MATH

Chapitre II
Logique de propositions

Hypothèse de départ

Attention à la différence entre le langage usuel et le langage mathématique

La logique mathématique a des règles internes qui ne prennent du sens que dans un contexte bien délimité

Exemple

« Tous les Ragnoks chmulent; Org est un Ragnok; donc Org chmule »

La seule structure de la phrase initiale assure que la conclusion qu'elle énonce est vraie, même si on ne sait pas ce qu'est un Ragnok ou ce que chmuler veut dire.

Nous allons nous intéresser à la logique mathématique et au raisonnement valide.

Hypothèse de départ

Le raisonnement valide permet d'augmenter la certitude de la véracité des conclusions tirées sans pour autant connaitre l'interprétation des assertions.

Si tous les A vérifient la propriétés P et que W est un A, alors W vérifie P

Attention, un raisonnement non valide ne veut pas dire raisonnement faux

Définition

- Une **proposition** est un énoncé déclaratif dont on peut dire s’il est **vrai** (valeur **1**) ou s’il est **faux** (valeur **0**), indépendamment de tout contexte de lieu, de temps, ou de personne qui le prononce.

- Un énoncé qui est à la fois vrai et faux n’est pas une proposition

- On désigne une proposition par les lettres p, q, …

- Exemples
  - p: Bruxelles est une capitale, q: 3 est négatif
  - Quel jour sommes-nous?, X > Y

Connecteurs logiques

- A partir d’une, deux ou plusieurs propositions, on peut créer de nouvelles propositions à l’aide de connecteurs logiques

- ‘non’
- ‘et’
- ‘ou’
- ‘si … alors’
- ‘si et seulement si’

La négation - **non**

- La **négation** d'une proposition p, notée **non p** ou **¬p**, est la proposition qui est vraie lorsque p est fausse et qui est fausse lorsque p est vraie
- **Table de vérité**

p	¬p
1	0
0	1

- Propriété: la négation de la négation d'une propriété p est la propriété p elle-même: **non (non p) = p**
- Traduction usuelle: « non », « il est faux que », « ne … pas »
- Attention: négation, pas contraire

La conjonction - **et**

- La conjonction de 2 propositions est une proposition qui est vraie si les 2 propositions sont simultanément vraies. Elle est fausse dès qu'au moins l'une des propositions est fausse. Elle est notée **p∧q**

- **Table de vérité**

p	q	p∧q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Traduction usuelle: « et », « mais », « quoique », « bien que »
- En langage usuel, on interprète le « et » dans le sens de **l'union**, alors qu'en logique, le « et » doit être interprété au sens de **l'intersection**

La disjonction – **ou inclusif**

- La disjonction de 2 propositions est une proposition qui est vraie dès qu'au moins une des 2 propositions est vraie. Elle est fausse si les 2 propositions sont simultanément fausses. Elle est notée **p**∨**q**

- **Table de vérité**

p	q	p∨q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Traduction usuelle: « ou », « à moins que »
- Soit l'un et pas l'autre, soit l'autre et pas l'un, soit les deux en même temps

La disjonction – **ou inclusif**

Attention, dans le langage usuel, le ou est souvent exclusif

- Mon ami viendra aujourd’hui ou demain, cela sous-entend qu’il ne viendra qu’une seule fois

Dans le langage mathématique, le ou est toujours inclusif

L’implication – **si … alors**

- Si p et q sont 2 propositions, alors l’implication « si p alors q » est une proposition qui est vraie si p est fausse, ou bien si p et q sont simultanément vraies. Elle est fausse uniquement si l’antécédent p est vrai et le conséquent q est faux. Elle est notée **$p \Rightarrow q$**

- **Table de vérité**

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- Traduction usuelle: « si … alors », « implique »

L’implication – **si … alors**

- L’implication est vraie même lorsque la proposition de gauche est fausse !!!

- S’il pleut, alors je reste à la maison
  - S’il pleut et que je reste à la maison, elle est vraie (1 – 1)
  - S’il ne pleut pas et que je reste à la maison, elle est vraie (0 – 1)
  - S’il ne pleut pas et que je sors, elle est vraie (0 – 0)

  - Elle est uniquement fausse si il pleut et que je sors (1 – 0)

L’implication – **si … alors**

- L’implication **p⇒q**, signifie que
  - q est une condition **nécessaire** pour p
  - p est une condition **suffisante** pour q

- Il pleut implique que l’herbe est mouillée ou s’il pleut alors l’herbe est mouillée
  - Il **faut** « l’herbe est mouillée » **pour avoir** « il pleut »
    - « il pleut » ne peut pas être vrai si « l’herbe est mouillée » n’est pas vrai
    - ‘l’herbe est mouillée » ne garantit pas « il pleut », il peut y avoir d’autres causes
  - Il **suffit de** « il pleut » **pour avoir** « l’herbe est mouillée »
    - « il pleut » garantit « l’herbe est mouillée »
    - « l’herbe est mouillée » peut être vrai sans avoir « il pleut »
- Si le chien aboie, alors il vit
  - Il suffit que le chien aboie pour qu’il vive
  - Il est nécessaire qu’il vive pour qu’il aboie

L’implication – **si … alors**

Si « $x.y = 0, alors\ x = 0$ » Proposition vraie ou fausse ???

