



Certamen 2

Nicolás GÓMEZ MORGADO
Investigación de Operaciones

7 de julio de 2024

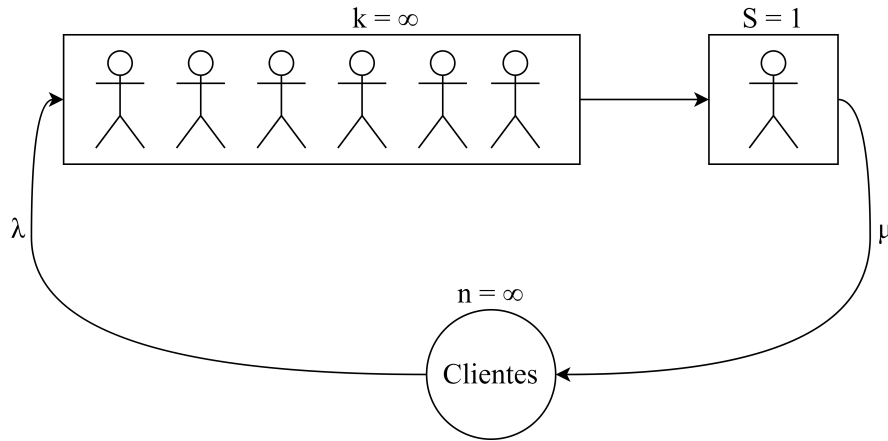
Índice

1. Materia	2
1.1. M/M/1	2
1.2. M/M/S	3
1.3. M/M/1/K	4
1.4. Costos en sistemas de espera	5
2. Formativo	6
2.1. Ejercicio 1	6
2.2. Ejercicio 2	7
2.3. Ejercicio 3	9
2.4. Ejercicio 4	11

1. Materia

1.1. M/M/1

El sistema M/M/1 es un sistema de colas en el que los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son variables aleatorias independientes y exponenciales. En este sistema, la tasa de llegada de clientes es λ y la tasa de servicio es μ .



Donde:

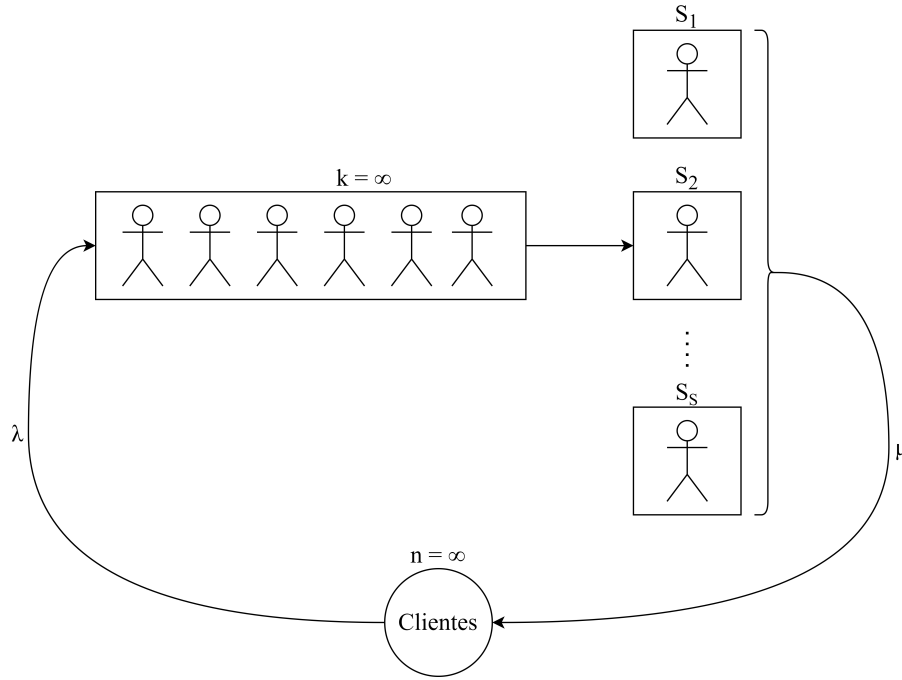
- n : Número de clientes en el sistema.
- λ : Tasa de llegada de clientes.
- μ : Tasa de servicio.
- ρ : Factor de utilización del sistema = $\frac{\lambda}{\mu}$. **Condición de regimen:** $\rho < 1$.

