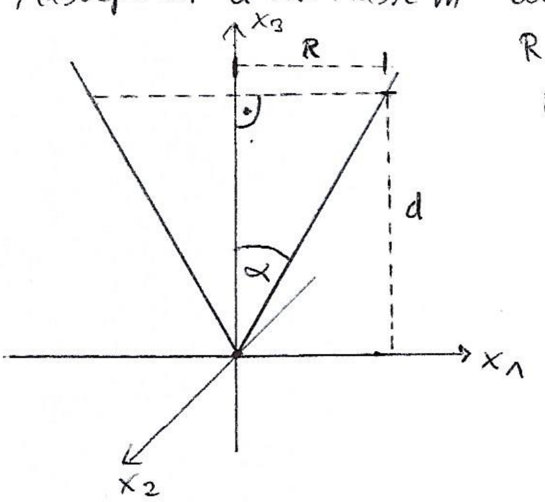
$\sum$	A10.1	A10.2	A10.3	A10.4	A10.5

Aufgabe 10.1

(10.1) Theo1

Massepunkt a mit Masse m bew. sich mit $\omega = const$ Winkelgeschw. wie in Skizzen und Aufgabenstellung.



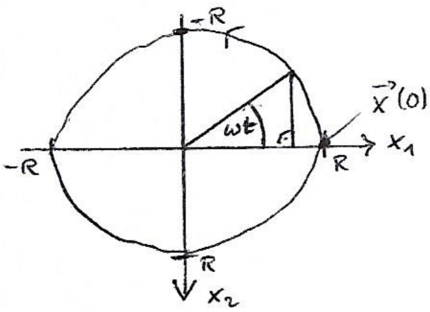
R Radius der Kreisbahn, geom. gilt:

$$\alpha = \tan\left(\frac{R}{d}\right) \Rightarrow \arctan(\alpha) = \frac{R}{d} \Rightarrow d\cdot\arctan(\alpha) = R$$

Sei der Ausgangspunkt bei $t=0$ in: $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$

Geometrisch erhalten wir für die Kreisbahn von a:

$$\vec{x}(t) = d\begin{pmatrix} \arctan(\alpha)\cdot\cos(\omega t) \\ -\arctan(\alpha)\cdot\sin(\omega t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{x}}(t) = -d\omega\arctan(\alpha)\begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$



Für den Drehimpuls eines Massepunkts gilt: $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} = m(\vec{x} \times \dot{\vec{x}})$

Mit $\vec{L}_i = m\varepsilon^{ijk}\vec{x}_j\dot{\vec{x}}_k$ gilt:

$$\vec{L} = m\omega d^2 \begin{pmatrix} 0 + \arctan(\alpha)\cos(\omega t) \\ -\arctan(\alpha)\sin(\omega t) - 0 \\ -\arctan(\alpha)^2\cos(\omega t)^2 - \arctan(\alpha)^2\sin(\omega t)^2 \end{pmatrix}$$

$$= m\omega d^2\arctan(\alpha)\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \\ -\arctan(\alpha) \end{pmatrix}$$

Insb. $|\vec{L}| = m\omega d^2\arctan(\alpha)\sqrt{\underbrace{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}_{=1} + \arctan^2(\alpha)}$

$$= m\omega d^2\arctan(\alpha)\sqrt{1 + \arctan^2(\alpha)}$$

Für $\vec{\omega} = -\omega\vec{e}_3$ erhalten wir $\dot{\vec{x}} = \vec{\omega} \times \vec{x}$. Insb. gilt $\vec{x} \perp \vec{\omega} \times \vec{x} \Rightarrow \vec{x}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{x}) = 0$

