

V353

RC -Kreis

David Venker
david.venker@udo.edu

Nico Guth
nico.guth@udo.edu

Durchführung: 26.11.2019

Abgabe: 03.12.2019

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
3	Durchführung	6
3.1	Bestimmung der Zeitkonstante	6
3.2	Amplitudenmessung der Kondensatorspannung und Messung der Phasenverschiebung zwischen U_C und U_0	7
3.3	RC-Kreis als Integrator	8
4	Auswertung	8
4.1	Bestimmung der Zeitkonstante bei angelegter Rechteckspannung	8
4.2	Bestimmung der Zeitkonstante bei angelegter Sinusspannung	10
4.3	Betrachtung des RC-Glieds als Integrator	13
5	Diskussion	13
	Literatur	14
6	Anhang	15

1 Zielsetzung

Das Ziel dieses Experiments ist die Untersuchung der Eigenschaften eines RC-Kreises:

- a) Die Zeitkonstante RC wird bestimmt.
- b) Die Spannungsamplituden von Kondensatorspannung und Generatorspannung wird in Abhängigkeit von der Frequenz gemessen.
- c) Die Phasenverschiebung zwischen den Spannungen wird in Abhängigkeit von der Frequenz untersucht.
- d) Der RC-Kreis wird als Integrator verwendet.

2 Theorie

Wenn ein System durch eine Änderung der Umgebungsbedingungen aus seinem Anfangszustand entfernt wird und daraufhin nicht-oszillatorisch in diesen zurückkehrt, kann man Relaxationseffekte beobachten. In Abbildung 1 ist eine Schaltung dargestellt, mit der diese Relaxationsphänomene beobachten werden können, das Auf- und Entladen eines Kondensators über einen Widerstand. Befindet sich der Schalter in Abbildung 1 in Stellung eins, so entlädt sich der Kondensator mit der Kapazität C . Auf seinen beiden Platten liegt die Gesamtladung Q . Dadurch liegt zwischen den beiden Kondensatorplatten eine Spannung von

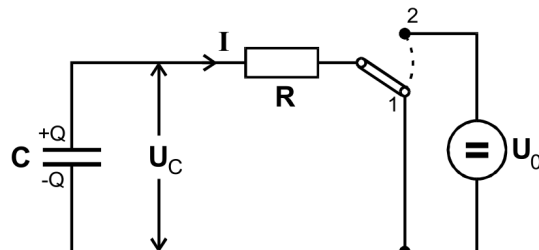


Abbildung 1: Schaltbild eines RC-Kreises, der in Stellung 1 entladen und in Stellung 2 geladen wird. [1]

$$U_C = \frac{Q}{C}. \quad (1)$$

Durch das ohmsche Gesetz ist bekannt, dass durch diese Spannung U_C und den Widerstand R ein Strom

$$I = \frac{U_C}{R} \quad (2)$$

verursacht wird. Der zeitliche Verlauf der Ladung Q auf dem Kondensator C , beim Entladen, kann durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden, dadurch ergibt sich

$$Q(t) = Q(0) \exp\left(\frac{-t}{RC}\right). \quad (3)$$

Wobei RC eine Zeitkonstante ist, die im nächsten Abschnitt näher erklärt wird. [1] Äquivalent dazu lässt sich der Aufladevorgang eines Kondensators C durch die Spannung U_0 über den Widerstand R beschreiben. Hierbei gelten folgende Randbedingungen für Q

$$Q(0) = 0 \qquad Q(\infty) = C \cdot U_0. \quad (4)$$

Damit lässt sich der Aufladevorgang durch

$$Q(t) = C \cdot U_0(1 - \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)) \quad (5)$$

beschreiben. [1] Dabei ist RC wieder die Zeitkonstante aus Gleichung 3, mit dieser Konstante kann beschrieben werden, wie schnell sich ein System seinem Endzustand annähert. Die Zeitkonstante wird durch die Kapazität C und den Widerstand R im RC-Kreis festgelegt. Nachdem eine Zeit von

$$\Delta T = RC \quad (6)$$

verstrichen ist, ändert sich die Kondensatorladung Q um den Faktor

$$\frac{Q(t = RC)}{Q(0)} = \frac{1}{e} \approx 0.386. \quad (7)$$

Um den Wert RC aus experimentellen Daten zu bestimmen, wenn R und C unbekannt sind, wird Gleichung 7 in eine andere Form gebracht. In der neuen Form

$$\ln\left(\frac{Q(t)}{Q(0)}\right) = t \cdot \frac{-1}{RC} \quad (8)$$

kann man RC als negative reziproke Steigung einer halblogarithmischen Funktion sehen.[1]

Eine periodische Auslenkung aus der Gleichgewichtslage erzeugt ebenfalls Relaxationsphänomene und kann ebenfalls mit einem RC-Kreis untersucht werden.

