Certamen 2

Nicolás Gómez Morgado

Investigación de Operaciones

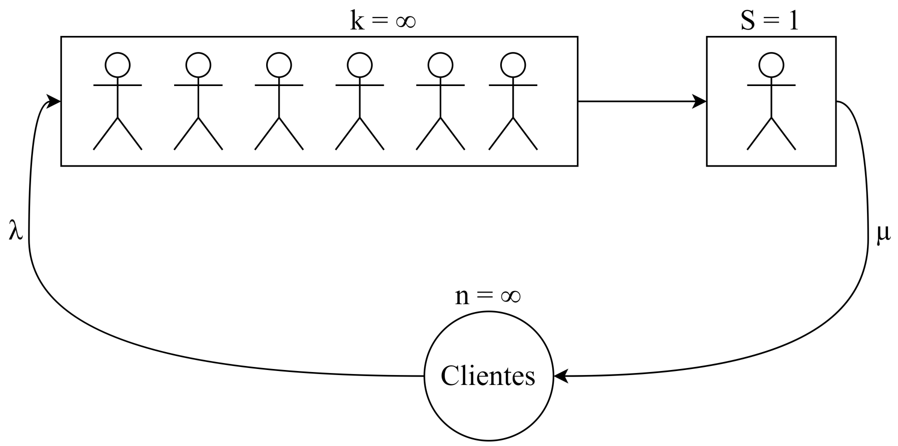
8 de julio de 2024

Índice

1. Materia

1.1. M/M/1

El sistema M/M/1 es un sistema de colas en el que los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son variables aleatorias independientes y exponenciales. En este sistema, la tasa de llegada de clientes es λ y la tasa de servicio es μ.



Donde:

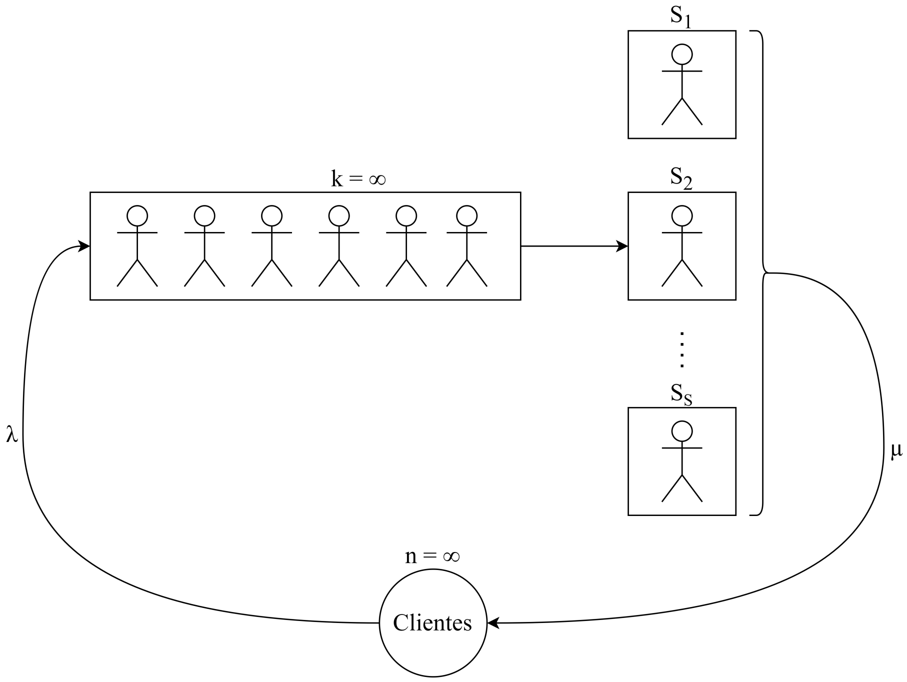
- n: Número de clientes en el sistema.
- λ: Tasa de llegada de clientes.
- μ: Tasa de servicio.
- ρ: Factor de utilización del sistema $= \frac{\lambda}{\mu}$. **Condición de regimen:** $\rho < 1$.

