Ejercicio 2:

El modelo del ascensor es un M|M|2.

La tasa de arribos λ es de ½.

El ascensor se mueve por promedio en cada peticion 3,3 pisos, y sabiendo que el viajar de un piso a otro adyacente nos toma 2 segundos:

$$3{,}3 * 2 = 6{,}6 \rightarrow \mu = 1/6{,}6.$$

Para que un modelo de colas M|M|c sea estable, se debe cumplir que nuestra tasa de arribos debe ser menor que c veces nuestra tasa de servicio, es decir:

$$\lambda < c * \mu$$

En nuestro caso, λ = ½, μ = 1/6,6 y c = 2, por lo que si el sistema fuera estable, se deberia cumplir que:

$$\tfrac{1}{2} < 2 * 1/6{,}6 =$$
$$\tfrac{1}{2} < 2/6{,}6 =$$
$$\tfrac{1}{2} < 1/3{,}3 =$$
$$0.5 < 0.303... =$$
$$\text{false. !!}$$

Si suponemos que nuestro sistema es estable, llegamos a una contradiccion. Por lo que se llega a la conclusion de que el sistema con λ = ½ es inestable. Por el contrario, si cambiaramos λ para que sea igual a 1/3,4 (los arribos llegan exponencialmente distribuidos con una media de 1 cada 3,4 segundos), el sistema seria estable, ya que:

$$1/3{,}4 < 2*1/6{,}6 =$$
$$1/3{,}4 < 1/{,}3{,}3 =$$
$$0{,}294... < 0.303... =$$
$$\text{true.}$$

Ejercicio 3:

Asumimos que el sistema es un sistema M|M|2|∞|∞, ya que no tenemos informacion sobre la capacidad del sistema, ni de el tamaño de la poblacion, por lo que los asumimos infinitos.

Deseamos calcular el tiempo medio que pasa desde que se genera un pedido (entra al sistema) hasta que es procesado, en el tipo de sistemas con el que estamos trabajando, el tiempo medio de estadia en el sistema (w) se calcula de la siguente forma:

$$w = L/\lambda$$

Conocemos la tasa de arribos (λ = 1/3,4) , la tasa de servicios (μ = 1/6,6) y el numero de servidores (c = 2), pero para calcular w primero debemos calcular el numero medio de pedidos en el sistema (L), que se calcula de la siguiente forma:

$$L = c\rho + \rho P(L(\infty)>=c)/1-\rho$$

Para calcular L, debemos conocer el factor de utilizacion de los servidores (ρ) que se calcula:

$$\rho = \lambda/c\mu$$

Tambien necesitamos calcular la probabilidad de que el numero de clientes en el sistema cuando el tiempo tiende a infinito sea mayor al numero de servidores (P(L(∞)>=c)), cuyo calculo es:

$$P(L(\infty)>=c) = (c\rho)\hat{}cP0/c!(1-\rho)$$

El unico dato faltante seria la probabilidad de que el sistema tenga 0 pedidos en un estado estacionario (P0), que se calcula de la siguiente forma:

$$P_0 \quad \left\{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right] + \left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left(\frac{1}{c!}\right)\left(\frac{c\mu}{c\mu-\lambda}\right)\right]\right\}^{-1}$$

$$= \left\{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!}\right] + \left[(c\rho)^c \left(\frac{1}{c!}\right)\frac{1}{1-\rho}\right]\right\}^{-1}$$

Primero calculamos ρ:

$$\rho = (1/3{,}4)/\ 2*\ 1/6{,}6 =$$
$$1/3{,}4\ /\ 1/3{,}3 =$$
$$3{,}3\ /\ 3{,}4 =$$
$$0{,}97058823529$$

Luego ρ = 3,3/3,4 = 0.97058823529

Ahora calcularemos P0:

Ya que c = 2, podemos reescribir la parte de la sumatoria de la siguiente forma:

$$(2*3{,}3/3{,}4)\hat{}0/0! + (2*(3{,}3/3{,}4)\hat{}1/1! =$$
$$1 + 6{,}6/3{,}4 =$$
$$10/3{,}4$$

