$\sum$	A4.1	A4.2	A4.3	A4.4	A4.5

Aufgabe 4.1

Sei $\vec{r} = (x, y, z)^T$, $r = |\vec{r}|$, $\hat{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{r}$ und $\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)^T$. Zeigen Sie, dass

a)

$\vec{\nabla} r = \hat{\vec{r}}$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} r &= \hat{\vec{r}} \\
\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_x \end{pmatrix} \cdot r &= \begin{pmatrix} \partial_x \cdot r \\ \partial_y \cdot r \\ \partial_x \cdot r \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot r^{-1} \cdot 2x \\ \frac{1}{2} \cdot r^{-1} \cdot 2y \\ \frac{1}{2} \cdot r^{-1} \cdot 2z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} xr^{-1} \\ yr^{-1} \\ zr^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot r^{-1} \\
&= \frac{\vec{r}}{r} \\
&= \hat{\vec{r}}
\end{aligned}$$

b)

$\vec{\nabla} f(r) = \hat{\vec{r}}\,\frac{\mathrm{d}f}{dr}$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f(r) &= \hat{\vec{r}}\,\frac{\mathrm{d}f}{dr} \\
\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_x\end{pmatrix} f(r) &= \begin{pmatrix}\partial_x f(r)\\ \partial_y f(r)\\ \partial_x f(r)\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\frac{\partial fr}{\partial x}\;\frac{\partial r}{\partial r}\\ \frac{\partial fr}{\partial y}\;\frac{\partial r}{\partial r}\\ \frac{\partial fr}{\partial z}\;\frac{\partial r}{\partial r}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\frac{\partial fr}{\partial r}\;\frac{\partial r}{\partial x}\\ \frac{\partial fr}{\partial r}\;\frac{\partial r}{\partial y}\\ \frac{\partial fr}{\partial r}\;\frac{\partial r}{\partial z}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\frac{\partial fr}{\partial r}\;\frac{x}{r}\\ \frac{\partial fr}{\partial r}\;\frac{y}{r}\\ \frac{\partial fr}{\partial r}\;\frac{z}{r}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\frac{\partial fr}{\partial r}\\ \frac{\partial fr}{\partial r}\\ \frac{\partial fr}{\partial r}\end{pmatrix} \cdot \hat{\vec{r}} \\
&= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\hat{\vec{r}}
\end{aligned}$$

c)

rot $\vec{r} = \vec{\nabla} \times \vec{r}$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\\ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d)

div $\vec{r} = \vec{\nabla} \cdot \vec{r}$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \\
&= 1 + 1 + 1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.2

a)

Das Kraftfeld ist offensichtlich konservativ, da die einzelnen Komponenten des Kraftfelds zueinander symmetrisch sind, sodass man zwei Komponenten vertauschen könnte, ohne dass sich das Kraftfeld ändern würde. Dies impliziert offensichtlich, dass die Rotation des Kraftfeldes 0 sein muss, sodass das Kraftfeld konservativ ist.

Im folgenden sei $r = |\vec{r}|$.

Das Potential $V(\vec{r})$ wird berechnet, indem wir das Linienintegral zu $\vec{r}$ berechnen. Da das Kraftfeld konservativ ist, können wir einen beliebigen Pfad von einem Punkt zu einem anderen Punkt wählen, sodass die verrichtete Arbeit genau die Potentialdifferenz ist. Somit können wir unseren Pfad, über den wir integrieren, einfach entlang von $\vec{r}$ wählen. Dann gilt:

$$V(\vec{r}) = -\int^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r'} \tag{1}$$

$$= -\int^{\vec{r}} F_x dr'_x + \int^{\vec{r}} F_y dr'_y + \int^{\vec{r}} F_z dr'_z \tag{2}$$

Da für unser Kraftfeld $F_x = F_x = F_z =: F$ gilt, können wir das wie folgt umformen:

$$V(\vec{r}) = -\int^{r} F dr' \tag{3}$$

$$= -\int^{r} \frac{ce^{-\mu r'}}{r'^2}(1 + \mu r')dr' \tag{4}$$

$$= \frac{ce^{-\mu r}}{r} + C \tag{5}$$

Für ein spezifisches Potential kann man die Integrationskonstante C einfach auf irgendeinen Wert (bspw. 0) festlegen.

