$\sum$	A5.1	A5.2	A5.3	A5.4	A5.5

Aufgabe 6.1

+Betrachten Sie das eindimensionale Potential

$$V(x) = -\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2},\ \alpha, \beta > 0$$

für $x > 0$.

a)

Bestimmen Sie das Minimum des Potentials.

Wir bestimmen die Nullstelle(n) der ersten Ableitung des Potentials:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}\right) &= \frac{\alpha}{x^2} - 2\frac{\beta}{x^3} \\
0 &= \frac{\alpha}{x^2} - 2\frac{\beta}{x^3} \\
\Rightarrow x &= 2\frac{\beta}{\alpha}
\end{aligned}$$

Da dies auch ein Maximum des Potentials sein könnte, bestimmen wir noch die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\alpha}{x^2} - 2\frac{\beta}{x^3}\right) &= -2\frac{\alpha}{x^3} + 6\frac{\beta}{x^4} \\
\text{Setze } x = 2\frac{\beta}{\alpha} & \\
&= 2\frac{\alpha}{\left(2\frac{\beta}{\alpha}\right)^3} + 6\frac{\beta}{\left(2\frac{\beta}{\alpha}\right)^4} \\
&= 3\frac{\alpha^4}{8\beta^3} - 2\frac{\alpha^4}{8\beta^3} \\
&= \frac{\alpha^4}{8\beta^3} > 0
\end{aligned}$$

Da diese an der Stelle $2\frac{\beta}{\alpha}$ größer als 0 ist, handelt es sich um ein Minimum.
Somit liegt das Minimum des Potentials bei $2\frac{\beta}{\alpha}$.

b)

Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung des Potentials bis einschließlich der zweiten Ordnung um das Minimum.

Wir setzen einfach die Ableitungen aus **a)** in die Formel für die Taylor-Reihe ein, dabei beachten wir, das $V^{(1)}\left(2\frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$ und dieser Teil schon wegfällt:

$$\begin{aligned}
V(x)\big|_{2\frac{\beta}{\alpha}} &= -\frac{\alpha^2}{4\beta} + 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^4}{8\beta^3}\cdot\left(x - 2\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \\
&= -\frac{\alpha^2}{4\beta} + \frac{\alpha^4}{16\beta^3}x^2 - \frac{\alpha^3}{4\beta^2}x + \frac{\alpha^2}{4\beta} \\
&= \frac{\alpha^4}{16\beta^3}x^2 - \frac{\alpha^3}{4\beta^2}x
\end{aligned}$$

c)

Berechnen Sie die Kreisfrequenz ω der Schwingung eines Teilchens der Masse m bei kleinen Auslenkungen um seine Ruhelage im Minimum

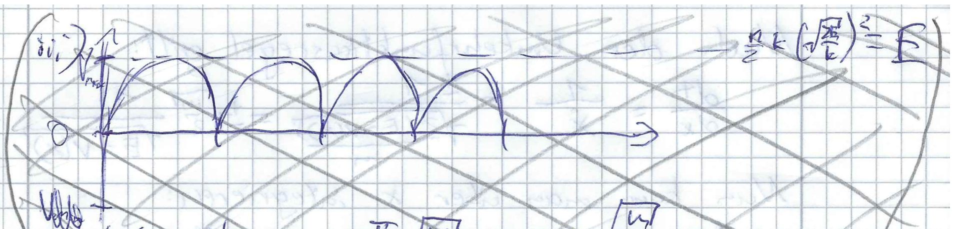
Für kleine Auslenkungen können wir die Taylor-Reihe aus **b)** nutzen, es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x) = m\ddot{x} = -kx = -\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\alpha^4}{16\beta^3}x^2 - \frac{\alpha^3}{4\beta^2}x\right) \\
m \cdot \ddot{x} &= -\frac{\alpha^4}{8\beta^3}x + \frac{\alpha^3}{4\beta^2} \\
\ddot{x} &= -\frac{\alpha^4}{8m\beta^3}x + \frac{\alpha^3}{4\beta^2}
\end{aligned}$$

Eine mögliche Lösung dieser Dgl. ist:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sin\left(\sqrt{\frac{\alpha^4}{8m\beta^3}}\ t\right) + \frac{\alpha^3}{8\beta^2}t^2 \\
\Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{\alpha^4}{8m\beta^3}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.2



Umkehrpunkte: $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} + n\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Theo 1 Ü 2.6

a) Es gilt:

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\,dx' \Longrightarrow F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = m\ddot{x}$$

