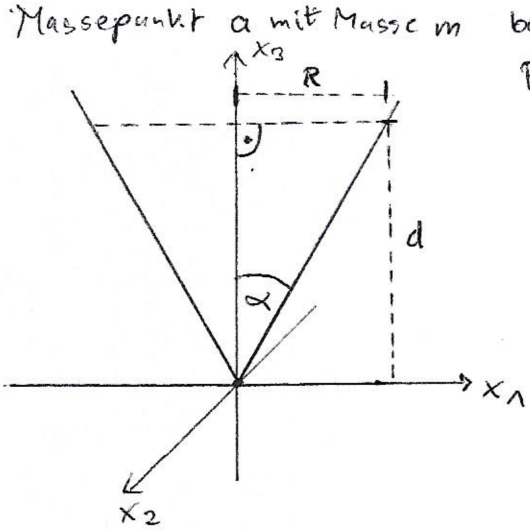
(10.1) | Theo 1

Massepunkt a mit Masse m bew. sich mit $\omega = const$ Winkelgeschw. wie in Skizzen und Aufgabenstellung.



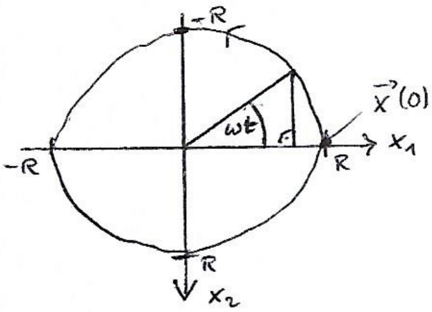
R Radius der Kreisbahn, geom. gilt:

$$\alpha = \tan\left(\frac{R}{d}\right) \Rightarrow \arctan(\alpha) = \frac{R}{d} \Rightarrow d \cdot \arctan(\alpha) = R$$

Sei der Ausgangspunkt bei $t=0$ in: $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$

Geometrisch erhalten wir für die Kreisbahn von a:

$$\vec{x}(t) = d \begin{pmatrix} \arctan(\alpha) \cdot \cos(\omega t) \\ -\arctan(\alpha) \cdot \sin(\omega t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{x}}(t) = -d\omega \arctan(\alpha) \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$



Für den Drehimpuls eines Massepunkts gilt: $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} = m(\vec{x} \times \dot{\vec{x}})$

Mit $\vec{L}_i = m \varepsilon^{ijk} \vec{x}_j \dot{\vec{x}}_k$ gilt:

$$\vec{L} = m\omega d^2 \begin{pmatrix} 0 + \arctan(\alpha)\cos(\omega t) \\ -\arctan(\alpha)\sin(\omega t) - 0 \\ -\arctan(\alpha)^2 \cos(\omega t)^2 - \arctan(\alpha)^2 \sin(\omega t)^2 \end{pmatrix}$$

$$= m\omega d^2 \arctan(\alpha) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \\ -\arctan(\alpha) \end{pmatrix}$$

Insb. $|\vec{L}| = m\omega d^2 \arctan(\alpha) \sqrt{\underbrace{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}_{=1} + \arctan^2(\alpha)}$

$$= m\omega d^2 \arctan(\alpha) \sqrt{1 + \arctan^2(\alpha)}$$

Für $\vec{\omega} = -\omega \vec{e}_3$ erhalten wir $\dot{\vec{x}} = \vec{\omega} \times \vec{x}$. Insb. gilt $\vec{x} \perp \vec{\omega} \times \vec{x} \Rightarrow \vec{x} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x}) = 0$

Und es gilt: (wir benutzen $\dot{\vec{\omega}} = 0$ wg. $\dot{\omega} = 0$) analog $\vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x}) = 0$

$$\frac{\dot{\vec{L}}}{m} = (\vec{x} \times \dot{\vec{x}})^{\cdot} = (\vec{x} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}))^{\cdot} = (\vec{x}^2 \vec{\omega} - (\vec{x} \cdot \vec{\omega}) \vec{x})^{\cdot}$$

$$= 2(\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}) \vec{\omega} + (\vec{x} \cdot \vec{x}) \underbrace{\dot{\vec{\omega}}}_{=0} - (\vec{x} \cdot \underbrace{\dot{\vec{\omega}}}_{=0}) \vec{x} - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{\omega}) \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{\omega}) \cdot \dot{\vec{x}}$$

$$= 2(\underbrace{\vec{x} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x})}_{=0}) \vec{\omega} - (\underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{x}) \cdot \vec{\omega}}_{=0}) \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{\omega}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x})$$

$$= -(\vec{x} \cdot \vec{\omega})(\vec{\omega} \times \vec{x})$$

Also $\dot{\vec{L}} \perp \vec{\omega}$ woraus $\dot{\vec{L}}_3 = 0$, also ist die 3. Komponente des Drehimpuls $\vec{L}$ erhalten.
Insbesondere folgt aus $\dot{\vec{L}}_3 = 0$ und $\dot{\vec{L}} \perp \vec{x}$, dass $\dot{\vec{L}}_1 \neq 0 \neq \dot{\vec{L}}_2$ aus der Gl. von $\vec{x}$.
Also sind $\vec{L}_1$ und $\vec{L}_2$ nicht erhalten.