$\sum$	A5.1	A5.2	A5.3	A5.4	A5.5

Aufgabe 7.1 a)

Sei $x(t)$ die Länge des Teils des Seils, das zu dem Zeitpunkt t von der Tischkante hinabhängt. Die Gewichtskraft, die auf dieses Ende wirkt, ist die Kraft, die die Bewegung des Seils beeinflusst, bzw. gleich $m\ddot{x}$. Somit gilt:

$$\ddot{x} = \frac{F_g(t)}{m} = \frac{\mu g x(t)}{m} = \frac{g}{L} x(t) =: Kx(t)$$

Um diese DGL zu lösen, machen wir den Ansatz $x(t) = e^{ct}$, setzen dies in die DGL ein und bestimmen c durch umformen:

$$c^2 e^{ct} = K e^{ct}$$

$$c = \pm\sqrt{K}$$

Somit haben wir zwei spezielle Lösungen der DGL gefunden. Die allgemeine Lösung ergibt sich nun als allgemeine Linearkombination der beiden speziellen Lösungen:

$$x(t) = Ae^{\sqrt{K}t} + Be^{-\sqrt{K}t}$$

Wir definieren den Zeitpunkt, wann die Kette anfängt sich zu bewegen als $t_0 = 0$.

Nun können wir A und B mithilfe unserer Anfangsbedingungen herausfinden:

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) = 0 &= \sqrt{K}(Ae^{\sqrt{K}0} - Be^{-\sqrt{K}0}) \\ &= A - B \\ A &= B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 &= Ae^{\sqrt{K}0} + Be^{-\sqrt{K}0} \\ &= A + B \\ A &= \frac{x_0}{2} \\ B &= \frac{x_0}{2} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich:

$$x(t) = x_0 \cosh\left(\sqrt{K}t\right) = x_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$$

Die Gleichung gilt offensichtlich nur bis zum Zeitpunkt T.

b)

Die Anfangsgeschwindigkeit des freien Falls ist offensichtlich $\dot{x}(T)$. Hierfür wird zunächst T berechnet:

$$x(T) = x_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}T\right) = L$$

$$T = \operatorname{arccosh}(\frac{L}{g})\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$\dot{x}(T)$ ergibt somit:

$$\dot{x}(T) = x_0\sqrt{\frac{g}{L}}\sinh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}T\right) = x_0\sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{(\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{\frac{L}{g}}\operatorname{arccosh}(\frac{L}{x_0})\right) - 1)} = x_0\sqrt{\frac{g}{x_0} - \frac{g}{L}}$$

c)

In diesem Fall gibt es noch die Gleitreibung, die der Gewichtskraft entgegen wirkt. Somit verändert sich die DGL wie folgt:

$$\ddot{x} = \frac{F_g(t) - F_{Gl}(t)}{m} = \frac{\mu g x(t) - \eta(L - x(t))}{m} = (K + \frac{\eta}{m})x - \frac{\eta L}{m}$$

Wir definieren $K' = K + \frac{\eta}{m}$. Nun machen wir einfach den Ansatz, dass wir einen Summanden zu der Lösung der homogenen DGL $x(t)$ hinzufügen, sodass die zweite Ableitung des Summanden $-\frac{\eta L}{m}$ ergibt:

$$x(t) = x_0 \cosh\left(\sqrt{K'}t\right) - \frac{\eta L}{2m}t^2$$

Nun müssen wir noch überprüfen, ob diese spezielle Lösung mit unseren Anfangsbedingungen übereinstimmt, und ggf. die Lösung abändern.

$$x(0) = x_0 \cosh(0) - \frac{\eta L}{2m}0^2 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = x_0\sqrt{K'}\sinh(0) - \frac{\eta L}{m}0 = 0$$

Somit erfüllt diese Gleichung schon tatsächlich beide unserer Anfangsbedingung, sodass $x(t) = x_0 \cosh\left(\sqrt{K'}t\right) - \frac{\eta L}{2m}t^2$ tatsächlich den Abgleitvorgang in unserem Fall beschreibt.

Aufgabe 7.2 Einfach ausrechnen:

$$x(0) = x_0 = ae^{-\gamma 0} + b0e^{-\gamma 0} = a$$

Also gilt $a = x_0$.

$$\dot{x}(0) = 0 = -\gamma a e^{-\gamma 0} + (be^{-\gamma 0} - \gamma b 0 e^{-\gamma 0}) = b - \gamma a$$

Somit gilt $b = \gamma a = \gamma x_0$.

Aufgabe 7.3 Bestimmen Sie die allgemeinen rellen Lösungen für die Differentialgleichungen

a) $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 5\dot{x} + 6x &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 3) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 2 \ ; \ \lambda_2 = 3 \\ \Rightarrow x &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \end{aligned}$$

b) $\dddot{x} + \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$

$$\begin{aligned} \dddot{x} + \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 (\lambda + 1) + 4 (\lambda + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\lambda^2 + 4\right) (\lambda + 1) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1;2} &= 0 \pm 2i \ ; \ \lambda_3 = -1 \\ \Rightarrow x &= ae^{-x} + b \sin(2x) + c \cos(2x) \end{aligned}$$

c) $\ddot{x} + 6\dot{x} + 25x = 0; \ x(0) = 5, \ \dot{x}(0) = -3$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 6\dot{x} + 25x &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 25 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1;2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 25}}{2} &= -3 \pm 4i \\ \Rightarrow x &= e^{-3t} \left(c_1 \sin(4t) + c_2 \cos(4t)\right) \end{aligned}$$

Anfangsbed. einsetzen:

$$\begin{aligned} x(0) = 5 &= e^{-3 \cdot 0} \left(c_1 \sin(4 \cdot 0) + c_2 \cos(4 \cdot 0)\right) \\ 5 &= c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) = -3 &= -3e^{-3 \cdot 0} \left(c_1 \sin(4 \cdot 0) + 5 \cos(4 \cdot 0)\right) + e{-}3 \cdot 0 \left(4c_1 \cos(4 \cdot 0) - 20 \sin(4 \cdot 0)\right) \\ -3 &= -15 + 4c_1 \\ c_1 &= 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = e^{-3t} \left(3 \sin(4t) + 5 \cos(4t)\right)$$

Aufgabe 7.4

Aufgabe 7.5