Indicadores de desempeño:

- L: Número promedio de clientes en el sistema $= \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$.
- L_q: Número promedio de clientes en la cola $= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$.
- W: Tiempo promedio de un cliente en el sistema $= \frac{1}{\mu-\lambda}$.
- W_q: Tiempo promedio de un cliente en la cola $= \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$.
- P_0: Probabilidad de que no haya clientes en el sistema de colas $= 1-\rho$.
- P_n: Probabilidad de que haya n clientes en el sistema de colas$= (1-\rho)\rho^n$.
- $P(W_q > t)$: Probabilidad de tiempo de espera en la cola $= \rho e^{-\mu(1-\rho)t}$
- $P(W > t)$: Probabilidad de estancia de un cliente en el sistema $= e^{-\mu(1-\rho)t}$

1.2. M/M/S

El sistema M/M/S es un sistema de colas en el que los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son variables aleatorias independientes y exponenciales. En este sistema, la tasa de llegada de clientes es λ y la tasa de servicio es μ.



Donde:

- n: Número de clientes en el sistema.
- λ: Tasa de llegada de clientes.
- μ: Tasa de servicio.
- s: Número de servidores.
- ρ: Factor de utilización del sistema $= \frac{\lambda}{S\mu}$. **Condición de regimen:** $\rho < 1$.

Indicadores de desempeño:

- L: Número promedio de clientes en el sistema $= L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \lambda W_q$.
- L_q: Número promedio de clientes en la cola $= \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s \lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2} P_0 = \frac{1}{s!}(\frac{\lambda}{\mu})^s \frac{\rho}{(1-\rho)^2} P_0$.
- W: Tiempo promedio de un cliente en el sistema $= W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda}$.
- W_q: Tiempo promedio de un cliente en la cola $= \frac{L_q}{\lambda} = \lambda W_q$.
- P_0: Probabilidad de que no haya clientes en el sistema de colas.

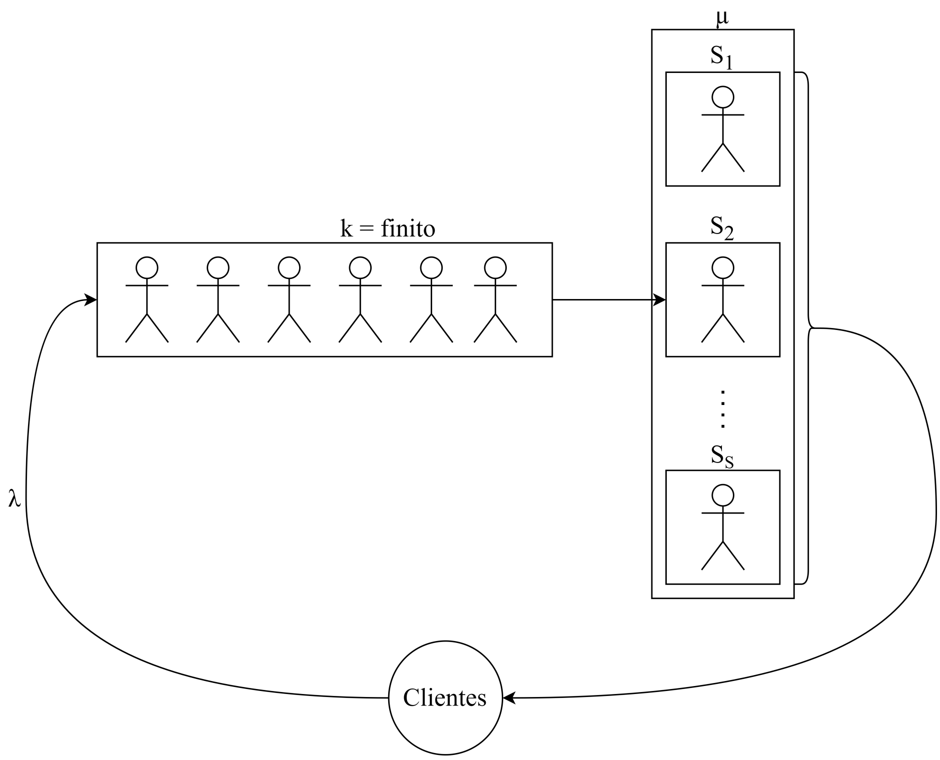
$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!}(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda})}.$$

- P_n: Probabilidad de que haya n clientes en el sistema de colas.

