Theo 1

Ü8.1 a)

Zu jedem Zeitpunkt wirkt die Gewichtskraft und die Kraft wegen dem Ausstoß der Verbrennungsgase auf die Rakete. Für letzteres gilt $F_A = \alpha v_0$, da dies das Negative der Impulsänderung der ausgestoßenen Gase ist. Somit gilt:

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_A(t) + F_G(t)}{m(t)} = \frac{\alpha v_0}{m_0 - \alpha t} - \frac{G M_E}{x^2}$$

Wobei x die Höhe der Rakete ist. (Dass $m(t) = m_0 - \alpha t$ ist, ist offensichtlich.)

b)

$$v(t) = \int_0^t \dot{v}(t')\,dt' + C = \int_0^{\min(t,t_E)} \frac{\alpha v_0}{m_0 - \alpha t'} - g\,dt' + \overbrace{\int_{\min(t,t_E)}^t -g\,dt'}^{\text{falls } t > t_E}$$

Der letzte Teil der Gleichung stimmt offensichtlich, da ab t_E $\alpha = 0$ gilt. Das Integral wird nun ausgerechnet:

$$= -\alpha v_0 \int_0^{\min(t,t_E)} \frac{1}{\alpha t' - m_0}\,dt' + \underbrace{\int_0^t -g\,dt'} + C$$

$$= -\alpha v_0 \left[\ln(\alpha t' - m_0) \cdot \frac{1}{\alpha}\right]_0^{\min(t,t_E)} - gt + C$$

$$\overset{\text{da stets}}{\underset{m_0 > \alpha t_E}{=}} v_0 \left(\ln(m_0) - \ln(m_0 - \alpha \min(t,t_E))\right) - gt + C$$

Es gilt: $v_0 = v(0) = C = 0$

c)

$$z(t) = \int_0^t v(t')\,dt' + C$$

$$= \boxed{\int_0^t v_0 \ln(m_0)\,dt'} + \underbrace{\int_0^t -v_0 \ln(m_0 - \alpha \min(t', t_E))\,dt'} + \boxed{\int_0^t -g t'\,dt'}$$

1 $= \left[v_0 \ln(m_0)\, t'\right]_0^t$

3 $= \left[-\frac{1}{2} g t'^2\right]_0^t$

4 $= -v_0 \ln(m_E)\, t$

~~Substituiere $u = m_0 - \alpha \min(t', t_E) \Rightarrow \frac{dt'}{du} =$~~

Offensichtlich kann das Integral umgeschrieben werden:

$$= -\underbrace{\int_0^{\min(t,t_E)} v_0 \ln(m_0 - \alpha t')\,dt'} - \underbrace{\boxed{\int_{\min(t,t_E)}^t v_0 \ln(m_E)\,dt'}}_{\text{falls } t > t_E}$$

Für diesen Teil des Integrals wird substituiert:

$$u = m - \alpha t' \qquad \frac{dt'}{du} = -\frac{1}{\alpha}$$

$$\rightarrow = v_0 \int_{u(0)}^{u(\min(t,t_E))} -\ln(u)\left(-\frac{1}{\alpha}\right) du = \left[\frac{v_0}{\alpha}\left(u\ln(u)-u\right)\right]_{u(0)}^{u(\min(t,t_E))}$$

$$\overset{\text{Resubst.}}{=} \left[\frac{v_0}{\alpha}(m_0-\alpha t')\left(\ln(m_0-\alpha t')-1\right)\right]_0^{\min(t,t_E)}$$

Fügen wir alle Teile des Integrals wieder zusammen, ergibt sich:

$$z(t) = v_0 t\left(\ln(m_0) - \ln(m_E)\right) - \frac{g}{2}t^2 + \frac{v_0}{\alpha}\left[(m_0-\alpha t')\left(\ln(m_0-\alpha t')-1\right)\right]_0^{\min(t}$$

d) Im höchsten Punkt ist die Geschwindigkeit 0.
Außerdem muss der Zeitpunkt, wo die Rakete am höchsten ist größer als t_E sein $(t_h > t_E)$, da $v_0 \geq \frac{m_0 g}{\alpha} \geq \frac{m_E g}{\alpha}$

Somit gilt:

$$v(t_h) = v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0-\alpha t_E}\right) - g t_h$$

$$\iff t_h = \frac{v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0-\alpha t_E}\right)}{g}$$

e) Für $v_0 < \frac{m_0 g}{\alpha}$ wäre rechnerisch die Beschleunigung am Anfang negativ. Da aber davon auszugehen ist, dass die Rakete auf dem Boden steht, startet die Rakete sobald $v_0 = \frac{m(t)\, g}{\alpha}$ (bzw. startet nie, falls $v_0 \leq \frac{m_E g}{\alpha}$). Die Form der Trajektorie sieht der Trajektorie bei $v_0 \geq \frac{m_0 g}{\alpha}$ relativ ähnlich (zumindest in dem Zeitraum, in dem die Raketen in der Luft sind.)

(Sry für den hässlichen Aufschrieb. Nächstes mal wird's wieder besser. 11)