V103

Biegung elastischer Stäbe

David Venker
david.venker@udo.edu

Nico Guth
nico.guth@udo.edu

Durchführung: 03.12.2019

Abgabe: 10.12.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung **3**

2 Theorie **3**

3 Durchführung **4**

3.1 Messung der Durchbiegung eines einseitig eingespannten Stabes 5

3.2 Messung der Durchbiegung eines beidseitig eingespannten Stabes 5

4 Auswertung **6**

4.1 Biegung eines einseitig eingespannten zylindrischen Stabes 6

4.2 Biegung eines einseitig eingespannten rechteckigen Stabes 9

4.3 Biegung eines beidseitig eingespannten rechteckigen Stabes 11

4.4 Biegung eines beidseitig eingespannten zylindrischen Stabes 14

5 Diskussion **18**

Literatur **19**

1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird der Elastizitätsmodul von verschiedenen Materialien durch Biegung von elastischen Stäben bestimmt.

2 Theorie

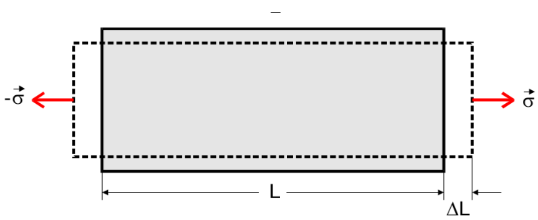

Abbildung 1: Dehnung einer stabförmigen Probe unter dem Einfluss einer Normalspannung[2]

Wenn ein Körper deformiert wird und diese Deformation den elastischen Bereich nicht überschreitet, wird der Zusammenhang zwischen Spannung σ und Deformationsverhältnis $\Delta L/L$ durch das Hookesche Gesetz

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L} \tag{1}$$

beschrieben. [2] Wobei E der Elastizitätsmodul und somit eine Materialkonstante ist.

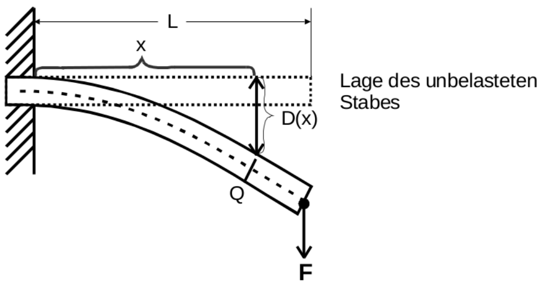

Abbildung 2: Skizze eines gebogenen Stabes[2]

Nun kann die Biegung eines Stabes durch die Kraft F auch als Dehnung angesehen werden, da eine Seite gedehnt und die andere Seite gestaucht wird. Zwischen diesen Seiten liegt eine Fläche, welche weder gestreckt noch gestaucht ist. Diese Fläche wird neutrale Faser genannt. Nun sei Q die Querschnittsfläche vom Stab und $D(x)$ der Abstand des durchgebogenen Stabes zum Ausgangsstab.(siehe Abbildung 2) Dann kann das an Q angreifende Drehmoment

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)\,\mathrm{d}q \tag{2}$$

gleich dem Drehmoment der wirkenden Kraft F gesetzt werden, um durch Umformungen eine Gleichung für $D(x)$ zu bestimmen. Dazu wird außerdem die Definition des Flächenträgheitsmoments

$$I = \int_Q y^2 \,\mathrm{d}q \tag{3}$$

und das Hookesche Gesetz verwendet. Wobei y der Abstand des infinitesimalen Flächenelements $\mathrm{d}q$ zur neutralen Faser ist.

Für die einseitige Einspannung des Stabes ergibt sich durch das Drehmoment der Kraft

$$M_F = F(L - x) \tag{4}$$

die Gleichung für die Durchbiegung

$$D(x) = \frac{F}{2EI}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right). [2] \tag{5}$$

Hiermit kann im Versuch der Elastizitätsmodul bestimmt werden.

Eine weitere Möglichkeit ergibt sich, wenn der Stab beidseitig eingespannt wird. Nun ist das Drehmoment der Kraft

$$M_F = \begin{cases} -\frac{F}{2}x, & 0 \leq x \leq L/2 \\ \\ -\frac{F}{2}(L-x) & L/2 \leq x \leq L \end{cases} \tag{6}$$

und für die Durchbiegung ergibt sich

$$D(x) = \begin{cases} \frac{F}{48EI}\left(3L^2x - 4x^3\right), & 0 \leq x \leq L/2 \\ \\ \frac{F}{48EI}\left(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\right), & L/2 \leq x \leq L \end{cases}. [2] \tag{7}$$

3 Durchführung

Die folgenden Messvorgänge werden für je zwei Stäbe verschiedener Querschnitte (rund und quadratisch) und verschiedener Materialien durchgeführt.

Bevor die Durchbiegung eines Stabes gemessen wird, ist es sinnvoll die Maße dessen zu messen. Zunächst wird also die Länge des Stabes mithilfe eines Maßbands gemessen und die Masse mithilfe einer elektrischen Waage gemessen. Da der Stab eventuell Unregelmäßigkeiten in seiner Breite bzw. seinem Durchmesser vorweist, muss sowohl die Breite als auch den Durchmesser an mehreren Stellen mithilfe eines Messschiebers gemessen werden, um später daraus einen Mittelwert zu bilden.

Außerdem muss darauf geachtet werden, dass die 0,01 mm Skalen der Messuhren vor dem Messen auf Null gesetzt werden, damit diese Skala richtig abgelesen werden kann.

