

Procesos Estocásticos 86.09

FACULTAD DE INGENIERÍA UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

TRABAJO PRÁCTICO N° 2 MODELO AUTORREGRESIVO PARA LA SÍNTESIS DE SEÑALES DE EEG

Grupo 6

Autor	Padrón	Mail
Delfino Ortega, Gabriel	90689	gdelfino@fi.uba.ar
Hoffmann, Nicolas	103733	nhoffmann@fi.uba.ar
Lützel Schwab, Nahila	100689	nlutzel Schwab@fi.uba.ar
Pareja, Facundo Jose	99719	fpareja@fi.uba.ar

Nota: Aprobado.
Corrector: Raymundo Albert.

9 DE MAYO DEL 2024

Índice

1. Introduccion	2
2. Ejercicio 1	2
3. Ejercicio 2	4
4. Ejercicio 3	6
5. Ejercicio 4	8
6. Conclusiones	12

1. Introduccion

El electroencefalograma (EEG) registra la actividad eléctrica de neuronas sincronizadas, la cual es capturada mediante electrodos en el cuero cabelludo. Se clasifican las ondas en ritmos cerebrales (delta, theta, alpha, beta, gamma) según frecuencia, variando según estado fisiológico y estimulación. En el presente trabajo práctico se planteó un modelo para la generación de señales de EEG sintéticas en condiciones de estacionariedad. Asimismo, se aplicaron técnicas de estimación para un modelo paramétrico, análisis espectral, tanto de las señales reales como sintéticas, y filtrado lineal mediante filtros FIR equirriple.

Se hizo uso de registros adquiridos desde el electrodo T7 (según sistema 10-20) y corresponden a una sesión de EEG de un sujeto voluntario con ojos abiertos y con ojos cerrados. Los registros poseen una tasa de muestreo $fs = 200$ Hz, con una duración de 10 segundos cada uno, y ya se encuentran prerprocesados con eliminación de artefactos, como la interferencia de 50 Hz.

Ejercicio 1 En este ejercicio se buscan estimar los coeficientes a_1, a_2, \dots, a_P y la ganancia G del proceso AR que modelan ambos registros de EEG provistos en el campus.

a) Defina una función con prototipo `ar_model(x, P)`, donde x es la señal y P el orden del modelo. La función debe retornar el vector a con los coeficientes y la ganancia G .

b) Utilice la función del punto anterior para estimar todos los parámetros suponiendo ordenes $P = \{2, 13, 30\}$. Grafique en cada caso (para $\omega \in [0, \pi)$) el periodograma superpuesto a la PSD del modelo que cumple con la ecuación 10, en base a los parámetros estimados.

$$S_x(\omega) = \frac{G^2}{\left|1 - \sum_{k=1}^P a_k e^{-j\omega k}\right|^2} \quad (1)$$

Ejercicio 2 Aplicando el método de Welch, para una ventana de Hamming de largo $M = 80$ y un solapamiento del 50 %, estime la PSD de ambos registros de EEG. Grafique la PSD estimada con Welch junto a la PSD del modelo para $P = 13$.

Ejercicio 3 Utilice los parámetros obtenidos del modelo para sintetizar las señales EEG artificiales, suponiendo un orden $P = 13$. Luego estime los periodogramas mediante el método de Welch de forma análoga al ejercicio anterior. Compare en un gráfico la PSD estimada para las señales sintetizadas y la PSD del modelo teórico según la ecuación 10.

Ejercicio 4 En este ejercicio vamos a descomponer las señales de EEG en las bandas delta, theta, alpha, beta y gamma para comparar la potencia de cada banda entre las señales reales y las sintéticas.

a) Implemente los 5 filtros FLG equirriple cuyas especificaciones ($H_D(\omega)$, $H_T(\omega)$, $H_A(\omega)$, $H_B(\omega)$ y $H_G(\omega)$), garantizando la condición equirriple en todas las bandas. Grafique el módulo de la respuesta en frecuencia de cada uno y verifique si se cumplen las especificaciones.

b) Aplicando cada filtro a las señales de EEG, calcule la potencia (varianza) de las señales filtradas. Haga un gráfico de la potencia σ^2 vs las bandas cerebrales (D, T, A, B y G), comparando en un mismo gráfico las potencias de la señal sintética y la real.

2. Ejercicio 1

En el modelo autorregresivo (AR) la señal $x(n)$ en un momento específico se describe como una combinación lineal de sus valores anteriores más un proceso blanco de entrada $e(n) = G \cdot u(n)$ con $u(n) \sim \mathcal{N}(0, 1)$, donde P es el orden del modelo y a_i los coeficientes del mismo.

$$x(n) = \sum_{i=1}^P a_i x(n-i) + e(n) \quad (2)$$

a) Para estimar los parámetros del modelo AR se resuelven las ecuaciones de Yule-Walker.

