Theo 1

Ü 10.2 Es wird zunächst Aufgabe b) und dann a) dokumentiert, da in der a) Erkenntnisse aus der b) verwendet werden.

b) Es wird einzeln betrachtet, ob die Matrix ein Trägheitstensor sein kann:

~~(i) Da $0 = I^{13} = \sum_a m_a(-\bar{r}_a^3 \bar{r}_a^1)$, muss (da $m \neq 0$) wegen dem Satz des Nullprodukts $\bar{r}_a^3 = 0$ oder $\bar{r}_a^1 = 0$,~~

(i) Kann einen Trägheitstensor darstellen. Ich hab auf die Schnelle keinen Körper gefunden, der diesen Trägheitstensor besitzt.

(ii) Kann kein Trägheitstensor sein, da gelten muss:

$$I^{12} = \sum_a m_a(\delta^{12}(\bar{r}_a)^2 - \bar{r}_a^1 \bar{r}_a^2) = -\sum_a m_a \bar{r}_a^2 \bar{r}_a^1 = \sum_a m_a(\delta^{21}(\bar{r}_a)^2 - \bar{r}_a^2 \bar{r}_a^1) = I^{21}$$

Was hier nicht der Fall ist.

(iii) Kann ein Trägheitstensor sein. Mir ist leider wieder kein besserer Grund als in (i) eingefallen.

a) Sei σ die Flächendichte des Quadrats. Da das Quadrat nur in der x-y-Ebene liegt, lässt sich das Trägheitsmoment durch folgendes Integral berechnen:

$$I^{ij} = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma(\delta^{ij}(\bar{r}_a)^2 - \bar{r}_a^i \bar{r}_a^j)\,dx\,dy \quad \Big| \text{mit } \bar{r}_a(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma\left(\delta^{ij}(x^2+y^2) - \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}^j\right) dx\,dy$$

Wir wenden hier an, dass alle Integrationskonstanten 0 sein müssen, was man sich vorstellen kann, da die Berechnung über Integration nur eine Verallgemeinerung der Berechnung über die Summe ist.

Da $\bar{r}^3 = 0$, gilt:

$$I^{13} = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma(-\bar{r}^1 \bar{r}^3)\,dx\,dy = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} 0\,dx\,dy = 0$$

Analog gilt dies für I^{23}, I^{31}, I^{32}. Außerdem gilt, wie in der a) bei (ii) gezeigt, dass $I^{12} = I^{21}$ sein muss. Nun werden also nur noch $I^{11}, I^{22}, I^{33}, I^{12}$ berechnet:

$$I^{11} = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}}\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma (\cancel{x^2} + y^2 - \cancel{x^2})\, dx\, dy$$

$$= \sigma \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \left(\frac{s}{2} y^2\right) - \left(-\frac{s}{2} y^2\right) dy = \sigma s \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} y^2\, dy$$

$$= \sigma s \left(\left(\frac{1}{3} \frac{s^3}{8}\right) - \left(\frac{1}{3}\left(-\frac{s^3}{8}\right)\right)\right) = \sigma \frac{s^4}{12}$$

Da x und y zueinander (in unserem Fall) absolut symmetrisch sind, gilt auch $I^{22} = \sigma \frac{s^4}{12}$.

$$I^{33} = \sigma \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}}\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} x^2 + y^2\, dx\, dy = \sigma \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}}\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} x^2\, dx\, dy + \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}}\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} y^2\, dx\, dy \cdot \sigma$$

$$= I_{22} + I_{11} = \sigma \frac{s^4}{6}$$

$$I^{12} = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}}\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma (-xy)\, dx\, dy = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \left[\sigma \left(-\frac{1}{2} y x^2\right)\right]_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} dy = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} 0\, dy = 0$$

Somit sieht der Trägheitstensor wie folgt aus:

$$I = \begin{pmatrix} \frac{\sigma s^4}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma s^4}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma s^4}{6} \end{pmatrix}$$