



## Taller de Automatización y Control(TA135)86.09

FACULTAD DE INGENIERÍA UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

# Trabajo Práctico N°2 Péndulo

### Grupo 6

Autor Padrón Mail

Hoffmann, Nicolas 103733 nhoffmann@fi.uba.ar Gusella, Agustín 106101 agusella@fi.uba.ar

29 DE OCTUBRE DEL 2024

#### 1. Introducción

En este trabajo se implementará el péndulo de Furuta no invertido como el mostrado en la Fig. 1. El objetivo que se busca en la materia es poder detener el movimiento del péndulo mediante un servomotor el cual acciona un brazo conectado al mismo utilizando herramientas de control.

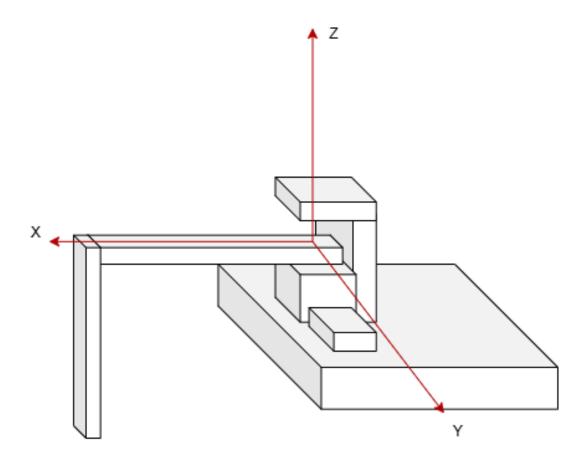


Figura 1: Esquema 3D del péndulo de Furuta.

En particular, buscará un modelo que describa la física del sistema y se identificará la planta que la describe. , Luego, se implementarán distintos tipos de controladores y se observará que ocurre con cada uno.

#### 2. Modelado

#### 2.1. Variables del sistema

Como se mencionó en la introducción, la idea del péndulo de Furuta es controlar la oscilación del péndulo mediante un brazo accionado por un servomotor. Para esto de deben caracterizar tres variables fundamentales para poder modelizar y controlar el mismo. Estas son las siguientes:

- La acción de control u se tomará como el angulo de referencia  $\phi_{ref}$  que se comanda al servo por el Arduino. La forma de comandar dicha acción es mediante un mapeo del ángulo de referencia necesario a señal **PWM** dado que el servomotor es comandado por esta señal.
- El ángulo del péndulo  $\theta$ , el cual es la salida del sistema. El mismo está definido en grados resepecto del eje z tomando sentidos según la vista frontal de la Fig. 2. El angulo de referencia es de  $0^{\circ}$  en el cual el sistema busca mantenerse y es en el cual el mismo se encuentra en equilibrio.
- El ángulo del brazo  $\phi$ , medido en grados y con sentidos indicados en la Fig. 2. Dentro del sistema el ángulo de 0° coincide con el eje x.

Dado el montaje del péndulo el ángulo *phi* se encuentra límitado por la mesa y a su vez la acción de control encotrará las mismas limitaciones pués comendará el ángulo de referencia que debe seguir el brazo. Se deben considerar límites a modo que el péndulo no golpee con la mesa para no frenarlo de manera no deseada y no

introducir dínamicas no deseables al sistema siguiendo de la mejor manera las ecuaciones básicas de un péndulo. Por ende, se toma un límite entre  $-50^{\circ}$  y  $50^{\circ}$  tanto para  $\phi$  y  $\phi_{ref}$ . Además, dado a que se busca linealizar el tema, la dínamica del mismo estará limitada para pequeñas oscilaciones del ángulo  $\phi$ .

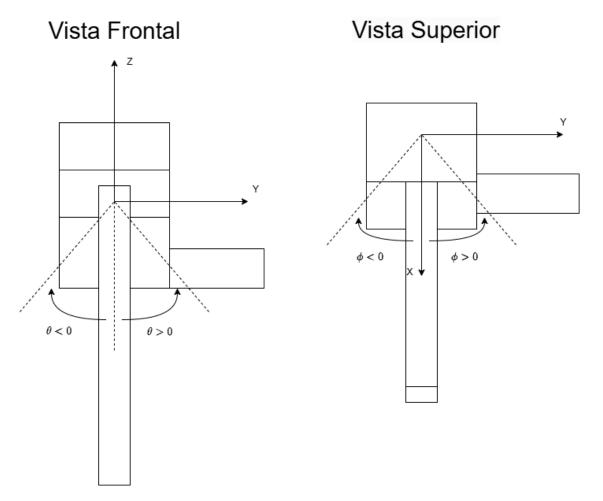


Figura 2: Esquemas 2D del péndulo. Definición de los sentidos de theta y phi.

