Chapitre IV

Algèbre linéaire
Partie 2

Produit matriciel

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et B $\in M_{p,q}(\mathbb{R})$ pour $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, on pose

$AB = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

Note: AB n'existe que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B

$$A \in M_{n,\boldsymbol{p}}(\mathbb{R}) \text{ et B} \in M_{\boldsymbol{p},q}(\mathbb{R})$$

Produit matriciel

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kq} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

Produit matriciel

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kq} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{ip}b_{pj}}$$

Produit matriciel

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kq} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1k}b_{k1} + \cdots + a_{1p}b_{p1}}$$

Produit matriciel - exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$$AB \in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 3 \quad 0} \\ 2 \quad 1 \quad 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{7} & 6 & 4 \\ 8 & 14 & 3 \end{pmatrix} = AB$$

$$\mathbf{c_{11} = 1.1 + 3.2 + 0.1 = 7}$$
$$\mathbf{c_{12} = 1.0 + 3.2 + 0.3 = 6}$$
$$\mathbf{c_{13} = 1.1 + 3.1 + 0.0 = 4}$$
$$\mathbf{c_{21} = 2.1 + 1.2 + 4.1 = 8}$$
$$\mathbf{c_{22} = 2.0 + 1.2 + 4.3 = 14}$$
$$\mathbf{c_{23} = 2.1 + 1.1 + 4.0 = 3}$$

Produit matriciel

Soit $A \in M_{\boldsymbol{n},p}(\mathbb{R})$ et B $\in M_{p,\boldsymbol{q}}(\mathbb{R})$ pour $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, on pose

$AB = (c_{ij}) \in M_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{q}}$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

Propriétés

- $A(B+C)=AB+AC$
- $(A+B)C=AC+BC$
- $A(BC)=(AB)C$
- $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$

Mais

Le produit matriciel n'est pas commutatif et en général $AB \neq BA$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Mais

$AB = 0$ n'entraine pas nécessairement que $A = 0\ ou\ B = 0$

Où 0 = matrice nulle

Supposons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Si $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $AB = 0$

Mais si $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ alors $AB\ =\ 0$

Mais

$$AB = AC \nRightarrow B = C$$

$$Si\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} et\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, trouvez\ une\ matrice\ C\ tel\ que$$

$$AB = AC \nRightarrow B = C$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriété

- $A \times 0 = 0 \times A = 0$
- Si I est la matrice identité, $I \times A = A \times I = A$

Puissance d'une matrice

$$A^0 = I \; et \; si \; k \geq 1, A^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \, fois}$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrice inversible

Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$

Lorsque cette matrice existe, elle est unique

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible?

Matrice inversible

On cherche $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a $\begin{cases} a + 3c = 1 \\ b + 3d = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 1 \\ a = 1 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice inversible

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle inversible?

On a $\begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 0 \\ \quad 0 = 0 \\ \quad 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow B\ n'est\ pas\ inversible$

Transposition

On appelle transposée de $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$,

la matrice ${}^{t}A = (a_{ji}) \in M_{p,n}(\mathbb{R})$

Elle est obtenue en permutant les lignes et les colonnes

Transposition

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Transposition

- ${}^{t}(A + B) = {}^{t}A + {}^{t}B$
- ${}^{t}(\lambda A) = \lambda\,{}^{t}A$
- ${}^{t}(AB) = {}^{t}B\,{}^{t}A$