Chapitre III

Algèbre de Boole

Définition

L’algèbre de Boole (Georges Boole 1815 – 1864) est la partie des mathématiques qui s’intéresse aux opérations et aux fonctions sur les variables logiques

Il trouve de nombreuses applications en informatique et dans la conception de circuits électroniques

Définition

Un circuit électrique, pneumatique, hydraulique peut avoir 2 états logiques:

- Ouvert / 0 / Faux : Le circuit est ouvert (le courant ne passe pas) 
- Fermé / 1 / Vrai : Le circuit est fermé (le courant passe) 

Application

On doit construire un circuit électrique, pneumatique ou hydraulique

Pour cela, nous disposons de portes logiques qui sont des fonctions de base « pré câblées » permettant la fabrication du circuit électrique, pneumatique ou hydraulique

L'Algèbre de Boole va nous permettre de mettre en équation le fonctionnement du système, et de le simplifier en vue de sa réalisation physique

Variable logique

Une variable logique est une variable qui peut prendre 2 états possibles: 0 ou 1, ouvert ou fermé

C’est une variable **booléenne**

Fonctions logiques de base

ET

- Définition: a ET b est VRAI si et seulement si a est VRAI et b est VRAI
- Notation: $a \cdot b$ (produit)
- Table de vérité:

a	b	$\boldsymbol{a \cdot b}$
0	0	**0**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

Fonctions logiques de base

<u>OU</u>

- Définition: a OU b est VRAI si et seulement si a est VRAI ou b est VRAI, ou si a et b sont VRAIS
- Notation: $a + b$ (somme)
- Table de vérité:

a	b	$a + b$
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

Fonctions logiques de base

NON

- Définition: NON a est vrai si et seulement si a est FAUX
- Notation: $\bar{a}$
- Table de vérité:

a	$\bar{a}$
0	**1**
1	**0**

Fonctions logiques de base

OU EXCLUSIF

- Notation: $a \oplus b$
- Table de vérité:

a	b	$a \oplus b$
0	0	**0**
1	0	**1**
0	1	**1**
1	1	**0**

- $a \oplus b$ peut être construit à partir des 3 fonctions précédentes:

$$a \oplus b = (a + b) \cdot \overline{(a \cdot b)} = \left(a \cdot \bar{b}\right) + (\bar{a} \cdot b)$$

Propriétés

- Involution: $\bar{\bar{a}} = a$
- Idempotence:
  - $a + a = a$
  - $a \cdot a = a$
- Complémentarité:
  - $a + \bar{a} = 1$
  - $a \cdot \bar{a} = 0$
- Eléments neutres:
  - $a + 0 = a$
  - $a \cdot 1 = a$

Propriétés

- Eléments absorbants:
  - $a + 1 = 1$
  - $a.0 = 0$
- Commutativité:
  - $a + b = b + a$
  - $a.b = b.a$
- Associativité:
  - $a.(b + c) = a.b + a.c$
  - $a + (b.c) = (a + b).(a + c)$

Propriétés

- Théorème de Morgan
  - $\overline{(a+b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$
  - $\overline{(a \cdot b)} = \bar{a} + \bar{b}$

Fonctions logiques

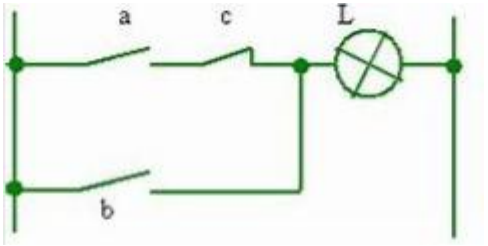
Une fonction logique est le résultat de la combinaison d’une ou plusieurs variables logiques reliées entre elles par des fonctions de base