3.1 Messung der Durchbiegung eines einseitig eingespannten Stabes

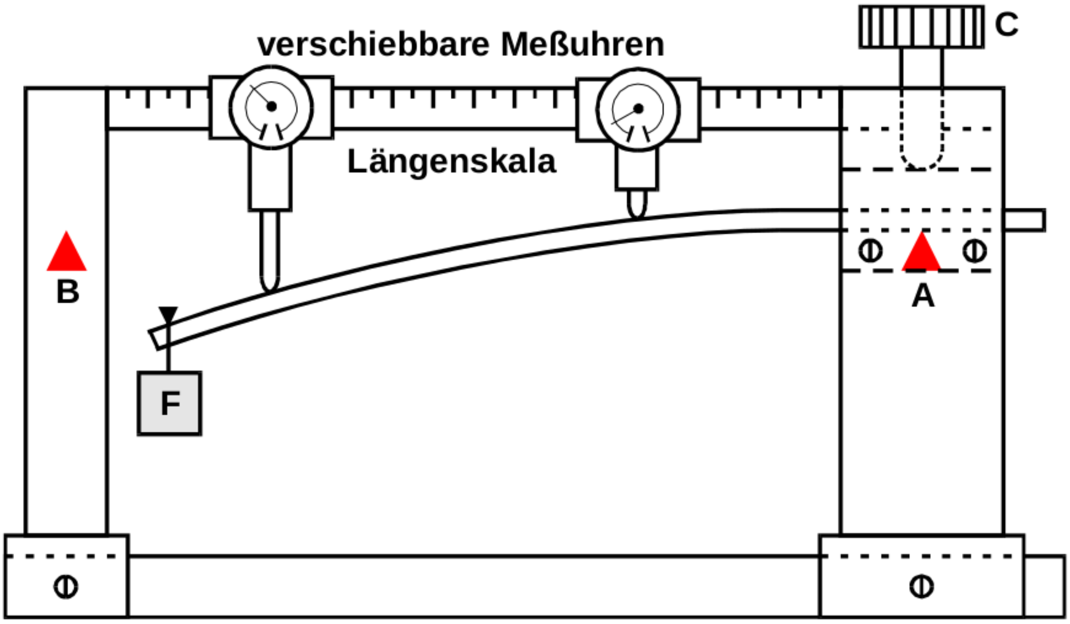

Abbildung 3: Versuchsaufbau zum Messen der Durchbiegung[2]

Der zu vermessende Stab wird in die Messvorrichtung, wie in Abbildung 3 ohne angehangenes Gewicht einseitig eingespannt. Die Länge des Stabes wird vom Einspannungsort aus gemessen. Nun wird die Messuhr an 15 verschiedene Stellen des Stabes geschoben und die Auslenkung an dieser Stelle wird abgelesen. Zusätzlich muss notiert werden, an welchem Abstand zum Einspannungsort die Auslenkung abgelesen wurde. Dies wird vorerst ohne angehangenes Gewicht gemessen, da nicht davon ausgegangen werden kann, dass der zu vermessende Stab perfekt gerade ist.

Es wird dann ein Gewicht gesucht, welches mithilfe einer Aufhängung an das Ende des Stabes gehangen wird und dort eine Durchbiegung des Stabes zwischen 3 und 7 mm verursacht. Die Masse dieses Gewichts wird mithilfe einer Waage gemessen, wobei beachtet werden muss, dass die Masse der Aufhängung zusätzlich gemessen werden muss. Nun wird wie zuvor die Auslenkung des Stabes an den gleichen 15 Stellen gemessen, allerdings ist diesmal der Stab durch das angehangene Gewicht durchgebogen.

3.2 Messung der Durchbiegung eines beidseitig eingespannten Stabes

Um die Durchbiegung eines Stabes zu messen, welcher beidseitig, also an den Punkten A und B in Abbildung 3, eingespannt ist, muss dieser zunächst wie beim einseitigen Einspannen ohne angehangenes Gewicht vermessen werden. Zuerst muss also der Abstand von den Einspannungsorten gemessen werden. Danach wird mit den Messuhren auf jeder

Hälfte die Auslenkung an 10 Stellen gemessen. Hier muss darauf geachtet werden, dass für jede Hälfte des Stabes eine andere Messuhr verwendet wird.

Dann wird der Stab erneut beidseitig eingespannt, allerdings wird nun ein Gewicht in die Mitte des Stabes gehangen, das so schwer ist, dass eine Durchbiegung gemessen werden kann. Dieses Gewicht muss wieder mit einer Waage vermessen werden. Mit diesem angehangenen Gewicht werden die Auslenkungen der Messuhr wieder an den zuvor gemessenen Stellen abgelesen.

4 Auswertung

4.1 Biegung eines einseitig eingespannten zylindrischen Stabes

In Tabelle 1 wurden an je 15 verschiedenen Stellen, die jeweils den Abstand x zu dem Einspannungspunkt besitzen, zwei Messungen durchgeführt. D_0 beschreibt die Auslenkung ohne eine Masse, also die Ruhelage, D_m die Auslenkung des Stabes mit einer angehängten Masse m. Diese wurde in einem Abstand L vom Einspannungspunkt an die Stange gehängt, dabei ist $m = 0{,}7474\,\mathrm{kg}$ und $L = 450\,\mathrm{mm}$. Δx ist als die Differenz von D_0 und D_m definiert, gibt also die eigentliche Auslenkung des Stabes an.

Tabelle 1: Messergebnisse zu dem einseitig eingespannten zylindrischen Stab

x / mm	D_0 / mm	D_m / mm	Δx / mm
25	8,01	7,95	0,06
50	8,06	7,89	0,17
75	8,13	7,81	0,32
100	8,19	7,66	0,53
150	8,32	7,25	1,07
200	8,47	6,71	1,76
250	8,61	6,05	2,56
300	8,72	5,27	3,35
350	8,74	4,38	4,36
375	8,73	3,88	4,85
400	8,74	3,37	5,37
410	8,68	3,14	5,54
420	8,68	2,93	5,75
430	8,68	2,71	5,97
435	8,69	2,62	6,07

Zunächst muss die Dichte ρ des benutzten Stabs mithilfe von $\rho = m/\pi R^2 L$ berechnet werden. Die Stange besitzt insgesamt die Länge $L_{\text{gesamt}} = 0{,}55\,\mathrm{m}$ und die Masse $m_1 = 0{,}1213\,\mathrm{kg}$. Der Radius beträgt $R = 5\,\mathrm{mm}$, somit ergibt sich die Dichte $\rho = 2808{,}07\,\mathrm{kg/m^3}$.