b)

Wir überprüfen zunächst die x-Komponente der Rotation des Kraftfeldes:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_x = \frac{\partial}{\partial y} \frac{yc}{y^2 + z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{-zc}{y^2 + z^2} \tag{6}$$

$$= \frac{c}{y^2 + z^2} + \frac{2cy^2}{(y^2 + z^2)^2} + \frac{c}{y^2 + z^2} + \frac{2cz^2}{(y^2 + z^2)^2} \tag{7}$$

$$= \frac{2c}{y^2 + z^2} \left(1 + \frac{y^2 + z^2}{y^2 + z^2}\right) \tag{8}$$

$$= \frac{4c}{y^2 + z^2} \tag{9}$$

Für alle $c \neq 0$ ist dies offensichtlich ungleich 0, sodass das Kraftfeld nicht konservativ ist. (Wenn $c = 0$, kann man einfach sagen $V(\vec{r}) = 0$).

c)

Damit ein Kraftfeld $\vec{F} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{r})$ konservativ ist, muss gelten:

$$0 = \vec{\nabla} \times \vec{F} \tag{10}$$

Wir betrachten zunächst, was gelten muss, damit die x-Komponente von $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ gleich 0 ist:

$$
\begin{aligned}
0 &= (\vec{\nabla} \times \vec{F})_x && (11)\\
\Leftrightarrow 0 &= \frac{\partial}{\partial y} a_z(\vec{b} \cdot \vec{r}) - \frac{\partial}{\partial z} a_y(\vec{b} \cdot \vec{r}) && (12)\\
\Leftrightarrow 0 &= a_z b_y - a_y b_z && (13)
\end{aligned}
$$

Analog kann man so für die anderen Komponenten vorgehen. Im Endeffekt kann man dann leicht sehen, dass die drei Gleichungen äquivalent zu der Folgenden Bedingung sind:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0$$

Aufgabe 4.3

Ein Massenpunkt wird unter dem Winkel θ über der Horizontalen von einer Klippe geworfen.Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Massenpunkt am Ort $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ und der Betrag der Geschwindigkeit sei $|\vec{v}(0)| = v_0$. Wir nehmen ein viskoses Medium mit Stokesscher Reibung an, indem die Beschleunigung durch$\vec{a} = -k\vec{v} - g\vec{e_z}$ gegeben ist. Durch Integration der Gleichung

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}(t)$$

erhalten Sie zunächst $\vec{v}(t)$ und dann $\vec{r}(t)$. Die jeweiligen Integrationskonstanten sind durch die Vorgabe $\vec{v}(t) = v_0 (\cos\theta, 0, \sin\theta)^{\mathrm{T}}$ und $\vec{r}$ festgelegt.

a)

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Massenpunktes als Funktion der Zeit.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= -k\vec{v} - g\vec{e_z} \\ \vec{a} &= \dot{\vec{v}} \\ \vec{a} &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Substitution } \vec{v} &= \vec{\phi}(t)\, e^{-kt} = \vec{\phi} e^{-kt} \\ \dot{\vec{v}} &= \dot{\vec{\phi}} e^{-kt} - k\vec{\phi} e^{-kt}\end{aligned}$$

Nach $\dot{\vec{\phi}}$ umformen:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}} &= \dot{\vec{\phi}} e^{-kt} - k\vec{\phi} e^{-kt} && | + k\vec{\phi} e^{-kt} \\ \dot{\vec{\phi}} e^{-kt} &= \dot{\vec{v}} + k\vec{\phi} e^{-kt} && |\dot{\vec{v}} = \vec{a} = -k\vec{v} - g\vec{e_z} \\ \dot{\vec{\phi}} e^{-kt} &= -k\vec{v} - g\vec{e_z} + k\vec{\phi} e^{-kt} && | \cdot e^{kt} \\ \dot{\vec{\phi}} &= -g\vec{e_z} e^{kt}\end{aligned}$$