Fausse car il n’est pas nécessaire que $x = 0$ pour avoir $x.y = 0$

Avec $x = 1\ et\ y = 0$, on a quand même $x.y = 0$

L’équivalence – **si et seulement si**

- L’équivalence de 2 propositions p et q est une proposition qui est vraie lorsque p et q ont même valeur de vérité. On dit que p est une condition nécessaire et suffisante de q. Elle est notée **p⟺q**

- **Table de vérité**

p	q	p⟺q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Traduction usuelle: « si et seulement si », « équivaut à », équivaut à dire », « revient à dire »

L'équivalence – **si et seulement si**

- L'équivalence **p**$\Leftrightarrow$**q**, signifie que
  - p est nécessaire et suffisante pour q
  - q est nécessaire et suffisante pour p

- Dans la famille des triangles, 3 angles de même amplitude est équivalent à 3 côtés de même longueur
  - **Pour avoir** les 3 angles de même amplitude, **il faut et il suffit d'avoir** 3 côtés de même longueur
  - **Pour avoir** les 3 côtés de même longueur, **il faut et il suffit d'avoir** 3 angles de même amplitude

L'équivalence – **si et seulement si**

- **$q \Rightarrow p$** est appelée réciproque de **$p \Rightarrow q$**

- De nombreuses implications sont vraies sans que la réciproque soit vraie

- **Exemple :** "$x = 0 \Rightarrow x \cdot y = 0$" est-elle vraie ? Qu'en est-il de sa réciproque ?

  "$x = 0 \Rightarrow x \cdot y = 0$" est vraie alors que "$x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$" peut être fausse.

Autres types de connecteur

- Connecteur surtout utilisé en informatique

- NOR ou NOT OR

p	q	p NOR q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Autres types de connecteur

- XOR (ou exclusif)

p	q	p XOR q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Autres types de connecteur

- NAND (NOT AND)

p	q	p NAND q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Contraposition d’une implication

- La contraposition est un type de raisonnement consistant à affirmer « si non q alors non p » à partir de l’implication « si p alors q »

- $p \Rightarrow q$ est équivalent à $\neg q \Rightarrow \neg p$

Si n est un multiple de 9, alors n n’est pas un nombre premier. Sa contraposée est si n est un nombre premier, alors n n’est pas un multiple de 9

Si un homme est marié, alors il ne trompe pas sa femme. Sa contraposée est si un homme trompe sa femme, alors il n’est pas marié. C’est exact d’un point de vue logique, mais discutable au niveau sens

Tautologie

- Une **tautologie** est une combinaison de propositions qui est toujours vraie qu'elle que soit la valeur des différentes propositions

- Exemple:
  - $p \Rightarrow p$ (si p est vraie, l'implication est vraie et si p est fausse, l'implication est vraie)
  - $p \vee \neg p$ (si p est vraie, $\neg p$ est fausse et la disjonction est vraie; si p est fausse, $\neg p$ est vraie et la disjonction est vraie)

Contradiction

- Une contradiction est une combinaison de propositions qui est toujours fausse quelle que soit la valeur des différentes propositions

- Exemple
  - $p \wedge \neg p$ (si p est vraie, $\neg p$ est fausse et la conjonction est fausse; si p est fausse, $\neg p$ est vraie et la conjonction est fausse)

Exercices

1. Soit la proposition p: « il pleut » et q « il fait froid », énoncer des phrases qui traduisent chacun des énoncés suivants:
   a. $\neg p$
   b. $p \Rightarrow q$
   c. $p \vee q$
   d. $q \vee (\neg p)$
2. Soit p: « il est grand » et q: « il est beau ». Ecrire chacun des énoncés sous forme symbolique:
   a. Il est grand et beau
   b. Il n’est ni grand, ni beau
   c. Il est grand mais pas beau
   d. Il est grand ou petit et beau

Exercices

3. Soit p et q, 2 propositions. Montrez que $\neg(p \Rightarrow q)$ est équivalent à $p \wedge \neg q$

Quantification

- X est un mouton, n'est pas une proposition, mais un **prédicat**
- A l'aide des quantificateurs, on peut en faire des propositions

