

**V353**

## **RC -Kreis**

David Venker  
david.venker@udo.edu

Nico Guth  
nico.guth@udo.edu

Durchführung: 26.11.2019

Abgabe: 03.12.2019

# Inhaltsverzeichnis

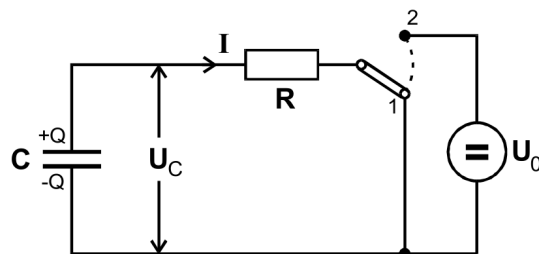
<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>6</b>
3.1	Bestimmung der Zeitkonstante . . . . .	6
3.2	Amplitudenmessung der Kondensatorspannung und Messung der Phasenverschiebung zwischen $U_C$ und $U_0$ . . . . .	7
3.3	RC-Kreis als Integrator . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>8</b>
4.1	Bestimmung der Zeitkonstante bei angelegter Rechteckspannung . . . . .	8
4.2	Bestimmung der Zeitkonstante bei angelegter Sinusspannung . . . . .	9
4.3	Betrachtung des RC-Glieds als Integrator . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>14</b>
	<b>Literatur</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>14</b>

# 1 Zielsetzung

Das Ziel dieses Experiments ist die Untersuchung der Eigenschaften eines RC-Kreises, genauer gesagt werden folgende Eigenschaften untersucht:

- a) Die Bestimmung der schaltungsspezifischen Zeitkonstante  $RC$ .
- b) Die Messung und der Vergleich der Spannungsamplituden von Kondensatorspannung und Generatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz.
- c) Untersuchung der Phasenverschiebung zwischen den Spannungen in Abhängigkeit von der Frequenz.
- d) Darstellung der Eigenschaft den RC-Kreis als Integrator verwenden zu können.

# 2 Theorie



**Abbildung 1:** Schaltbild eines RC-Kreises, der in Stellung 1 entladen und in Stellung 2 geladen wird. [1]

Wenn ein System durch eine Änderung aus seinem Anfangszustand entfernt wird und daraufhin nicht-oszillatorisch in diesen zurückkehrt, kann man Relaxationseffekte beobachten. In Abbildung 1 sind zwei dieser Relaxationsphänomene zu beobachten, das Auf- und Entladen eines Kondensators über einen Widerstand. Befindet sich der Schalter in Abbildung 1 in Stellung eins, so entlädt sich der Kondensator mit der Kapazität  $C$ . Auf seinen beiden Platten liegt die Ladung Gesamtladung  $Q$ . Dadurch liegt zwischen den beiden Kondensatorplatten eine Spannung von

$$U_C = \frac{Q}{C}. \quad (1)$$

Durch das ohmsche Gesetz ist bekannt, dass durch diese Spannung  $U_C$  und den Widerstand  $R$  ein Strom

$$I = \frac{U_C}{R} \quad (2)$$

erzeugt wird. Der zeitliche Verlauf der Ladung  $Q$  auf dem Kondensator  $C$  kann durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden, dadurch ergibt sich

$$Q(t) = Q(0) \exp\left(\frac{-t}{RC}\right). \quad (3)$$

Wobei  $RC$  eine Zeitkonstante ist, die im nächsten Abschnitt näher erklärt wird. [1] Äquivalent dazu lässt sich der Aufladevorgang eines Kondensators  $C$  durch die Spannung  $U_0$  über den Widerstand  $R$  beschreiben. Hierbei gelten folgende Randbedingungen für  $Q$

$$Q(0) = 0 \qquad Q(\infty) = C \cdot U_0. \quad (4)$$

Damit lässt sich der Aufladevorgang durch

$$Q(t) = C \cdot U_0 (1 - \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)) \quad (5)$$

beschreiben. [1] Dabei ist  $RC$  wieder die Zeitkonstante aus Gleichung 3, mit dieser Konstante kann beschrieben werden, wie schnell sich ein System zu seinem Endzustand begibt.  $RC$  ist festgeschrieben. Nachdem eine Zeit von

$$\Delta T = RC \quad (6)$$

verstrichen ist, ändert sich die Kondensatorladung  $Q$  um den Faktor

$$\frac{Q(t = RC)}{Q(0)} = \frac{1}{e} \approx 0.386. \quad (7)$$

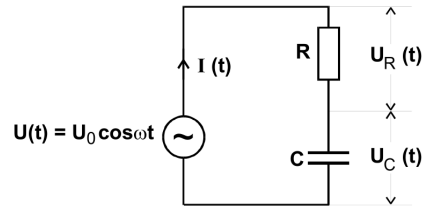
Um den entsprechenden Wert für  $RC$  zu berechnen wird Gleichung 7 in eine andere Form gebracht. In der neuen Form

$$\ln\left(\frac{Q(t)}{Q(0)}\right) = t \cdot \frac{-1}{RC} \quad (8)$$

kann man  $RC$  als negative reziproke Steigung einer halblogarithmischen Funktion sehen.[1] Eine periodische Auslenkung aus der Gleichgewichtslage erzeugt ebenfalls Relaxationsphänomene und kann ebenfalls mit einem RC-Kreis beschrieben werden.