$F = mg$ ist die Kraft mit der das Gewicht die Stange nach unten verbiegt, wobei $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ die Erdbeschleunigung ist.[1] L ist die Länge der Stange vom Einspannungspunkt aus gemssen, also nicht die gesamte Länge. R ist der Radius der Querschnittsfläche und I ist das Flächenträgheitsmoment, das sich aus Gleichung 3 ergibt. Im Falle eines Kreises ist das Flächenträgheitsmoment

$$I_{\text{Kreis}} = \frac{\pi}{4} \cdot R^4. \; [4] \tag{8}$$

Da nicht anzunehmen ist, dass der Stab an jeder Stelle den gleichen Durchmesser $2R$ besitzt, wurde an zehn Stellen der Durchmesser gemessen, die Messungen sind nachfolgend notiert.

Tabelle 2: Gemessene Werte für 2R

$2R$ / m
0.0100
0.0100
0.0100
0.0100
0.0105
0.0100
0.0100
0.0100
0.0100
0.0100

Mithilfe der Mittelwertsformel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{9}$$

und der Formel für die Abweichung des Mittelwertes

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{10}$$

wird der Wert für R bestimmt. Es ergibt sich

$$R = 0.00502 \pm 0{,}000\,08\,\mathrm{m}. \tag{11}$$

Da die Abweichung kaum einen Einfluss hat, wird sie in allen folgenden Rechnungen nicht weiter beachtet. In Tabelle 3 wurde der gemittelte Wert für R, sowie alle anderen für den Curve Fit benötigten Werte eingetragen.

Für die Bestimmung des Elastizitätsmoduls wird Δx gegen $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ aufgetragen.

Tabelle 3: Gegebene Werte für die Berechnung von E

F / N	L / m	R / m	I / m^4
7,332	0,450	0,005	$4,910 \cdot 10^{-10}$

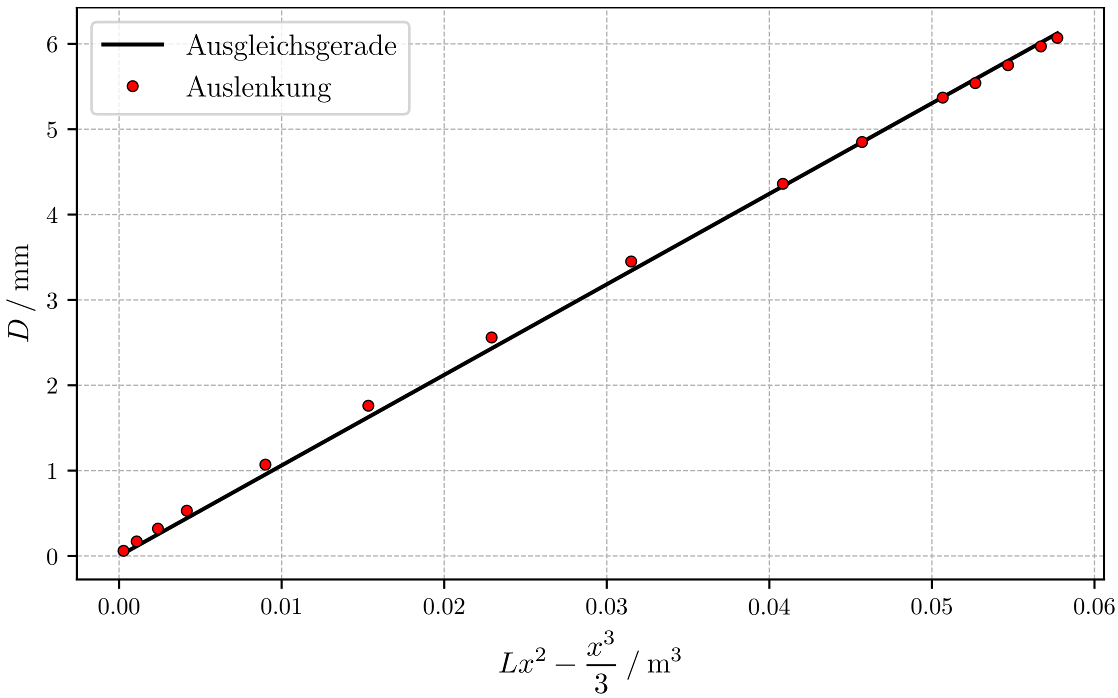

Abbildung 4: Graph der Werte aus Tabelle 1

Aus der Ausgleichskurve wird der Parameter E über

$$D(x) = \frac{F}{2EI}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) \tag{12}$$

bestimmt. Für diesen ergibt sich dann

$$E = 70,40 \pm 0{,}36\,\text{GPa}. \tag{13}$$

4.2 Biegung eines einseitig eingespannten rechteckigen Stabes

Genau wie in Unterabschnitt 4.1 sind in Tabelle 4 die Verschiebungen bei einer bei L angehängten Masse $m = 1{,}2077\,\text{kg}$ aufgelistet.

Tabelle 4: Messergebnisse zu dem einseitig eingespannten rechteckigen Stab

x / mm	D_0 / mm	D_m / mm	Δx / mm
25	7,89	7,85	0,04
50	7,87	7,74	0,13
75	7,86	7,62	0,24
100	7,81	7,41	0,40
150	7,63	6,83	0,80
200	7,43	6,11	1,32
250	7,23	5,29	1,94
300	6,98	4,38	2,60
350	6,72	3,39	3,33
375	6,56	2,84	3,72
400	6,37	2,27	4,10
410	6,28	2,03	4,25
420	6,20	1,79	4,41
430	6,12	1,56	4,56
435	6,08	1,46	4,62

Die Berechnung von E wird hier genau so durchgeführt wie in Unterabschnitt 4.1. Im Folgenden sind alle notwendigen Werte aufgelistet, die für die Berechnung nötig sind. Die Gesamtlänge L_{gesamt} des rechteckigen Stabes beträgt $L_{\text{gesamt}} = 0{,}6000\,\text{m}$, mit einer Masse $m = 0{,}5023\,\text{kg}$. Die Querschnittsfläche ist ein Quadrat, sodass die Seitenlänge $R = 0{,}0100\,\text{m}$ an allen Seiten gleich ist.