Ahora calcularemos la otra parte de la suma:

$$(2*3{,}3/3{,}4)\hat{}2 * (1/(2!)) * 1/1\text{-}3{,}3/3{,}4 =$$
$$(6{,}6/3{,}4)\hat{}2 * ½ * 1/0{,}1/3{,}4 =$$
$$(43{,}56/11{,}56) * ½ * 1/(0{,}1/3{,}4) =$$
$$(43{,}56/23{,}12) * 1/(0{,}1/3{,}4) =$$
$$(43{,}56/23{,}12) * 34 =$$
$$(1481\ /\ 23{,}12)$$

Ahora sumamos las 2 partes de la cuenta:

$$10/3{,}4 + 1481 \,/\, 23{,}12 =$$
$$66{,}9982698962$$

Finalmente elevamos el resultado a a la -1:

$$(66{,}9982698962)\text{^}{-1} =$$
$$1/66{,}9982698962$$

Luego, $P0 = 1/66{,}9982698962$.

Con los valores ya calculados, podemos calcular $P(L(\infty)>=c)$:

$$P(L(\infty)>=2) = (2*3{,}3/3{,}4)\text{^}2 * (1/66{,}9982698962) \,/2! * (1-3{,}3/3{,}4) =$$
$$(43{,}56/11{,}56) * (1/66{,}9982698962) \,/\, (0.2/3{,}4) =$$
$$(43{,}56/774{,}5) \,/\, (0{,}2/3{,}4) =$$
$$0{,}95612653324$$

Luego $P(L(\infty)>=c) = 0{,}95612653324$.

Ahora calculamos L:

$$L = 2*(3{,}3/3{,}4) + (3{,}3/3{,}4) * 0{,}95612653324 \,/\, (1 - 3{,}3/3{,}4) =$$
$$(6{,}6/3{,}4) + (3{,}3/3{,}4) * 0{,}95612653324 / \, (0{,}1/3{,}4) =$$
$$(6{,}6/3{,}4) + 0{,}92800516461 \,/\, (0{,}1/3{,}4) =$$
$$6{,}6/3{,}4 + 31{,}5521755967 =$$
$$33{,}4933520673$$

Luego $L = 33{,}4933520673$.

Ahora finalmente podemos calcular w:

$$w = 33{,}4933520673 \,/\, (1/3{,}4) =$$
$$113{,}877397029$$

Luego $w = 113{,}877397029$, por lo que podemos concluir que el tiempo medio que transcurre desde que entra un pedido hasta que es procesado es de poco menos de 114 segundos.

Tambien calcularemos wq, que es el tiempo que un pedido pasa en la cola, que se calcula como:

$$wq = w - 1/\mu$$

Calculamos:

$$wq = 113{,}877397029 - 1/1/6{,}6 =$$
$$113{,}877397029 - 6{,}6 =$$
$$107{,}277397029$$

Luego $wq = 107{,}277397029$

Ejercicio 6:

Calcularemos los intervalos de confianza con precision especifica para el tiempo que se demora en procesar un pedido (w), el tiempo que pasa un pedido encolado (wq) y de la utilizacion del servidor(ρ). El error critico (ε) sera del 5% de la estimacion analitica de cada una de los estadisticos, α sera 0,05 (una confianza del 95%), el R0 inicial sera de 5, y el tiempo de las simulaciones sera de 900000. No se calcularan las medias, las varianzas ni los desvios, ya que son calculados automaticamente despues de correr las simulaciones.

Comencemos con el tiempo en procesar un pedido, primero calculamos ε:

$$\varepsilon = w * 0{,}05 =$$
$$113{,}877397029 * 0{,}05 =$$
$$5{,}69386985145$$

Luego ε = 5,69386985145.

Corremos las 5 primeras simulaciones, lo que nos deja una media muestral de 120,047, una varianza de 88,713 y un desvio muestral de 9,41876. Ahora estimamos el valor de R:

$$R>=((z\alpha/2*S0)/\varepsilon)\hat{}2$$

Donde zα/2 es la distribucion normal estandar y S0 es el desvio muestral.

$$R>=((1{,}96*9{,}41876)/5{,}69386985145)\hat{}2 =$$
$$(18{,}4607696/ 5{,}69386985145)\hat{}2 =$$
$$3{,}24221840007 \hat{} 2 =$$
$$10{,}5119801538$$

Luego, R>= 10,5119801538, por lo que R>=11, ya que es un numero natural. Como 11 >= 5, se satisface la primera condicion para que sea valido (R>=R0), ahora comprobaremos la otra condicion para ajustar R:

$$R>=(t\alpha/2,R-1*S0/\varepsilon)\hat{}2$$

Donde tα/2,R-1 es la distribucion t de Student con R-1 grados de libertad.