Indicadores de desempeño:

- L : Número promedio de clientes en el sistema = $\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$.
- L_q : Número promedio de clientes en la cola = $\frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$.
- W : Tiempo promedio de un cliente en el sistema = $\frac{1}{\mu - \lambda}$.
- W_q : Tiempo promedio de un cliente en la cola = $\frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$.
- P_0 : Probabilidad de que no haya clientes en el sistema de colas = $1 - \rho$.
- P_n : Probabilidad de que haya n clientes en el sistema de colas = $(1 - \rho)\rho^n$.
- $P(W_q > t)$: Probabilidad de tiempo de espera en la cola = $\rho e^{-\mu(1-\rho)t}$
- $P(W > t)$: Probabilidad de estancia de un cliente en el sistema = $e^{-\mu(1-\rho)t}$

1.2. M/M/S

El sistema M/M/S es un sistema de colas en el que los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son variables aleatorias independientes y exponenciales. En este sistema, la tasa de llegada de clientes es λ y la tasa de servicio es μ .



Donde:

- n : Número de clientes en el sistema.
- λ : Tasa de llegada de clientes.
- μ : Tasa de servicio.
- s : Número de servidores.
- ρ : Factor de utilización del sistema = $\frac{\lambda}{s\mu}$. **Condición de regimen:** $\rho < 1$.

Indicadores de desempeño:

- L : Número promedio de clientes en el sistema = $L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \lambda W_q$.
- L_q : Número promedio de clientes en la cola = $\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s \lambda \mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2} P_0 = \frac{1}{s!} (\frac{\lambda}{\mu})^s \frac{\rho}{(1-\rho)^2} P_0$.
- W : Tiempo promedio de un cliente en el sistema = $W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda}$.
- W_q : Tiempo promedio de un cliente en la cola = $\frac{L_q}{\lambda} = \lambda W_q$.
- P_0 : Probabilidad de que no haya clientes en el sistema de colas.

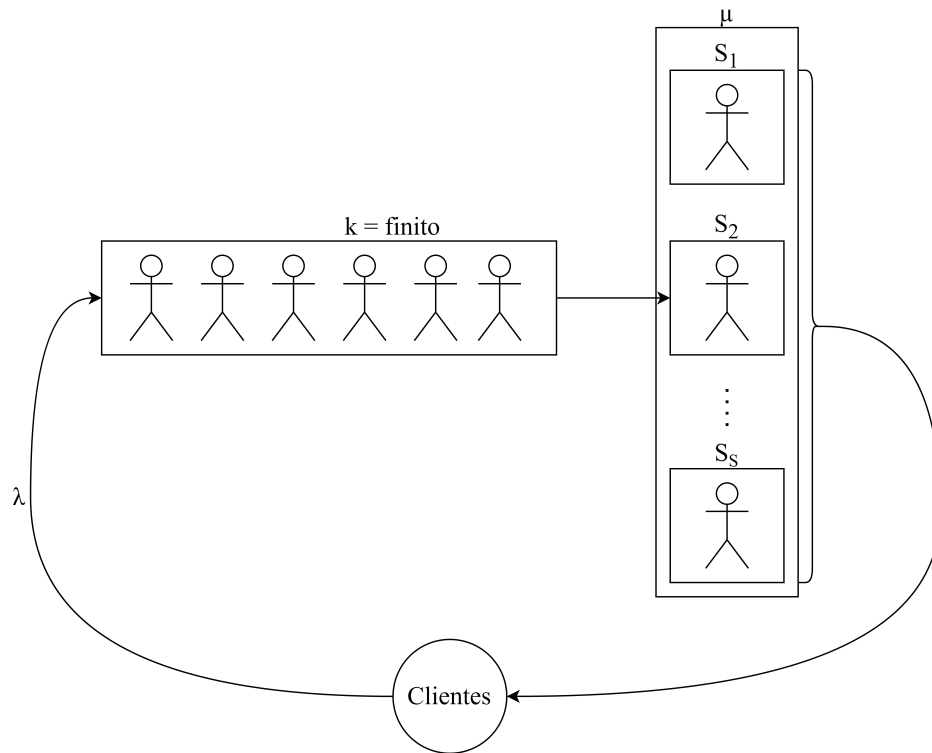
$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} (\frac{s\mu}{s\mu-\lambda})}.$$

- P_n : Probabilidad de que haya n clientes en el sistema de colas.

