# MATH

# Chapitre I
# Théorie des ensembles

# Définition

Un **ensemble** est une **collection** d’objet en un nombre fini ou infini appelés **éléments** de l’ensemble

Notation

- Un ensemble est désigné par une lettre majuscule, par exemple A
- Un élément de l’ensemble est désigné par une lettre minuscule, par exemple a
- Si a est un objet de $A$, on note: $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$
- Si a n’est pas un objet de $A$, on note: $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{A}$

# Ensembles particuliers

- Ensemble vide: $\emptyset$
- Singleton: {k}
- Paire: {a,b}
- E: ensemble universel
  - Ensemble qui contient tous les objets y compris lui-même
  - Il existe d’autre notation. Exemple: Les anglophones utilisent la lettre U

# Symboles

- $\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{b}$ : si a alors b (implication)
- $\boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{b}$ : a est équivalent à b
- $\exists \boldsymbol{x}$: il existe x
- $\boldsymbol{x}$: … : x tel que
- $\forall \boldsymbol{x}$: pour tout x

# Notions sur les ensembles

- $a \in A$, signifie que $a$ est un élément de l'ensemble $A$ ou $a$ appartient à $A$
  - Contraire: $a \notin A$, a n'appartient pas à $A$

- $A = B$, L'ensemble $A$ comprend les mêmes éléments que l'ensemble $B$
  - Contraire: $A \neq B$

- $A \subset B$, signifie que l'ensemble $A$ est inclus dans l'ensemble $B$, tous les éléments de $A$ sont des éléments de $B$. On dit que $A$ est un sous-ensemble de $B$
  - Contraire: $A \not\subset B$

# Description

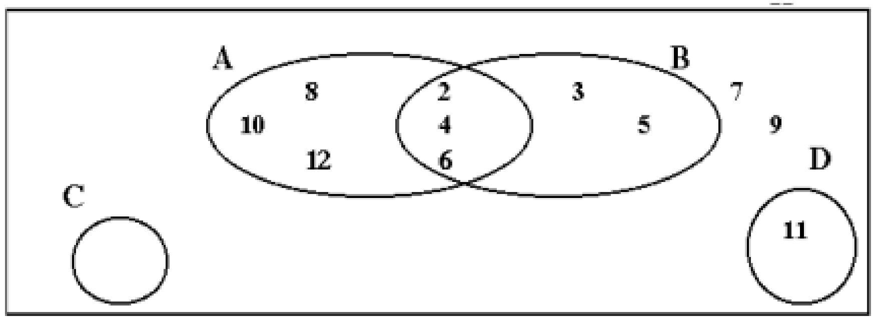
Pour décrire un ensemble, on dispose de deux manières:

1. On liste tous les éléments de l'ensemble: $A = \{a, e, i, o, u\}$

2. On décrit la ou les propriétés qui caractérisent tous les éléments de l'ensemble: $B = \{x : x \; est \; un \; entier, x > 0\}$