$$R(k) + \sum_{i=1}^P a_i R(k-i) = \sigma^2(k) \cdot \delta_k, (k \geq 0) \quad (3)$$

$$R(k) = R(-k) \quad (4)$$

Separando la solución para $k = 0$:

$$R(0) = \sum_{i=1}^P a_i R(i) + G^2 \quad (5)$$

y para $k \neq 0$:

$$R(k) = \sum_{i=1}^P a_i R(k-i) \quad (6)$$

De esta manera se pueden estimar los parámetros mediante:

$$R = \begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(P-1) \\ R(-1) & R(0) & \cdots & R(P-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(-P+1) & R(-P+2) & \cdots & R(0) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$r = [R(1)R(2)...R(P)]^T$$

$$\hat{a} = R^{-1} \cdot r \quad (8)$$

$$\hat{G} = \left(R(0) - \sum_{i=1}^P a_i R(i) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

b) Se estimaron los parámetros suponiendo órdenes $P = \{2, 13, 30\}$ y se graficaron en cada caso (para $\omega \in [0, \pi)$) el periodograma superpuesto a la PSD. Siendo la PSD:

$$S_x(\omega) = \frac{G^2}{\left| 1 - \sum_{k=1}^P a_k e^{-j\omega k} \right|^2} \quad (10)$$

Resultaron los siguientes gráficos:

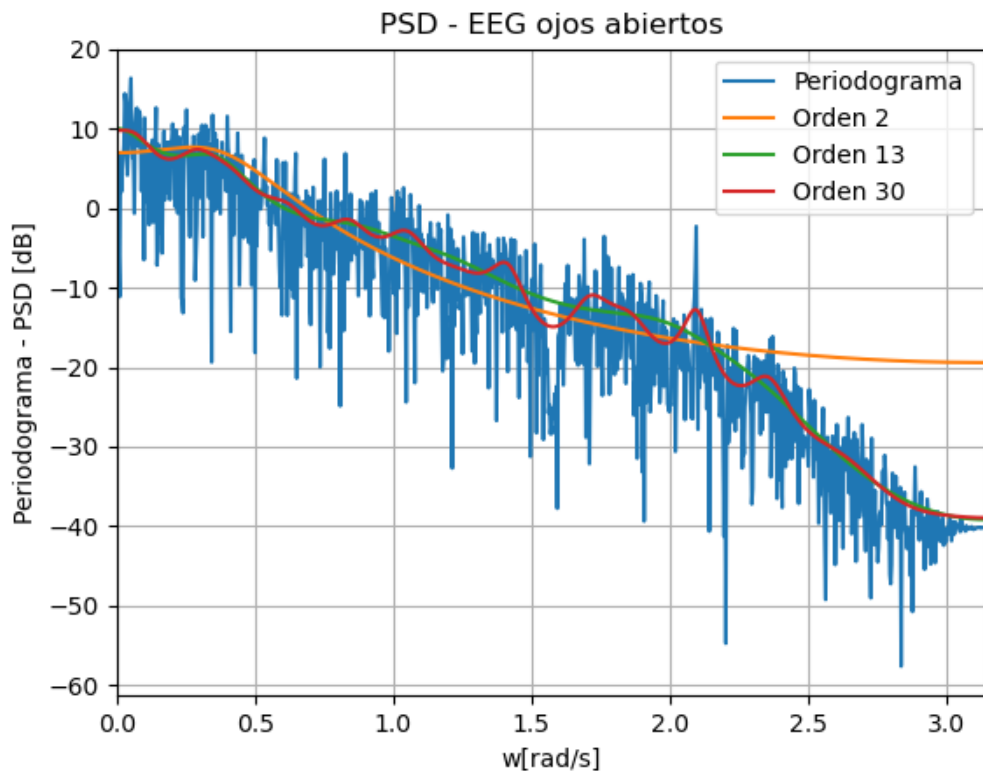


Figura 1: Comparación entre periodograma y PSD para EEG de ojos abiertos.

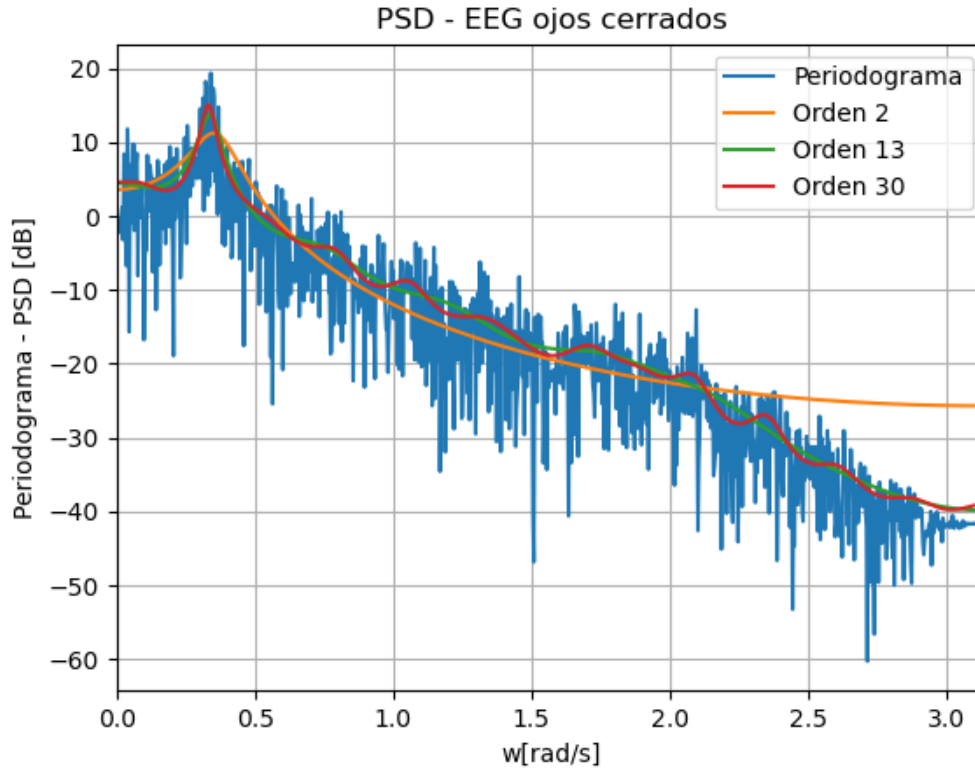


Figura 2: Comparación entre periodograma y PSD para EEG de ojos cerrados.

