$\sum$	A8.1	A8.2	A8.3	A8.4	A

Aufgabe 8.1

Theo 1

Ü8.1 a)

Zu jedem Zeitpunkt wirkt die Gewichtskraft und die Kraft wegen dem Ausstoß der Verbrennungsgase auf die Rakete. Für letzteres gilt $F_A = \alpha v_0$, da dies das Negative der Impulsänderung der ausgestoßenen Gase ist. Somit gilt:

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_A(t) + F_G(t)}{m(t)} = \frac{\alpha v_0}{m_0 - \alpha t} - \frac{G M_E}{x^2}$$

Wobei x die Höhe der Rakete ist. (Dass $m(t) = m_0 - \alpha t$ ist, ist offensichtlich.)

b)

$$v(t) = \int_0^t \dot{v}(t')\,dt' + C = \int_0^{\min(t,t_E)} \frac{\alpha v_0}{m_0 - \alpha t'} - g\,dt' + \overbrace{\int_{\min(t,t_E)}^{t} -g\,dt'}^{\text{falls } t > t_E}$$

Der letzte Teil der Gleichung stimmt offensichtlich, da ab t_E $\alpha = 0$ gilt. Das Integral wird nun ausgerechnet:

$$= -\alpha v_0 \int_0^{\min(t,t_E)} \frac{1}{\alpha t' - m_0}\,dt' + \int_0^t -g\,dt' + C$$

$$= -\alpha v_0 \left[\ln(\alpha t' - m_0)\cdot\frac{1}{\alpha}\right]_0^{\min(t,t_E)} - gt + C$$

$$\underset{m_0 > \alpha t_E}{\overset{\text{da stets}}{=}} v_0\left(\ln(m_0) - \ln(m_0 - \alpha \min(t,t_E))\right) - gt + C$$

Es gilt: $v_0 = v(0) = C = 0$

c)

$$z(t) = \int_0^t v(t')\,dt' + C$$

$$= \boxed{\int_0^t v_0 \ln(m_0)\,dt'} + \int_0^t -v_0 \ln(m_0 - \alpha \min(t', t_E))\,dt' + \boxed{\int_0^t -g t'\,dt'}$$

① $= \left[v_0 \ln(m_0)\, t'\right]_0^t$

③ $= \left[-\frac{1}{2} g t'^2\right]_0^t$

④ $= v_0 \ln(m_E)\, t$

~~Substituiere $u = m_0 - \alpha \min(t', t_E) \Rightarrow \frac{dt'}{du} =$~~

Offensichtlich kann das Integral umgeschrieben werden:

$$= -\int_0^{\min(t,t_E)} v_0 \ln(m_0 - \alpha t')\,dt' - \underbrace{\boxed{\int_{\min(t,t_E)}^t v_0 \ln(m_E)\,dt'}}_{\text{falls } t > t_E} \quad ④$$

Für diesen Teil des Integrals wird substituiert:

$$u = m - \alpha t' \qquad \frac{dt'}{du} = -\frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow = v_0 \int_{u(0)}^{u(\min(t,t_E))} -\ln(u)\left(-\frac{1}{\alpha}\right) du = \left[\frac{v_0}{\alpha}\left(u\ln(u) - u\right)\right]_{u(0)}^{u(\min(t,t_E))}$$

$$\overset{\text{Resubst.}}{=} \left[\frac{v_0}{\alpha}(m_0 - \alpha t')\left(\ln(m_0 - \alpha t') - 1\right)\right]_0^{\min(t,t_E)}$$

