

V206

## **Die Wärmepumpe**

David Venker  
david.venker@udo.edu

Nico Guth  
nico.guth@udo.edu

Durchführung: 17.12.19

Abgabe: 07.01.20

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>5</b>
4.1	Auswertungsteil a) Darstellung der Messwerte in einem Diagramm . . . .	5
4.2	Auswertungsteil b) Bestimmung der Ausgleichskurven . . . . .	7
4.3	Auswertungsteil c) Differenzialquotienten der Temperaturen . . . . .	8
4.4	Auswertungsteil d) Bestimmung der Güteziffer . . . . .	9
4.5	Auswertungsteil e) . . . . .	10
4.6	Auswertungsteil f) . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>12</b>
	<b>Literatur</b>	<b>13</b>

# 1 Zielsetzung

Bei Untersuchung einer Wärmepumpe sollen folgende Kenngrößen bestimmt werden:

1. Gütezahl
2. Massedurchsatz des Transportmediums
3. Wirkungsgrad des Kompressors

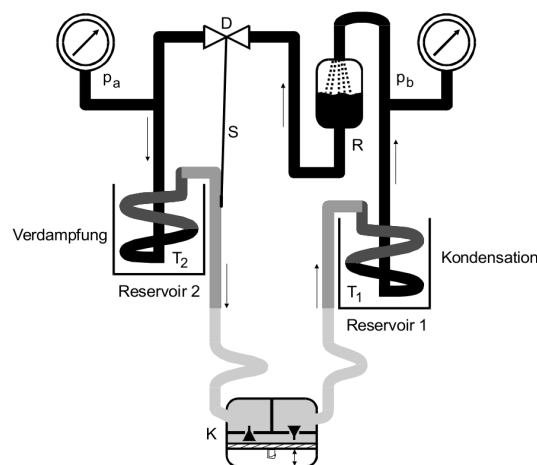
# 2 Theorie

Eine sogenannte Wärmepumpe ist eine Apparatur, welche dazu genutzt wird Wärmeenergie von einem kalten in ein wärmeres Reservoir zu leiten. Hierzu wird zusätzliche Arbeit aufgewendet, da ansonsten Wärmeenergie immer vom warmen ins kalte Reservoir fließt.

Unter idealisierten Bedingungen wird die Gütezahl mit

$$\nu = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad (1)$$

definiert, wobei  $A$  der aufgewendeten Arbeit entspricht und  $Q_1$  der ans warme Reservoir abgegebenen Wärmeenergie entspricht.  $T_1$  ist dabei die Temperatur im warmen und  $T_2$  die im kalten Reservoir. [2] Hier wurde vorausgesetzt dass der Wärmeübertrag reversibel geschieht, was in der Realität aber nicht möglich ist. Tatsächlich ist nur eine kleinere Gütezahl möglich.



**Abbildung 1:** Schematischer Aufbau einer Wärmepumpe[2]

Die Wärmepumpe, wie in Abbildung 1 zu sehen, ist so konzipiert, dass ein Medium die Wärmeenergie beim Verdampfen im kalten Reservoir 2 als Phasenumwandlungsenergie

speichert und im warmen Reservoir 1 beim Kondensieren wieder abgibt. Da hier eine möglichst hohe Kondensationswärme des Transportmediums erforderlich ist, wird in diesem Versuch Wasser als Medium verwendet. Das Drosselventil  $D$  und der Kompressor  $K$  (nahezu adiabatisch) werden dazu verwendet einen Druckunterschied  $p_a < p_b$  zu erzeugen, wobei so die Verdampfung und Verflüssigung erzeugt werden. Außerdem erkaltet das Medium wenn es durch  $D$  strömt und erwärmt sich wenn es durch  $K$  strömt. Zusätzlich muss noch ein Reiniger  $R$  dazugeschaltet werden, welcher das flüssige Medium von Gasresten trennt. Außerdem wird das Drosselventil über eine Steuervorrichtung  $S$  so gedrosselt, dass die Durchströmung zu der des Kompressors passt, damit in diese nur Gas strömt.