$$11>=((2{,}2281*9{,}41876)/5{,}69386985145)\hat{}2 =$$
$$(20{,}985939156/ 5{,}69386985145)\hat{}2 =$$
$$3{,}6857075598\hat{}2 =$$
$$13{,}5844402164$$

Como 13,5844402164 > 11, probamos con R = 12

$$12>=((2{,}2010*9{,}41876)/5{,}69386985145)\hat{}2 =$$
$$13{,}2559993672$$

Como 13,2559993672 > 12, probamos con R = 13

13>=((2,1788*9,41876)/5,69386985145)^2 =
12,9899393325

Como 13 >= 12,9899393325, R = 13, por lo que debemos hacer R-R0 simulaciones mas, es decir 8 simulaciones mas. Lo que nos deja una media muestral de 114,901, una varianza de 143,405 y un desvio muestral de 11,9752, Nuestro R0 es 13. Ahora estimamos R con la normal estandar:

R>=((1,96*11,9752)/5,69386985145)^2 =
16,9927090528

R>=17, estimamos con la t de student:

17>=((2,1199*11,9752)/5,69386985145)^2 =
19,8783909902

Probamos con R = 18:

18>=((2,1098*11,9752)/5,69386985145)^2 =
19,6894259702

Probamos con R = 19:

19>=((2,1009*11,9752)/5,69386985145)^2 =
19,5236602267

Probamos con R = 20:

20>=((2,0930*11,9752)/5,69386985145)^2 =
19,3771069136

Como 20 >= 19,3771069136, entonces R = 20 y como R0 = 13 debemos hacer 7 simulaciones mas. Lo que nos deja una media muestral de 117,878, una varianza de 172,217 y un desvio muestral de 13,1231, Nuestro R0 es 20. Ahora estimamos R con la normal estandar:

R>=((1,96*13,1231)/5,69386985145)^2 =
20,4065668969

R>=21, estimamos con la t de student:

21>=((2,0860*13,1231)/5,69386985145)^2 =
23,1146016163

Probamos con R = 22:

22>=((2,0796*13,1231)/5,69386985145)^2 =
22,9729846316

Probamos con R = 23:

$$23>=((2{,}0739*13{,}1231)/5{,}69386985145)^2 =$$
$$22{,}847223373$$

Como 23>= 22,847223373, entonces R = 23 y como R0 = 20 debemos hacer 3 simulaciones mas. Lo que nos deja una media muestral de 117,796, una varianza de 149,135 y un desvio muestral de 12,2121, Nuestro R0 es 23. Ahora estimamos R con la normal estandar:

$$R>=((1{,}96*12{,}2121)/5{,}69386985145)^2 =$$
$$17{,}6716773912$$

R >= 23 (ya que R >= R0), estimamos con la t de student:

$$23>=((2{,}0739*12{,}2121)/5{,}69386985145)^2 =$$
$$19{,}7852369177$$

Luego R = 23, entonces:

$$H = t\alpha/2{,}22 * (12{,}2121/\mathrm{sqrt}(23)) =$$
$$2{,}0739 * (12{,}2121/\mathrm{sqrt}(23)) =$$
$$5{,}28097662874$$

Luego, construimos el intervalo de confianza con la formula:

$$[\text{Media muestral} - H, \text{Media muestral} + H] =$$
$$[117{,}796 - 5{,}28097662874, 117{,}796 + 5{,}28097662874] =$$
$$[112{,}515023371 , 123{,}076976629]$$

Luego, nuestro intervalo de confianza para w es:

$$[112{,}515023371 , 123{,}076976629]$$

Utilizacion de los servidores (ρ):

$$\varepsilon = \rho * 0{,}05 =$$
$$0{,}97058823529 * 0{,}05 =$$
$$0{,}04852941176$$

Luego ε = 0,04852941176.

