$\sum$	A8.1	A8.2	A8.3	A8.4	A

Aufgabe 8.1

Aufgabe 8.2

Theo 8.2

a) Die Transformationen sind

$g_1 : (t, x) \longmapsto (t, Rx), \ R \in O(3)$

$g_2 : (t, x) \longmapsto (t+c, x+b), \ c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^3$

$g_3 : (t, x) \longmapsto (t, x + v(t-c)), \ v \in \mathbb{R}^3$

Als Beweis führen wir $g_3 \circ g_2 \circ g_1$ aus.

$g(t,x) = g_3(g_2(g_1(t,x))) = g_3(g_2(t, Rx)) = g_3(t+c, Rx+b) = (t+c, Rx+\overset{b+v}{\cancel{bv}}(t+\cancel{c}-\cancel{c}))$

$$g(t,x) = (t+c, Rx+b+vt) \ \checkmark$$

$$\Rightarrow g : (t,x) \longmapsto (t+c, Rx+vt+b)$$

b) Das Inverse von g ist g^{-1}

$$g^{-1} : (t,x) \longmapsto (t-c, R^{-1}x - R^{-1}b - R^{-1}v(t))$$

$$g^{-1} \circ g(t,x) = g^{-1}(t+c, Rx+b+vt) \longmapsto (t, R^{-1}(Rx+b+vt) - R^{-1}b - R^{-1}v(t))$$

$$= (t, x + \cancel{R^{-1}b} + \cancel{R^{-1}vt} - \cancel{R^{-1}b} - \cancel{R^{-1}vt})$$

$$= (t, x)$$

$$\Rightarrow g^{-1}(t,x) = g_3^{-1} \circ g_2^{-1} \circ g_1^{-1}(t,x)$$

$$\Rightarrow g_1^{-1} : (t,x) \longmapsto (t, R^{-1}x)$$

$$g_2^{-1} : (t,x) \longmapsto (t-c, x-R^{-1}b$$

$$g_3^{-1} : (t,x) \longmapsto (t, x - R^{-1}vt)$$

Theo 8.2

c) $g_1 : (t, x) \longmapsto (t+c_1, R_1 x + b_1 + v_1 t)$

$g_2 : (t, x) \longmapsto (t+c_2, R_2 x + b_2 + v_2 t)$

$g_2 \circ g_1 (t, x) = g_2 (t+c_1, R_1 x + b_1 + v_1 t)$

$= (t+c_1+c_2, R_2(R_1 x + b_1 + v_1 t) + b_2 + v_2 c_1 + v_2 t)$

$= (t + c_3, R_3 x + V_3 t + b_3)$

mit $c_3 = c_1 + c_2$; $R_3 = R_2 R_1$; $V_3 = R_2 v_1 + v_2$;
$b_3 = R_2 b_1 + b_2 + v_2 c_1$

$t, c_i \in \mathbb{R}$, für $i = 1;2;3$
$R_i \in O(3)$, für $i = 1;2;3$; $x, v_i, b_i \in \mathbb{R}^3$ für $i = 1, 2, 3$

d) 1. Untergruppe (UG):
Rotation (nur Rotation),

$g_i : (t, x) \mapsto (t, R_i x)$ $R_i \in O(3)$

$\Rightarrow$ nicht abelsch, da $R_1 R_2 \neq R_2 R_1$ $R_1 R_2$ bel., aber $R_1 R_2 \neq \mathbb{1}$
$x \neq \vec{0}$ $x, 0 \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow R_1 R_2 x \neq R_2 R_1 x$

2. UG:
nur Translation:

$g_i : (t, x) \mapsto (t + c_i, x + b_i)$ $c_i \in \mathbb{R}$; $b_i \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ abelsch, da $t + c_i + c_j = t + c_j + c_i = c_j + t + c_i = \dots$

und $x + b_i + b_j = b_j + x + b_i = \dots$

3. UG
Boost

$g_i : (t, x) \mapsto (t, x + v_i t)$ $v_i \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ abelsch, da $v_i t + x = x + v_i t$