Durch Integration von $\dot{\vec{\phi}}$ lässt sich $\vec{\phi}$ berechnen:

$$\begin{aligned}\vec{\phi} &= \int \dot{\vec{\phi}}\ \mathrm{d}t \\ &= \int \mathrm{d}t - g\vec{e_z} e^{kt} \\ &= -\frac{g}{k}\vec{e_z} e^{kt} + \vec{\phi_c}\end{aligned}$$

Resubstitution $\vec{v}$

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{\phi} e^{-kt} \\ &= \left(-\frac{g}{k}\vec{e_z} e^{kt} + \vec{\phi_c}\right) e^{-kt} \\ &= -\frac{g}{k} + \vec{\phi_c} e^{-kt}\end{aligned}$$

Nun muss nur noch $\vec{\phi_c}$ bestimmt werden.

Bestimmung von $\vec{\phi_c}$ durch Startbedingung $|\vec{v}\,(0)| = v_0$

$$\begin{aligned} \vec{v}\,(0) &= \begin{pmatrix} \phi_c^x e^{-0k} \\ \phi_c^y e^{-0k} \\ \phi_c^z e^{-0k} - \frac{g}{k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi_c^x \\ \phi_c^y \\ \phi_c^z - \frac{g}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \\ 0 \\ v_0 \sin\theta \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} \phi_c^x \\ \phi_c^y \\ \phi_c^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \\ 0 \\ v_0 \sin\theta + \frac{g}{k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für $\vec{v}\,(t)$:

$$\vec{v}\,(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot e^{-kt} \cos\theta \\ 0 \\ \left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k} \end{pmatrix}$$

b)

Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}\,(t)$ des Massenpunktes.

Die Bahnkurve lässt sich durch einfaches Integrieren der Geschwindigkeit berechnen.
Aus übersichtsgründen werden wir die x, y und z Komponenten einzeln integrieren.

Für x:

$$\begin{aligned} r^x\,(t) &= \int \mathrm{d}t\ v^x \\ &= \int \mathrm{d}t\ v_0 \cdot e^{-kt} \cdot \cos\theta \\ &= -\frac{v_0}{k} e^{-kt} \cdot \cos\theta + r_c^x \end{aligned}$$

Für y:

$$\begin{aligned} r^y\,(t) &= \int \mathrm{d}t\ v^y \\ &= \int \mathrm{d}t\ 0 \\ &= r_c^y \end{aligned}$$

Für z:

$$\begin{aligned} r^z\,(t) &= \int \mathrm{d}t\ v^z \\ &= \int \mathrm{d}t\ \left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k} \\ &= -\frac{v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k} t + r_c^z \end{aligned}$$

Als Zwischenergebnis für $\vec{r}\,(t)$ ergibt sich:

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} -\frac{v_0}{k} e^{-kt} \cdot \cos\theta + r_c^x \\ r_c^y \\ -\frac{v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k} t + r_c^z \end{pmatrix}$$

Nun muss muss $\vec{r_c}$ nur noch an die Anfangsbedingungen angepasst werden:

$$\vec{r}\,(0) = \begin{pmatrix} -\frac{v_0}{k} e^{-0k} \cdot \cos\theta + r_c^x \\ r_c^y \\ -\frac{v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}}{k} e^{-0k} - \frac{g}{k} \cdot 0 + r_c^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} r_c^x \\ r_c^y \\ r_c^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_0}{k} \cdot \cos\theta \\ 0 \\ \frac{v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}}{k} \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich für $\vec{r}\,(t)$:

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} -\frac{v_0}{k} e^{-kt} \cdot \cos\theta + \frac{v_0}{k} \cdot \cos\theta \\ 0 \\ -\frac{v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k} t + \frac{v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}}{k} \end{pmatrix}$$

Vereinfacht ergibt dies:

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} \left(1 - e^{-kt}\right) \frac{v_0}{k} \cdot \cos\theta \\ 0 \\ \left(1 - e^{-kt}\right) \frac{v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}}{k} - \frac{g}{k} t \end{pmatrix}$$

c)

