Chapitre IV

Algèbre linéaire
Partie 1

Espace vectoriel

L'**algèbre linéaire** est la branche des mathématiques qui s'intéresse aux **espaces vectoriels** et aux transformations linéaires

Un **espace vectoriel** est un ensemble d'objets, appelés **vecteurs**, que l'on peut **additionner entre eux**, et que l'on peut **multiplier par un scalaire**

Espace vectoriel

Soit K un corps commutatif (ensemble muni de 2 opérations binaires rendant possible l'addition, la soustraction, la multiplication et la division).

Un espace vectoriel sur K est un ensemble E, dont les éléments appelés vecteurs, muni de deux lois:

- Une loi de composition interne « + »: $E^2 \to E$ appelée addition ou somme vectorielle

- Une loi de composition externe « . »: $K \times E \to E$, appelée multiplication par un scalaire

Espace vectoriel

- La loi « + » est commutative: u + v = v + u
- La loi « + » est associative: (u + v) + w = u + (v + w)
- La loi « + » admet un élément neutre: $0_E + v = v$
- Tout vecteur *v* a un opposé, noté *–v*: $v + (-v) = 0^E$
- La loi « . » est distributive
  - λ . (u + v) = λ . u + λ . v
  - (λ + μ) . u = λ . u + μ . u
- La loi « . » vérifie une associativité mixte: (λ.μ) . u = λ.(μ.u)
- La loi « . » admet un neutre: 1.u = u

Espace vectoriel

Exemples:

- Espace vectoriel trivial ou nul: {0}
- $\mathbb{R}$: l'addition vectorielle est l'addition dans $\mathbb{R}$ et la multiplication par un scalaire est la multiplication dans $\mathbb{R}$

Vecteurs et Matrices

Nous allons limiter notre étude des espaces vectoriels aux **vecteurs** et **matrices**

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1} & \cdots & m_{pq} \end{bmatrix}$$

Introduction

La poste offre différents tarifs selon le poids de l’envoi et la « vitesse » de traitement des lettres et courriers:

Lettre service rapide	
Jusqu'à	**Tarif**
20g	0,46 €
50g	0,69 €
100g	1,02 €

Lettre recommandée			
Jusqu'à	**Tarif 1**	**Tarif 2**	**Tarif 3**
20g	2,82 €	3,35 €	4,12 €
50g	3,05 €	3,58 €	4,34 €
100g	3,38 €	3,92 €	4,68 €

Introduction

Le tarif pourrait être regroupé dans un seul tableau comme suit

Lettre : Tarif				
Jusqu'à	**Normal**	**Tarif 1**	**Tarif 2**	**Tarif 3**
20g	0,46 €	2,82 €	3,35 €	4,12 €
50g	0,69 €	3,05 €	3,58 €	4,34 €
100g	1,02 €	3,38 €	3,92 €	4,68 €

Ce tableau de 3 lignes et 4 colonnes est une **matrice** de 3 lignes et 4 colonnes

Introduction

Nous notons la matrice sous la forme suivante:

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}46 & 2{,}82 & 3{,}35 & 4{,}12 \\ 0{,}69 & 3{,}05 & 3{,}58 & 4{,}34 \\ 1{,}02 & 3{,}38 & 3{,}92 & 4{,}68 \end{pmatrix}$$

Définition

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, une matrice de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un tableau de nombre réels à n lignes et p colonnes.

L'ensemble de ces matrices se note $M_{n,p}(\mathbb{R})$

Exemple:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ $\quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ $\quad K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

Notation

On notera

$$A = (a_{i,j})_{0<i\leq n, 0<j\leq p}$$

ou

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$$

Notation

$$\begin{array}{lc} & \begin{matrix} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & \text{Colonne } j & \phantom{a_{1p}} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \text{Ligne } i \\ \\ \end{matrix} & A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in M_{n,p}(\mathbb{R}) \end{array}$$

Terminologie

Une matrice à n lignes et p colonnes est dite d'ordre (n, p) ou de dimension $n \times p$

Terminologie

Si $n = p$, on parle de matrice carrée et l'on note $M_n(\mathbb{R})$ leur ensemble.

$(a_{ii})_{0<i\leq n}$ forme la diagonale de la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Terminologie

Une matrice carrée est dite diagonale si $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Attention, la diagonale n'est que dans un seul sens. La matrice suivante n'est pas diagonale

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Terminologie

Une matrice carrée est dite triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0, \forall i > j$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une matrice carrée est dite triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0, \forall i < j$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Terminologie

Une matrice carrée est dite identité si $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ et $a_{ii} = 1$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Terminologie

Deux matrices $\mathrm{A} = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont égales si $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$

La matrice nulle est la matrice dont tous les coefficients sont nuls

Exemples

Donner un exemple

- Une matrice carrée d’ordre 5
- Une matrice d’ordre (3,4)
- Une matrice diagonale d’ordre 4 avec une diagonale formée de ‘2’
- Une matrice triangulaire supérieure d’ordre 4

Addition et multiplication par un réel

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \left(a_{ij}\right)$ et $B = \left(b_{ij}\right) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

- $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$
- $\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

Cfr. Espace vectoriel

Propriétés

L’addition et la multiplication par un réel héritent automatiquement des propriétés définies sur les espaces vectoriels:

- L’existence d’un neutre pour l’addition (Matrice nulle) et la multiplication (1)
- Commutativité de l’addition
- Associativité de l’addition
- Distributivité de la multiplication
- …

Exemples

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

- $A + B =$
- 5A =
- 2(A+B)=

Exemples

- $A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+1 \\ 5+0 & 2+2 \\ 0+1 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

- $5A = \begin{pmatrix} 5.1 & 5.3 \\ 5.5 & 5.2 \\ 5.0 & 5.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 25 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

- $2(A + B) = 2\begin{pmatrix} 1+0 & 3+1 \\ 5+0 & 2+2 \\ 0+1 & 4+3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1 & 2.4 \\ 2.5 & 2.4 \\ 2.1 & 2.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 10 & 8 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$