Certamen 2

Nicolás Gómez Morgado

Investigación de Operaciones

28 de julio de 2024

Índice

1. Materia

1.1. Cadenas de Markov

1.1.1. Proceso estocástico

Es una sucesión X_n de variables aleatorias, donde n es un número entero no negativo. Se dice que X_n es un proceso estocástico si para cada n, X_n es una variable aleatoria.

Ejemplo:
Supongamos que X_n = Estado del clima en el dia $n = 1, 2, 3, ...$
Supongamos que los estudios posibles son n:nublado, s:soleado, r:lluvia

$$\Omega : n, s, r = \text{Espacio muestral}$$

Realización de X_n:

$$n, n, s, s, s, r, r, n, n, n;$$

Supuestos para la cadena de Markov:

1. El estado de la cadena en el instante $n+1$ depende solo del estado en el instante actual n (no de anteriores[n-1,n-2,n-3...]).

2. Con este supuesto se establecen las probabilidades condicionales homogéneas.
   P_{ij} :Probabilidad de pasar del estado i al estado j en una etapa.
   Notar que P_{ij} no depende de n.
   Con esto se forma una matriz conformada por P = $(P_{ij})_{ij=1,2,3,...,*}$
   P: Matriz de transición de probabilidades en una etapa.

3. Supongamos que nuestros ejemplos:

$$P = \begin{array}{c} \text{n} \\ \text{s} \\ \text{r} \end{array} \begin{pmatrix} P_{nn} & P_{ns} & P_{nr} \\ P_{sn} & P_{ss} & P_{sr} \\ P_{rn} & P_{rs} & P_{rr} \end{pmatrix}$$

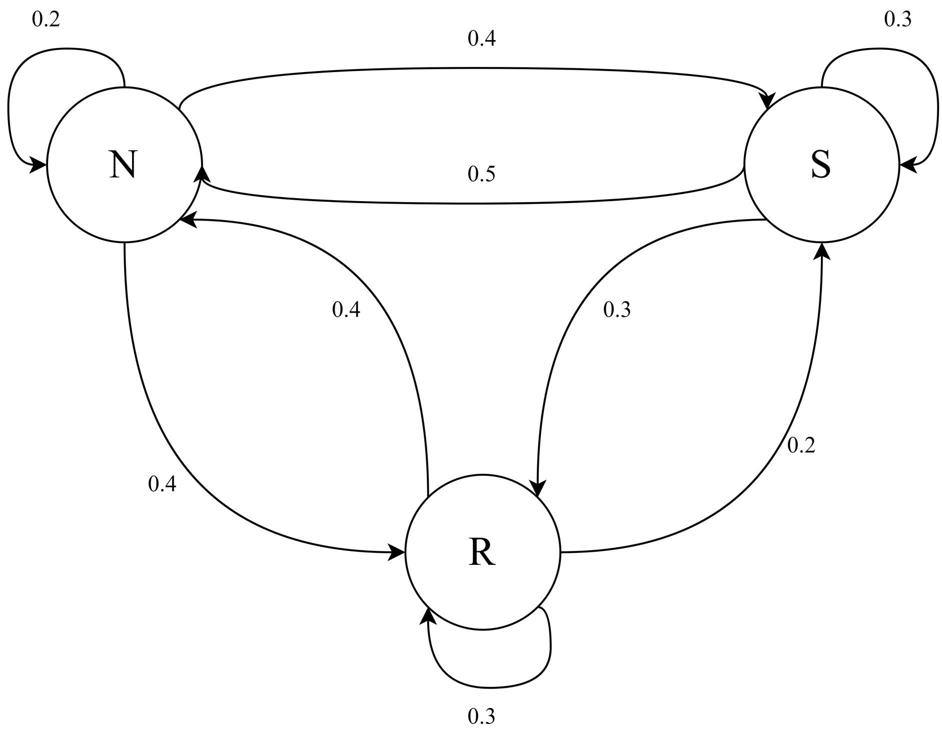
$$P = \begin{array}{c} \text{n} \\ \text{s} \\ \text{r} \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Obs.: Cada pila es una distribución de probabilidad condicional.

Probabilidad de pasar del estado i al estado j en una etapa:

$$\sum_j P_{ij} = 1 - P_i$$

4. Para cada cadena de Markov P tiene asociados un diagrama de transición entre estados.



1.1.2. Clasificación de estados

1. **Estados comunicantes:** Dos estados i y j se dicen comunicantes si: $i \to j \land j \to i$
   Obs.1: La relación de comunicación es una relación de equivalencia.
   Obs.2: La relación i $\leftrightarrow$ j $\land$ j $\leftrightarrow$ k $\Rightarrow$ i $\leftrightarrow$ k

2. **Clase de estados:** Una clase de estados es un subconjunto de estados que se comunican entre sí y no comunican con ningún estado fuera de la clase.

   - **Estados recurrentes:** Un estado i se dice recurrente si la probabilidad de regresar a i en un número finito de pasos es 1.
     Obs.: Si un estado i es recurrente y se comunica con un estado j, entonces j es recurrente.
     - Aperiódico
     - Periódico
   - **Estados transientes:** Un estado i se dice transitorio si la probabilidad de regresar a i en un número finito de pasos es menor que 1.
     Obs.: Si un estado i es transitorio y se comunica con un estado j, entonces j es transitorio.
   - **Estados absorbentes:** Un estado i se dice absorbente si una vez que se llega a i, no se puede salir de él.

1.1.3. Clases de cadenas

1. **Irreductible:** Se dice a una cadena irreductible si sus estados forman una sola clase. Pueden ser:
    - Transiente
    - Recurrente aperiódica
    - Recurrente periódica
2. **Reductible:** Se dice a una cadena reductible si sus estados forman más de una clase.

1.1.4. Ergódica

Una cadena de Markov se dice ergódica si es irreducible y recurrente aperiódica.
Obs.: Si una cadena de Markov es ergódica, entonces tiene una distribución límite.

- Para determinar este tipo de cadenas podemos determinar el vector pi.

$$\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, ..., \pi_k) \qquad \sum \pi_i = 1$$

2. Ejercicios Parte 1

1. Suponiendo que cada año el 50 % de los alumnos de primero pasa a segundo, el 30 % permanece primero y el 20 % abandona; de los alumnos de segundo el 50 % pasa a tercero, el 40 % permanece en segundo y el 10 % abandona, y de los alumnos de tercer curso el 60 % terminan o abandonan y el 40 % repiten tercero.Se pide:

   a) Escribir matriz de transición describiendo previamente los estados del proceso. Para este caso describiremos como el espacio muestral:

   $$\Omega : 1, 2, 3 = \text{Espacio muestral}$$

   Donde: 1: Primer Año; 2: Segundo Año; 3: Tercer Año; T: Abandono.

