$\sum$	A5.1	A5.2	A5.3	A5.4	A5.5

Aufgabe 6.1 Betrachten Sie das eindimensionale Potential

$$V(x) = -\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2},\ \alpha, \beta > 0$$

für $x > 0$.

a) Bestimmen Sie das Minimum des Potentials.

Wir bestimmen die Nullstelle(n) der ersten Ableitung des Potentials:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}\right) &= \frac{\alpha}{x^2} - 2\frac{\beta}{x^3} \\ 0 &= \frac{\alpha}{x^2} - 2\frac{\beta}{x^3} \\ \Rightarrow x &= 2\frac{\beta}{\alpha}\end{aligned}$$

Da dies auch ein Maximum des Potentials sein könnte, bestimmen wir noch die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\alpha}{x^2} - 2\frac{\beta}{x^3}\right) &= -2\frac{\alpha}{x^3} + 6\frac{\beta}{x^4} \\ \text{Setze } x = 2\frac{\beta}{\alpha} & \\ &= 2\frac{\alpha}{\left(2\frac{\beta}{\alpha}\right)^3} + 6\frac{\beta}{\left(2\frac{\beta}{\alpha}\right)^4} \\ &= 3\frac{\alpha^4}{8\beta^3} - 2\frac{\alpha^4}{8\beta^3} \\ &= \frac{\alpha^4}{8\beta^3} > 0\end{aligned}$$

Da diese an der Stelle $2\frac{\beta}{\alpha}$ größer als 0 ist, handelt es sich um ein Minimum.
Somit liegt das Minimum des Potentials bei $2\frac{\beta}{\alpha}$.

b) Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung des Potentials bis einschließlich der zweiten Ordnung um das Minimum.

Wir setzen einfach die Ableitungen aus **a)** in die Formel für die Taylor-Reihe ein, dabei beachten wir, das $V^{(1)}\left(2\frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$ und dieser Teil schon wegfällt:

$$\begin{aligned}V(x)\big|_{2\frac{\beta}{\alpha}} &= -\frac{\alpha^2}{4\beta} + 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^4}{8\beta^3}\cdot\left(x - 2\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \\ &= -\frac{\alpha^2}{4\beta} + \frac{\alpha^4}{16\beta^3}x^2 - \frac{\alpha^3}{4\beta^2}x + \frac{\alpha^2}{4\beta} \\ &= \frac{\alpha^4}{16\beta^3}x^2 - \frac{\alpha^3}{4\beta^2}x\end{aligned}$$

c) Berechnen Sie die Kreisfrequenz ω der Schwingung eines Teilchens der Masse m bei kleinen Auslenkungen um seine Ruhelage im Minimum

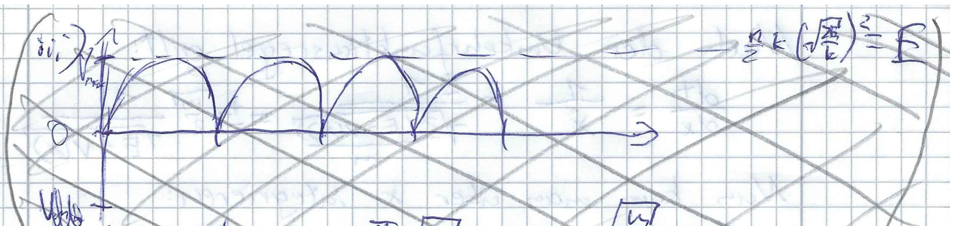
Für kleine Auslenkungen können wir die Taylor-Reihe aus **b)** nutzen, es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x) = m\ddot{x} = -kx = -\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\alpha^4}{16\beta^3}x^2 - \frac{\alpha^3}{4\beta^2}x\right) \\
m \cdot \ddot{x} &= -\frac{\alpha^4}{8\beta^3}x + \frac{\alpha^3}{4\beta^2} \\
\ddot{x} &= -\frac{\alpha^4}{8m\beta^3}x + \frac{\alpha^3}{4\beta^2}
\end{aligned}$$

