Chapitre V

Calcul itératif

Principe

A partir d’une valeur qui est une estimation de la solution du problème posé (ou une valeur approchée), on applique une méthode de calcul qui permet d’améliorer la solution estimée.

Ensuite on reproduit cette opération autant de fois que nécessaire pour obtenir une solution avec une précision suffisante.

C’est une méthode qui est souvent utilisée lorsqu’il n’existe pas de solution directe à un problème donné.

Méthode de Jacobi

Méthode itérative pour résoudre un système d'équation $AX = B$

- ✓Méthode vue au cours du chapitre IV – Algèbre linéaire
- ✓Elle est basée sur la décomposition de la matrice A en une somme de 2 matrices $A = M - N$ avec M inversible

- ✓$AX = B \Leftrightarrow (M - N)X = B \Leftrightarrow MX = NX + B \Leftrightarrow X = M^{-1}NX + M^{-1}B$

- ✓$\begin{cases} x^0 \\ x^{n+1} = M^{-1}Nx^n + M^{-1}B \end{cases}$
- ✓Critère d'arrêt: $|x^{n+1} - x^n| < \varepsilon$

Méthode de Jacobi

$$A = D - E - F$$

D est la matrice diagonale de A
$-E$ est la matrice triangulaire inférieure de A
$-F$ est la matrice triangulaire supérieure de A

$$M = D$$
$$N = E + F$$

Méthode de Gauss-Seidel

$$A = D + E + F$$

D est la matrice diagonale de A
E est la matrice triangulaire inférieure de A
F est la matrice triangulaire supérieure de A

$$M = D + \mathrm{E}$$
$$N = F$$

Calcul écrit

Dès les primaires, nous sommes confrontés à des processus itératif: exemple, le calcul écrit

Exemple: 147636 / 27

Calcul écrit

1

	1	4	7	6	3	6	2	7	

2

	1	4	7	6	3	6	2	7	
-	1	3	5				5		
		1	2						

3

	1	4	7	6	3	6	2	7	
-	1	3	5				5	4	
		1	2	6					
-		1	0	8					
			1	8					

4

	1	4	7	6	3	6	2	7	
-	1	3	5				5	4	6
		1	2	6					
-		1	0	8					
			1	8	3				
-			1	6	2				
				2	1				

5

	1	4	7	6	3	6	2	7		
-	1	3	5				5	4	6	8
		1	2	6						
-		1	0	8						
			1	8	3					
-			1	6	2					
				2	1	6				
-				2	1	6				
						0				

Secondaire

Plus tard, lors du secondaire (cela peut varier en fonction du cours de maths suivi: 2, 4 ou 6 heures)

- Division euclidienne
- Les suites et les mathématiques financières
- Calcul intégrale
- Calcul de limite
- …

Division euclidienne

La division d'un polynôme par un autre:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

divisé par

$$b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$$

Division euclidienne

Exemple: $6x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 2$ divisé par $x^2 + 2$

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
6x^4 & -2x^3 & +9x^2 & & -2 & x^2 & +2 & \\ \cline{6-8}
-6x^4 & & -12x^2 & & & 6x^2 & -2x & -3 \\ \cline{1-5}
& -2x^3 & -3x^2 & & -2 & & & \\
& 2x^3 & & +4x & & & & \\ \cline{2-5}
& & -3x^2 & +4x & -2 & & & \\
& & 3x^2 & & +6 & & & \\ \cline{3-5}
& & & 4x & +4 & & &
\end{array}
$$

$$\frac{6x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 2}{x^2 + 2} = 6x^2 - 2x - 3 + \frac{4x + 4}{x^2 + 2}$$

Les suites

Suite arithmétique: $u_{n+1} = u_n + r$

$$\begin{cases} u_1 = -4 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{3}{4} \end{cases}$$

$-4 ; -3{,}25 ; -2{,}5 ; -1{,}75 ; -1 ; -0{,}25 ; 0{,}50 ; 1{,}25 ; 2 ; 2{,}75 ; \; \ldots$

$u_n = u_1 + (n-1) \times r$

Les suites

Suite géométriques: $u_{n+1} = u_n \times q$

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n \times \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$2 \,;\, 3 \,;\, \frac{9}{2} \,;\, \frac{27}{4} \,;\, \frac{81}{8} \,;\, \frac{243}{16} \,;\, \frac{729}{32} \,;\, \frac{2187}{64} \,;\, \ldots$$

$$u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$$

L’échiquier de Sissa

En Inde, le roi Belkib (ou Bathait), qui s'ennuie à la cour, demande qu'on lui invente un jeu pour le distraire.

Le sage Sissa invente alors un jeu d‘échec, ce qui ravit le roi.

Pour remercier Sissa, le roi lui demande de choisir sa récompense, aussi fastueuse qu'elle puisse être.

Sissa choisit de demander au roi de prendre le plateau du jeu et, sur la première case, poser un grain de riz, ensuite deux sur la deuxième, puis quatre sur la troisième, et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre de grains de riz que l’on met.

L’échiquier de Sissa

Le roi et la cour sont amusés par la modestie de cette demande.

Mais lorsqu'on la met en œuvre, on s'aperçoit qu'il n'y a pas assez de grains de riz dans tout le royaume pour la satisfaire.

Si l'on se base sur la production annuelle de riz à l'heure actuelle (479 millions de tonnes par an), il faudrait un peu plus de 1 539 années pour réunir tous les grains de riz nécessaires à la réalisation de ce problème.

L’échiquier de Sissa

1	2	4	8	16	32	64	128
256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
65536	131072	262144	524288	1048576	2097152	4194304	8388608
16777216	33554432	67108864	134217728	268435456	536870912	1073741824	2147483648
4294967296	8589934592	17179869184	34359738368	68719476736	137438953472	274877906944	549755813888
1099511627776	2199023255552	4398046511104	8796093022208	17592186044416	35184372088832	70368744177664	140737488355328
281474976710656	562949953421312	1125899906842624	2251799813685248	4503599627370496	9007199254740992	18014398509481984	36028797018963968
72057594037927936	144115188075855872	288230376151711744	576460752303423488	1152921504606846976	2305843009213693952	4611686018427387904	9223372036854775808

Les suites

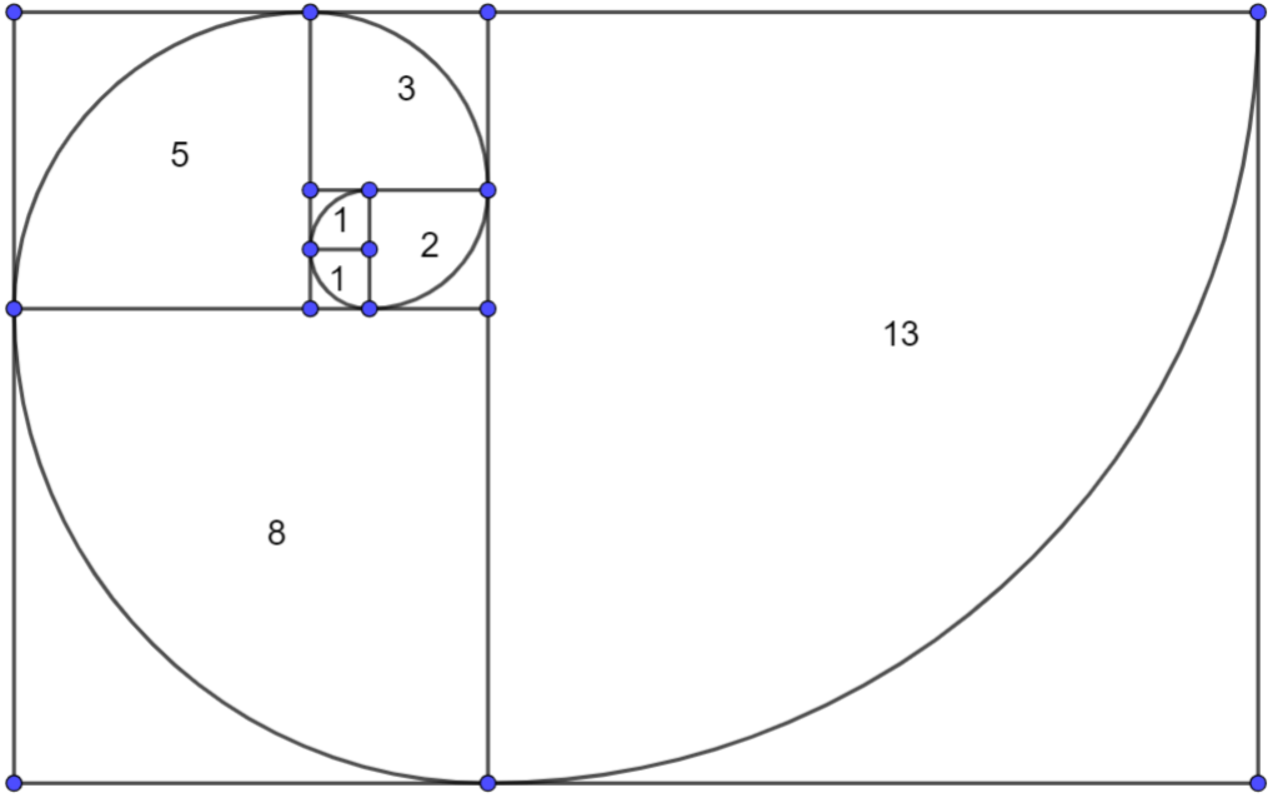
La suite de Fibonacci

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \end{cases}$$

$$1\,;1\,;2\,;3\,;5\,;8\,;13\,;21\,;34\,;55\,;89\,;\ldots$$

Les suites

La suite de Fibonacci et le nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



$$\frac{1}{1} ; \frac{2}{1} ; \frac{3}{2} ; \frac{5}{3} ; \frac{8}{5} ; \frac{13}{8} ; \frac{21}{13} ; \dots \to \phi$$

$1 ; 2 ; 1{,}5 ; 1{,}666 \dots ; 1{,}6 ; 1{,}625 ; 1{,}6153846 ; \dots$

$$\phi = 1{,}61803398875$$

Les suites

La suite de Conway

1

11

21

1211

111221

312211

13112221

1113213211

31131212131221

….

Mathématique financière

En mathématiques financières, l'utilisation des suites permet

Intérêt simple : suite arithmétique

Intérêt composé : suite géométrique

Paradoxe de Zénon

Un paradoxe est une idée ou une proposition à première vue surprenante ou choquante, c'est-à-dire allant contre le sens commun.

Le paradoxe en est venu à désigner une proposition qui contient ou semble contenir une contradiction logique, ou un raisonnement qui, bien que sans faille apparente, aboutit à une absurdité, ou encore une situation qui contredit l'intuition commune.

Paradoxe de Zénon

Imaginons qu’une fourmi, doit se rendre d’un point A à un point B situé 8cm plus loin. Zénon dresse un tableau en décomposant le parcours de la fourmi en différentes étapes : chaque fois que la fourmi parcourt la moitié de la distance qui lui reste à réaliser, il indique son emplacement et ajoute une nouvelle ligne au tableau.

Paradoxe de Zénon

A chaque étape, elle parcourt la moitié du chemin restant

Lors de la première étape, elle parcourt 4 cm

Lors de la deuxième étape, elle parcourt 2 cm

Lors de la troisième étape, elle parcourt 1 cm

…

Paradoxe de Zénon

Zénon affirme donc que la fourmi n’atteint jamais le point B, puisqu’on peut toujours diviser la distance restante en 2.

En analyse moderne, on sait maintenant qu’une suite infinie de nombres strictement positifs peut converger vers un résultat fini.

Les suites

0, 1 ,3, 2, 5, 7, 9, 4, 10, 6, 8, 21, 11, 20, 22, 23, 13, 24, 26, 28, 40, 42, 44, 25, 15, 17, 46, 48, 60, 62, 19, 31, 12, 33, 27, 35, 29, 14, 64, 66, 16, 37, 68, 41, 80, 18, 82, 84, 86, 43, 30, 88, 32, 200, 45, 34, 34, 202, 47, 49, 201, 204, 36, 61, 206, 208, 220, 222, 63, 39, 65, 51, 67, 53, 224, 226, 228, 240, 69, 55, 81, 57, 203, 205, 59, 83, 71, 73, 85, 75, 38, 50, 242, 87, 89, 244, 77, 79, 210, 91, 52, 54, 93, 212, 56, 58, 70, 214, 216, 207, 218, 72, 74, 76, 78, 95, 211, …

1	-	3	-	2	-	1	-	5	-	1	-	0	-	3	-	2	-	3	-	2	-	2	-	3	-	4	-	2	-	1	-	7	-	1
|																																		|
2		3	-	2	-	1	-	2	-	5	-	6	-	5	-	8	-	7	-	0	-	2	-	1	-	4	-	2	-	1	-	6		5
|		|																														|		|
1		9		6	-	9	-	5	-	5	-	8	-	1	-	5	-	7	-	2	-	0	-	3	-	2	-	0	-	5		2		1
|		|		|																								|		|		|
0		4		0		2	-	0	-	1	-	2	-	0	-	4	-	3	-	6	-	6	-	1	-	2	-	0		5		0		1
|		|		|		|																				|		|		|		|
1		5		4		9		3	-	7	-	6	-	8	-	4	-	1	-	8	-	0	-	1	-	8		6		9		7		1
|		|		|		|		|																|		|		|		|		|
8		2		2		4		6		4	-	6	-	4	-	8	-	6	-	0	-	6	-	2		8		2		8		2		2
|		|		|		|		|		|												|		|		|		|		|		|
9		5		8		7		1		7		2	-	3	-	1	-	3	-	2	-	4		1		2		0		3		1		1
|		|		|		|		|		|		|								|		|		|		|		|		|		|
6		1		2		4		6		1		2		9	-	4	-	1	-	0		2		9		8		8		7		8		0
|		|		|		|		|		|		|		|				|		|		|		|		|		|		|		|
9		9		2		2		6		5		2		7		0	-	1		6		6		3		4		2		1		7		5
|		|		|		|		|		|		|		|				|		|		|		|		|		|		|		|		|
0		0		6		0		4		1		0		5	-	2	-	3		8		2		1		8		2		7		2		1
|		|		|		|		|		|		|								|		|		|		|		|		|		|		|
5		5		5		5		5		5		2	-	1	-	1	-	1	-	2		8		1		6		0		3		7		1
|		|		|		|		|		|												|		|		|		|		|		|		|
2		2		2		4		4		2	-	4	-	4	-	2	-	4	-	0	-	4		2		4		2		8		4		4
|		|		|		|		|																|		|		|		|		|		|
9		9		4		3		1	-	9	-	2	-	5	-	3	-	7	-	2	-	3	-	3		3		2		5		7		1
|		|		|		|																				|		|		|		|		|
0		7		2		5	-	4	-	0	-	0	-	2	-	2	-	3	-	8	-	8	-	0	-	3		2		7		6		1
|		|		|																								|		|		|		|
2		7		2	-	3	-	5	-	7	-	6	-	1	-	5	-	5	-	6	-	9	-	3	-	3	-	6		5		7		3
|		|																												|		|		|
0		7	-	4	-	4	-	2	-	9	-	8	-	7	-	8	-	2	-	4	-	2	-	0	-	5	-	8	-	3		8		·
|																																|		|
1	-	1	-	4	-	9	-	9	-	9	-	2	-	9	-	7	-	9	-	0	-	9	-	1	-	1	-	2	-	5	-	9		·

