# Chapitre IV

# Algèbre linéaire
# Partie 3

# Exercice - 1

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer

- $AC$
- $CB$
- $BC$
- $A^3$
- $AB$

# Exercice - 2

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Calculer

- $A^{-1}$
- ${}^{t}B$
- $B^{-1}$

# Exercice - 3

Reprenons la matrice des prix des timbres en fonction du poids des envois. Supposons que nous voulions augmenter tous les tarifs de 10%. Calculer les nouveaux tarifs.

| Lettre : Tarif | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Jusqu'à** | **Normal** | **Tarif 1** | **Tarif 2** | **Tarif 3** |
| 20g | 0,46 € | 2,82 € | 3,35 € | 4,12 € |
| 50g | 0,69 € | 3,05 € | 3,58 € | 4,34 € |
| 100g | 1,02 € | 3,38 € | 3,92 € | 4,68 € |

# Déterminant

Le déterminant d’une matrice carrée est un outil qui permet

- De vérifier l’inversibilité d’une matrice
- De calculer l’inverse d’une matrice
- …

# Formule générale

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$

Le déterminant: $\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$

Où $\mathfrak{S}$ désigne l'ensemble des permutations de $\{1,2,\ldots,n\}$ et $\varepsilon$ la signature de la permutation $\sigma$

# Ordre 2 et Ordre 3

Matrice d'ordre 2: $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, $\det(A) = a_{1,1}.a_{2,2} - a_{1,2}.a_{2,1}$

Matrice d'ordre 3: $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = a_{1,1}.a_{2,2}.a_{3,3} + a_{2,1}.a_{3,2}.a_{1,3} + a_{3,1}.a_{1,2}.a_{2,3} - a_{3,1}.a_{2,2}.a_{1,3} - a_{2,1}.a_{3,3}.a_{1,2} - a_{1,1}.a_{3,2}.a_{2,3}$$

# Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, d\acute{e}t(A) = 1.4 - 1.2 = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, d\acute{e}t(A) = 1.0.1 + 2.2.0 + 1.3.1 - 1.0.0 - 1.2.3 - 2.1.1 = -5$$

# Règle de Sarrus

Matrice d'ordre 3: $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = a_{1,1}.a_{2,2}.a_{3,3} + a_{2,1}.a_{3,2}.a_{1,3} + a_{3,1}.a_{1,2}.a_{2,3} - a_{3,1}.a_{2,2}.a_{1,3} - a_{2,1}.a_{3,3}.a_{1,2} - a_{1,1}.a_{3,2}.a_{2,3}$$

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{array} \end{array}$$

# Méthode des cofacteurs

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$

On appelle **mineur** relatif au terme $a_{i,j}$, le déterminant $A_{ij}$ de la matrice obtenue en supprimant dans A la ligne i et la colonne j

# Méthode des cofacteurs

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \rightarrow A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

# Méthode des cofacteurs

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

# Méthode des cofacteurs

On appelle cofacteur $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ de l'élément $a_{i,j}$ et $(\Delta_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice des cofacteurs

$$(-1)^{i+j} = \pm 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} + & - & \cdots & - \\ - & + & \cdots & + \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ - & + & \cdots & + \end{pmatrix}$$

# Méthode des cofacteurs

Formules de Laplace: on peut calculer le déterminant d'une matrice A en fonction des coefficients d'une seule colonne ou d'une seule ligne de la matrice et des cofacteurs correspondants.

Par rapport à la colonne j: $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\Delta_{kj}$

Par rapport à la ligne i: $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{ik}$

# Méthode des cofacteurs

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|A| = a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23}$$

$$|A| = 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -2.3 + 0 + (-1).(-1) = -6 + 1 = -5$$

# Méthode des cofacteurs

Particulièrement simple lorsque la matrice contient plusieurs 0

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|A| = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

$$|A| = 0 + 0 + 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2.1 = 2$$

# Propriétés

- On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à une ligne (resp. une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes)

- Si on permute 2 lignes (2colonnes), on change le signe du déterminant

# Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{L_2 - L_3 \to L_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

# Inverse d'une matrice

Une matrice est inversible si $\det(A) \neq 0$

Alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ {}^{t}\Delta$

# Inverse d’une matrice

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 1 \neq 0$

$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$