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} P_0 & \text{si } n \leq s \\ \\ \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{s! \cdot s^{(n-s)}} P_0 & \text{si } n > s \end{cases}$$

1.3. M/M/1/K

El sistema M/M/1/K es un sistema de colas en el que los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son variables aleatorias independientes y exponenciales. En este sistema, la tasa de llegada de clientes es λ y la tasa de servicio es μ.



Donde:

- n: Número de clientes en el sistema.
- λ: Tasa de llegada de clientes.
- λ_{ef}: Tasa de llegada efectiva de clientes = $\lambda(1 - P_k)$.
  - **Rebote:** $\lambda - \lambda_{ef}$.
  - **Tasa de ingreso real al sistema:** $\lambda_{ef} < \lambda$.
- μ: Tasa de servicio.
- K: Capacidad del sistema.
- ρ: Factor de utilización del sistema = $\frac{\lambda}{\mu}$. **Condición de regimen:** $\rho < 1$.

Indicadores de desempeño:

- L: Número promedio de clientes en el sistema.

$$L = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{\rho-\rho^{k+1}} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \frac{k}{2} & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

- L_q: Número promedio de clientes en la cola.

$$L_q = \begin{cases} L - \frac{(1-\rho^k)\rho}{1-\rho^{k+1}} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \frac{k(k-1)}{2(k+1)} & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

- W: Tiempo promedio de un cliente en el sistema $= \frac{L}{\lambda_{ef}}$.
- W_q: Tiempo promedio de un cliente en la cola $= \frac{L_q}{\lambda_{ef}}$.
- P_0: Probabilidad de que no haya clientes en el sistema de colas.

$$P_0 = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} & \text{si } \lambda \neq \mu \equiv \rho = (\frac{\lambda}{\mu}) \neq 1 \\ \frac{1}{1+k} & \text{si } \lambda = \mu \equiv \rho = (\frac{\lambda}{\mu}) = 1 \end{cases}$$

- P_n: Probabilidad de que haya n clientes en el sistema de colas.

$$P_n = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{k+1}} & \text{si } \lambda \neq \mu \equiv \rho = (\frac{\lambda}{\mu}) \neq 1 \\ \frac{1}{1+k} & \text{si } \lambda = \mu \equiv \rho = (\frac{\lambda}{\mu}) = 1 \end{cases}$$

1.4. Costos en sistemas de espera

Costos atribuidos a la empresa teniendo en cuenta el tiempo de espera de los clientes en el sistema de colas y la cantidad de servidores disponibles. Se calcula a través de la siguiente fórmula:

$$C_t = S \cdot C_s + L \cdot C_w$$

2. Formativo

2.1. Ejercicio 1

A un cajero automático llegan 10 clientes por hora y cada usuario permanece en promedio 4 minutos.

(a) ¿Qué sistema es y cuáles son sus parámetros?
El sistema presentado es un sistema de colas M/M/1, el cual tiene como parámetros:

- $\lambda = 10\ \frac{cl}{h}$
- $\mu = \frac{60}{4} = 15 \frac{cl}{h}$

(b) ¿Cuál es la tasa de utilización del cajero?

- $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = 0.\overline{666} \to \rho < 1$ Estable

(c) Porcentaje del tiempo que está ocupado.

- $\%_{ocupado} = \rho \times 100 = 0.\overline{666} \times 100 = 66.\overline{6}\,\%$

(d) ¿Cuántos clientes se encuentran esperando para usar el cajero en un momento dado?

- $L_q = \frac{10^2}{15(15-10)} = \frac{4}{3} = 1.\overline{3}$

(e) ¿Cuánto tiempo utiliza un usuario en toda la operación, desde el instante inicial?

- $W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{15-10} = \frac{1}{5} = 0.2$ horas $= 12$ minutos

2.2. Ejercicio 2

Una ventanilla de ventas de pasajes dispone de dos personas que atienden a clientes que llega a una tasa de 80 clientes por hora. Cada vendedor es capaz de para atender a 50 clientes por hora. Se pide:

(a) Identifique el sistema y sus parámetros.
El sistema presentado es un sistema de colas M/M/S de 2 servidores, con parámetros:

- $\lambda = 80\frac{cl}{h}$
- $\mu = 50\frac{cl}{h}$
- $s = 2$

(b) ¿Es estable el sistema?
Para conocer la estabilidad del sistema es necesario calcular el valor de la taza de utilización y si este valor es menor a 1, el sistema es estable.