Mithilfe dieses Aufbaus kann die Gütezahl durch

$$v = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_1}{\Delta t N} \quad (2)$$

bestimmt werden. Hierzu wird die Masse des Wassers in Reservoir 1  $m_1$  benötigt, die spezifische Wärmekapazität von Wasser  $c_w$  und die Wärmekapazität der Rohre und der Reservoirs  $m_k c_k$ . Außerdem werden die gemessenen Größen der Temperaturdifferenz  $\Delta T_1$  in einem Zeitraum  $\Delta t$  und die gemittelte Leistungsaufnahme des Kompressors  $N$  benötigt.[2]

Über

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = (m_2 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_2}{\Delta t L} \quad (3)$$

kann der Massendurchsatz berechnet werden, wobei  $L$  die Verdampfungswärme ist.

Die mechanische Leistung des Kompressors kann über

$$N_{\text{mech}} = \frac{1}{\kappa - 1} \left( p_b \sqrt{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{1}{\rho} \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (4)$$

mit dem Verhältnis  $\kappa$  der Molwärmen  $C_p$  und  $C_V$  und der Dichte  $\rho$  von Wasser im Gasförmigen Zustand bei Druck  $p_a$  berechnet werden.[2]

### 3 Durchführung

Zunächst wird eine Wärmepumpe wie in Abbildung 2 aufgebaut. Die Reservoirs werden mit je 3 Litern Wasser gefüllt, wobei beide Reservoirs ungefähr die gleiche Temperatur aufweisen sollten. Dann werden die Rührstäbe angeschaltet, damit sich die Wärme gleichmäßig verteilt. Sobald der Kompressor angeschaltet wird, fängt die Wärmepumpe an zu arbeiten. Nun werden im Minutentakt folgende Größen abgelesen und notiert:

- verstrichene Zeit  $t$  seit dem Anschalten des Kompressors
- Temperatur  $T_1$  im Reservoir 1

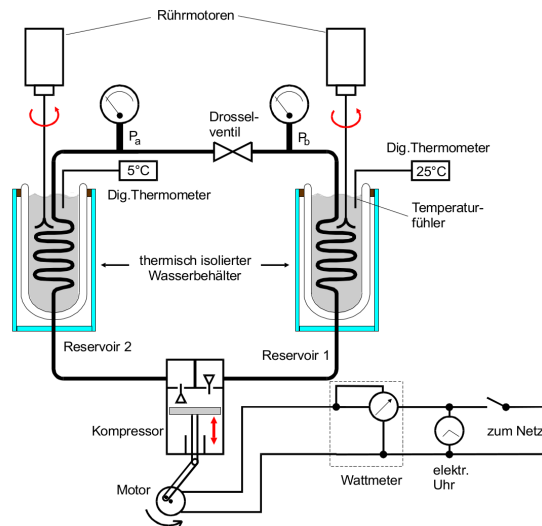


Abbildung 2: Aufbau der Wärmepumpe[2]

- Temperatur  $T_2$  im Reservoir 2
- Druck  $p_a$  im Reservoir 1
- Druck  $p_b$  im Reservoir 2
- elektrische Leistung  $N_{el}$  des Kompressors

Sobald in Reservoir 1 eine Temperatur von  $50^\circ\text{C}$  erreicht ist, wird der Kompressor abgeschaltet und die Messung ist abgeschlossen.

## 4 Auswertung

### 4.1 Auswertungsteil a) Darstellung der Messwerte in einem Diagramm

Zunächst werden in Tabelle 1 alle gemessenen Werte aufgetragen. Damit mit folgenden Werten gerechnet werden kann, werden sie in allen folgenden Schritten in die SI-Basiseinheiten umgerechnet. Auf die beiden Drücke  $p_a$  und  $p_b$  werden noch jeweils 1 bar addiert, für den Druck, der während des Versuches im Labor vorlag.

