

## Trabajo práctico 2

### Modelo Autorregresivo para la síntesis de señales de EEG

#### 1. Introducción

##### 1.1. Motivación

El análisis visual de las señales cerebrales ha brindado al personal médico y a los investigadores una mejor comprensión de la fisiología del sistema nervioso, incluso facilitando el diagnóstico de ciertos trastornos cerebrales. En particular, los registros de electroencefalografía (EEG) continúan siendo una herramienta fundamental para el avance de la neurología clínica y la neurociencia. En este contexto, el desarrollo de simuladores de diferentes tipos de señales EEG comúnmente encontradas en la práctica clínica, es un área de investigación muy activa de gran importancia para el entrenamiento y aprendizaje del personal médico. En este trabajo práctico se plantea un modelo sencillo para la generación de señales de EEG sintéticas en condiciones de estacionariedad. Asimismo, se aplicarán técnicas de estimación para un modelo paramétrico, análisis espectral, tanto de las señales reales como sintéticas, y filtrado lineal mediante filtros FIR equirriple.

##### 1.2. Electroencefalografía

El EEG consiste en registrar la actividad eléctrica de grupos de neuronas. Esta actividad eléctrica es generada por potenciales post-sinápticos que ocurren de manera sincronizada en numerosas neuronas. Como se puede observar en la Figura 1, la captura de señales EEG se efectúa ubicando un conjunto de electrodos (sensores) en la superficie del cuero cabelludo del sujeto bajo prueba. La señal eléctrica debe atravesar distintas capas de tejido, como el cráneo, el líquido cerebrospinal y el tejido subcutáneo, antes de llegar a los electrodos metálicos que capturan la señal para su posterior procesamiento y análisis. El dispositivo de adquisición consta de múltiples entradas para la digitalización de las señales y una conexión a la computadora o dispositivo de visualización. Si bien existen equipos de EEG con diferente cantidad de canales, existen sistemas aceptados internacionalmente para la ubicación de los electrodos sobre el cuero cabelludo, como el sistema 10-20 [1] representado en la Figura 5.



Figura 1: Sistema de adquisición y procesamiento de señales de EEG.

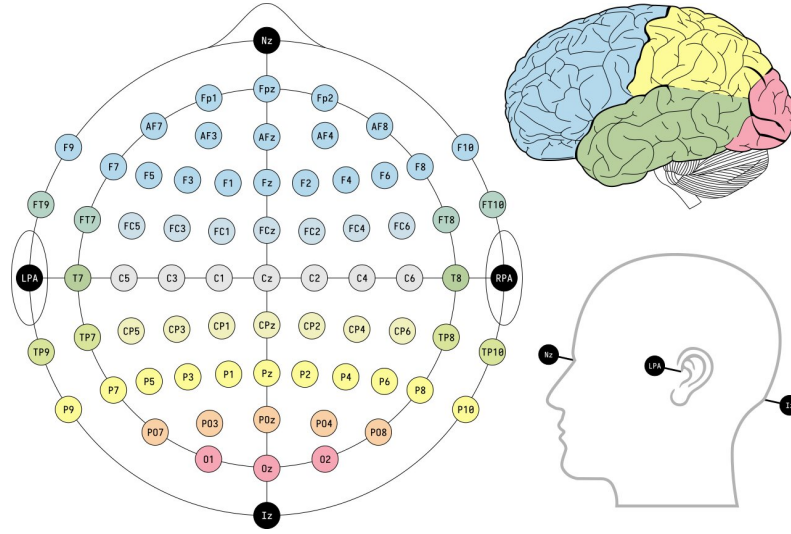


Figura 2: Sistema 10-20. Inventado por Herbert Jasper, es un método reconocido internacionalmente para describir y aplicar la ubicación de los electrodos del cuero cabelludo en el contexto de un examen EEG.