	1	**2**	**3**	**T**
1	0.3	0.5	0	0.2
2	0	0.4	0.5	0.1
3	0	0	0.4	0.6
T	0	0	0	1

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \text{T} \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   b) Si entran 600 alumnos un año en primer curso, calcular cuántos habrá en cada curso (de esos 600) al principio de tercer año.

$$\pi_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$\pi_3 = \pi_0 \cdot P^3$$

$$\pi_3 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3$$

$$\pi_3 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 27/1000 & 37/200 & 11/40 & 513/1000 \\ 0 & 8/125 & 6/25 & 87/125 \\ 0 & 0 & 8/125 & 117/125 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3 = (27/1000 \quad 37/200 \quad 11/40 \quad 513/1000)$$

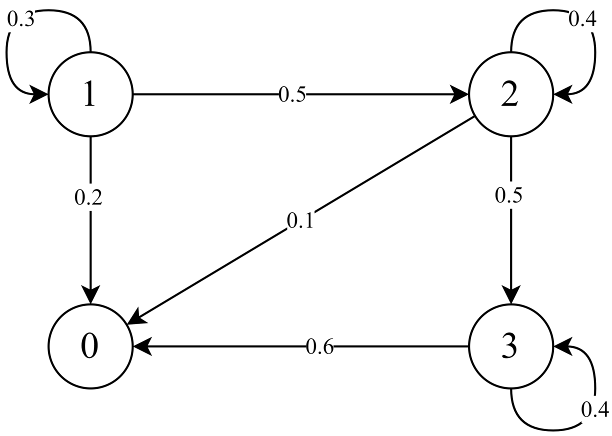
   - Primer curso: 600 * 0.027 = 16.2

- Segundo curso: 600 * 37/200 = 111
- Tercer curso: 600 * 11/40 = 165
- Abandono: 600 * 513/1000 = 308

Por lo tanto al principio del tercer año tendremos 165 alumnos en tercer curso, 111 en segundo y 16.2 en primer curso.

c) ¿Qué estados comunican entre sí?, ¿Es irreducible la cadena?, Indicar razonadamente qué estados son recurrentes y cuáles son transitorios.

Según lo detallado en el siguiente grafo:



Los estados que se comunican entre si serian:

- Primer año → Segundo año
- Primer año → Primer año
- Segundo año → Tercer año
- Segundo año → Segundo año
- Tercer año → Tercer año
- Todos los años → Abandono

Por lo tanto la cadena no es irreductible, es reductible, ya que posee 3 estados transientes (1,2,3) y 1 estado absorbente (0).

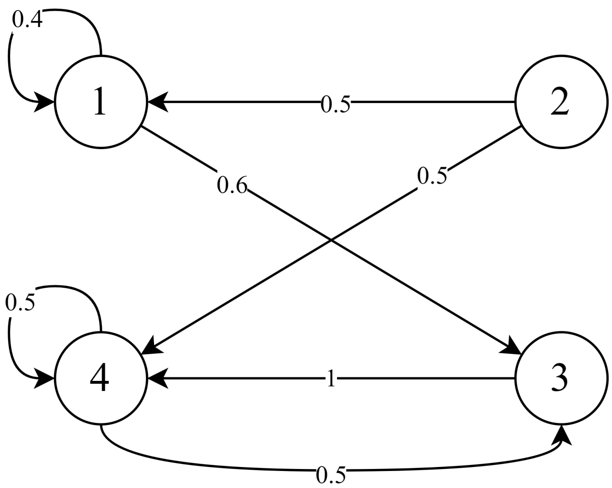
d) Calcular la distribución límite en el caso de que exista.

Para este caso la cadena no es Ergódica, por lo que no posee distribución límite.

2. Se considera la cadena de Markov con la siguiente matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

a) Representar esta cadena en un grafo cuyos vertices sean los cuatro estados y cuyos arcos representen las probabilidades de transición.



b) Estudiar si la cadena es irreducible y aperiódica, y si los estados son recurrentes o transitorios.

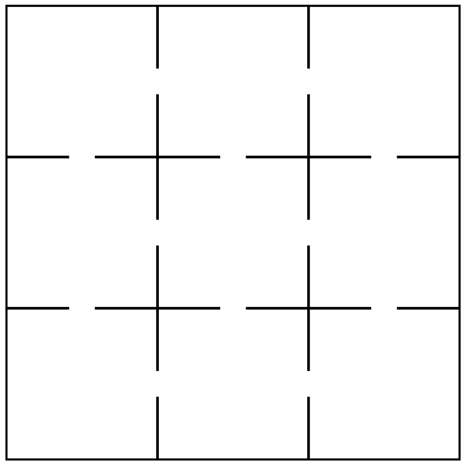
- $C_1\{1\}$: Recurrente periódico.
- $C_2\{2\}$: Transiente.
- $C_3\{3,4\}$: Recurrente aperiódico.

Para este caso la cadena no es irreducible ya que posee 3 tipos de estados diferentes.

c) Calcular la distribución limite en caso de que exista.

Para este caso no existe distribución límite. Ya que la cadena no es irreductible recurrente aperiódica.

3. Una rata se mueve en el laberinto de la figura. Estando en cualquier comportamiento sale por cualquiera de sus puertas con la misma probabilidad. Escribir la matriz de probabilidades de transición.



La matriz correspondiente seria:

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}33 & 0 & 0{,}33 & 0 & 0{,}33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}33 & 0 & 0 & 0 & 0{,}33 & 0 & 0{,}33 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}33 & 0 & 0{,}33 & 0 & 0 & 0 & 0{,}33 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}33 & 0 & 0{,}33 & 0 & 0{,}33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Determinar las clases y periodicidades de las cadenas con matrices de transición:

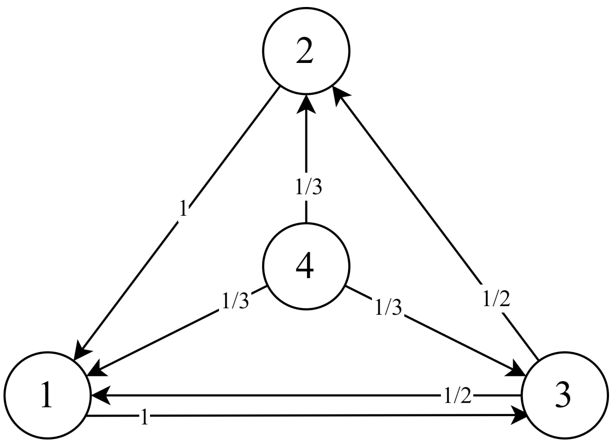
a)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

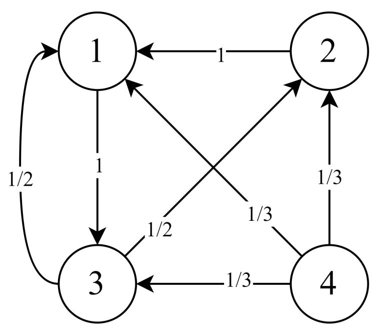
a) **Grafo de la matriz:**



Clasificación de cadenas:

- $C_1\{1,2,3\}$: Recurrente Periódico.
- $C_2\{4\}$: Transiente.