- Quantificateur existentiel: Il existe ($\exists$) ou il existe au moins un
  - $\exists x : (3x + 2 = 0)$ est vrai, sa valeur est $\frac{-2}{3}$
  - $\exists x \in \mathbb{N} : (3x + 2 = 0)$ est faux
- Quantificateur universel: pour tout ($\forall$)
  - Si on nomme M(x) la propriété « x est mortel » et H l'ensemble des hommes
  - $\forall x \in H : M(x)$ est vrai

Négation des quantificateurs

- La négation de $\exists x : p(X)$ s'écrit $\forall x : \neg p(x)$

- La négation de $\forall x : p(X)$ s'écrit $\exists x : \neg p(x)$

- Difficulté de prouver la non existence -> Impossibilité ou lourdeur de prouver $\forall x : \neg p(x)$

Paradoxe du menteur

- Que penser de l’affirmation « je mens » ou « cette affirmation est fausse »?

- S’il est vrai que la phrase est fausse, alors elle ne peut être vraie et s’il est faux qu’elle soit vraie, alors elle ne peut être fausse

- Cette phrase réalise une action du fait de son énonciation c’est une contradiction performative (affirmation qui n’est pas contradictoire par elle-même, mais qui entre en contradiction du fait que quelqu’un ait pu l’énoncer.

Exercices

4. Donner la négation de
   a. Toutes les boules de l’urne sont rouges
   b. Certains nombres entiers sont pairs
   c. Tout nombre entier divisible par 4 se termine par 4

5. Ecrire à l’aide de quantificateurs les phrases suivantes:
   a. Pour tout nombre réel, son carré est positif
   b. Aucun carré n’a cinq côtés

6. Ecrire le négatif des 2 phrases précédentes

Exercices

7. Soit L l’ensemble des langues vivantes étudiées dans une école. Soit E l’ensemble des élèves de cette école. L’énoncé « l’élève x étudie la langue y » se symbolise par « x*y ». Traduire en français les 6 propositions suivantes:
   1. p1: $\forall x \in E, \forall y \in L\ x * y$
   2. p2: $\forall x \in E, \exists y \in L\ x * y$
   3. p3: $\exists x \in E, \exists y \in L\ x * y$
   4. p4: $\exists x \in E, \forall y \in L\ x * y$
   5. p5: $\exists y \in L, \forall x \in E\ x * y$
   6. p6: $\exists y \in L, \exists x \in E\ x * y$

Exercices

8. Enoncer la contraposée des propositions suivantes:
   a. Il suffit que la neige arrive pour que je sois malade
   b. Je ne joue au tennis que s’il fait beau
   c. Il faut que tu ne boives pas pour conduire

Exercices

9. Quelles sont les cartes qui doivent être retournées pour vérifier l'hypothèse?

Exercices

10. Quatre enfants sont assis les uns à côté des autres. A l'aide des informations suivantes, déterminer la position de chaque enfant
    - Achille a un seul voisin et ce n'est pas Frédéric
    - Julien a deux voisins mais aucun des deux ne se prénomme Léonard
    - Si Achille veut voir les autres, il doit tourner sa tête vers sa gauche

Exercices

11. « S’il pleut, Jean prend un parapluie. Béatrice ne prend jamais de parapluie s’il ne pleut pas et en prend toujours un quand il pleut ». Que peut-on dire des affirmations suivantes? Justifier vos réponses en introduisant 3 propositions logiques p, q et r.
    a. Jean se promène avec un parapluie
    b. Jean se promène sans parapluie
    c. Béatrice se promène avec un parapluie
    d. Béatrice se promène sans parapluie
    e. Il ne pleut pas
    f. Il pleut

Exercices

12. Quatre amies tentent d'expliquer au facteur où habite leur camarade Anne à laquelle il doit livrer un colis. Sur ce colis figure le nom de la rue, mais pas le numéro de la maison. Elles décrivent la maison de mémoire, mais malheureusement un seul détail, sur les quatre cités par chacune est exact et ce détail n'a été décrit qu'une seule fois.
    a. D'après Marie, c'est au 24, le toit de la maison est pointu, le portail en bois et il y a deux fenêtres sur la façade
    b. D'après Julie, c'est au 14, le toit de la maison est arrondi, le portail en PVC et il y a quatre fenêtres sur la façade
    c. D'après Clémence, c'est au 4, le toit de la maison est pointu, le portail en fer forgé et il y a deux fenêtres à la façade
    d. D'après Pauline, c'est au 4, le toit de la maison est plat, le portail est en bois et il y a deux fenêtres sur la façade

    A quel numéro le facteur va-t-il livrer le colis d'Anne?