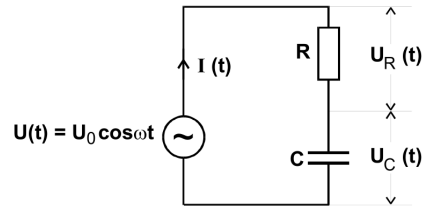


Abbildung 2: Mögliches Schaltbild zur Entstehung eines Relaxationsphänomens durch periodische Anregung. [1]

Wird die Schaltung aus Abbildung 2 durch die Wechselspannung $U(t)$ mit der Kreisfrequenz ω angetrieben, also

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t), \quad (9)$$

so ändert sich das Verhalten des RC-Kreises in Abhängigkeit von der Frequenz. Für $\omega \ll \frac{1}{RC}$ werden die Kondensatorspannung U_C und die Generatorspannung $U(t)$ in Gleichung 9 etwa gleich sein, da der Kondensator genug Zeit hat sich vollständig aufzuladen, bevor die Spannung wieder abfällt und ihr Vorzeichen ändert. Bei entsprechend höheren Frequenzen kann der Aufladevorgang nicht mehr vollständig stattfinden und die Amplitude A der Kondensatorspannung wird kleiner werden. Sie ist gegeben durch

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (10)$$

Durch die verzögerte Aufladung entsteht eine Phasenverschiebung φ , die sich bei ansteigender Frequenz asymptotisch dem Wert $\varphi = \frac{\pi}{2}$ annähert. Wie an

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (11)$$

auch zu erkennen ist. Alternativ lässt sich die Phasenverschiebung auch über die zeitlichen Verläufe von U_C und U_0 berechnen, dafür müssen die Schwingungsdauer T bzw. b in Abbildung 3 und der zeitliche Abstand der Nulldurchgänge a bekannt sein. Die Schwingungsdauer b ist die Inverse der eingestellten Frequenz f .

Abbildung 3 stellt das Prinzip genauer dar. Über den Zusammenhang

$$\varphi = a \cdot f \cdot 2\pi = \frac{a}{T} \cdot 2\pi \quad (12)$$

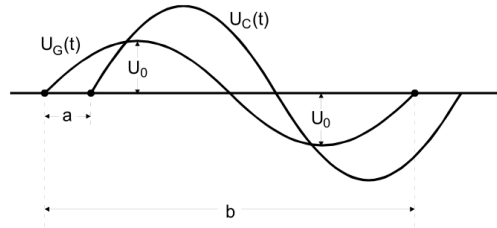


Abbildung 3: Darstellung der Methode zur Berechnung der Phasenverschiebung, wobei hier $b = T$ die Periodendauer ist [1]

lässt sich die Phasenverschiebung berechnen. Außerdem lässt sich aus Gleichung 10 und Gleichung 11 der Zusammenhang

$$\frac{A(\varphi)}{U_0} = \cos(\varphi) \quad (13)$$

zeigen, welcher die Spannungsamplitude in Abhängigkeit der Phasenverschiebung aufzeigt.

Aus der Eigenschaft, nur niedrige Frequenzen passieren zu lassen, kann Abbildung 2 als ein Tiefpass verwendet werden. [1] Die Schaltung aus Abbildung 2 besitzt noch eine weitere Eigenschaft, sie kann als ein sogenannter Integrator verwendet werden. Für $\omega \gg \frac{1}{RC}$ gilt die Beziehung

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt} \quad U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt'. \quad (14)$$

Dadurch wird zu der Generatorspannung $U(t)$ eine Kondensatorspannung $U_C(t)$ erzeugt, die sich nur durch einen Faktor von der Stammfunktion von $U(t)$ unterscheidet. [1]

3 Durchführung

3.1 Bestimmung der Zeitkonstante

Der Schaltkasten aus Abbildung 4 mit dem Widerstand R und der Kapazität C wurde wie in Abbildung 5 angeschlossen.