### 1.3. Señales de EEG

La actividad eléctrica del cerebro se puede registrar bajo diferentes condiciones y estímulos, de modo tal que en cada caso se resalten características morfológicas específicas. El análisis visual detallado de las señales EEG ha permitido clasificar las ondas según su frecuencia, identificándose cinco rangos principales denominados ritmos cerebrales: **delta** (0-4 Hz), **theta** (4-8 Hz), **alpha** (8-13 Hz), **beta** (13-30 Hz) y **gamma** (> 30 Hz). El trazado de EEG puede mostrar variaciones en su frecuencia y amplitud dependiendo del estado fisiológico, como la vigilia, el sueño, la edad y algunos trastornos neurológicos, entre otros. Por ejemplo, bajo condiciones normales y en estado de vigilia, en un adulto se pueden registrar ondas EEG con una predominancia en la banda alfa al tener los ojos cerrados, respecto de tener los ojos abiertos. Por otra parte, las señales EEG se caracterizan por ser no estacionarias, ya que diferentes estímulos generan patrones distintos. Sin embargo, estas señales pueden modelarse como procesos estocásticos localmente estacionarios.

### 1.4. Modelo Autorregresivo

El modelado paramétrico ha sido una técnica muy utilizada para el análisis de series temporales, especialmente para señales biológicas como el EEG. Esta técnica permite caracterizar las series temporales sin necesidad de utilizar información sobre su naturaleza, como la fisiología o el origen anatómico de las señales. Dentro del modelado paramétrico, los modelos autorregresivos (AR) destacan por su relativa simplicidad, donde la señal  $x(n)$  en un momento específico se describe como una combinación lineal de sus valores anteriores más un proceso blanco de entrada  $e(n)$ , como se describe en (1), donde  $P$  es el orden del modelo y  $a_i$  los coeficientes del mismo.

$$x(n) = \sum_{i=1}^P a_i x(n-i) + e(n) \quad (1)$$

### 1.5. Estimación de los parámetros del modelo AR

Suponiendo que modelamos una señal  $x(n)$  como un proceso AR, cuya excitación se puede expresar como  $e(n) = G u(n)$ , donde  $u(n) \sim N(0, 1)$  es un proceso blanco gaussiano estándar y  $G$  un factor de ganancia. Nos interesa encontrar el conjunto de parámetros del modelo  $a_1, a_2, \dots, a_P$  y  $G$ . Una forma de abordar este problema es resolviendo las ecuaciones de Yule-Walker [2]. Resumidamente, en la ecuación (1) podemos multiplicar ambos miembros por  $x(n-k)$  y aplicar el operador esperanza. Llegamos a la expresión  $R(k) = \sum_{i=1}^P a_i R(k-i) + \sigma_e^2 \delta_k$ , donde  $R(k) = R(-k) = \mathbb{E}[x(n)x(n-k)]$  es la función de autocorrelación de  $x(n)$ . Esta ecuación se puede separar en una solución para  $k = 0$ , resultando en  $R(0) = \sum_{i=1}^P a_i R(i) + G^2$  y otra para  $k \neq 0$  que conduce a  $R(k) = \sum_{i=1}^P a_i R(k-i)$ . De estas últimas dos expresiones se llega a las ecuaciones de Yule-Walker con las que se pueden estimar todos los parámetros del modelo, utilizando (2) para los coeficientes y (3) para la ganancia del ruido blanco, donde  $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_P]^T$ ,  $\mathbf{r} = [R(1) \ R(2) \ \dots \ R(P)]^T$  y  $\mathbf{R}$  como se define en (4). Como se puede observar, todos los parámetros estimados del modelo dependerán de la autocorrelación  $R(k)$ , que a su vez deberá ser estimada a partir de las observaciones de una realización del proceso  $x(n)$ .

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} \quad (2)$$

$$\hat{G} = \left( R(0) - \sum_{i=1}^P a_i R(i) \right)^{1/2} \quad (3)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \dots & R(P-1) \\ R(-1) & R(0) & \dots & R(P-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(-P+1) & R(-P+2) & \dots & R(0) \end{bmatrix} \quad (4)$$

### 1.6. Sintetización del proceso AR

Se puede pensar en el proceso  $x(n)$  (que modelamos como AR) como la salida de un sistema LTI  $H(z)$  (IIR) de “solo polos” [4] [3], como el que se indica en (5), con una excitación de ruido blanco gaussiano estándar  $u(n)$ , ver Figura 3. De esta forma, mediante un generador de ruido blanco, se puede aplicar  $u(n)$  como entrada del sistema y obtener la salida  $x(n)$  que adquiere el mismo comportamiento del proceso original con el que se determinó el modelo.

$$H(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{G}{1 - \sum_{i=1}^P a_i z^{-1}} \quad (5)$$

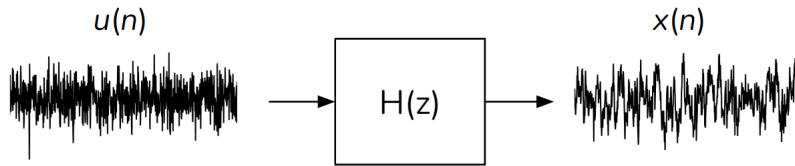


Figura 3: Sintetización de una señal generada mediante un proceso AR.