b) **Grafo de la matriz:**



Clasificación de cadenas:

5. Calcula las participaciones en el mercado que a largo plazo alcanzarán las compañías R, S y T, si el comportamiento de los consumidores corresponde a una cadena de Markov con las probabilidades de cambio que se muestran en la tabla.

von\eu	**R**	**S**	**T**
R	0.6	0.1	0.3
S	0.5	0.4	0.1
T	0.2	0.1	0.7

$\pi = \pi P$

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}6\pi_1 + 0{,}5\pi_2 + 0{,}2\pi_3 \\ \pi_2 &= 0{,}1\pi_1 + 0{,}4\pi_2 + 0{,}1\pi_3 \\ \pi_3 &= 0{,}3\pi_1 + 0{,}1\pi_2 + 0{,}7\pi_3 \end{aligned}$$

Igualando a 0:

$$\begin{aligned} 0{,}4\pi_1 - 0{,}5\pi_2 - 0{,}2\pi_3 &= 0 \\ -0{,}1\pi_1 + 0{,}6\pi_2 - 0{,}1\pi_3 &= 0 \\ -0{,}3\pi_1 - 0{,}1\pi_2 + 0{,}3\pi_3 &= 0 \end{aligned}$$

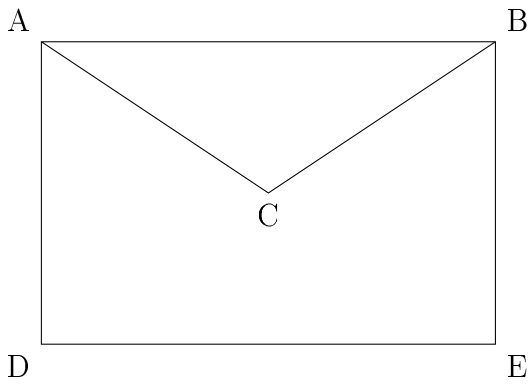
Reemplazamos la 3^{ra} ecuación:

$$\begin{aligned} 0{,}4\pi_1 - 0{,}5\pi_2 - 0{,}2\pi_3 &= 0 \\ -0{,}1\pi_1 + 0{,}6\pi_2 - 0{,}1\pi_3 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 17/42 \\ \pi_2 &= 1/7 \\ \pi_3 &= 19/42 \end{aligned}$$

6. Considerar el grafo adjunto. En cada iteración nos desplazamos con igual probabilidad a cada uno de los vertices adyacentes.



a) ¿Cuánto tiempo pasamos en A (a largo plazo)?

b) Si comenzamos en A, ¿cuál es el número esperado de iteraciones hasta retornar a A?

c) Si comenzamos en C, ¿cuál es el número esperado de pasos hasta llegar a A?

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
A	0	0.3	0.3	0.3	0
B	0.3	0	0.3	0	0.3
C	0.5	0.5	0	0	0
D	0.5	0	0	0	0.5
E	0	0.5	0	0.5	0

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

a) μ_{11}

$$\mu_{11} = \frac{1}{\pi_1}$$

$$\pi = \pi P$$

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = 0{,}3\pi_2 + 0{,}5\pi_3 + 0{,}5\pi_4$$
$$\pi_2 = 0{,}3\pi_1 + 0{,}5\pi_3 + 0{,}5\pi_5$$
$$\pi_3 = 0{,}3\pi_1 + 0{,}3\pi_2$$
$$\pi_4 = 0{,}3\pi_1 + 0{,}5\pi_5$$
$$\pi_5 = 0{,}3\pi_2 + 0{,}5\pi_4$$

Igualamos a 0:

$$0{,}7\pi_1 - 0{,}3\pi_2 - 0{,}5\pi_3 - 0{,}5\pi_4 = 0$$
$$-0{,}3\pi_1 + 0{,}7\pi_2 - 0{,}5\pi_3 - 0{,}5\pi_5 = 0$$
$$-0{,}3\pi_1 - 0{,}3\pi_2 + 0{,}7\pi_3 = 0$$
$$-0{,}3\pi_1 - 0{,}5\pi_4 + 0{,}7\pi_4 = 0$$
$$-0{,}3\pi_2 - 0{,}5\pi_5 + 0{,}7\pi_5 = 0$$

Reemplazamos la 5^{ta} ecuación:

$$0{,}7\pi_1 - 0{,}3\pi_2 - 0{,}5\pi_3 - 0{,}5\pi_4 = 0$$
$$-0{,}3\pi_1 + 0{,}7\pi_2 - 0{,}5\pi_3 - 0{,}5\pi_5 = 0$$
$$-0{,}3\pi_1 - 0{,}3\pi_2 + 0{,}7\pi_3 = 0$$
$$-0{,}3\pi_1 - 0{,}5\pi_4 + 0{,}7\pi_4 = 0$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1$$

Resolviendo:

$$\pi_1 = 0{,}2$$
$$\pi_2 = 0{,}2$$
$$\pi_3 = 0{,}2$$
$$\pi_4 = 0{,}2$$
$$\pi_5 = 0{,}2$$

7. Clasificar los estados de las cadenas de Markov con las siguientes matrices de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

8. En una población de 10,000 habitantes, 5000 no fuman, 2500 fuman uno o menos de un paquete diario y 2500 fuman más de un paquete diario. En un mes hay un 5 % de probabilidad de que un no fumador comience a fumar un paquete diario, o menos, y un 2 % de que un no fumador pase a fumar más de un paquete diario. Para los que fuman un paquete, o menos, hay un 10 % de probabilidad de que dejen el tabaco, y un 10 % de que pasen a fumar más de un paquete diario. Entre los que fuman más de un paquete, hay un 5 % de probabilidad de que dejen el tabaco y un 10 % de que pasen a fumar un paquete, o menos. ¿Cuántos individuos habrá de cada clase el próximo mes?

   $\pi_0 = (0{,}5 \quad 0{,}25 \quad 0{,}25)$

	No fumadores	**+ 1 p**	**- 1 p**
No fumadores	0.93	0.02	0.05
+ 1 p	0.05	0.85	0.1
- 1 p	0.1	0.1	0.8

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}02 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}85 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

   $\pi_2 = \pi_0 \cdot P^1$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}02 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}85 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}^1$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5025 & 0{,}2475 & 0{,}25 \end{pmatrix}$$

   Si nuevamente tomamos en cuenta una población de 10,000 habitantes, tendremos que:

   - No fumadores: 5025
   - Fuman uno o menos: 2500
   - Fuman más de uno: 2475

9. Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades A, B y C. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en la misma ciudad y allí pernocta, desplazándose a otra ciudad al día siguiente, si no tiene suficiente trabajo. Después de estar trabajando un día en C, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella al día siguiente es 0.4, la de tener que viajar a B es 0.4 y la de tener que ir a A es 0.2. Si el viajante duerme un día en B, con probabilidad de un 20 % tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60 % de los casos viajará a C, mientras que irá a A con probabilidad 0.2. Por último si el agente comercial trabaja todo un día en A, permanecerá en esa misma ciudad, al día siguiente, con una probabilidad 0.1, irá a B con una probabilidad de 0.3 y a C con una probabilidad de 0.6.

   a) Si hoy el viajante está en C, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días?

   b) ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades?