Les suites

```
1 - 3 - 2 - 1 - 5 - 1 - 0 - 3 - 2 - 3 - 2 - 2 - 3 - 4 - 2 - 1 - 7 - 1
|                                                                   |
2   3 - 2 - 1 - 2 - 5 - 6 - 5 - 8 - 7 - 0 - 2 - 1 - 4 - 2 - 1 - 6   5
|   |                                                           |   |
1   9   6 - 9 - 5 - 5 - 8 - 1 - 5 - 7 - 2 - 0 - 3 - 2 - 0 - 5   2   1
|   |   |                                                   |   |   |
0   4   0   2 - 0 - 1 - 2 - 0 - 4 - 3 - 6 - 6 - 1 - 2 - 0   5   0   1
|   |   |   |                                           |   |   |   |
1   5   4   9   3 - 7 - 6 - 8 - 4 - 1 - 8 - 0 - 1 - 8   6   9   7   1
|   |   |   |   |                                   |   |   |   |   |
8   2   2   4   6   4 - 6 - 4 - 8 - 6 - 0 - 6 - 2   8   2   8   2   2
|   |   |   |   |   |                           |   |   |   |   |   |
9   5   8   7   1   7   2 - 3 - 1 - 3 - 2 - 4   1   2   0   3   1   1
|   |   |   |   |   |   |                   |   |   |   |   |   |   |
6   1   2   4   6   1   2   9 - 4 - 1 - 0   2   9   8   8   7   8   0
|   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |   |   |
9   9   2   2   6   5   2   7   0 - 1   6   6   3   4   2   1   7   5
|   |   |   |   |   |   |   |       |   |   |   |   |   |   |   |   |
0   0   6   0   4   1   0   5 - 2 - 3   8   2   1   8   2   7   2   1
|   |   |   |   |   |   |               |   |   |   |   |   |   |   |
5   5   5   5   5   5   2 - 1 - 1 - 1 - 2   8   1   6   0   3   7   1
|   |   |   |   |   |                       |   |   |   |   |   |   |
2   2   2   4   4   2 - 4 - 4 - 2 - 4 - 0 - 4   2   4   2   8   4   4
|   |   |   |   |                               |   |   |   |   |   |
9   9   4   3   1 - 9 - 2 - 5 - 3 - 7 - 2 - 3 - 3   3   2   5   7   1
|   |   |   |                                       |   |   |   |   |
0   7   2   5 - 4 - 0 - 0 - 2 - 2 - 3 - 8 - 8 - 0 - 3   2   7   6   1
|   |   |                                               |   |   |   |
2   7   2 - 3 - 5 - 7 - 6 - 1 - 5 - 5 - 6 - 9 - 3 - 3 - 6   5   7   3
|   |                                                       |   |   |
0   7 - 4 - 4 - 2 - 9 - 8 - 7 - 8 - 2 - 4 - 2 - 0 - 5 - 8 - 3   8   .
|                                                               |   |
1 - 1 - 4 - 9 - 9 - 9 - 2 - 9 - 7 - 9 - 0 - 9 - 1 - 1 - 2 - 5 - 9   .
```

0, 1 ,3, 2, 5, 7, 9, 4, 10, 6, 8, 21, 11, 20, 22, 23, 13, 24, 26, 28, 40, 42, 44, 25, 15, 17, 46, 48, 60, 62, 19, 31, 12, 33, 27, 35, 29, 14, 64, 66, 16, 37, 68, 41, 80, 18, 82, 84, 86, 43, 30, 88, 32, 200, 45, 34, 34, 202, 47, 49, 201, 204, 36, 61, 206, 208, 220, 222, 63, 39, 65, 51, 67, 53, 224, 226, 228, 240, 69, 55, 81, 57, 203, 205, 59, 83, 71, 73, 85, 75, 38, 50, 242, 87, 89, 244, 77, 79, 210, 91, 52, 54, 93, 212, 56, 58, 70, 214, 216, 207, 218, 72, 74, 76, 78, 95, 211, …

Les suites

```
1 - 3 - 2 - 1 - 5 - 1 - 0 - 3 - 2 - 3 - 2 - 2 - 3 - 4 - 2 - 1 - 7 - 1
|                                                                   |
2   3 - 2 - 1 - 2 - 5 - 6 - 5 - 8 - 7 - 0 - 2 - 1 - 4 - 2 - 1 - 6   5
|   |                                                           |   |
1   9   6 - 9 - 5 - 5 - 8 - 1 - 5 - 7 - 2 - 0 - 3 - 2 - 0 - 5   2   1
|   |   |                                               |   |   |
0   4   0   2 - 0 - 1 - 2 - 0 - 4 - 3 - 6 - 6 - 1 - 2 - 0   5   0   1
|   |   |   |                                       |   |   |   |
1   5   4   9   3 - 7 - 6 - 8 - 4 - 1 - 8 - 0 - 1 - 8   6   9   7   1
|   |   |   |   |                               |   |   |   |   |
8   2   2   4   6   4 - 6 - 4 - 8 - 6 - 0 - 6 - 2   8   2   8   2   2
|   |   |   |   |   |                       |   |   |   |   |   |
9   5   8   7   1   7   2 - 3 - 1 - 3 - 2 - 4   1   2   0   3   1   1
|   |   |   |   |   |   |                   |   |   |   |   |   |   |
6   1   2   4   6   1   2   9 - 4 - 1 - 0   2   9   8   8   7   8   0
|   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |   |   |
9   9   2   2   6   5   2   7   0 - 1   6   6   3   4   2   1   7   5
|   |   |   |   |   |   |   |       |   |   |   |   |   |   |   |   |
0   0   6   0   4   1   0   5 - 2 - 3   8   2   1   8   2   7   2   1
|   |   |   |   |   |   |               |   |   |   |   |   |   |   |
5   5   5   5   5   5   2 - 1 - 1 - 1 - 2   8   1   6   0   3   7   1
|   |   |   |   |   |                       |   |   |   |   |   |   |
2   2   2   4   4   2 - 4 - 4 - 2 - 4 - 0 - 4   2   4   2   8   4   4
|   |   |   |   |                               |   |   |   |   |   |
9   9   4   3   1 - 9 - 2 - 5 - 3 - 7 - 2 - 3 - 3   3   2   5   7   1
|   |   |   |                                       |   |   |   |   |
0   7   2   5 - 4 - 0 - 0 - 2 - 2 - 3 - 8 - 8 - 0 - 3   2   7   6   1
|   |   |                                               |   |   |   |
2   7   2 - 3 - 5 - 7 - 6 - 1 - 5 - 5 - 6 - 9 - 3 - 3 - 6   5   7   3
|   |                                                       |   |   |
0   7 - 4 - 4 - 2 - 9 - 8 - 7 - 8 - 2 - 4 - 2 - 0 - 5 - 8 - 3   8   ·
|                                                               |   |
1 - 1 - 4 - 9 - 9 - 9 - 2 - 9 - 7 - 9 - 0 - 9 - 1 - 1 - 2 - 5 - 9   ·
```

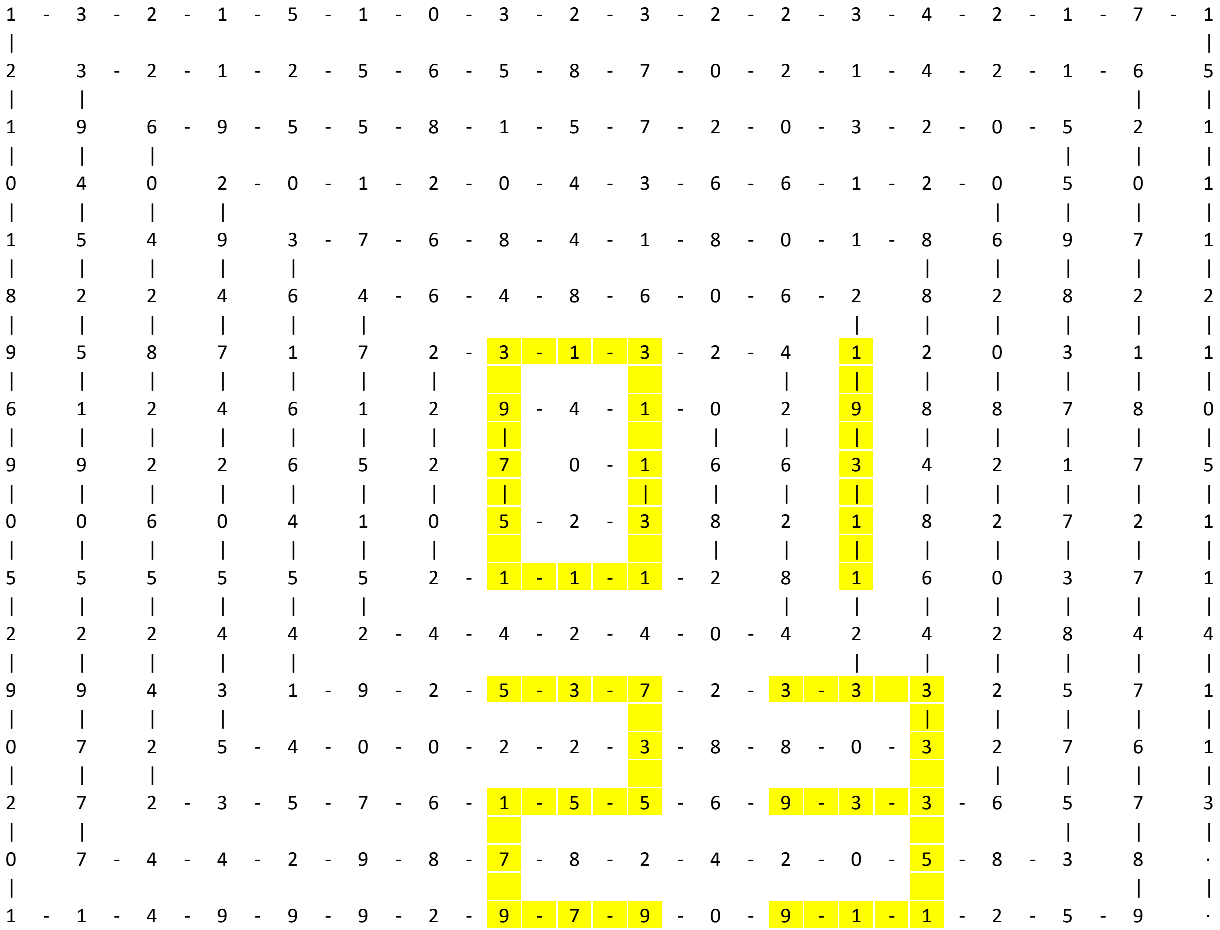
0, 1 ,3, 2, 5, 7, 9, 4, 10, 6, 8, 21, 11, 20, 22, 23, 13, 24, 26, 28, 40, 42, 44, 25, 15, 17, 46, 48, 60, 62, 19, 31, 12, 33, 27, 35, 29, 14, 64, 66, 16, 37, 68, 41, 80, 18, 82, 84, 86, 43, 30, 88, 32, 200, 45, 34, 34, 202, 47, 49, 201, 204, 36, 61, 206, 208, 220, 222, 63, 39, 65, 51, 67, 53, 224, 226, 228, 240, 69, 55, 81, 57, 203, 205, 59, 83, 71, 73, 85, 75, 38, 50, 242, 87, 89, 244, 77, 79, 210, 91, 52, 54, 93, 212, 56, 58, 70, 214, 216, 207, 218, 72, 74, 76, 78, 95, 211, …

Les suites

1	3	2	1	5	1	0	3	2	3	2	2	3	4	2	1	7	1
2	3	2	1	2	5	6	5	8	7	0	2	1	4	2	1	6	5
1	9	6	9	5	5	8	1	5	7	2	0	3	2	0	5	2	1
0	4	0	2	0	1	2	0	4	3	6	6	1	2	0	5	0	1
1	5	4	9	3	7	6	8	4	1	8	0	1	8	6	9	7	1
8	2	2	4	6	4	6	4	8	6	0	6	2	8	2	8	2	2
9	5	8	7	1	7	2	3	1	3	2	4	1	2	0	3	1	1
6	1	2	4	6	1	2	9	4	1	0	2	9	8	8	7	8	0
9	9	2	2	6	5	2	7	0	1	6	6	3	4	2	1	7	5
0	0	6	0	4	1	0	5	2	3	8	2	1	8	2	7	2	1
5	5	5	5	5	5	2	1	1	1	2	8	1	6	0	3	7	1
2	2	2	4	4	2	4	4	2	4	0	4	2	4	2	8	4	4
9	9	4	3	1	9	2	5	3	7	2	3	3	3	2	5	7	1
0	7	2	5	4	0	0	2	2	3	8	8	0	3	2	7	6	1
2	7	2	3	5	7	6	1	5	5	6	9	3	3	6	5	7	3
0	7	4	4	2	9	8	7	8	2	4	2	0	5	8	3	8	·
1	1	4	9	9	9	2	9	7	9	0	9	1	1	2	5	9	·

0, 1 ,3, 2, 5, 7, 9, 4, 10, 6, 8, 21, 11, 20, 22, 23, 13, 24, 26, 28, 40, 42, 44, 25, 15, 17, 46, 48, 60, 62, 19, 31, 12, 33, 27, 35, 29, 14, 64, 66, 16, 37, 68, 41, 80, 18, 82, 84, 86, 43, 30, 88, 32, 200, 45, 34, 34, 202, 47, 49, 201, 204, 36, 61, 206, 208, 220, 222, 63, 39, 65, 51, 67, 53, 224, 226, 228, 240, 69, 55, 81, 57, 203, 205, 59, 83, 71, 73, 85, 75, 38, 50, 242, 87, 89, 244, 77, 79, 210, 91, 52, 54, 93, 212, 56, 58, 70, 214, 216, 207, 218, 72, 74, 76, 78, 95, 211, …