Zeigen Sie, dass der Massenpunkt im Limes $t \to \infty$ eine endliche Grenzgeschwindigkeit erreicht und berechnen Sie deren Betrag. Wie weit kommt der Massenpunkt maximal in x^1-Richtung? (x^1-Richtung entspricht hier x-Richtung)
Als erstes berechnen wir den Vektor im Limes $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} \vec{v}\,(t) = \lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} v_0 \cdot e^{-kt} \cos\theta \\ 0 \\ \left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k} \end{pmatrix}$$

$$\text{Da } \lim_{t\to\infty} e^{-kt} = 0 :$$

$$\lim_{t\to\infty} \vec{v}\,(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{g}{k} \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir den Betrag der Geschwindgkeit:

$$\left|\lim_{t\to\infty} \vec{v}\,(t)\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{g}{k} \end{pmatrix}\right|$$

$$\left|\lim_{t\to\infty} \vec{v}\,(t)\right| = \sqrt{\left(\frac{g}{k}\right)^2}$$

$$\left|\lim_{t\to\infty} \vec{v}\,(t)\right| = \frac{g}{k}$$

Betrachten wir die zurückgelegte Strecke in x-Richtung im Limes $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} r^x\,(t) = \lim_{t\to\infty} \left(1 - e^{-kt}\right) \frac{v_0}{k} \cdot \cos\theta$$

$$\lim_{t\to\infty} r^x\,(t) = \frac{v_0}{k} \cdot \cos\theta$$

Dies ist die in x-Richtung maximal zurückgelegte Entfernung.

d)

Zeigen Sie: Der höchste Bahnpunkt wird nach der Zeit

$$T = \frac{1}{k} \ln \left(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g} \right)$$

erreicht.

Der höchste Bahnpunkt hängt nur von der z-Richtung ab. Da wir die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ betrachten, müssen wir nur das Maximum der z Richtung berechnen. An dieser Stelle ist $v^z(t) = 0$:

$$\begin{aligned}
v^z(t) &= 0 && \\
\left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} &= 0 && \left| + \frac{g}{k} \right. \\
\left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k} \right) e^{-kt} &= \frac{g}{k} && \left| \cdot \frac{1}{v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}} \right. \\
e^{-kt} &= \frac{g}{k\left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k} \right)} && \left| \cdot e^{kt} \cdot \frac{k\left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k} \right)}{g} \right. \\
e^{kt} &= \frac{k\left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k} \right)}{g} && |\text{Vereinfachen} \\
e^{kt} &= \frac{k v_0 \sin\theta}{g} + 1 && |\text{nach } t \text{ auflösen } \Rightarrow \ln \\
\ln\left(e^{kt} \right) &= \ln\left(\frac{k v_0 \sin\theta}{g} + 1 \right) && \left| \cdot \frac{1}{k} \right. \\
t &= \frac{1}{k} \ln \left(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g} \right) &&
\end{aligned}$$

Dies ist der zu zeigende Term.

e)

Zeigen Sie: Die Höhe am Scheitelpunkt der Bahn ist

$$H = \frac{v_0 \sin\theta}{k} - \frac{g}{k^2} \ln\left(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}\right).$$

Setzen wir nun den in **d)** berechneten Zeitpunkt für $r^z(t)$ ein, so bekommen wir die maximale Höhe der Bahnkurve, diese ist dann auch die Höhe des Scheitelpunktes:

$$r^z(t) = \left(1 - e^{-kt}\right) \frac{v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}}{k} - \frac{g}{k} t$$

Da der Term durch einsetzen von T noch viel größer und unübersichtlicher wird, wollen wir zuerst nur e^{-kT} und $\frac{g}{k}T$ betrachten:

Für e^{-kT}:

$$\begin{aligned}
e^{-kT} &= e^{-k \cdot \frac{1}{k} \ln\left(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}\right)} \\
&= e^{-\ln\left(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}\right)} \\
&= \frac{1}{e^{\ln\left(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}\right)}} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}} \\
&= \frac{1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}}{1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}} + \frac{-\frac{v_0 k \sin\theta}{g}}{1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}} && |\text{Hinteren Summanden mit } \frac{\frac{g}{k}}{\frac{g}{k}} \text{ erweitern.} \\
&= 1 - \frac{\frac{g}{k} \cdot \frac{k}{g} v_0 \sin\theta}{\frac{g}{k} + \frac{g}{k} \cdot \frac{k}{g} v_0 \sin\theta} && |\text{kürzen!} \\
&= 1 - \frac{v_0 \sin\theta}{\frac{g}{k} + v_0 \sin\theta}
\end{aligned}$$