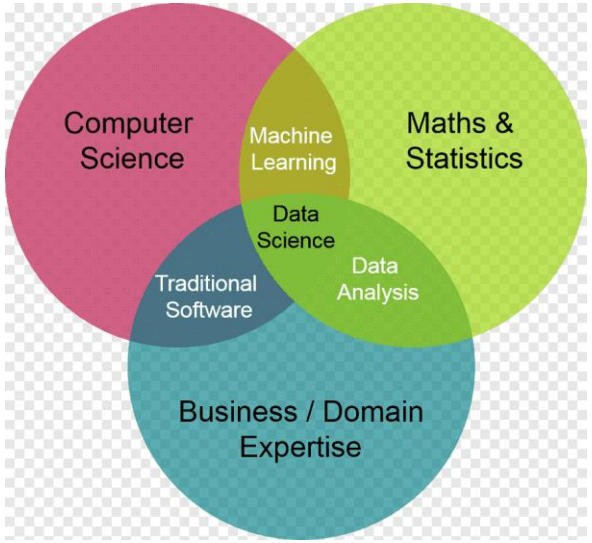
# Cardinal

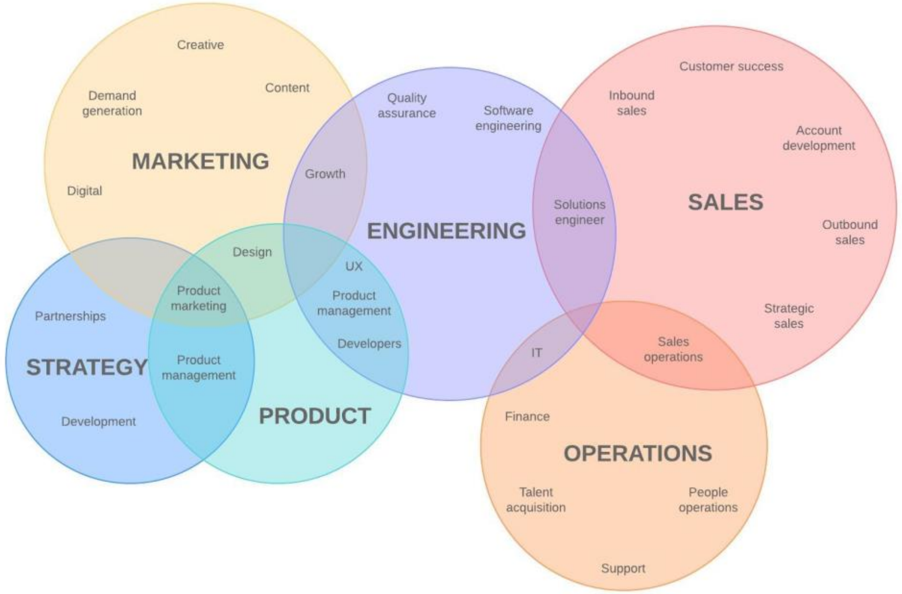
Le cardinal d'un ensemble $\#A$, c'est le nombre d'éléments de $A$.

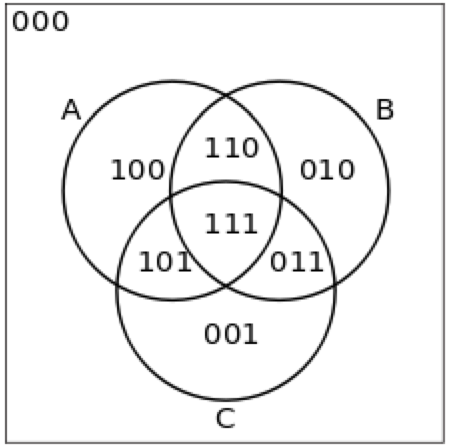



#A=6
#B=5
#C=0
#D=1
#E=11

# Diagramme de Venn

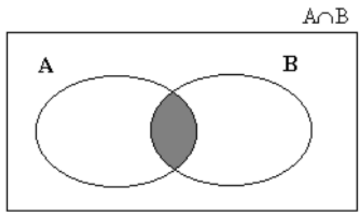


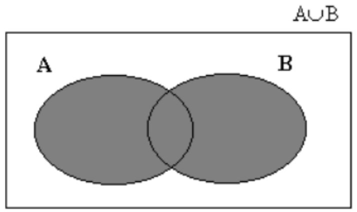



# Opérations sur les ensembles

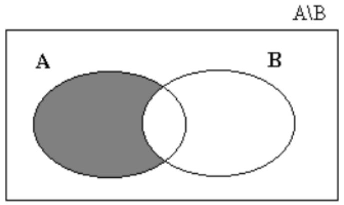
- Intersection: $A \cap B$
  - $A \cap B = \{x : x \in A \; et \; x \in B\}$




- Réunion: $A \cup B$
  - $A \cup B = \{x : x \in A \; ou \; x \in B\}$




- Différence: $A \setminus B$
  - $A \setminus B = \{x : x \in A \; et \; x \notin B\}$



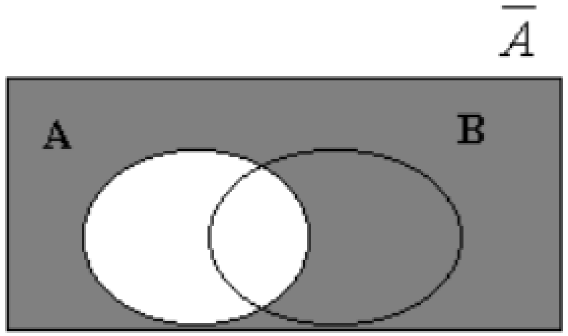

- Produit Cartésien: $A \; x \; B$
  - $A \times B = \{(a, b) : a \in A \; et \; b \in B\}$