Mit den Formeln Gleichung 9 und Gleichung 10 wird erneut ein Wert für R gemittelt und die Abweichung bestimmt. Für R ergibt sich dann

$$R = 0.0102 \pm 0{,}0003\,\text{m} \tag{14}$$

Tabelle 5: Gemessene Werte für R

R / m
0.0100
0.0100
0.0100
0.0100
0.0105
0.0105
0.0105
0.0105
0.0100
0.0105

Die Dichte der Stange mit wird mit $\rho = m/R^2 L_{\text{gesamt}}$ bestimmt. Es ergibt sich die Dichte $\rho = 8371{,}67\,\mathrm{kg/m^3}$. Da die Querschnittsfläche dieser Stange ein Quadrat ist, muss das Flächenträgheitsmoment I nun mit

$$I_{\text{Quadrat}} = \frac{R^4}{12} \tag{15}$$

berechnet werden. [4] Damit ergeben sich erneut alle Werte, die zur Berechnung von E und zum Erstellen des Plots gebraucht werden. Diese sind in Tabelle 6 aufgelistet.

Tabelle 6: Gegebene Werte für die Berechnung von E

F / N	L / m	R / m	I / m^4
11,85	0,446	0,01	$8,33 \cdot 10^{-10}$

Wie zuvor wird nun E mit Curve Fit bestimmt, dafür wurde die Funktion

$$D(x) = \frac{F}{2EI}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) \tag{16}$$

verwendet, der Plot ist in Abbildung 5 aufgetragen. [3]

Für E ergibt sich dann durch die Ausgleichskurve der Elastizitätsmodul

$$E = 86,64 \pm 0{,}36\,\mathrm{GPa}. \tag{17}$$

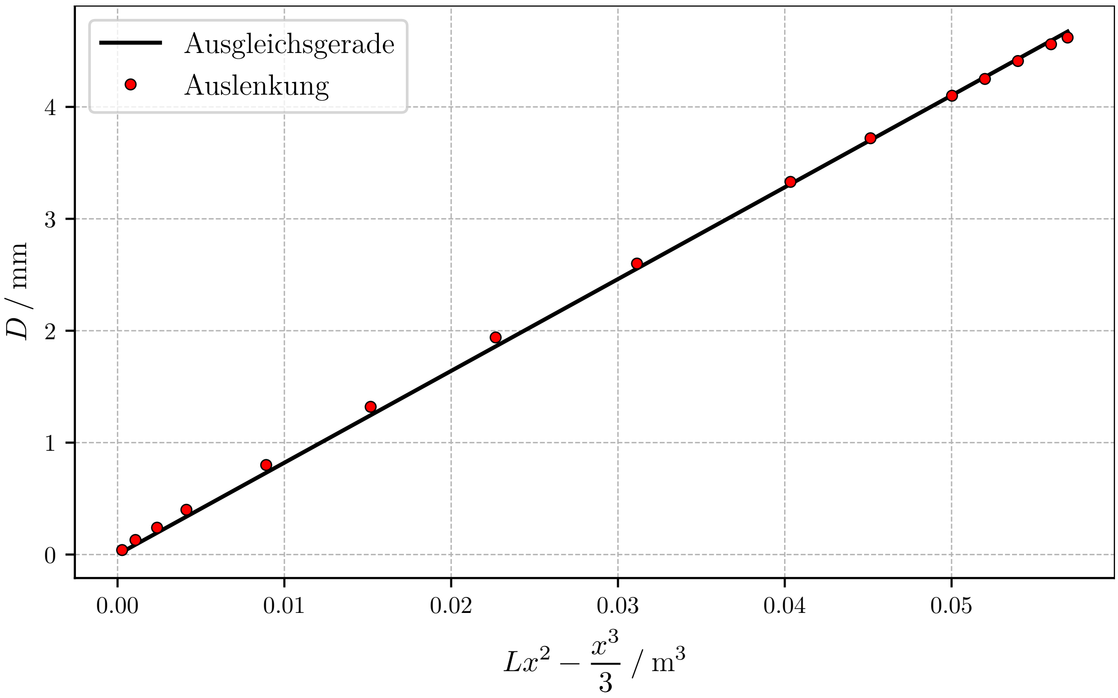

Abbildung 5: Graph der Werte aus Tabelle 4

4.3 Biegung eines beidseitig eingespannten rechteckigen Stabes

Nun wurde die jeweilige Masse m in der Mitte der Stange befestigt, welche beidseitig eingespannt ist. Auf den beiden Hälften der Stange wurde mit je einer anderen Messuhr gemessen. In Tabelle 7 und Tabelle 9 muss beachtet werden, dass die jeweiligen Messuhren nicht gleich kalibriert wurden. Dies führt zu abweichenden Auslenkungen, allerdings kann dies vernachlässigt werden, da nur die Differenz der Werte wichtig sind. Nachfolgend sind wie zuvor die Auslenkungen Δx bei verschiedenen Abständen vom Einspannungspunkt gemessen worden. $D0$ ist die Auslenkung ohne eine angehangene Masse, somit ist DM die Auslenkung mit einer bei $x = \frac{L}{2}$ angehangenen Masse m. Für die rechteckige Stange beträgt $L = 0{,}555\,\text{m}$, wobei L der Abstand zwischen den beiden Einspannungspunkten ist, und $L_{\text{gesamt}} = 0{,}60\,\text{m}$ die eigentliche Länge des Stabes ist.