Für $\frac{g}{k}T$:

$$\begin{aligned}
\frac{g}{k}T &= \frac{g}{k} \cdot \frac{1}{k} \ln\left(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}\right) \\
&= \frac{g}{k^2} \cdot \ln\left(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}\right)
\end{aligned}$$

Setzen wir die zwei berechneten Gleichungen nun in r^z ein so ergibt dies:

$$\begin{aligned}
r^z(T) &= \left(1 - \left(1 - \frac{v_0 \sin\theta}{\frac{g}{k} + v_0 \sin\theta}\right)\right) \frac{v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}}{k} - \frac{g}{k^2} \cdot \ln\left(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}\right) \\
r^z(T) &= \left(\frac{v_0 \sin\theta}{\frac{g}{k} + v_0 \sin\theta}\right) \frac{v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}}{k} - \frac{g}{k^2} \cdot \ln\left(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}\right) \\
r^z(T) &= \frac{v_0 \sin\theta}{k} - \frac{g}{k^2} \ln\left(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}\right)
\end{aligned}$$

Dies ist der zu zeigende Term.

f)

Zeigen Sie: Für kleine Reibung ($k \to 0$) sind die Geschwindigkeit $\vec{v}\,(t)$ und der Ortsvektor $\vec{r}\,(t)$ annähernd gegeben durch

$$\vec{v}\,(t) = \vec{v_0} - gt\vec{e_z}, \qquad \vec{r}\,(t) = t\vec{v_0} - \frac{1}{2}gt^2\vec{e_z}.$$

Für $\vec{v}\,(t)$ haben wir in **a)** berechnet:

$$\vec{v}\,(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot e^{-kt}\cos\theta \\ 0 \\ \left(v_0\sin\theta + \frac{g}{k}\right)e^{-kt} - \frac{g}{k} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\,(0) = \begin{pmatrix} v_0\cos\theta \\ 0 \\ v_0\sin\theta \end{pmatrix}$$

Im Limes der Reibung ($k \to 0$) bedeutet dies:

$$\lim_{k\to 0}\vec{v}\,(t) = \lim_{k\to 0}\begin{pmatrix} v_0 \cdot e^{-kt}\cos\theta \\ 0 \\ \left(v_0\sin\theta + \frac{g}{k}\right)e^{-kt} - \frac{g}{k} \end{pmatrix}$$

Da für $k \to 0$, e^{-kt} in die Taylorreihe $1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2$ entwickelt werden kann, gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to 0}\vec{v}\,(t) &= \lim_{k\to 0}\begin{pmatrix} v_0 \cdot \left(1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2\right)\cdot\cos\theta \\ 0 \\ \left(v_0\sin\theta + \frac{g}{k}\right)\cdot\left(1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2\right) - \frac{g}{k} \end{pmatrix} \\
&= \lim_{k\to 0}\begin{pmatrix} v_0 \cdot \left(1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2\right)\cdot\cos\theta \\ 0 \\ v_0\sin\theta\cdot\left(1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2\right) \end{pmatrix} + \lim_{k\to 0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{g}{k}\cdot\left(1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2\right) - \frac{g}{k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_0\cdot\cos\theta \\ 0 \\ v_0\cdot\sin\theta \end{pmatrix} + \lim_{k\to 0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{g}{k} - kt\cdot\frac{g}{k} + \frac{1}{2}k^2t^2\cdot\frac{g}{k} - \frac{g}{k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_0\cdot\cos\theta \\ 0 \\ v_0\cdot\sin\theta \end{pmatrix} + \lim_{k\to 0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -tg + \frac{1}{2}kt^2\cdot g \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_0\cdot\cos\theta \\ 0 \\ v_0\cdot\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -tg \end{pmatrix} \\
&= \vec{v_0} - gt\vec{e_z}
\end{aligned}$$

