

V355

Gekoppelte Schwingkreise

David Venker Nico Guth
david.venker@udo.edu nico.guth@udo.edu

Durchführung: 19.11.2019 Abgabe: 26.11.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
3 Durchführung	5
3.1 Abstimmung der Resonanzfrequenz	5
3.2 Messung des Schwebungs-Schwingungs-Verhältnisses	7
3.3 Messung der Fundamentalfrequenzen	7
3.4 Messung der Spannungsamplitude im Falle der Fundamentalschwingungen	8
4 Auswertung	9
4.1 Messergebnisse	9
4.2 Vergleich der Messwerte zu den erwarteten Werten	10
5 Diskussion	12
Literatur	13

1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird die Interaktion zweier gekoppelter Schwingkreise untersucht. Genauer gesagt wird:

- a) Der zeitliche Verlauf des Energieaustausches im Schwebungsfall untersucht.
- b) Die Frequenzen der beiden Fundamentalschwingungen bestimmt.
- c) Die Amplituden des Stroms der beiden Fundamentalschwingungen bestimmt.

2 Theorie

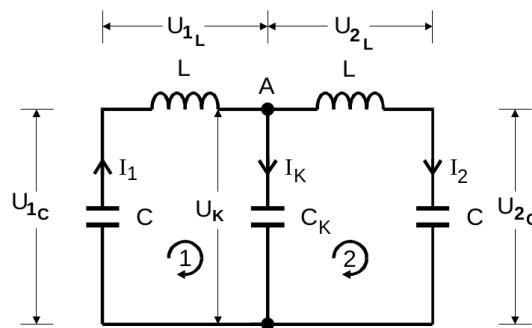


Abbildung 1: Schaltbild der hier beschriebenen gekoppelten Schwingkreise. [1]

Ein elektrischer Schwingkreis ist eine Schaltung bestehend aus einem Widerstand R , einer Spule L und einem Kondensator C . Schwingkreis heißt diese Schaltung, weil sie beschrieben werden kann wie ein harmonischer Oszillatator, in dem die Spannungsspannungsamplitude und die Stromamplitude gegenphasig hin und her schwingen. Gekoppelt werden zwei Schwingkreise über einen zusätzlichen Kondensator C_k . (siehe Abbildung 1). Eine gleiche Resonanzfrequenz der beiden Schwingkreise muss vorausgesetzt sein. Dies kann analog angesehen werden wie zwei identische Fadenpendel, welche mit einer Feder gekoppelt sind.

Es gelten die Zusammenhänge von Strom I , Spannung U , Widerstand R , Kapazität C und Induktivität L

$$U = RI \quad U_C = \frac{1}{C} \int I dt \quad U_L = LI \dot{I} \quad (1)$$

Nun ergeben sich für die Ströme I_1 und I_2 mit den Stromamplituden I_{10} und I_{20} mithilfe der Kirchhoffsschen Regeln die Gleichungen

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(I_{1_0} + I_{2_0}) \cos(2\pi\nu_+ t) + \frac{1}{2}(I_{1_0} - I_{2_0}) \cos(2\pi\nu_- t) \quad (2)$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2}(I_{1_0} + I_{2_0}) \cos(2\pi\nu_+ t) - \frac{1}{2}(I_{1_0} - I_{2_0}) \cos(2\pi\nu_- t). \quad (3)$$

Wobei die Frequenzen

$$\nu_+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (4)$$

$$\nu_- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k}\right)^{-1}}} \quad (5)$$

sind.[1]

Hieran ist zu sehen, dass das System zwei Fundamentalschwingungen besitzt:

1. Wenn $I_{1_0} = I_{2_0}$ ist, ist nur der Teil mit ν_+ von Bedeutung und die Schwingkreise schwingen mit gleicher Phase.
2. Wenn $I_{1_0} = -I_{2_0}$ ist, ist nur der Teil mit ν_- von Bedeutung und die Schwingkreise schwingen mit einem Phasenunterschied von π .