## 2. Desarrollo

En el campus de la materia están disponibles los archivos `eeg_ojos_cerrados_t7.csv` y `eeg_ojos_abiertos_t7.csv`. Ambos registros fueron adquiridos desde el electrodo T7 (según sistema 10-20) y corresponden a una sesión de EEG de un sujeto voluntario [5]. Los registros poseen una tasa de muestreo  $f_s = 200$  Hz, con una duración de 10 segundos<sup>1</sup> cada uno, y ya se encuentran preroceados con eliminación de artefactos, como la interferencia de 50 Hz.

### 2.1. Ejercicio 1

En este ejercicio se buscan estimar los coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_P$  y la ganancia  $G$  del proceso AR que modelan ambos registros de EEG provistos en el campus.

- Defina una función con prototipo `ar_model(x, P)`, donde  $\mathbf{x}$  es la señal y  $P$  el orden del modelo. La función debe retornar el vector  $\mathbf{a}$  con los coeficientes y la ganancia  $G$ .
- Utilice la función del punto anterior para estimar todos los parámetros suponiendo órdenes  $P = \{2, 13, 30\}$ . Grafique en cada caso (para  $\omega \in [0, \pi)$ ) el periodograma superpuesto a la PSD del modelo que cumple con la ecuación (6), en base a los parámetros estimados.

$$S_x(\omega) = \frac{G^2}{|1 - \sum_{k=1}^P a_k e^{-j\omega k}|^2} \quad (6)$$

### 2.2. Ejercicio 2

Aplicando el método de Welch (Apéndice 4.1), para una ventana de Hamming de largo  $M = 80$  y un solapamiento del 50 %, estime la PSD de ambos registros de EEG. Grafique la PSD estimada con Welch junto a la PSD del modelo para  $P = 13$ .

### 2.3. Ejercicio 3

Utilice los parámetros obtenidos del modelo para sintetizar las señales EEG artificiales, suponiendo un orden  $P = 13$ . Luego estime los periodogramas mediante el método de Welch de forma análoga al ejercicio anterior. Compare en un gráfico la PSD estimada para las señales sintetizadas y la PSD del modelo teórico según la ecuación (6).

### 2.4. Ejercicio 4

En este ejercicio vamos a descomponer las señales de EEG en las bandas *delta*, *theta*, *alpha*, *beta* y *gamma* para comparar la potencia de cada banda entre las señales reales y las sintéticas.

- Implemente los 5 filtros FLG equirriple cuyas especificaciones se muestran en el Apéndice 5 ( $H_D(\omega)$ ,  $H_T(\omega)$ ,  $H_A(\omega)$ ,  $H_B(\omega)$  y  $H_G(\omega)$ ), garantizando la condición equirriple en todas las bandas. Grafique el módulo de la respuesta en frecuencia de cada uno y verifique si se cumplen las especificaciones.
- Aplicando cada filtro a las señales de EEG, calcule la potencia (varianza) de las señales filtradas. Haga un gráfico de la potencia  $\sigma^2$  vs las bandas cerebrales (D, T, A, B y G), comparando en un mismo gráfico las potencias de la señal sintética y la real.

<sup>1</sup>Si bien los registros completos poseen una duración mayor, a los fines de este trabajo práctico se recortó un tramo de 10 segundos donde el proceso puede considerarse aproximadamente estacionario

### 3. Conclusiones

Como conclusiones, elabore un resumen breve y conciso comentando características que considere relevantes del método propuesto en este trabajo y los resultados obtenidos, así como dificultades encontradas y cómo fueron abordadas.

