Chapitre IV

Algèbre linéaire
Partie 5

Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi est une méthode itérative qui permet de résoudre un système d'équation:

$$AX = B \;\Leftrightarrow MX = NX + B \Leftrightarrow X = M^{-1}NX + M^{-1}B$$

Condition, la matrice A doit être une matrice à **diagonale dominante**

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$$

Alors la méthode de Jacobi **converge**

Méthode de Jacobi

$$AX = B \Leftrightarrow MX = NX + B \Leftrightarrow X = M^{-1}NX + M^{-1}B$$

La matrice A est décomposée en 3 matrices: $A = D - E - F$

Avec

- $D = matrice\ diagonale \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- $E = matrice$ "triangulaire inférieure" $-\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

- $F = matrice$ "triangulaire supérieure" $-\begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Méthode de Jacobi

On choisit

$$M = D$$

$$N = E + F$$

Comme A est un matrice à diagonale dominante: $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$, la matrice D est inversible

Méthode de Jacobi

$$AX = B \;\Leftrightarrow MX = NX + B \Leftrightarrow X = M^{-1}NX + M^{-1}B$$

devient

$$AX = B \Leftrightarrow X = M^{-1}NX + M^{-1}B = D^{-1}(E + F)X + D^{-1}B$$

Méthode de Jacobi

On choisit un premier vecteur solution $\boldsymbol{X_0}$

Et ensuite par récurrence, on résout l'équation suivante:

$$\boldsymbol{X_{n+1} = D^{-1}(E + F)X_n + D^{-1}B}$$

Méthode de Jacobi

Soit le système $\begin{cases} 2x - y + 0z = 1 \\ -x + 2y - z = 0 \\ 0x - y + 2z = 1 \end{cases}$ et $\varepsilon < 10^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Méthode de Jacobi

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$E + F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1}(E + F) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Méthode de Jacobi

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$|x^1 - x^0| = \left\| \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\| \not< 10^{-1}$$

Méthode de Jacobi

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$|x^2 - x^1| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \nless 10^{-1}$$

Méthode de Jacobi

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$|x^3 - x^2| = \left\| \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} \right\| \nless 10^{-1}$$

Méthode de Jacobi

$$x^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$x^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$|x^4 - x^3| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \nless 10^{-1}$$

Méthode de Jacobi

$$x^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$x^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/8 \\ 3/4 \\ 7/8 \end{pmatrix}$$

$$\left|x^5 - x^4\right| = \left\|\begin{pmatrix} 1/8 \\ 0 \\ 1/8 \end{pmatrix}\right\| \nless 10^{-1}$$

Méthode de Jacobi

$$x^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/8 \\ 3/4 \\ 7/8 \end{pmatrix}$$

$$x^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/8 \\ 3/4 \\ 7/8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/8 \\ 7/8 \\ 7/8 \end{pmatrix}$$

$$|x^6 - x^5| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \nless 10^{-1}$$

Méthode de Jacobi

$$x^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/8 \\ 3/4 \\ 7/8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/8 \\ 7/8 \\ 7/8 \end{pmatrix}$$

$$x^7 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/8 \\ 7/8 \\ 7/8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/16 \\ 7/8 \\ 15/16 \end{pmatrix}$$

$$|x^7 - x^6| = \left\| \begin{pmatrix} 1/16 \\ 0 \\ 1/16 \end{pmatrix} \right\| < 10^{-1}$$

Méthode de Jacobi

La solution exacte vaut $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On voit que la méthode permet aux solutions successives de converger vers la solution …

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7/8 \\ 3/4 \\ 7/8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7/8 \\ 7/8 \\ 7/8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 15/16 \\ 7/8 \\ 15/16 \end{pmatrix} \to \ \ldots$$

Exercice

Résoudre le système suivant par la méthode de Jacobi

$$\begin{cases} 9x + 4y + z = -17 \\ x - 2y - 6z = 14 \\ x + 6y = 4 \end{cases}$$

Solution

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$