Wenn nun wie in Abbildung 2 dargestellt in den Schaltkreis einen Sinusgenerator mit Spannungsamplitude U_0 und Frequenz ω sowie einen Widerstand R eingebaut werden, lässt sich die Stromamplitude I_2 des rechten Schwingkreises mit

$$I_2 = U_0 \frac{1}{\sqrt{4\omega^2 C_k^2 R^2 Z(\omega)^2 + \left(\frac{1}{\omega C_k} - \omega C_k Z(\omega)^2 + \omega R^2 C_k\right)^2}} \quad (6)$$

berechnen. Wobei

$$Z(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_k} \right) \quad (7)$$

ist. [1] Der Strom durch den Kopplungskondensator ist durch die Knotenregel

$$I_k = I_2 - I_1 \quad (8)$$

mit

$$I_1 = U_0/R. \quad (9)$$

Eine dritte spezielle Schwingung tritt auf, wenn bei $t = 0$, $I_1 \neq 0$ ist und $I_2 = 0$ ist. Nun ergibt sich eine Schwebung wie in Abbildung 3 dargestellt.

Hier lässt sich sehen, dass es einen periodischen Energieaustausch zwischen den Schwingkreisen gibt. Wobei nun $\frac{1}{2}(\nu_+ + \nu_-)$ die Schwingungsfrequenz und $\nu_- - \nu_+$ die Schwebungsfrequenz ist.[1]

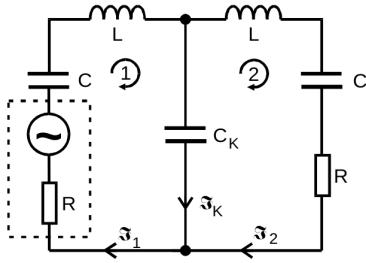


Abbildung 2: Schaltbild der gekoppelten Schwingkreise mit eingebautem Sinusgenerator. [1]

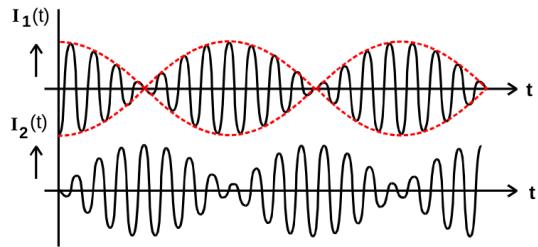


Abbildung 3: Zeitabhängigkeit der Ströme in den Schwingkreisen im Falle einer Schwebung. [1]

Also ist

$$N := \frac{1}{2} \cdot \frac{\nu_+ + \nu_-}{\nu_- - \nu_+} \quad (10)$$

die Anzahl der Maxima der Schwingung innerhalb eines Nulldurchgangs der Schwebung.

3 Durchführung

3.1 Abstimmung der Resonanzfrequenz

Gegeben ist der Schaltkasten wie in Abbildung 4 zu sehen ist. Da beide Schwingkreise die gleiche Resonanzfrequenz haben sollen, muss diese für den linken Schaltkreis zunächst ermittelt werden um dann den rechten Schaltkreis daran anzupassen.

Hierzu wird am linken Schwingkreis ein Oszilloskop und ein Sinusgenerator wie in Abbildung 5 angeschlossen. Um nun die Resonanzfrequenz zu messen wird am Sinusgenerator die Frequenz solange eingestellt bis die am Oszilloskop abgebildete Lissajous-Figur eine Gerade ist. Nun wird die eingestellte Frequenz als Resonanzfrequenz notiert. Dann muss die gleiche Schaltung mit gleicher Generatorfrequenz für den rechten Schwingkreis aufgebaut werden. Der dort eingebaute Kondensator wird nun so eingestellt dass auch hier die Lissajous-Figur eine Gerade ist. Nun sind die Schwingkreise nahezu identisch und die eigentliche Messung kann beginnen.

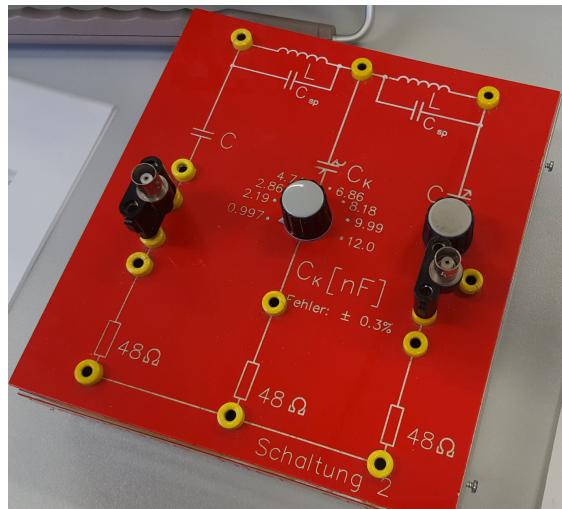


Abbildung 4: Foto des genutzten Schaltkastens

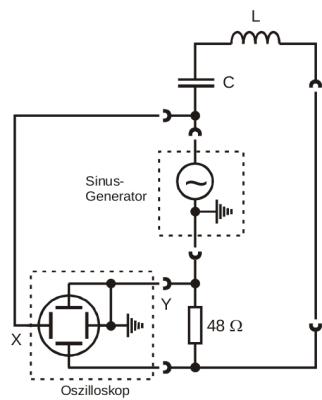


Abbildung 5: Schaltung zur Kalibrierung[1]

