9.19.29.39.49.59.6

Aufgabe 9.5 Die Voraussetzung der Differenzierbarkit für l'Hospital ist hier stets gegeben.

(i) Die Regel von l'Hospital liefert wegen $\sin(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$ und $x \xrightarrow{x\to 0} 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

(ii) Die Regel von ä'Hospital liefert wegen $\frac{1}{x} \xrightarrow{x\to 0} \infty$ und $\log(x) \xrightarrow{x\to 0} \infty$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0.$$

(iii) Wir verwenden, dass aus Ana bekannt ist, dass $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{z}{x}\right)^x = e^{-z}$. Da Produkt zweier konvergenter Folge gegen das Produkt der Grenzwerte konvergiert folgt:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{5x} = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x\right)^5 = \left(e^{-2}\right)^5 = \frac{1}{e^{10}}.$$

(iv) Die Regel von l'Hospital liefert wegen $\cos(x)-\sqrt{1-x^2} \xrightarrow{x\to 0} 0$ und $x^4 \xrightarrow{x\to 0} 0$ (bei $(*)$ gilt wieder der 0/0 Fall)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{4x^3}\\
&\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)+\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{12x^2}\\
&\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+\frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}}{24x^1}\\
&\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)+\frac{3(4x^2+1)}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}}{24} = \frac{1+3}{24} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

(v) Wir zeigen dass $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{\cot(x)}{\log(x)}} = 0$. Daraus folgt dass $\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot(x)}{\log(x)} = \infty$. Die Regel von l'Hospital für $\cot(x) \xrightarrow{x\to 0^+} \infty$ und $\log(x) \xrightarrow{x\to 0^+} \infty$ liefert:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(x)}{\cot(x)} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2(x)}{-x}\\
&\overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{2\cos(x)\sin(x)}{-1} = 0.
\end{aligned}$$

(vi) Die Regel von l'Hospital für $\sinh^2(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$ und $x\sin(2x) \xrightarrow{x\to 0} 0$ sowie wiederholtes Anwenden der Regel liefern:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(2x)}{\sinh^2(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)+2x\cos(2x)}{2\sinh(x)\cosh(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)+2\cos(2x)+4x\sin(2x)}{2(\sinh^2(x)+\cosh^2(x))} = \frac{2+2+0}{2(0+1)} = 2.
\end{aligned}$$