Como se puede observar en ambos gráficos, a medida que se aumenta el orden del modelo AR la PSD se asemeja más al periodograma. Un modelo de orden 2 tiene una buena aproximación en bajas frecuencias pero pierde exactitud en altas frecuencias. Los modelos de orden 13 y 30 tienen mayor precisión en todo el rango de frecuencias, sin embargo, el modelo de orden 30 detecta mejor pequeñas variaciones en intervalos cortos de frecuencia. Más allá de eso, para realizar un análisis cualitativo de la señal ambos ordenes son adecuados siendo el modelo de orden 13 más efectivo dado a que requiere una cantidad mucho menor de polos.

A medida que aumenta la frecuencia la densidad espectral disminuye. A su vez, se puede ver en los espectros que se tiene mayor densidad de potencia en la condición de ojos cerrados en la banda alfa (α), que con ojos abiertos, lo que es coherente debido a que los ritmos cerebrales α son prominentes en estado de relajación y reposo mental.

3. Ejercicio 2

Una forma de tener una mayor exactitud de la PSD de una señal es utilizando métodos que mejoren la estimación. En este caso se analizará el *Método de Welch* el cual consiste en tomar ventanas de una señal de largo N y estimar la PSD de esa ventana mediante el Periodograma,

$$x_i(n) = x((i-1)K + n). \quad (11)$$

Donde K es el desplazamiento de muestras por cada ventana que se toma. El índice $i = 1, \dots, L$ refiere a la cantidad de ventanas tomadas y L es la cantidad total de ventanas dada por $L = N/K$ (dicho valor se redondea hacia abajo). A su vez, $n = 0, \dots, M-1$ es el índice de muestra evaluada y llega hasta $M-1$ donde M es el ancho de la ventana.

Luego se calcula el Periodograma del segmento obtenido como,

$$\hat{S}_{x_i}(w) = \frac{1}{VM} \sum_{i=1}^M DFT x_i(n) v(n). \quad (12)$$

Donde $v(n)$ es la ventana y V es su potencia,

$$V = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} |v(n)|^2. \quad (13)$$

Luego se repite el procedimiento para las L ventanas y finalmente se suman todos los Periodogramas y se divide por la cantidad de ventanas,

$$\hat{S}_x(w) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^L \hat{S}_{x_i}. \quad (14)$$

En este caso se seleccionó una ventana "Hamming" de largo $M = 80$ y un solapamiento del 50 %. Con esto el desplazamiento K se obtiene según la siguiente expresión,

$$K = M \left(1 - \frac{\text{Solapamiento}}{100} \right). \quad (15)$$

Con esto, se presentan gráficas comparativas del *Método de Welch* y el cálculo teórico realizado en el *Ejercicio 1*.

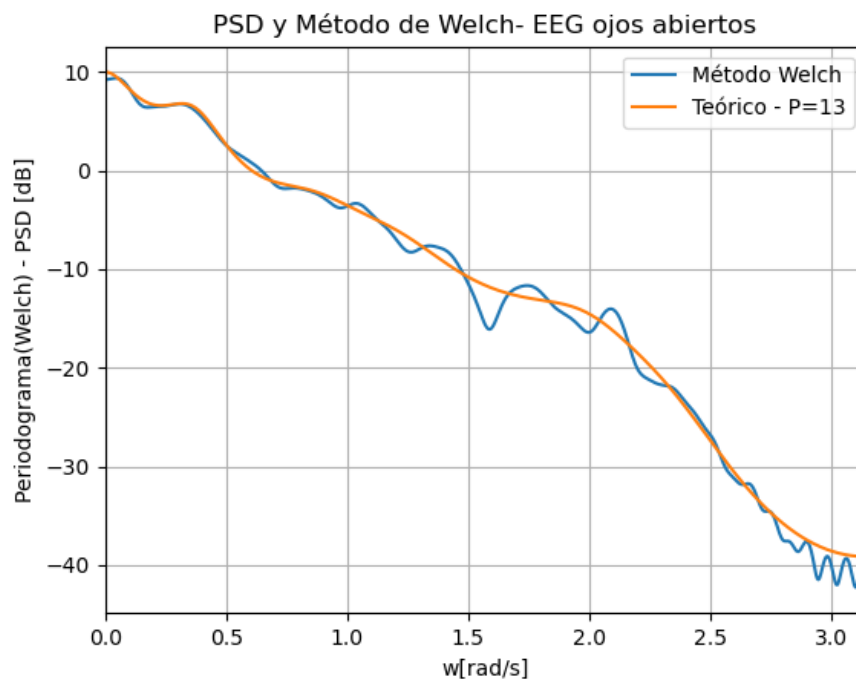


Figura 3: Comparación entre PSD estimada con Welch y PSD del modelo teórico para orden 13 con EEG de ojos abiertos.

