Nico Haaf, Tobias Leander Leonhard, Simon Skade

$\sum$	A2.1	A2.2	A2.3	A2.4

Aufgabe 2.1

1 Aufgabe 2.2

Aufgabe 2.3

a)

Der Geschwindigkeitsvektor ergibt sich aus der Ableitung des Positionsvektors:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} Rcos(\omega t) \\ Rsin(\omega t) \\ v_0 t \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = v\dot{e}cx(t) = \begin{pmatrix} -R\omega sin(\omega t) \\ R\omega cos(\omega t) \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Die Bogenlänge berechnet sich wie folgt:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} dt' |\vec{v}(t')| = \int_{t_0}^{t} dt' \sqrt{\vec{v}(t')^2} = \int_{0}^{t} dt' \sqrt{R^2\omega^2((-sin(\omega t'))^2 + cos(\omega t')^2 + v_0^2} = \sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}t$$

Man beachte hierbei, dass die Integrationskonstante tatsächlich 0 ist, da $s(t_0 = 0) = 0$ angenommen wurde.

Die Formel kann umgestellt werden zu:

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}}$$

Der Tangentenvektor entspricht dem auf 1 normierten Geschwindigkeitsvektor:

$$\vec{T}(s) = \frac{\vec{v}(t(s))}{|\vec{v}(t(s))|} = \frac{1}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}} \begin{pmatrix} -R\omega sin(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}}) \\ R\omega cos(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}}) \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Für den Krümmungsradius gilt:

$$\rho = \frac{1}{|\frac{d\vec{T}}{ds}|} = \frac{1}{|\begin{pmatrix} \frac{-R\omega^2}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}} cos(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}}) \\ \frac{-R\omega^2}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}} sin(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}}) \\ 0 \end{pmatrix}|} = \frac{1}{\frac{-R\omega^2}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}}}$$

Der Normalenvektor ergibt sich wie folgt:

$$\vec{N}(s) = \rho \frac{d\vec{T}}{ds} = \begin{pmatrix} -cos(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}}) \\ -sin(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Binormalenvektor berechnet sich wie folgt:

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s) \tag{1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}} \begin{pmatrix} R\omega cos(\omega t(s))0 - v_0(-sin(\omega t(s))) \\ v_0 - cos(\omega t(s)) - 0(-R\omega sin(\omega t(s)) \\ -R\omega sin(\omega t(s)(-sin(\omega t(s))) - R\omega \cos(\omega t(s))(-cos(\omega t(s))) \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}} \begin{pmatrix} v_0(-sin(\omega \frac{s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}})) \\ v_0(-cos(\omega \frac{s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}})) \\ R\omega \end{pmatrix} \tag{3}$$

b)

Aufgrund der alternativen Definition des Vektorprodukts muss gelten, dass $\vec{B}(s) \perp \vec{T}(s)$ und $\vec{B}(s) \perp \vec{N}(s)$. Dass $\vec{B}(s) \perp \vec{N}(s)$ gilt, kann dadurch gezeigt werden, dass das Skalarprodukt 0 ist:

$$\vec{T}(s) \cdot \vec{N}(s) = \frac{1}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}}((-R\omega sin(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}}))(-cos(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}})) \quad (4)$$

$$+ (R\omega cos(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}}))(-sin(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}})) + 0v_0 = 0 \quad (5)$$

2 Aufgabe 2.4