Les suites



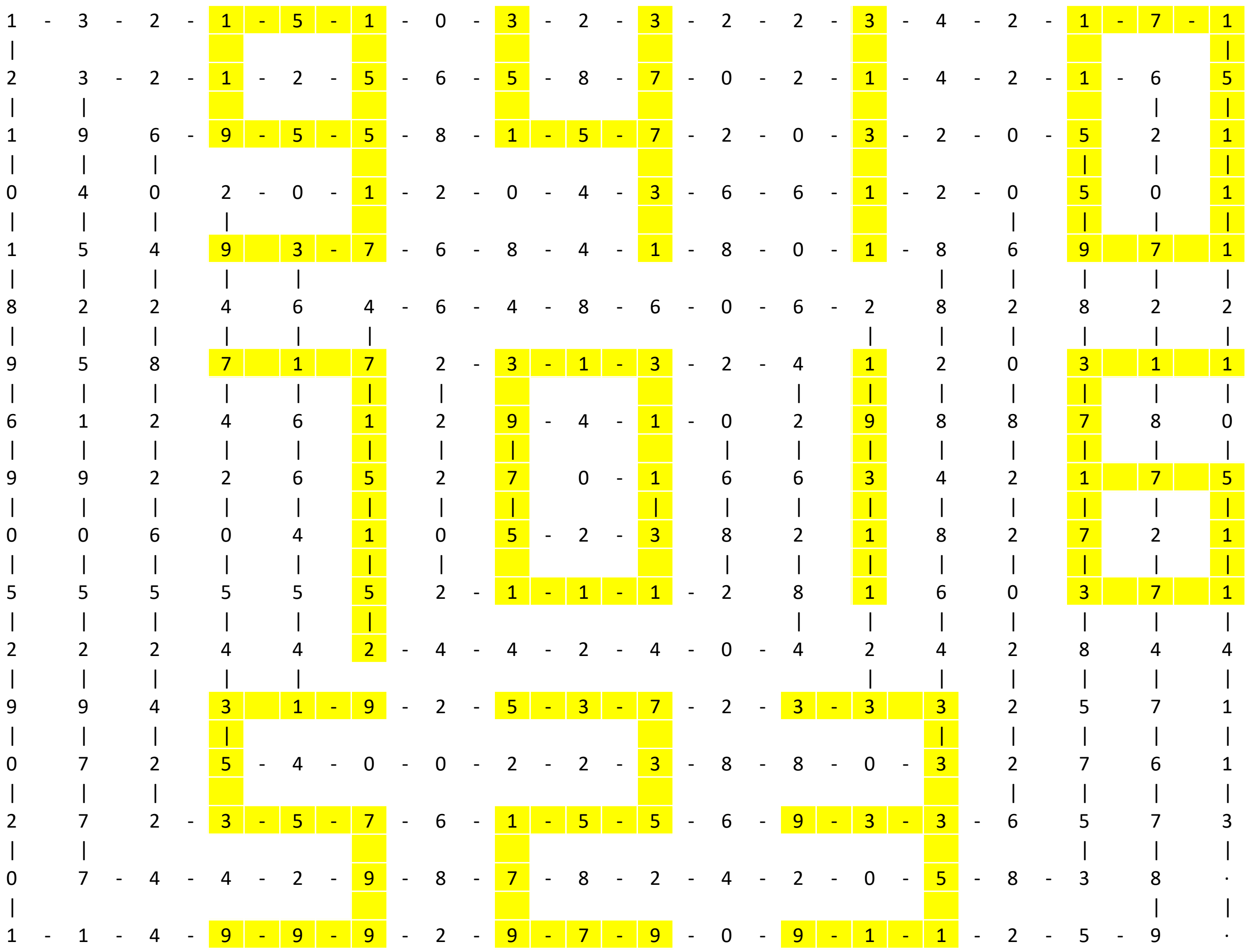
0, **1** ,**3**, **2**, 5, 7, 9, 4, 10, 6, 8, 21, 11, 20, 22, 23, 13, 24, 26, 28, 40, 42, 44, 25, 15, 17, 46, 48, 60, 62, 19, 31, 12, 33, 27, 35, 29, 14, 64, 66, 16, 37, 68, 41, 80, 18, 82, 84, 86, 43, 30, 88, 32, 200, 45, 34, 34, 202, 47, 49, 201, 204, 36, 61, 206, 208, 220, 222, 63, 39, 65, 51, 67, 53, 224, 226, 228, 240, 69, 55, 81, 57, 203, 205, 59, 83, 71, 73, 85, 75, 38, 50, 242, 87, 89, 244, 77, 79, 210, 91, 52, 54, 93, 212, 56, 58, 70, 214, 216, 207, 218, 72, 74, 76, 78, 95, 211, …

Les suites

```
1 - 3 - 2 - 1 - 5 - 1 - 0 - 3 - 2 - 3 - 2 - 2 - 3 - 4 - 2 - 1 - 7 - 1
|                                                                    |
2   3 - 2 - 1 - 2 - 5 - 6 - 5 - 8 - 7 - 0 - 2 - 1 - 4 - 2 - 1 - 6   5
|   |                                                           |   |
1   9   6 - 9 - 5 - 5 - 8 - 1 - 5 - 7 - 2 - 0 - 3 - 2 - 0 - 5   2   1
|   |   |                                                   |   |   |
0   4   0   2 - 0 - 1 - 2 - 0 - 4 - 3 - 6 - 6 - 1 - 2 - 0   5   0   1
|   |   |   |                                           |   |   |   |
1   5   4   9   3 - 7 - 6 - 8 - 4 - 1 - 8 - 0 - 1 - 8   6   9   7   1
|   |   |   |   |                                   |   |   |   |   |
8   2   2   4   6   4 - 6 - 4 - 8 - 6 - 0 - 6 - 2   8   2   8   2   2
|   |   |   |   |   |                           |   |   |   |   |   |
9   5   8   7   1   7   2 - 3 - 1 - 3 - 2 - 4   1   2   0   3   1   1
|   |   |   |   |   |   |                   |   |   |   |   |   |   |
6   1   2   4   6   1   2   9 - 4 - 1 - 0   2   9   8   8   7   8   0
|   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |   |   |
9   9   2   2   6   5   2   7   0 - 1   6   6   3   4   2   1   7   5
|   |   |   |   |   |   |   |       |   |   |   |   |   |   |   |   |
0   0   6   0   4   1   0   5 - 2 - 3   8   2   1   8   2   7   2   1
|   |   |   |   |   |   |               |   |   |   |   |   |   |   |
5   5   5   5   5   5   2 - 1 - 1 - 1 - 2   8   1   6   0   3   7   1
|   |   |   |   |   |                       |   |   |   |   |   |   |
2   2   2   4   4   2 - 4 - 4 - 2 - 4 - 0 - 4   2   4   2   8   4   4
|   |   |   |   |                               |   |   |   |   |   |
9   9   4   3   1 - 9 - 2 - 5 - 3 - 7 - 2 - 3 - 3   3   2   5   7   1
|   |   |   |                                       |   |   |   |   |
0   7   2   5 - 4 - 0 - 0 - 2 - 2 - 3 - 8 - 8 - 0 - 3   2   7   6   1
|   |   |                                               |   |   |   |
2   7   2 - 3 - 5 - 7 - 6 - 1 - 5 - 5 - 6 - 9 - 3 - 3 - 6   5   7   3
|   |                                                       |   |   |
0   7 - 4 - 4 - 2 - 9 - 8 - 7 - 8 - 2 - 4 - 2 - 0 - 5 - 8 - 3   8   ·
|                                                               |   |
1 - 1 - 4 - 9 - 9 - 9 - 2 - 9 - 7 - 9 - 0 - 9 - 1 - 1 - 2 - 5 - 9   ·
```

0, 1 ,3, 2, 5, 7, 9, 4, 10, 6, 8, 21, 11, 20, 22, 23, 13, 24, 26, 28, 40, 42, 44, 25, 15, 17, 46, 48, 60, 62, 19, 31, 12, 33, 27, 35, 29, 14, 64, 66, 16, 37, 68, 41, 80, 18, 82, 84, 86, 43, 30, 88, 32, 200, 45, 34, 34, 202, 47, 49, 201, 204, 36, 61, 206, 208, 220, 222, 63, 39, 65, 51, 67, 53, 224, 226, 228, 240, 69, 55, 81, 57, 203, 205, 59, 83, 71, 73, 85, 75, 38, 50, 242, 87, 89, 244, 77, 79, 210, 91, 52, 54, 93, 212, 56, 58, 70, 214, 216, 207, 218, 72, 74, 76, 78, 95, 211, …

Les suites



0, **1** ,**3**, **2**, **5**, **7**, **9**, **4**, **10**, **6**, 8, 21, 11, 20, 22, 23, 13, 24, 26, 28, 40, 42, 44, 25, 15, 17, 46, 48, 60, 62, 19, 31, 12, 33, 27, 35, 29, 14, 64, 66, 16, 37, 68, 41, 80, 18, 82, 84, 86, 43, 30, 88, 32, 200, 45, 34, 34, 202, 47, 49, 201, 204, 36, 61, 206, 208, 220, 222, 63, 39, 65, 51, 67, 53, 224, 226, 228, 240, 69, 55, 81, 57, 203, 205, 59, 83, 71, 73, 85, 75, 38, 50, 242, 87, 89, 244, 77, 79, 210, 91, 52, 54, 93, 212, 56, 58, 70, 214, 216, 207, 218, 72, 74, 76, 78, 95, 211, …

On peut zoomer ou s'éloigner de la spirale et on voit réapparaitre la spirale des nombres à une autre échelle

Racine carrée

Que vaut la racine carrée de 25 ?

5

Que vaut la racine carrée de 100 ?

10

Que vaut la racine carrée de 625 ?

25

Que vaut la racine carrée de 8649 ?

93

Que vaut la racine carrée de 28 ?

5,29150262213

Racine carrée

N’importe quelle calculatrice, même la plus basique possède une touche √

Ou possède la possibilité de calculer la racine carrée par exposant fractionnaire

Rappel

- $\sqrt{25} = 5 = 25^{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt[3]{64} = 4 = 64^{\frac{1}{3}}$

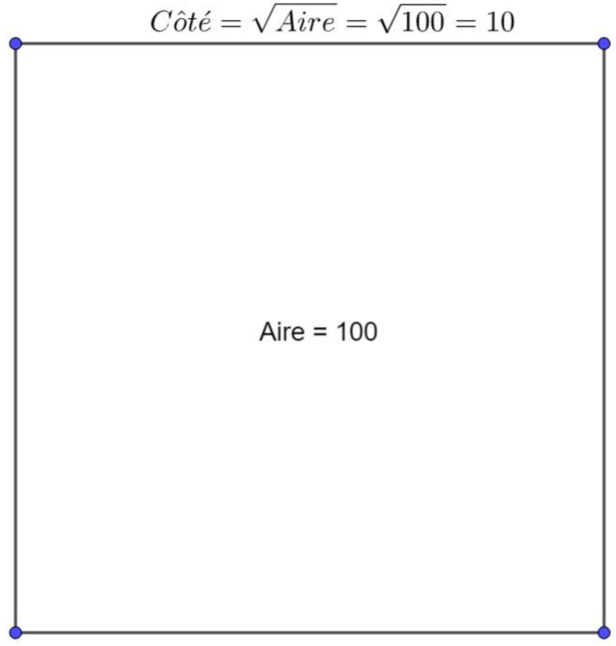
Racine carrée

Comment faisait-on pour calculer une racine carrée lorsqu’on ne disposait pas d’une calculatrice?

- Méthode de Héron (I^{er} siècle après J.C.)
- Méthode « manuelle »

Racine carrée – Méthode de Héron

La racine carrée d'un nombre a correspond à la longueur du côté du carré dont l'aire vaut a.

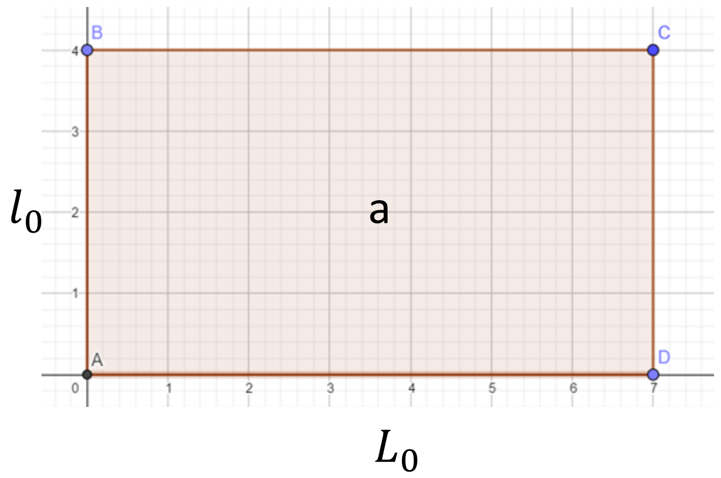


Racine carrée – Méthode de Héron

La méthode de Héron part d'une première longueur qui est une estimation de la longueur du carré. Notons cette longueur L_0.

On calcule la valeur de la largeur l_0 du rectangle de longueur L_0 dont l'aire vaut a.

$$l_0 = \frac{a}{L_0}$$



Racine carrée – Méthode de Héron

A partir des valeurs de L_0 et l_0, on trouve une nouvelle valeur de L :

$$L_1 = \frac{L_0 + l_0}{2}$$

La nouvelle longueur est obtenue en prenant la moyenne de la longueur et de la largeur de l'itération précédente.

A partie de L_1, on déduit $l_1 = \frac{a}{L_1}$

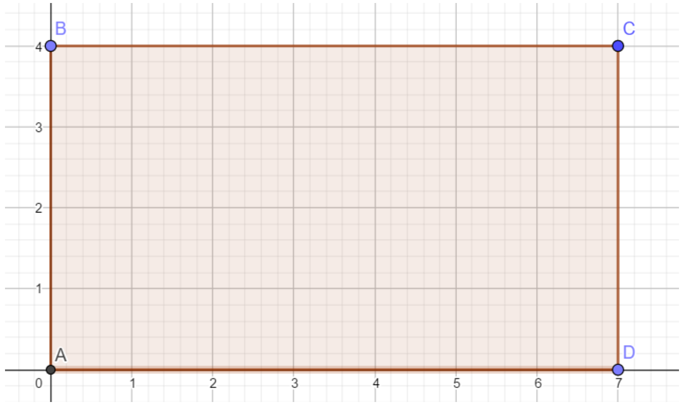
… jusqu'à obtenir une précision suffisante

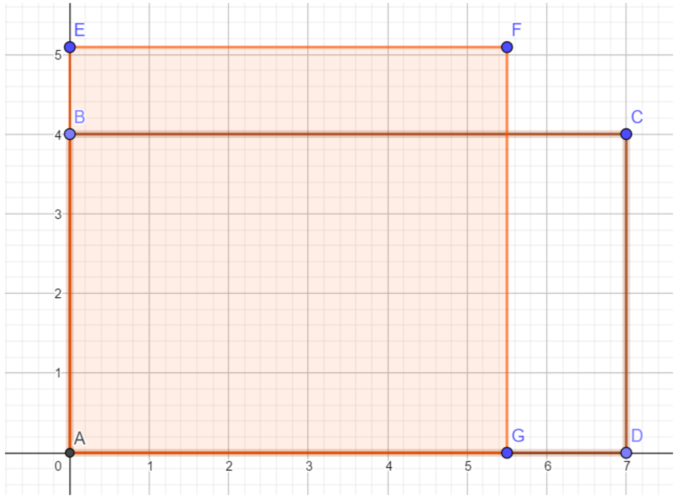
Racine carrée – Méthode de Héron

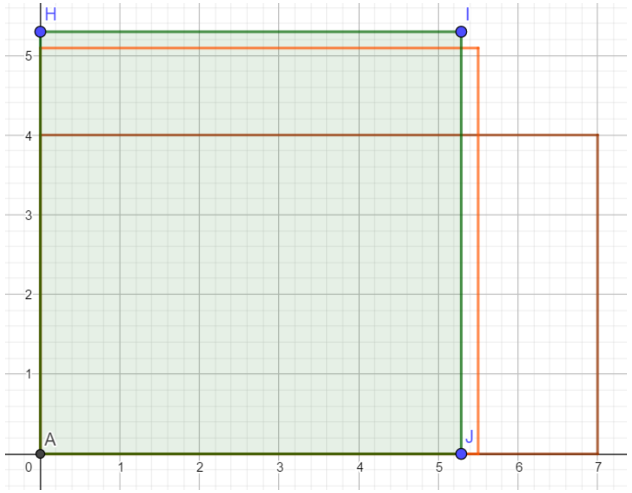
Exemple: $\sqrt{28} = 5{,}29150262213$ (Calculatrice)