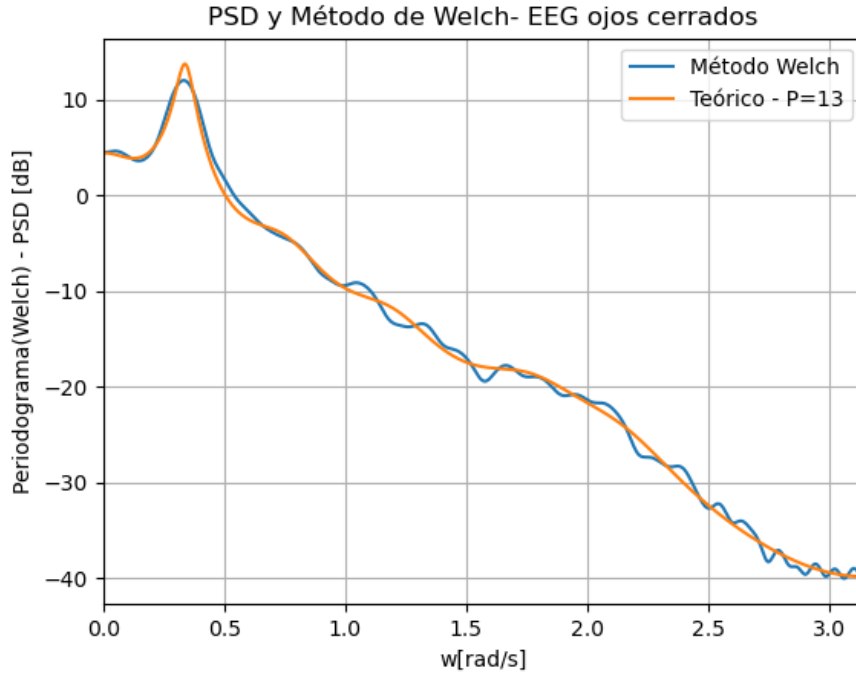


Figura 4: Comparación entre PSD estimada con Welch y PSD del modelo teórico para orden 13 con EEG de ojos cerrados.

En general, es evidente que el método de Welch es una aproximación aceptable y mejor que el periodograma (tiene sentido pues resulta del promedio de varios de los mismos).

La primera diferencia observable mediante la representación gráfica es que en el caso de la EEG para ojos abiertos hay mayor presencia de picos que se alejan considerablemente del valor teórico (por ejemplo en $w = 1,5$ y $w = 3,0$).

Por otro lado, en ambos casos hay varios picos locales que no se corresponden con el valor teórico (a partir de $w = 1,0$ en ambos casos).

4. Ejercicio 3

A continuación se buscará realizar señales sintéticas a partir de las señales originales. En el *ejercicio 1* se obtuvo un vector \mathbf{a} y el parámetro G del proceso auto-regresivo. Con estos parámetros se puede definir un sistema LTR IIR (respuesta al impulso infinita) $H(z)$ utilizando los coeficientes del vector \mathbf{a} como los polos del sistema y G como la ganancia del mismo. Utilizando una señal de ruido blanco $u(n)$ se puede generar como salida una respuesta con el mismo comportamiento que la señal original.

La respuesta en frecuencia entonces, se expresa del siguiente modo,

$$H(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{G}{1 - \sum_{i=1}^P a_i z^{-i}}. \quad (16)$$

Con este sistema se procede a crear señales sintéticas de los EEG y se estimarán sus PSDs mediante el *Método de Welch* explicado en el *ejercicio 2* y se la comparará con las PSD teórica calculadas según se define en el *ejercicio 1* utilizando un orden $P = 13$. A continuación se muestran figuras donde se contrastan ambos modelos.