Schaltet man am Generator eine Rechteckspannung ein, zeigt das Oszilloskop einen Ausschnitt der Auflade- und Entladekurve des RC-Kreises an. Die Frequenz wurde so angepasst, dass der Kondensator sich gänzlich aufladen kann, sich also asymptotisch einem Wert nähert. Damit die Zeitkonstante RC bestimmt werden kann, muss die Spannung U_C in Abhängigkeit von der Zeit t deutlich ablesbar sein. Es wurde ein Bild angefertigt, das einen gesamten Entladungs- oder Aufladungsvorgang zeigt.

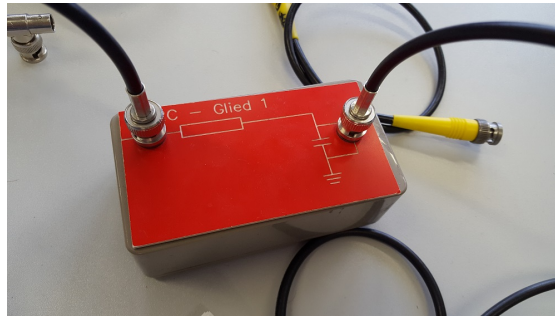


Abbildung 4: Schaltkasten mit dem RC-Glied [1]

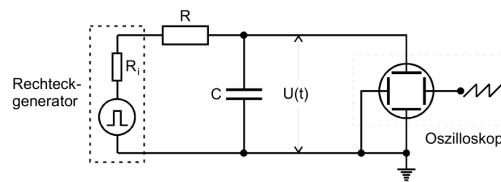


Abbildung 5: Schaltung zur Bestimmung der Zeitkonstante eines RC-Kreises [1]

3.2 Amplitudenmessung der Kondensatorspannung und Messung der Phasenverschiebung zwischen U_C und U_0

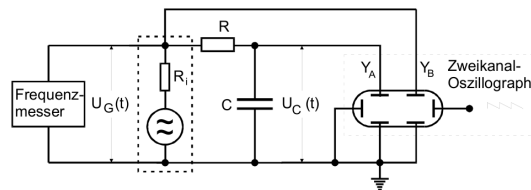


Abbildung 6: Schaltung zur Messung der Amplitude und der Phasenverschiebung [1]

Die Schaltung wurde nach Abbildung 6 aufgebaut. Die Amplitude der Kondensatorspannung und die Phasenverschiebung zwischen U_0 und U_C wurde in Abhängigkeit von der Frequenz f gemessen. Die Frequenz wurde mehrere Male variiert und daraufhin wurde die Spannung U_C am Oszilloskop abgelesen. Sicherheitshalber wird die Generatorspannung U_0 ebenfalls bei jeder Frequenz gemessen. Es war wichtig zu beachten, dass die Frequenzen über mindestens drei Zehnerpotenzen hinweg eingestellt werden. Die Phasenverschiebung zwischen den beiden Spannungen lässt sich ebenfalls am Oszilloskop ablesen, indem die Generators- und RC-Kreis-Spannung gleichzeitig angezeigt werden und die Nulldurchgänge verglichen werden. Nach Gleichung 12 kann dann die Phasenverschiebung berechnet werden.

3.3 RC-Kreis als Integrator

Damit diese Messung gelingen kann muss eine für den Integrator geeignete Frequenz eingestellt werden, diese findet man bei einem $\omega \gg \frac{1}{RC}$. Um den Effekt des Integrators zu sehen, werden nacheinander eine Sinusspannung, Rechteckspannung und eine Dreieckspannung am Generator eingestellt. Auf dem Oszilloskop ergibt der zeitliche Verlauf von U_C eine Stammfunktion von U_0 nach Gleichung 14. Von beiden Oszillogrammen wurde jeweils für jede Spannung ein Bild angefertigt.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Zeitkonstante bei angelegter Rechteckspannung

Im ersten Teil des Versuchs, wie in Unterabschnitt 3.1 beschrieben, kann nur ein Foto der Entladekurve als Messergebnis dienen, dieses ist in Abbildung 7 dargestellt.