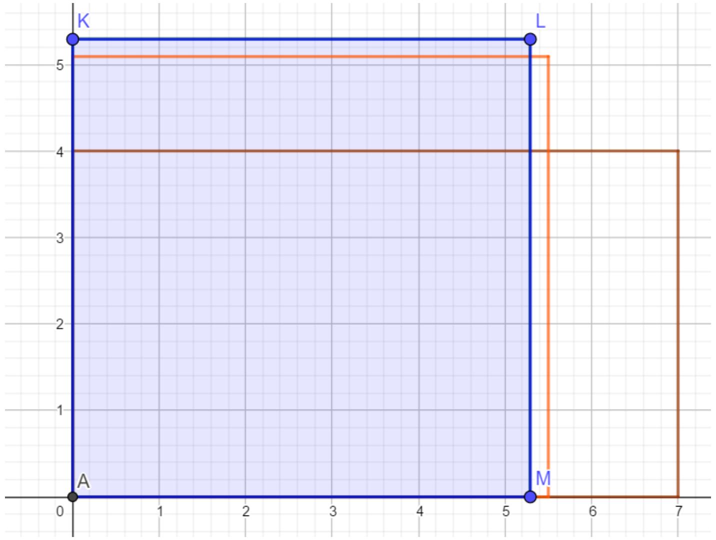
Itération	Longueur (L)	Largeur (l)
0	7	4
1	$\frac{7+4}{2} = 5{,}5$	$\frac{28}{5{,}5} = 5{,}09090909091$
2	$\frac{5{,}5 + 5{,}09090909091}{2} = 5{,}29545454545$	$\frac{28}{5{,}29545454545} = 5{,}28755364807$
3	$\frac{5{,}29545454545 + 5{,}28755364807}{2} = 5{,}29150409675$	$\frac{28}{5{,}29150409675} = 5{,}29150114751$
4	$\frac{5{,}29150409675 + 5{,}29150114751}{2} = 5{,}29150262215$	$\frac{28}{5{,}29150262215} = 5{,}29150262211$
…		

Racine carrée – Méthode de Héron









Exercice

Calculer jusqu'à la 7e décimale:

- $\sqrt{103}$, à partir d'une valeur estimée de 12
- $\sqrt{1839441{,}1876}$, à partir d'une valeur estimée de 1300
- $\sqrt{1849}$, à partir d'une valeur estimée de 40

Solution

Calculer jusqu'à la 7e décimale:

- $\sqrt{103} = \mathbf{10{,}1488916}$
- $\sqrt{1839441{,}1876} = \mathbf{1356{,}26}$
- $\sqrt{1849} = \mathbf{43}$

Racine carrée – Calcul manuel

Par exemple , calculons la racine carrée de 780,14

Pour info, à la calculatrice, cela donne 27,9309863771

Racine carrée – calcul manuel

```
 7 80 , 14 00
-4
 3 80
-3 29
   51 14
  -49 41
    1 73 00
    1 67 49
```

```
27,93
. x .
2 x 2 = 4
4. x . =
47 x 7 = 329
54. x . =
549 x 9 = 4941
558. x . =
5583 x 3 = 16749
```

Racine carrée – Calcul mental

On essaye avec

$\sqrt{1849}$

$\sqrt{103}$ à 2 décimales

Méthode de Newton

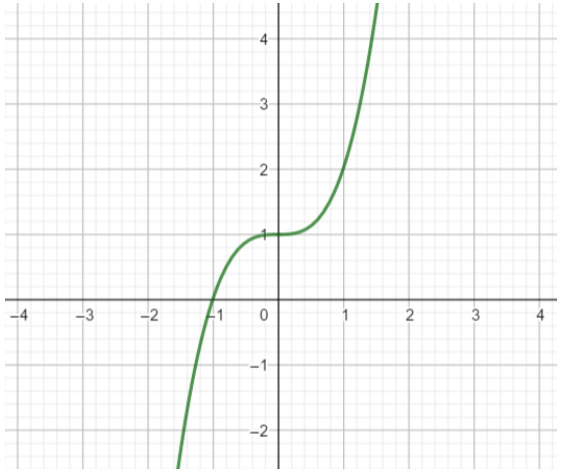
La méthode de Newton est une méthode itérative qui permet de trouver une racine d’une fonction.

Soit une fonction $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$.

En partant d’une valeur de x, on approche la racine en appliquant l’itération suivante:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Méthode de Newton



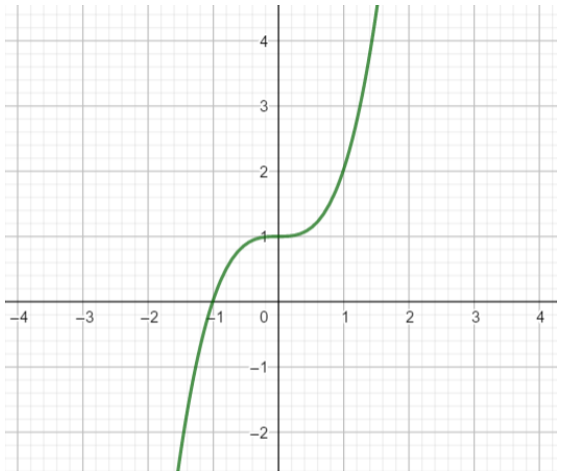
Exemple, la fonction $f(x) = x^3 + 1$ a une racine en -1

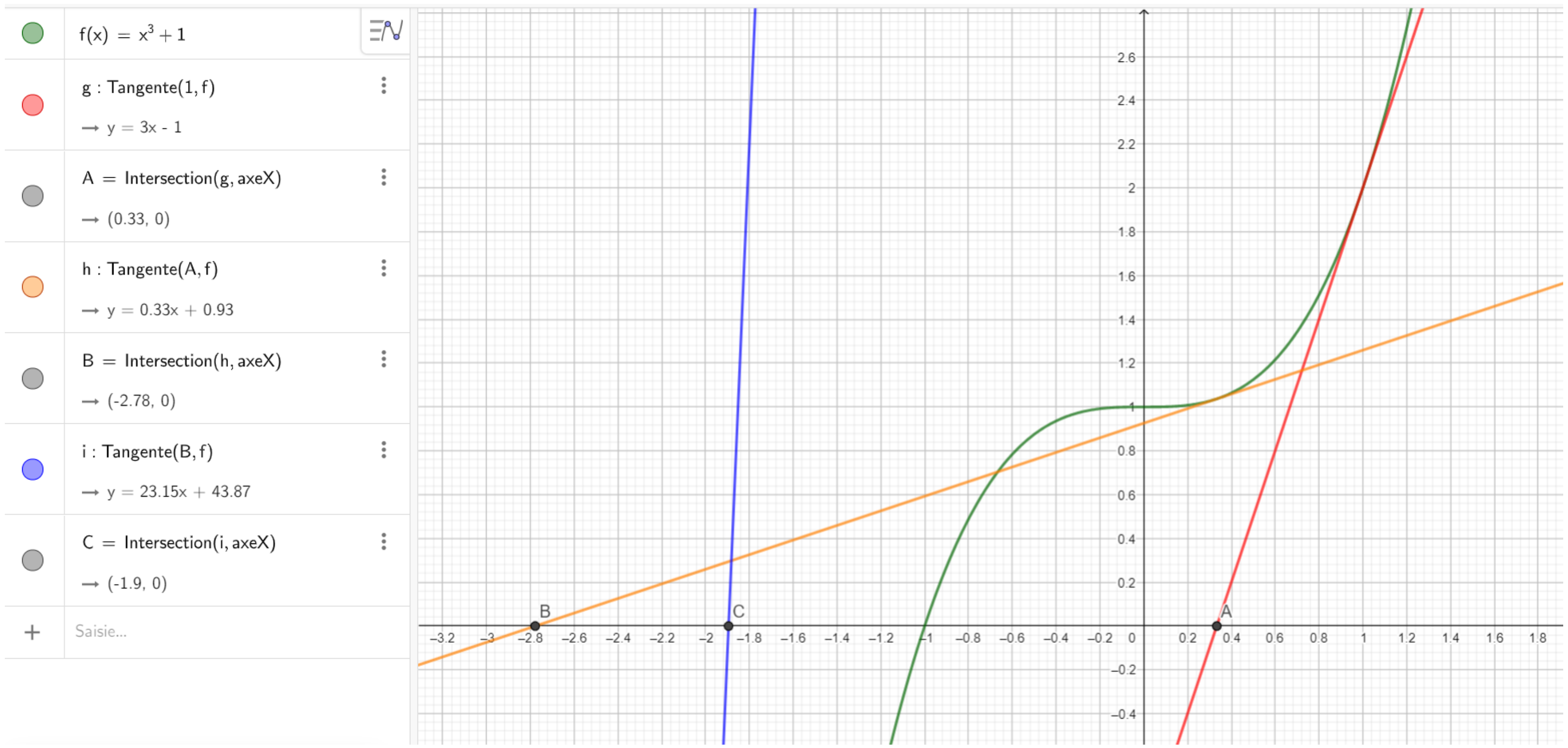
Sa dérivée vaut $f'(x) = 3x^2$

Itération	x_{k-1}	x_k
1	1	0,333333
2	0,333333	-2,777778
3	-2,777778	-1,895052
4	-1,895052	-1,356187
5	-1,356187	-1,085359
6	-1,085359	-1,006537
7	-1,006537	-1,000042
8	-1,000042	-1

Méthode de Newton

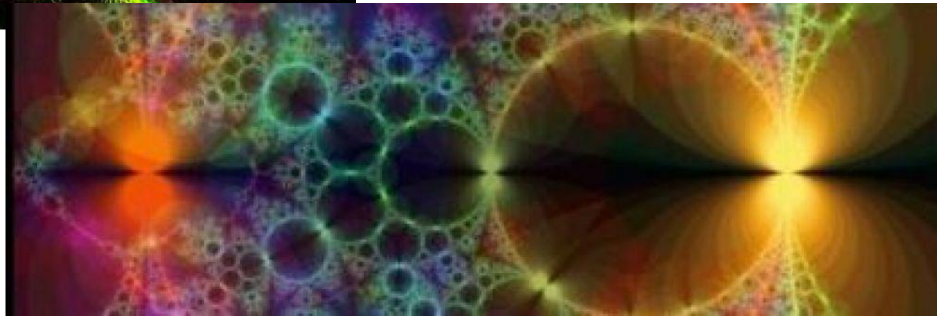
$$f(x) = x^3 + 1$$

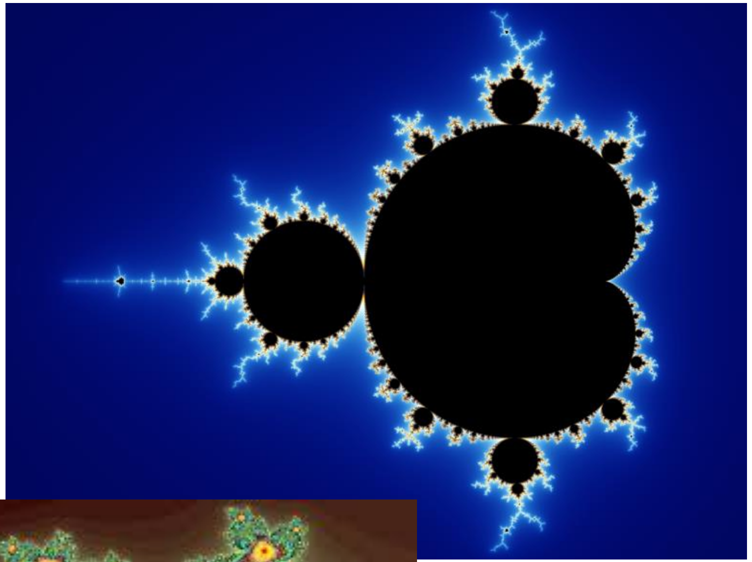


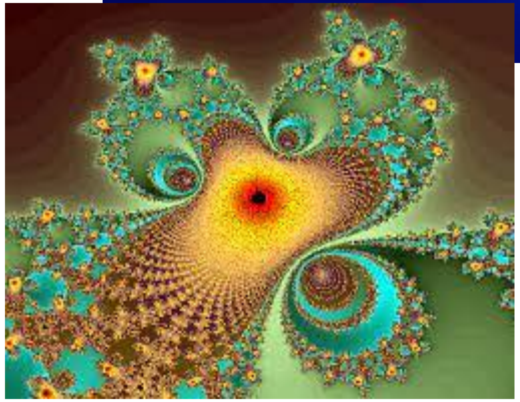


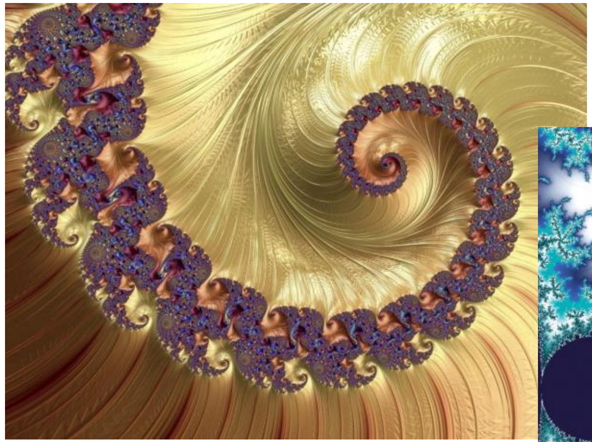
Itération	x_{k-1}	x_k
1	1	0,333333
2	0,333333	-2,777778
3	-2,777778	-1,895052
4	-1,895052	-1,356187
5	-1,356187	-1,085359
6	-1,085359	-1,006537
7	-1,006537	-1,000042
8	-1,000042	-1

