

## Listado 5: Funciones.

ÁLGEBRA I

**Ejercicio 1.** Considere los conjuntos  $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 5\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} : 50 \leq x^2 \leq 100\}$  y  $C = \{9, 10, 11\}$ . Calcular: **Práctica: (b).**

- a)  $A \times B$  y  $B \times A$ . Compare ambos resultados.
- b)  $A \times (B \cup C)$  y  $(A \times B) \cup (A \times C)$ . Compare ambos resultados.
- c)  $A \times (B \cap C)$  y  $(A \times B) \cap (A \times C)$ . Compare ambos resultados.
- d)  $A \times B \times C$ .
- e)  $\mathcal{P}(A \times B)$ .

**Ejercicio 2.** Demuestre las siguientes propiedades del producto cartesiano: **Práctica: (b).**

- a)  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ .
- c)  $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$ .
- b)  $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ .
- d)  $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ .

**Ejercicio 3.** Indicar cuál de los siguientes conjuntos representa una función: **Práctica: (a), (b).**

- a)  $A = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : b = a^2\}$ .
- c)  $C = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 : x = (y + 1)^2\}$ .
- b)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2 + 2y + 1\}$ .
- d)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^3\}$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $E \neq \emptyset$  un conjunto fijo. Para todo subconjunto  $A$  de  $E$  se define la **función característica** de  $A$  como: **Práctica.**

$$\delta_A : E \rightarrow \{0, 1\} \text{ tal que } x \mapsto \delta_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (1)$$

- a) Describa  $\delta_E(x)$  y  $\delta_\emptyset(x)$  para todo  $x \in E$ .
- b) Demuestre que  $\forall x \in E, \delta_{A \cap B}(x) = \delta_A(x) \cdot \delta_B(x)$ .
- c) Si  $C, D \subseteq E$ , entonces  $C \subseteq D \Leftrightarrow \forall x \in E, \delta_C(x) \leq \delta_D(x)$ .

**Ejercicio 5.** Dadas la funciones:

**Práctica: (c), (g).**

■  $f(x) = 3x^2 + 5x + 3.$

■  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}.$

■  $f(x) = x^2 + 2x + 1.$

■  $f(x) = -4x - 3.$

■  $f(x) = \sqrt{12 - x^2}.$

Encuentre, si es posible, en cada caso:

a)  $f(-10)$

c)  $f(2)$

e)  $f(\frac{1}{a})$

g)  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

b)  $f(\frac{1}{3})$

d)  $f(a+1)$

f)  $\frac{f(a+2) - f(a)}{2}$

**Ejercicio 6.** Encuentre el dominio, recorrido y ceros de las siguientes funciones: **Práctica: (f), (j), (m).**

a)  $f(x) = 5x + 1$

f)  $f(x) = \frac{3}{x^2 + 5x + 6}$

k)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+5}}$

b)  $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$

g)  $f(x) = \frac{3x-3}{x^2-x-56}$

l)  $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x}$

c)  $f(x) = -x^2 - 4x - 1$

h)  $f(x) = \sqrt{x^2-9}$

d)  $f(x) = \frac{2}{x-1}$

i)  $f(x) = \sqrt{16-x^2}$

m)  $f(x) = \sqrt{1-(x+1)(x-1)}$

e)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

j)  $f(x) = \frac{6-11x}{\sqrt{-3x-15}}$

n)  $f(x) = \sqrt{|x-1|-1}$

**Ejercicio 7.** Para las siguientes funciones encuentre el dominio, recorrido, ceros, paridad, crecimiento, decrecimiento, acotamiento y el signo: **Práctica: (b), (i), (m).**

a)  $f(x) = x^3$

f)  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

j)  $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x}$

b)  $f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$

g)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

k)  $f(x) = \sqrt{|x-1|-1}$

c)  $f(x) = \sqrt{1-\frac{2}{1+x}}$

h)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

l)  $f(x) = \frac{x+1}{1+x^4}$

d)  $f(x) = \sqrt{x-1}$

i)  $f(x) = \frac{1}{|2x+1|}$

m)  $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$

**Ejercicio 8.** Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , determine si las siguientes son funciones y si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas: **Práctica: (a).**

a)  $\pi_A : A \times B \rightarrow A$ , tal que  $(a, b) \mapsto \pi_A(a, b) = a$ .

b)  $d_A : A \rightarrow A \times B$ , tal que  $a \mapsto d_A(a) = (a, a)$ .

c)  $\tau : A \times B \rightarrow B \times A$ , tal que  $(a, b) \mapsto \tau(a, b) = (b, a)$ .

**Ejercicio 9.** Decida si las siguientes funciones son invertibles, si su respuesta es afirmativa encuentre la función inversa, en cambio si es negativa haga las restricciones necesarias para que sea invertible y defina formalmente la inversa: **Práctica: (d), (g), (j), (k).**

a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$	e) $g(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)}$	h) $f(x) = \frac{3x-3}{x^2-x-56}$
b) $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$	f) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$	i) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$
c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$		j) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$
d) $f(x) = x^2 - 5x + 6$	g) $f(x) = \frac{3}{x^2+5x+6}$	k) $f(x) = \frac{6-11x}{\sqrt{-3x-15}}$

**Ejercicio 10.** Encuentre el recorrido de  $h(x) = (x-1)(x-2)$ . Pruebe que  $h$  restringida al intervalo  $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$  es estrictamente creciente, además encuentre la función inversa  $h^{-1}$ .

**Práctica.**

**Ejercicio 11.** Sean  $f$  y  $g$  definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{si } x > 2 \\ x^2-2|x| & \text{si } x \leq 2 \end{cases} \quad g(x) = 3x+1$$

Encuentre

**Práctica: (b), (e), (g).**

a) $f(-3)$	d) $(f \circ f)(1)$	g) $f \circ f$
b) $(g \circ f)(1)$	e) $f \circ g$	h) $f + g$
c) $(f \circ g)(2)$	f) $g \circ f$	i) $f \cdot g$