Fügen wir alle Teile des Integrals wieder zusammen, ergibt sich:

$$z(t) = v_0 t\left(\ln(m_0) - \ln(m_E)\right) - \frac{g}{2}t^2 + \frac{v_0}{\alpha}\left[(m_0 - \alpha t')\left(\ln(m_0 - \alpha t') - 1\right)\right]_0^{\min(t,t_E)}$$

d) Im höchsten Punkt ist die Geschwindigkeit 0.
Außerdem muss der Zeitpunkt, wo die Rakete am höchsten ist größer als t_E sein ($t_h > t_E$), da $v_0 \geq \frac{m_0 g}{\alpha} \geq \frac{m_E g}{\alpha}$
Somit gilt:

$$v(t_h) = v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t_E}\right) - g t_h$$

$$\Longleftrightarrow t_h = \frac{v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t_E}\right)}{g}$$

e) Für $v_0 < \frac{m_0 g}{\alpha}$ wäre rechnerisch die Beschleunigung am Anfang negativ. Da aber davon auszugehen ist, dass die Rakete auf dem Boden steht, startet die Rakete sobald $v_0 = \frac{m(t) g}{\alpha}$ (bzw. startet nie, falls $v_0 \leq \frac{m_E g}{\alpha}$). Die Form der Trajektorie sieht der Trajektorie bei $v_0 \geq \frac{m_0 g}{\alpha}$ relativ ähnlich (zumindest in dem Zeitraum, in dem die Raketen in der Luft sind.)

(Sry für den hässlichen Aufschrieb. Nächstes mal wird's wieder besser. 11)

Aufgabe 8.2

Theo 8.2

a) Die Transformationen sind

$g_1 : (t, x) \longmapsto (t, Rx), \; R \in O(3)$

$g_2 : (t, x) \longmapsto (t+c, x+b), \; c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^3$

$g_3 : (t, x) \longmapsto (t, x + v(t-c)), \; v \in \mathbb{R}^3$

Als Beweis führen wir $g_3 \circ g_2 \circ g_1$ aus.

$g(t,x) = g_3(g_2(g_1(t,x))) = g_3(g_2(t, Rx)) = g_3(t+c, Rx+b) = (t+c, Rx + \overset{b+v}{\cancel{b}}(t+\cancel{c-c}))$

$$g(t,x) = (t+c, Rx+b+vt) \checkmark$$

$$\Rightarrow g : (t,x) \longmapsto (t+c, Rx+vt+b)$$

b) Das Inverse von g ist g^{-1}

$$g^{-1} : (t,x) \longmapsto (t-c, R^{-1}x - R^{-1}b - R^{-1}v(t))$$

$$g^{-1} \circ g(t,x) = g^{-1}(t+c, Rx+b+vt) \longmapsto (t, R^{-1}(Rx+b+vt) - R^{-1}b - R^{-1}v(t))$$

$$= (t, x + \cancel{R^{-1}b} + \cancel{R^{-1}vt} \cancel{- R^{-1}b} \cancel{- R^{-1}vt})$$

$$= (t, x)$$

$$\Rightarrow g^{-1}(t,x) = g_3^{-1} \circ g_2^{-1} \circ g_1^{-1}(t,x)$$

$$\Rightarrow g_1^{-1} : (t,x) \longmapsto (t, R^{-1}x)$$

$$g_2^{-1} : (t,x) \longmapsto (t-c, x - R^{-1}b$$

$$g_3^{-1} : (t,x) \longmapsto (t, x - R^{-1}vt)$$

Theo 8.2

c) $g_1 : (t, x) \longmapsto (t + c_1, R_1 x + b_1 + v_1 t)$

$g_2 : (t, x) \longmapsto (t + c_2, R_2 x + b_2 + v_2 t)$

$$g_2 \circ g_1 (t, x) = g_2 (t + c_1, R_1 x + b_1 + v_1 t)$$

$$= (t + c_1 + c_2, R_2 (R_1 x + b_1 + v_1 t) + b_2 + v_2 c_1 + v_2 t)$$

$$= (t + c_3, R_3 x + v_3 t + b_3)$$

mit $c_3 = c_1 + c_2$; $R_3 = R_2 R_1$; $v_3 = R_2 v_1 + v_2$;
$b_3 = R_2 b_1 + b_2 + v_2 c_1$