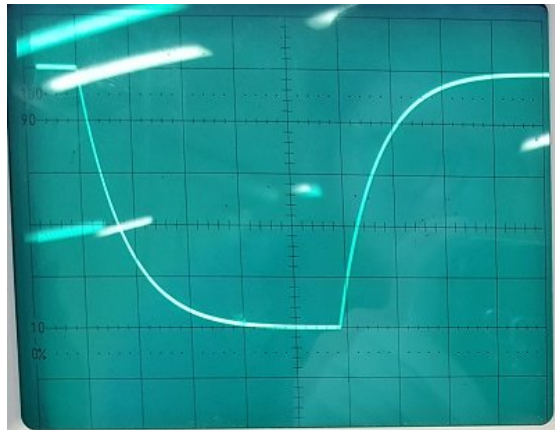


Abbildung 7: Foto der Entladekurve des RC Glieds bei angeschlossener Rechteckspannung mit 100 Hz wobei die x-Achse auf 1 ms und die y-Achse auf 0,2 V geregelt ist

Wenn die Werte aus Tabelle 1 nun als Graph mit y-Achse $\ln\left(\frac{U_C}{U_0}\right)$ dargestellt werden, entsteht Abbildung 8, wobei $U_0 = 1 \text{ V}$ ist.

Diese Darstellung wird theoretisch beschrieben von der Gleichung 8. Die entsprechende Ausgleichsgerade wurde in Python mit der Bibliothek SciPy[2] mit

$$\ln\left(\frac{U_C}{U_0}\right) = at + b \quad (15)$$

berechnet.

Tabelle 1: Abgelesene Werte aus Abbildung 7 mit y-Achse als Kondensatorspannung U_C und x-Achse als Zeit t

U_C / V	t / ms	$\ln\left(\frac{U_C}{U_0}\right)$	U_C / V	t / ms	$\ln\left(\frac{U_C}{U_0}\right)$
1,00	0,00	0,00	0,28	1,00	-1,27
0,90	0,10	-0,11	0,20	1,20	-1,61
0,80	0,20	-0,22	0,16	1,40	-1,83
0,70	0,30	-0,36	0,12	1,60	-2,12
0,60	0,40	-0,51	0,08	1,80	-2,53
0,50	0,50	-0,69	0,06	2,00	-2,81
0,44	0,60	-0,82	0,04	2,30	-3,22
0,40	0,70	-0,92	0,02	2,70	-3,91
0,36	0,80	-1,02			

