Chapitre IV

Algèbre linéaire
Partie 4

Exercice - 4

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer le déterminant en utilisant la méthode de Sarrus

Exercice - 5

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer la matrice des cofacteurs

Calculer le déterminant de A

La matrice est-t-elle inversible?

Calculer l’inverse

Propriétés des déterminants

$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$,

- $\det(I) = 1$
- $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)\,, \lambda \in \mathbb{R}$
- $\det({}^tA) = \det(A)$

Exercice - 6

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer

- $\det(3A)$
- $\det(CB)$
- $\det(BC)$
- $\det(A^3)$

Système d’équations

Une des applications du calcul matriciel est la résolution de systèmes d’équations

Soit le système de 3 équations à 3 inconnues:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \\ -x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

Système d'équations

Soit le système de 3 équations à 3 inconnues:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \\ -x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

La solution de ce système est $S = \{ \frac{7}{5} \ ; \ \frac{18}{5} \ ; 3 \}$

Système d’équations - Substitution

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \\ -x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

On va isoler une inconnue et la substituer dans les autres équations, jusqu’à obtenir une équation à une inconnue…

Par exemple, à partir de la première équation, nous pouvons écrire que $z = 2y - 3x$

Systèmes d'équations - Substitution

La deuxième et troisième équations deviennent ainsi

$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ -10x + 5y = 4 \end{cases}$$

A partir de ce nouveau système, nous pouvons par exemple isoler y dans la première équation et obtenir $y = 4x - 2$

Systèmes d’équations - Substitution

La deuxième équation de notre nouveau système devient ainsi

$10x = 14$

Nous avons une équation à une inconnue et la résolution donne $x = \frac{7}{5}$

Ensuite nous remontons en sens inverse…

$$y = 4x - 2 \rightarrow y = 4 \times \frac{7}{5} - 2 = \frac{28}{5} - 2 = \frac{28}{5} - \frac{10}{5} = \frac{18}{5}$$

$$z = 2y - 3x \rightarrow z = 2 \times \frac{18}{5} - 3 \times \frac{7}{5} = \frac{36}{5} - \frac{21}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

Système d'équations – Gauss-Jordan

Reprenons le système précédent:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \\ -x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

Qui peut s'écrire

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{D}$$

Système d'équations – Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

-> on applique des opérations sur les lignes des 2 matrices pour obtenir une matrice diagonale

$$L_2 = L_2 - \frac{1}{3} L_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Système d'équations – Gauss-Jordan

$$L_3 = L_3 + \frac{1}{3}L_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$L_3 = L_3 + L_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Système d'équations – Gauss-Jordan

$$L_2 = L_2 + \frac{4}{6} L_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = L_1 - \frac{1}{2} L_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{21}{5} \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Système d'équations – Gauss-Jordan

$$L_1 = \frac{L_1}{3} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{et} \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \frac{3L_2}{5} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{et} \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{18}{5} \\ 6 \end{pmatrix}$$

Système d'équations – Gauss-Jordan

$$L_3 = \frac{L_3}{2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{18}{5} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Systèmes d’équations – Matrice inverse

Le système d’équation peut aussi s’écrire

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{D}$$

$$\Rightarrow A \times X = D \Rightarrow A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times D \Rightarrow \boldsymbol{X = A^{-1} \times D}$$

Systèmes d'équations – Matrice inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{-1}{5} & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} \times D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{10} \times 4 \\ 1 \times 2 + \frac{2}{5} \times 4 \\ \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{18}{5} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice - 8

Un camion livre à des détaillants 3 modèles de télévision. Celles-ci sont emballées dans des caisses en carton dont les caractéristiques sont les suivantes:

- Télévision 1: Caisse de 0,15m³, 9kg, prix de la télévision: 402€
- Télévision 2: Caisse de 0,75m³, 24kg, prix de la télévision: 1462€
- Télévision 3: Caisse de 0,25m³, 15kg, prix de la télévision: 749€

Le chargement total occupe un volume de 35,6m³ et a une masse de 1,59 tonne. Si le nombre total de télévision est de 108, quelle est la valeur marchande de ce chargement?

Exercice - 9

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0{,}5 & 5 \\ -4 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & -0{,}5 & 2 \end{pmatrix}$

a) Déterminer une matrice carrée B de telle sorte que A * B soit possible. Justifier. Remarque : Aucun terme de B ne vaudra 0 ou 1 et B n'aura aucune ligne/colonne identique

b) Calculer ce produit

c) Déterminer une matrice C de telle sorte que C^2 - 2B soit possible. Justifier. Remarque : Aucun terme de C ne vaudra 0 ou 1 et C n'aura aucune ligne/colonne identique

d) Calculer cette expression

Exercice - 10

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Prouver que la matrice est inversible
b) Calculer sa matrice inverse

Exercice - 11

Résoudre le système d'équations suivant

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x + y + z = 1 \\ z + y = 3 \end{cases}$$

Exercice - 12

Résoudre le système d'équations suivant

$$\begin{cases} x + y + z = 25 \\ x - y + z = 5 \\ x - 2y + 2z = -10 \end{cases}$$

Exercice - 13

Une personne possède 19 jetons, 8 jetons rouges, 5 jetons bleus et 6 jetons verts.

La pile de 19 jetons mesure 19mm de hauteur. Une pile constituée de 3 jetons bleus et 4 jetons verts mesure 9,5mm de hauteur. Une pile constituée de 6 jetons rouges et 4 jetons bleus mesure 10,5mm.

Déterminer la hauteur d'une pile constituée de 2 jetons rouges et 9 jetons verts.

Exercice - 14

Michel, Maurice et Marcel comparent leurs âges.

L’âge de Marcel est le triple de l’âge de Maurice.

Il y a 7 ans, l’âge de Michel était la moitié de celui de Marcel.

Dans 3 ans, l’âge de Marcel sera égal à la somme des âges de Michel et de Maurice.

Quels sont leurs âges actuels ?

Exercice - 15

Quelle est l'équation de la parabole passant par les points

A(2 ; 35)

B(4 ; 23)

C(5 ; 11)

Note: l'équation d'une parabole s'écrit $y = ax^2 + bx + c$