Exemple:

$$F(a,b,c) = a.\bar{b}.c + \bar{a}.b.c + \bar{a}.\bar{b}.c$$

$$F(a,b) = \bar{a} + a.\bar{b}$$

Fonctions logiques



- Circuit d'une lampe
- La lampe s'allume si a est fermé et c est ouvert ou si b est fermé
- $L = (a.\bar{c}) + b$

Forme canonique

- Première forme canonique d'une fonction: écriture de la fonction sous la forme d'une somme de produit des variables (*forme la plus courante*)

$$F(a,b,c) = a.\bar{b}.c + \bar{a}.b.c + \bar{a}.\bar{b}.c$$

- Seconde forme canonique d'une fonction: écriture de la fonction sous la forme du produit de sommes des variables

$$F(a,b,c) = \left(a + \bar{b} + c\right).(\bar{a} + b + c).(\bar{a} + \bar{b} + c)$$

Forme canonique

Imaginons une fonction de 3 variables a, b, c qui a la table de vérité suivante:

a	b	c	$F(a,b,c)$	
0	0	0	0	
0	0	1	**1**	$\bar{a}\bar{b}c$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	**1**	$a\bar{b}\bar{c}$
1	1	0	**1**	$ab\bar{c}$
1	0	1	**1**	$a\bar{b}c$
1	1	1	**1**	abc

$$F(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} + a\bar{b}c + abc$$

Simplification

En utilisant l'algèbre de Boole

- $\overline{(a+b)} + \bar{a} = (\bar{a}.\bar{b}) + \bar{a} = (\bar{a}.\bar{b}) + \bar{a}.1 = \bar{a}.(\bar{b}+1) = \bar{a}.1 = \bar{a}$

Table de vérité

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a+b}$	$\overline{(\boldsymbol{a+b})}$	$\bar{\boldsymbol{a}}$	$\overline{(\boldsymbol{a+b})} + \bar{\boldsymbol{a}}$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0

Simplification

Tableau de Karnaugh

B \ A	0	1
0		
1		

Tableau à 2 variables

c \ AB	00	01	11	10
0				
1				

Tableaux à 3 variables

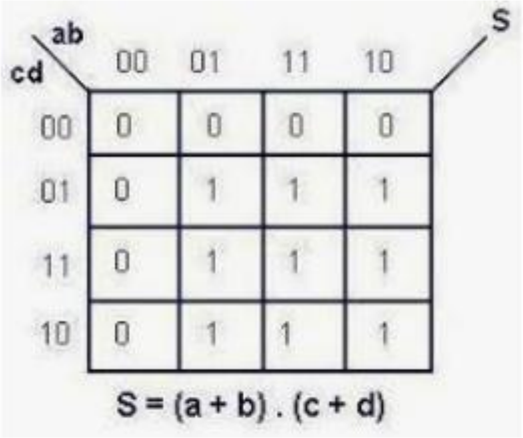
CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Tableau à 4 variables

