

Σ	A5.1	A5.2	A5.3	A5.4	A5.5

Aufgabe 6.1

Betrachten Sie das eindimensionale Potential

$$V(x) = -\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}, \quad \alpha, \beta > 0$$

für $x > 0$.

a)

Bestimmen Sie das Minimum des Potentials.

Wir bestimmen die Nullstelle(n) der ersten Ableitung des Potentials:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(-\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} \right) = \frac{\alpha}{x^2} - 2\frac{\beta}{x^3} \\ 0 &= \frac{\alpha}{x^2} - 2\frac{\beta}{x^3} \\ \Rightarrow x &= 2\frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

Da dies auch ein Maximum des Potentials sein könnte, bestimmen wir noch die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha}{x^2} - 2\frac{\beta}{x^3} \right) &= -2\frac{\alpha}{x^3} + 6\frac{\beta}{x^4} \\ \text{Setze } x &= 2\frac{\beta}{\alpha} \\ &= 2\frac{\alpha}{\left(2\frac{\beta}{\alpha}\right)^3} + 6\frac{\beta}{\left(2\frac{\beta}{\alpha}\right)^4} \\ &= 3\frac{\alpha^4}{8\beta^3} - 2\frac{\alpha^4}{8\beta^3} \\ &= \frac{\alpha^4}{8\beta^3} > 0 \end{aligned}$$

Da diese an der Stelle $2\frac{\beta}{\alpha}$ größer als 0 ist, handelt es sich um ein Minimum.
Somit liegt das Minimum des Potentials bei $2\frac{\beta}{\alpha}$.

b)

Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung des Potentials bis einschließlich der zweiten Ordnung um das Minimum.

Wir setzen einfach die Ableitungen aus **a)** in die Formel für die Taylor-Reihe ein, dabei beachten wir, dass $V^{(1)}\left(2\frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$ und dieser Teil schon wegfällt:

$$\begin{aligned} V(x) \Big|_{2\frac{\beta}{\alpha}} &= -\frac{\alpha^2}{4\beta} + 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^4}{8\beta^3} \cdot \left(x - 2\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \\ &= -\frac{\alpha^2}{4\beta} + \frac{\alpha^4}{16\beta^3}x^2 - \frac{\alpha^3}{4\beta^2}x + \frac{\alpha^2}{4\beta} \\ &= \frac{\alpha^4}{16\beta^3}x^2 - \frac{\alpha^3}{4\beta^2}x \end{aligned}$$

c)

Berechnen Sie die Kreisfrequenz ω der Schwingung eines Teilchens der Masse m bei kleinen Auslenkungen um seine Ruhelage im Minimum

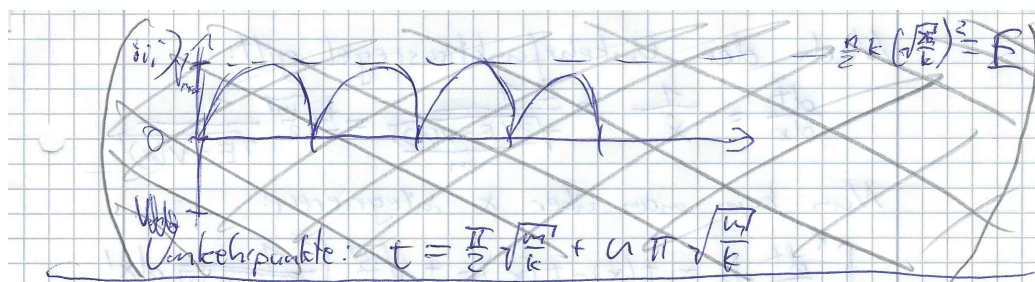
Für kleine Auslenkungen können wir die Taylor-Reihe aus **b)** nutzen, es gilt:

$$\begin{aligned} F(x) = m\ddot{x} &= -kx = -\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha^4}{16\beta^3} x^2 - \frac{\alpha^3}{4\beta^2} x \right) \\ m \cdot \ddot{x} &= -\frac{\alpha^4}{8\beta^3} x + \frac{\alpha^3}{4\beta^2} \\ \ddot{x} &= -\frac{\alpha^4}{8m\beta^3} x + \frac{\alpha^3}{4\beta^2} \end{aligned}$$

Eine mögliche Lösung dieser Dgl. ist:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin \left(\sqrt{\frac{\alpha^4}{8m\beta^3}} t \right) + \frac{\alpha^3}{8\beta^2} t^2 \\ \Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{\alpha^4}{8m\beta^3}} \end{aligned}$$

Aufgabe 6.2



Theo 1 Ü 2.6

a) Es gilt:

$$V(x) = - \int_{x_0}^x F(x') dx' \Rightarrow F(x) = - \frac{dV(x)}{dx} = m \ddot{x}$$

Nun lässt sich mit \dot{x} multiplizieren und über t integrieren:

$$- \frac{dV(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = m \ddot{x} \dot{x}$$

$$- \int \frac{dV(x)}{dt} dt = \int m \ddot{x} \dot{x} dt$$

Das rechte Integral lässt sich durch partielle Integration lösen: $f'(x) = \ddot{x}$, $g(x) = \dot{x}$

$$\int m \ddot{x} \dot{x} dt = [m \dot{x}^2] - \int m \dot{x} \ddot{x} dt$$

$$\Leftrightarrow \int m \ddot{x} \dot{x} dt = \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right]$$

Dies ist bekanntlich die kinetische Energie.