Die Temperaturverläufe  $T_1$  und  $T_2$  aus Tabelle 1 werden nun in einem Temperaturdiagramm gegen die Zeit  $t$  aufgetragen.

$t / \text{min}$	$p_a / \text{bar}$	$p_b / \text{bar}$	$T_1 / ^\circ\text{C}$	$T_2 / ^\circ\text{C}$	$N_{\text{el}} / \text{W}$
0	4,2	3,9	22,0	21,9	0
1	3,5	5,5	22,7	21,7	115
2	3,7	6,0	24,1	20,3	125
3	3,8	6,5	25,7	18,8	123
4	3,7	7,0	27,2	17,8	125
5	3,6	7,0	28,5	17,0	125
6	3,5	7,5	30,0	16,1	125
7	3,3	7,5	31,5	15,2	125
8	3,2	8,0	32,8	14,3	125
9	3,0	8,0	34,1	13,3	125
10	2,9	8,5	35,3	12,5	125
11	2,8	9,0	36,5	11,6	125
12	2,7	9,0	37,7	10,7	127
13	2,6	9,5	38,8	9,9	128
14	2,6	10,0	39,8	9,0	129
15	2,5	10,0	40,9	8,2	130
16	2,4	10,5	41,7	7,5	130
17	2,4	11,0	42,6	6,8	120
18	2,3	11,0	43,5	6,2	119
19	2,2	11,0	44,2	5,5	117
20	2,2	11,5	45,0	4,8	116
21	2,1	12,0	45,8	4,2	117
22	2,1	12,0	46,5	3,6	117
23	2,0	12,0	47,3	3,1	117
24	2,0	12,5	48,0	2,6	117
25	2,0	12,5	48,7	2,7	116
26	2,0	12,5	49,2	1,7	116
27	1,9	13,0	49,8	1,2	116

**Tabelle 1:** Darstellung aller aufgenommenen Werte während des Versuches

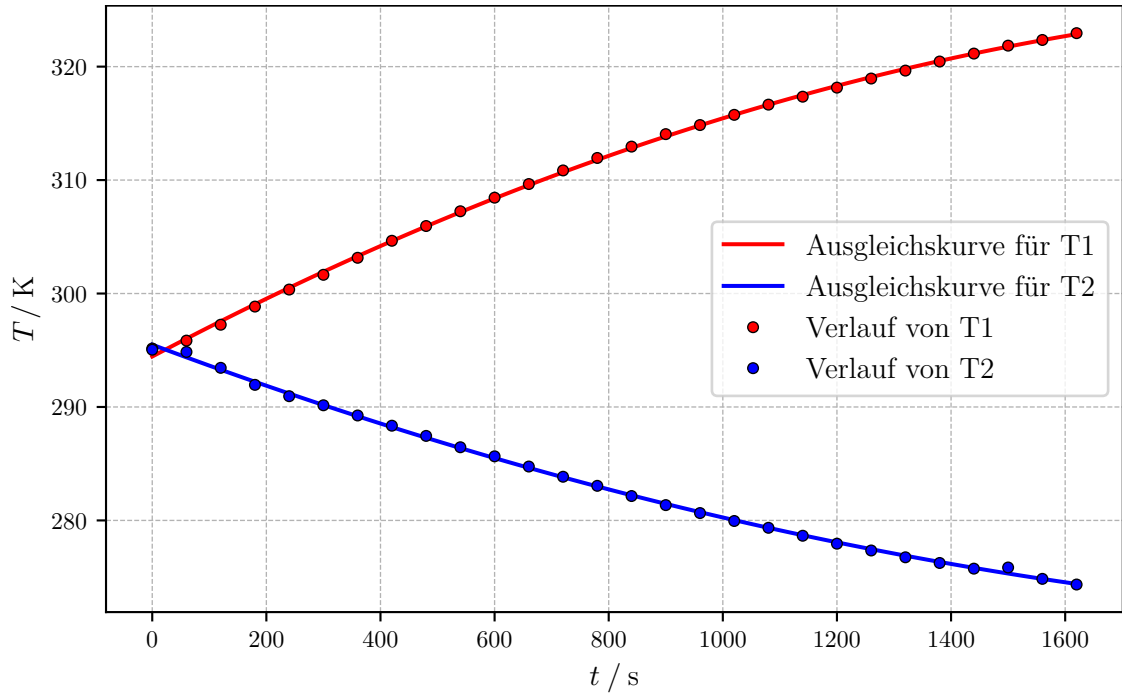


Abbildung 3: Graph der gemessenen Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  aus Tabelle 1.[3]