Eine mögliche Lösung dieser Dgl. ist:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sin\left(\sqrt{\frac{\alpha^4}{8m\beta^3}}\ t\right) + \frac{\alpha^3}{8\beta^2}t^2 \\
\Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{\alpha^4}{8m\beta^3}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.2



~~Umkehrpunkte: $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} + n\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$~~

Theo 1 Ü 2.6

a) Es gilt:

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\,dx' \implies F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = m\ddot{x}$$

Nun lässt sich mit $\dot{x}$ multiplizieren und über t integrieren:

$$-\frac{dV(x)}{\cancel{dx}}\frac{\cancel{dx}}{dt} = m\ddot{x}\dot{x}$$

$$-\int \frac{dV(x)}{dt}\,dt = \int m\ddot{x}\dot{x}\,dt$$

Das rechte Integral lässt sich durch partielle Integration lösen: $f'(x) = \ddot{x}$, $g(x) = \dot{x}$

$$\int m\ddot{x}\dot{x}\,dt = \left[m\dot{x}^2\right] - \int m\dot{x}\ddot{x}\,dt$$

$$\iff \int m\ddot{x}\dot{x}\,dt = \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right]$$

Dies ist bekanntlich die kinetische Energie.
Somit gilt:

$$-V + C_1 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + C_2 = T + C_2$$

$$\iff C_1 - C_2 = T + V = E = \text{konst.}$$

b) Es gilt:

$$T = E - V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\implies \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2(E - V(x))}{m}}$$

Nach der Umkehrfunktionsregel gilt:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{2(E-V(x))}{m}}} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{E-V(x)}}$$

Nun kann man über x integrieren:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{dx}\,dx = t(x) - t(x_0) = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\sqrt{E-V(x')}}\,dx'$$

c) i) Im Folgenden wird das Integral für den genannten Spezialfall berechnet. Hierfür wird zunächst $V(x)$ berechnet:

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\,dx' = -\int_{x_0}^{x} -kx'\,dx'$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

Dies kann nun in das Integral eingesetzt werden:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{E-\left(\frac{k}{2}x'^2 - \frac{k}{2}x_0^2\right)}} \overset{E' \equiv E + \frac{k}{2}x_0^2}{=\!=} \int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{E'}\sqrt{1-\frac{k}{2E'}x'^2}}$$

Nun können wir wie folgt substituieren:

$$x(u) = \sqrt{\frac{2E'}{k}}\sin(u) \iff u = \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x\right)$$

$$= \int_{u(x_0)}^{u(x)}\frac{1}{\sqrt{E'}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{k}{2E'}\left(\sqrt{\frac{2E'}{k}}\sin(u)\right)^2}}\frac{dx'}{du}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E'}}\int_{u(x_0)}^{u(x)}\sqrt{\frac{2E'}{k}}\frac{\cos(u)}{\sqrt{\cos^2(u)}}\,du$$

$$= \sqrt{\frac{2}{k}}\left(u(x) - u(x_0)\right) = \sqrt{\frac{2}{k}}\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x_0\right)\right)$$

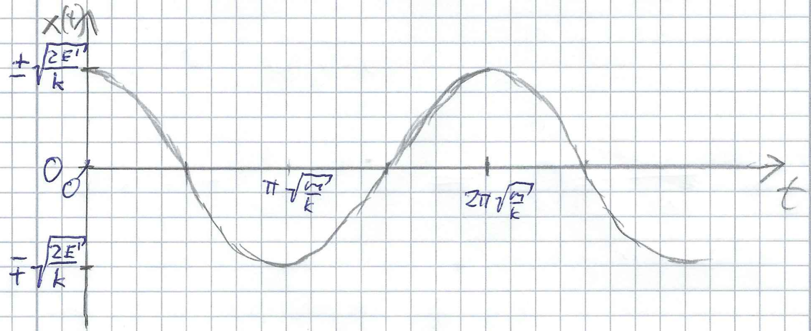
Insgesamt gilt für $t(x)$ somit:

$$* \quad t(x) = \pm\sqrt{\frac{m}{k}}\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x_0\right)\right)$$

ii) Umformen auf x:

$$x = \sqrt{\frac{2E'}{k}}\sin\left(\pm\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x_0\right)\right)\right)$$