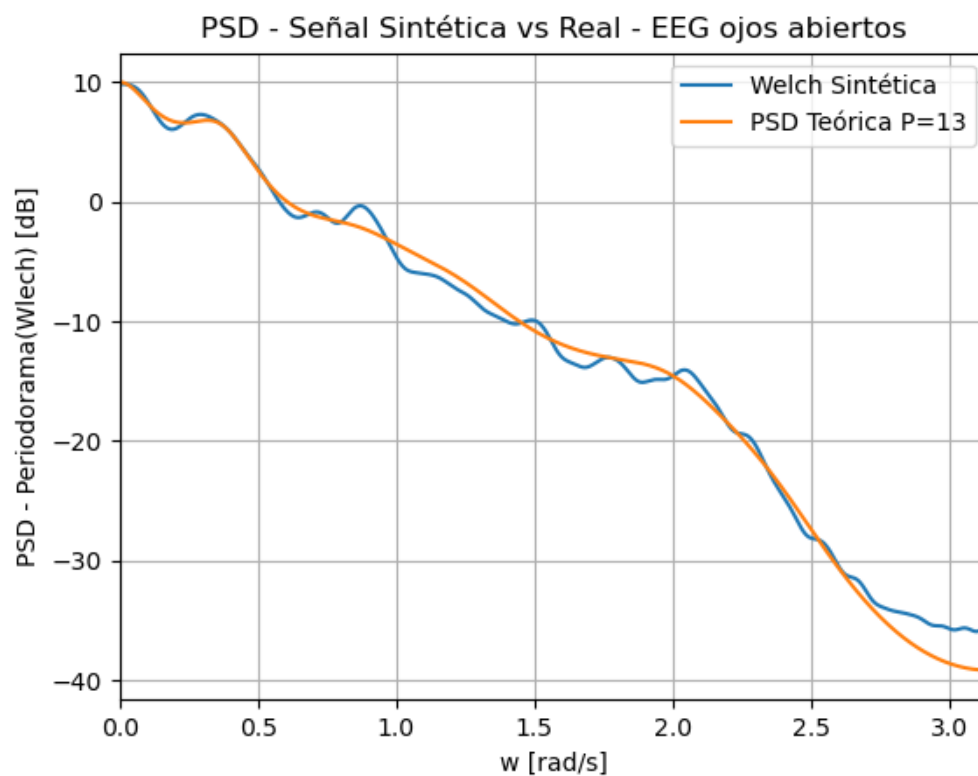


Figura 5: Comparación entre PSD estimada mediante Welch para señales sintetizadas y PSD del modelo teórico para EEG de ojos abiertos.

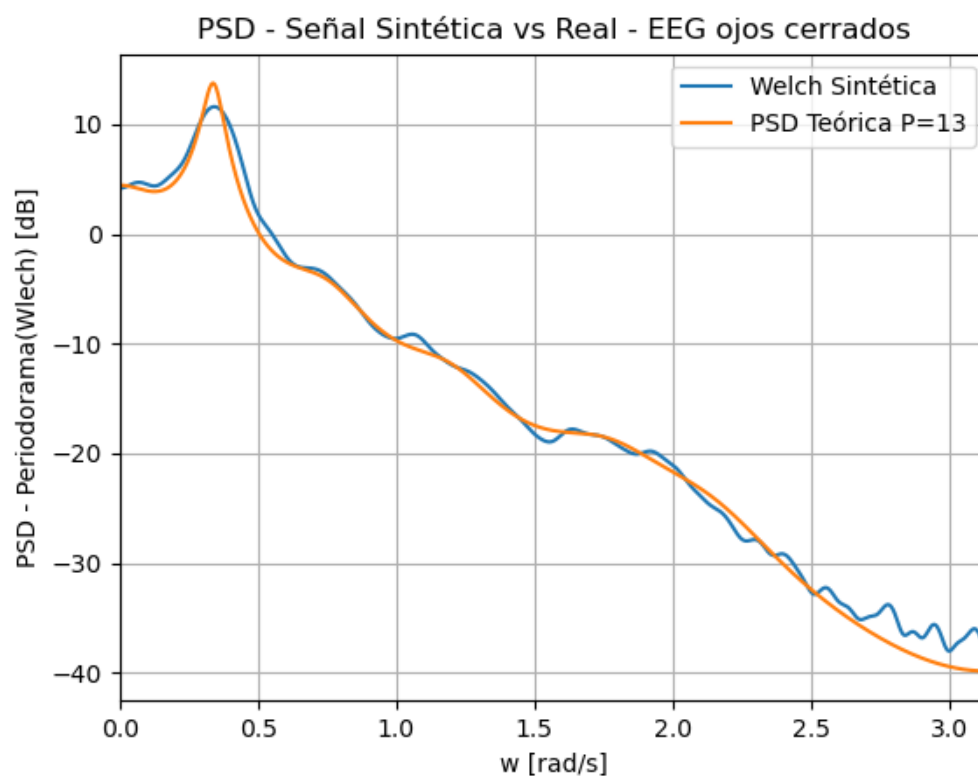


Figura 6: Comparación entre PSD estimada mediante Welch para señales sintetizadas y PSD del modelo teórico para EEG de ojos cerrados.

En ambos casos, hay diferencias pronunciadas en la aproximación de Welch respecto de la señal sintética.

En el caso de la EEG de ojos abiertos hay una reducción en la existencia de picos locales respecto de la señal original (se puede ver especialmente en $1,5 \leq w \leq 2,5$).

En el caso de la EEG de ojos cerrados la aproximación también muestra una menor cantidad de picos locales, pero a partir de $w = 2,5$, se vuelve considerablemente peor.

5. Ejercicio 4

En este ejercicio se busca diseñar filtros *Equiripple* con especificaciones definidas por la cátedra para poder analizar bandas cerebrales por separado.

Para fabricar los filtros con las características pedidas se utilizó una implementación del algoritmo de intercambio de *Remez*, que ajusta los coeficientes a las especificaciones de forma óptima, a partir de algunos parámetros recibidos:

- **N**: Cantidad de términos del filtro, o también el orden mas 1.
- **F**: Extremos de cada banda de frecuencia.
- **A**: Ganancia deseada en cada banda de frecuencia.
- **V**: Peso relativo asignado a cada banda de frecuencia

A continuación se especifica como fue obtenido cada parámetro de forma general.

- Para obtener el orden del filtro se utilizó la aproximación de Káiser, a saber:

$$\widehat{M} = \frac{-20 \log_{10}(\sqrt{\delta_1 \delta_2}) - 13}{14,6 \Delta f} + 1 \quad (17)$$

con

$$\Delta f = \frac{\Delta w}{2\pi} \quad (18)$$

Luego, se fué ajustando dicha aproximación para cumplir con las especificaciones.