3.2 Messung des Schwebungs-Schwingungs-Verhältnisses

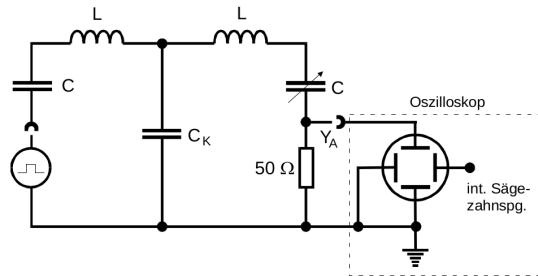


Abbildung 6: Schaltung zur Untersuchung der gekoppelten Schwingkreise[1]

Nun wird die Schaltung aus Abbildung 6 aufgebaut. Am Generator wird eine Frequenz gesucht, mit der die Schwebung gut am Oszilloskop zu sehen ist. Die Anzahl der Maxima und Extrema innerhalb eines Nulldurchgangs der Schwebung werden abgezählt und notiert. Dies wird für verschiedene Kopplungskapazitäten wiederholt.

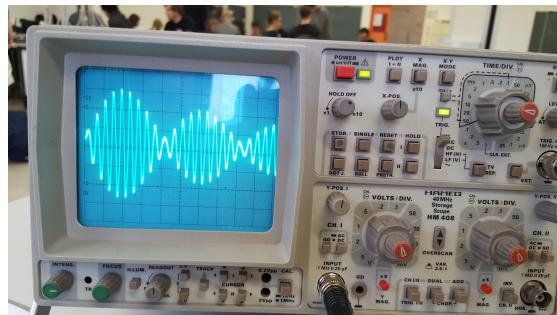


Abbildung 7: Foto der Schwebung für $C_k = 6,680 \text{ nF}$

3.3 Messung der Fundamentalfrequenzen

Damit die Fundamentalfrquenzen der gekoppelten Schwingkreise gemessen werden können, wird nun wieder die Schaltung aus Abbildung 6 verwendet. Allerdings wird statt einer Rechteckschwingung eine Sinusschwingung verwendet und es wird auch die Generatorspannung auf das Oszilloskop gegeben. Für verschiedene Kopplungskapazitäten werden am Generator die Frequenzen gesucht, welche die Lissajous-Figur zu einer Gerade werden lassen. Falls diese Gerade eine positive Steigung hat, wurde gleichschwingende Fundamentalschwingung gefunden und die Frequenz wird als ν_+ notiert. Eine Gerade negativer Steigung wird angezeigt, wenn die gegenphasige Fundamentalschwingung gefunden wurde. Hier wird die Frequenz als ν_- notiert.

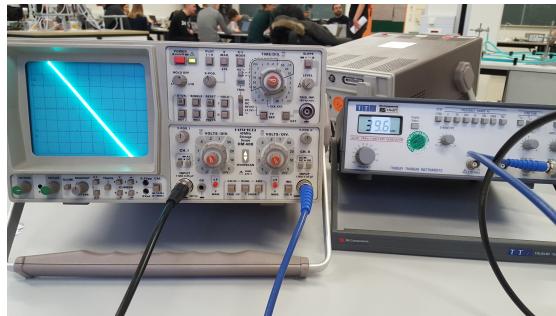


Abbildung 8: Foto der Lissajous-Figur für $C_k = 6,860 \text{ nF}$ bei der gegenphasigen Fundamentalschwingung

3.4 Messung der Spannungsamplitude im Falle der Fundamentalschwingungen

Da im Folgenden die Skalierung des im Oszilloskop angezeigten Bildes wichtig wird, muss nun dieser mithilfe einer bereits bekannten Spannungsamplitude (z.B. des Generators) kalibriert werden.

Mit gleichem Schaltaufbau wie in Abbildung 6 wird nun die Amplitude der Spannung der beiden Fundamentalschwingungen am rechten Widerstand gemessen. Außerdem wird auch die Spannung am mittleren Widerstand (siehe Abbildung 4) gemessen, wobei der rechte Widerstand überbrückt wird. Dies wird wieder für verschiedene Kopplungskapazitäten durchgeführt.