Nun lässt sich mit $\dot{x}$ multiplizieren und über t integrieren:

$$-\frac{dV(x)}{dx}\frac{dx}{dt} = m\ddot{x}\dot{x}$$

$$-\int \frac{dV(x)}{dt}\,dt = \int m\ddot{x}\dot{x}\,dt$$

Das rechte Integral lässt sich durch partielle Integration lösen: $f'(x) = \ddot{x}$, $g(x) = \dot{x}$

$$\int m\ddot{x}\dot{x}\,dt = \left[m\dot{x}^2\right] - \int m\dot{x}\ddot{x}\,dt$$

$$\Longleftrightarrow \int m\ddot{x}\dot{x}\,dt = \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right]$$

Dies ist bekanntlich die kinetische Energie.
Somit gilt:

$$-V + C_1 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + C_2 = T + C_2$$

$$\Longleftrightarrow C_1 - C_2 = T + V = E = \text{konst.}$$

b) Es gilt:

$$T = E - V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\Longrightarrow \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2(E - V(x))}{m}}$$

Nach der Umkehrfunktionsregel gilt:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{2(E-V(x))}{m}}} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{E-V(x)}}$$

Nun kann man über x integrieren:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{dx}\,dx = t(x) - t(x_0) = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\sqrt{E-V(x')}}\,dx'$$

c) i) Im Folgenden wird das Integral für den genannten Spezialfall berechnet. Hierfür wird zunächst $V(x)$ berechnet:

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\,dx' = -\int_{x_0}^{x} -kx'\,dx'$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

Dies kann nun in das Integral eingesetzt werden:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{E-\left(\frac{k}{2}x'^2-\frac{k}{2}x_0^2\right)}} \overset{E'\equiv E+\frac{k}{2}x_0^2}{=} \int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{E'}\sqrt{1-\frac{k}{2E'}x'^2}}$$

Nun können wir wie folgt substituieren:

$$x(u) = \sqrt{\frac{2E'}{k}}\sin(u) \iff u = \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x\right)$$

$$= \int_{u(x_0)}^{u(x)}\frac{1}{\sqrt{E'}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{k}{2E'}\left(\sqrt{\frac{2E'}{k}}\sin(u)\right)^2}}\frac{dx'}{du}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E'}}\int_{u(x_0)}^{u(x)}\sqrt{\frac{2E'}{k}}\frac{\cos(u)}{\sqrt{\cos^2(u)}}\,du$$

$$= \sqrt{\frac{2}{k}}\left(u(x)-u(x_0)\right) = \sqrt{\frac{2}{k}}\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x_0\right)\right)$$

Insgesamt gilt für $t(x)$ somit:

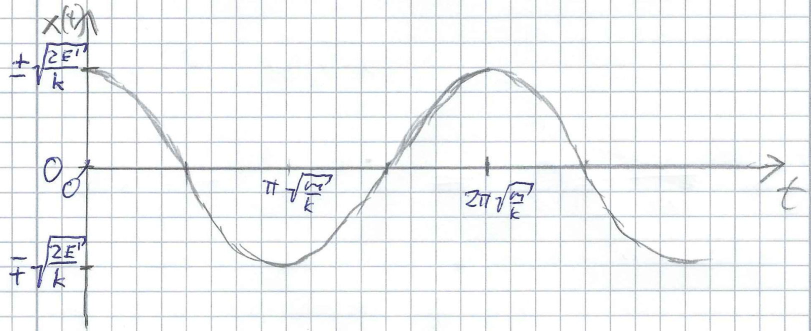
$$* \quad t(x) = \pm\sqrt{\frac{m}{k}}\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x_0\right)\right)$$

ii) Umformen auf x:

$$x = \sqrt{\frac{2E'}{k}}\sin\left(\pm\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x_0\right)\right)\right)$$

Somit* eine Sinusfunktion mit der Amplitude $\sqrt{\frac{2E'}{k}}$ und einer Phasenverschiebung. Wegen der Anfangsbedingung $\dot{x}(0) = 0$ muss zum Zeitpunkt 0 die kinetische Energie 0 sein, sodass es hier einen Umkehrpunkt geben muss:

*ist $x(t)$



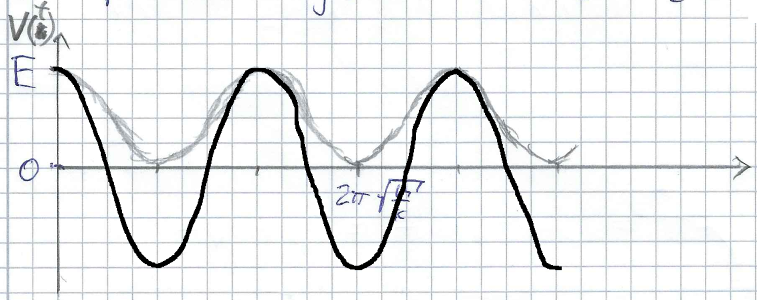
Die Punkte auf der Zeitachse wurden über die Periodendauer berechnet:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

iii) Die Umkehrpunkte der Bewegung sind offensichtlich:

$$n\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \Big| \quad n \in \mathbb{Z}$$