- $\rho = \frac{80}{2 \cdot 50} = 0{,}8 < 1$

Por lo tanto el sistema es estable.

(c) ¿Cuál es la probabilidad que el sistema este vacío?

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1} \frac{(\frac{80}{50})^n}{n!} + \frac{(\frac{80}{50})^2}{2!}\left(\frac{2 \cdot 50}{2 \cdot 50 - 80}\right)} \\
&= \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{(\frac{80}{50})^n}{n!} + \frac{(\frac{80}{50})^2}{2!}\left(\frac{2 \cdot 50}{2 \cdot 50 - 80}\right)} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{0!} + \frac{(\frac{80}{50})^1}{1!} + \frac{(\frac{80}{50})^2}{2!}\left(\frac{2 \cdot 50}{2 \cdot 50 - 80}\right)} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{80}{50} + \frac{80^2}{50^2 \cdot 2}\left(\frac{100}{20}\right)} \\
&= \frac{1}{9} \\
&= 0.\overline{1}
\end{aligned}$$

(d) El número esperado de clientes.

$$
\begin{aligned}
L &= L_q + \frac{\lambda}{\mu} \\
&= \frac{1}{2!}(\frac{80}{50})^2 \frac{\frac{80}{100}}{(1-\frac{80}{100})^2} \cdot \frac{1}{9} + \frac{80}{50} \\
&= \frac{1}{2!}\frac{64}{25} \cdot 20 \cdot \frac{1}{9} + \frac{8}{5} \\
&= \frac{256}{45 \cdot 2} + \frac{8}{5} \\
&= \frac{128}{45} + \frac{8}{5} \\
&= \frac{40}{9} \\
&= 4.\overline{4}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el número esperado de clientes es de 4.4.

(e) La probabilidad que haya más de 4 clientes en el sistema.

$$
\begin{aligned}
&P(n > 4) = 1 - P(n \leq 4) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \\
&= 1 - (\frac{1}{9} + [\frac{(\frac{80}{50})^1}{1!} \cdot \frac{1}{9}] + [\frac{(\frac{80}{50})^2}{2!} \cdot \frac{1}{9}] + [\frac{(\frac{80}{50})^3}{2! \cdot 2^{3-2}} \cdot \frac{1}{9}] + [\frac{(\frac{80}{50})^4}{2! \cdot 2^{4-2}} \cdot \frac{1}{9}]) \\
&= 1 - [\frac{1}{9} + \frac{8}{45} + \frac{32}{225} + \frac{128}{1125} + \frac{512}{5625}] \\
&= 1 - 0{,}6359 \\
&= 0{,}3641
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la probabilidad de que haya más de 4 clientes en el sistema es de 36.41 %.

2.3. Ejercicio 3

Encontrar las medidas de desempeño para un sistema de cola M/M/1/5 con tasa de llegada 10 y tasa de servicio igual a 12.

Datos:

- $\lambda = 10\frac{cl}{h}$
- $\lambda_{ef} = 10(1 - 0{,}1006) = 8{,}994$
- $\mu = 12\frac{cl}{h}$
- $K = 5$
- $\rho = \frac{10}{12} = 0{,}8333$

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1-\rho}{1-\rho^6} = \frac{1-0{,}8333}{1-0{,}8333^6} = 0{,}1667 \\
P_n &= \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^6} = \frac{(1-0{,}8333)0{,}8333^n}{1-0{,}8333^6} \\
P_k &= \frac{(1-0{,}8333)0{,}8333^5}{1-0{,}8333^6} \\
&= 0{,}1006
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{0{,}8333}{(1-0{,}8333)} - \frac{(6)0{,}8333^6}{1-0{,}8333^6} \\
&= 4{,}9988 - 3{,}02088 \\
&= 1{,}97792 \\
&\Downarrow \\
L_q &= 1{,}97792 - \frac{(1-0{,}8333^5)0{,}8333}{1-0{,}8333^6} \\
&= 1{,}97792 - 0{,}749392 \\
&= 1{,}228528
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1{,}97792}{8{,}994} \\
&= 0{,}2199 \\
&\Downarrow \\
W_q &= \frac{1{,}228528}{8{,}994} \\
&= 0{,}1366
\end{aligned}
$$