#### 4.2 Auswertungsteil b) Bestimmung der Ausgleichskurven

Mithilfe von SciPy und Curve Fit ist es möglich die Ergebnisse für  $T_1$  und  $T_2$  mit einer Ausgleichskurve anzunähern. Durch die Existenz dieser Funktionen werden im weiteren Verlauf der Berechnungen die Differenzenquotienten  $\frac{\Delta T}{\Delta t}$  als Differenzialquotienten  $\frac{dT}{dt}$  ausgedrückt. Der Curve Fit wurde mit einer Funktion der Form

$$T = a \cdot t^2 + b \cdot t + c \quad (5)$$

durchgeführt. Wodurch es drei Parameter zu bestimmen gilt, sowie ihre Unsicherheiten, diese lassen sich mit der Fehlerformel von Gauß

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \Delta y_i \right)^2} \quad (6)$$

berechnen. In Tabelle 2 sind die, durch Curve Fit berechneten Parameter von  $T_1$  und ihre Unsicherheiten angegeben.

Äquivalent dazu, wird die Rechnung auch mit  $T_2$  durchgeführt. Die drei Parameter werden mit Curve Fit bestimmt und ihre Unsicherheit über Gleichung 6 berechnet.

Parameter	Wert	Unsicherheit
a	$-5,5755 \cdot 10^{-6}$	$0,1808 \cdot 10^{-6}$
b	0,0266	0,0003
c	294,4484	0,1061

**Tabelle 2:** Parameter zu dem Curve Fit von  $T_1$

Parameter	Wert	Unsicherheit
a	$3,5689 \cdot 10^{-6}$	$0,1842 \cdot 10^{-6}$
b	-0,0188	0,0003
c	295,4911	0,1081

**Tabelle 3:** Parameter zu dem Curve Fit von  $T_2$

### 4.3 Auswertungsteil c) Differenzialquotienten der Temperaturen

Im Folgenden Abschnitt werden für vier verschiedene Zeiten  $t$   $\frac{dT_1}{dt}$  sowie  $\frac{dT_2}{dt}$  bestimmt. Dafür wird erneut die Funktion aus Gleichung 5 verwendet und die zeitliche Ableitung

$$\frac{dT}{dt} = 2 \cdot a \cdot t + b \quad (7)$$

gebildet. Die berechneten Parameter aus Tabelle 2 werden dann verwendet, um die Steigung mit Hilfe von Gleichung 7 an vier verschiedenen Stellen zu berechnen. Mit Hilfe von Gleichung 6 wird auch vom Differenzialquotienten eine Fehlerrechnung durchgeführt werden, damit die Unsicherheit angegeben werden kann. Dann ergeben sich die Werte aus Tabelle 4.

$t / s$	$T_1 / ^\circ C$	$T_1 / K$	$\frac{dT_1}{dt} / K/s$	$\Delta \frac{dT_1}{dt} / K/s$
300	28,5000	301,6500	0,0230	0,0003
600	35,3000	308,4500	0,0200	0,0004
900	40,9000	314,0500	0,0170	0,0004
1200	45,0000	318,1500	0,0130	0,0005

**Tabelle 4:** Differenzialquotienten von  $T_1$  zu vier verschiedenen Zeiten

Äquivalent dazu werden nun zu diesen vier Zeiten die Differenzialquotienten von  $T_2$  berechnet und in einer Tabelle eingetragen.