Somit gilt:

$$-V + C_1 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + C_2 = T + C_2$$

$$\Leftrightarrow C_1 - C_2 = T + V = E = \text{konst.}$$

b) Es gilt:

$$T = E - V(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2(E - V(x))}{m}}$$

Nach der Umkehrfunktionsregel gilt:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{2(E-V(x))}{m}}} = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{E-V(x)}}$$

Nun kann man über x integrieren:

$$\int_{x_0}^x \frac{dt}{dx} dx = t(x) - t(x_0) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{E-V(x')}} dx'$$

c) i) Im Folgenden wird das Integral für den genannten Spezialfall berechnet. Hierfür wird zunächst $V(x)$ berechnet:

$$V(x) = - \int_{x_0}^x F(x') dx' = - \int_{x_0}^x -kx' dx' \\ = \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{2} kx_0^2$$

Dies kann nun in das Integral eingesetzt werden:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - (\frac{k}{2}x'^2 - \frac{k}{2}x_0^2)}} = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E' - \frac{k}{2E'}x'^2}} \quad \begin{matrix} E' = E + \frac{k}{2}x_0^2 \\ x = \sqrt{\frac{2E'}{k}} u \end{matrix}$$

Nun können wir wie folgt substituieren:

$$x(u) = \sqrt{\frac{2E'}{k}} \sin(u) \Leftrightarrow u = \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}} x\right)$$

$$= \int_{u(x_0)}^{u(x)} \frac{1}{\sqrt{E'}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E'} \left(\sqrt{\frac{2E'}{k}} \sin(u)\right)^2}} \frac{dx'}{du} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E'}} \int_{u(x_0)}^{u(x)} \sqrt{\frac{2E'}{k}} \frac{\cos(u)}{\sqrt{\cos^2(u)}} du$$

$$= \sqrt{\frac{2}{k}} (u(x) - u(x_0)) = \sqrt{\frac{2}{k}} \left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}} x\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}} x_0\right) \right)$$

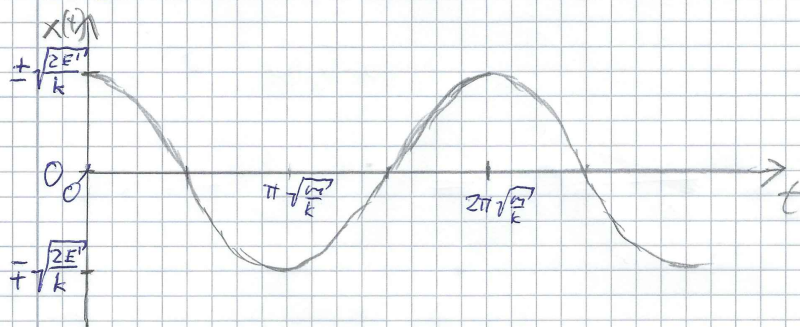
Insgesamt gilt für $t(x)$ somit:

$$* \quad t(x) = \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}} x\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}} x_0\right) \right)$$

ii) ~~Die~~ Umformen auf x :

$$x = \sqrt{\frac{2E'}{k}} \sin\left(\pm \sqrt{\frac{k}{m}} t + \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}} x_0\right)\right)$$

Somit * eine Sinusfunktion mit der Amplitude $\sqrt{\frac{2E'}{k}}$ und einer Phasenverschiebung. Wegen der Anfangsbedingung $x(0)=0$ muss zum Zeitpunkt 0 die kinetische Energie 0 sein, sodass es hier einen Umkehrpunkt ~~geben~~ muss:



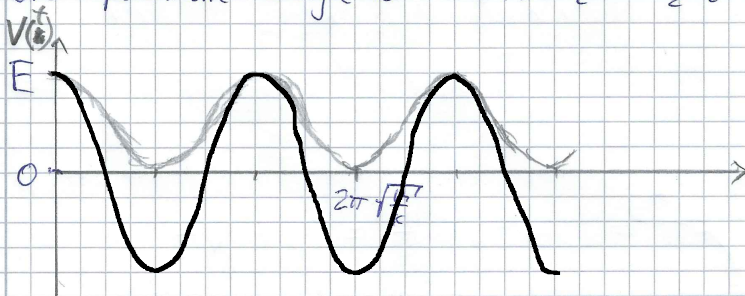
Die Punkte auf der Zeitachse wurden über die Periodendauer berechnet:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

iii) Die Umkehrpunkte der Bewegung sind offensichtlich:

$$n\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad | \quad n \in \mathbb{Z}$$

Die potentielle Energie ist: $V(x) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{k}{2}x_0^2$ **



* Ergänzung 1:

Wegen der Argumentation am Anfang vom 3. eingescannten Blatt gilt:

$$\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x_0\right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

Da gilt $\sin(x \pm \frac{\pi}{2}) = \pm \cos(x)$, lässt sich die Gleichung für x vereinfachen zu (es wurde E' substituiert):

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E + kx_0^2}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Dies ist auch in der ersten Skizze dargestellt.