# Complémentaire d'un ensemble

- La partie complémentaire de $A$ par rapport à $E$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à $E$ et pas à $A$

- On le note $\complement_E A$ ou $A^{\mathrm{C}}$ ou $\bar{A}$

- $\bar{A} = \{x : x \in E \ et \ x \notin A\}$



# Lois fondamentales

Si $A$, $B$ et $C$ sont 3 ensembles de $E$

La relation d'inclusion

- Réflexive: tout ensemble est inclus dans lui-même: $\boldsymbol{A \subset A}$

- Transitive: Si $A$ est un sous-ensemble de $B$ et que $B$ est un sous-ensemble de C, alors A est un sous-ensemble de C: $(\boldsymbol{A \subset B\ et\ B \subset C}) \Rightarrow \boldsymbol{A \subset C}$

- Antisymétrique: Si A est un sous-ensemble de B et B est un sous-ensemble de A, alors A et B sont égaux: $\boldsymbol{A \subset B\ et\ B \subset A} \Rightarrow \boldsymbol{A = B}$

# Lois fondamentales

Si $A$, $B$ et $C$ sont 3 ensembles de $E$

Les opérations d'intersection et de réunion (ou union) sont

- Idempotentes:
  - la réunion d'un ensemble avec lui-même donne cet ensemble: $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$
  - L'intersection d'un ensemble avec lui-même donne cet ensemble: $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

- Commutatives:
  - La réunion de 2 ensembles ne dépend pas de l'ordre dans lequel ces 2 ensembles sont pris: $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}$
  - L'intersection de 2 ensembles ne dépend pas de l'ordre dans lequel ces 2 ensembles sont pris: $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}$

# Lois fondamentales

Si $A$, $B$ et $C$ sont 3 ensembles de $E$

Les opérations d’intersection et de réunion sont

- Associatives:
  - Le résultat de la réunion de plusieurs ensembles ne dépend pas de l’ordre dans lequel les opérations de réunion sont faites: $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})$
  - Le résultat de l’intersection de plusieurs ensembles ne dépend pas de l’ordre dans lequel les opérations d’intersection sont faites: $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C})$

- Distributives l’une par rapport à l’autre:
  - $\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})$
  - $\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C})$

# Lois fondamentales

Si $A$, $B$ et $C$ sont 3 ensembles de $E$

L'ensemble vide est absorbant pour l'intersection: l'intersection de l'ensemble vide avec un ensemble $A$ est vide: $\boldsymbol{A} \cap \emptyset = \emptyset$

L'ensemble vide est neutre pour la réunion: la réunion de l'ensemble vide avec un ensemble $A$ donne l'ensemble $A$: $\boldsymbol{A} \cup \emptyset = \mathbf{A}$

L'ensemble $E$ est absorbant pour la réunion: $\boldsymbol{E} \cup \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$

L'ensemble $E$ est neutre pour l'intersection: $\boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

# Lois fondamentales

- Si $A$, $B$ et $C$ sont 3 ensembles de $E$

- Lois de complémentarité:
  - $\boldsymbol{E}^{\complement} = \emptyset$
  - $\emptyset^{\complement} = \mathbf{E}$
  - $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A}^{\complement} = \emptyset$
  - $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{E}$

- Involution: le complémentaire du complémentaire d'un ensemble est cet ensemble lui-même: $(\boldsymbol{A}^{\complement})^{\complement} = \boldsymbol{A}$

# Lois fondamentales

- Si $A$, $B$ et $C$ sont 3 ensembles de $E$

- Lois de Morgan:
  - Le complémentaire de l'union de 2 ensembles est l'intersection de leurs complémentaires: $(A \cup B)^{C} = A^{C} \cap B^{C}$
  - Le complémentaire de l'intersection de 2 ensembles est l'union de leurs complémentaires: $(A \cap B)^{C} = A^{C} \cup B^{C}$