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} P_0 & \text{si } n \leq s \\ \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{s!} P_0 & \text{si } n > s \end{cases}$$

1.3. M/M/1/K

El sistema M/M/1/K es un sistema de colas en el que los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son variables aleatorias independientes y exponenciales. En este sistema, la tasa de llegada de clientes es λ y la tasa de servicio es μ .



Donde:

- n : Número de clientes en el sistema.
- λ : Tasa de llegada de clientes.
- λ_{ef} : Tasa de llegada efectiva de clientes = $\lambda(1 - P_k)$.
 - **Rebote:** $\lambda - \lambda_{ef}$.
 - **Tasa de ingreso real al sistema:** $\lambda_{ef} < \lambda$.
- μ : Tasa de servicio.
- K : Capacidad del sistema.
- ρ : Factor de utilización del sistema = $\frac{\lambda}{\mu}$. **Condición de regimen:** $\rho < 1$.

Indicadores de desempeño:

- L : Número promedio de clientes en el sistema.

$$L = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{\rho-\rho^{k+1}} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \frac{k}{2} & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

- L_q : Número promedio de clientes en la cola.

$$L_q = \begin{cases} L - \frac{(1-\rho^k)\rho}{1-\rho^{k+1}} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \frac{k(k-1)}{2(k+1)} & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

- W : Tiempo promedio de un cliente en el sistema $= \frac{L}{\lambda_{ef}}$.
- W_q : Tiempo promedio de un cliente en la cola $= \frac{L_q}{\lambda_{ef}}$.
- P_0 : Probabilidad de que no haya clientes en el sistema de colas.

$$P_0 = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} & \text{si } \lambda \neq \mu \equiv \rho = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \neq 1 \\ \frac{1}{1+k} & \text{si } \lambda = \mu \equiv \rho = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = 1 \end{cases}$$

- P_n : Probabilidad de que haya n clientes en el sistema de colas.

$$P_n = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{k+1}} & \text{si } \lambda \neq \mu \equiv \rho = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \neq 1 \\ \frac{1}{1+k} & \text{si } \lambda = \mu \equiv \rho = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = 1 \end{cases}$$

1.4. Costos en sistemas de espera

Costos atribuidos a la empresa teniendo en cuenta el tiempo de espera de los clientes en el sistema de colas y la cantidad de servidores disponibles. Se calcula a través de la siguiente fórmula:

$$C_t = S \cdot C_s + L \cdot C_w$$

2. Formativo

2.1. Ejercicio 1

A un cajero automático llegan 10 clientes por hora y cada usuario permanece en promedio 4 minutos.

(a) ¿Qué sistema es y cuáles son sus parámetros?

El sistema presentado es un sistema de colas M/M/1, el cual tiene como parámetros:

- $\lambda = 10 \frac{cl}{h}$
- $\mu = \frac{60}{4} = 15 \frac{cl}{h}$

(b) ¿Cuál es la tasa de utilización del cajero?

- $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = 0.\overline{666} \rightarrow \rho < 1$ Estable

(c) Porcentaje del tiempo que está ocupado.

- $\%_{ocupado} = \rho \times 100 = 0.\overline{666} \times 100 = 66.\overline{6} \%$

(d) ¿Cuántos clientes se encuentran esperando para usar el cajero en un momento dado?

- $L_q = \frac{10^2}{15(15-10)} = \frac{4}{3} = 1.\overline{3}$

(e) ¿Cuánto tiempo utiliza un usuario en toda la operación, desde el instante inicial?

- $W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{15 - 10} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ horas} = 12 \text{ minutos}$

2.2. Ejercicio 2

Una ventanilla de ventas de pasajes dispone de dos personas que atienden a clientes que llega a una tasa de 80 clientes por hora. Cada vendedor es capaz de para atender a 50 clientes por hora. Se pide:

- (a) Identifique el sistema y sus parámetros.