Simplification

On exprime la table de vérité sous forme de diagramme de Karnaugh

a	b	c	d	(a+b).(c+d)
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

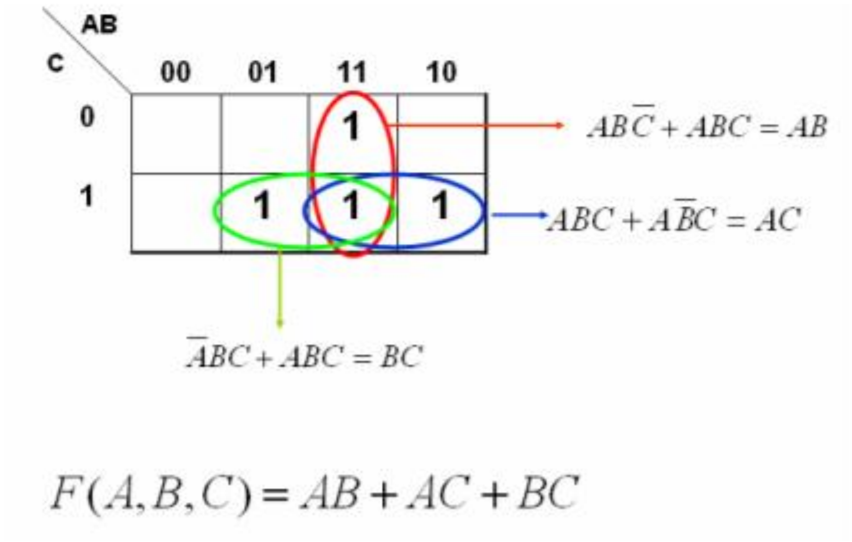


cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	1

S = (a + b) . (c + d)

Simplification

A partir du tableau de Karnaugh, on essaye de regrouper les case adjacentes qui comportent des 1



a	b	c	F(a,b,c)	ab	ac	bc	ab+ac+bc
0	0	0	**0**	0	0	0	**0**
0	0	1	**0**	0	0	0	**0**
0	1	0	**0**	0	0	0	**0**
0	1	1	**1**	0	0	1	**1**
1	0	0	**0**	0	0	0	**0**
1	0	1	**1**	0	1	0	**1**
1	1	0	**1**	1	0	0	**1**
1	1	1	**1**	1	1	1	**1**

Exercice

Simplifier les expressions suivantes et vérifier la simplification au moyen de la table de vérité

- $ab + a\overline{b} + a$
- $a(\overline{a} + ab)$
- $\overline{a}bc + abc + ab\overline{c}$
- $b(b + c) + \overline{c}(a + b) + ab\overline{c}$

Exercice

Ecrire sous la première forme canonique les fonctions définies par les propositions suivantes:

- F(a, b, c) = 1 si et seulement si aucune des variables a, b, c ne prend la valeur 1
- F(a, b, c) = 1 si et seulement si au plus une des variables a, b, c prend la valeur 0
- F(a, b, c) = 1 si et seulement si exactement une des variables a, b, c prend la valeur 1
- F(a, b, c) = 1 si et seulement si au moins l'une des variables a, b, c prend la valeur 0
- F(a, b, c) = 1 si et seulement si exactement deux variables a, b, c prennent la valeur 1
- F(a, b, c) = 1 si et seulement si au moins deux variables a, b, c prennent la valeur 0
- F(a, b, c) = 1 si et seulement si les variables a, b, c prennent la valeur 1

Exercice

Simplifier les fonctions booléennes suivantes par la méthode des tableaux de Karnaugh

- $F(a,b,c) = ab\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + abc + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$
- $F(a,b,c) = abc + ab\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}c + \bar{a}b$
- $F(a,b,c) = ab + bc + ca$
- $F(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}cd + a\bar{b}\bar{c}d + a\bar{b}cd$
- $F(a,b,c,d) = \bar{a}b + \bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + c\bar{d}$

Exercice

Paul est heureux dans les conditions suivantes : lorsqu'il écoute de la musique et qu'il lit, ou bien lorsqu'il travaille en écoutant de la musique, ou encore lorsqu'il lit et qu'il ne travaille pas.

On définit 3 variables logiques de la manière suivante :

- a=1 si Paul écoute de la musique
- b=1 si Paul lit
- c=1 si Paul travaille

La fonction F(a,b,c) = 1 lorsque Paul est heureux

a. Exprimer la fonction F(a,b,c) traduisant les données du problème
b. Compléter le tableau de vérité
c. A partir de cette table de vérité, dégager une nouvelle fonction de F
d. Paul n'est pas heureux alors qu'il écoute de la musique. Pourquoi ?

Exercice

On désire concevoir un circuit qui permet de gérer les notes des étudiants en fin d'année.

La cotation est fixée comme suit :

- Si l'étudiant réussit l'examen final, il obtient 45%
- S'il réussit l'examen partiel, il obtient 35%
- S'il réussit les TPs, il obtient 20%

Un étudiant est admis s'il dispose d'un pourcentage >= 55%.