	A	**B**	**C**
A	0.1	0.3	0.6
B	0.2	0.2	0.6
C	0.2	0.4	0.4

   a) $\pi_4 = \pi_0 \cdot P^4$

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}^4$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1819 & 0{,}3189 & 0{,}4992 \\ 0{,}1818 & 0{,}319 & 0{,}4992 \\ 0{,}1818 & 0{,}3174 & 0{,}5008 \end{pmatrix}$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 0{,}1818 & 0{,}3174 & 0{,}5008 \end{pmatrix}$$

   Por lo tanto la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días es de 50.08 %.

   b) $\pi = \pi \cdot P$

$$\pi = \pi \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = 0{,}1\pi_1 + 0{,}2\pi_2 + 0{,}2\pi_3$$
$$\pi_2 = 0{,}3\pi_1 + 0{,}2\pi_2 + 0{,}4\pi_3$$
$$\pi_3 = 0{,}6\pi_1 + 0{,}6\pi_2 + 0{,}4\pi_3$$

Igualando a 0:

$$\begin{aligned} -0{,}9\pi_1 + 0{,}2\pi_2 + 0{,}2\pi_3 &= 0 \\ 0{,}3\pi_1 - 0{,}8\pi_2 + 0{,}4\pi_3 &= 0 \\ 0{,}6\pi_1 + 0{,}6\pi_2 - 0{,}6\pi_3 &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazando la 3^{ra} ecuación:

$$\begin{aligned} -0{,}9\pi_1 + 0{,}2\pi_2 + 0{,}2\pi_3 &= 0 \\ 0{,}3\pi_1 - 0{,}8\pi_2 + 0{,}4\pi_3 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 2/11 \\ \pi_2 &= 7/22 \\ \pi_3 &= 1/2 \end{aligned}$$

Por lo tanto los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades son:

- A: 18.18 %
- B: 31.82 %
- C: 50 %

10. Suponga que toda la industria de refresco produce dos colas: Coca Cola y Pepsi Cola. Cuando una persona ha comprado Coca Cola hay una probabilidad de 90 % de que siga comprándola la vez siguiente. Si una persona compró Pepsi, hay 80 % de que repita la vez siguiente. Se pide:

a) Si una persona actualmente es comprador de Pepsi. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas dos compras a partir de hoy?

b) Si en la actualidad una persona es comprador de Coca Cola. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas tres compras a partir de ahora?

c) Supongamos que el 60 % de toda la gente toma hoy Coca Cola y el 40 % Pepsi. A tres compras a partir de ahora, ¿Qué fracción de los compradores estará tomando Coca Cola?.

	Coca Cola	**Pepsi Cola**
Coca Cola	0.9	0.1
Pepsi Cola	0.2	0.8

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

a) $\pi_2 = \pi_0 \cdot P^2 \; \pi_0 = (0 \quad 1)$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}^2$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}83 & 0{,}17 \\ 0{,}34 & 0{,}66 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}66 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas dos compras a partir de hoy es de 34 %.

b) $\pi_3 = \pi_0 \cdot P^3$ La hizo copilot por falta de timepo y pq es lo mismo de arriba
$\pi_0 = (1 \quad 0)$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}^3$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}781 & 0{,}219 \\ 0{,}438 & 0{,}562 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 0{,}781 & 0{,}219 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas tres compras a partir de ahora es de 78.1 %.

c) $\pi_3 = \pi_0 \cdot P^3$
$\pi_0 = (0{,}6 \quad 0{,}4)$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}^3$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}781 & 0{,}219 \\ 0{,}438 & 0{,}562 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 0{,}6438 & 0{,}3562 \end{pmatrix}$$

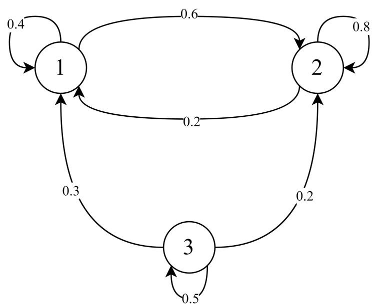
Por lo tanto la fracción de los compradores que estará tomando Coca Cola a tres compras a partir de ahora es de 64.38 %.

3. Ejercicios Parte 2

1. Estudiar las cadenas de Markov definidas por las matrices:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Grafo de la matriz P_1:

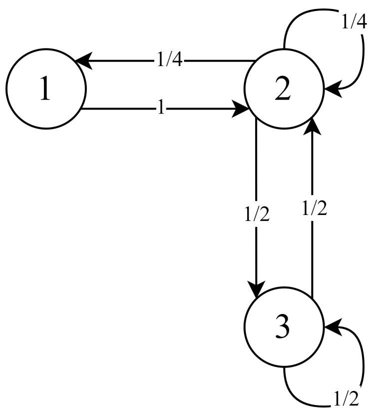


Clasificación de cadenas:

- $C_1\{1{,}2\}$: Recurrente Aperiódico.
- $C_2\{3\}$: Transiente.

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Grafo de la matriz P_2:

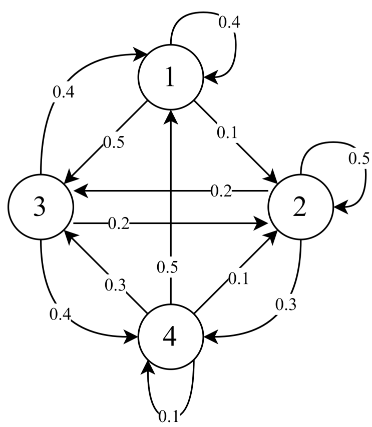


Clasificación de cadenas:

- $C_1\{1{,}2{,}3\}$: Recurrente Aperiódico.

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Grafo de la matriz P_3:

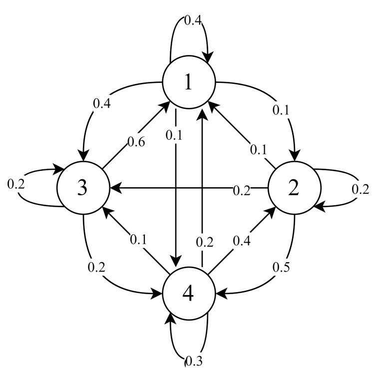


Clasificación de cadenas:

- $C_1\{1{,}2{,}3{,}4\}$: Recurrente Aperiódico.