Für diesen Teil des Experimentes wurde die Stange aus Unterabschnitt 4.2 erneut genutzt, Dichte und Kantenlänge bleiben also gleich. Die Dichte wurde bereits bestimmt und beträgt $\rho = 8371{,}67\,\text{kg/m}^3$. Das Flächenträgheitsmoment I kann mit Gleichung 15 berechnet werden. R ist dabei die Seitenlänge des Querschnitts und F ist die Gewichtskraft, die bei $\frac{L}{2}$ wirkt und durch $F = mg$ gegeben ist. Die Erdbeschleunigung ist durch die Konstante $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$ bekannt und die Masse m ist in diesem Fall $m = 4{,}7188\,\text{kg}$.[1]

Die Werte aus Tabelle 8 werden für das Aufstellen der Funktion benötigt. In diesem Fall müssen zwei Fits durchgeführt werden, da die Funktion, mit der der Fit gemacht werden

Tabelle 7: Messergebnisse zu dem beidseitig eingespannten rechteckigen Stab

x / mm	D_0 / mm	D_m / mm	Δx / mm	x / mm	D_0 / mm	D_m / mm	Δx / mm
50	7,94	7,89	0,05	290	7,23	6,24	0,99
100	8,01	7,65	0,36	310	7,22	6,23	0,99
120	7,97	7,55	0,42	330	7,19	6,14	1,05
140	7,98	7,44	0,54	350	7,18	6,24	0,94
160	7,96	7,34	0,62	370	7,18	6,29	0,89
180	7,91	7,18	0,73	390	7,16	6,32	0,84
200	7,90	7,09	0,81	410	7,13	6,20	0,93
220	7,88	6,99	0,89	430	7,13	6,45	0,68
240	7,88	6,92	0,96	450	7,14	6,56	0,58
260	7,89	6,87	1,02	500	7,15	6,84	0,31

Tabelle 8: Gegebene Werte für die Berechnung von E

F / N	L / m	R / m	I / m^4
46.290	0.550	0.010	$8.333 \cdot 10^{-10}$

muss, zweigeteilt ist. Für die linke Seite wird der Fit mit der Funktion

$$D(x) = a \cdot x + b \tag{18}$$

durchgeführt, wobei

$$a = \frac{F}{48EI} \tag{19}$$
$$x = 3L^2x - 4x^3. \tag{20}$$

Als nötigen Werte werden aus Tabelle 8 entnommen. Aus Tabelle 7 werden alle Auslenkungen $x < \frac{L}{2}$ verwendet. Der Curve Fit gibt die beiden Parameter a und b

$$a = 0.0076 \pm 0{,}0003\,\frac{1}{\mathrm{m}^2} \tag{21}$$
$$b = -0.00033 \pm 0{,}000\,04\,\mathrm{m}. \tag{22}$$

Durch den Curve Fit ergibt sich der Plot Abbildung 8.

Über die Beziehung

$$E = \frac{F}{48aI} \tag{23}$$

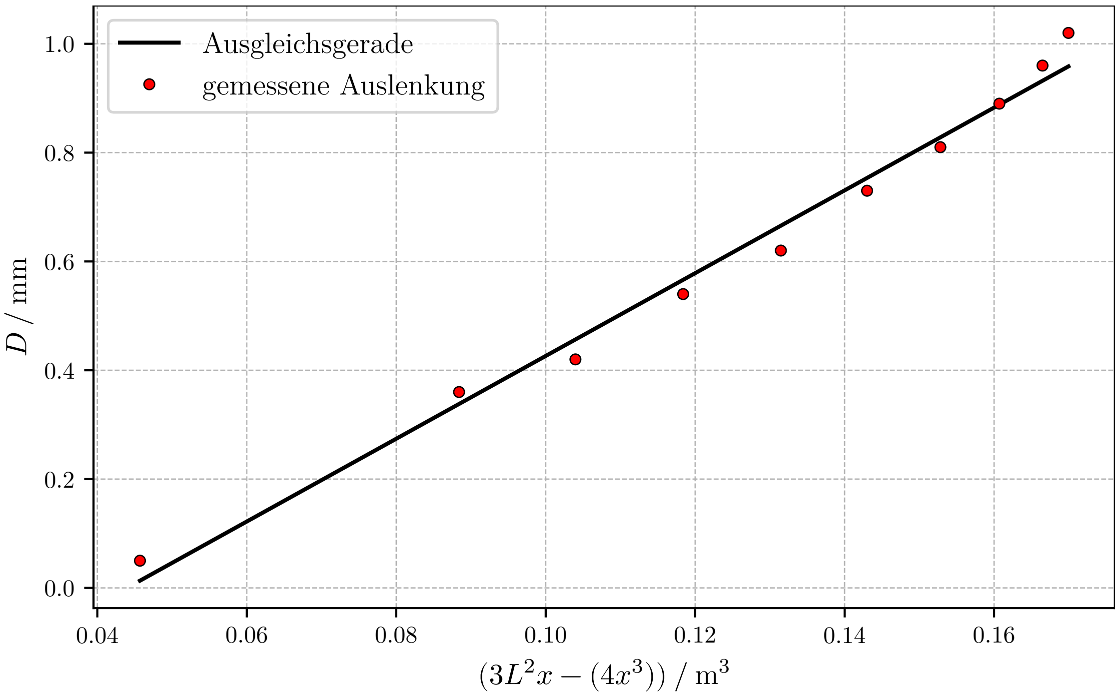

Abbildung 6: Graph der Werte links von $\frac{L}{2}$.

ergibt sich der Wert für den Elastizitätsmodul $E_{\text{links}} = 152 \pm 6\,\text{GPa}$.