Für $\vec{r}(t)$ haben wir in **b)** berechnet:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \left(1 - e^{-kt}\right) \frac{v_0}{k} \cdot \cos\theta \\ 0 \\ \left(1 - e^{-kt}\right) \frac{v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}}{k} - \frac{g}{k} t \end{pmatrix}$$

Im Limes der Reibung ($k \to 0$) bedeutet dies:

$$\lim_{k \to 0} \vec{r}(t) = \lim_{k \to 0} \begin{pmatrix} \left(1 - e^{-kt}\right) \frac{v_0}{k} \cdot \cos\theta \\ 0 \\ \left(1 - e^{-kt}\right) \frac{v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}}{k} - \frac{g}{k} t \end{pmatrix}$$

Da für $k \to 0$, e^{-kt} in die Taylorreihe $1 - kt + \dfrac{1}{2}k^2t^2$ entwickelt werden kann, gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{k \to 0} \vec{r}(t) &= \lim_{k \to 0} \begin{pmatrix} \left(1 - \left(1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2\right)\right) \frac{v_0}{k} \cdot \cos\theta \\ 0 \\ \left(1 - \left(1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2\right)\right) \frac{v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}}{k} - \frac{g}{k} t \end{pmatrix} \\
&= \lim_{k \to 0} \begin{pmatrix} \left(kt - \frac{1}{2}k^2t^2\right) \frac{v_0}{k} \cdot \cos\theta \\ 0 \\ \left(kt - \frac{1}{2}k^2t^2\right) \frac{v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}}{k} - \frac{g}{k} t \end{pmatrix} \\
&= \lim_{k \to 0} \begin{pmatrix} tv_0 \cos\theta - \frac{1}{2}kt^2 v_0 \cos\theta \\ 0 \\ tv_0 \sin\theta + \frac{g}{k}t - \frac{1}{2}kt^2 \left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}\right) - \frac{g}{k} t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} tv_0 \cos\theta \\ 0 \\ tv_0 \sin\theta \end{pmatrix} + \lim_{k \to 0} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}kt^2 v_0 \cos\theta \\ 0 \\ -\frac{1}{2}kt^2 \left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} tv_0 \cos\theta \\ 0 \\ tv_0 \sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} + \lim_{k \to 0} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}kt^2 v_0 \cos\theta \\ 0 \\ -\frac{1}{2}kt^2 v_0 \sin\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} tv_0 \cos\theta \\ 0 \\ tv_0 \sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \\
&= t\vec{v_0} - \frac{1}{2}gt^2 \vec{e_z}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.4

Wir bestimmen eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{1}{a + bx + cx^2}, \qquad b^2 > 4ac.$$

Für die Nullstellen von $a + bx + cx^2$ gilt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}.$$

Wir wählen den Ansatz wie gegeben:

$$\frac{1}{a + bx + cx^2} = \frac{\alpha}{x - x_1} + \frac{\beta}{x - x_2}$$

und erhalten:

$$0 \cdot x + 1 = (\alpha + \beta) \cdot x + (-\alpha x_2 - \beta x_1)$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta, \\ 1 &= -\alpha x_2 - \beta x_1. \end{aligned}$$

Woraus wir erhalten $\alpha = -\beta$ und somit:

$$\alpha(x_1 - x_2) = 1, \qquad \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{c}{\sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Somit erhalten wir eine Stammfunktion von f durch:

$$\begin{aligned} \int f \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{a + bx + cx^2} \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\alpha}{x - x_1} + \frac{\beta}{x - x_2} \mathrm{d}x \\ &= \alpha \ln(x - x_1) + \beta \ln(x - x_2) \\ &= \alpha(\ln(x - x_1) - \ln(x - x_2)) \\ &= \frac{c}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \left[\ln\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \right) - \ln\left(x + \frac{+b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \right) \right] \end{aligned}$$

Aufgabe 4.5

a)

System von DGLs erster Ordnung:

$$\dot{z}(t) = ax(t) + by(t) + cz(t) \tag{14}$$

$$y(t) = \dot{x}(t) \tag{15}$$

$$z(t) = \dot{y}(t) \tag{16}$$

b)

Als Matrixschreibweise:

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = M \cdot \vec{r}(t)$$