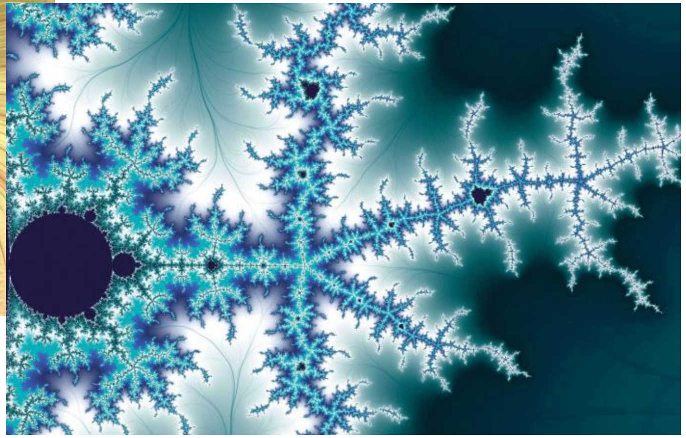
Les fractales



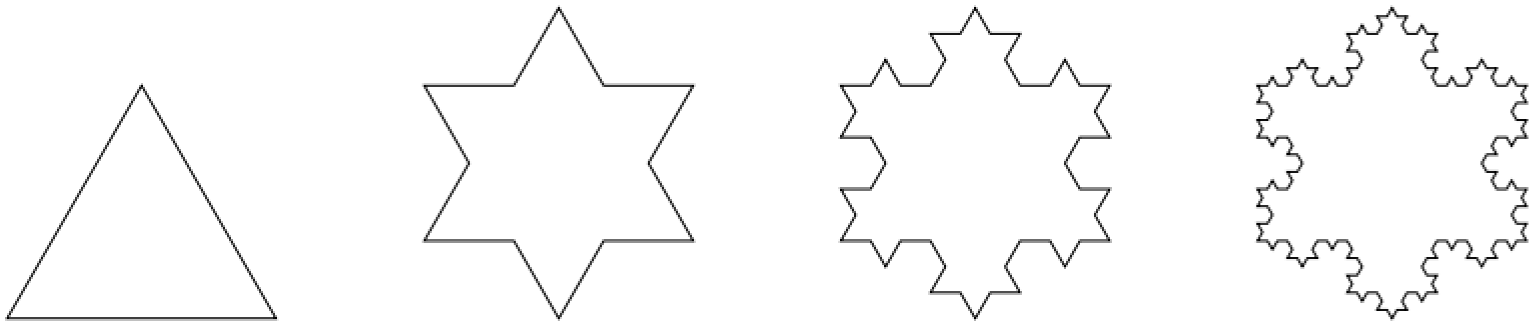






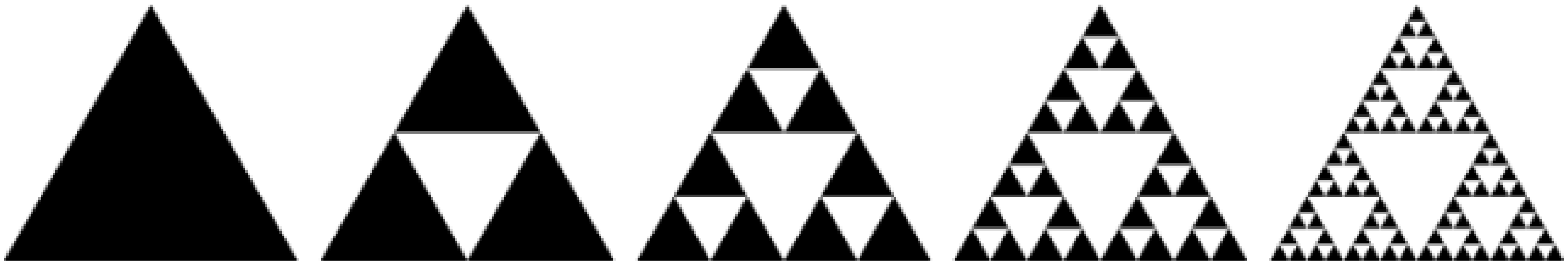


Flocon de Von Kock

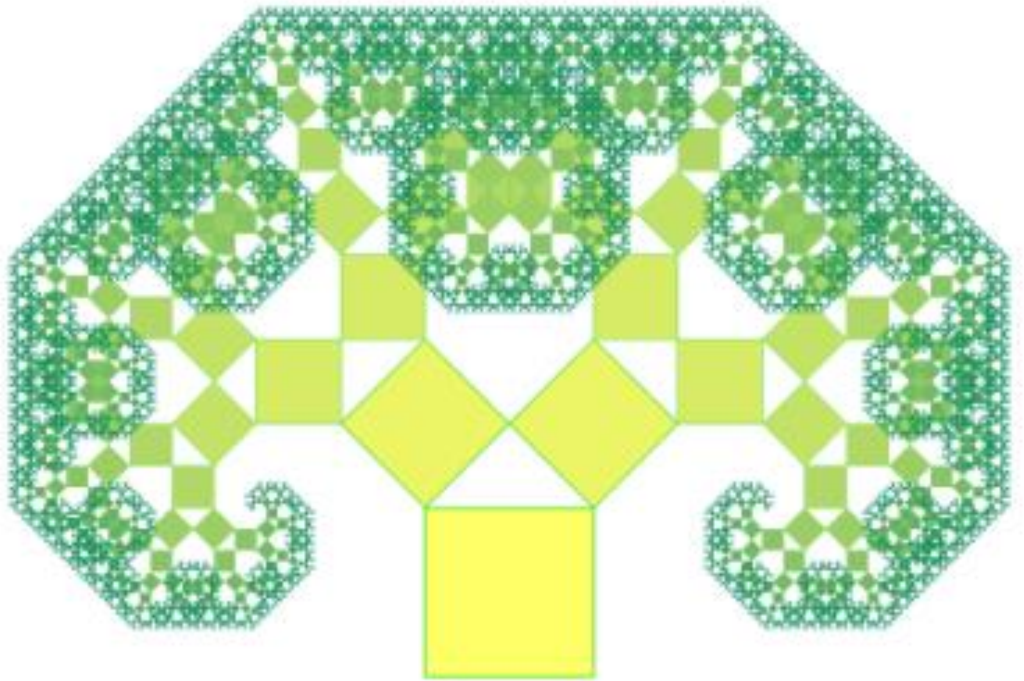


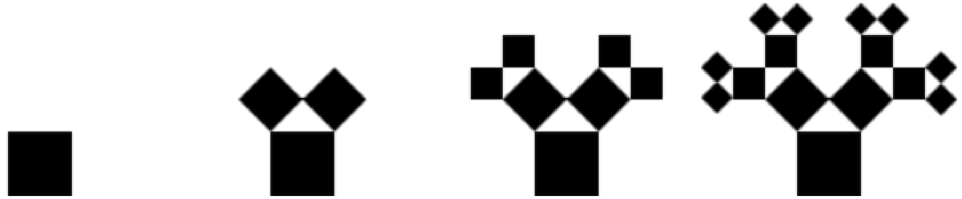
Étape 0 Étape 1 Étape 2 Étape 3

Triangle de Sierpinski



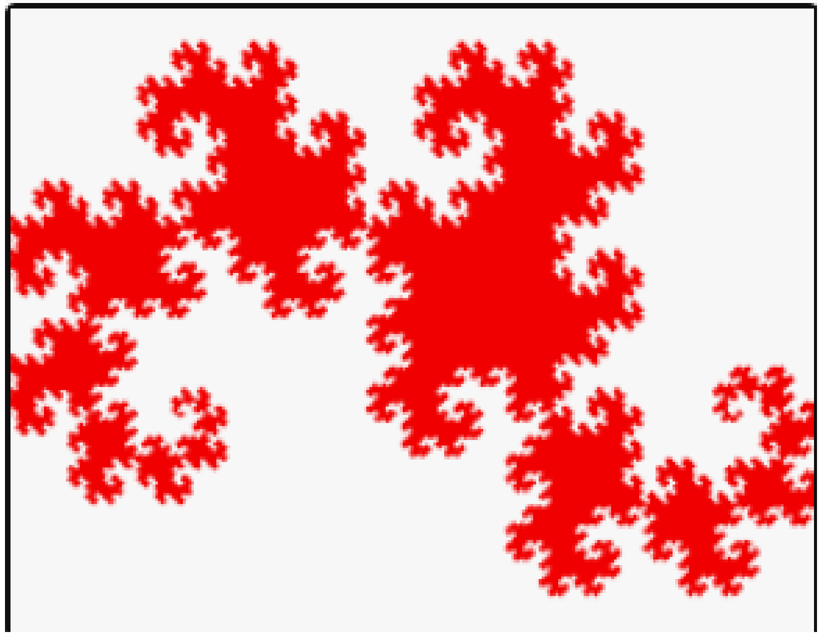
Arbre de Pythagore

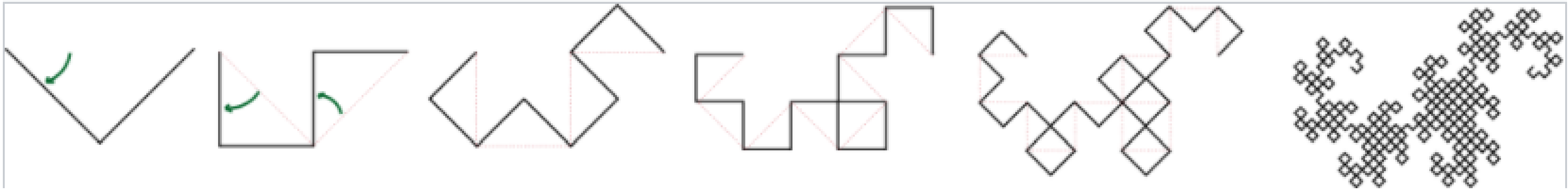




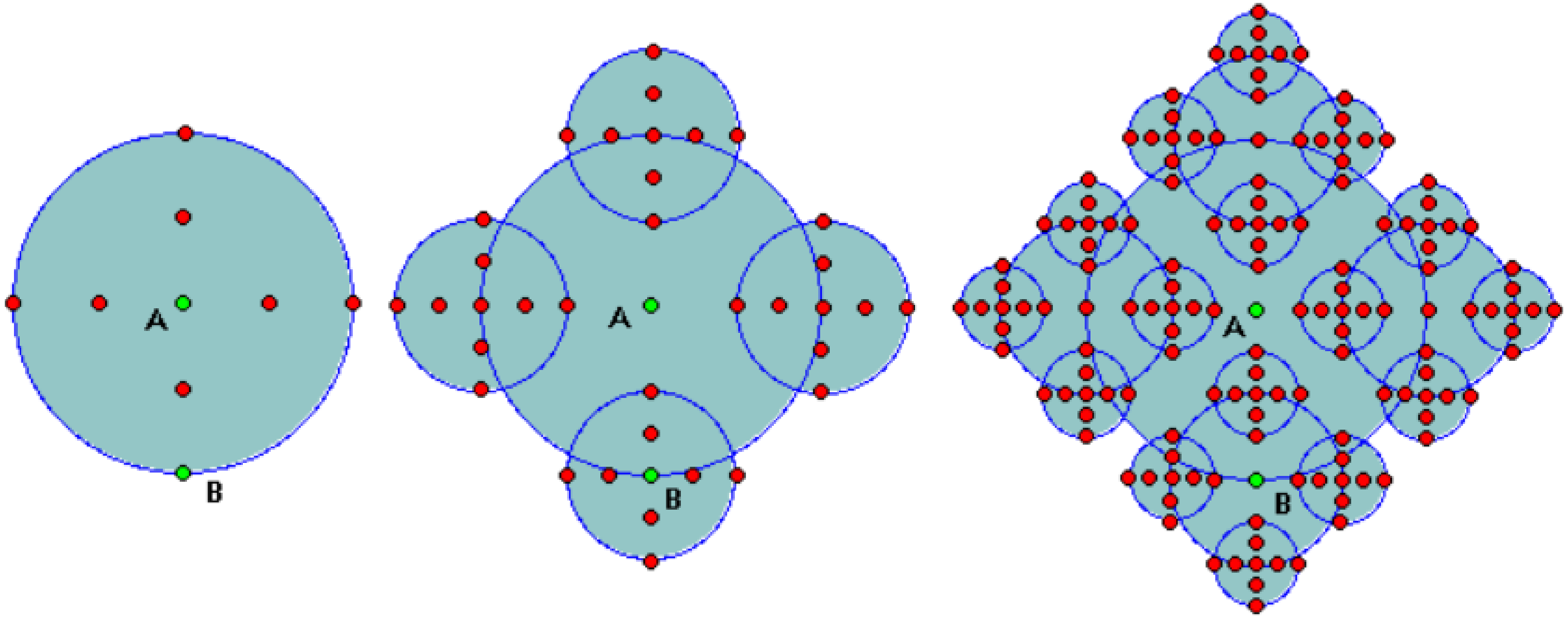
Ordre 0 Ordre 1 Ordre 2 Ordre 3

La courbe du dragon





Tetra-circle



Géométrie

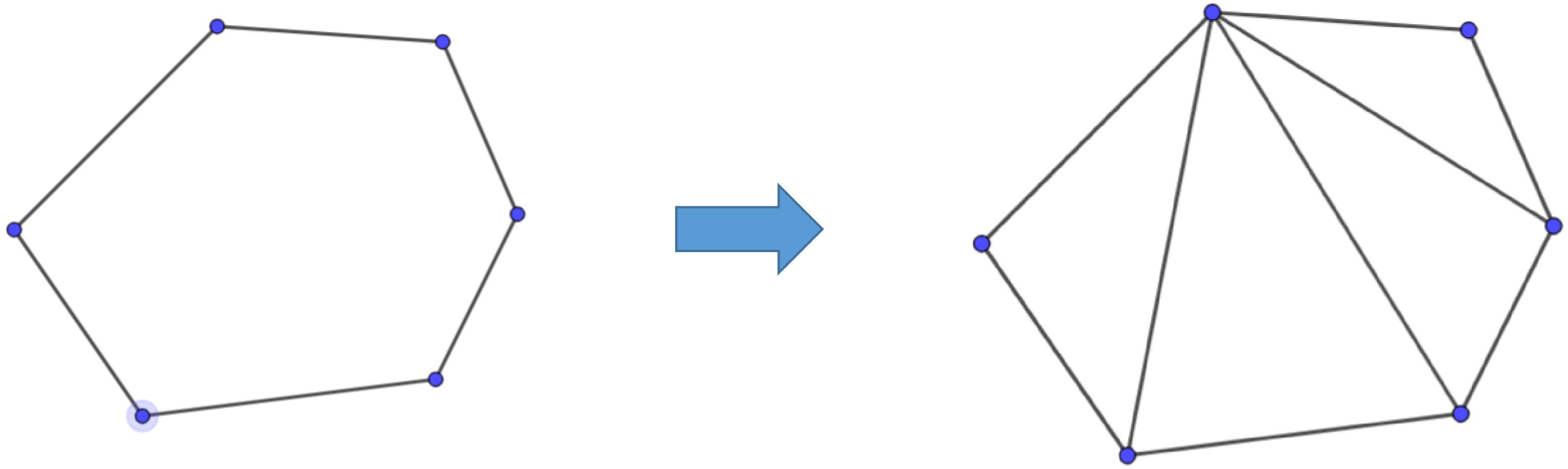
Trianguler un polygone.

Découper un polygone en triangle qui ne se recouvrent pas et dont les sommets sont les sommets du polygone.