Der Fit für die rechte Seite wird auch mit der Funktion

$$D(x) = a \cdot x + b \tag{24}$$

durchgeführt, wobei hier folgende Definition verwendet wird

$$a = \frac{F}{48EI} \tag{25}$$

$$x = 4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3. \tag{26}$$

Die Werte werden aus Tabelle 8 entnommen, wobei hier nur die $x > \frac{L}{2}$ berücksichtigt werden. Aus Tabelle 7 werden alle Auslenkungen $x > \frac{L}{2}$ verwendet. Der Curve Fit gibt wieder die beiden Parameter a und b aus und erzeugt den Plot Abbildung 7.

$$a = 0.0058 \pm 0{,}0006\,\frac{1}{\text{m}^2} \tag{27}$$

$$b = 0.00007 \pm 0{,}000\,08\,\text{m} \tag{28}$$

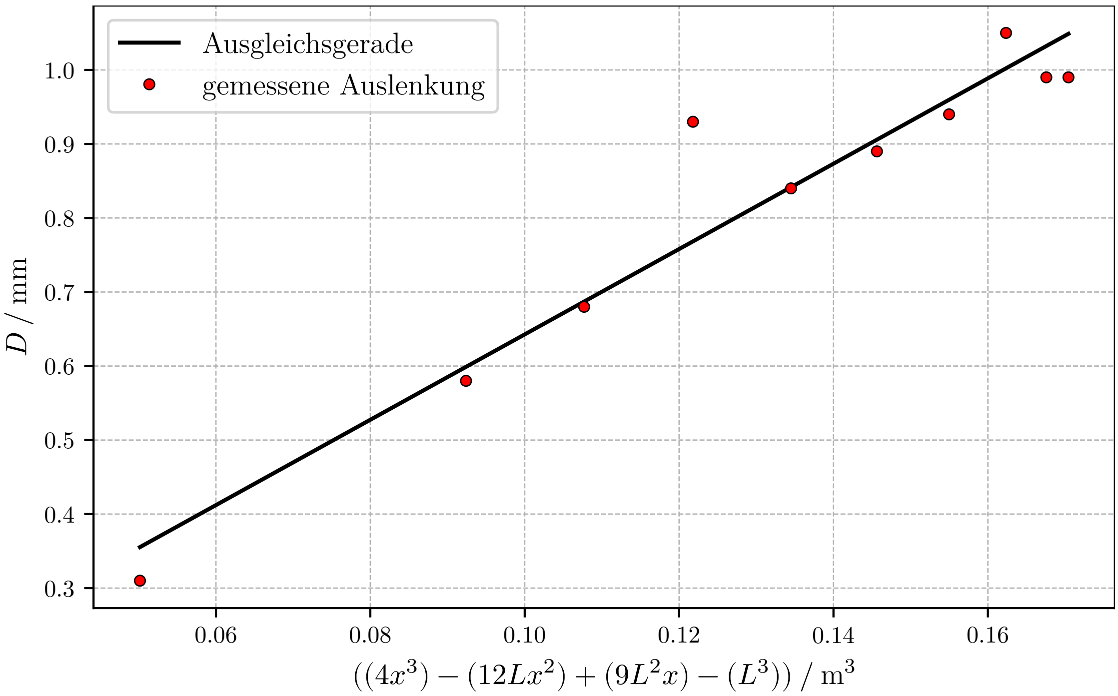

Abbildung 7: Graph der Werte rechts von $\frac{L}{2}$.

Wie zuvor wird Gleichung 23 verwendet, um den Elastizitätsmodul zu berechnen, damit ergibt sich $E_{\text{rechts}} = 201 \pm 20\,\text{GPa}$. Über die Mittelwertsformel Gleichung 9 und die Mittelwertsabweichung Gleichung 10 wird ein Wert für E gemittelt. Mittelwert und Abweichung von E betragen $E = 176 \pm 11\,\text{GPa}$.

4.4 Biegung eines beidseitig eingespannten zylindrischen Stabes

Für die weitere Messung wurde ein neuer zylindrischer Stab verwerwendet. Er besitzt einen Radius von $R = 0{,}005\,\text{m}$ und eine Gesamtlänge von $L_{\text{gesamt}} = 0{,}60\,\text{m}$. Seine Masse m beträgt $m = 0{,}3943\,\text{kg}$ und hat somit eine Dichte von $\rho = 8367{,}31\,\text{kg/m}^3$. Der Abstand zwischen den beiden Einspannungspunkten beträgt $L = 0{,}555\,\text{m}$. Die Masse $m = 4{,}7188\,\text{N}$ wurde im Abstand $\frac{L}{2}$ vom Einspannungspunkt angebracht.

Nun wird wie in Unterabschnitt 4.3 ein Plot mit den Funktionen aus Gleichung 7 mit den Messwerten angefertigt, aus dem der Elastizitätsmodul E mit SciPy bestimmt werden kann. Die Werte aus Tabelle 11 werden für die Berechnung benötigt, dabei ist R der Radius der Querschnittsfläche.

Über Gleichung 9 und Gleichung 10 wird ein $2R$ gemittelt und daraus ein R Wert, sowie seine Abweichung, R ist dann

$$2R = 0.0101 \pm 0{,}0002\,\text{m}. \tag{29}$$

Tabelle 9: Messergebnisse zu dem beidseitig eingespannten zylindrischen Stab

x / mm	D_0 / mm	D_m / mm	Δx / mm	x / mm	D_0 / mm	D_m / mm	Δx / mm
50	7,91	7,73	0,18	290	6,98	5,18	1,80
100	7,90	7,38	0,52	310	6,97	5,16	1,81
120	7,85	7,16	0,69	330	6,96	5,18	1,79
140	7,80	6,93	0,87	350	6,95	5,22	1,73
160	7,75	6,71	1,04	370	6,95	5,31	1,64
180	7,67	6,45	1,22	390	6,95	5,42	1,53
200	7,66	6,28	1,38	410	6,95	5,57	1,38
220	7,63	6,12	1,51	430	6,96	5,73	1,23
240	7,59	5,95	1,64	450	6,99	5,92	1,07
260	7,56	5,84	1,72	500	7,05	6,46	0,59

Tabelle 10: Gemessene Werte für 2R

$2R$ / m
0.0100
0.0100
0.0100
0.0100
0.0100
0.0100
0.0105
0.0100
0.0105
0.0100

I ist der über Gleichung 8 berechnete Flächenträgheitsmoment. Für m wird die gleiche Masse, wie in Unterabschnitt 4.3 verwendet, somit ist $m = 4{,}7188\,\text{kg}$.