### 4. Apéndice

#### 4.1. Método de Welch

Suponiendo un proceso ESA  $x(n)$  de largo  $N$ , la PSD estimada mediante el método de Welch [6] resulta en segmentar el proceso en  $L = \lfloor N/K \rfloor$  segmentos superpuestos con cierto solapamiento (típicamente del 50 %) con un desplazamiento de  $K$  muestras entre segmentos,  $x_i(n) = x((i-1)K + n)$ , donde  $n = \{0, \dots, M-1\}$  e  $i = \{1, \dots, L\}$ , y promediar luego los periodogramas de cada segmento. En la ecuación (7) se describe el estimador, siendo  $v(n)$  la ventana aplicada.

$$\hat{S}_x(\omega) = \frac{1}{MV} \sum_{i=1}^M |DFT\{v(n)x_i(n)\}|^2 \quad (7)$$

donde  $V$  es la potencia de la ventana  $v(n)$ :

$$V = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} |v(n)|^2 \quad (8)$$

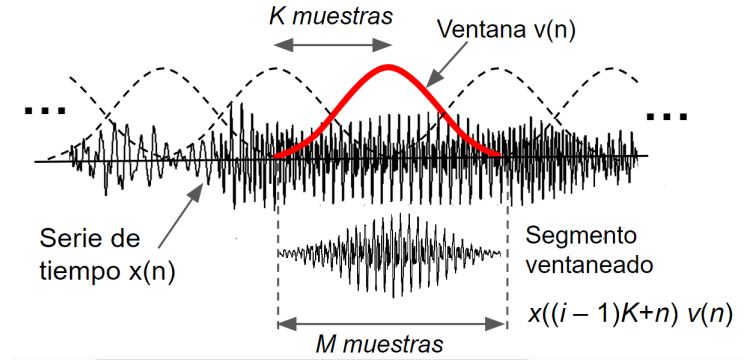


Figura 4: Representación de ventaneo para cada segmento del proceso aplicando una ventana con un solapamiento del 50 %. Normalmente se eligen ventanas que suavicen los bordes de la señal ventaneada (por ejemplo: Hamming).

### 5. Especificaciones de los filtros FIR

En la siguiente figura se representan las especificaciones que deben cumplir cada uno de los cinco filtros FIR. En todos los casos considere los ripples  $\delta_p = 0,01$  en las bandas de paso y  $\delta_s = 0,001$  en las bandas de supresión, manteniendo la condición equiripple (recuerde que puede ajustar el orden de cada filtro hasta que el algoritmo equiripple converja de forma óptima).