Somit* eine Sinusfunktion mit der Amplitude $\sqrt{\frac{2E'}{k}}$ und einer Phasenverschiebung. Wegen der Anfangsbedingung $\dot{x}(0) = 0$ muss zum Zeitpunkt 0 die kinetische Energie 0 sein, sodass es hier einen Umkehrpunkt geben muss: *ist $x(t)$



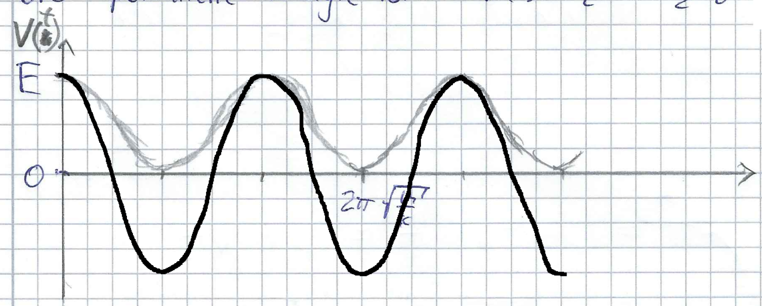
Die Punkte auf der Zeitachse wurden über die Periodendauer berechnet:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

iii) Die Umkehrpunkte der Bewegung sind offensichtlich:

$$n\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad | \; n \in \mathbb{Z}$$

Die potentielle Energie ist: $V(x(t)) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{k}{2}x_0^2$ **



* Ergänzung 1:

Wegen der Argumentation am Anfang vom 3. eingescannten Blatt gilt:

$$\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x_0\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

Da gilt $\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos(x)$, lässt sich die Gleichung für x vereinfachen zu (es wurde E' resubstituiert):

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E + kx_0^2}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

Dies ist auch in der ersten Skizze dargestellt.

** Ergänzung 2:

Bitte nur die schwarze, nicht die mit Bleistift gezeichnete Linie betrachten. Die Gleichung geht wie folgt weiter:

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2}x^2 - \frac{k}{2}x_0^2 &= \frac{k}{2}\left(\sqrt{\frac{2E + kx_0^2}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)\right)^2 - \frac{k}{2}x_0^2 && (1)\\
&= E\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)^2 + \frac{k}{2}x_0^2(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) - 1)^2 && (2)\\
&= E\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)^2 - \frac{k}{2}x_0^2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)^2 && (3)\\
&= E\left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)^2 - \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)^2\right) && (4)
\end{aligned}$$

