$\sum$	A2.1	A2.2	A2.3	A2.4

Aufgabe 2.1

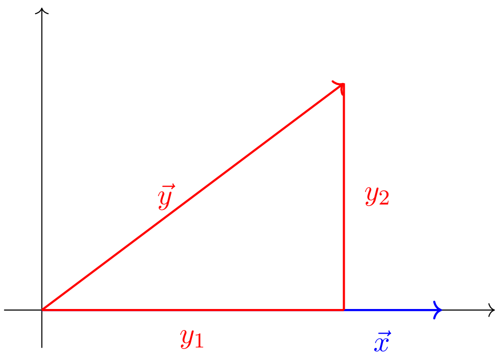
(a) Wir betrachten $\vec{x} = (x_1, 0, 0)$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, 0)$ mit $x_1, y_1, y_2 > 0$. Dann gilt für $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$:

$$z_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon^{ijk} x_j y_j \overset{x_2=x_3=0}{=} \underbrace{\varepsilon^{i11}}_{=0} x_1 y_1 + \varepsilon^{i12} x_1 y_2 + \varepsilon^{i13} x_1 \underbrace{y_3}_{=0} = \varepsilon^{i12} x_1 y_2.$$

Mit der Definition des Levi-Civita-Symbols erhalten wir also:

$$z_1 = z_2 = 0, \qquad z_3 = x_1 y_2.$$

$\vec{x}$ und $\vec{y}$ liegen in der Ebene gegeben durch alle $\vec{a}$ mit $a_3 = 0$ und der Winkel von θ zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist genau der Winkel zwischen $\vec{y}$ und der ersten Koordinatenachse. Dies wird an folgender Abbildung klar:



Dann sehen wir geometrisch ein:

$$\sin(\theta) = \frac{y_2}{|\vec{y}|}$$

Woraus wir direkt folgern:

$$|\vec{z}| = x_1 y_2 = x_1 \cdot y_2 \cdot \frac{|\vec{y}|}{|\vec{y}|} = |x| \cdot |y| \cdot \sin(\theta).$$

Ferner folgt $\vec{z} \perp \vec{x}$ und $\vec{z} \perp \vec{y}$ durch:

$$\vec{z} \cdot \vec{x} = x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = x_1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot z_3 = 0,$$
$$\vec{z} \cdot \vec{y} = y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 = y_1 \cdot 0 + y_2 \cdot 0 + 0 \cdot z_3 = 0.$$

(b) Es ist $\varepsilon^{ijk} = 0$ genau dann wenn zwei Indizes gleich sind. In diesem Fall ist die Antisymmetrie klar. Nun seien i, j, k also verschieden. Dann wird die Antisymmetrie klar, durch aufzählen aller möglichen Fälle:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{123} &= 1 & \longleftrightarrow & \quad \varepsilon^{213} = -1 \\
& & \longleftrightarrow & \quad \varepsilon^{321} = -1 \\
& & \longleftrightarrow & \quad \varepsilon^{132} = -1 \\
\varepsilon^{312} &= 1 & \longleftrightarrow & \quad \varepsilon^{132} = -1 \\
& & \longleftrightarrow & \quad \varepsilon^{213} = -1 \\
& & \longleftrightarrow & \quad \varepsilon^{321} = -1 \\
\varepsilon^{231} &= 1 & \longleftrightarrow & \quad \varepsilon^{321} = -1 \\
& & \longleftrightarrow & \quad \varepsilon^{132} = -1 \\
& & \longleftrightarrow & \quad \varepsilon^{213} = -1
\end{aligned}$$

Wir folgern:

$$\begin{aligned}
\vec{x} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon^{1jk} x_j y_k 2 \\ \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon^{2jk} x_j y_k \\ \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon^{3jk} x_j y_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon^{123} x_2 y_3 + \varepsilon^{132} x_3 y_2 \\ \varepsilon^{213} x_1 y_3 + \varepsilon^{231} x_3 y_1 \\ \varepsilon^{312} x_1 y_2 + \varepsilon^{321} x_2 y_1 \end{pmatrix} \\
&= x_1 \varepsilon^{123} x_2 y_3 + x_2 \varepsilon^{213} x_1 y_3 + x_1 \varepsilon^{132} x_3 y_2 + x_3 \varepsilon^{312} x_1 y_2 + x_2 \varepsilon^{231} x_3 y_1 + x_3 \varepsilon^{321} x_2 y_1 \\
&= \varepsilon^{123} x_1 x_2 y_3 - \varepsilon^{123} x_1 x_2 y_3 + \varepsilon^{132} x_1 x_3 y_2 - \varepsilon^{132} x_1 x_3 y_2 + \varepsilon^{231} x_2 x_3 y_1 - \varepsilon^{231} x_2 x_3 y_1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vollkommen analog rechnen wir $\vec{y} \cdot (\vec{x} \times \vec{y})$.

