

Nach der Umkehrfunktionsregel gilt:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{2(E-V(x))}{m}}} = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{E-V(x)}}$$

Nun kann man über x integrieren:

$$\int_{x_0}^x \frac{dt}{dx} dx = t(x) - t(x_0) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{E-V(x')}} dx'$$

c) i) Im Folgenden wird das Integral für den genannten Spezialfall berechnet. Hierfür wird zunächst $V(x)$ berechnet:

$$\begin{aligned} V(x) &= - \int_{x_0}^x F(x') dx' = - \int_{x_0}^x -kx' dx' \\ &= \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{2} kx_0^2 \end{aligned}$$

Dies kann nun in das Integral eingesetzt werden:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - (\frac{k}{2}x'^2 - \frac{k}{2}x_0^2)}} \stackrel{E' \equiv E + \frac{k}{2}x_0^2}{=} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E'} \sqrt{1 - \frac{k}{2E'}x'^2}}$$

Nun können wir wie folgt substituieren:

$$x(u) = \sqrt{\frac{2E'}{k}} \sin(u) \Leftrightarrow u = \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}} x\right)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow = \int_{u(x_0)}^{u(x)} \frac{1}{\sqrt{E'}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E'} \left(\sqrt{\frac{2E'}{k}} \sin(u)\right)^2}} \frac{dx'}{du} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{E'}} \int_{u(x_0)}^{u(x)} \sqrt{\frac{2E'}{k}} \frac{\cos(u)}{\sqrt{\cos^2(u)}} du \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{k}} (u(x) - u(x_0)) = \sqrt{\frac{2}{k}} \left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}} x\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}} x_0\right) \right)$$

Insgesamt gilt für $t(x)$ somit:

$$t(x) = \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}} x\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}} x_0\right) \right)$$

ii) ~~Um~~ Umformen auf x :

$$x = \sqrt{\frac{2E'}{k}} \sin\left(\pm \sqrt{\frac{k}{m}} t + \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}} x_0\right)\right)$$