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Grafo de la matriz P_4:

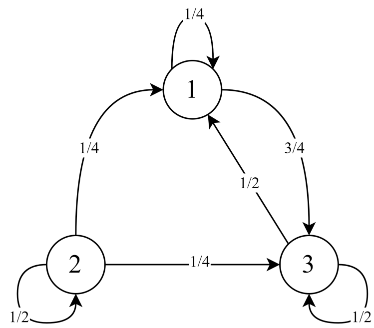


Clasificación de cadenas:

- $C_1\{1,2,3,4\}$: Recurrente Aperiódico.

$$P_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Grafo de la matriz P_5:



Clasificación de cadenas:

- $C_1\{1,3\}$: Recurrente Aperiódico.
- $C_2\{2\}$: Transiente.

2. Considerar un proceso de Markov con la siguiente matriz de probabilidades de transición:

$$P_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

a) Calcular el tiempo medio de primer paso de 3 a 2 (μ_{32}).

Resolver sistema:
$\pi = \pi \cdot P$

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{8}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{3}{4}\pi_3 \\ \pi_2 &= \frac{1}{8}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + 0\pi_3 \\ \pi_3 &= \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 \end{aligned}$$

Igualamos a 0:

$$\begin{aligned} \pi_1 - \frac{1}{8}\pi_1 - \frac{1}{2}\pi_2 - \frac{3}{4}\pi_3 &= 0 \\ \pi_2 - \frac{1}{8}\pi_1 - \frac{1}{4}\pi_2 &= 0 \\ \pi_3 - \frac{3}{4}\pi_1 - \frac{1}{4}\pi_2 - \frac{1}{4}\pi_3 &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazamos la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} \pi_1 - \frac{1}{8}\pi_1 - \frac{1}{2}\pi_2 - \frac{3}{4}\pi_3 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \\ \pi_3 - \frac{3}{4}\pi_1 - \frac{1}{4}\pi_2 - \frac{1}{4}\pi_3 &= 0 \\ &\downarrow \\ 7\pi_1 - 4\pi_2 - 6\pi_3 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \\ 3\pi_1 + \pi_2 - \pi_3 &= 0 \\ &\downarrow \end{aligned}$$

$$7\pi_1 - 4\pi_2 - 6\pi_3 = 0 \qquad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \qquad -3\pi_1 - \pi_2 + 3\pi_3 = 0$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$11\pi_1 - 2\pi_3 = 0 \qquad 2\pi_1 - 4\pi_3 = 0$$

Resolviendo:

$$\pi_1 = \frac{9}{20}$$
$$\pi_2 = \frac{3}{40}$$
$$\pi_3 = \frac{19}{40}$$

Continuando con el calculo de tiempo:
$\mu_{32} = 1 + \sum_{k,k\neq 2} P_{3k} + \mu_{k2}$

$$\begin{aligned}\mu_{32} &= 1 + P_{31}\cdot\mu_{12} + P_{33}\cdot\mu_{32}\\ &= 1 + \frac{3}{4}\cdot\mu_{12} + \frac{1}{4}\cdot\mu_{32}\\ \mu_{12} &= 1 + P_{11}\cdot\mu_{12} + P_{13}\cdot\mu_{32}\\ &= 1 + \frac{1}{8}\cdot\mu_{12} + \frac{3}{4}\cdot\mu_{32}\end{aligned}$$

Resolvemos el sistema:

$$\mu_{32} - \tfrac{1}{4}\mu_{32} - \tfrac{3}{4}\mu_{12} = 1$$
$$\mu_{12} - \tfrac{1}{8}\mu_{12} - \tfrac{3}{4}\mu_{32} = 1$$

$$\tfrac{3}{4}\mu_{12} - \tfrac{5}{4}\mu_{32} = 1$$
$$\tfrac{7}{8}\mu_{12} - \tfrac{3}{4}\mu_{32} = 1$$

$$\mu_{12} = \tfrac{8}{5}$$
$$\mu_{32} = \tfrac{7}{5}$$

3. Un taller de reparaciones puede efectuar el trabajo A o el trabajo B, pero no los dos simultáneamente; la tarea A requiere 2 días y la B 1 día. Los posibles estados del taller son pues:

1 = ninguna tarea, **2** = primer día de la tarea A,
3 = segundo día de la tarea A, **4** = tarea B.

La probabilidad de una nueva demanda de tarea A al principio de cada día es "a"; la de la tarea B es "b".

No hay colas, si el taller está a mitad de ejecución de una tarea A, la llegada de una nueva demanda se pierde.

La única ambigüedad se plantea cuando el taller termina un trabajo al final de un día y tiene la posibilidad de empezar al día siguiente con una tarea A o una B. Las dos políticas son posibles:

1) Empezar siempre con una tarea A con preferencia a una B.
2) Empezar siempre con una tarea B con preferencia a una A.

a) Demostrar que para la política 1 la matriz de probabilidades de transición es:

$$P = \begin{pmatrix} (1-a)(1-b) & a & 0 & b(1-a) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (1-a)(1-b) & a & 0 & b(1-a) \\ (1-a)(1-b) & a & 0 & b(1-a) \end{pmatrix}$$

Siguiendo la política 1:

- P_{11} = Si no llega A ni B: $(1-a)(1-b)$
- P_{12} = Si llega A: a
- P_{13} = Si llega A en segundo dia: 0 (No puede llegar A en segundo dia)
- P_{14} = Si llega B: $b(1-a)$ (Llega B pero no puede estar A)
- P_{21} = Si no llega nadie con A en primer dia: 0 (No esta vació ya que esta A)
- P_{22} = Esta en 1er A y vuelve a 1er A: 0 (No puede llegar A cuando ya esta en A)
- P_{23} = Esta en 1er A y pasa a 2do A: 1 (Siempre pasa a 2do A según definición)
- P_{24} = Esta en 1er A y llega B: 0 (No puede llegar B cuando ya esta en A por la política)
- P_{31} = Si no llega nadie con A en 2do dia: $(1-a)(1-b)$ (Probabilidad que no llegue nadie)
- P_{32} = Esta en 2do A y vuelve a 1er A: a (Llega una nueva Tarea A)
- $P_[33]$ = Esta en 2do A y pasa a 2do A: 0 (No puede pasar a 2do A estando en 2do A)

- P_{34} = Esta en 2do A y llega B: $b(1-a)$ (Llega B pero no puede haber A)
- P_{41} = Si no llega nadie con B en primer dia: $(1-a)(1-b)$ (Probabilidad que no llegue nadie)
- P_{42} = Esta en B y llega un 1er A: a (Llega una nueva Tarea A y reemplaza a B por la política)
- P_{43} = Esta en B y pasa a 2do A: 0 (No puede pasar a 2do A estando en 1er B)
- P_{44} = Esta en B y llega un B: $b(1-a)$ (Llega B pero no puede haber A para poder trabajar según la política)

Estado	**ninguna tarea**	**primer día de la tarea A**	**segundo día de la tarea A**	**tarea B**
ninguna tarea	$(1-a)(1-b)$	a	0	$b(1-a)$
primer día de la tarea A	0	0	1	0
segundo día de la tarea A	$(1-a)(1-b)$	a	0	$b(1-a)$
tarea B	$(1-a)(1-b)$	a	0	$b(1-a)$

b) Encontrar la matriz de probabilidades de transición para la política 2.