Géométrie

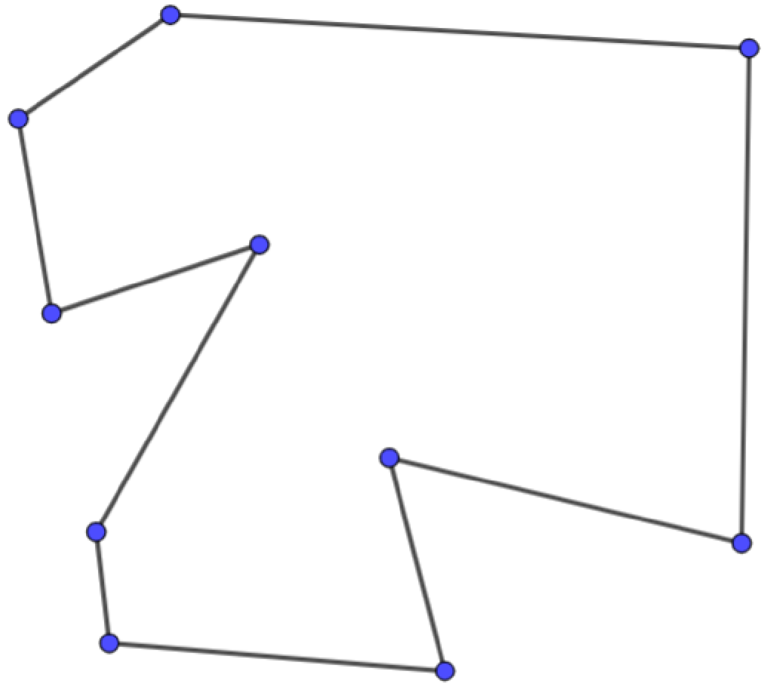
1er cas: le polygone est convexe (2 points du bord sont toujours reliés par un segment situer à l'intérieur du polygone)

On prend un sommet et on le relie aux autres sommets.



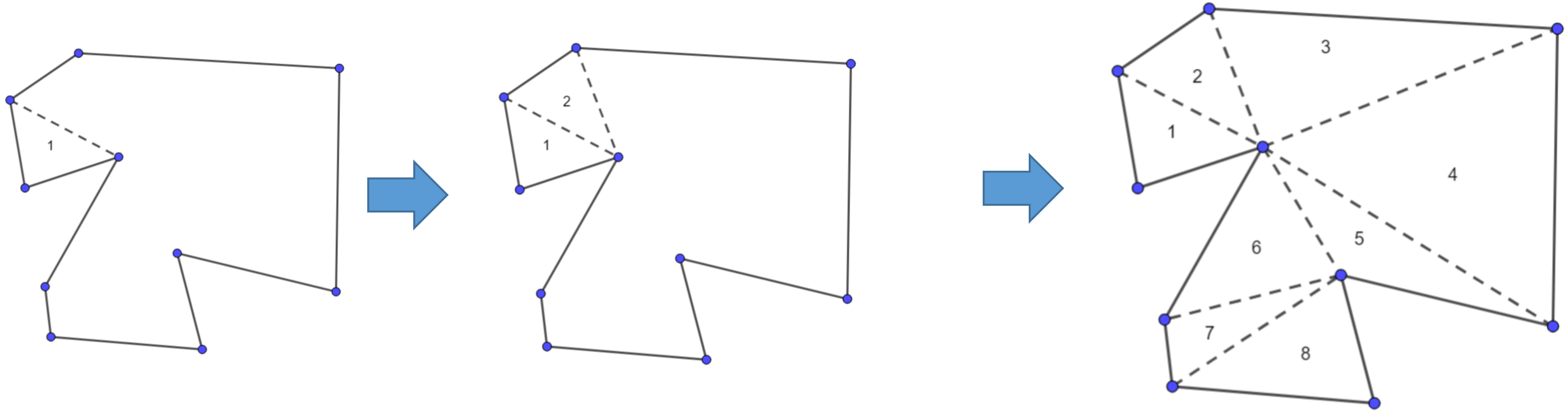
Géométrie

2^e cas: le polygone n’est pas convexe



Géométrie

« Tailler » les oreilles …. On identifie une oreille et on la retire … Et on recommence



Géométrie

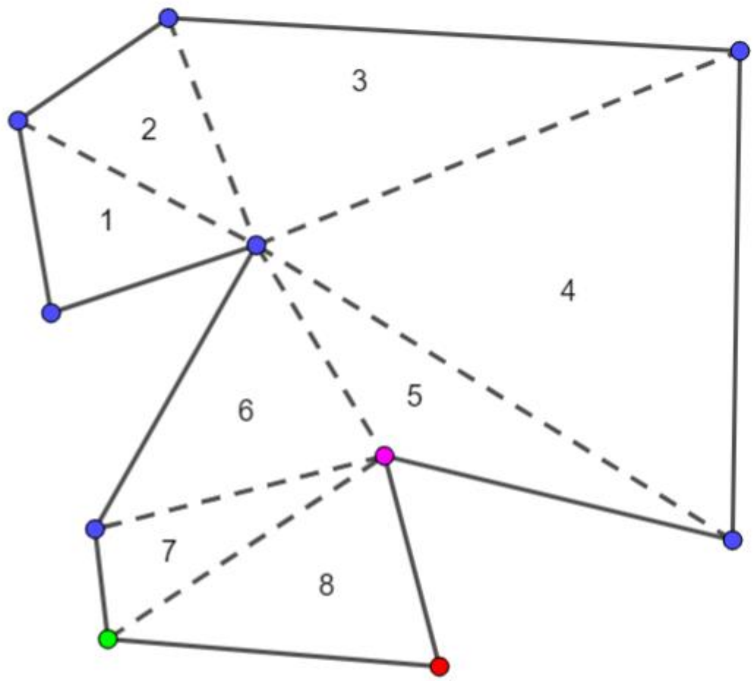
A quoi peut bien servir la triangulation d’un polygone ….

Par exemple, pour placer les caméras de sécurité dans un musée.

Il a été démontré que pour un polygone à n sommets, le nombre minimum de caméras est inférieur ou égal à $\frac{n}{3}$.

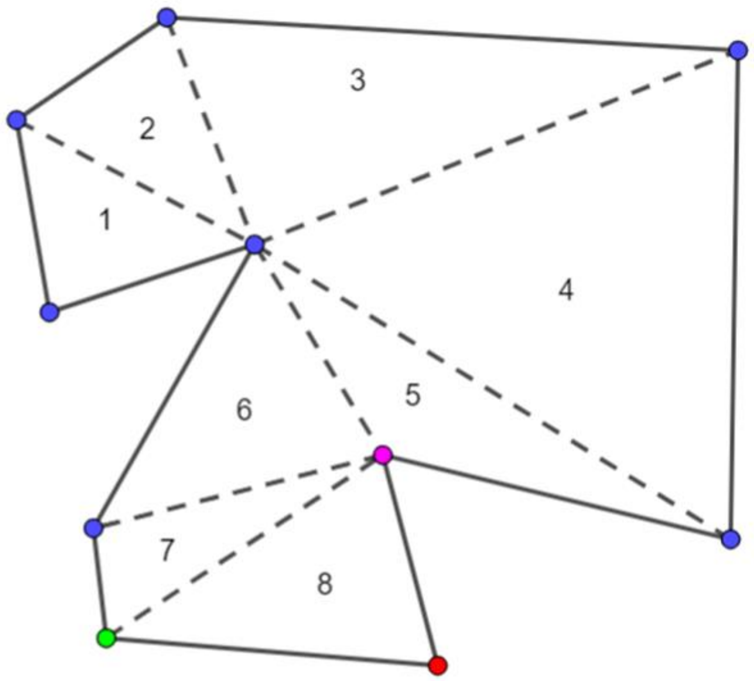
Géométrie

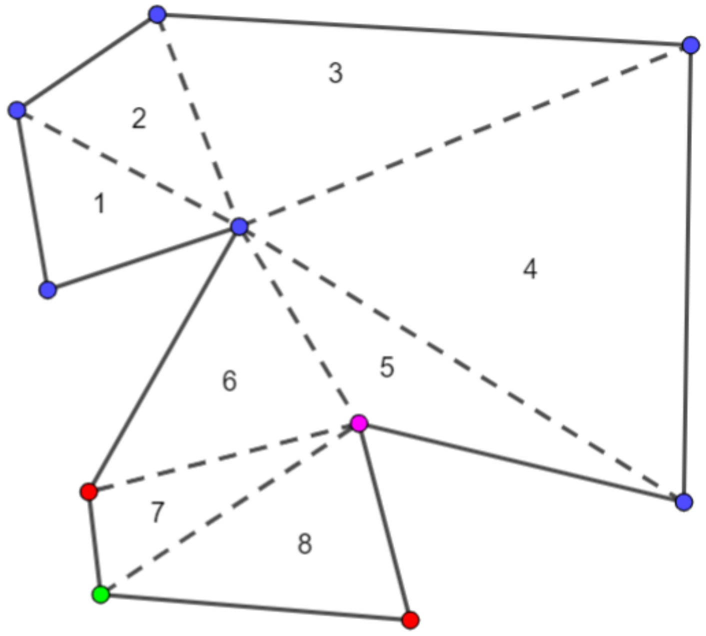
A partir du dernier triangle issu de notre triangulation, on affecte une couleur différente aux 3 sommets:



Géométrie

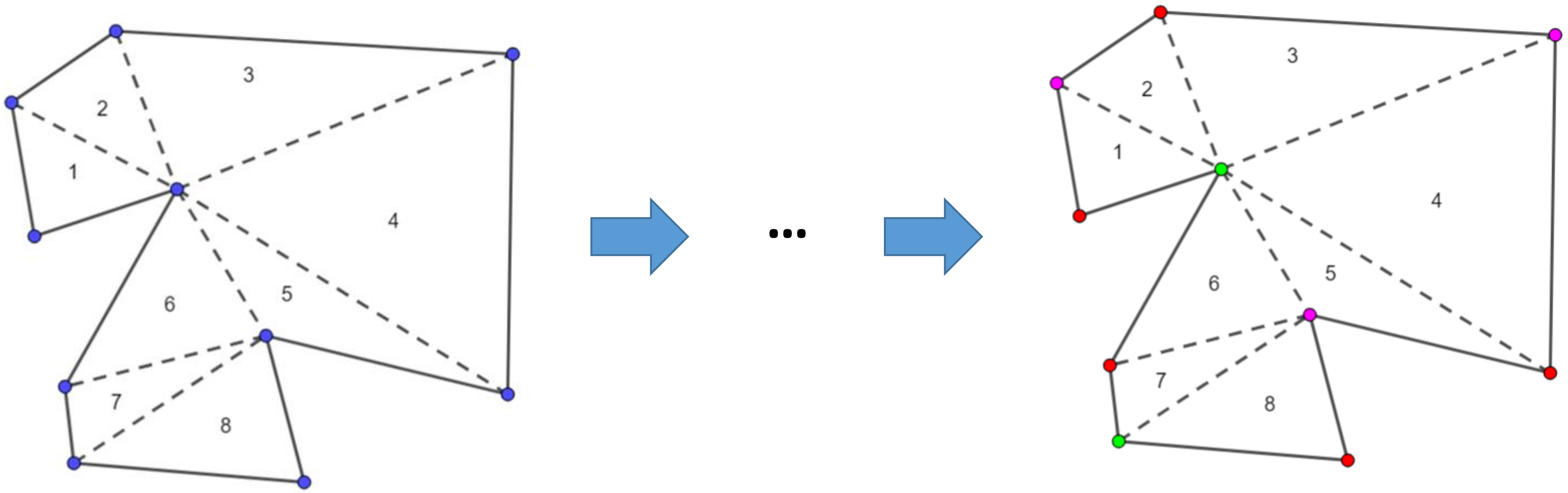
On passe ensuite à l’avant dernier triangle. Un des sommets n’a pas encore de couleur. On lui attribue la troisième couleur.





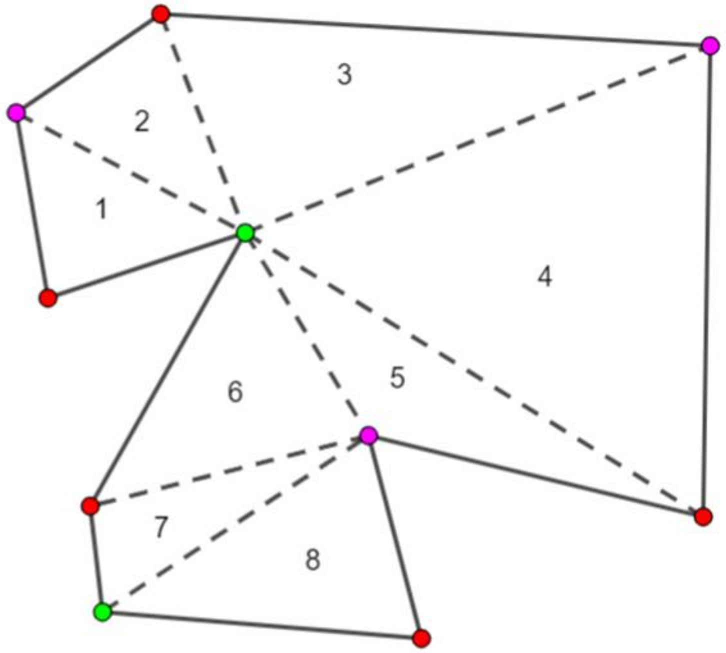
Géométrie

Et on recommence jusqu'à ce que chaque sommet soit affecté à une couleur



Géométrie

On obtient ainsi 3 configurations possibles … on choisit celle qui coute le moins cher en termes de caméras… Les emplacements « verts »



Problème de masse

Jean a un sac de 90 billes, toutes de même masse, sauf une qui est plus lourde. Les billes ont la même apparence.

Jean dispose d’une balance à plateaux. Il veut identifier la bille la plus lourde.

Comment procéder?

Problème de masse

Jean a un sac de 90 billes, toutes de même masse, sauf une qui est plus lourde. Les billes ont la même apparence.

Jean dispose d’une balance à plateaux. Il veut identifier la bille la plus lourde.

Quel est le nombre minimum de pesées ?