#### 2.2. Ecuaciones de movimiento

A continuación se buscan las ecuaciones que describen al sistema. Para esto se plantea el Lagrangiano para el centro de masa del péndulo. La posición está dada por:

$$\vec{r} = (r\cos(\phi) - l_{cm}\sin(\theta)\cos(\theta))\hat{x} + (r\sin(\phi) + l_{cm}\sin(\theta)\cos(\phi))\hat{y} - l_{cm}\cos(\theta)\hat{z}. \tag{1}$$

Con r el largo del brazo y  $l_{cm}$  la posición del centro de masa del péndulo(notar que si se pone un peso muy grande en el extremo dicha posición pasa a ser el largo del mismo). Luego la velocidad de cada coordenada se obtiene derivando (1), para cada coordenada se obtiene,

$$\dot{x_{cm}} = -r\sin(\phi)\dot{\phi} - l_{cm}\cos(\theta)\dot{\theta}\sin(\phi) - l_{cm}\sin(\theta)\cos(\phi)\dot{\phi}. \tag{2}$$

$$\dot{y_{cm}} = r\cos(\phi)\dot{\phi} + l_{cm}\cos(\theta)\dot{\theta}\cos(\phi) - l_{cm}\sin(\theta)\sin(\phi)\dot{\phi}. \tag{3}$$

$$z_{cm} = l_{cm} sin(\theta)\dot{\theta}.$$
 (4)

Agrupando todas las expresiones y tomando el módulo al cuadrado,

$$|v_{cm}|^2 = r^2 \dot{\phi}^2 + l_{cm}^2 \cos^2(\theta) \dot{\theta}^2 + l_{cm}^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2 + 2r l_{cm} \cos(\theta) \dot{\phi} \dot{\theta} + l_{cm}^2 \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2.$$
 (5)

Luego, reordenando los términos,

$$|v_{cm}|^2 = r^2 \phi^2 + l_{cm}^2 \dot{\theta}^2 + l_{cm}^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2 + 2 r l_{cm} \cos(\theta) \dot{\phi} \dot{\theta}.$$
 (6)

El Lagrangiano se define como,

$$\mathcal{L} = T - V. \tag{7}$$

Donde T es la energía cinética,

$$T = \frac{1}{2} M_{cm} (r^2 \phi^2 + l_{cm}^2 \dot{\theta}^2 + l_{cm}^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2 + 2 r l_{cm} \cos(\theta) \dot{\phi} \dot{\theta}) + \frac{1}{2} I_b \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)).$$
 (8)

Y V es la energía potencial,

$$V = M_{cm} g l_{cm} cos(\theta). (9)$$

En ambas energías,  $M_c m$  es la masa del péndulo e  $I_c n$  su momento de inercia.  $I_b$  es el momento de inercia de la barra. Finalmente se pueden obtener las ecuaciones que describen el sistema mediante,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i - b_i \dot{q}_i. \tag{10}$$

Con  $b_i$  un coeficiente de amortiguación viscosa y  $\tau$  los torques externos. Luego  $q_i$  son las variables  $\phi$  y  $\theta$  y  $\dot{q}_i$  son sus velocidades respectivamente. Entonces las ecuaciones de movimiento resultan,

$$\ddot{\phi} \Big[ I_b + M_{cm} r^2 + \left( I_{cm} + M_{cm} l_{cm} \sin^2(\theta) \right) \Big] + 2 \left( M_{cm} l_{cm}^2 + I_{cm} \right) \sin(\theta) \cos(\theta) \, \dot{\theta} \, \dot{\phi}$$

$$+ M_{cm} l_{cm} \cos(\theta) \ddot{\theta} - M_{cm} r l_{cm} \sin(\theta) \, \dot{\theta}^2$$

$$= \tau_{servo} - b \, \dot{\phi}.$$

$$(11)$$

$$(M_{cm}l_{cm}^2 - I_{cm})(\ddot{\theta} - \phi^2 sin(\theta)cos(\theta)) + M_{cm}rl_{cm}cos(\theta)\ddot{\phi} - mglsin(\theta) = k\ddot{\phi} - b\dot{\theta}.$$
(12)