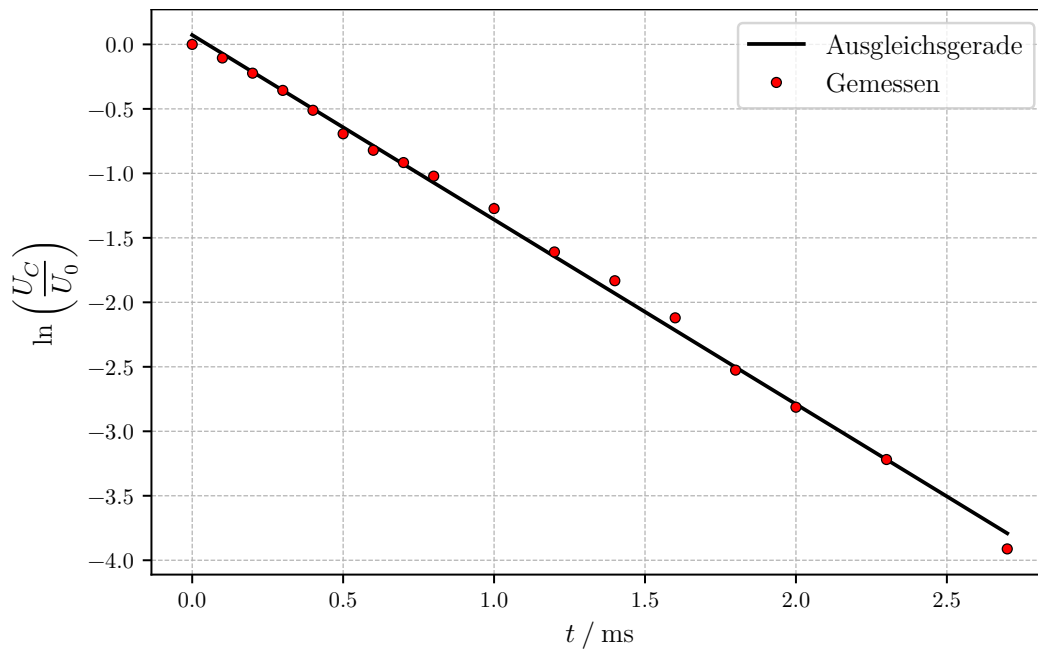


Abbildung 8: Graph der Werte $\ln\left(\frac{U_C}{U_0}\right)$ in Abhängigkeit von t entnommen aus Tabelle 1 und der passenden Ausgleichsgerade

Wobei sich hier eine Steigung von $a = (-1431 \pm 19) \text{ s}^{-1}$ ergibt. Der y-Achsenabschnitt ergibt sich zu $b = 0,07 \pm 0,02$. Nach Gleichung 8 lässt sich die Zeitkonstante als

$$RC = \frac{1}{a} = (0,6988 \pm 0,0092) \text{ ms} \quad (16)$$

bestimmen.

4.2 Bestimmung der Zeitkonstante bei angelegter Sinusspannung

Die Ergebnisse der im Unterabschnitt 3.2 beschriebenen Durchführung sind in Tabelle 2 dargestellt. Hierbei ist zu beachten, dass die Werte a_{gemessen} bei einer invertierten Generatorspannung abgelesen wurden. Also entspricht der zeitliche Abstand a_{gemessen} der Zeit zwischen steigendem Nulldurchgang der Kondensatorspannung und abfallendem Nulldurchgang der Generatorspannung. Somit ergeben sich die für Gleichung 12 gesuchten a durch

$$a = \frac{1}{2f} - a_{\text{gemessen}}. \quad (17)$$

Tabelle 2: Messergebnisse zu Unterabschnitt 3.2 mit Generatorfrequenz f , Kondensatorspannung U_C , zeitlichen Abständen a_{gemessen} und a , Phasenverschiebung φ

f / Hz	U_C / V	$a_{\text{gemessen}} / \text{ms}$	a / ms	φ / rad
20	1,000	25,000	0,000	0,000
50	0,960	9,200	0,800	0,251
100	0,900	4,200	0,800	0,503
200	0,700	1,850	0,650	0,817
300	0,550	1,150	0,517	0,975
400	0,450	0,800	0,450	1,131
500	0,360	0,620	0,380	1,194
600	0,300	0,500	0,333	1,255
800	0,240	0,360	0,265	1,332
1000	0,200	0,280	0,220	1,382
2000	0,100	0,130	0,120	1,508
3000	0,067	0,085	0,082	1,546
4500	0,044	0,056	0,055	1,555
6000	0,034	0,042	0,041	1,546
10 000	0,020	0,025	0,025	1,571