# Exercices

1. Soient $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{0,1,2,3\}$
   - Décris $A \cap B$
   - Décris $A \cup B$
   - Décris $A \times B$

2. Soient $A = [1; 3]$ et $B = [2; 4]$
   - Détermine $A \cap B$
   - Détermine $A \cup B$

# Exercices

3. Détermine le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes:
    - $]-\infty; 0]$
    - $]-\infty; 0[$
    - $]0; +\infty[$
    - $[0; +\infty[$
    - $]1; 2[$
    - $[1; 2[$

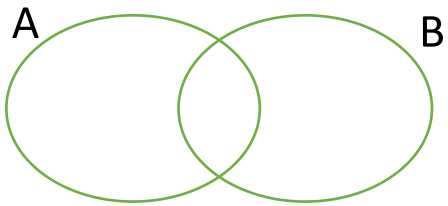
# Exercices

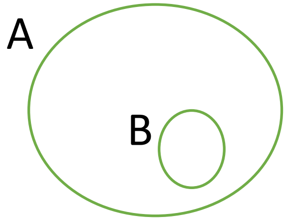
4. Soient $A = ]-\infty; 1[ \cup ]2; +\infty[$, $B = ]-\infty; 1[$ $et$ $C = [2; +\infty[$
   - Comparer les ensembles suivants: $\complement_{\mathbb{R}} A$ $et$ $\complement_{\mathbb{R}} B \cap \complement_{\mathbb{R}} C$

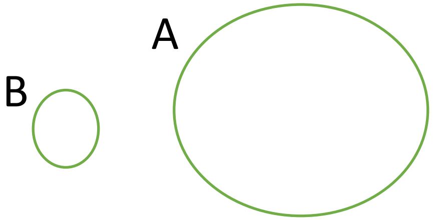
5. Soient $A = ]-\infty; 3]$, $B = ]-2; 7]$ $et$ $C = ]-5; +\infty[$, trois parties de $\mathbb{R}$
   - $A \cap B$
   - $A \cup B$
   - $B \cap C$
   - $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
   - $\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$
   - $(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$