El sistema presentado es un sistema de colas M/M/S de 2 servidores, con parámetros:

- $\lambda = 80 \frac{cl}{h}$
- $\mu = 50 \frac{cl}{h}$
- $s = 2$

- (b) ¿Es estable el sistema?

Para conocer la estabilidad del sistema es necesario calcular el valor de la tasa de utilización y si este valor es menor a 1, el sistema es estable.

- $\rho = \frac{80}{2 \cdot 50} = 0,8 < 1$

Por lo tanto el sistema es estable.

- (c) ¿Cuál es la probabilidad que el sistema este vacío?

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1} \frac{(\frac{80}{50})^n}{n!} + \frac{(\frac{80}{50})^2}{2!} \left(\frac{2 \cdot 50}{2 \cdot 50 - 80} \right)} \\
 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{(\frac{80}{50})^n}{n!} + \frac{(\frac{80}{50})^2}{2!} \left(\frac{2 \cdot 50}{2 \cdot 50 - 80} \right)} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{0!} + \frac{(\frac{80}{50})^1}{1!} + \frac{(\frac{80}{50})^2}{2!} \left(\frac{2 \cdot 50}{2 \cdot 50 - 80} \right)} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{80}{50} + \frac{80^2}{50^2 \cdot 2} \left(\frac{100}{20} \right)} \\
 &= \frac{1}{9} \\
 &= 0.\bar{1}
 \end{aligned}$$

- (d) El número esperado de clientes.

$$\begin{aligned}
 L &= L_q + \frac{\lambda}{\mu} \\
 &= \frac{1}{2!} \left(\frac{80}{50} \right)^2 \frac{\frac{80}{100}}{\left(1 - \frac{80}{100} \right)^2} \cdot \frac{1}{9} + \frac{80}{50} \\
 &= \frac{1}{2!} \frac{64}{25} \cdot 20 \cdot \frac{1}{9} + \frac{8}{5} \\
 &= \frac{256}{45 \cdot 2} + \frac{8}{5} \\
 &= \frac{128}{45} + \frac{8}{5} \\
 &= \frac{40}{9} \\
 &= 4.\bar{4}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto el número esperado de clientes es de 4.4.

(e) La probabilidad que haya más de 4 clientes en el sistema.

$$\begin{aligned}
 P(n > 4) &= 1 - P(n \leq 4) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \\
 &= 1 - (0,0061 + \left[\frac{\left(\frac{80}{50} \right)^1}{1!} \cdot 0,0061 \right] + \left[\frac{(0,8)^2}{2!} \cdot 0,0061 \right] + \left[\frac{(0,8)^3}{2!} \cdot 0,0061 \right] + \left[\frac{(0,8)^4}{2!} \cdot 0,0061 \right]) \\
 &= 1 - (0,0061 + 0,0098 + 0,0062 + 0,0031 + 0,0012) \\
 &= 1 - 0,0264 \\
 &= 0,9736 \\
 &= 97,36 \%
 \end{aligned}$$

Por lo tanto la probabilidad de que haya más de 4 clientes en el sistema es de 97.36 %.

2.3. Ejercicio 3

Encontrar las medidas de desempeño para un sistema de cola M/M/1/5 con tasa de llegada 10 y tasa de servicio igual a 12.

Datos:

- $\lambda = 10 \frac{cl}{h}$
- $\lambda_{ef} = 10(1 - 0,1006) = 8,994$
- $\mu = 12 \frac{cl}{h}$
- $K = 5$
- $\rho = \frac{10}{12} = 0,8333$

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^6} = \frac{1 - 0,8333}{1 - 0,8333^6} = 0,1667$$

$$P_n = \frac{(1 - \rho)\rho^n}{1 - \rho^6} = \frac{(1 - 0,8333)0,8333^n}{1 - 0,8333^6}$$