** Ergänzung 2:

Bitte nur die schwarze, nicht die mit Bleistift gezeichnete Linie betrachten. Die Gleichung geht wie folgt weiter:

$$\frac{k}{2}x^2 - \frac{k}{2}x_0^2 = \frac{k}{2} \left(\sqrt{\frac{2E + kx_0^2}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \right)^2 - \frac{k}{2}x_0^2 \quad (1)$$

$$= E \cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{k}{2}x_0^2(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - 1)^2 \quad (2)$$

$$= E \cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \frac{k}{2}x_0^2 \sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad (3)$$

$$= E \left(\cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \right) \quad (4)$$

Der letzte Umformungsschritt geht ebenfalls aus der Tatsache hervor, dass $\dot{x}(0) = 0$, sodass zum Zeitpunkt 0 die gesamte Energie in der potentiellen Energie stecken muss.

Aufgabe 6.3

Aufgabe 6.4

Berechnen Sie

a)

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{2}{x}y + \frac{\ln x}{x^2} \quad (1)$$

Wir lösen zuerst den homogenen Teil:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{2}{x}y \\ \text{Sep. der Var.:} \\ \frac{dy}{y} &= -\frac{2}{x}dx && | \int \\ \int \frac{dy}{y} &= \int -\frac{2}{x}dx \\ \ln(y) &= -2(\ln(x) + \underline{c}) \\ \ln(y) &= -2\ln(x) - 2\underline{c} && | \ln \text{ auflösen} \\ y &= e^{-2\ln(x)} \cdot e^{-2\underline{c}} && | c := e^{-2\underline{c}} \\ y &= cx^{-2} \end{aligned} \tag{2}$$

Variation der Kons.: $c \rightarrow c(x)$

$$y' = -2\frac{c(x)}{x^2} + c'(x)x^{-2} \tag{3}$$

Setze (2) und (3) in (1) ein:

$$\begin{aligned} -2\frac{c(x)}{x^3} + \frac{c'(x)}{x^2} &= -\frac{2}{x} \cdot \frac{c(x)}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2} \\ \Leftrightarrow \frac{c'(x)}{x^2} &= \frac{\ln(x)}{x^2} \\ \Leftrightarrow c'(x) &= \ln(x) \\ \Rightarrow c(x) &= \int dx \, c'(x) = \int dx \, \ln(x) = x \ln(x) - x + \hat{c} \end{aligned} \tag{4}$$

(4) in (2):

$$\begin{aligned} y &= (x \ln(x) - x + \hat{c}) \cdot \frac{1}{x^2} \\ y &= \frac{\ln(x) - 1}{x} - \frac{\hat{c}}{x^2} \end{aligned}$$

b)

die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = -2xy + 2xe^{-x^2}, \quad y(0) = 2 \quad (1)$$

Wir bestimmen den homogenen Teil:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -2xy \\ \text{Sep. der Var.:} \\ \frac{dy}{y} &= -2x dx & | \int \\ \int dy \frac{1}{y} &= -2 \int dx x \\ \ln(y) &= -x^2 - \hat{c} & | \ln \text{ beseitigen} \\ y &= e^{-x^2 - \hat{c}} \\ y &= e^{-x^2} \cdot e^{-\hat{c}} & | c := e^{-\hat{c}} \\ y &= ce^{-x^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Variation der Kons.: $c \rightarrow c(x)$

$$y' = c'(x) e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} c(x) \quad (3)$$

(2) und (3) in (1):

$$\begin{aligned} c'(x) e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} c(x) &= -2xc(x) e^{-x^2} + 2xe^{-x^2} \\ c'(x) e^{-x^2} &= 2xe^{-x^2} \\ c'(x) &= 2x \\ \Rightarrow c(x) &= \int dx c'(x) = \int dx 2x = x^2 + \hat{c} \end{aligned} \quad (4)$$

(4) in (1) ergibt allg. Lösung für Dgl.:

$$y = (x^2 + \hat{c}) e^{-x^2}$$

Anfangsbed. $y(0) = 2$ einsetzen:

$$\begin{aligned} y(0) &= \hat{c} = 2 \\ \Rightarrow y &= (x^2 + 2) e^{-x^2} \end{aligned}$$