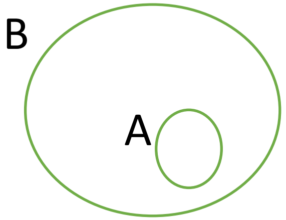
# Exercices

6. Dans chacun des diagrammes suivants, identifie $A \cup B$ et $A \cap B$.



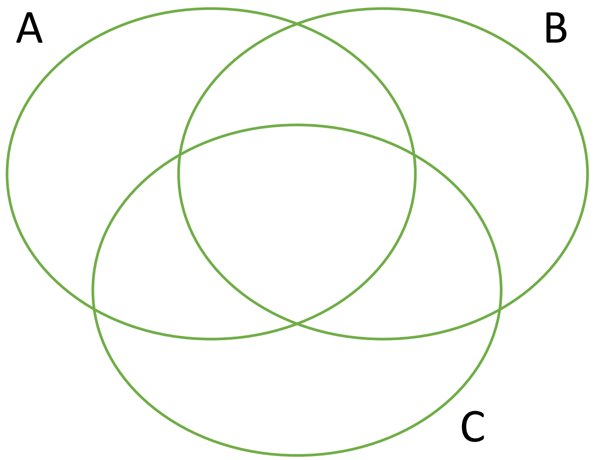



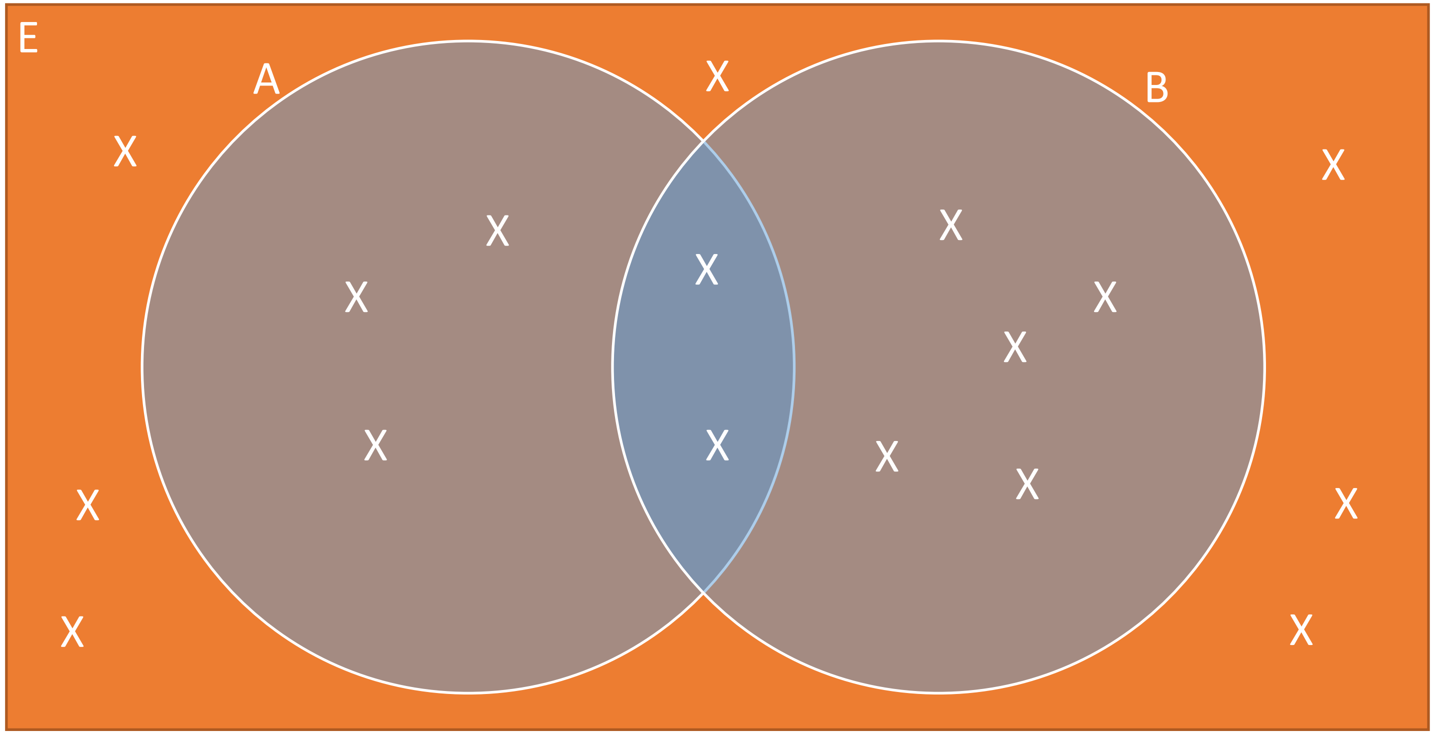
# Exercices

7. Dans le diagramme suivant, identifie $A \cap (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.



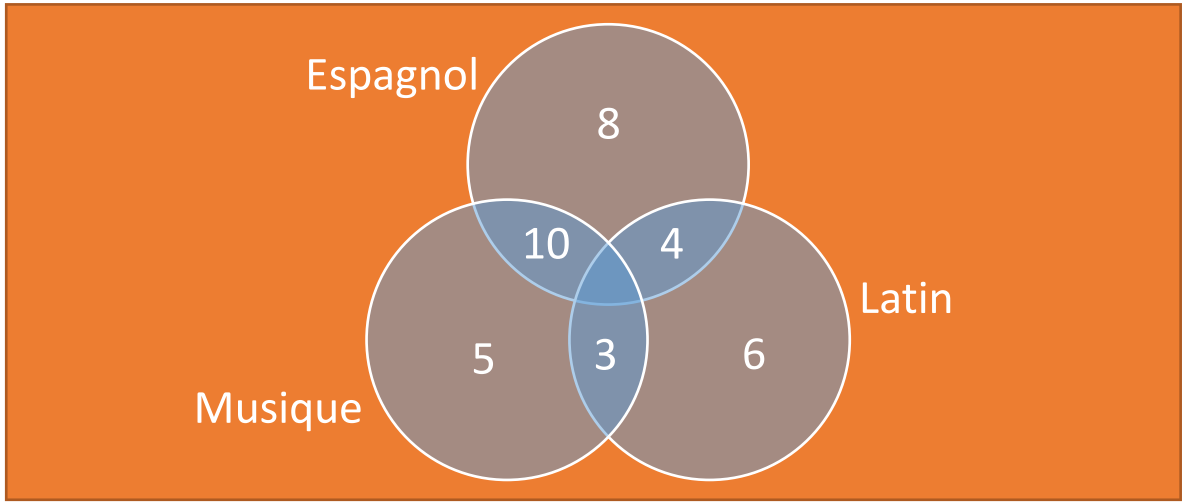
# Exercices

8. A partir du diagramme de Venn représentant l’ensemble $E$ et 2 de ses sous-ensembles $A$ et $B$ (Chaque élément est représenté par une croix)
   - Calcule $\#A$
   - Calcule $\#B$
   - Calcule $\#(A \cup B)$
   - Calcule $\#(A \cap B)$
   - Calcule $\#E$



# Exercices

9. Trois options sont offertes aux élèves d'une classe; espagnol, latin et musique. Chaque élève choisit une ou 2 options. Le diagramme suivant indique le nombre d'élèves pour chaque combinaison




Combien d'élèves étudient

- L'espagnol
- Uniquement l'espagnol
- L'espagnol et le latin
- L'espagnol ou le latin
- Une seule des 3 options
- Uniquement une des 2 langues (il peut éventuellement faire de la musique)

# Exercices

10. Lors d’une enquête réalisée auprès de 60 jeunes, il est apparu que 25 jouaient au football, 26 au tennis et 26 pratiquaient la natation. Parmi ceux-ci, 9 pratiquent à la fois le football et le tennis, 11 le football et la natation, 8 le tennis et la natation et 8 ne pratiquent aucun sport.

    - Etablir le diagramme de Venn
    - Combien de jeunes pratiquent à la fois 3 sports
    - Combien de jeunes ne pratiquent qu’un seul sport
    - Combien de jeunes ne pratiquent que le football et la natation

# Exercices

11. Soit $\mathrm{E} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, c, e, g\}$ et $C = \{b, e, f, g\}$

    1. Représente ces ensembles dans un diagramme de Venn
    2. Décris $A \cup \mathrm{C}$
    3. Décris $B \cup A$