Und es gilt: (wir benutzen $\dot{\vec{\omega}} = 0$ bzw. $\dot{\omega} = 0$) analog $\vec{\omega}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{x}) = 0$

$$\frac{\dot{\vec{L}}}{m} = (\vec{x} \times \dot{\vec{x}})^\circ = (\vec{x} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}))^\circ = (\vec{x}^2\vec{\omega} - (\vec{x}\cdot\vec{\omega})\vec{x})^\circ$$

$$= 2(\vec{x}\cdot\dot{\vec{x}})\vec{\omega} + (\vec{x}\cdot\vec{x})\underbrace{\dot{\vec{\omega}}}_{=0} - (\vec{x}\cdot\underbrace{\dot{\vec{\omega}}}_{=0})\vec{x} - (\dot{\vec{x}}\cdot\vec{\omega})\vec{x} - (\vec{x}\cdot\vec{\omega})\cdot\dot{\vec{x}}$$

$$= 2(\underbrace{\vec{x}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{x})}_{=0})\vec{\omega} - (\underbrace{(\vec{\omega}\times\vec{x})\cdot\vec{\omega}}_{=0})\vec{x} - (\vec{x}\cdot\vec{\omega})\cdot(\vec{\omega}\times\vec{x})$$

$$= -(\vec{x}\cdot\vec{\omega})(\vec{\omega}\times\vec{x})$$

Also $\dot{\vec{L}} \perp \vec{\omega}$ woraus $\dot{\vec{L}}_3 = 0$, also ist die 3.-Komponente des Drehimpuls $\vec{L}$ erhalten. Insbesondere folgt aus $\dot{\vec{L}}_3 = 0$ und $\dot{\vec{L}} \perp \vec{x}$, dass $\dot{\vec{L}}_1 \neq 0 \neq \dot{\vec{L}}_2$ aus der Gl. von $\vec{x}$. Also sind $\vec{L}_1$ und $\vec{L}_2$ nicht erhalten.

Aufgabe 10.2 Bei Aufgabe a) ist $s = l$ die Seitenlänge des Quadrats. Ich habe gedacht das Quadrat selbst hätte eine homogene Massenverteilung, und nicht, dass nur Punktmassen an den Ecken sind, was mir erst am Ende aufgefallen ist. Ich hatte leider keine Zeit mehr die Lösung zu ändern.

Theo 1

Ü 10.2 Es wird zunächst Aufgabe b) und dann a) dokumentiert, da in der a) Erkenntnisse aus der b) verwendet werden.

b) Es wird einzeln betrachtet, ob die Matrix ein Trägheitstensor sein kann:

~~(i) Da $0 = I^{13} = \sum_a m_a(-\bar{r}_a^3 \bar{r}_a^1)$, muss (da $m \neq 0$) wegen dem Satz des Nullprodukts $\bar{r}_a^3 = 0$ oder $\bar{r}_a^1 = 0$,~~

(i) Kann einen Trägheitstensor darstellen. Ich hab auf die Schnelle keinen Körper gefunden, der diesen Trägheitstensor besitzt.

(ii) Kann kein Trägheitstensor sein, da gelten muss:

$$I^{12} = \sum_a m_a(\delta^{12}(\bar{r}_a)^2 - \bar{r}_a^1 \bar{r}_a^2) = -\sum_a m_a \bar{r}_a^2 \bar{r}_a^1 = \sum_a m_a(\delta^{21}(\bar{r}_a)^2 - \bar{r}_a^2 \bar{r}_a^1) = I^{21}$$

Was hier nicht der Fall ist.

(iii) Kann ein Trägheitstensor sein. Mir ist leider wieder kein besserer Grund als in (i) eingefallen.

a) Sei σ die Flächendichte des Quadrats. Da das Quadrat nur in der x-y-Ebene liegt, lässt sich das Trägheitsmoment durch folgendes Integral berechnen:

$$I^{ij} = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma(\delta^{ij}(\bar{r}_a)^2 - \bar{r}_a^i \bar{r}_a^j)\, dx\, dy \quad \Big|\text{ mit } \bar{r}_a(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma\left(\delta^{ij}(x^2+y^2) - \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}^j\right) dx\, dy$$

Wir wenden hier an, dass alle Integrationskonstanten 0 sein müssen, was man sich vorstellen kann, da die Berechnung über Integration nur eine Verallgemeinerung der Berechnung über die Summe ist.