$$P_k = \frac{(1 - 0,8333)0,8333^5}{1 - 0,8333^6}$$

$$= 0,1006$$

$$L = \frac{0,8333}{(1 - 0,8333)} - \frac{(6)0,8333^6}{1 - 0,8333^6}$$

$$= 4,9988 - 3,02088$$

$$= 1,97792$$

$$\Downarrow$$

$$L_q = 1,97792 - \frac{(1 - 0,8333^5)0,8333}{1 - 0,8333^6}$$

$$= 1,97792 - 0,749392$$

$$= 1,228528$$



$$W = \frac{1,97792}{8,994}$$

$$= 0,2199$$

$$\Downarrow$$

$$W_q = \frac{1,228528}{8,994}$$

$$= 0,1366$$

2.4. Ejercicio 4

Un banco trata de determinar cuántos cajeros debe emplear. El costo total de emplear un cajero es 90 dólares diarios y un cajero puede atender a un promedio de 60 clientes por día. Al banco llega un promedio de 50 clientes por día y los tiempos de servicio y los tiempos entre llegadas son exponenciales. Si el costo de demora por cliente y día [en el sistema] es de 20 dólares, ¿cuántos cajeros debe contratar el banco para minimizar los costos de operación?

Datos:

- $\lambda = 50 \frac{cl}{d}$
- $\mu = 60 \frac{cl}{d}$
- $C_s = 90$
- $C_w = 20$

S	λ	μ	ρ	P_0	L_q	L	C_t
1	50	60	$\frac{50}{1 \cdot 60} = 0,833$ Estable	0.1667	4.1667	5	$1(90) + 5(20) = 190$
2	50	60	$\frac{50}{2 \cdot 60} = 0,416$ Estable	0.4117	0.1749	1.0082	$2(90) + 1,0082(20) = 200.16$
3	50	60	$\frac{50}{3 \cdot 60} = 0,277$ Estable				
4	50	60	$\frac{50}{4 \cdot 60} = 0,208$ Estable				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Por lo tanto es conveniente contratar 1 cajero para minimizar los costos de operación.

Para un $S = 1$:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\frac{50}{60})^n}{n!} + \frac{(\frac{50}{60})^1}{1!} \left(\frac{1 \cdot 60}{1 \cdot 60 - 50} \right)} \\
 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^0 \frac{(\frac{50}{60})^n}{n!} + \frac{(\frac{50}{60})^1}{1!} \left(\frac{1 \cdot 60}{1 \cdot 60 - 50} \right)} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{0!} + \frac{(\frac{50}{60})^1}{1!} \left(\frac{1 \cdot 60}{1 \cdot 60 - 50} \right)} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{50}{60} \cdot \frac{60}{10}} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{50}{10}} \\
 &= \frac{1}{6} \\
 &= 0,1667 \\
 &\Downarrow \\
 L_q &= \frac{1}{1!} \left(\frac{50}{60} \right)^1 \frac{\frac{50}{60}}{(1 - \frac{50}{60})^2} \cdot \frac{1}{6} \\
 &= \frac{1}{1} \cdot \frac{50}{60} \cdot 30 \cdot \frac{1}{6} \\
 &= \frac{25}{6} \\
 &= 4,1667 \\
 &\Downarrow \\
 L &= 4,1667 + \frac{50}{60} \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

Para un $s = 2$:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{(\frac{50}{60})^n}{n!} + \frac{(\frac{50}{60})^2}{2!} \left(\frac{1 \cdot 60}{1 \cdot 60 - 50} \right)} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{0!} + \frac{(\frac{50}{60})^1}{1!} + \frac{(\frac{50}{60})^2}{2!} \left(\frac{2 \cdot 60}{2 \cdot 60 - 50} \right)} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{\frac{50}{60}}{1} + \frac{(\frac{50}{60})^2}{2!} \cdot \frac{2 \cdot 60}{120 - 50}} \\
 &= \frac{1}{\frac{17}{7}} \\
 &= \frac{7}{17} \\
 &= 0,4117 \\
 &\Downarrow \\
 L_q &= \frac{1}{2!} \left(\frac{50}{60} \right)^2 \frac{\frac{50}{2 \cdot 60}}{\left(1 - \frac{50}{2 \cdot 60} \right)^2} \cdot \frac{7}{17} \\
 &= \frac{1}{2!} \cdot \frac{25}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{17} \\
 &= \frac{125}{714} \\
 &= 0,1749 \\
 &\Downarrow \\
 L &= 0,1749 + \frac{50}{60} \\
 &= 0,1749 + 0,8333 \\
 &= 1,0082
 \end{aligned}$$