Zur Referenz wird nun auch noch die Amplitude der Generatorenspannung in den Fällen der Fundamentalschwingungen und einer Nicht-Fundamentalschwingung gemessen.

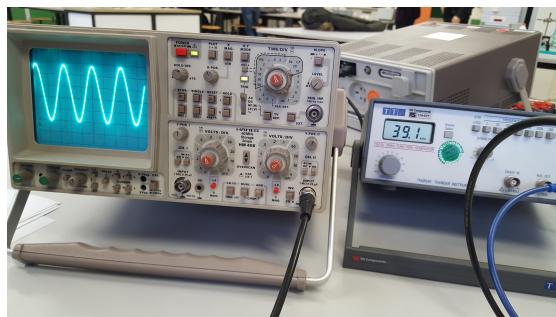


Abbildung 9: Foto der abgelesenen Spannungsamplitude für $C_k = 8,180 \text{ nF}$ und der zugehörigen Resonanzfrequenz $v_+ = 39,1 \text{ kHz}$

4 Auswertung

4.1 Messergebnisse

Im Folgendem werden die während des Praktikums gemessenen Werte aufgelistet.

Die Messung der Resonanzfrequenz aus Unterabschnitt 3.1 ergibt dann 35,6 kHz.

Für die Messungen aus Unterabschnitt 3.2 werden hier jeweils die eingestellten Werte für die Kopplungskapazität C_k aufgetragen, sowie die Frequenz bei der die Maxima gezählt wurden. Die gezählten Maxima und Extrema werden dahinter notiert.

Tabelle 1: Messwerte: Kopplungskapazität C_k und Frequenz f mit der entsprechenden Anzahl Maxima, sowie Extrema

C_k / nF	f / kHz	Anzahl Maxima	Anzahl Extrema
0.997	0.626	2	3
2.290	0.626	3	5
2.860	0.626	5	9
4.740	0.626	6	12
6.860	0.626	9	17
8.180	0.626	11	23
9.990	0.626	13	25
12.000	0.626	18	35

In Unterabschnitt 3.3 wurden die Frequenzen für die jeweiligen Fundamentalschwingungen untersucht und gemessen, diese sind nachfolgend mit ihrer entsprechenden Kopplungskapazität C_k aufgeschrieben.

Tabelle 2: Messwerte: Kopplungskapazität C_k und die Frequenzen ν_+ und ν_-

C_k / nF	ν_+ / kHz	ν_- / kHz
0.997	35.7	56.1
2.190	35.7	46.5
2.86	35.7	44.3
4.740	35.7	41.2
6.860	35.7	39.6
8.180	35.7	39.1
9.990	35.7	38.5
12.000	35.7	38.1

Für die in Unterabschnitt 3.4 gemessenen Werte sind hier in Abhängigkeit von der Kopplungskapazität C_k die jeweiligen maximalen Spannungsamplituden gelistet. Für jeden C_k Wert wurde mit den beiden gemessenen Frequenzen aus Tabelle 2 die maximale

Spannungsamplitude gemessen. Dabei entsprechen U_{2+} und U_{2-} der maximalen Spannungsamplitude im äußeren Schwingkreis bei den beiden Frequenzen ν_+ und ν_- . U_k ist definiert als die maximale Spannungsamplitude innerhalb des gekoppelten Schwingkreises. Dort kann nur mit ν_- gemessen werden, da bei ν_+ , C_k keinen Einfluss hat.

Tabelle 3: Messwerte: Kopplungskapazität C_k und Amplituden von U_{2+} , U_{2-} und U_k

C_k / nF	U_{2+} / V	U_{2-} / V	U_k / V
2.190	2.50	2.00	2.50
2.860	2.50	2.25	2.75
4.740	2.50	2.25	2.75
6.860	2.50	2.25	2.75
8.180	2.50	2.38	2.75
9.990	2.50	2.38	2.88
12.000	2.50	2.50	2.88

Zur Referenz der Generatorenspannung wurde die Amplitude der Spannung bei verschiedenen Frequenzen gemessen. Wobei jeweils bei den Fundamentalfrequenzen und einer von den Fundamentalfrequenzen gänzlich verschiedenen Frequenz gemessen wurde.