$t / \text{s}$	$T_2 / ^\circ\text{C}$	$T_2 / \text{K}$	$\frac{dT_2}{dt} / \text{K/s}$	$\Delta \frac{dT_2}{dt} / \text{K/s}$
300	17,0000	290,1500	-0,0167	0,0003
600	12,5000	285,6500	-0,0145	0,0004
900	8,2000	281,3500	-0,0124	0,0004
1200	4,8000	277,9500	-0,0102	0,0005

**Tabelle 5:** Differenzialquotienten von  $T_2$  zu vier verschiedenen Zeiten

#### 4.4 Auswertungsteil d) Bestimmung der Gütezahl

Die Gütezahl  $\nu$  ist über Gleichung 2 definiert und ist ein Maß für die Effizienz der Wärmepumpe. Für ihre Berechnung werden zunächst alle nötigen Größen bestimmt. Die elektrische Arbeit des Kompressormotors  $N_{\text{el}}$  wird über  $\delta t$  mit der Formel der Mittelwertsberechnung

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (8)$$

gemittelt. Über

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (9)$$

wird die entsprechende Abweichung dieses Mittelwerts berechnet. Damit ist das gemittelte  $N_{\text{el}}$  mitsamt Abweichung

$$N_{\text{el}} = 117.68 \pm 4.46 \text{ W}. \quad (10)$$

Für die Berechnung werden Konstanten benötigt. Der Ausdruck  $m_{\text{k}}c_{\text{k}}$  ist eine gegebene Gerätekonstante und gibt die Wärmekapazität der verwendeten Kupferschlange an. In diesem Fall beträgt sie

$$m_{\text{k}}c_{\text{k}} = 750 \frac{\text{J}}{\text{K}}. \quad (11)$$

Die Wärmekapazität des Wassers wird ebenso bestimmt, über die Dichte des Wassers  $\rho_{\text{w}}$  und das Volumen des Wassers in den Gefäßen  $V_{\text{w}}$  ergibt sich die Masse  $m_{\text{w}}$ . Die spezifische Wärmekapazität von Wasser ist damit

$$m_{\text{w}}c_{\text{w}} = 12\,449 \frac{\text{J}}{\text{K}}. \quad (12)$$

Aus Unterabschnitt 4.3 wird der Differenzialquotient von  $T_1$  entnommen. Zunächst wird die Fehlerformel Gleichung 6 aufgestellt. Es ergibt sich dann

$$\Delta\nu = \sqrt{\left((V_w\rho_w c_w + m_k c_k) \frac{1}{N_{el}} \Delta \frac{dT_1}{dt}\right)^2 + \left(-(V_w\rho_w c_w + m_k c_k) \frac{dT_1}{dt} \frac{1}{N_{el}^2} \Delta N_{el}\right)^2}. \quad (13)$$

Damit kann nun die Formel aus Gleichung 1 für die Güteziffer verwendet werden. Dadurch ergeben sich die folgenden vier dimensionslosen Güterziffern. Zum Vergleich wird zusätzlich die ideale Güterziffer zu den jeweiligen Zeitpunkten mit Gleichung 1 berechnet.

$t / s$	$\nu$	$\Delta\nu$	$\nu_{ideal}$	Abweichung
300	2.58	0.10	26.23	90.16 %
600	2.24	0.10	13.53	83.44 %
900	1.91	0.09	9.57	80.04 %
1200	1.46	0.08	7.91	81.54 %