Siguiendo la política 2:

- P_{11} = Si no llega A ni B: $(1-a)(1-b)$
- P_{12} = Si llega A: $a(1-b)$
- P_{13} = Si llega A en segundo dia: 0 (No puede llegar A en segundo dia)
- P_{14} = Si llega B: b (Llega B y se prioriza B según la política)
- P_{21} = Si no llega nadie con A en primer dia: 0 (No esta vació ya que esta A)
- P_{22} = Esta en 1er A y vuelve a 1er A: 0 (No puede llegar A cuando ya esta en A)
- P_{23} = Esta en 1er A y pasa a 2do A: $a(1-b)$ (Paso a 2do A siempre que no llegue B)
- P_{24} = Esta en 1er A y llega B: b (Se prioriza B según la política)
- P_{31} = Si no llega nadie con A en 2do dia: $(1-a)(1-b)$ (Probabilidad que no llegue nadie)
- P_{32} = Esta en 2do A y vuelve a 1er A: $a(1-b)$ (Llega una nueva Tarea A pero se prioriza B)
- P_{33} = Esta en 2do A y pasa a 2do A: 0 (No puede pasar a 2do A estando en 2do A)
- P_{34} = Esta en 2do A y llega B: b (Llega B y se prioriza B)
- P_{41} = Si no llega nadie con B en primer dia: $(1-a)(1-b)$
- P_{42} = Esta en B y llega un 1er A: $a(1-b)$ (Llega una nueva Tarea A pero se prioriza B)

- P_{43} = Esta en B y pasa a 2do A: 0 (No puede pasar a 2do A estando en 1er B)
- P_{44} = Esta en B y llega un B: 0 (No puede pasar a B cuando ya esta en B)

Estado	**ninguna tarea**	**primer día de la tarea A**	**segundo día de la tarea A**	**tarea B**
ninguna tarea	$(1-a)(1-b)$	$a(1-b)$	0	b
primer día de la tarea A	0	0	$a(1-b)$	b
segundo día de la tarea A	$(1-a)(1-b)$	$a(1-b)$	0	b
tarea B	$(1-a)(1-b)$	$a(1-b)$	0	1

4. El siguiente proceso de Markov **empieza en el estado 1**

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Encontrar las probabilidades de que:

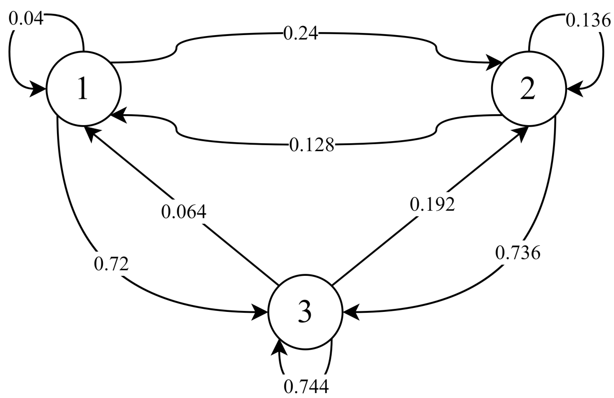
a) El proceso esté en el estado 3 después de tres transiciones.

$P_{13}^{(3)} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}24 & 0{,}72 \\ 0{,}128 & 0{,}136 & 0{,}736 \\ 0{,}064 & 0{,}192 & 0{,}744 \end{pmatrix}$$

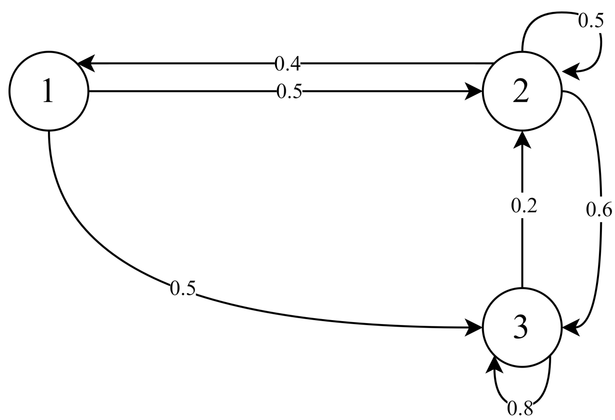
Por lo tanto, $P_{13} = 0{,}72$

b) Después de la tercera transición desde el estado 3 hasta el 2 las dos transiciones siguientes sean $(2 \to 1 \to 3)$ o $(2 \to 3 \to 3)$.



$P_{32}^{(3)} = (0{,}128 \cdot 0{,}72) + (0{,}736 \cdot 0{,}744) = 0{,}09504 + 0{,}547584 = 0{,}642624$

c) El proceso entre en el estado 2 exactamente una vez en las tres primeras transiciones.



Caminos en 3 transiciones con solo un 2:

- 1-3-3-2
- 1-2-1-3
- 1-2-3-3
- 1-3-2-3
- 1-3-2-1

$P_{\exists 2} = (1 \to 3 \to 3 \to 2) + (1 \to 2 \to 1 \to 3) + (1 \to 2 \to 3 \to 3) +$
$(1 \to 3 \to 2 \to 3) + (1 \to 3 \to 2 \to 1)$
$P_{\exists 2} = (0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2) + (0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5) + (0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8) + (0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6) + (0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4)$
$P_{\exists 2} = 0{,}08 + 0{,}1 + 0{,}24 + 0{,}06 + 0{,}04$
$P_{\exists 2} = 0{,}52$

d) El proceso realice la transición $1 \to 2$ exactamente una vez en las tres primeras transiciones.

$$P_{12} = (1 \to 2 \to 3 \to 3) + (1 \to 2 \to 3 \to 2) + (1 \to 2 \to 1 \to 3)$$
$$P_{12} = (0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8) + (0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2) + (0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5)$$
$$P_{12} = 0{,}24 + 0{,}06 + 0{,}1$$
$$P_{12} = 0{,}4$$

5. Supongamos que la probabilidad de que mañana llueva si hoy está lloviendo es 0.6, y que la probabilidad de que mañana haga buen tiempo si hoy hace buen tiempo es 0.4

   a) Determinar la matriz de probabilidades de transición de la cadena de Markov correspondiente.

   b) Hallar la distribución de probabilidad del estado estacionario

a) Planteamos la tabla de probabilidades:

	Llueve	**Buen tiempo**
Llueve	0.6	0.4
Buen tiempo	0.6	0.4

Por lo que la matriz de probabilidades de transición es:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

b) $\pi = \pi \cdot P$

$$\pi = (\pi_1, \pi_2) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}6\pi_1 + 0{,}6\pi_2 \\ \pi_2 &= 0{,}4\pi_1 + 0{,}4\pi_2 \end{aligned}$$

Reemplazando la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}6\pi_1 + 0{,}6\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}$$