Da $\bar{r}^3 = 0$, gilt:

$$I^{13} = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma(-\bar{r}^1 \bar{r}^3)\, dx\, dy = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} 0\, dx\, dy = 0$$

Analog gilt dies für I^{23}, I^{31}, I^{32}. Außerdem gilt, wie in der a) bei (ii) gezeigt, dass $I^{12} = I^{21}$ sein muss. Nun werden also nur noch $I^{11}, I^{22}, I^{33}, I^{12}$ berechnet:

$$I^{11} = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}}\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma (\cancel{x^2} + y^2 - \cancel{x^2})\, dx\, dy$$

$$= \sigma \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} (\tfrac{s}{2} y^2) - (-\tfrac{s}{2} y^2)\, dy = \sigma s \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} y^2\, dy$$

$$= \sigma s \left(\left(\frac{1}{3} \frac{s^3}{8} \right) - \left(\frac{1}{3} \left(-\frac{s^3}{8} \right) \right) \right) = \sigma \frac{s^4}{12}$$

Da x und y zueinander (in unserem Fall) absolut symmetrisch sind, gilt auch $I^{22} = \sigma \frac{s^4}{12}$.

$$I^{33} = \sigma \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}}\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} x^2 + y^2\, dx\, dy = \sigma \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}}\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} x^2\, dx\, dy + \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}}\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} y^2\, dx\, dy \cdot \sigma$$

$$= I_{22} + I_{11} = \sigma \frac{s^4}{6}$$

$$I^{12} = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}}\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma (-xy)\, dx\, dy = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \left[\sigma \left(-\frac{1}{2} y x^2 \right) \right]_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} dy = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} 0\, dy = 0$$

Somit sieht der Trägheitstensor wie folgt aus:

$$I = \begin{pmatrix} \frac{\sigma s^4}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma s^4}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma s^4}{6} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.3

Aufgabe 10.4

Ü 10.4

a) Es gilt: $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} / r = \frac{r^i \dot{r}^i}{\sqrt{(r^i)^2}} = \sqrt{\frac{(r^i)^2 (\dot{r}^i)^2}{(r^i)^2}} = \dot{r}$

Ich hab es nicht geschafft zu zeigen, dass $\dot{\vec{A}} = 0$.

b) $\vec{A}$ liegt in der Ebene senkrecht zu $\vec{L}$, da:

$$\vec{A} = \underbrace{(\dot{\vec{r}} \times \vec{L})}_{\text{Senkrecht zu } \vec{L}} - \underbrace{\alpha \frac{\vec{r}}{r}}_{\text{senkrecht zu } \vec{L}\text{, wegen } \vec{L} = (m\vec{r} \times \dot{\vec{r}})\text{, sodass } \vec{L} \perp \vec{r}}$$

c) $\vec{A} \cdot \vec{r} = \vec{A}^i \, \vec{r}^i = |A|\,|r| \cos(\theta)$

$= (\dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \frac{\vec{r}}{r}) \cdot \vec{r} = (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - \alpha \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r}$

Beim Spatprodukt dürfen die Vektoren zyklisch vertauscht werden:

$\vec{A} \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{L} - \alpha r = \frac{L^2}{m} - \alpha r = |A|\,|r| \cos(\theta)$

Theo 1

Ü10.4 Fortsetzung

$$\Leftrightarrow r\left(|A|\cos(\theta)+\alpha\right)=\frac{L^2}{m}$$

$$\Leftrightarrow r=\frac{L^2}{m(|A|\cos(\theta)+\alpha)}$$

d) Ich glaube $\bar{A}$ müsste aus Symmetriegründen parallel zur Verbindungsachse zwischen der Sonne und dem (von der Sonne aus) nächstgelegenen Bahnpunkt sein, sodass $\bar{A}$ diese Richtung angeben kann. (Beim Kreis gilt $\bar{A}=0$)

$|\bar{A}|$ hängt mit der Exzentrizität der Bahn zusammen. Je größer $|\bar{A}|$, desto größer ε. Somit lässt sich durch $\bar{A}$ generell schnell auf die Bahn schließen.

Aufgabe 10.5