Tabelle 4: Referenzwerte der Generatorenspannung bei verschiedenen Frequenzen

C_k / nF	U bei ν_+ / V	U bei ν_- / V	U bei 20,1 kHz / V
8.180	8.00	7.50	10.00

4.2 Vergleich der Messwerte zu den erwarteten Werten

Die Resonanzfrequenz kann nun mit der Gleichung 4 für ν_+ berechnet werden.

Die gegebenen Werte der in der Schaltung eingebauten Bauelemente sind $R = 48 \Omega$, $L = 23,9540 \text{ mH}$ und $C = 0,7932 \text{ nF}$.

Hierbei muss beachtet werden, dass die Induktivität L ebenfalls eine Kapazität C_{sp} besitzt, die in unserem Fall $C_{sp} = 0,0280 \text{ nF}$ beträgt. Bevor die Resonanzfrequenz ν_+ berechnet werden kann, muss also die Gesamtkapazität $0,7932 \text{ nF} + 0,0280 \text{ nF} = 0,8212 \text{ nF}$ als das neue C gesetzt werden.

Damit ergibt sich dann der Theoriewert, der in der folgenden Tabelle mit dem gemessenen Wert verglichen wird.

Die entsprechenden Theoriewerte zu den gemessenen Maxima aus Tabelle 1 können mit der Gleichung 10 berechnet werden. Die Werte für ν_+ und ν_- sind die theoretisch berechneten Werte aus Tabelle 7, für die jeweiligen Kopplungskapazitäten C_k , die man

Tabelle 5: Vergleich der gemessenen Resonanzfrequenz und dem berechneten Theoriewert

$\nu_{+,gemessen}$ / kHz	$\nu_{+,berechnet}$ / kHz
35.600	35.884

in der Durchführung eingestellt hat. Für die Anzahl der Maxima wurde jeweils auf den nächsten Runden Wert gerundet.

Tabelle 6: Messwerte: Kopplungskapazität C_k mit der gemessenen Anzahl Maxima und der theoretischen Anzahl Maxima

C_k / nF	gemessene Anzahl Maxima	berechnete Anzahl Maxima
0.997	2	2
2.290	3	3
2.860	5	4
4.740	6	7
6.860	9	9
8.180	11	11
9.990	13	13
12.000	18	16

Die gemessenen Frequenzen zu den Fundamentalschwingungen aus Tabelle 2 werden ebenfalls mit den Theoriewerten verglichen. Mithilfe der Gleichung 5 für ν_- und den bekannten Werten für L und C kann besagte Frequenz bestimmt werden. Für ν_- ist jedoch die Kopplungskapazität C_k nicht mehr irrelevant, sodass sich für jedes C_k ein anderer Theoriewert ergibt.

Tabelle 7: Vergleich der gemessenen Fundamentalschwingungen mit den berechneten Theoriewerten

C_k / nF	$\nu_{-,gemessen}$ / kHz	$\nu_{-,berechnet}$ / kHz
0.997	56.100	58.386
2.190	46.500	47.470
2.860	44.300	45.024
4.740	41.200	41.640
6.860	39.600	39.950
8.180	39.100	39.322
9.990	38.500	38.722
12.000	38.100	38.261

In Unterabschnitt 3.4 wurden lediglich die Werte für U_{2+} , U_{2-} und U_k gemessen, jedoch sind die Werte für I_{2+} , I_{2-} und I_k gefragt gewesen, sodass diese über die Formel $I = \frac{U}{R}$

berechnet werden können.

R , L und C sind bekannte Werte, U wird jeweils aus Tabelle 3 entnommen. In der Tabelle stehen jeweils die aus den gemessenen U_{2+} und U_{2-} berechneten Werte für I_{2+} und I_{2-} . Die Theoriewerte für I_{2+} und I_{2-} werden berechnet durch die Formel Gleichung 6. Der kleinste Wert für C_k wurde beim messen nicht beachtet. Daraus ergeben sich dann folgende Werte.

Tabelle 8: Vergleich der gemessenen Maximalstromamplituden mit den berechneten Theoriewerten

C_k / nF	$I_{2+,gemessen} / \text{A}$	$I_{2+,berechnet} / \text{A}$	$I_{2-,gemessen} / \text{A}$	$I_{2-,berechnet} / \text{A}$
2.190	0.0521	0.0537	0.0417	0.0139
2.860	0.0521	0.0535	0.0469	0.0183
4.740	0.0521	0.0529	0.0469	0.0288
6.860	0.0521	0.0521	0.0469	0.0355
8.180	0.0521	0.0517	0.0496	0.0487
9.990	0.0521	0.0512	0.0496	0.0494
12.000	0.0521	0.0505	0.0521	0.0588

5 Diskussion

Wie in Unterabschnitt 4.2 zu sehen ist sind einige der gemessenen Ergebnisse abweichend zu den berechneten Werten. Im Folgenden gilt es die möglichen Ursachen dieser Abweichungen zu beschreiben.