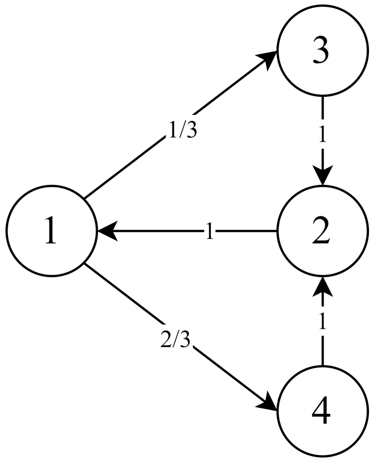
Resolviendo el sistema:

$$\pi_1 = \frac{3}{5}; \quad \pi_2 = \frac{2}{5}$$

6. Determinar las clases de las siguientes cadenas de Markov y decir si son o no recurrentes

a)

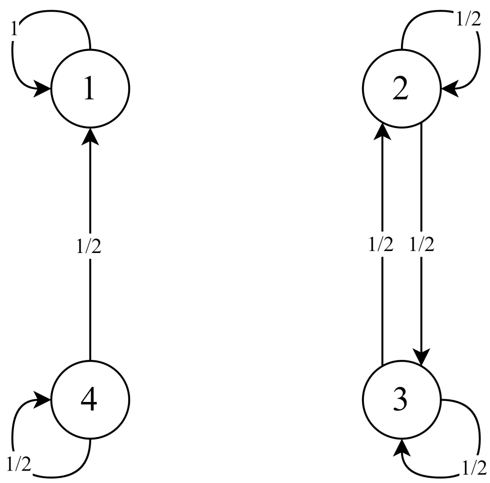
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$C_1 = \{1, 2, 3, 4\} : \text{Recurrente Aperiódico.}$$
$$(2 \to 2 = 3 \quad 1 \to 1 = 3) \neq (4 \to 4 = 6 \quad 3 \to 3 = 6)$$

b)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



$C_1 = \{2,3\}$ Recurrente Aperiódico
$C_2 = \{1\}$ Absorbente
$C_3 = \{4\}$ Transiente

7. Las familias de cierto país se clasifican según residan en áreas rurales, urbanas o suburbanas. Los estudios de movilidad demográfica estiman que, en promedio, en el curso de un año, el 15 % de las familias urbanas cambia de residencia y se traslada a un área suburbana, y el 5 % a un área rural; mientras que el 6 % de las familias residentes en áreas suburbanas se traslada a áreas urbanas, y el 4 % a áreas rurales, y finalmente el 4 % de las familias rurales migra a las áreas urbanas y el 6 % a las suburbanas.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que una familia que vive ahora en un área urbana siga viviendo en un área urbana dentro de dos años? ¿Y en una suburbana? ¿Y en una rural?

    b) Supongamos que en el presente el 40 % de las familias del país viven en áreas urbanas, el 35 % en suburbanas y el 25 % en rurales. ¿Qué porcentaje de familias vivirá en áreas urbanas dentro de dos años?

    c) ¿Qué distribución de población es de prever en el futuro si las tendencias no cambian?

	Urbana	Rural	Suburbana
Urbana	0.8	0.05	0.15
Rural	0.04	0.9	0.06
Suburbana	0.06	0.04	0.9

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0{,}15 \\ 0{,}04 & 0{,}9 & 0{,}06 \\ 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

a)

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0{,}15 \\ 0{,}04 & 0{,}9 & 0{,}06 \\ 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}9 \end{pmatrix}^2$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}651 & 0{,}091 & 0{,}258 \\ 0{,}072 & 0{,}814 & 0{,}114 \\ 0{,}104 & 0{,}075 & 0{,}821 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la probabilidad de que una familia que vive en un área urbana siga viviendo en un área urbana dentro de dos años es de 0.651, en una suburbana es de 0.814 y en una rural es de 0.821.

b)

$$\vec{\pi}_{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}25 & 0{,}35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}651 & 0{,}091 & 0{,}258 \\ 0{,}072 & 0{,}814 & 0{,}114 \\ 0{,}104 & 0{,}075 & 0{,}821 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\pi}_{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}315 & 0{,}266 & 0{,}419 \end{pmatrix}$$

c) $\vec{\pi} = \pi \cdot P$

$$\vec{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0{,}15 \\ 0{,}04 & 0{,}9 & 0{,}06 \\ 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}8\pi_1 + 0{,}04\pi_2 + 0{,}06\pi_3 \\ \pi_2 &= 0{,}05\pi_1 + 0{,}9\pi_2 + 0{,}04\pi_3 \\ \pi_3 &= 0{,}15\pi_1 + 0{,}06\pi_2 + 0{,}9\pi_3 \end{aligned}$$

Igualamos a 0:

$$\begin{aligned} 0 &= 0{,}2\pi_1 - 0{,}04\pi_2 - 0{,}06\pi_3 \\ 0 &= 0{,}05\pi_1 + 0{,}1\pi_2 - 0{,}04\pi_3 \\ 0 &= 0{,}15\pi_1 - 0{,}06\pi_2 + 0{,}1\pi_3 \end{aligned}$$

Reemplazamos la tercera ecuación:

$$\begin{aligned} 0 &= 0{,}2\pi_1 - 0{,}04\pi_2 - 0{,}06\pi_3 \\ 0 &= 0{,}05\pi_1 + 0{,}1\pi_2 - 0{,}04\pi_3 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}315 \\ \pi_2 &= 0{,}266 \\ \pi_3 &= 0{,}419 \end{aligned}$$

8. Un bosque consta de dos tipos de árboles: jóvenes (entre 0 y 3 mts de altura) y adultos (más de 3 mts). Cada año, el 30 % de los árboles jóvenes muere, el 10 % se vende por $20 cada uno, el 20 % se mantiene entre 0 y 3 mts y el 40 % crece superando los 3 mts. Cada año, el 40 % de los árboles adultos se vende por $50, el 20 % se vende por $20, el 30 % permanece en el bosque y un 10 % muere.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que un árbol joven muera antes de ser vendido?
   b) Si plantar un árbol joven cuesta $5, ¿cuál es el beneficio esperado para cada árbol joven plantado?