Corremos las 5 primeras simulaciones, lo que nos deja una media muestral de 0,969755, una varianza de 0,0000023108 y un desvio muestral de 0,00151693. Ahora estimamos el valor de R:

$$R>=((z\alpha/2*S0)/\varepsilon)^2$$

Donde $z\alpha/2$ es la distribucion normal estandar y S0 es el desvio muestral.

$$R>=((1,96*0,00151693)/0,04852941176)^2 = 0.0037534719$$

R >= 5 (ya que R >= R0), estimamos con la t de student:

$$5>=((2,7765*0,00151693)/0,04852941176)^2 = 0,00753210528$$

Luego R = 5, entonces:

$$H = t\alpha/2,4 * (0,00151693/sqrt(5)) = 2,7765 * (0,00151693/sqrt(5)) = 0,0018835546$$

Luego, construimos el intervalo de confianza con la formula:

$$[Media\ muestral – H, Media\ muestral + H] = [0,969755 – 0,0018835546, 0,969755 + 0,0018835546] = [0,9678714454 , 0,9716385546]$$

Luego, nuestro intervalo de confianza para ρ es:

$$[0,9678714454 , 0,9716385546]$$

Tiempo promedio encolado (wq):

$$\varepsilon = wq * 0,05 = 107,277397029 * 0,05 = 5,36386985145$$

Luego ε = 5,36386985145.

Corremos las 5 primeras simulaciones, lo que nos deja una media muestral de 113,452, una varianza de 88,6507 y un desvio muestral de 9,4145. Ahora estimamos el valor de R:

$$R>=((z\alpha/2*S0)/\varepsilon)^2$$

Donde zα/2 es la distribucion normal estandar y S0 es el desvio muestral.

$$R>=((1,96*9,4145)/5,36386985145)^2 = 11,8345077672$$

Luego, R>= 11,8345077672, por lo que R>=12, ya que es un numero natural. Como 12 >= 5, se satisface la primera condicion para que sea valido (R>=R0), ahora comprobaremos la otra condicion para ajustar R:

$$R>=(t\alpha/2,R-1*S0/\varepsilon)^2$$

Donde tα/2,R-1 es la distribucion t de Student con R-1 grados de libertad.

$$12>=((2,2010*9,4145)/5,36386985145)^2 = 14,9237560553$$

R = 13:

$$13>=((2,1788*9,4145)/5,36386985145)^2 = 14,6242226182$$

R = 14:

$$14>=((2,1604*9,4145)/5,36386985145)^2 = 14,3782620162$$

R = 15:

$$15>=((2,1448*9,4145)/5,36386985145)^2 = 14,1713641622$$

Como 15>= 14,1713641622, entonces R = 15 y como R0 = 5 debemos hacer 10 simulaciones mas. Lo que nos deja una media muestral de 109,132, una varianza de 188,105 y un desvio muestral de 13,718, Nuestro R0 es 15. Ahora estimamos R con la normal estandar:

$$R>=((1,96*13,718)/5,36386985145)^2 = 25,1268054139$$

R>=26, estimamos con la t de student:

$$26>=((2,0595*13,718)/5,36386985145)^2 = 27,7427000513$$

R = 27:

$$27 >=((2,0555*13,718)/5,36386985145)^2 = 27,6350399052$$

R = 28:

$$28 >=((2,0518*13,718)/5,36386985145)^2 = 27,535640615$$

Como 28>= 27,535640615, entonces R = 28 y como R0 = 515 debemos hacer 13 simulaciones mas. Lo que nos deja una media muestral de 112,612, una varianza de 164,01 y un desvio muestral de 12,8066, Nuestro R0 es 28. Ahora estimamos R con la normal estandar:

$$R>=((1,96*12,8066)/5,36386985145)^2 = 21,8989539094$$

R >= 28 (ya que R >= R0), estimamos con la t de student:

$$28 >=((2,0518*12,8066)/5,36386985145)^2 = 23,998344189$$

Luego R = 28, entonces:

$$H = t\alpha/2{,}27 * (12{,}8066/\text{sqrt}(28)) =$$
$$2{,}0518 * (12{,}8066/\text{sqrt}(28)) =$$
$$4{,}96580721138$$

Luego, construimos el intervalo de confianza con la formula:

$$[\text{Media muestral} – H, \text{Media muestral} + H] =$$
$$[\ 112{,}612 – 4{,}96580721138,\ 112{,}612 + 4{,}96580721138] =$$
$$[107{,}646192789\ ,\ 117{,}577807211]$$

Luego, nuestro intervalo de confianza para wq es:

$$[\ 107{,}646192789\ ,\ 117{,}577807211]$$