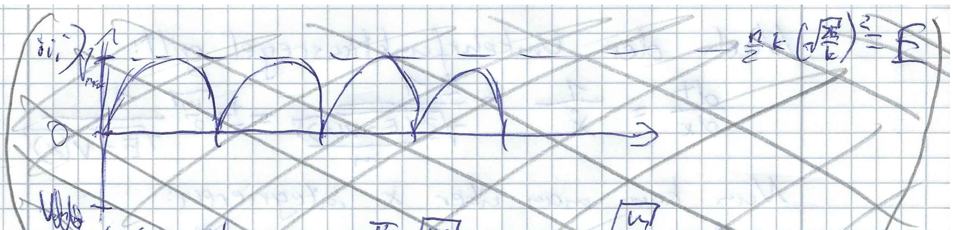
Nico Haaf, Tobias Leander Leonhard, Simon Skade

$\sum$	A5.1	A5.2	A5.3	A5.4	A5.5

Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2



~~Umkehrpunkte: $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} + n\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$~~

Theo 1 Ü 2.6

a) Es gilt:

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\,dx' \implies F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = m\ddot{x}$$

Nun lässt sich mit $\dot{x}$ multiplizieren und über t integrieren:

$$-\frac{dV(x)}{\cancel{dx}}\cdot\frac{\cancel{dx}}{dt} = m\ddot{x}\dot{x}$$

$$-\int \frac{dV(x)}{dt}\,dt = \int m\ddot{x}\dot{x}\,dt$$

Das rechte Integral lässt sich durch partielle Integration lösen: $f'(x) = \ddot{x}$, $g(x) = \dot{x}$

$$\int m\ddot{x}\dot{x}\,dt = \left[m\dot{x}^2\right] - \int m\dot{x}\ddot{x}\,dt$$

$$\iff \int m\ddot{x}\dot{x}\,dt = \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right]$$

Dies ist bekanntlich die kinetische Energie.

Somit gilt:

$$-V + C_1 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + C_2 = T + C_2$$

$$\iff C_1 - C_2 = T + V = E = \text{konst.}$$

b) Es gilt:

$$T = E - V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\implies \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2(E - V(x))}{m}}$$

Nach der Umkehrfunktionsregel gilt:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{2(E-V(x))}{m}}} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{E-V(x)}}$$

Nun kann man über x integrieren:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{dx}\,dx = t(x)-t(x_0) = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\sqrt{E-V(x')}}\,dx'$$

c) i) Im Folgenden wird das Integral für den genannten Spezialfall berechnet. Hierfür wird zunächst $V(x)$ berechnet:

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x}F(x')\,dx' = -\int_{x_0}^{x}-kx'\,dx'$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

Dies kann nun in das Integral eingesetzt werden:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{E-\left(\frac{k}{2}x'^2-\frac{k}{2}x_0^2\right)}} \overset{E' \equiv E+\frac{k}{2}x_0^2}{=} \int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{E'}\sqrt{1-\frac{k}{2E'}x'^2}}$$

Nun können wir wie folgt substituieren:

$$x(u) = \sqrt{\frac{2E'}{k}}\sin(u) \iff u = \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x\right)$$

$$= \int_{u(x_0)}^{u(x)}\frac{1}{\sqrt{E'}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{k}{2E'}\left(\sqrt{\frac{2E'}{k}}\sin(u)\right)^2}}\frac{dx'}{du}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E'}}\int_{u(x_0)}^{u(x)}\sqrt{\frac{2E'}{k}}\frac{\cos(u)}{\sqrt{\cos^2(u)}}\,du$$

$$= \sqrt{\frac{2}{k}}\left(u(x)-u(x_0)\right) = \sqrt{\frac{2}{k}}\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x\right)-\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x_0\right)\right)$$

Insgesamt gilt für $t(x)$ somit:

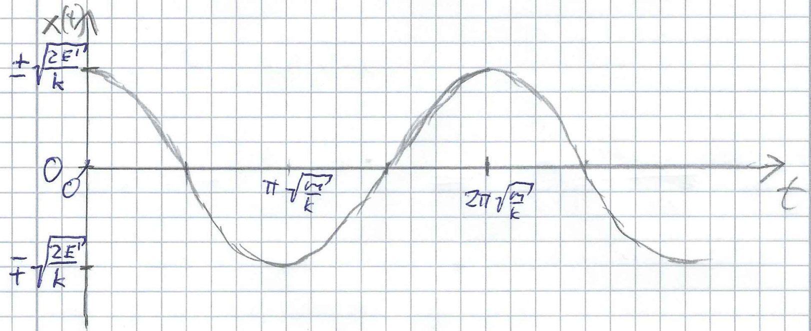
$$t(x) = \pm\sqrt{\frac{m}{k}}\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x\right)-\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x_0\right)\right)$$

ii) Umformen auf x:

$$x = \sqrt{\frac{2E'}{k}}\sin\left(\pm\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E'}}x_0\right)\right)\right)$$

Somit *eine Sinusfunktion mit der Amplitude $\sqrt{\frac{2E'}{k}}$ und einer Phasenverschiebung. Wegen der Anfangsbedingung $\dot{x}(0)=0$ muss zum Zeitpunkt 0 die kinetische Energie 0 sein, sodass es hier einen Umkehrpunkt geben muss:

*ist $x(t$



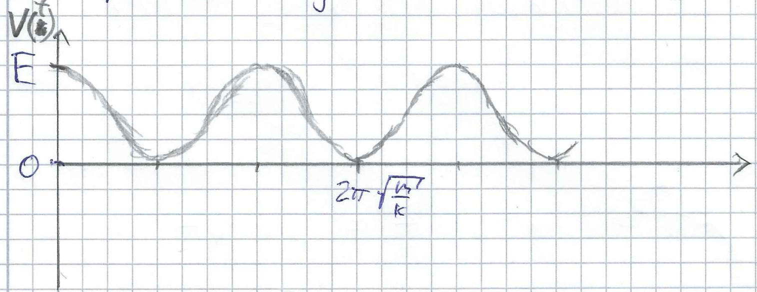
Die Punkte auf der Zeitachse wurden über die Periodendauer berechnet:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

iii) Die Umkehrpunkte der Bewegung sind offensichtlich:

$$n\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \Big| \; n \in \mathbb{Z}$$

Die potentielle Energie ist: $V(x(t)) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{k}{2}x_0^2 = E\cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$



Aufgabe 6.3

Aufgabe 6.4