- Los extremos de cada banda de frecuencia se obtienen partiendo desde 0 e indicando cada punto donde cambia la ganancia deseada, tomando entre ellos intervalos de frecuencias denominados "bandas de transición", hasta llegar a la mitad de la frecuencia de muestreo (100Hz).
- La ganancia deseada era bien 1 o 0 dependiendo de cada banda de frecuencia.
- El peso relativo asignado a las bandas de frecuencia se corresponde con

$$V_i = \frac{1}{r_i} \quad (19)$$

A continuación, se presentan las respuestas en frecuencias de los filtros de cada banda. Cabe mencionar que los gráficos a mostrar solo hacen énfasis en las frecuencias de importancia de cada filtro como se mencionará con cada uno.

La primera banda cerebral se denomina **delta(D)** que toma el rango de frecuencias $0 - 4 \text{ Hz}$.

En este caso el filtro Equiripple tiene una banda de transmisión, por diseño, de $3 \text{ a } 5 \text{ Hz}$ por lo que un cuarto de la banda D(de $3 \text{ a } 4 \text{ Hz}$) se verá atenuada por el filtro.

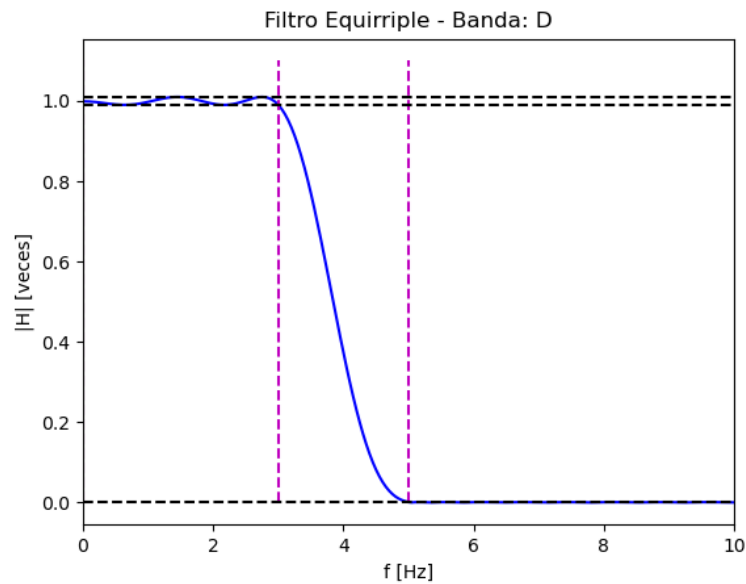


Figura 7: Respuesta en Frecuencia - Filtro D.

Luego sigue la banda ***theta***(***T***) de rango $4 - 8 \text{ Hz}$. Para tomar dicha banda el filtro tiene bandas de transición de $3 \text{ a } 5 \text{ Hz}$ y $8 \text{ a } 10 \text{ Hz}$.

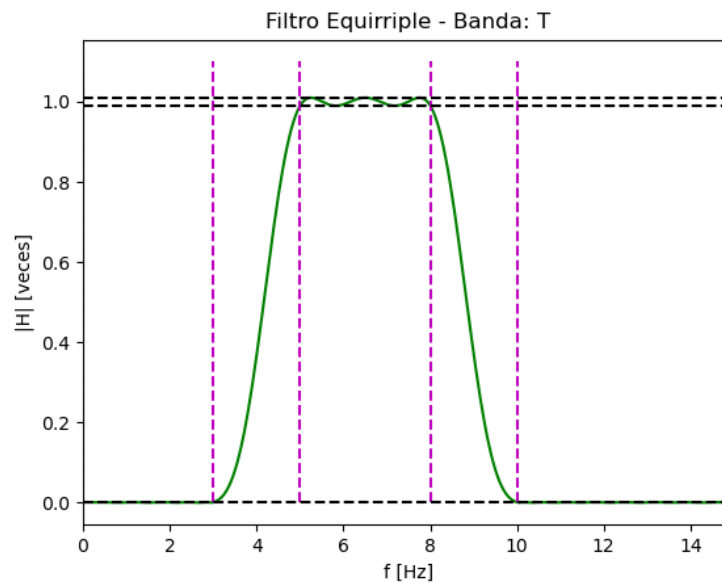


Figura 8: Respuesta en Frecuencia - Filtro T.

La banda de rango $8 \text{ a } 13 \text{ Hz}$ se denomina ***alpha***(***A***) con un filtro como se muestra a continuación. Las bandas de transición van de $8 \text{ a } 10 \text{ Hz}$ y $13 \text{ a } 15 \text{ Hz}$.