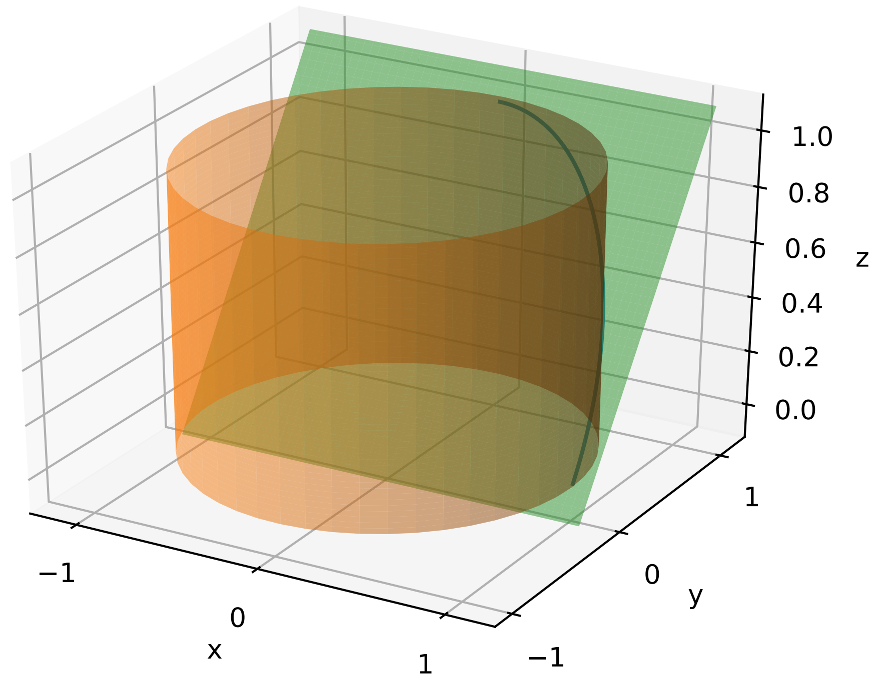
Der letzte Umformungsschritt geht ebenfalls aus der Tatsache hervor, dass $\dot{x}(0) = 0$, sodass zum Zeitpunkt 0 die gesamte Energie in der potentiellen Energie stecken muss.

Aufgabe 6.3 Gegeben sei das Vektorfeld:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 + y^2 + z^2 \\ ye^z \end{pmatrix}.$$

Die gemeinsamen Punkte der Ebene $z = y$ und des Kreiszylinders, dessen Querschnittsfläche den Radius 1 besitzt und dessen Achse mit der z-Achse zusammenfällt, definieren eine Schnittkurve S. Der Weg C beginne im Punkt $\big(1,0,0\big)$, verlaufe entlang der Schnittkurve S im Halbraum $y \geq 0$ und ende im Punkte $\big(0,1,1\big)$.

(a) Skizze des Kreiszylinders, der Ebene und des Wegs C:



Wir bestimme explizit die Parametrisierung $\vec{x}(\phi)$ der Schnittkurve S: wir setzen in die allgemeine Parametrisierung des Kreiszylinders ein, dass gilt $z(\phi, z) = y(\phi, z)$

$$\vec{x}(\phi) = \vec{x}(\phi, z) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}.$$

Für $\phi \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big]$ beschreibt diese Parametrisierung genau die Schnittkurve S, denn $\vec{x}(0) = \big(1,0,0\big)$ und $\vec{x}(\frac{\pi}{2}) = \big(0,1,1\big)$, nach Konstruktion liegt $\vec{x}(\phi)$ auf dem Kreiszylinder und wegen $z(\phi) = \sin(\phi) = y(\phi)$ liegt $\vec{x}(\phi)$ in der Ebene mit $z = y$. Außerdem $y(\phi) \neq 1$ für alle $\phi \in [0, \frac{\phi}{2})$ und $y(\phi) = \sin(\phi) \geq 0$ für alle $\phi \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big]$. Somit beschreibt $\vec{x}\colon \big[0, \frac{\pi}{2}\big] \to \mathbb{R}^3, \phi \mapsto \vec{x}(\phi)$ genau die Schnittkurve S.

(b) Es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}(\phi)}{\mathrm{d}\phi} = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen: bei (1) wird durch $u = \sin(\phi)$ substituiert, bei (2) wird benutzt, dass $(xe^x - e^x)' = xe^x$.