Exemple : un étudiant obtient : 11/20 à son examen final, 8/20 à l'examen partiel et 10/20 aux TPs. Cela se traduit par F=1, P=0 et T=1. Il obtient donc 65% au total et a donc réussi : R=1

a. Donner la table de vérité
b. Donner la fonction logique correspondante
c. Simplifier la fonction obtenue

Exercice

Un circuit doit arrêter un chauffage dès que la température préréglée T* est atteinte.

La sortie C du circuit vaut « 1 » si le chauffage doit fonctionner et « 0 » si le chauffage doit être arrêté.

Le circuit possède trois entrées, provenant de trois sondes placées en des endroits différents de la pièce. Le signal des sondes est défini comme suit :

- Si la température mesurée est inférieure à T*, la sonde prend la valeur « 1 »
- Si la température mesurée est supérieure à T*, la sonde prend la valeur « 0 »

Le chauffage est arrêté si au moins deux sondes détectent un dépassement de la température T*.

a. Dresser la table de vérité de C en fonction des variables s1, s2 et s3.
b. Simplifier l’expression de C au moyen d’une table de Karnaugh

Exercice

Un distributeur de boissons permet de livrer au consommateur : de l’eau seule, du cassis à l’eau ou de la menthe à l’eau. Mais il ne doit pas livrer de la menthe seule, du cassis seul, ni du cassis avec de la menthe (que ce soit avec ou sans eau). Une pièce p doit être introduite avant son choix, sauf l’eau qui est gratuite. La façade du distributeur comporte un bouton ‘EAU’, un bouton ‘CASSIS’ et un bouton ‘MENTHE’ sur lesquels il faut appuyer pour effectuer son choix. Ces actions sont alors mémorisées par un dispositif interne. On désignera respectivement par p, e, m ou c ces actions mémorisées. En cas de fausse manœuvre, la pièce est rendue. Une fonction R (Restitution de la pièce) est déterminée à cette occasion.

a. Trouvez les fonctions E, M, C et R
b. Simplifiez ces fonctions

Nous supposons que pour avoir de la menthe à l’eau ou du cassis à l’eau, il fallait appuyer sur le bouton cassis ou menthe et le bouton eau

Exercice

Simplifiez les fonctions suivantes:

c	b	a	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

d	c	b	a	Z
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Exercice

Simplifiez les fonctions suivantes:

$$F1=a.b.\bar{c}+\bar{a}.\bar{b}.c+a.\bar{b}.\bar{c}+a.\bar{b}.c$$

$$F2=a.b.c+\bar{a}.b.c+\bar{a}.\bar{b}.c+a.b.\bar{c}$$

$$F3=\bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d}+\bar{a}.b.\bar{c}.d+a.\bar{b}.c.\bar{d}+\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}+a.b.\bar{c}.d+\bar{a}.b.c.d+a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}$$

$$F4=\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}+\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.d+\bar{a}.\bar{b}.c.d+\bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d}+a.b.\bar{c}.d+a.b.c.d+a.\bar{b}.\bar{c}.d+a.\bar{b}.c.d+a.\bar{b}.c.\bar{d}$$

$$F5=\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}+\bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d}+a.b.\bar{c}.\bar{d}+a.b.c.\bar{d}+a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}+a.\bar{b}.c.\bar{d}$$

Exercice

Simplifier la fonction suivante

A	B	C	D	S
0	0	0	0	**1**
0	0	0	1	**0**
0	0	1	0	**1**
0	0	1	1	**0**
0	1	0	0	**1**
0	1	0	1	**0**
0	1	1	0	**1**
0	1	1	1	**0**
1	0	0	0	**1**
1	0	0	1	**1**
1	0	1	0	**1**
1	0	1	1	**0**
1	1	0	0	**1**
1	1	0	1	**1**
1	1	1	0	**1**
1	1	1	1	**0**