$t, c_i \in \mathbb{R}$, für $i = 1;2;3$
$R_i \in O(3)$, für $i = 1;2;3$; $x, v_i, b_i \in \mathbb{R}^3$ für $i = 1,2,3$

d) 1. Untergruppe (UG):
Rotation (nur Rotation),

$g_i : (t, x) \mapsto (t, R_i x)$ $R_i \in O(3)$

$\Rightarrow$ nicht abelsch, da $R_1 R_2 \neq R_2 R_1$ $R_1 R_2$ bel., aber $R_1 R_2 \neq \mathbb{1}$
$x \neq \vec{0}$ $x, 0 \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow R_1 R_2 x \neq R_2 R_1 x$

2. UG:
nur Translation:

$g_i : (t, x) \mapsto (t + c_i, x + b_i)$ $c_i \in \mathbb{R}$; $b_i \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ abelsch, da $t + c_i + c_j = t + c_j + c_i = c_j + t + c_i = \dots$

und $x + b_i + b_j = b_j + x + b_i = \dots$

3. UG
Boost

$g_i : (t, x) \mapsto (t, x + v_i t)$ $v_i \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ abelsch, da $v_i t + x = x + v_i t$

Aufgabe 8.3 Jedes eindimensionale zeitunabhängige Kraftfeld ist konservativ, es gilt hier also:

$$E = \frac{m}{2}\dot{x} + V(x) = \frac{m}{2}\dot{x} + A|x|^n.$$

Nun gilt es die Dauer einer Schwingung des Massepunkts vom Umkehrpunkt $x_2 < 0$ in den Umkehrpunkt $x_1 > 0$ zu berechnen. Für diese gilt $V(x_i) = E$. Also für $x_1 > 0$

$$E = V(x_1) = A|x_1|^n = Ax_1^n \implies x_1 = \sqrt[n]{\frac{E}{A}}.$$

Ferner folgt:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \implies \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$
$$\implies t = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}.$$

Für die Gesuchte Dauer $T(E)$ gilt also: bei (1) benutzen wir die Substitution $x \mapsto -x$ und benützen $x_2 = -x_1$

$$\begin{aligned} T(E) = \int_{x_2}^{x_1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} &= \int_{x_2}^{x_1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - A|x|^n)}} \\ &\overset{(1)}{=} 2\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}} \int_0^{x_1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(E - A|x|^n)}} \\ &= \sqrt{2m} \int_0^{\sqrt[n]{\frac{E}{A}}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(E - A|x|^n)}} \\ &\overset{y=\frac{x}{x_1}}{=} \sqrt{\frac{2m}{E}} \cdot \sqrt[n]{\frac{A}{E}} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - y^n}}. \end{aligned}$$

Ferner gilt für $t = y^n$ und somit $t^{\frac{n-1}{n}} = y^{n-1}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - y^n}} &= \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t^{\frac{1-n}{n}}}{\sqrt{1 - t}} \\ &= \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{(1 - t)^{\frac{3}{2}-1}} \mathrm{d}t \\ &= B(\frac{1}{n}, \frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{n}) \cdot \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{n} + \frac{3}{2})} = \mathrm{const}_n > 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 8.4

(a) (i) Es gilt $\varepsilon^{ijk} = 0 \iff i = j$ oder $j = k$ oder $k = i$. Mit $(\varepsilon^{ijk})^2 = |\varepsilon^{ijk}|$ folgt:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijk} &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}(\varepsilon^{ijk})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}|\varepsilon^{ijk}| \\ &= |\varepsilon^{123}| + |\varepsilon^{312}| + |\varepsilon^{231}| + |\varepsilon^{132}| + |\varepsilon^{213}| + |\varepsilon^{321}| = 6. \end{aligned}$$

(ii) Wir bestimmen α sodass $\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ljk} = \alpha\delta^{il}$: kontrahieren der Indizes durch δ^{il} liefert:

$$\delta^{il}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ljk} = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijk} = 6.$$

Sowie:

$$\delta^{il}\alpha\delta^{il} = \alpha(\delta^{11} + \delta^{22} + \delta^{33}) = 3\alpha.$$

Es folgt $3\alpha = 6$ also $\alpha = 2$.