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}(\vec{x}(\phi)) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{x}(\phi)}{\mathrm{d}\phi}\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \cos^2(\phi) + 2\sin^2(\phi) \\ \sin(\phi)\exp(\sin(\phi)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix} \mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(\phi)\sin(\phi) + [1 + \sin^2(\phi)]\cos(\phi) + \cos(\phi)\sin(\phi)\exp(\sin(\phi))\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\phi)\big[-\sin(\phi) + 1 + \sin^2(\phi) + \sin(\phi)\exp(\sin(\phi))\big]\mathrm{d}\phi \\
&\overset{(1)}{=} \int_0^1 \big[1 - u + u^2 + ue^u\big]\cos(\phi)\frac{\mathrm{d}u}{\cos(\phi)} \\
&= \int_0^1 1 - u + u^2 + ue^u \mathrm{d}u \\
&\overset{(2)}{=} u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + ue^u - e^u \bigg|_0^1 \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + e - e - 0 + 0 - 0 + 0 + 1 = \frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6.4 Berechnen Sie

a) die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{2}{x}y + \frac{\ln x}{x^2} \tag{1}$$

Wir lösen zuerst den homogenen Teil:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{2}{x}y \\
\text{Sep. der Var.:}& \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\frac{2}{x}\mathrm{d}x && \Big| \int \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int -\frac{2}{x}\mathrm{d}x \\
\ln(y) &= -2\left(\ln(x) + \underline{c}\right) \\
\ln(y) &= -2\ln(x) - 2\underline{c} && |\ln \text{ auflösen} \\
y &= e^{-2\ln(x)} \cdot e^{-2\underline{c}} && |c := e^{-2\underline{c}} \\
y &= cx^{-2} && (2)
\end{aligned}$$

Variation der Kons.: $c \to c(x)$

$$y' = -2\frac{c(x)}{x^2} + c'(x)\,x^{-2} \tag{3}$$

Setze (2) und (3) in (1) ein:

$$\begin{aligned}
-2\frac{c(x)}{x^3} + \frac{c'(x)}{x^2} &= -\frac{2}{x} \cdot \frac{c(x)}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2} \\
\Leftrightarrow \frac{c'(x)}{x^2} &= \frac{\ln(x)}{x^2} \\
\Leftrightarrow c'(x) &= \ln(x) \\
\Rightarrow c(x) &= \int \mathrm{d}x\ c'(x) = \int \mathrm{d}x\ \ln(x) = x\ln(x) - x + \hat{c} && (4)
\end{aligned}$$

(4) in (2):

$$\begin{aligned}
y &= \left(x\ln(x) - x + \hat{c}\right) \cdot \frac{1}{x^2} \\
y &= \frac{\ln(x) - 1}{x} - \frac{\hat{c}}{x^2}
\end{aligned}$$

b) die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = -2xy + 2xe^{-x^2},\ y(0) = 2 \tag{1}$$

Wir bestimmen den homogenen Teil:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -2xy \\
\text{Sep. der Var.:} & \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -2x\mathrm{d}x && \Big|\int \\
\int \mathrm{d}y\ \frac{1}{y} &= -2\int \mathrm{d}x\ x \\
\ln(y) &= -x^2 - \hat{c} && |\text{ln beseitigen} \\
y &= e^{-x^2-\hat{c}} \\
y &= e^{-x^2} \cdot e^{-\hat{c}} && |c := e^{-\hat{c}} \\
y &= ce^{-x^2} && (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Variation der Kons.: } c &\to c(x) \\
y' &= c'(x)\,e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}c(x)
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
(2) \text{ und } (3) \text{ in } (1)&: \\
c'(x)\,e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} &= -2xc(x)\,e^{-x^2} + 2xe^{-x^2} \\
c'(x)\,e^{-x^2} &= 2xe^{-x^2} \\
c'(x) &= 2x \\
\Rightarrow c(x) &= \int \mathrm{d}x\ c'(x) = \int \mathrm{d}x\ 2x = x^2 + \hat{c}
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
(4) \text{ in } (1) \text{ ergibt allg. Lösung für Dgl.}&: \\
y &= \left(x^2 + \hat{c}\right) e^{-x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Anfangsbed. } y(0) = 2 \text{ einsetzen}&: \\
y(0) &= \hat{c} = 2 \\
\Rightarrow y &= \left(x^2 + 2\right) e^{-x^2}
\end{aligned}$$