**Tabelle 6:** Güteziffer zu vier verschiedenen Zeiten.

## 4.5 Auswertungsteil e)

Zur Berechnung des Massendurchsatzes, also wie viel Masse pro Zeitintervall transportiert wird, zu berechnen werden die Differenzialquotienten von  $T_2$  aus Tabelle 5 verwendet. Aus einer Dampfdruck-Kurve wird zunächst die sogenannte Verdampfungswärme  $L$  mit einem Curve Fit bestimmt. Der Curve Fit wurde mithilfe der Funktion

$$p = p_0 \cdot \exp\left(\frac{-L}{R} \frac{1}{T}\right) \quad (14)$$

durchgeführt. Sie wird nach

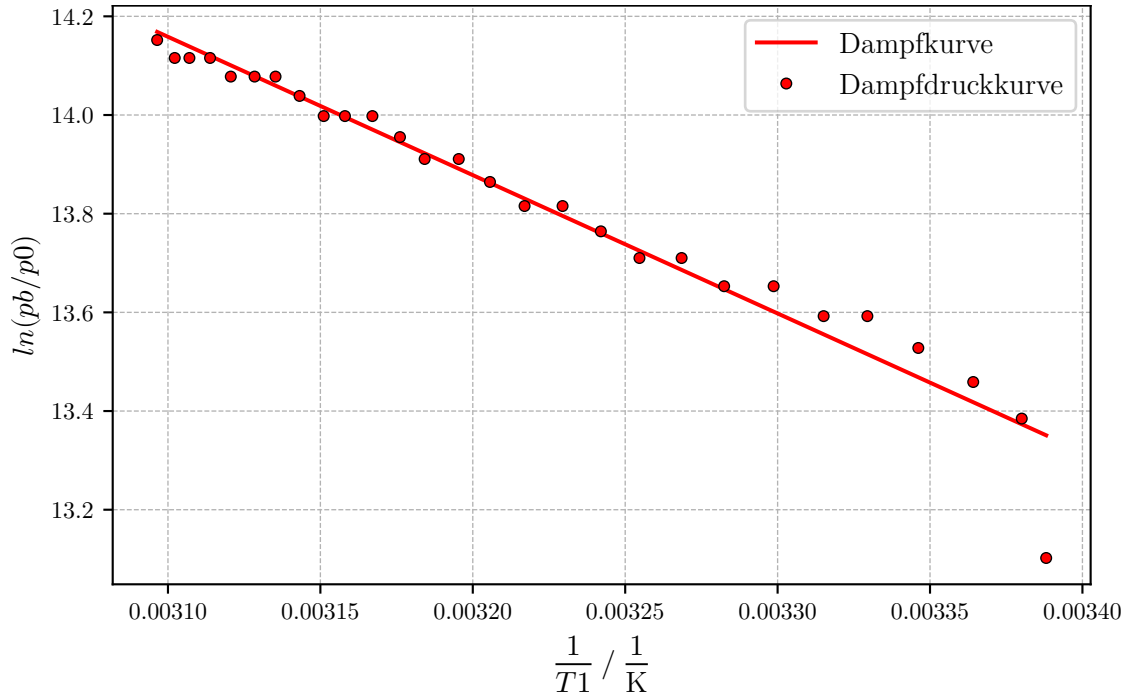
$$\ln\left(\frac{p_b}{p_0}\right) = \frac{-L}{R} \frac{1}{T} \quad (15)$$

umgeformt und geplottet.

Für den Parameter  $L$  ergibt sich dann

$$L = 23308.25 \pm 990,74 \frac{J}{mol}$$

Mit Gleichung 3 wird dann der Massendurchsatz berechnet, die Konstanten sind aus Unterabschnitt 4.4 bekannt. Dabei ist  $m_1 = m_2$ . Zuletzt wird noch die Gaußsche Fehlerabweichung mit Gleichung 6 berechnet.



**Abbildung 4:** Dampfkurve für die Berechnung von  $L$  Tabelle 1.[3]

$$\Delta \frac{\Delta m}{\Delta t} = \sqrt{\left( (m_2 c_w + m_k c_k) \frac{1}{L} \Delta \frac{\Delta T_2}{\Delta t} \right)^2 + \left( -(m_2 c_w + m_k c_k) \frac{1}{L^2} \frac{\Delta T_2}{\Delta t} \Delta L \right)^2} \quad (16)$$

Dadurch ergibt sich das Ergebnis für den Massendurchsatz, umgerechnet in SI-Basiseinheiten, mit der molaren Masse von Dichlordifluormethan 0,121 kg/mol ergeben sich die folgenden Werte in Tabelle 6. [1]