#### 2.3. Identificación del Péndulo

A partir de (12) se puede inferir acerca de la dínamica del péndulo. Se puede linealizar dicha ecuación aproximando para pequeñas oscilaciones y considerando bajas velocidades ( $\phi^2 \sim 0$ ). Entonces resulta,

$$M_{cm}rl_{cm}\ddot{\phi} + (M_{cm}l_{cm}^2 + I_{cm})\ddot{\theta} + mgl_{cm}\theta = k\ddot{\phi} - b\dot{\phi}.$$
 (13)

Luego, aplicando la transformada de Laplace,

$$\frac{\theta(s)}{\phi(s)} = \frac{-(k - M_{cm}rl_{cm})s^2}{(M_{cm}l_{cm}^2 + I_{cm})s^2 + bs + mgl_{cm}}.$$
(14)

En la parte superior aparecen dos ceros en cero en el numerador dado a los términos con  $\ddot{\phi}$ . Estos se deben al torque que se aplica en el péndulo por la aceleración del brazo. Por ende, se puede separar en dos transferencias distintas,

$$\frac{\theta(s)}{\phi(s)} = \frac{\theta(s)}{\tau(s)} \frac{\tau(s)}{\phi(s)}.$$
 (15)

Con,

$$\frac{\theta(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{(M_{cm}l_{cm}^2 + I_{cm})s^2 + bs + mgl_{cm}}.$$
(16)

$$\frac{\tau(s)}{\phi(s)} = -\left(k - M_{cm}rl_{cm}\right)s^2. \tag{17}$$

Se buscó identificar los polos del péndulo implementando una regresión lineal de los datos obtenidos de la IMU. Sin embargo, el modelo generado sobreamortiguaba la respuesta en contraste a la respuesta real del sistema. Los polos obtenidos fueron los siguientes,

$$p_1 = -0.2076 + 7.3044i \quad y \quad p_2 = -0.2076 - 7.3044i.$$
 (18)

A continuación se muestra dicha respuesta,

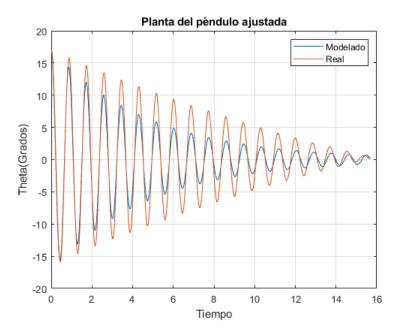


Figura 3: Planta del péndulo sobreamortiguada.

Como se puede ver el modelo sigue perfectamente la frecuencia de oscilación por lo que la parte imaginaria de los polos es una estimación correcta. El problema radica en el amortiguamiento de la señal el cual se encuentra en la parte real de los polos dado a que este es el factor de la exponencial que modula al senoide. Se buscaron multiples causas del problema sin llegar a encontrar el causante de manera satisfactoria. Haciendo pruebas con códigos de compañeros se llegó a inducir que el problema viene en como se transmiten los datos o alguna dinámica de la planta particular. Dado esto se ajustó la parte real de los polos para tener un amortiguamiento que se ajuste a las mediciones, esto se logra disminuyendo el factor de la exponencial. Se proponen los siguentes polos,

$$p_1 = -0.1324 + 7.3044i$$
  $y$   $p_2 = -0.1324 - 7.3044i$ . (19)

El modelo queda entonces,

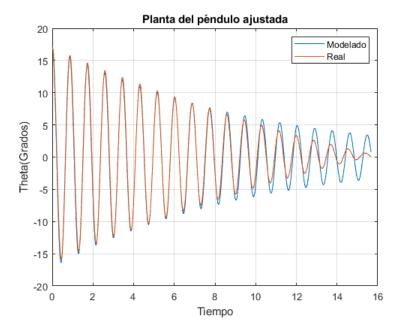


Figura 4: Planta del péndulo con polos ajustados.

Como se puede ver, dicho modelo sigue de forma satisfactoria a la planta real salvo para oscilaciones de baja amplitud, esto se puede atribuir a que para estas amplitudes entran dínamicas más complejas como la fricción dentro del gabinente del ruleman.

