$\sum$	A5.1	A5.2	A5.3	A5.4	A5.5

Aufgabe 7.1 a)

Sei $x(t)$ die Länge des Teils des Seils, das zu dem Zeitpunkt t von der Tischkante hinabhängt. Die Gewichtskraft, die auf dieses Ende wirkt, ist die Kraft, die die Bewegung des Seils beeinflusst, bzw. gleich $m\ddot{x}$. Somit gilt:

$$\ddot{x} = \frac{F_g(t)}{m} = \frac{\mu g x(t)}{m} = \frac{g}{L}x(t) =: Kx(t)$$

Um diese DGL zu lösen, machen wir den Ansatz $x(t) = e^{ct}$, setzen dies in die DGL ein und bestimmen c durch umformen:

$$c^2 e^{ct} = Ke^{ct}$$

$$c = \pm\sqrt{K}$$

Somit haben wir zwei spezielle Lösungen der DGL gefunden. Die allgemeine Lösung ergibt sich nun als allgemeine Linearkombination der beiden speziellen Lösungen:

$$x(t) = Ae^{\sqrt{K}t} + Be^{-\sqrt{K}t}$$

Wir definieren den Zeitpunkt, wann die Kette anfängt sich zu bewegen als $t_0 = 0$.

Nun können wir A und B mithilfe unserer Anfangsbedingungen herausfinden:

$$\begin{aligned}\dot{x}(0) = 0 &= \sqrt{K}(Ae^{\sqrt{K}0} - Be^{-\sqrt{K}0})\\ &= A - B\\ A &= B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(0) = x_0 &= Ae^{\sqrt{K}0} + Be^{-\sqrt{K}0}\\ &= A + B\\ A &= \frac{x_0}{2}\\ B &= \frac{x_0}{2}\end{aligned}$$

Somit ergibt sich:

$$x(t) = x_0 \cosh\left(\sqrt{K}t\right) = x_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$$

Die Gleichung gilt offensichtlich nur bis zum Zeitpunkt T.

b)

Die Anfangsgeschwindigkeit des freien Falls ist offensichtlich $\dot{x}(T)$. Hierfür wird zunächst T berechnet:

$$x(T) = x_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}} T\right) = L$$

$$T = \operatorname{arccosh}(\frac{L}{g})\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$\dot{x}(T)$ ergibt somit:

$$\dot{x}(T) = x_0 \sqrt{\frac{g}{L}} \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{L}} T\right) = x_0 \sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{(\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{\frac{L}{g}} \operatorname{arccosh}(\frac{L}{x_0})\right) - 1)} = x_0 \sqrt{\frac{g}{x_0} - \frac{g}{L}}$$

c)

In diesem Fall gibt es noch die Gleitreibung, die der Gewichtskraft entgegen wirkt. Somit verändert sich die DGL wie folgt:

$$\ddot{x} = \frac{F_g(t) - F_{Gl}(t)}{m} = \frac{\mu g x(t) - \eta(L - x(t))}{m} = (K + \frac{\eta}{m})x - \frac{\eta L}{m}$$

Wir definieren $K' = K + \frac{\eta}{m}$. Nun machen wir einfach den Ansatz, dass wir einen Summanden zu der Lösung der homogenen DGL $x(t)$ hinzufügen, sodass die zweite Ableitung des Summanden $-\frac{\eta L}{m}$ ergibt:

$$x(t) = x_0 \cosh\left(\sqrt{K'} t\right) - \frac{\eta L}{2m} t^2$$

Nun müssen wir noch überprüfen, ob diese spezielle Lösung mit unseren Anfangsbedingungen übereinstimmt, und ggf. die Lösung abändern.

$$x(0) = x_0 \cosh(0) - \frac{\eta L}{2m} 0^2 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = x_0 \sqrt{K'} \sinh(0) - \frac{\eta L}{m} 0 = 0$$

Somit erfüllt diese Gleichung schon tatsächlich beide unserer Anfangsbedingung, sodass $x(t) = x_0 \cosh\left(\sqrt{K'} t\right) - \frac{\eta L}{2m} t^2$ tatsächlich den Abgleitvorgang in unserem Fall beschreibt.

Aufgabe 7.2 Einfach ausrechnen:

$$x(0) = x_0 = a e^{-\gamma 0} + b 0 e^{-\gamma 0} = a$$

Also gilt $a = x_0$.

$$\dot{x}(0) = 0 = -\gamma a e^{-\gamma 0} + (b e^{-\gamma 0} - \gamma b 0 e^{-\gamma 0}) = b - \gamma a$$

Somit gilt $b = \gamma a = \gamma x_0$.

Aufgabe 7.3

Aufgabe 7.4

Aufgabe 7.5