Aufgabe 2.2

Die periodische Bewegung eines Teilchens sei beschrieben durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = R\cos(\omega t) \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

a)

Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ Des Teilchens.

Um die Geschwindigkeit und die Beschleunigung zu berechnen, leiten wir $\vec{x}(t)$ nach der Zeit (t) ab. Aus Übersichtsgründen werden wir dies Komponentenweiße machen.

Zuerst für die Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= R\cos(\omega t) \\ v_1(t) = \dot{x_1}(t) &= -R\omega\sin(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= R\cos(\omega t)\sin(\omega t) \\ v_2(t) = \dot{x_2}(t) &= R\omega\left[\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)\right] \end{aligned}$$

Zusammengesetzt ergibt dies:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega t) \\ R\omega\left[\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)\right] \end{pmatrix} = R\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \left[\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)\right] \end{pmatrix}$$

Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit.
In Komponentenschreibweiße:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= -R\omega\sin(\omega t) \\ a_1(t) = \dot{v_1}(t) &= -R\omega^2\cos(\omega t) \end{aligned}$$

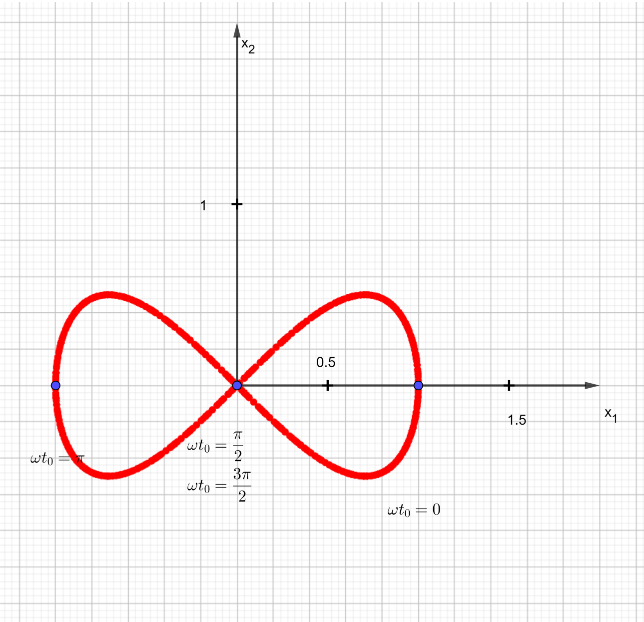
$$\begin{aligned} v_2(t) &= R\omega\left[\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)\right] \\ a_2(t) = \dot{v_2}(t) &= -4R\omega^2\cos(\omega t)\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Zusammengesetzt ergibt dies:

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos(\omega t) \\ -4R\omega^2\cos(\omega t)\sin(\omega t) \end{pmatrix} = -R\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ 4\cos(\omega t)\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

b)

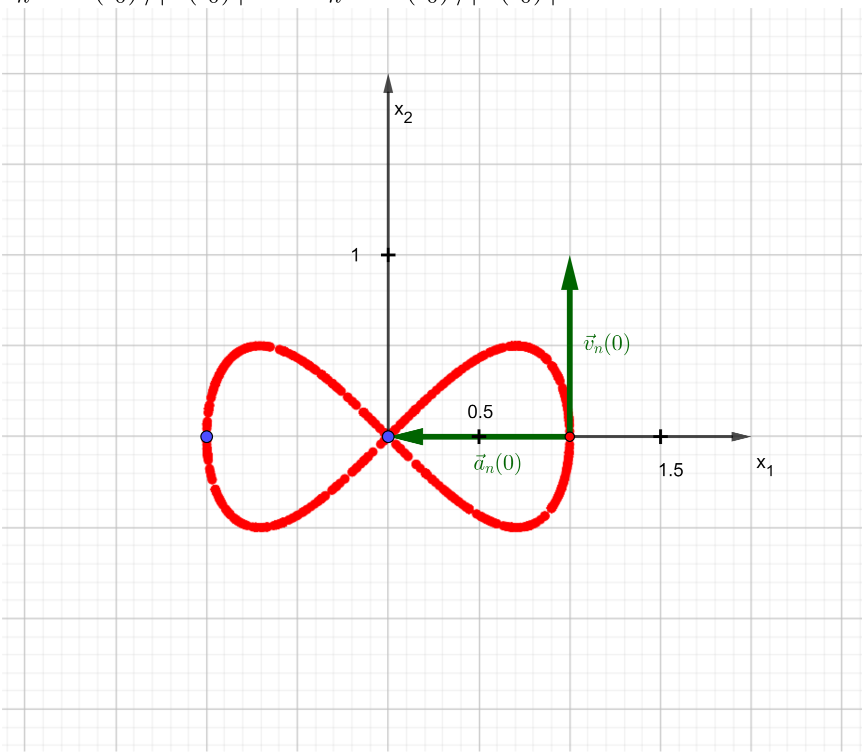
Fertigen Sie eine Skizze der Teilchenbahn an (Raumkurve in zwei Dimensionen). Tragen Sie dazu auf den Koordinatenachsen die Werte $x_1(t)/R$ und $x_2(t)/R$ auf. beachten Sie, dass das Teilchen auch eine Auslenkung in x_2 -Richtung besitzt. Identifizieren Sie die Positionen $\vec{x}(t_0)$ für $\omega t_0 = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Achten Sie auf eine korrekte Beschriftung der Achsen.