#### 2.4. Identificación del Brazo

Otra dínamica fundamental del sistema es la que corresponde al brazo. Como se mencionó anteriormente, el brazo se mueve por acción del servomotor al cual se le manda una señal PWM en base a un angulo de referencia  $\phi_{ref}$ . La transferencia que se desea obtener es,

$$\frac{\phi}{\phi_{ref}}.\tag{20}$$

Como se puede ver en la planta real, cuando se manda una señal al servomotor la respuesta no es instantanea sino que existe una respuesta transistoria la cual puede ser modelada como una planta de orden 2 con la siguiente forma.

$$\frac{\phi}{\phi_{ref}} = \frac{w_0^2}{s^2 + \frac{Q}{w_0}s + w_0^2}. (21)$$

Dada la forma del movimiento se puede inferir que la planta sigue una respuesta sobreamortiguada o críticamente amortiguada.

Como que no es posible identificar las plantas utilizando regresión dado a lo mencionado anteriormente, se buscarán Q y  $w_0$  que mejor se ajusten a la respuesta del brazo obtenida al darle un escalón de  $30^{\circ}$ . Dichos datos se obtienen del potenciometro instalado.

Los parametros seleccionados fueron,

$$Q = 0.5 \quad y \quad w_0 = 15,61. \tag{22}$$

Con dicho valor de Q la respuesta es sobreamortiguada con dos polos en,

$$p_{3,4} = 15, 61. (23)$$

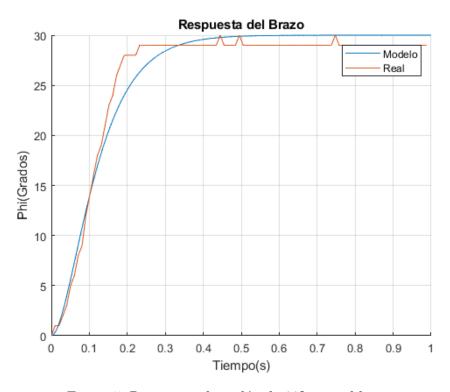


Figura 5: Respuesta al escalón de 30° para el brazo.

#### 2.5. Planta final y respuesta al escalón

La planta final se obtiene como,

$$P(s) = \frac{\theta(s)}{\tau(s)} \frac{\tau(s)}{\phi(s)} \frac{\phi(s)}{\phi_{ref}(s)} = \frac{-(k - M_{cm}rl_{cm})s^2}{(M_{cm}l_{cm}^2 + I_{cm})s^2 + bs + mgl_{cm}} \frac{w_0^2}{s^2 + \frac{Q}{w_0}s + w_0^2}.$$
 (24)

Reemplazando,

$$P(s) = \frac{-Ks^2}{s^2 + 0.256s + 53.4} \frac{245.7}{s^2 + 31.22s + 245.7}.$$
 (25)

El único parámetro restante por determinar es la ganancia K proveniente de la transferencia del torque. Para estó se realizó una respuesta al escalón de  $30^{\circ}$  de la planta P y se ajustó el mismo hasta que coincida con la planta real.

La ganancia obtenida fué,

$$K = 0, 7. (26)$$

La planta final es,

$$P(s) = \frac{-170,57s^2}{(s+15,61)(s^2+31,22s+245,7)}. (27)$$

Luego, la respuesta a un escalón de 30° resulta.

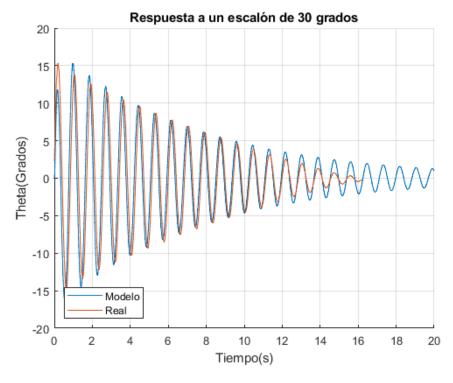


Figura 6: Simulación a una respuesta al escalón de 30° y contraste con la planta real.

Como se puede ver, el modelo sigue de manera satisfactoria a la planta real, como se observó anteriormente, para las pequeñas ondulaciones entran en juego dinámicas difíciles de modelar, al no tenerse en cuenta, el modelo sigue oscilando.

