Theo 1

Ü9.1

a) Es wird die homogene Gleichung gelöst:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = f\cos(\eta t)$$

Wir machen den Ansatz $x(t) = e^{\alpha t}$:

$$(\alpha^2 + \alpha c + \omega^2)\cancel{e^{\alpha t}} = 0$$

$$\alpha_{1/2} = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \omega^2} = -\frac{5}{4}\omega \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\omega\right)^2 - \omega^2}$$

$$= \left(-\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}\right)\omega$$

$$\rightarrow x_1 = e^{-\frac{1}{2}\omega t}, \quad x_2 = e^{-2\omega t}$$

Für die allgemeine homogene Lösung kann einfach die allgemeine Linearkombination von den beiden Lösungen genommen werden:

$$x(t) = B e^{-\frac{1}{2}\omega t} + C e^{-2\omega t}$$

b) Logischerweise schwingt der Oszillator in der Frequenz wie die antreibende Kraft. $f\cdot\cos(\eta t)$ lässt sich als $\mathrm{Re}(f e^{i\eta t})$ darstellen. Wir machen den komplexen Ansatz $x(t) = A e^{i\eta t}$ $(A \in \mathbb{C})$ um die DGL im komplexen zu lösen und dann im Endeffekt über den Realteil die reale Lösung zu bekommen. Wir schreiben A als $A = |A| e^{i\varphi}$. Die DGL ergibt:

$$\left(A(-\eta^2 + i\eta c + \omega^2) - f\right)\cancel{e^{i\eta t}} = 0 \qquad (1)$$

$$\rightarrow A = \frac{f}{\omega^2 - \eta^2 + i\eta c} \quad \rightarrow |A| = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2-\eta^2)^2 + \eta^2\omega^2}}$$

Um den Winkel φ zu erhalten, betrachten wir den Imaginärteil von Gleichung (1), der ebenfalls 0 sein muss:

Zunächst wird (1) durch $|A|$ geteilt:

$$(\omega^2 - \eta^2 + i\eta c)e^{i\varphi} - \frac{f}{|A|} = 0$$

$\rightarrow$ Imaginärteil:

$$(\omega^2 - \eta^2)\sin(\varphi) + \eta c \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Mit $\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos(\varphi)$ ergibt das: *

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\eta c}{\eta^2 - \omega^2}\right)$$

Wie man erkennen kann, geht bei $\eta \nearrow \omega$ $\tan(\varphi) \longrightarrow -\infty$, sodass $\varphi \longrightarrow \frac{\pi}{2}$.

Da $(\omega^2 - \eta^2) \to 0$ ~~geht,~~ geht die Amplitude $|A|$ in diesem Fall gegen $\frac{f}{\eta\omega}$, bzw $\frac{f}{\omega^2}$.

c) Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der partiellen Lösung plus der allgemeinen homogenen Lösung. Da wir den Resonanzfall betrachten, gilt ~~die~~ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $|A| = \frac{f}{\omega^2}$: (und $\eta = \omega$)

$$x(t) = \frac{f}{\omega^2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + B e^{-\frac{1}{2}\omega t} + C e^{-2\omega t}$$

Anfangsbedingungen einsetzen:

$$x(0) = 0 = B + C \longrightarrow B = -C$$

(wegen $C = -B$)

$$\dot{x}(0) = 0 = \frac{f\omega}{\omega^2} - \frac{1}{2}B\omega + 2B\omega \rightarrow -C = B = \frac{2}{3}\frac{f}{\omega^2}$$

Somit ist die explizite Lösung:

$$x(t) = \frac{f}{\omega^2}\left(\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}\omega t} - \frac{2}{3}e^{-2\omega t}\right)$$

Bei $t=0$ ~~ist keine~~ besitzt der Oszillator keine Energie, da wegen $x(0)=0$ und $\dot{x}(0)=0$ keine potentielle und keine kinetische Energie vorhanden ist. Bei $t \to \infty$ gilt für x:

$$x = \frac{f}{\omega^2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Die Energie hier kann einfach über die maximale kinetische Energie berechnet werden und ist somit $\frac{1}{2}m\dot{x}_{max}^2 = \frac{1}{2}m\frac{f^2}{\omega^2}$.

Energie ist nicht erhalten, da der Oszillator von einer externen Kraft angetrieben wird.

---

* Der Realteil von x der der reellen partikulären Lösung entspricht, ist nach unserem Ansatz logischerweise:

$$x(t) = |A|\cos(\eta t + \varphi)$$