$\sum$	A9.1	A9.3	A9.5

Aufgabe 9.1

Ü9.1

a) Es wird die homogene Gleichung gelöst:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = f\cos(\eta t)$$

Wir machen den Ansatz $x(t) = e^{\alpha t}$:

$$(\alpha^2 + \alpha c + \omega^2)\cancel{e^{\alpha t}} = 0$$

$$\alpha_{1/2} = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \omega^2} = -\frac{5}{4}\omega \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\omega\right)^2 - \omega^2}$$

$$= \left(-\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}\right)\omega$$

$$\rightarrow x_1 = e^{-\frac{1}{2}\omega t}, \quad x_2 = e^{-2\omega t}$$

Für die allgemeine homogene Lösung kann einfach die allgemeine Linearkombination von den beiden Lösungen genommen werden:

$$x(t) = B e^{-\frac{1}{2}\omega t} + C e^{-2\omega t}$$

b) Logischerweise schwingt der Oszillator in der Frequenz wie die antreibende Kraft. $f\cdot\cos(\eta t)$ lässt sich als $\mathrm{Re}(f e^{i\eta t})$ darstellen. Wir machen den komplexen Ansatz $x(t) = A e^{i\eta t}$ $(A \in \mathbb{C})$ um die DGL im komplexen zu lösen und dann im Endeffekt über den Realteil die reale Lösung zu bekommen. Wir schreiben A als $A = |A| e^{i\varphi}$. Die DGL ergibt:

$$\left(A(-\eta^2 + i\eta c + \omega^2) - f\right)\cancel{e^{i\eta t}} = 0 \qquad (1)$$

$$\rightarrow A = \frac{f}{\omega^2 - \eta^2 + i\eta c} \qquad \rightarrow |A| = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2-\eta^2)^2 + \eta^2\omega^2}}$$

Um den Winkel φ zu erhalten, betrachten wir den Imaginärteil von Gleichung (1), der ebenfalls 0 sein muss: Zunächst wird (1) durch $|A|$ geteilt:

$$(\omega^2 - \eta^2 + i\eta c)e^{i\varphi} - \frac{f}{|A|} = 0$$

$\rightarrow$ Imaginärteil:

$$(\omega^2 - \eta^2)\sin(\varphi) + \eta c \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Mit $\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos(\varphi)$ ergibt das: *

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\eta c}{\eta^2 - \omega^2}\right)$$

Wie man erkennen kann, geht bei $\eta \nearrow \omega$ $\tan(\varphi) \longrightarrow -\infty$, sodass $\varphi \longrightarrow \frac{\pi}{2}$.
Da $(\omega^2 - \eta^2) \to 0$ geht, geht die Amplitude $|A|$ in diesem fall gegen $\frac{f}{\eta\omega}$, bzw $\frac{f}{\omega^2}$.

c) Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der partiellen Lösung plus der allgemeinen homogenen Lösung. Da wir den Resonanzfall betrachten, gilt $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $|A| = \frac{f}{\omega^2}$: (und $\eta = \omega$)

$$x(t) = \frac{f}{\omega^2}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + B e^{-\frac{1}{2}\omega t} + C e^{-2\omega t}$$

Anfangsbedingungen einsetzen:

$$x(0) = 0 = B + C \longrightarrow B = -C$$

(wegen $C = -B$)

$$\dot{x}(0) = 0 = \frac{f\omega}{\omega^2} - \frac{1}{2}B\omega + 2B\omega \to -C = B = \frac{2}{3}\frac{f}{\omega^2}$$

Somit ist die explizite Lösung:

$$x(t) = \frac{f}{\omega^2}\left(\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}\omega t} - \frac{2}{3}e^{-2\omega t}\right)$$

Bei $t = 0$ ~~ist keine~~ besitzt der Oszillator keine Energie, da wegen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ keine potentielle und keine kinetische Energie vorhanden ist. Bei $t \to \infty$ gilt für x:

$$x = \frac{f}{\omega^2}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

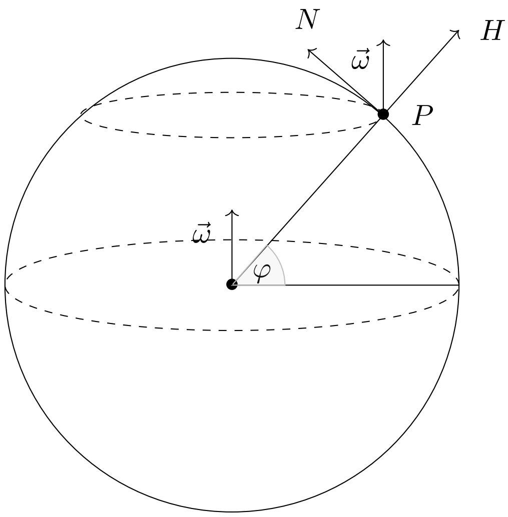
Die Energie hier kann einfach über die maximale kinetische Energie berechnet werden und ist somit $\frac{1}{2}m\dot{x}_{max}^2 = \frac{1}{2}m\frac{f^2}{\omega^2}$.
Energie ist nicht erhalten, da der Oszillator von einer externen Kraft angetrieben wird.