#### 2.6. Representación en variables de estado

Luego de obtener el modelo, se busca la representación en variables de estado del sistema.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} . \tag{28}$$

$$u = \phi_{ref}. \tag{29}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu. \tag{30}$$

$$[\theta] = \dot{y} = C\mathbf{x} + Du. \tag{31}$$

Mediante las ecuaciones (13), antitransformando (21) y reemplazando por coeficientes por los obtenidos en la identificación se termina de obtener la representación.

$$\ddot{\theta} = -0.7\ddot{\phi} - 0.256\dot{\theta} - 53.4\theta. \tag{32}$$

$$\ddot{\phi} = 245, 7\phi_{ref} - 31, 22\dot{\phi} - 245, 7\phi. \tag{33}$$

Reemplazando (12) en (32),

$$\ddot{\theta} = -53, 4\theta - 0, 256\dot{\theta} + 21, 85\dot{\phi} + 171, 99\phi - 171, 99\phi_{ref}. \tag{34}$$

Entonces, el sistema matricial queda,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -53, 4 & -0, 256 & 171, 99 & 21, 85 \\ 0 & -245, 7 & 0 & -31, 22 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -171, 99 \\ 245, 7 \end{bmatrix}$$
(35)

$$C = \begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{bmatrix} \quad D = [0] \tag{36}$$

#### 3. Limitaciones del diseño

En resumen de todo lo desarrollado anteriormente, los polos que identifican a la planta son,

$p_1$	-0,1324+7,3044i
$p_2$	-0.1324 - 7.3044i
$p_3$	15,61
$p_4$	15,61

Tabla 1: Polos de la planta final

Luego, el bode de dicha planta se puede ver en la Fig. 7,

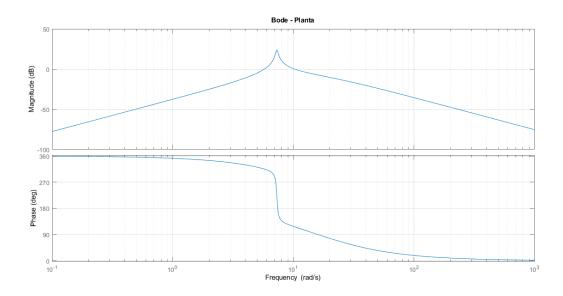


Figura 7: Diagrama de Bode de la Planta.

La planta invierte su fase para una frecuencia de  $7,41\,rad/s$  con una ganancia de 21,9dB. Por ende el sistema es inestable a esa frecuencia.

Dado los polos de nuestra planta, se le exige al controlador una respuesta mínima a dinamicas de  $15,61\,\mathrm{Hz}$ . Esta debe considerarse ya que es característica de la respuesta del servomotor que controla el brazo. Dicho sistema recibe a su vez una señal PWM que debido a las velocidades de procesamiento de arduino y transferencias de datos, se envian a frecuencias de  $100\,\mathrm{Hz}$ . Estas caracteristicas limitan la respuesta mas rapida del servo, que a su vez debido a dinamicas fisicas de movimiento, tiene velocidades angulares máximas para controlar al pendulo. Viendo la Fig. 6 se observa como este puede responder con una velocidad angular de  $1,5\,\frac{\mathrm{rads}}{\mathrm{sec}}$ .

Otras limitaciónes respecto al servomotor, son correspondientes a los limites de angulo máximo y minimo elegidos, 50 y -50 grados respectivamentes. Mediante mediciones del potenciometro relacionamos estos ángulos con los valores límites del PWM para alcanzarlo. Esto nos define el paso mínimo angular que tiene el brazo y también la hipótesis de control para pequeños ángulos. Estas limitaciones influyen notoriamente en la respuesta de control real del brazo y la medición del ángulo del péndulo.

Por último, se capturó el tiempo de procesamiento del arduino desde que recibe los datos de la IMU, hasta que envia la señal de control. Este tiempo resulto ser de  $4\,\mathrm{m}\,\mathrm{sec}$ , generandonos un ancho de banda máximo de aproximadamente  $250\,\mathrm{Hz}$ .

En conjunto, las limitaciones nos definen la velocidad de respuesta posible, la fuerza de la acción de control y tambien que margenes tenemos para mantener a nuestro control estable.