Tabelle 11: Gegebene Werte für die Berechnung von E

F / N	L / m	R / m	I / m^4
46.290	0.550	0.005	$4.910 \cdot 10^{-10}$

Wie zuvor auch, muss der Curve Fit aufgeteilt werden, sodass am Ende zwei Fits erstellt werden müssen. Der Fit für die linke Seite, also werden die Werte $x < \frac{L}{2}$ aus Tabelle 9 genommen, wird mit die Funktion

$$D(x) = a \cdot x + b \tag{30}$$

durchgeführt, der Parameter a und die Variable x sind

$$a = \frac{F}{48EI} \tag{31}$$
$$x = 3L^2x - 4x^3. \tag{32}$$

Als nötigen Werte werden aus Tabelle 11 entnommen. Aus Tabelle 9 werden alle Auslenkungen $x < \frac{L}{2}$ verwendet. Der Curve Fit gibt die beiden Parameter a und b aus.

$$a = 0.0127 \pm 0{,}0008\,\frac{1}{\text{m}^2} \tag{33}$$
$$b = -0.0005 \pm 0{,}0001\,\text{m} \tag{34}$$

Der Plot mit der Ausgleichsgeraden ist in Abbildung 8 aufgetragen.

Über den bereits bekannten Zusammenhang Gleichung 23 wird der Elastizitätsmodul E berechnet, $E_{\text{links}} = 155 \pm 9\,\text{GPa}$.

Die Auswertung der rechten Seite wird erneut mit einem Curve Fit der Funktion

$$D(x) = a \cdot x + b \tag{35}$$

durchgeführt, wobei a und x als

$$a = \frac{F}{48EI} \tag{36}$$
$$x = 4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3 \tag{37}$$

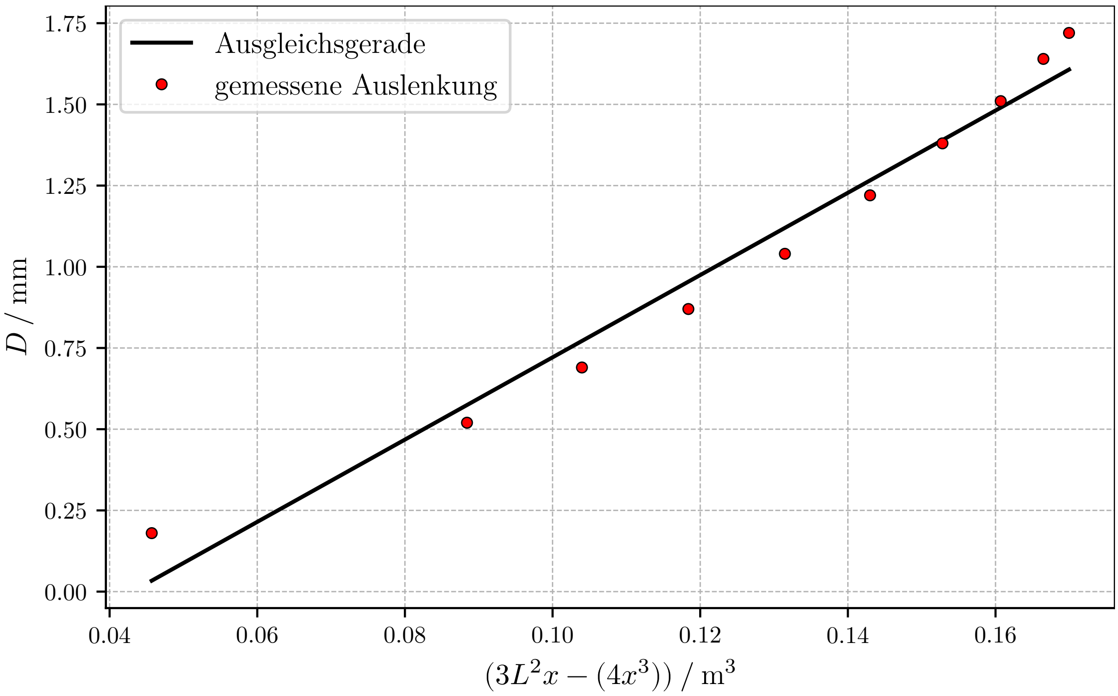

Abbildung 8: Graph der Werte links von $\frac{L}{2}$.

definiert sind.

Die Werte für $x > \frac{L}{2}$ werden aus Tabelle 8 entnommen. Aus Tabelle 9 werden alle Auslenkungen $x > \frac{L}{2}$ verwendet. Der Curve Fit gibt wieder die beiden Parameter a und b aus und erzeugt den Plot Abbildung 9.

$$a = 0.0058 \pm 0{,}0006\,\frac{1}{\mathrm{m}^2} \tag{38}$$

$$b = 0.00007 \pm 0{,}000\,08\,\mathrm{m} \tag{39}$$

Der Wert von E ergibt sich aus Gleichung 23 zu $E_{\text{rechts}} = 191 \pm 6\,\mathrm{GPa}$. Wie zuvor, werden die beiden berechneten Werte für E gemittelt, dafür werden Gleichung 9 und Gleichung 10. Der gemittelte Elastizitätsmodul beträgt $E = 173 \pm 5\,\mathrm{GPa}$