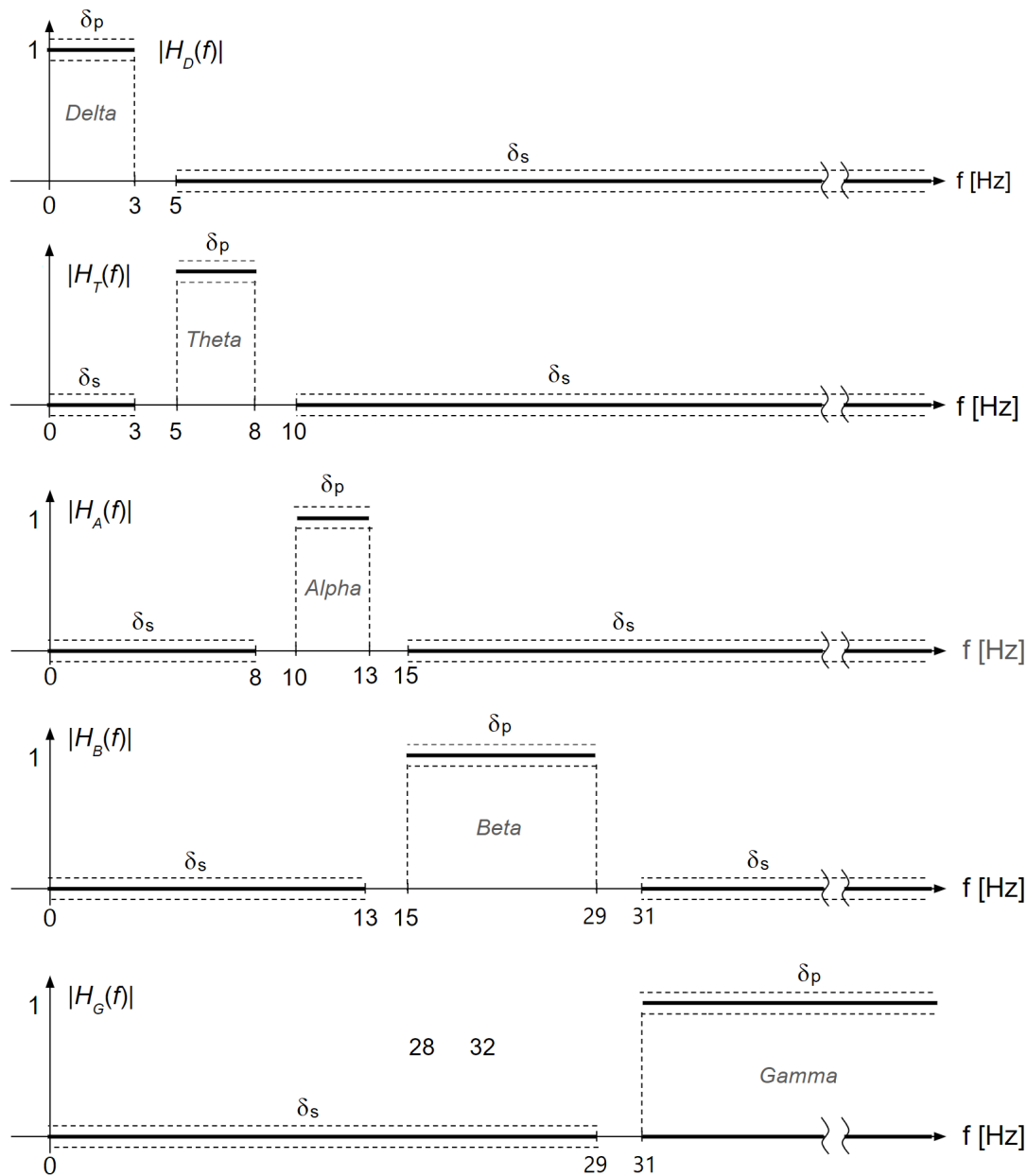


Figura 5: Filtros FIR para las 5 bandas cerebrales.

**Herramientas útiles en MATLAB.** Tenga en cuenta que los ejes se muestran en Hz, pero las frecuencias para el diseño deben convertirse a frecuencia normalizada (para más detalles consultar las diapositivas de la clase de diseño de filtros).

- `h = firpm(N, F, A, V);` % Genera coeficientes  $h$  del filtro FIR.
- `y = filter(b, a, x);` % salida de un sistema LTI con entrada  $x$ .

## 6. Normas y material entregable

- **Informe:** debe ser conciso y comentar los resultados solicitados. El informe debe entregarse en formato PDF (**no se aceptarán otros formatos**) y con nombre: TP2\_GXX.PDF (donde XX es el número de grupo). No debe agregarse código en el informe.
- **Código:** Los archivos de código utilizados deben ser en formato .m de Matlab/Octave (o alternativamente .py si usara lenguaje Python). El código debe incluirse junto al informe en un archivo ZIP (con mismo nombre que el informe) que deberá subirse al campus.

## Referencias

- [1] Miguel Angel Guevara Perez et al. Mapeo Electroencefalográfico y Neurofeedback. February 2010. [https://www.researchgate.net/publication/282294960\\_Mapeo\\_Electroencefalografico\\_y\\_Neurofeedback](https://www.researchgate.net/publication/282294960_Mapeo_Electroencefalografico_y_Neurofeedback)
- [2] S. Haykin, Adaptive filter theory, Prentice-Hall, 1996.
- [3] Steven M. Kay. Intuitive probability random processes using MATLAB. Springer 1951.
- [4] Makhoul, J., "Linear Prediction: A Tutorial Review," IEEE Proceedings, Vol. 63, pp. 561-580, 1975.
- [5] Nibras Abo Alzahab et al. Auditory evoked potential EEG-Biometric dataset. PhysioNet. [https://physionet.org/content/auditory-eeg/1.0.0/Filtered\\_Data/#files-panel](https://physionet.org/content/auditory-eeg/1.0.0/Filtered_Data/#files-panel)
- [6] Stoica, Petre, and Randolph L. Moses, 2005. Spectral analysis of signals.