(iii) Wir bestimmen α, β, γ sodass:

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lmk} = \alpha\delta^{ij}\delta^{lm} + \beta\delta^{il}\delta^{jm} + \gamma\delta^{im}\delta^{jl}.$$

Kontrahieren mit δ^{jm} liefert:

$$\delta^{jm}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lmk} = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ljk} = 2\delta^{il}.$$

Sowie:

$$\begin{aligned}\delta^{jm}(\alpha\delta^{ij}\delta^{lm} + \beta\delta^{il}\delta^{jm} + \gamma\delta^{im}\delta^{jl}) &= \alpha\delta^{ij}\delta^{lj} + \beta\delta^{il}\delta^{jj} + \gamma\delta^{ij}\delta^{jl} \\ &= \alpha\delta^{li} + 3\beta\delta^{il} + \gamma\delta^{il} \\ &= (\alpha + 3\beta + \gamma)\delta^{il}.\end{aligned}$$

Also gilt $(\alpha + 3\beta + \gamma) = 2$. Kontrahieren mit δ^{ij} liefert:

$$\delta^{ij}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lmk} = \varepsilon^{iik}\varepsilon^{lmk} = 0.$$

Sowie:

$$\begin{aligned}\delta^{ij}(\alpha\delta^{ij}\delta^{lm} + \beta\delta^{il}\delta^{jm} + \gamma\delta^{im}\delta^{jl}) &= \alpha\delta^{ii}\delta^{lm} + \beta\delta^{il}\delta^{im} + \gamma\delta^{im}\delta^{il} \\ &= (3\alpha + \beta + \gamma)\delta^{lm}.\end{aligned}$$

Also gilt $3\alpha + \beta + \gamma = 0$. Kontrahieren mit δ^{im} liefert:

$$\delta^{im}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lmk} = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lik} = -\varepsilon^{jik}\varepsilon^{lik} = 2\delta^{jl}.$$

Sowie:

$$\begin{aligned}\delta^{im}(\alpha\delta^{ij}\delta^{lm} + \beta\delta^{il}\delta^{jm} + \gamma\delta^{im}\delta^{jl}) &= \alpha\delta^{ij}\delta^{li} + \beta\delta^{il}\delta^{ji} + \gamma\delta^{ii}\delta^{jl} \\ &= (\alpha + \beta + 3\gamma)\delta^{jl}.\end{aligned}$$

Also gilt bereits $\alpha + \beta + 3\gamma = -2$. Wir erhalten folgendes LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Das Gauß-Eliminationsverfahren liefert durch Rechnung $\alpha = 0$, $\beta = 1$ und $\delta = -1$.

(b) (i) Explizite Rechnung liefert für $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))^i &= \varepsilon^{ijk}a^j(\vec{b} \times \vec{c})^k \\ &= \varepsilon^{ijk}a^j\varepsilon^{klm}b^lc^m \\ &= \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{klm}b^lc^m \\ &= \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lmk}a^jb^lc^m \\ &= (\delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl})a^jb^lc^m \\ &= \delta^{il}\delta^{jm}a^jb^lc^m - \delta^{im}\delta^{jl}a^jb^lc^m \\ &= (\delta^{jm}a^jc^m)b^i - (\delta^{jl}a^jb^l)c^i \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c})b^i - (\vec{a} \cdot \vec{b})c^i.\end{aligned}$$

Aus der Gleichheit aller Einträge folgt Gleichheit der Vektoren.

(ii) Explizite Rechnung liefert:

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= (\vec{a} \times \vec{b})^i (\vec{a} \times \vec{b})^i \\
&= \varepsilon^{ijk} a^j b^k \varepsilon^{ilm} a^l b^m \\
&= \varepsilon^{jki} \varepsilon^{lmi} a^j b^k a^l b^m \\
&= (\delta^{jl}\delta^{km} - \delta^{jm}\delta^{kl}) a^j b^k a^l b^m \\
&= \delta^{jl}\delta^{km} a^j b^k a^l b^m - \delta^{jm}\delta^{kl} a^j b^k a^l b^m \\
&= (a^j a^j)(b^k B^k) - (a^j b^j)(b^k a^k) \\
&= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{b})
\end{aligned}$$