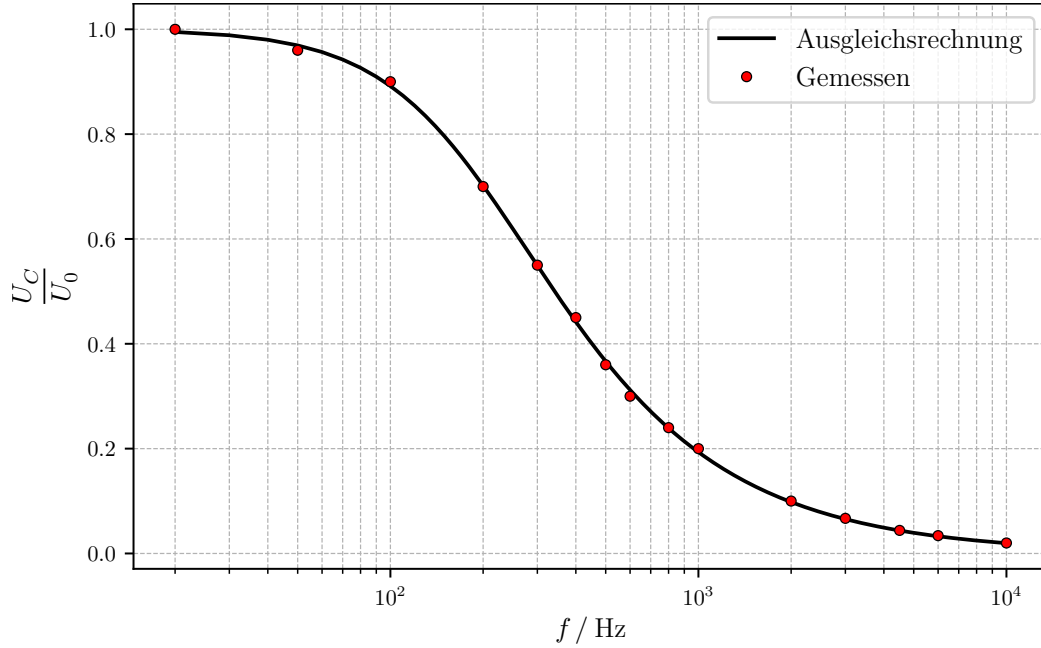


Abbildung 9: Graph des Spannungsverhältnisses U_C/U_0 in Abhängigkeit zur Generatorfrequenz f aus der Tabelle 2 wobei die Generatorspannung konstant auf 1 V bleibt

Durch die Gleichung 10 lässt sich nun die Zeitkonstante RC bestimmen indem eine Ausgleichsrechnung wie in Abbildung 9 mit

$$\frac{U_C}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f)^2 a}} \quad (18)$$

ausgeführt wird.

Diese Ausgleichsrechnung wurde mit der Python Bibliothek SciPy[2] ausgeführt und ergibt den Parameter $a = (6,525 \pm 0,091) \cdot 10^{-7} \text{ s}$. Nach Gleichung 10 ergibt sich eine Zeitkonstante von

$$RC = \sqrt{a} = (0,8078 \pm 0,0056) \text{ ms}. \quad (19)$$

Eine weitere Möglichkeit die Zeitkonstante zu berechnen ist mithilfe der frequenzabhängigen Phase φ zwischen Generator- und Kondensatorspannung. Diese lässt sich über Gleichung 12 berechnen. Die so berechneten φ sind in Tabelle 2 gelistet.

Die mithilfe von SciPy[2] und

$$\varphi = -\arctan(-2\pi f a) \quad (20)$$

nach Gleichung 11 erstellte Ausgleichsrechnung ergibt den Parameter $a = (8,258 \pm 0,261) \cdot 10^{-4} \text{ s}$ und ist in Abbildung 10 zu sehen. Nach Gleichung 11 ergibt sich eine Zeitkonstante