#### 4. Diseño de controladores

En esta parte se busca controlar el sistema con un controlador P, PI y PD. Luego se implementarán los mismos en arduino, para esto se deberán discretizar los mismos utilizando, si es posible, una discretización bilineal o backwards. Dado a esta discretización se deberá incluir un retardo de media muestra dentro de la planta como forma de exponencial o utilizando la aproximación de Padé,

$$e^{Ts/2} \sim \frac{1 - \frac{Ts}{4}s}{1 + \frac{Ts}{4}s}.$$
 (37)

Donde Ts es la frecuencia de muestreo. La misma es de 100Hz.

#### 4.1. Controlador Proporcional

La planta se puede controlar con un proporcional de forma relativamente sencilla pero también se puede tomar del Root-Locus de la planta. En la Fig. 8 de la misma se muestra dicho diagrama. Se tomó en particular  $K_p = 0.3$  para que el sistema no oscile y tenga una respuesta relativamente rápida, si bien hay proporcionales más grandes donde la planta es estable según el diagrama, estos presentaron muchas oscilaciones.

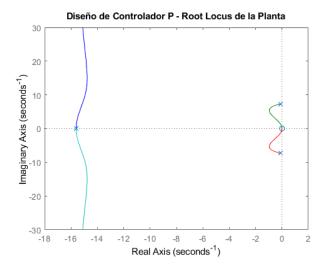


Figura 8: Root-Locus de la Planta.

Luego, se muestra en la Fig. 9 la simulación de una respuesta al impulso en contraste con la real.

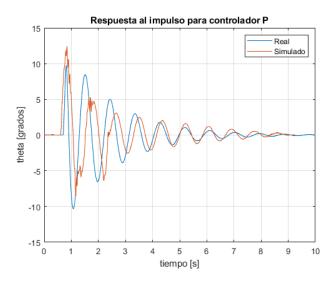


Figura 9: Simulación de la planta ante un impulso vs planta real con controlador P.

La figura mostrada, demuestra que el control proporcional es estable y consigue reducir notoriamente el tiempo de estabilización observado en la Fig.4 a menos de la mitad del tiempo, y tambien reduce el numero de oscilaciones.

#### 4.2. Controlador Proporcional-Intregral

Luego se propuso un controlador PI,

$$C_i = K_p + \frac{K_i}{s}. (38)$$

Se tomó un valor de  $K_i = 3$  y un valor de  $K_p = 0,1$ . Luego se implementó dicho controlador en el arduino mediante discretización Tustin y Backward. Dadas por las siguientes ecuaciones respectivamente,

$$u_k = K_p e_k + k_i (I_{k-1} - \frac{T_s}{2} e_k - \frac{T_s}{2} e_{k-1}).$$
(39)

$$u_k = K_p e_k + k_i (e_{k-1}^{acum} - T_s e_k). (40)$$

Al implementarlo se observó que al dejarlo un tiempo el brazo comenzó a moverse hacia un lado. Esto se atribuye a que el controlador va acumulando error como se puede ver en ambas expresiones en los términos  $e_{k-1}^{acum}$  e  $I_{k-1}$ . Si el péndulo no está calibrado este estará siempre acumulando un error determinado haciendo que la acción de control crezca. Esto se puede solucionar calculando el sesgo que tiene la IMU e incluyendolo

en el modelo para hacer más pequeño el error. Se implementó una función  $get\ bias$  y efectivamente, brazo no se mueve por un tiempo mucho más extendido. Otra forma de corregir esto es disminuir el término  $K_i$  el cual multiplica al error acumulado.

Luego se simuló la respuesta del sistema ante un escalón de 5° de  $\theta$ . Dado a que es imposible mantener el péndulo real en dicha posición pues eso implicaría que el brazo esté acelerando constantemente. En las Fig. 10(a) y 10(b) se muestra la salida del sistema y la acción de control respectivamente.