    4. Décris $C \setminus \mathrm{B}$
    5. Décris $B^C \cup C$
    6. Décris $C^C \cap A$
    7. Décris $(A \setminus C)^C$
    8. Décris $(A \setminus B^C)^C$
    9. Décris $(A \cap A^C)^C$

# Exercices

12. Dessine un diagramme de Venn pour les 4 situations suivantes:

   1. $A \subset B, C \subset B, A \cap C = \emptyset$
   2. $A \subset B, C \not\subset B, A \cap C \neq \emptyset$
   3. $A \subset C, A \neq C, B \cap C = \emptyset$
   4. $A \subset (B \cap C), B \subset C, C \neq B, A \neq C$

# Exercices

13. Si aucun professeur n’est riche et que certains poètes sont riches, que peut-on dire des affirmations suivantes?
    1. Certains poètes sont des professeurs
    2. Certains poètes ne sont pas des professeurs

14. Si tous les poètes sont pauvres, qu’aucun universitaire n’est pauvre et qu’il faut être universitaire pour être professeur, que peut-on dire des affirmations suivantes?
    1. Les professeurs ne sont pas pauvres
    2. Les poètes ne sont pas des professeurs
    3. Si Marc est universitaire, alors il n’est pas poète

# Démonstration

Démontrons que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cap (B \cup C) = \{x : x \in A, x \in B \cup C\}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{x : x \in A, x \in B \; ou \; x \in C\}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{x : x \in A, x \in B \; ou \; x \in A, x \in C\}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{x : x \in A \cap B \; ou \; x \in A \cap C\}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

# Démonstration

Démontrons que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$$A \times (B \cap C) = \{(x; y): x \in A, y \in B \cap C\}$$

$$A \times (B \cap C) = \{(x; y): x \in A, y \in B, y \in C\}$$

$$A \times (B \cap C) = \{(x; y): (x; y) \in A \times B, (x; y) \in A \times C\}$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$