$\sum$	A1.1	A1.2	A1.3	A1.4

Aufgabe 1.1

(a) Kettenregel liefert:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

(b) Kettenregel liefert:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+a}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}$$

(c) Produktregel und Kettenregel liefert:

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+1} - \frac{x^2}{(\sqrt{x^2+1}+1)^2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x(\sqrt{x^2+1}+1)\sqrt{x^2+1} - x^3}{(\sqrt{x^2+1}+1)^2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x(x^2+1+2\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}+1)^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

(d) Regel für Differentiation der Umkehrfunktion liefert für $y = \sin^{-1}(x)$, sowie bei (1) die trigonometrische Identität:

$$\arcsin'(x) = (\sin^{-1})'(x) = \frac{1}{\sin'(y)} = \frac{1}{\cos(y)} \overset{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(e) Eigenschaften der Exponentialfunktion liefern sofort:

$$f(x) = (x^x)^x = \left(e^{\ln(x)\cdot x}\right)^x = e^{\ln(x)\cdot x^2}.$$

Ketten- sowie Produktregel liefern dann:

$$f'(x) = \left(\ln(x)\cdot x^2\right)' \cdot e^{\ln(x)\cdot x^2} = x(2\ln(x)+1)\cdot(x^x)^x.$$

(f) Eigenschaften der Exponentialfunktion liefern sofort:

$$f(x) = x^{(x^x)} = e^{\ln(x)\left(e^{\ln(x)\cdot x}\right)}.$$

Ketten- und Produktregel liefern:

$$\left(e^{\ln(x)\cdot x}\right)' = (\ln(x)+1)e^{\ln(x)}.$$

Mit Ketten- und Produktregel erhalten wir also:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\ln(x)\left(e^{\ln(x)\cdot x}\right)} \cdot \left[\frac{1}{x}e^{\ln(x)x} + \ln(x)\left(\ln(x)+1\right)e^{\ln(x)x}\right] \\ &= x^{(x^x)} \cdot \left[x^{x-1} + \ln(x)(\ln(x)+1)x^x\right]. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.2

Wird im Folgenden durch Substitution integriert, so wird stets und lediglich die Substitution angegeben (stets der Form $u = g(x)$). Da lediglich nach **einer** Stammfunktion gefragt wird, verzichten wir einfach auf die additive Konstante welche Stammfunktionen unterscheidet.

(a) Linearität des Integrals sowie bekannte Stammfunktionen liefern:

$$\int 2x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x} + e^{7x} \mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + \ln(x) + \frac{1}{7}e^{7x}.$$

(b) Zweifache partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin(x) \mathrm{d}x &= -x^2 \cos(x) + \int 2x \cos(x) \mathrm{d}x \\ &= -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) - \int 2 \sin(x) \mathrm{d}x \\ &= -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) \end{aligned}$$

(c) Substitution durch $u = x^2$ liefert:

$$\int x \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int 2x \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \cos(u) \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \sin(u) = \frac{1}{2} \sin\left(x^2\right).$$

(d) Substitution durch $u = \frac{x}{a}$ liefert:

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \frac{\mathrm{d}x}{a} = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + u^2} \mathrm{d}u = \frac{1}{a} \arctan(u) = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

(e) Zunächst partielle Integration und dann Substitution mit $u = x^2 + 1$ liefert:

$$\begin{aligned} \int 1 \cdot \arctan(x) \mathrm{d}x &= x \arctan(x) - \int x \frac{1}{1 + x^2} \mathrm{d}x = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + x^2} 2x \mathrm{d}x \\ &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} \mathrm{d}u = x \arctan(u) - \frac{1}{2} \ln(u) = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + 1\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 1.3

(a) Wir erhalten durch integrieren:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t')\mathrm{d}t' = 0 + \int_{0}^{t} a_0 \cos\big(\omega t'\big)\mathrm{d}t' = \frac{a_0}{\omega}\sin\big(\omega t'\big)\Big|_0^t = \frac{a_0}{\omega}\sin(\omega t).$$

Weiteres integrieren liefert:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')\mathrm{d}t' = x_0 + \int_{0}^{t} \frac{a_0}{\omega}\sin\big(\omega t'\big)\mathrm{d}t' = x_1 - \left[\frac{a_0}{\omega^2}\cos\big(\omega t'\big)\right]_0^t = x_0 - \frac{a_0}{\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{a_0}{\omega^2}.$$