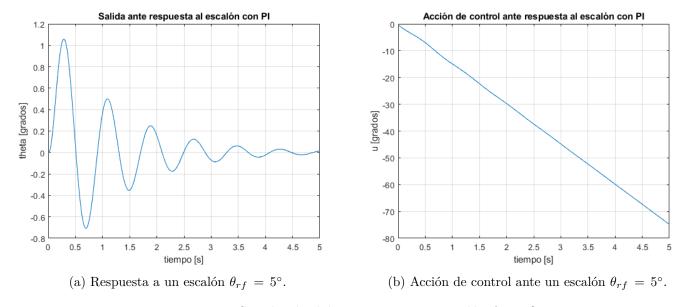


Figura 10: Simulación del sistema ante un escalón  $\theta = 5^{\circ}$ 

Como se puede ver en ambas figuras lo que ocurre es que el el péndulo vuelve a su punto de equilibrio  $\theta=0^{\circ}$  mientras que la acción de control va aumentando en módulo de forma lineal. Esto ocurre dado que, al sumar un escalón de 5 grados y que el péndulo se encuentra en su posición de equilibrio, se integra un error constante la cual se va acumulando. Esto provoca que la acciónd e control crezca indefinidamente.

#### 4.3. Controlador Proporcional-Derivativo

Finalmente, se implementa un PD,

$$C_d = K_p + K_d s. (41)$$

Se obtuvo un  $K_p = 0.3$  y un  $K_d = 0.0005$  intentado de que el controlador sea lo más rápido posible sin que el brazo tenga muchas oscilaciones. Los métodos *Tustin* y *Backwards* son los siguentes,

$$u_k = K_p e_k + k_d \left(2 \frac{e_k - e_{k-1}}{T_s} - D_{k-1}\right).$$
(42)

$$u_k = K_p e_k + k_d \left(2 \frac{e_k - e_{k-1}}{T_s}\right).$$
(43)

A continuación se muestra un contraste entre simulación y planta real ante un impulso en la Fig. 11.

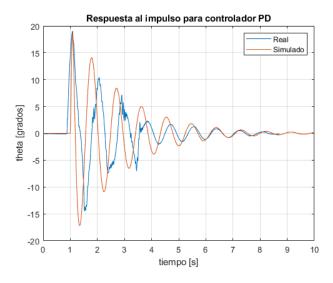


Figura 11: Simulación de la planta ante un impulso vs planta real con controlador PD.

Se destaca como la respuesta obtenida responde de manera satisfactoria tanto en amplitud como en frecuencia a la respuesta simulada. Esta forma de controlar tiene la ventaja de poder responder de forma rápida, pero es sensible al ruido inherente por la medición y las limitaciones de la planta como por ejemplo el angulo de paso mínimo del brazo y que por ello no siempre obtiene la estabilización centrada en cero.

Esta observación toma mas importancia al momento de repetir el experimento sin la goma. Ya que la planta y el control fueron diseñados considerando esta, era de esperar que la respuesta variase. Fue una sorpresa ver que el pendulo frente a un desvío pequeño de la posición de estabilidad o ruido, comenzó a comandar una acción de control fuerte, sacandolo de el estado estacionario e incluso llegando a saturar la acción de control. Se concluye en que la goma aporta un efecto el cual mitiga el ruido y tambien amortigua las osilaciones. Esto significa que para resolver este problema, habria que elegir un Kd mas bajo todavia.

En contraste con la respuesta obtenida con el controlador proporcional, se nota la semejanza entre ambas. Es coherente esta similitud ya que el factor de Kd es demasiado pequeño. Como diferencia entre ambas, se puede apreciar que cerca del valor de estabilización el proporcional es mas fiel a la simulación, lo cual puede explicarse por el factor de corrección influenciado por la diferencia de errores previos. Este genera más oscilaciones pero consigue un tiempo de estabilización menor.

#### 5. Conclusiones

A lo largo del presente informe se mostraron las dificultades, diferencias y utilidad de generar un control a partir de una simulación de la planta real, para luego ser contrastada. Diversos problemas detallados previamente provocaron la busqueda de diferentes metodos alternativos, como la aproximación de parametros por minimos cuadrados y los modelos de caja negra, que fueron combinados para modelar a la planta del pendulo de furuta. A pesar de estos, se logró obtener una fiel respuesta a lo experimentado con la planta real. Esta experiencia nos lleva a considerar que al momento de llevar a cabo un proyecto, no hay un solo camino para obtener el objetivo. Respecto a los conceptos y prácticas implementadas, se afianzaron los conocimientos y profundizaron las ideas sobre como actuan los diferentes tipos de control con sus ventajas y desventajas como lo es el error acumulado en un control PI o la sensibilidad al ruido en uno PD.