$$RC = a = (0,8258 \pm 0,0261) \text{ ms}. \quad (21)$$

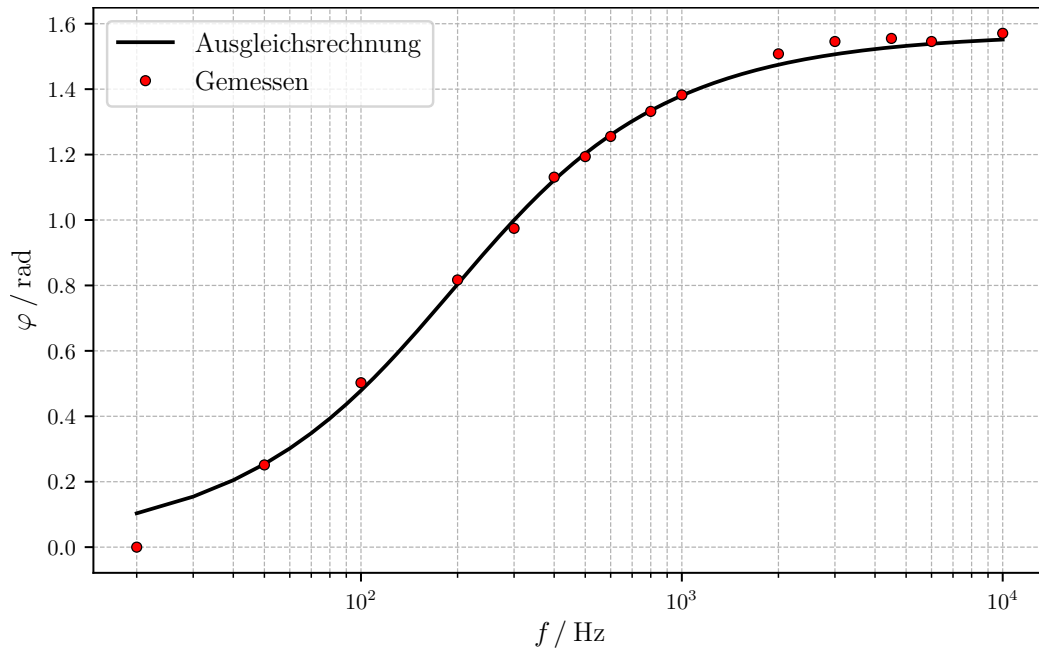


Abbildung 10: Die Phasenverschiebung φ zur Generatorfrequenz f aus Tabelle 2 abgebildet

Die Kondensatorspannung U_C wird nun in einem Polarkoordinatensystem in Abhängigkeit der Phase φ dargestellt. Die gemessenen Werte sind aus Tabelle 2 abzulesen und die erwartete Kurve wird nach Gleichung 13 berechnet.

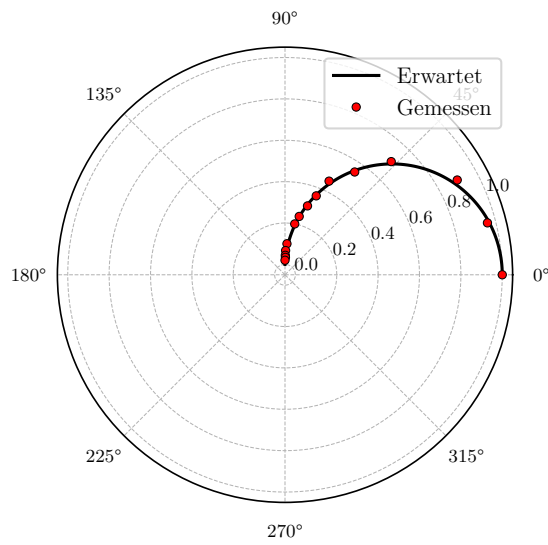


Abbildung 11: Kondensatorspannung U_C (radial) in Abhängigkeit von der Phase φ (lateral) entnommen aus Tabelle 2

4.3 Betrachtung des RC-Glieds als Integrator

Im letzten Teil des Versuchs wie in Unterabschnitt 3.3 beschrieben sind die Ergebnisse nur in Form von Fotos darzustellen. Diese sind in Abbildung 12 zu sehen. Hierbei wurde jeweils die Generatorfrequenz von 5 kHz gewählt und sowohl die Generatorspannung als auch die Kondensatorspannung abgebildet.

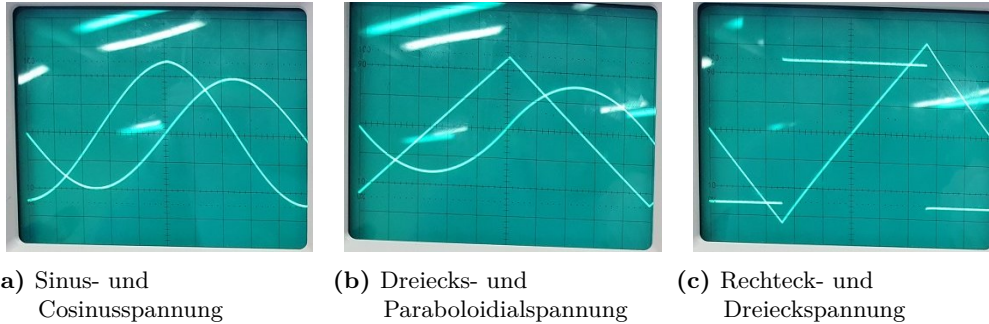


Abbildung 12: Fotos der Integratorschaltung für eine Generatorfrequenz von 5 kHz und verschiedene Generatorspannungstypen

Hier ist zu sehen, dass die angelegte Spannung integriert wird. Eine Sinusspannung wird zu einer Cosinusspannung, eine Dreieckspannung wird zu einer parabolischen Spannung und eine Rechteckspannung wird zu einer Dreieckspannung.

