Nach der Umkehrfunktionsregel gilt:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{2(E-V(x))}{m}}} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{E-V(x)}}$$

Nun kann man über x integrieren:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{dx}\,dx = t(x) - t(x_0) = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\sqrt{E-V(x')}}\,dx'$$

c) i) Im Folgenden wird das Integral für den genannten Spezialfall berechnet. Hierfür wird zunächst $V(x)$ berechnet:

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\,dx' = -\int_{x_0}^{x} -kx'\,dx'$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

Dies kann nun in das Integral eingesetzt werden:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{E-\left(\frac{k}{2}x'^2 - \frac{k}{2}x_0^2\right)}} \overset{E' \equiv E + \frac{k}{2}x_0^2}{=} \int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{E'}\sqrt{1-\frac{k}{2E'}x'^2}}$$

Nun können wir wie folgt substituieren:

$$x(u) = \sqrt{\frac{2E'}{k}}\sin(u) \Leftrightarrow u = \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x\right)$$

$$= \int_{u(x_0)}^{u(x)} \frac{1}{\sqrt{E'}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{k}{2E'}\left(\sqrt{\frac{2E'}{k}}\sin(u)\right)^2}}\frac{dx'}{du}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E'}}\int_{u(x_0)}^{u(x)}\sqrt{\frac{2E'}{k}}\frac{\cos(u)}{\sqrt{\cos^2(u)}}\,du$$

$$= \sqrt{\frac{2}{k}}\left(u(x)-u(x_0)\right) = \sqrt{\frac{2}{k}}\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x_0\right)\right)$$

Insgesamt gilt für $t(x)$ somit:

$$t(x) = \pm\sqrt{\frac{m}{k}}\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x_0\right)\right)$$

*

ii) Umformen auf x:

$$x = \sqrt{\frac{2E'}{k}}\sin\left(\pm\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x_0\right)\right)\right)$$