---

* Der Realteil von x der der reellen partikulären Lösung entspricht, ist nach unserem Ansatz logischerweise:

$$x(t) = |A|\cos(\eta t + \varphi)$$

Aufgabe 9.3 Wir wählen einen Punkt P der Erdoberfläche bei Breitengrad φ und lokal ein Koordinatensystem, mit Basisvektoren in Richtung Osten O, Norden N und radial vom Erdmittelpunkt weg H.



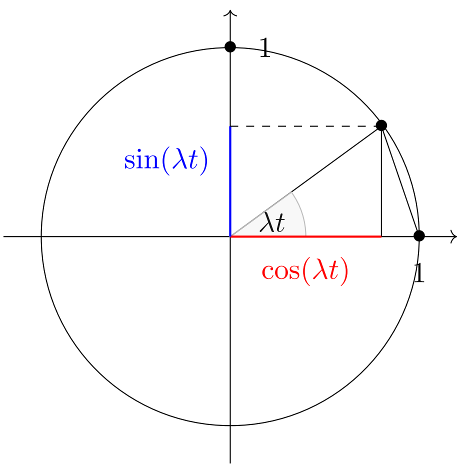
Sei R der Radius der Erde. Geometrisch sehen wir sofort (im Koordinatensystem der Erde) $P_0 = R(0, \cos(\phi), \sin(\phi))$. Wir nehmen zunächst an $\vec{\omega} = 0$. Dann entspricht die Bewegung vom zu P gehörenden Koordinatensystem der Bewegung auf der Kreisbahn um die Erde auf Höhe des Winkels ϕ um den Radius $(P_0)^2$. Eine ganze Umdrehung entspricht genau $24h$. Für einen Massepunkt in $\vec{r}_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ erhalten wir also im Fall $\vec{\omega} = 0$, dass für $\lambda = \frac{2\pi}{24h}$ gilt

$$\vec{r}_0(t) = \vec{r}_0 + (R\cos(\phi)\sin(\lambda t),\ R\cos(\phi)\cos(\lambda t),\ R\sin(\phi)).$$

Nun nehmen wir $\vec{\omega} \neq 0$ an, also drehe sich die Erde um die x_3-Achse, sodass eine vollständige Drehung genau einem Tag entspreche. Diese Drehung entspricht genau der linearen Abbildung (linear zum festen Zeitpunkt t) mit $(0,0,1) \mapsto= (0,0,1)$, $(1,0,0) \mapsto (\cos(\lambda t), \sin(\lambda t), 0)$ und $(0,1,0) \mapsto (-\sin(\lambda t), \cos(\lambda t), 0)$, also mit der Darstellungsmatrix

$$R = R\begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & -\sin(\lambda t) & 0 \\ \sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wie wir an folgender Skizze geometrisch sehen (für $(1,0,0)$):



Ferner gilt $\dot{R}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Also erhalten wir (im Koordinatensystem der Erde) $\vec{\omega} = (0,0,\lambda)$

mit $\omega = \lambda$ und erhalten geometrisch aus der ersten Skizze im lokalen Koordinatensystem: $\vec{\omega} = \omega(0, \cos(\phi), \sin(\phi))$.

Aufgabe 9.5 Die Voraussetzung der Differenzierbarkit für l'Hospital ist hier stets gegeben.

(i) Die Regel von l'Hospital liefert wegen $\sin(x) \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ und $x \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

(ii) Die Regel von ä'Hospital liefert wegen $\frac{1}{x} \overset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty$ und $\log(x) \overset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0.$$

(iii) Wir verwenden, dass aus Ana bekannt ist, dass $\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{z}{x}\right)^x = e^{-z}$. Da Produkt zweier konvergenter Folge gegen das Produkt der Grenzwerte konvergiert folgt:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{5x} = \left(\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x\right)^5 = \left(e^{-2}\right)^5 = \frac{1}{e^{10}}.$$

(iv) Die Regel von l'Hospital liefert wegen $\cos(x) - \sqrt{1-x^2} \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ und $x^4 \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ (bei $(*)$ gilt wieder der $0/0$ Fall)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{4x^3} \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x) + \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{12x^2} \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) + \frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}}{24x^1} \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) + \frac{3(4x^2+1)}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}}{24} = \frac{1+3}{24} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

(v) Wir zeigen dass $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{\cot(x)}{\log(x)}} = 0$. Daraus folgt dass $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cot(x)}{\log(x)} = \infty$. Die Regel von l'Hospital für $\cot(x) \overset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \infty$ und $\log(x) \overset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \infty$ liefert:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{\cot(x)} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{-x} \\
&\overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos(x)\sin(x)}{-1} = 0.
\end{aligned}$$

(vi) Die Regel von l'Hospital für $\sinh^2(x) \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ und $x\sin(2x) \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ sowie wiederholtes Anwenden der Regel liefern:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(2x)}{\sinh^2(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) + 2x\cos(2x)}{2\sinh(x)\cosh(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x) + 2\cos(2x) + 4x\sin(2x)}{2(\sinh^2(x) + \cosh^2(x))} = \frac{2+2+0}{2(0+1)} = 2.
\end{aligned}$$