5 Diskussion

Aus den drei verschiedenen Bestimmungsmethoden für die Zeitkonstante ergeben sich folgende Werte:

$$RC_1 = (0,6988 \pm 0,0092) \text{ ms} \quad (22)$$

$$RC_2 = (0,8078 \pm 0,0056) \text{ ms} \quad (23)$$

$$RC_3 = (0,8258 \pm 0,0261) \text{ ms} \quad (24)$$

Die angegebenen Werte für den Widerstand $R = (15,058 \pm 0,600) \text{ k}\Omega$ und den Kondensator $C = 93,2 \text{ nF}$ ergeben allerdings eine Zeitkonstante

$$RC_{\text{Theorie}} = (1,4034 \pm 0,0560) \text{ ms}. \quad (25)$$

Somit ergeben sich folgende prozentuale Abweichungen vom Theoriewert:

$$\Delta RC_1 = 50,2 \% \quad (26)$$

$$\Delta RC_2 = 42,4 \% \quad (27)$$

$$\Delta RC_3 = 41,2 \% \quad (28)$$

Diese Abweichungen müssen im Folgenden erklärt werden.

An den Ergebnissen ist zu sehen, dass die verwendeten Messmethoden auf ähnliche Ergebnisse kommen. Allerdings sind die vorhandenen Abweichungen auf Ungenauigkeiten der Messmethoden zurückzuführen. So lässt sich beispielsweise am Oszilloskop die Spannung zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht sehr genau ablesen.

Nun ist allerdings auch zu sehen, dass die bestimmten Zeitkonstanten um etwa 50% von dem erwarteten Wert abweichen. Dies lässt sich vermutlich auf einen systematischen Fehler zurückführen, da die berechneten Ergebnisse untereinander nur eine kleine Abweichung aufzeigen. Eine genaue Ursache lässt sich jedoch nicht finden.

Alle mithilfe von Gleichungen der Theorie ausgeführten Ausgleichskurven (Abbildung 8, Abbildung 9 und Abbildung 10) passen gut zu den Messerwerten. Außerdem sind die berechneten Fehler und der berechnete Verschiebungsparameter b der Ausgleichsgerade in Abbildung 8 ausreichend gering. Auch Abbildung 11 zeigt nur geringe Abweichungen der Messwerte zu der Theoriekurve. Somit scheinen alle Messwerte der Theorie zu folgen.

Ob bei diesem Versuch ein ausreichend großer systematischer Fehler aufgetreten ist oder vielleicht sogar die angegebenen Werte nicht den realen Werten der Schaltung entsprechen, kann hier nicht weiter untersucht werden.

Auch wurde gezeigt, dass eine Schaltung bestehend aus einem Kondensator und einem Widerstand als Integrator dienen kann. Bei angeschlossener Sinusspannung wurde auch gezeigt, dass die Spannung am Kondensator in Abhängigkeit des Phasenunterschieds zwischen Generator- und Kondensatorspannung den erwarteten Zusammenhang aus Gleichung 13 abbildet.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 353 Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 2019.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.

6 Anhang

V353 RC Kreis

$R = 15,058 \pm 0,6 \text{ k}\Omega$ $C = 93,2 \text{ nF}$

$R_i = 50 \Omega$ 10% der Gesamtleitung

a) Generator Frequenz [Hz] nach t ms

500 100 1,7 Foto für Ausgleichsrechnung

b) f [Hz] U_a [V] U_c [V] c) ~~ϕ [rad]~~ ~~a~~ ~~b~~

~~a~~ [ms] ~~(Invertiert)~~ (Generatorspannung)

~~$(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{f}) - a = a_{\text{real}}$~~

über

100	1	0,900	4,000 4,200
50	1	0,960	9,000 9,200
200	1	0,700	3,800 1,850
300	1	0,550	3,200 1,150
400	1	0,450	0,880 0,880 0,80
500	1	0,360	0,620
600	1	0,300	0,500
800	1	0,240	0,360
1000	1	0,200	0,280
2000	1	0,100	0,130
3000	1	0,067	0,085
6000	1	0,034	0,042
10000	1	0,020	0,025
20	1	1,000	25,000
4500	1	0,044	0,056

J. Neuhäus

Abbildung 13: Kopie der Originalmessdaten