$t / s$	$\frac{dT_2}{dt} / K/s$	$\frac{\Delta m}{\Delta t} / kg/s$	$\Delta \frac{\Delta m}{\Delta t} / kg/s$
300	-0.0167	-0.00115	0.00005
600	-0.0145	-0.00099	0.00005
900	-0.0124	-0.00085	0.00005
1200	-0.0102	-0.00070	0.00005

**Tabelle 7:** Massendurchsatz bei vier verschiedenen Temperaturen.

#### 4.6 Auswertungsteil f)

Die Berechnung der mechanischen Leistung des Kompressors wird über Gleichung 4 durchgeführt, die dafür benötigten Größen sind entweder, aus vorherigen Aufgaben bekannt,

oder angegeben. Es werden wieder für die vier bekannten Zeiten bzw Temperaturen die Werte entnommen,  $p_a$  und  $p_b$  werden also entsprechen aus Tabelle 1 genommen.  $\rho_0$  sei dabei

$$\rho_0 = 5,51 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \quad (17)$$

Aus  $\rho_0$  kann das benötigte  $\rho$  berechnet werden, sie können über die ideale Gasgleichung in Zusammenhang gebracht werden. Dann ergibt sich

$$\rho = \frac{\rho_0 T_0 p_a}{T_2 p_0}. \quad (18)$$

Die Leistung wird bei  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  berechnet, also beträgt der Außendruck  $p_0 = 1 \text{ bar}$ .  $\kappa$ , das Verhältnis der beiden Molwärmen wird als  $\kappa = 1.14$  festgelegt. In diesem Fall, sind alle Parameter der Gleichung bekannt, sodass kein Curve Fit durchgeführt werden muss. Alle notwendigen Größen und Unsicherheiten werden in die Gaußsche Fehlerformel Gleichung 6 eingesetzt, dadurch ergibt sich

$$\Delta N_{\text{mech}} = \sqrt{\left( \frac{1}{\kappa - 1} \left( p_b \sqrt{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{T_2 p_0}{\rho_0 T_0 p_a} \Delta \frac{\Delta m}{\Delta t} \right)^2}. \quad (19)$$

$t / \text{s}$	$\frac{\Delta m}{\Delta t} / \text{kg/s}$	$N_{\text{mech}} / \text{W}$	$\Delta N_{\text{mech}} / \text{W}$
300	-0.0167	11.1	0.5
600	-0.0145	15.5	0.8
900	-0.0124	17.1	1.0
1200	-0.0102	16.8	1.2

**Tabelle 8:** Mechanische Leistung des Kompressors bei vier verschiedenen Temperaturen.

## 5 Diskussion

Bei den Ergebnissen der Güteziffer  $\nu$  fallen sehr große Abweichungen auf, welche primär auf die getroffenen Annahmen zurückzuführen sind. So wird angenommen, dass der Prozess gänzlich reveribel stattfinden kann, was aber in der Realität nicht anzunehmen ist. Außerdem ist der Prozess nicht vollständig adiabatisch, es kann nicht garantiert werden, dass keine Wärme oder kein Druck entweichen kann, was die Berechnungen erschweren würde. Einen kleinen Einfluss hat die Tatsache, dass sich Wärmekapazitäten mit einer sich ändernden Temperatur ebenfalls ändern, und nicht konstant bleiben.

## Literatur

- [1] IFA Institut für Arbeitsschutz der Deutschen Gesetzlichen Unfallversicherung. *Dichlordifluormethan*. URL: [http://gestis.itrust.de/nxt/gateway.dll/gestis\\_de/026210.xml?f=templates\\$fn=default-doc.htm\\$3.0](http://gestis.itrust.de/nxt/gateway.dll/gestis_de/026210.xml?f=templates$fn=default-doc.htm$3.0) (besucht am 06.01.2020).
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 206 Die Wärmepumpe*. 2019.
- [3] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.