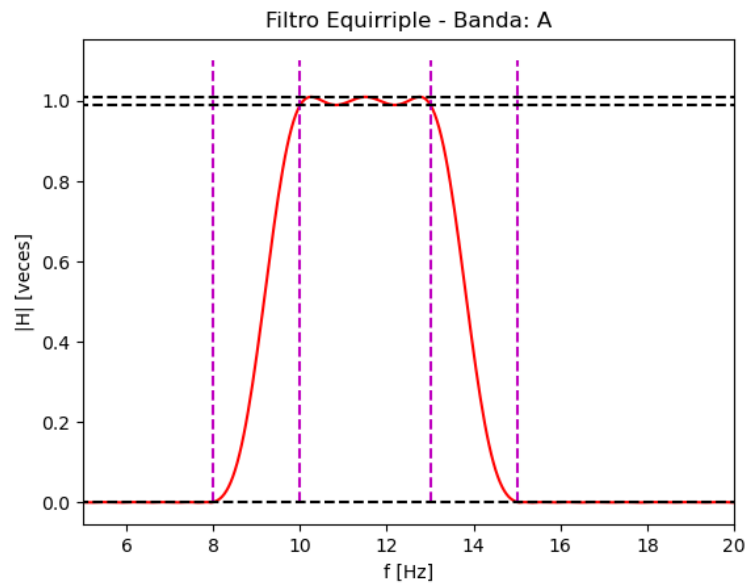


Figura 9: Respuesta en Frecuencia - Filtro A.

A continuación se encuentra la banda **beta(B)** toma las frecuencias de 13 a 30 Hz . Para su filtro se toman bandas de transición van de 13 a 15 Hz y 29 a 31 Hz .

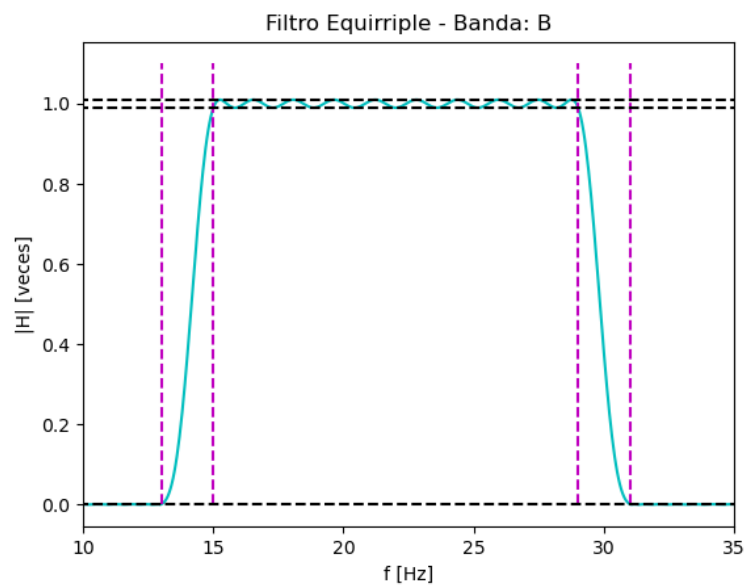


Figura 10: Respuesta en Frecuencia - Filtro B.

Por último, se encuentra la banda **gamma(G)** que toma las frecuencias de 30 Hz en adelante y su filtro cuenta con una transición de 29 a 31 Hz .

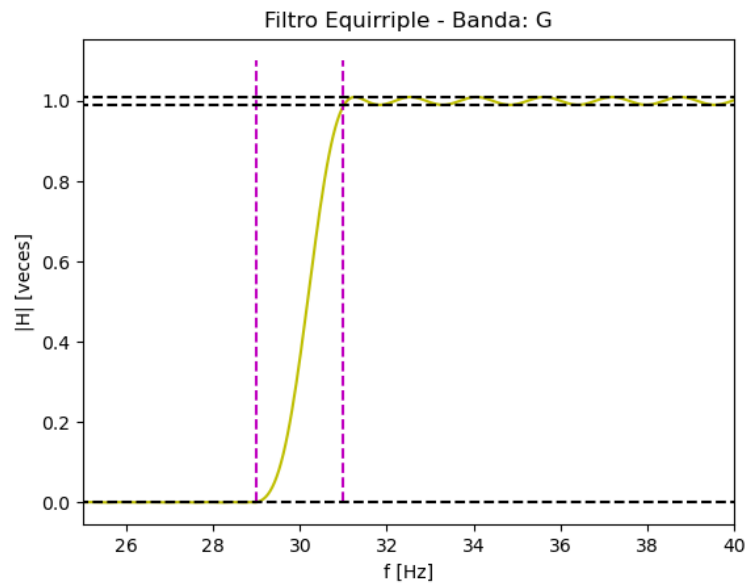


Figura 11: Respuesta en Frecuencia - Filtro G.

A continuación se muestra la tabla 1 con los órdenes obtenidos para los filtros de cada banda.

Banda	D	T	A	B	G
Orden	261	269	269	263	259

Tabla 1: Ordenes de los filtros Equirriple asociados a banda cerebral.

Una vez armados los mismos se aplicaron en las señales originales y señales sintéticas como se elaboraron en el *Ejercicio 3*. Se filtraron las bandas cerebrales de cada señal y se calculó la potencia de cada una de acuerdo a la expresión 3

A continuación se muestran gráficos de la potencia de cada banda cerebral contrastando la señal original con la señal sintética para los distintos casos.

