeno en un intervalo de tiempo.
- La distribución de Poisson tiene un parámetro característico, que se representa con la letra griega λ e indica el número de veces que se espera que ocurra el evento estudiado durante un intervalo dado.
- La distribución de Poisson se usa para modelizar estadísticamente sucesos cuya probabilidad de ocurrencia es muy baja. Más abajo puedes ver varios ejemplos de este tipo de distribución de probabilidad

$$P(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

En donde:

x es la cantidad de ocurrencias de las que se desea conocer la probabilidad de que ocurran, y

λ es la tasa por unidad (de tiempo, área, etc.)

$$E[X] = \lambda \qquad\qquad Var(X) = \lambda$$

EJEMPLO

- El número de productos vendidos por una marca sigue una distribución de 5 unidades por día. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día haya vendido justo 7 unidades? ¿Y la probabilidad de que en un día haya vendido 3 unidades o menos?

Para sacar las diferentes probabilidades que nos pide el problema tenemos que aplicar la fórmula de la distribución de Poisson (vista más arriba). Así pues, utilizando dicha fórmula calculamos la probabilidad de vender 7 unidades en un día:

$$P[X = x] = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

$$P[X = 7] = \frac{e^{-5} \cdot 5^7}{7!}$$

$$P[X = 7] = 0,1044$$

En segundo lugar, nos piden determinar la probabilidad acumulada de vender 3 unidades o menos. Por lo tanto, para encontrar esta probabilidad tenemos que calcular la probabilidad de vender 0 unidades, 1 unidad, 2 unidades y 3 unidades por separado y, posteriormente, sumarlas.

$$P[X \leq 3] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3]$$

Actividades

1) Un dado equilibrado se lanza 10 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 4 veces el número 6?
2) En una fábrica, el 5% de los productos fabricados son defectuosos. Si se seleccionan 20 productos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 2 de ellos sean defectuosos?
3) Una persona está jugando a un juego donde tiene una probabilidad de 0.30.30.3 de ganar en cada intento. Si juega 15 veces, ¿cuál es la probabilidad de que gane exactamente 6 veces?
4) Un examen de opción múltiple tiene 8 preguntas. Cada pregunta tiene 4 opciones, y solo una es correcta. Si un estudiante responde al azar cada pregunta, ¿cuál es la probabilidad de que responda correctamente exactamente 3 preguntas?
5) En un estudio, se determinó que el 80% de las personas prefieren el café sobre el té. Si se seleccionan 7 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 5 de ellas prefieran el café?

6) Una empresa de telefonía recibe en promedio 5 llamadas por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que reciba exactamente 3 llamadas en un minuto?
7) En una intersección, ocurren en promedio 2 accidentes de tráfico al mes. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran exactamente 4 accidentes en un mes?
8) En un hospital, la tasa de nacimientos es de 7 bebés por día. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día determinado nazcan exactamente 10 bebés?
9) Una página web recibe en promedio 12 visitas por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que en una hora reciba exactamente 15 visitas?
10) Una estación de servicio atiende en promedio 8 autos por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que durante la próxima hora atienda exactamente 5 autos?

$$P[X=0]=0,0673 \qquad P[X=1]=0,0337 \qquad P[X=2]=0,0842 \qquad P[X=3]=0,1404$$

Y luego sumamos las tres probabilidades calculadas para determinar la probabilidad de vender tres unidades o menos en un día.

$$P[X \leq 3] = P[X=0] + P[X=1] + P[X=2] + P[X=3]$$

$$P[X \leq 3] = 0,0673 + 0,0337 + 0,0842 + 0,1404$$

$$P[X \leq 3] = 0,2650$$