Planteamos la tabla de probabilidades:

	Joven	Adulto	Vendido	Muerto
Joven	0.2	0.4	0.1	0.3
Adulto	0	0.3	0.6	0.1
Vendido	0	0	1	0
Muerto	0	0	0	1

Por lo que la matriz de probabilidades de transición es:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) La probabilidad de que un árbol joven muera antes de ser vendido es del 30 % como se señala en el enunciado. O en su defecto, tomando en cuenta mas posibilidades:

$$\begin{aligned} P &= P_{14} + (P_{12} \cdot P_{24}) + (P_{11} \cdot P_{14}) \\ P &= 0{,}3 + (0{,}4 \cdot 0{,}1) + (0{,}2 \cdot 0{,}3) \\ P &= 0{,}3 + 0{,}04 + 0{,}06 \\ P &= 0{,}4 \end{aligned}$$

Por lo tanto la probabilidad de que un árbol joven muera antes de ser vendido es del 40 %.

b) Si plantar un árbol joven cuesta $5, el beneficio esperado para cada árbol joven plantado es:

$$\begin{aligned} B &= (0{,}1 \cdot 20) + (0{,}3 \cdot 0) + (0{,}4 \cdot 0{,}6((0{,}4 \cdot 50) + (0{,}2 \cdot 20))) + (0{,}3 \cdot -5) \\ B &= 2 - 1{,}5 \\ B &= 0{,}5 \end{aligned}$$

9. Sea la siguiente matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}65 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Con su vector de probabilidades iniciales $\vec{\pi}_{(0)} = (0{,}8, 0{,}1, 0{,}1)$ Encontrar:

a) El vector de probabilidades π en el momento t = 2
b) La probabilidad de que en los momentos t = 0, 1, 2, 3, la cadena asuma los estados 1, 3, 3, 2, respectivamente.
c) El vector límite estacionario, si existe.
d) Dibujar el gráfico de estados.

a) $\vec{\pi}_{(2)} = \pi_{(0)} \cdot P^2$

$$\vec{\pi}_{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}65 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}^2$$

$$\vec{\pi}_{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}215 & 0{,}455 \\ 0{,}195 & 0{,}148 & 0{,}658 \\ 0{,}15 & 0{,}125 & 0{,}725 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\pi}_{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}299 & 0{,}199 & 0{,}502 \end{pmatrix}$$

b) $1 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 2$

$$\vec{\pi}_{(0)} = (0{,}8, 0{,}1, 0{,}1)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}65 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

$$P = 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}0128$$

c) $\pi = \pi \cdot P$

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}65 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = 0{,}5\pi_1 + 0{,}2\pi_2 + 0{,}1\pi_3$$
$$\pi_2 = 0{,}3\pi_1 + 0{,}15\pi_2 + 0{,}1\pi_3$$
$$\pi_3 = 0{,}2\pi_1 + 0{,}65\pi_2 + 0{,}8\pi_3$$

Igualamos a 0:

$$0 = -0{,}5\pi_1 + 0{,}2\pi_2 + 0{,}1\pi_3$$
$$0 = 0{,}3\pi_1 - 0{,}85\pi_2 + 0{,}1\pi_3$$
$$0 = 0{,}2\pi_1 + 0{,}65\pi_2 - 0{,}2\pi_3$$

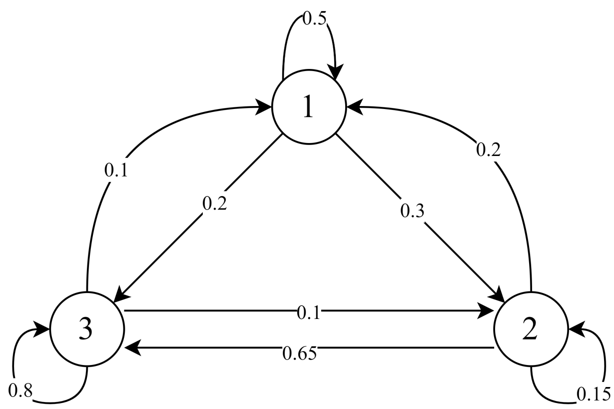
Reemplazamos la tercera ecuación:

$$0 = -0{,}5\pi_1 + 0{,}2\pi_2 + 0{,}1\pi_3$$
$$0 = 0{,}3\pi_1 - 0{,}85\pi_2 + 0{,}1\pi_3$$
$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$$

Resolviendo:

$$\pi_1 = 21/110$$
$$\pi_2 = 8/55$$
$$\pi_3 = 73/100$$

d) El grafo de estados es:



10. En cierta ciudad los habitantes pueden tener alguna de las profesiones A, B, C. En cada caso los hijos tienden a seguir la profesión del padre con probabilidades 3/5, 2/3 y 1/4 respectivamente. Quienes no siguen la tradición del padre eligen equiprobable mente alguna de las otras dos.

    Hallar:

    a) La distribución porcentual de las profesiones en la próxima generación, si actualmente es de 20 % para A, 30 % para B y 50 % para C.
    b) La distribución límite de las generaciones cuando transcurren muchas generaciones.
    c) Una cierta distribución porcentual de las profesiones que no cambie de una generación a otra.

Primero planteamos la tabla de probabilidades:

	A	**B**	**C**
A	3/5	1/5	1/5
B	1/6	2/3	1/6
C	3/8	3/8	1/4

Por lo tanto la matriz de probabilidades esta dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$$

a) $\vec{\pi}_{(0)} = (0{,}2 \quad 0{,}3 \quad 0{,}5)$

$$\vec{\pi}_{(1)} = \vec{\pi}_{(0)} \cdot P$$

$$\vec{\pi}_{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\pi}_{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}3575 & 0{,}4275 & 0{,}215 \end{pmatrix}$$

b) $\vec{\pi} = \vec{\pi} \cdot P$

$$\vec{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{3}{5}\pi_1 + \frac{1}{6}\pi_2 + \frac{3}{8}\pi_3 \\ \pi_2 &= \frac{1}{5}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{3}{8}\pi_3 \\ \pi_3 &= \frac{1}{5}\pi_1 + \frac{1}{6}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 \end{aligned}$$

Igualamos a 0:

$$0 = \frac{2}{5}\pi_1 - \frac{1}{6}\pi_2 - \frac{3}{8}\pi_3$$
$$0 = -\frac{1}{5}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 - \frac{3}{8}\pi_3$$
$$0 = \frac{1}{5}\pi_1 - \frac{1}{6}\pi_2 + \frac{3}{4}\pi_3$$

Reemplazamos la tercera ecuación:

$$0 = \frac{2}{5}\pi_1 - \frac{1}{6}\pi_2 - \frac{3}{8}\pi_3$$
$$0 = \frac{1}{5}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 - \frac{3}{8}\pi_3$$
$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$$

Resolviendo:

$$\pi_1 = 15/41 = 0{,}365$$
$$\pi_2 = 18/41 = 0{,}439$$
$$\pi_3 = 8/41 = 0{,}195$$

c) No estoy seguro de esta respuesta

Para que la distribución no cambie, necesitamos que las probabilidades de transición sean iguales a las probabilidades actuales. Es decir:

$$P(A|A) = 0{,}20$$
$$P(B|B) = 0{,}30$$
$$P(C|C) = 0{,}50$$

11. En la urna 1 tenemos 9 bolas blancas y 1 bola negra. En la urna 2 tenemos 9 bolas negras y una blanca. Extraemos una bola al azar de la urna 1. Si es negra, la regresamos a la urna. Si es blanca, la cambiamos por otra bola de la urna 2 que se extrae al azar.

    Sea x(t), t = 0, 1, 2... el número de bolas en la urna 1 después de cada experimento.

    a) Dibujar el gráfico de estados.

    b) Hallar distribución limite.

Primero planteamos la tabla de probabilidades:

	U1	**U2**
U1	0.1	0.9
U2	0.1	0.9

a)