Vorab sei zu sagen, dass der verwendete Wechselspannungsgenerator nicht genau einstellbar war. Geschätzt war die Generatorfrequenz nur auf $\pm 0,5 \text{ kHz}$ einstellbar. Da diese Frequenz bei jeder Schaltung wichtig war, kommt es generell zu Abweichungen.

Wenn dies beachtet wird scheint die Abweichung der Resonanzfrequenz in Tabelle 5 plausibel.

Die Abweichungen der Anzahl der Maxima in einer Schwebungsperiode in Tabelle 6 lässt sich einerseits durch die Abweichungen der Frequenzen in Tabelle 7 erklären und andererseits war beim Abzählen der Maxima teilweise unklar welches Maximum noch mitgezählt werden muss, damit es innerhalb einer Schwebungsperiode liegt.

In Tabelle 7 lassen sich die Abweichungen genau wie oben genannt erklären.

Die aus den gemessenen Spannungsamplituden berechneten Stromamplituden I_{2+} in Tabelle 8 zeigen kleine Abweichungen zu den berechneten Werten. Allerdings ist die Abweichung der I_{2-} Werte deutlich größer. Eine mögliche Ursache dafür ist wie oben beschrieben die Ungenauigkeit der Generatorfrequenz. Außerdem wurde die Generatorenspannungsamplitude nur für $C_k = 8,180 \text{ nF}$ gemessen und es wurde angenommen, dass diese für

andere C_k Werte gleich bleibt. Diese Annahme scheint nicht richtig zu sein und andere Generatorenspannungen müssten gemessen und zur Berechnung genutzt werden. Diese Messung war allerdings nicht gefragt.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 355 Die gekoppelten Schwingkreise*. 2019.

V355 Gekoppelte Schwingkreise

Schaltung 1:

$$L = 32,351 \text{ mH} \quad R = 48 \Omega$$

$$C = 0,8015 \text{ nF} \quad C_{sp} = 0,037 \text{ nF}$$

Schaltung 2: (unsere)

$$L = 23,954 \text{ mH}$$

$$C = 0,7932 \text{ nF} \quad C_{sp} = 0,028 \text{ nF}$$

Vorbereitende Justierung:

Resonanzfrequenz: $35,6 \text{ kHz} \pm 0,2 \text{ kHz}$

a) Schwebungs-/Schwingungsfrequenz

$C_k \pm 0,3\% [\text{nF}]$ Generator-frequenz: [kHz] Maxima[#] (von Extrema)

0,997	0,626	2 (3)
-------	-------	-------

2,190	0,626	3 (5)
-------	-------	-------

2,860	0,626	5 (9)
-------	-------	-------

4,740	"	6 (12)
-------	---	--------

6,860	"	9 (17) (Foto)
-------	---	---------------

8,180	"	11 (23)
-------	---	---------

9,990	"	13 (25)
-------	---	---------

12,000	"	18 (35)
--------	---	---------

Abbildung 10: Seite 1 der Originalmessdaten

V355	Foto (bei $C_k = 86$)		
$C_k [nF]$	$V_x [kHz]$	$V_- [kHz]$	
0,997	35,7	56,2	1
2,190	"	46,5	
2,860	"	44,3	
4,790	"	41,2	
6,860	"	39,6	
8,180	"	39,1	
9,990	"	38,5	
12,000	"	38,1	

c) Oszillator kollidiert (Amplitude und Frequenz)			
$C_k [nF]$	$U_{in p2p}$ mit U_- und U_k bei V_- aus b)	$U_2 [V]$	$U_k [V]$
2,190	2,50	2,00	2,50
2,860	"	2,25	2,75
4,790	"	2,25	2,75
6,860	"	2,25	2,75
8,180	"	2,38	2,75
9,990	"	2,42	2,88
12,000	"	2,5	2,88

Generatorspannung:			
$C_k [nF]$	U_x bei $V_x [V]$	U bei $V_- [V]$	U bei $20,1\text{ kHz}$ [V]
8,180	8,00	7,50	10

Abbildung 11: Seite 2 der Originalmessdaten