2.4. Ejercicio 4

Un banco trata de determinar cuántos cajeros debe emplear. El costo total de emplear un cajero es 90 dólares diarios y un cajero puede atender a un promedio de 60 clientes por día. Al banco llega un promedio de 50 clientes por día y los tiempos de servicio y los tiempos entre llegadas son exponenciales. Si el costo de demora por cliente y día [en el sistema] es de 20 dólares, ¿cuántos cajeros debe contratar el banco para minimizar los costos de operación?

Datos:

- $\lambda = 50\ \frac{cl}{d}$
- $\mu = 60\ \frac{cl}{d}$
- $C_s = 90$
- $C_w = 20$

S	λ	μ	ρ	P_0	L_q	L	C_t
1	50	60	$\frac{50}{1 \cdot 60} = 0{,}833$ Estable	0.1667	4.1667	5	$1(90) + 5(20) = 190$
2	50	60	$\frac{50}{2 \cdot 60} = 0{,}416$ Estable	0.4117	0.1749	1.0082	$2(90) + 1{,}0082(20) = 200.16$
3	50	60	$\frac{50}{3 \cdot 60} = 0{,}277$ Estable				
4	50	60	$\frac{50}{4 \cdot 60} = 0{,}208$ Estable				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Por lo tanto es conveniente contratar 1 cajero para minimizar los costos de operación.

Para un S = 1:

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\frac{50}{60})^n}{n!} + \frac{(\frac{50}{60})^1}{1!}(\frac{1 \cdot 60}{1 \cdot 60 - 50})} \\
&= \frac{1}{\sum_{n=0}^{0} \frac{(\frac{50}{60})^n}{n!} + \frac{(\frac{50}{60})^1}{1!}(\frac{1 \cdot 60}{1 \cdot 60 - 50})} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{0!} + \frac{(\frac{50}{60})^1}{1!}(\frac{1 \cdot 60}{1 \cdot 60 - 50})} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{50}{60} \cdot \frac{60}{10}} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{50}{10}} \\
&= \frac{1}{6} \\
&= 0{,}1667 \\
&\Downarrow \\
L_q &= \frac{1}{1!}(\frac{50}{60})^1 \frac{\frac{50}{60}}{(1 - \frac{50}{60})^2} \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{1} \cdot \frac{50}{60} \cdot 30 \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{25}{6} \\
&= 4{,}1667 \\
&\Downarrow \\
L &= 4{,}1667 + \frac{50}{60} \\
&= 5
\end{aligned}
$$

Para un s = 2:

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{(\frac{50}{60})^n}{n!} + \frac{(\frac{50}{60})^2}{2!}(\frac{1 \cdot 60}{1 \cdot 60 - 50})} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{0!} + \frac{(\frac{50}{60})^1}{1!} + \frac{(\frac{50}{60})^2}{2!}(\frac{2 \cdot 60}{2 \cdot 60 - 50})} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{\frac{50}{60}}{1} + \frac{(\frac{50}{60})^2}{2!} \cdot \frac{2 \cdot 60}{120 - 50}} \\
&= \frac{1}{\frac{17}{7}} \\
&= \frac{7}{17} \\
&= 0{,}4117 \\
&\Downarrow \\
L_q &= \frac{1}{2!}(\frac{50}{60})^2 \frac{\frac{50}{2 \cdot 60}}{(1 - \frac{50}{2 \cdot 60})^2} \cdot \frac{7}{17} \\
&= \frac{1}{2!} \cdot \frac{25}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{17} \\
&= \frac{125}{714} \\
&= 0{,}1749 \\
&\Downarrow \\
L &= 0{,}1749 + \frac{50}{60} \\
&= 0{,}1749 + 0{,}8333 \\
&= 1{,}0082
\end{aligned}
$$