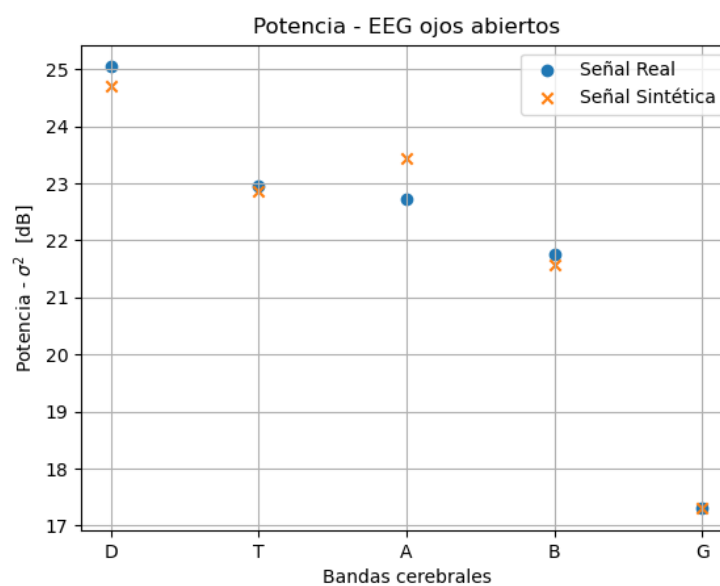
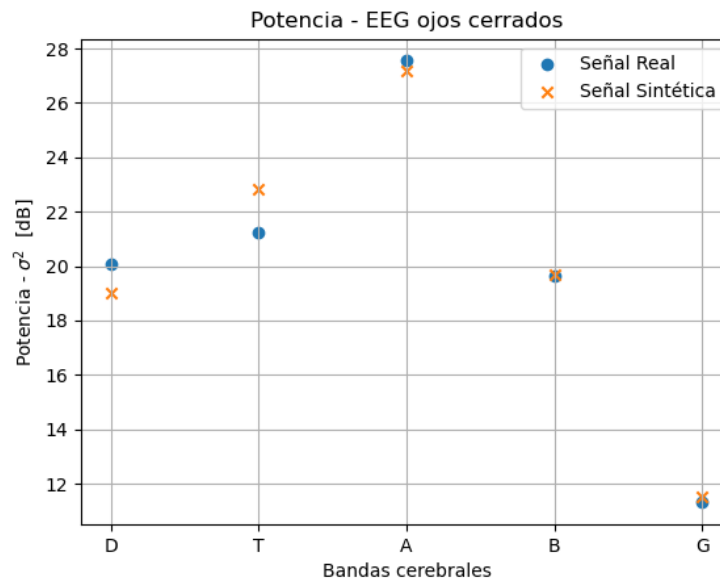


Figura 12: Potencia de cada banda cerebral - Señal Real vs Sintética - EEG Ojos abiertos.



la potencia me parece demasiado alta. Seguro les falta normalizar por el largo de la señal cuando hacen la DFT.

Figura 13: Potencia de cada banda cerebral - Señal Real vs Sintética - EEG Ojos cerrados.

En la figura 12 se puede observar que la potencia de la señal original se concentra en la banda D. Las bandas T, A y B se mantienen en valores cercanos pero decrecientes a medida que las y por último la banda G es la que menos potencia tiene. Esto se condice con la tendencia que siguen todas las PSDs analizadas en los ejercicios anteriores donde las frecuencias bajas contienen una densidad espectral mayor que las frecuencias altas.

En cuanto a la señal sintética, se puede decir que sigue la misma tendencia que la señal original, sin embargo, la banda A presenta una potencia ligeramente mayor a la banda T. Esta discrepancia puede deberse simplemente al hecho de que la señal sintética es aleatoria dado a que se genera con ruido blanco. Si se realizan varios experimentos las potencias varían ligeramente. En el caso particular de la banda A puede estar tanto arriba como abajo del valor teórico sin alejarse mucho del mismo al igual que las otras bandas.

Para la figura 13 que la banda A es la que mayor potencia contiene. Esto también coincide con las PSD analizadas anteriormente al igual que la tendencia que siguen ambos parámetros. La señal sintética generada también sigue la misma tendencia y las discrepancias se pueden atribuir a los mismos factores mencionados anteriormente.

A modo de conclusión de este ejercicio y también a lo que se ha mostrado en los anteriores. Los estímulos que recibe una persona con los ojos abiertos generar una actividad eléctrica en el cerebro de ritmo *delta(D)* mientras que al tener los ojos cerrados la actividad cerebral toma una frecuencia de banda *alpha(A)*.



6. Conclusiones

En síntesis, los modelos AR son una herramienta poderosa para modelar y analizar señales sin tener otra información que la señal a analizar.

En el ejercicio 1 se llega a la conclusión de que se puede obtener una descripción general muy acertada de la PSD utilizando modelos de orden 13 y mayores. Un modelo de orden 30 es capaz de detectar variaciones en pequeños rangos de frecuencia, sin embargo, basta con tener un modelo de orden 13 para tener una descripción de la tendencia general de la PSD.

En el ejercicio 2 se observa que el Método de Welch es una herramienta eficaz para mejorar la precisión en la estimación de la Densidad Espectral de Potencia (PSD) de una señal. En vez de estimar el periodograma de toda la señal es mejor segmentar dicha señal con una ventana adecuada y estimar el periodograma de cada segmento y sumarlos.

Luego en el ejercicio 3, se observa que es posible, mediante los parámetros obtenidos por el modelo AR y un experimento, generar señales sintéticas definiendo un sistema LTI IIR con dichos parámetros y excitando el

sistema con ruido blanco.

Se verificó finalmente la validez de dicho sistema generador realizando un análisis de potencia de las distintas bandas cerebrales con la implementación de filtros equirriple para poder calcular la potencia de cada una por separado.

muy buen trabajo!