c)

Tragen Sie in die obige Skizze die EInheitsverktoren $\vec{v}\,(t_0)\,/|\vec{v}\,(t_0)\,|$ und $\vec{a}\,(t_0)\,/|\vec{a}\,(t_0)\,|$ am Punkt $\vec{x}\,(t_0) = R\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ ein.

$\vec{v}_n = \vec{v}\,(t_0)\,/|\vec{v}\,(t_0)\,|$ und $\vec{a}_n = \vec{a}\,(t_0)\,/|\vec{a}\,(t_0)\,|$



Aufgabe 2.3

a)

Der Geschwindigkeitsvektor ergibt sich aus der Ableitung des Positionsvektors:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} Rcos(\omega t) \\ Rsin(\omega t) \\ v_0 t \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = v\dot{e}cx(t) = \begin{pmatrix} -R\omega sin(\omega t) \\ R\omega cos(\omega t) \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Die Bogenlänge berechnet sich wie folgt:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} dt' |\vec{v}(t')| = \int_{t_0}^{t} dt' \sqrt{\vec{v}(t')^2} = \int_{0}^{t} dt' \sqrt{R^2\omega^2((-sin(\omega t'))^2 + cos(\omega t')^2 + v_0^2} = \sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}t$$

Man beachte hierbei, dass die Integrationskonstante tatsächlich 0 ist, da $s(t_0 = 0) = 0$ angenommen wurde.

Die Formel kann umgestellt werden zu:

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}}$$

Der Tangentenvektor entspricht dem auf 1 normierten Geschwindigkeitsvektor:

$$\vec{T}(s) = \frac{\vec{v}(t(s))}{|\vec{v}(t(s))|} = \frac{1}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}} \begin{pmatrix} -R\omega sin(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}}) \\ R\omega cos(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}}) \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Für den Krümmungsradius gilt:

$$\rho = \frac{1}{|\frac{d\vec{T}}{ds}|} = \frac{1}{|\begin{pmatrix} \frac{-R\omega^2}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}} cos(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}}) \\ \frac{-R\omega^2}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}} sin(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}}) \\ 0 \end{pmatrix}|} = \frac{1}{\frac{-R\omega^2}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}}}$$

Der Normalenvektor ergibt sich wie folgt:

$$\vec{N}(s) = \rho \frac{d\vec{T}}{ds} = \begin{pmatrix} -cos(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}}) \\ -sin(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Binormalenvektor berechnet sich wie folgt:

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s) \tag{1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}} \begin{pmatrix} R\omega cos(\omega t(s))0 - v_0(-sin(\omega t(s))) \\ v_0 - cos(\omega t(s)) - 0(-R\omega sin(\omega t(s)) \\ -R\omega sin(\omega t(s)(-sin(\omega t(s))) - R\omega \cos(\omega t(s))(-cos(\omega t(s))) \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}} \begin{pmatrix} v_0(-sin(\omega \frac{s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}})) \\ v_0(-cos(\omega \frac{s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}})) \\ R\omega \end{pmatrix} \tag{3}$$

b)