Die potentielle Energie ist: $V(x(t)) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{k}{2}x_0^2$ **



* Ergänzung 1:
Wegen der Argumentation am Anfang vom 3. eingescannten Blatt gilt:

$$\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x_0\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

Da gilt $\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos(x)$, lässt sich die Gleichung für x vereinfachen zu (es wurde E' resubstituiert):

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E + kx_0^2}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Dies ist auch in der ersten Skizze dargestellt.
** Ergänzung 2:
Bitte nur die schwarze, nicht die mit Bleistift gezeichnete Linie betrachten. Die Gleichung geht wie folgt weiter:

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2}x^2 - \frac{k}{2}x_0^2 &= \frac{k}{2}\left(\sqrt{\frac{2E + kx_0^2}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right)^2 - \frac{k}{2}x_0^2 && (1)\\
&= E\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)^2 + \frac{k}{2}x_0^2(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - 1)^2 && (2)\\
&= E\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)^2 - \frac{k}{2}x_0^2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)^2 && (3)\\
&= E\left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)^2 - \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)^2\right) && (4)
\end{aligned}$$

Der letzte Umformungsschritt geht ebenfalls aus der Tatsache hervor, dass $\dot{x}(0) = 0$, sodass zum Zeitpunkt 0 die gesamte Energie in der potentiellen Energie stecken muss.

Aufgabe 6.3

Aufgabe 6.4

Berechnen Sie

a)

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{2}{x}y + \frac{\ln x}{x^2} \tag{1}$$

Wir lösen zuerst den homogenen Teil:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{2}{x}y$$

Sep. der Var.:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{2}{x}\mathrm{d}x \qquad \Big| \int$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -\frac{2}{x}\mathrm{d}x$$

$$\ln(y) = -2\left(\ln(x) + \underline{c}\right)$$

$$\ln(y) = -2\ln(x) - 2\underline{c} \qquad |\ln \text{ auflösen}$$

$$y = e^{-2\ln(x)} \cdot e^{-2\underline{c}} \qquad |c := e^{-2\underline{c}}$$

$$y = cx^{-2} \tag{2}$$

Variation der Kons.: $c \to c(x)$

$$y' = -2\frac{c(x)}{x^2} + c'(x)\,x^{-2} \tag{3}$$

Setze (2) und (3) in (1) ein:

$$-2\frac{c(x)}{x^3} + \frac{c'(x)}{x^2} = -\frac{2}{x} \cdot \frac{c(x)}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c'(x)}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow c'(x) = \ln(x)$$

$$\Rightarrow c(x) = \int \mathrm{d}x\ c'(x) = \int \mathrm{d}x\ \ln(x) = x\ln(x) - x + \hat{c} \tag{4}$$

(4) in (2):

$$y = (x\ln(x) - x + \hat{c}) \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{\ln(x) - 1}{x} - \frac{\hat{c}}{x^2}$$

b)

die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = -2xy + 2xe^{-x^2},\ y(0) = 2 \tag{1}$$

Wir bestimmen den homogenen Teil:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -2xy \\
\text{Sep. der Var.:} & \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -2x\mathrm{d}x && \Big| \int \\
\int \mathrm{d}y\ \frac{1}{y} &= -2\int \mathrm{d}x\ x \\
\ln(y) &= -x^2 - \hat{c} && |\text{ln beseitigen} \\
y &= e^{-x^2-\hat{c}} \\
y &= e^{-x^2} \cdot e^{-\hat{c}} && |c := e^{-\hat{c}} \\
y &= ce^{-x^2} && (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Variation der Kons.: } c \to c(x) & \\
y' &= c'(x)\, e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} c(x) && (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(2) und (3) in (1):} & \\
c'(x)\, e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} &= -2xc(x)\, e^{-x^2} + 2xe^{-x^2} \\
c'(x)\, e^{-x^2} &= 2xe^{-x^2} \\
c'(x) &= 2x \\
\Rightarrow c(x) &= \int \mathrm{d}x\ c'(x) = \int \mathrm{d}x\ 2x = x^2 + \hat{c} && (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(4) in (1) ergibt allg. Lösung für Dgl.:} & \\
y &= \left(x^2 + \hat{c}\right) e^{-x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Anfangsbed. } y(0) = 2 \text{ einsetzen:} & \\
y(0) &= \hat{c} = 2 \\
\Rightarrow y &= \left(x^2 + 2\right) e^{-x^2}
\end{aligned}$$