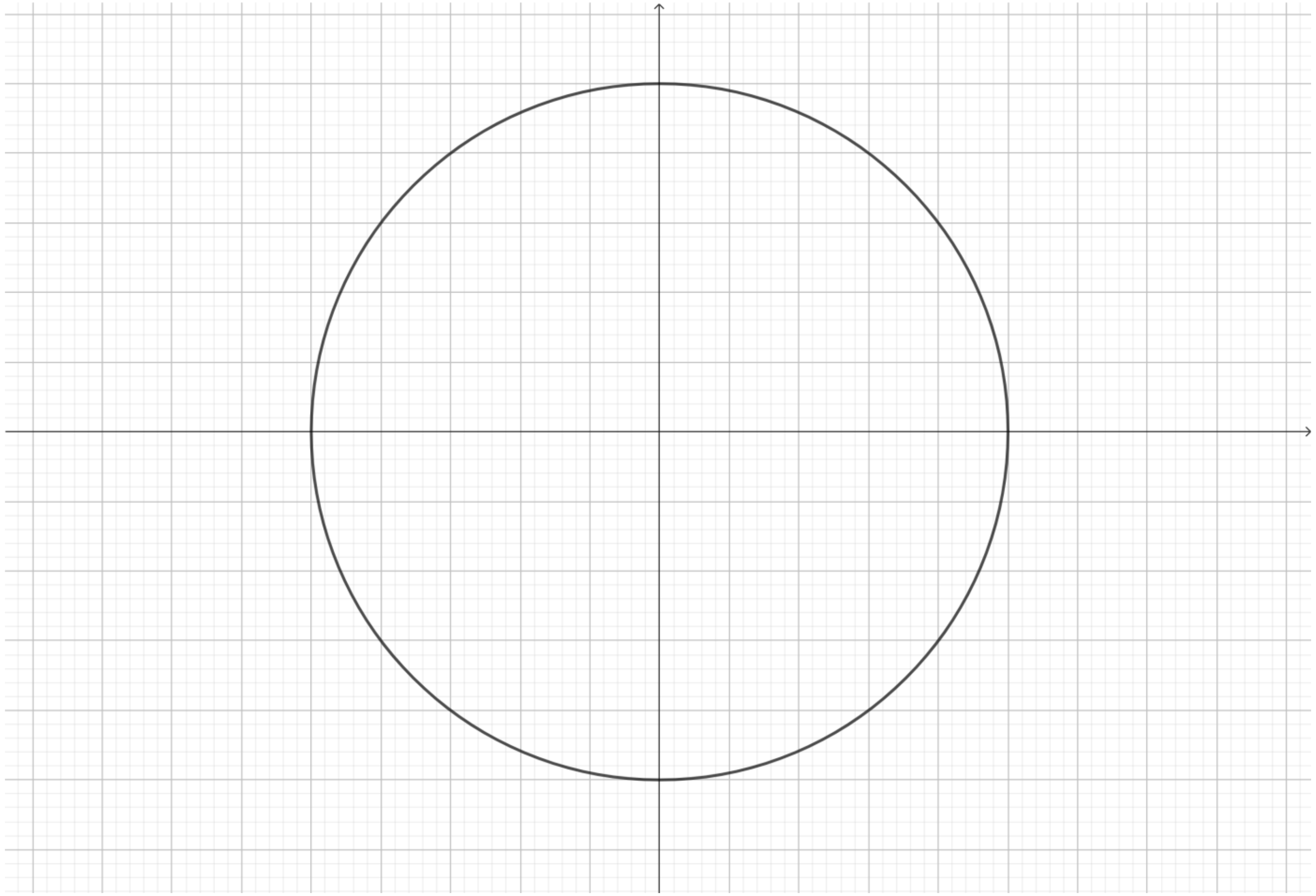
Problème de masse

Jean a un sac de 90 billes, toutes de même masse, sauf une qui est plus lourde. Les billes ont la même apparence.

Jean dispose d’une balance à plateaux. Il veut identifier la bille la plus lourde.

4 ou 5 pesées : 30-30-30 / 10-10-10 / 5-5 / 2-2-1 / éventuellement 1-1

∏



Circonférence ?

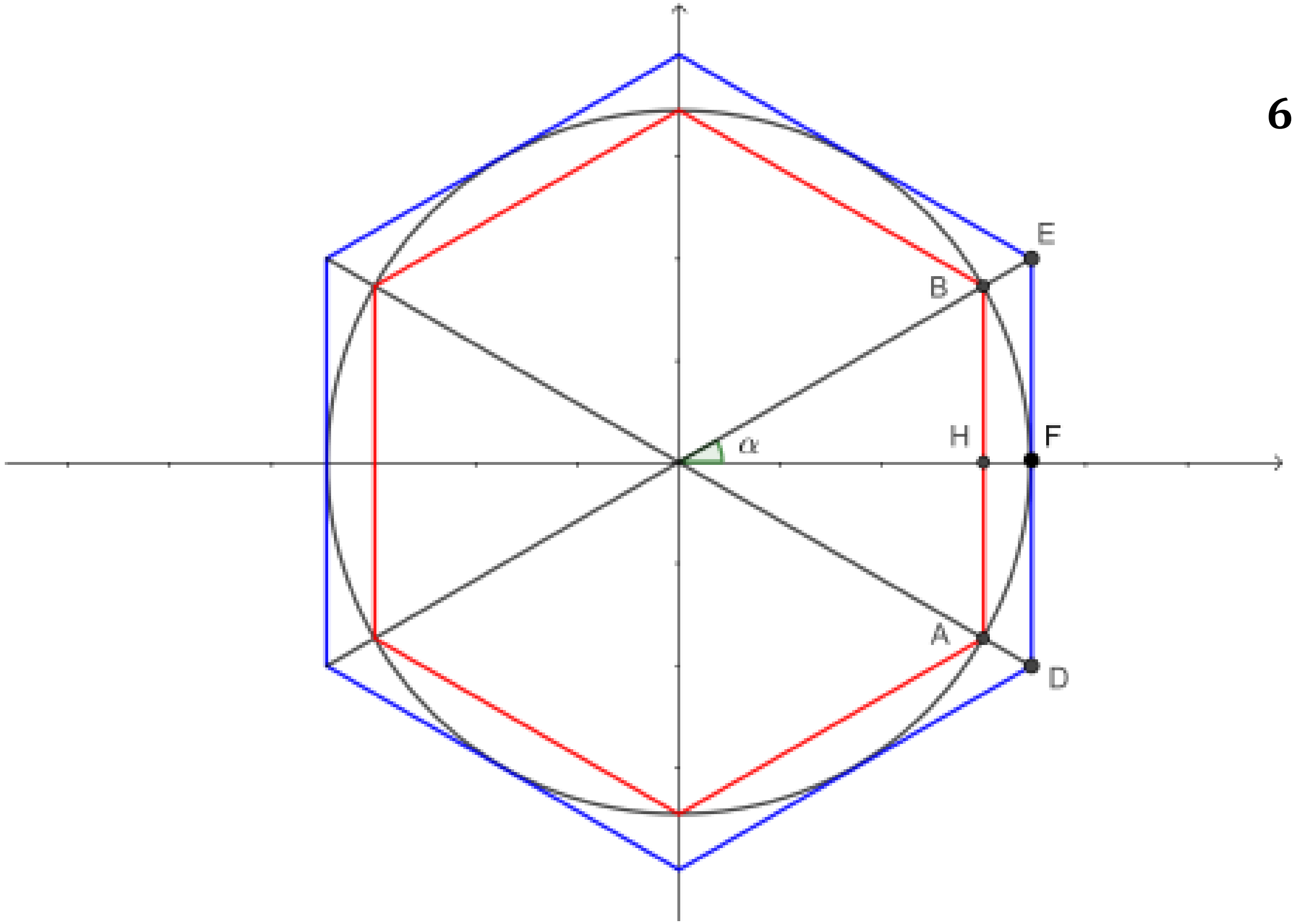
Comment établir une valeur de ∏?

∏

$$|BH| = \sin\alpha$$

$$|EF| = \tan\alpha$$

$$6\sin\alpha \leq \pi \leq 6\tan\alpha$$



π 3,14159265358979323846264338327950288419…

Nbr. de côtés	α	$\mathbf{n}\sin\alpha$	$\mathbf{n}\tan\alpha$
6	$30°$	3	$3,46410162$
12	$15°$	$3,10582854$	$3,21539031$
24	$7,5°$	$3,13262861$	$3,15965994$
48	$3,75°$	$3,1393502$	$3,14608622$
96	$1,875°$	$3,14103195$	$3,1427146$
192	$0,9375°$	$3,14145247$	$3,14187305$
384	$0,46875°$	$3,14155761$	$3,14166276$
768	$0,234375°$	$3,14158389$	$3,14161018$
1536	$0,1171875°$	$3,14159046$	$3,14159703$

π

Les méthodes d'approximation ont bien entendu évolué avec l'avancée des connaissances et de la technologie.

Archimède calculait une valeur approximée avec une précision de 0,04%

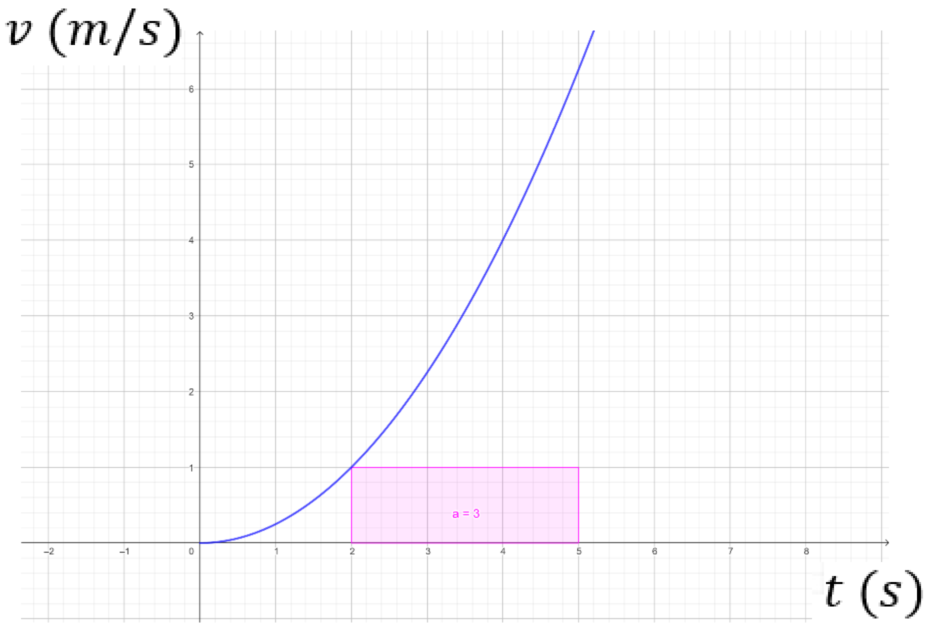
Au début du XVII^{e} siècle, on pouvait calculer la valeur jusqu'à la 35^{e} décimale.

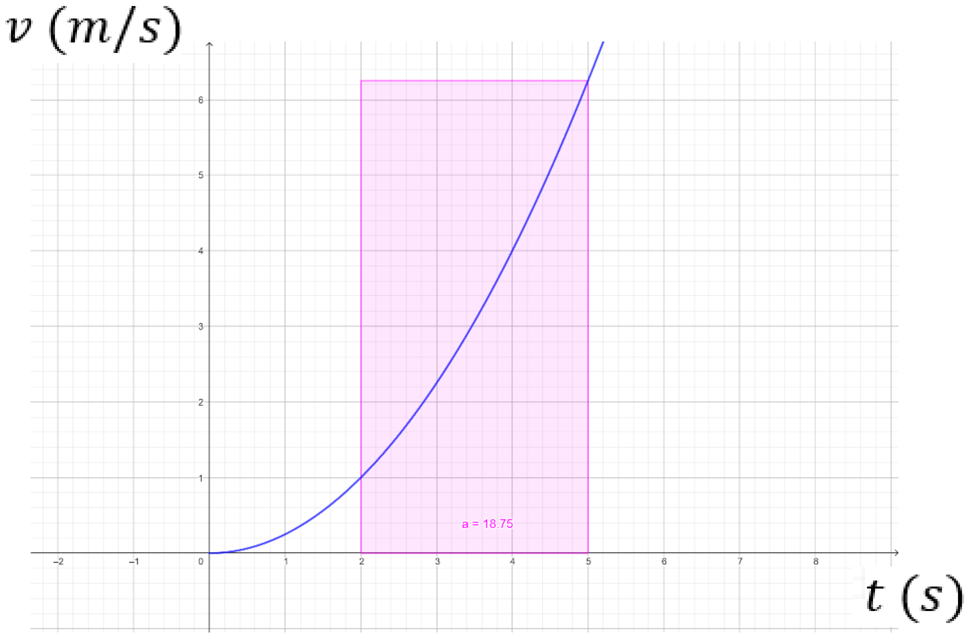
Depuis le XIX^{e} siècle, on peut atteindre la 125^{e} décimale.

Le record de calcul manuel est une approximation à la 527^{e} décimales (1873).

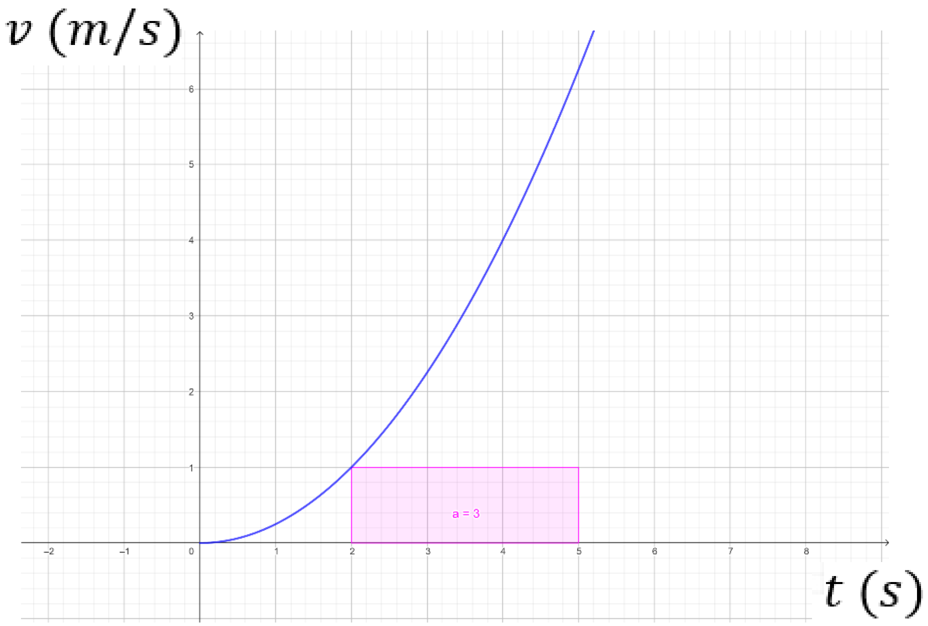
Le 9 juin 2022, on a établi un record de cent mille milliards de décimale en travaillant sur ordinateur pendant 157 jours.