(b) Wir rechnen aus:

$$\begin{aligned}
\overline{v}(T) &= \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{a_0}{\omega}\sin(\omega t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{T}\left[\frac{a_0}{\omega^2}\cos\big(\omega t'\big)\right]_0^T = \frac{a_0}{\omega^2}\left(\frac{\cos(\omega T)}{T} - \frac{1}{T}\right)\\
\overline{x}(T) &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \left(x_0 + \frac{a_0}{\omega^2}\right) - \frac{a_0}{\omega^2}\cos(\omega t)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{T}\left[\left(x_0 + \frac{a_0}{\omega^2}\right)t - \frac{a_0}{\omega^3}\sin(\omega t)\right]_0^T = x_0 + \frac{a_0}{\omega^2} - \frac{a_0}{\omega^3}\cdot\frac{\sin(\omega T)}{T}.
\end{aligned}$$

Da folgende Zähler beschränkt bleiben und im Nenner $T \to \infty$ erhalten wir:

$$\frac{\cos(\omega T)}{T},\ \frac{1}{T},\ \frac{\sin(\omega T)}{T} \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Daraus folgt sofort:

$$\overline{v}(T) \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \overline{x}(T) \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} x_0 + \frac{a_0}{\omega^2}.$$

Aufgabe 1.4

Sei V die Menge alle reellwertigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$. Wir definieren folgende Operationen auf V:

$$\begin{aligned} +\colon V \times V \to V, &\quad (f,g) \mapsto f+g, &&\text{mit } (f+g)(x) \coloneqq f(x)+g(x) \in \mathbb{R}, \\ \cdot\colon \mathbb{R} \times V \to V, &\quad (a,f) \mapsto a \cdot f, &&\text{mit } (a \cdot f)(x) \coloneqq a \cdot f(x) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1. Wir rechnen die Axiome eines Vektorraums nach. Seien $f, g, h \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Es gilt $f = g$ genau dann wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = g(x)$. Daher reicht folgendes aus:

   - Assoziativität:
   $$(f + (g+h))(x) = f(x)+(g+h)(x) = f(x)+g(x)+h(x) = (f+g)(x)+h(x) = ((f+g)+h)(x).$$
   - Kommutativität:
   $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x).$$
   - Die Existenz eines Null: $c(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Null in V, denn:
   $$(f+c)(x) = f(x) + c(x) = f(x) + 0 = f(x).$$
   - Distributivität bzgl. $+$ in V:
   $$\begin{aligned}(\alpha(f+g))(x) &= \alpha \cdot (f+g)(x) = \alpha(f(x)+g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) \\ &= (\alpha f + \alpha g)(x).\end{aligned}$$
   - Distributivität bzgl. $\cdot$ in $\mathbb{R}$:
   $$((\alpha+\beta)f)(x) = (\alpha+\beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f + \beta f)(x).$$
   - Assoziativität der Multiplikation:
   $$(\alpha(\beta f))(x) = \alpha \cdot (\beta f)(x) = \alpha\beta f(x) = ((\alpha\beta)f)(x).$$
   - Multiplikation mit 1:
   $$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x).$$

2. Die Menge $S \subset V$ der symmetrischen Funktionen bilden mit der vom Vektorraum V geerbten Struktur einen Vektorraum. Es genügt nachzurechnen, dass $c = 0 \in S$ sowie, dass die Operationen $+$ und $\cdot$ nicht aus S rausführen, allen anderen Axiome ergeben sich aus der geerbten Struktur:

   - $c \in S$ wegen: $c(x) = 0 = c(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
   - $f, g \in S$, dann auch $f + g \in S$, denn:
   $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x).$$
   - $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in S$, dann auch $\alpha f \in S$, denn:
   $$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha f(-x) = (\alpha f)(-x).$$

   Die Menge der monoton steigenden Funktionen $W \subset V$ ist kein Vektorraum mit der Struktur von V, denn: es ist $f \in W$ wobei $f(x) = x$, den für $x \in \mathbb{R}$ gilt für alle $y > x$ sicherlich auch $f(y) = y \geq x = f(x)$. Jedoch ist $-f \notin W$, denn: $(-f)(y) = -y < -x = (-f)(x)$, also ist $-f$ streng monoton fallend auf ganz $\mathbb{R}$. Somit ist $\cdot$ nicht wohldefiniert auf W, W also sicher kein Vektorraum mit $+$ und $\cdot$ wie oben.