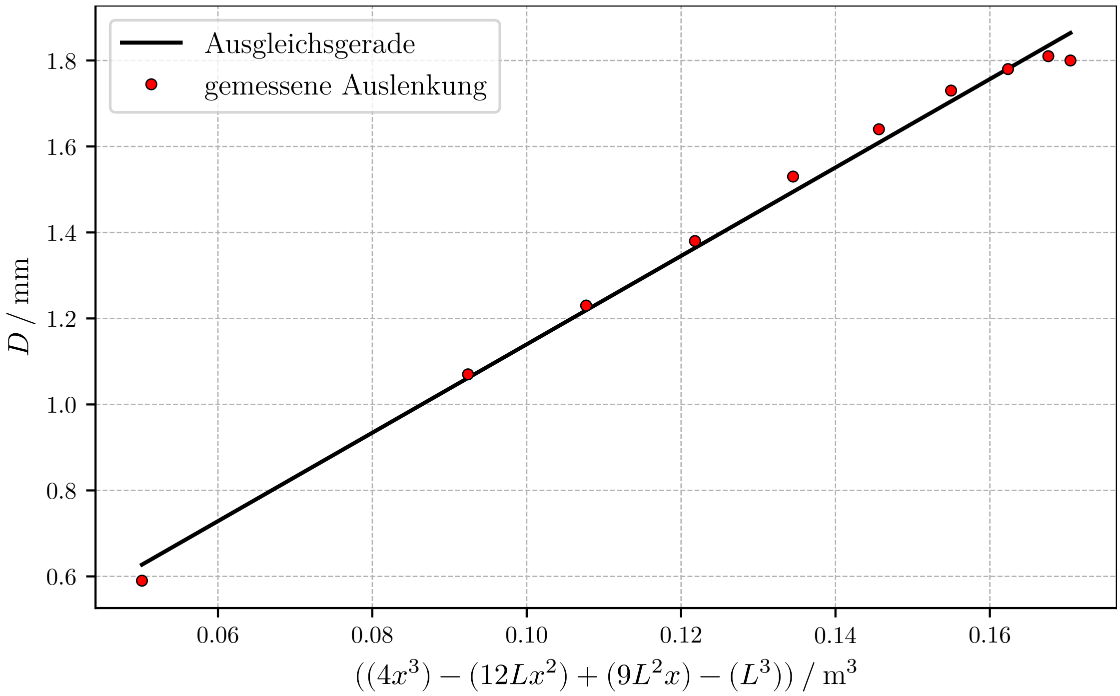

Abbildung 9: Graph der Werte rechts von $\frac{L}{2}$.

5 Diskussion

Für die Auswertung der Elastizitätsmodule E wurden als Vergleichswerte für die Bestimmung des Stangenmaterials ebenfalls die Dichten ρ bestimmt. Dadurch ergeben sich die Werte aus Tabelle 12.

Tabelle 12: Ergebnisse für die Dichte ρ mit entsprechenden Referenzwerten aus der Literatur für ein Metall mit ähnlicher Dichte[6]

Stab	ρ_{gemessen} / kg/m^3	ρ_{referenz} / kg/m^3	Abweichungen
einseitig zylindrisch	2808,07	2560 bis 2640	6,36%
einseitig rechteckig	8371,67	8400 bis 8700	0,33%
beidseitig rechteckig	8371,67	8400 bis 8700	0,33%
beidseitig zylindrisch	8367,31	8400 bis 8700	0,39%

Die Dichte des ersten Stabs entspricht am ehesten der Dichte von Aluminium. Somit ist der erste Referenzwert in Tabelle 12 für die Dichte von Aluminium. Alle anderen Dichten entsprechen am ehesten der Dichte von Messing und somit wurde hierfür der Referenzwert gelistet.

Aus den Auswertungen ergeben sich zudem vier Elastizitätsmodule mit ihren Unsicherheiten. Diese sind in Tabelle 13 mit Referenzwerten der zuvor bestimmten Metalle gelistet.

Tabelle 13: Ergebnisse für E mit entsprechenden Referenzwerten[5]

Stab	E / GPa	ΔE / GPa	E_{referenz} / GPa	Abweichungen
einseitig zylindrisch	70,40	±0,36	69	$2{,}03 \pm 0{,}52\%$
einseitig rechteckig	86,64	±0,36	102 bis 125	$15{,}06 \pm 0{,}35\%$
beidseitig rechteckig	176,00	±11,00	102 bis 125	$40{,}80 \pm 9{,}12\%$
beidseitig zylindrisch	173,00	±5,00	102 bis 125	$38{,}40 \pm 0{,}96\%$

An Tabelle 13 ist zu sehen, dass die Messungen der beidseitig eingespannten Stäbe deutlich höhere Abweichungen haben, als die der einseitigen Einspannung.

Diese Abweichungen lassen sich durch die erzeugte Biegung erklären, welche deutlich geringer ist, als die empfohlenen 3 mm to 7 mm. Bei so geringen Auslenkungen können in der Theorie gemachte Vereinfachungen und die Messgenauigkeiten der Messvorrichtungen zu erheblichen Abweichungen führen.

Somit scheint eine Messung bei einseitiger Einspannung deutlich sinnvoller und effektiver.

Literatur

[1] NIST Standard Reference Database. *CODATA Internationally recommended 2018 values of the Fundamental Physical Constants.* URL: `https://physics.nist.gov/cuu/Constants/` (besucht am 09. 12. 2019).

[2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 103 Biegung elastischer Stäbe.* 2019.

[3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python.* Version 0.16.0. URL: `http://www.scipy.org/`.

[4] TU Berlin Prof.Popov. *Flfachentrfagheitsmomente, Spannungenim Balken.* URL: `http://mech2.pi.tu-berlin.de/popov/mechanik1_ws0607/loesungen/me1-12.formeln.pdf` (besucht am 09. 12. 2019).

[5] Engineering ToolBox. *Young's Modulus - Tensile and Yield Strength for common Materials.* URL: `https://www.engineeringtoolbox.com/young-modulus-d_417.html` (besucht am 09. 12. 2019).

[6] Roger Walker. *Density of Metals.* URL: `https://www.simetric.co.uk/si_metals.htm` (besucht am 09. 12. 2019).