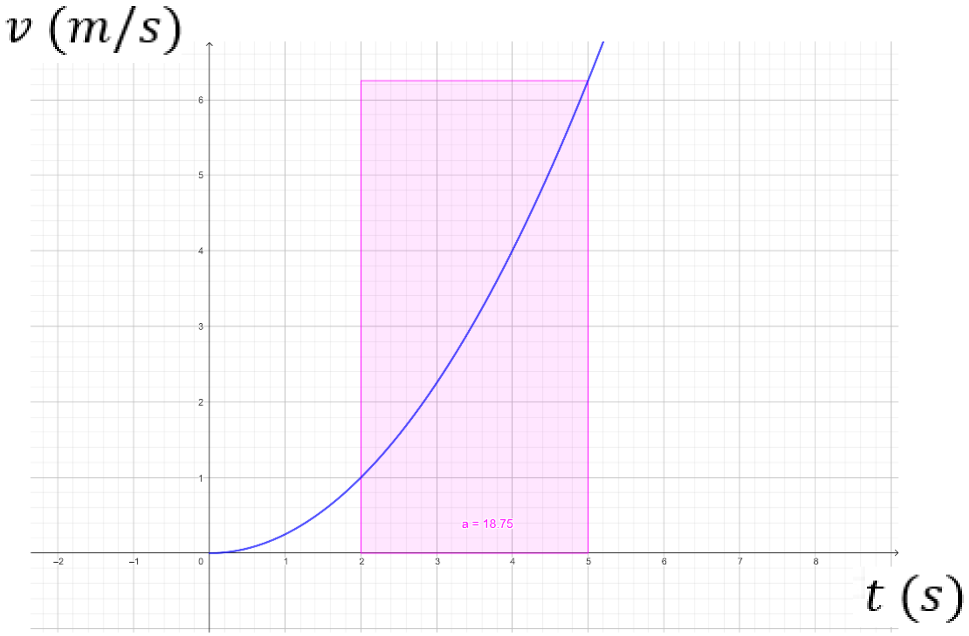
Calcul intégral





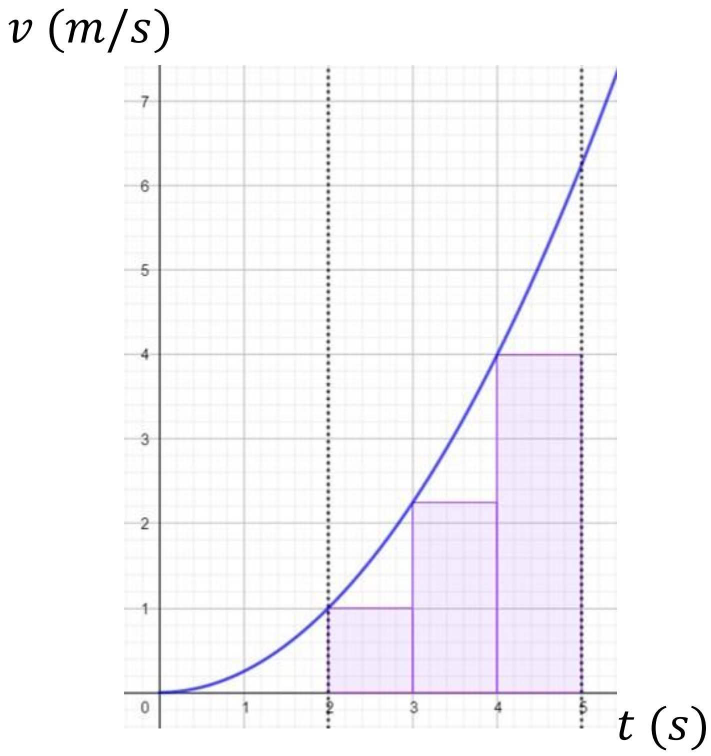
Calcul intégral

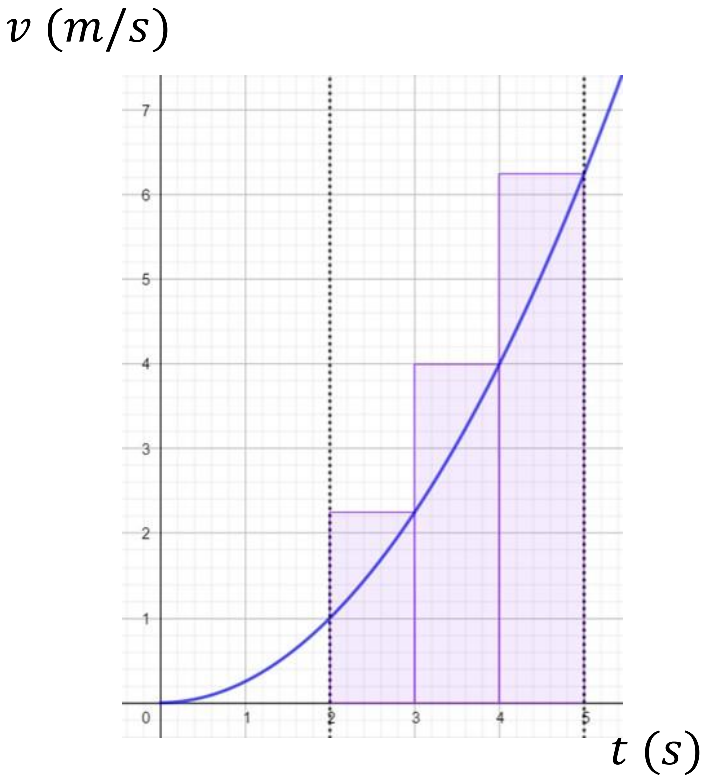




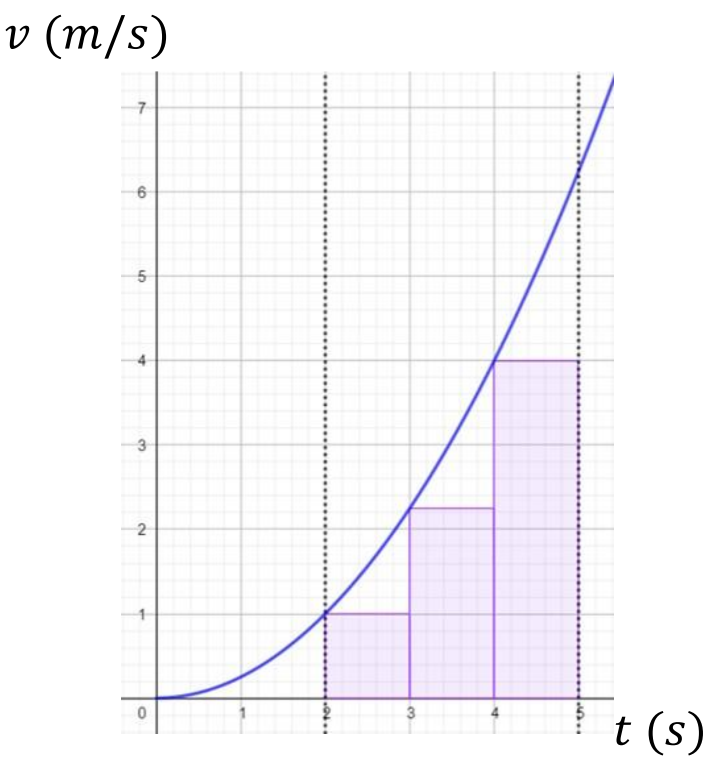
$$f(2) \times 3 = 1 \times 3 = 3 \leq Aire \leq 18{,}75 = \frac{25}{4} \times 3 = f(5) \times 3$$

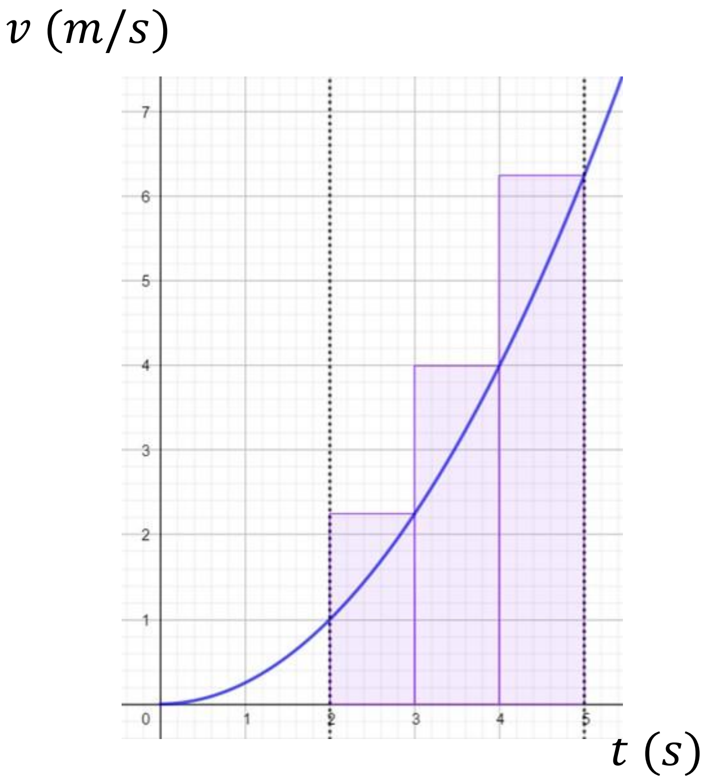
Calcul intégral





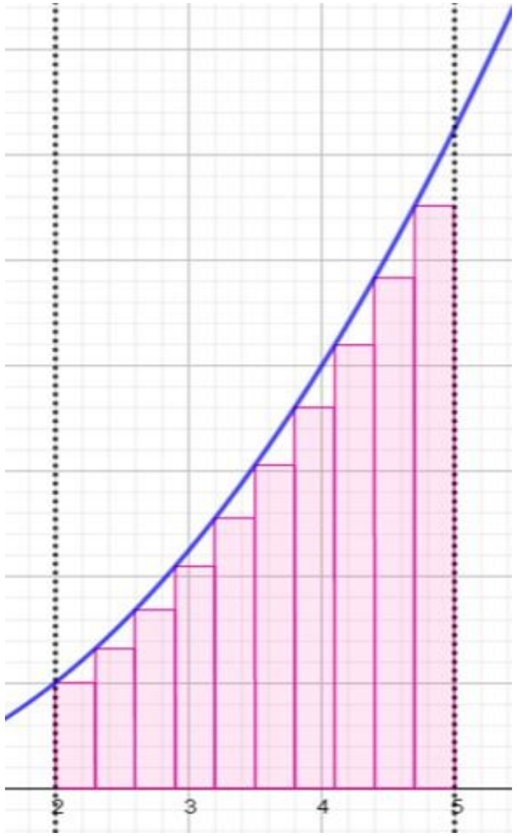
Calcul intégral

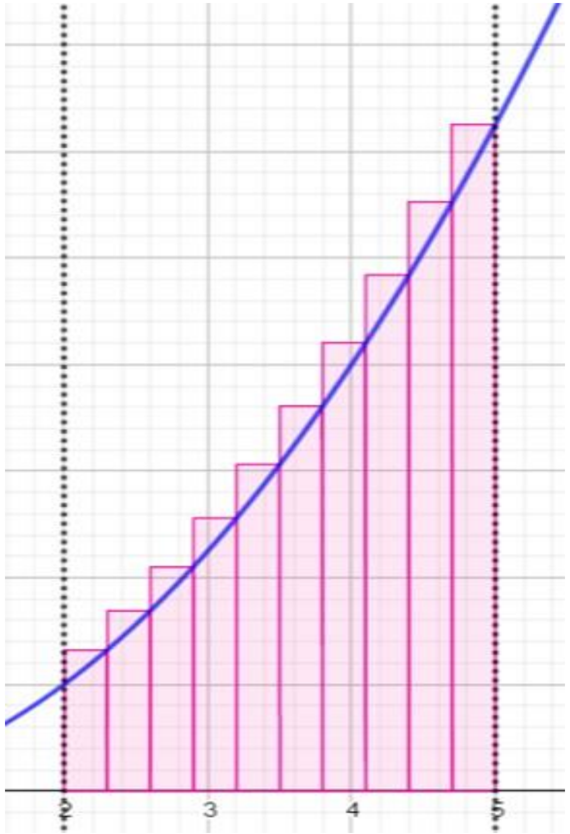




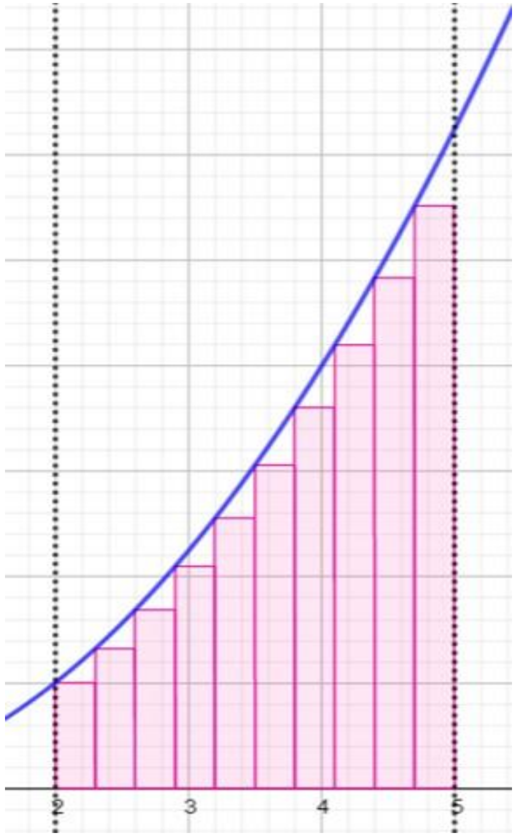
$$f(2) \times 1 + f(3) \times 1 + f(4) \times 1 = 5{,}25 \leq Aire \leq 12{,}5 = f(3) \times 1 + f(4) \times 1 + f(5) \times 1$$

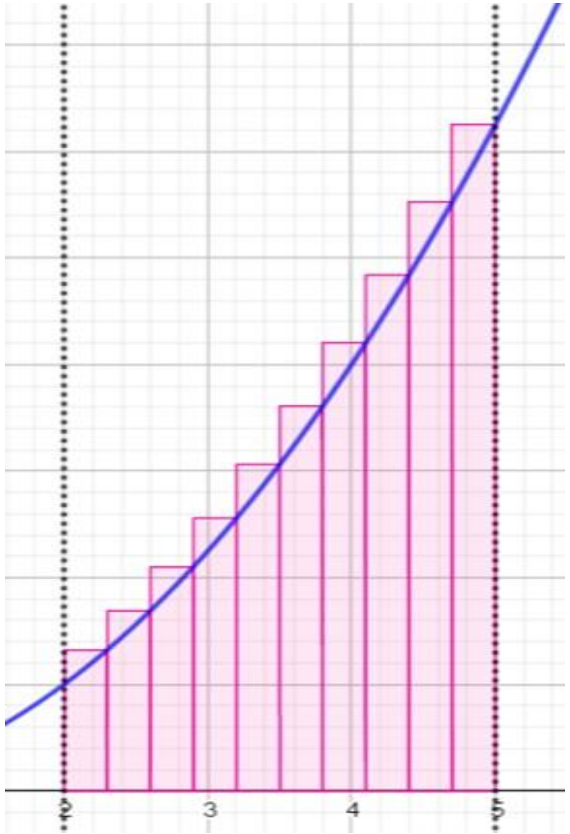
Calcul intégral





Calcul intégral





$$\underline{s_{10}} = 8{,}97 \leq Aire \leq 10{,}55 = \overline{s_{10}}$$

Application informatique

Les algorithmes récursifs, c’est-à-dire les algorithmes qui font appel à eux-mêmes.

Calculer la factorielle d’un nombre: $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

```
Fonction factorielle(n)
Début
    Si n==1 alors
            Retourner 1
    Sinon
            Retourner n * factorielle (n-1)
Fin
```

Application informatique

La recherche dichotomique …

A choisit un nombre de 1 à 100, B doit le trouver …

B propose « 50 », A répond « Non, plus petit »

B sait maintenant que le nombre est compris entre 1 et 50. Il propose « 25 » …..