Aufgrund der alternativen Definition des Vektorprodukts muss gelten, dass $\vec{B}(s) \perp \vec{T}(s)$ und $\vec{B}(s) \perp \vec{N}(s)$. Dass $\vec{B}(s) \perp \vec{N}(s)$ gilt, kann dadurch gezeigt werden, dass das Skalarprodukt 0 ist:

$$\vec{T}(s) \cdot \vec{N}(s) = \frac{1}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}}((-R\omega sin(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}}))(-cos(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}})) \tag{4}$$

$$+ (R\omega cos(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}}))(-sin(\frac{\omega s}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}})) + 0v_0 = 0 \tag{5}$$

Aufgabe 2.4

Zeigen Sie durch Integration, dass

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}, \text{ falls } a<0 \text{ und } b^2-ac>0.$$

Zuerst betrachten wir nur den Term unter der Wurzel:

$$ax^2+2bx+c = a\left(x^2+\frac{2b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

Nun ergänzen wir quadratisch:

$$= a\left(x^2+\frac{2b}{a}x+\left(\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$$

Nun wenden wir die 1. binomische Formel an:

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-(\frac{b^2+ac}{a^2}\right)$$

Nun klammern wir ein „-"aus und stellen die Gleichung ein bisschen um:

$$= -a\left(\frac{b^2-ac}{a^2}-\left(x+\frac{b}{a}\right)^2\right)$$

Nach dieser Umformung werden wir das Integral mehrmals substituieren.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-a\left(\frac{b^2-ac}{a^2}-\left(x+\frac{b}{a}\right)^2\right)}}$$

Nun substituieren wir mit $y = x+\frac{b}{a}$, gleichzeitig setzen wir $y_0 = \sqrt{\frac{b^2-ac}{a^2}}$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \;\Rightarrow dy = dx$$

Daraus ergibt sich:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{-a\left(y_0^2-y^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dy}{\sqrt{y_0^2-y^2}}$$

Als nächstes substituieren wir y mit $y = y_0 \sin\phi$:

$$\frac{dy}{d\phi} = y_0\cos\phi \;\Rightarrow dy = d\phi\; y_0\cos\phi$$

Mit dieser Substitution ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{d\phi\ y_0 \cos\phi}{\sqrt{y_0^2 - (y_0 \sin\phi)^2}} &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{d\phi\ y_0 \cos\phi}{\sqrt{y_0^2\left(1 - \sin^2\phi\right)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{d\phi\ y_0 \cos\phi}{\sqrt{y_0^2 \cos^2\phi}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{d\phi\ y_0 \cos\phi}{y_0 \cos\phi} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int d\phi \frac{y_0 \cos\phi}{y_0 \cos\phi} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int 1\ d\phi \\
&= \frac{1}{\sqrt{-a}}\ \phi
\end{aligned}$$

Nun müssen wir nur noch die Substitutionen nach ϕ auflösen und für ϕ einsetzen:

$$\begin{aligned}
y = y_0 \sin\phi \Rightarrow \sin\phi &= \frac{y}{y_0} \\
\Rightarrow \phi &= \arcsin\frac{y}{y_0}
\end{aligned}$$

Mit $y = x + \frac{b}{a}$ und $y_0 = \sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2}}$ ergibt sich für ϕ:

$$\begin{aligned}
\phi &= \arcsin\frac{x + \frac{b}{a}}{\sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2}}} \\
&= \arcsin\frac{x + \frac{b}{a}}{\sqrt{b^2 - ac} \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2}}} \\
&= \arcsin\frac{\sqrt{a^2}\left(x + \frac{b}{a}\right)}{\sqrt{b^2 - ac}}
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Werte unter den Wurzeln:
Als Konstante vor dem Integrierten haben wir $\frac{1}{\sqrt{-a}}$, somit muss $a < 0$ sein.
Auch muss $b^2 > ac$ gelten, da sonst der Nenner im arcsin nicht lösbar wäre.

Durch den Fakt, dass $a < 0$, kann $\sqrt{a^2}$ als $-a$ interpretiert werden.
Damit ergibt sich für ϕ:

$$\phi = \arcsin\frac{-a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{\sqrt{b^2 - ac}}$$

Für arcsin gilt: $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$.
Somit gilt für ϕ:

$$\begin{aligned}
\phi &= -\arcsin\frac{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{\sqrt{b^2 - ac}} \\
&= -\arcsin\frac{ax + b}{\sqrt{b^2 - ac}}
\end{aligned}$$

Setzen wir dies nun für ϕ in $\frac{1}{\sqrt{-a}}\phi$ ein, so ergibt dies, falls $a < 0$ und $b^2 > ac$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin\frac{ax + b}{\sqrt{b^2 - ac}}$$

Dies entspricht der zu beweisenden Integration. ■