Wird Abbildung 2 durch die Wechselspannung  $U(t)$  mit der Kreisfrequenz  $\omega$  angetrieben, also

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t), \quad (9)$$



**Abbildung 2:** Mögliches Schaltbild zur Entstehung eines Relaxationsphänomens durch periodische Anregung. [1]

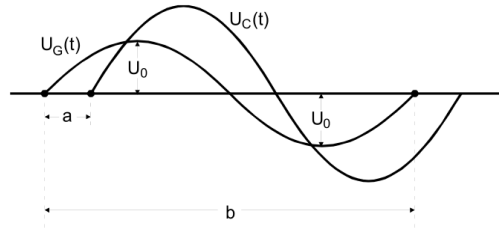
ergeben sich für verschiedene  $\omega$  andere Effekte. Für  $\omega \ll \frac{1}{RC}$  werden die Kondensatorspannung  $U_C$  und die Generatorspannung  $U(t)$  Gleichung 9 etwa gleich sein, da der Kondensator genug Zeit hat sich vollständig aufzuladen, bevor die Spannung wieder abfällt und ihr Vorzeichen ändert. Bei entsprechend höheren Frequenzen kann der Aufladevorgang nicht mehr vollständig stattfinden und die Amplitude  $A$  der Kondensatorspannung wird kleiner werden. Sie ist gegeben durch

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (10)$$

Durch die verzögerte Aufladung entsteht eine Phasenverschiebung  $\varphi$ , die sich bei ansteigender Frequenz asymptotisch dem Wert  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  annähert. Wie an

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (11)$$

auch zu erkennen ist. Alternativ lässt sich die Phasenverschiebung auch über die zeitlichen Verläufe von  $U_C$  und  $U_0$  berechnen, dafür müssen die Schwingungsdauer  $T$  und der zeitliche Abstand der Nulldurchgänge  $a$  bekannt sein. Die Schwingungsdauer  $T$  ist die Inverse der eingestellten Frequenz  $f$ .



**Abbildung 3:** Darstellung der Methode zur Berechnung der Phasenverschiebung [1]

Abbildung 3 stellt das Prinzip genauer da. Über den Zusammenhang

$$\varphi = a \cdot f \cdot 2\pi \quad (12)$$

lässt sich die Phasenverschiebung ebenfalls berechnen. Außerdem lässt sich aus Gleichung 10 und Gleichung 11 der Zusammenhang

$$\frac{A(\varphi)}{U_0} = \cos(\varphi) \quad (13)$$

zeigen, welcher die Spannungsamplitude in Abhängigkeit der Phasenverschiebung aufzeigt.

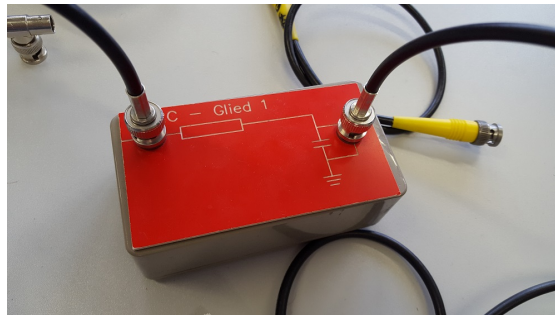
Aus der Eigenschaft, nur niedrige Frequenzen kaum unverändert passieren zu lassen, kann Abbildung 2 als ein Tiefpass verwendet werden. [1] Die Schaltung aus Abbildung 2 besitzt noch eine weitere Eigenschaft, sie kann als ein sogenannter Integrator verwendet werden. Für  $\omega \gg \frac{1}{RC}$  gilt die Beziehung

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt} \quad U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt'. \quad (14)$$

Dadurch wird zu der Generatorspannung  $U(t)$  eine Kondensatorspannung  $U_C(t)$  erzeugt, die sich nur durch einen Faktor zur von der Stammfunktion von  $U(t)$  unterscheidet. [1]

### 3 Durchführung

#### 3.1 Bestimmung der Zeitkonstante



**Abbildung 4:** Schaltkasten mit dem RC-Glied [1]

Der Schaltkasten aus Abbildung 4 mit dem Widerstand  $R$  und der Kapazität  $C$  war wie in Abbildung 5 anzuschließen.

Schaltet man nur die Rechteckspannung ein, zeigt das Oszilloskop einen Ausschnitt der Auflade- und Entladekurve des RC-Kreises an. Die Frequenz ist so anzupassen, dass der Kondensator sich gänzlich aufladen kann, sich also asymptotisch einem Wert nähert. Damit die Zeitkonstante  $RC$  bestimmt werden kann, muss die Spannung  $U_C$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  deutlich ablesbar sein. Es ist ein Bild anzufertigen, das einen gesamten Entladungs- oder Aufladungsvorgang zeigt.

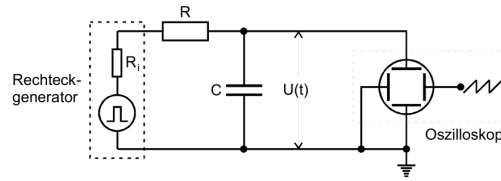


Abbildung 5: Schaltung zur Bestimmung der Zeitkonstante eines RC-Kreises [1]

### 3.2 Amplitudenmessung der Kondensatorspannung und Messung der Phasenverschiebung zwischen $U_C$ und $U_0$

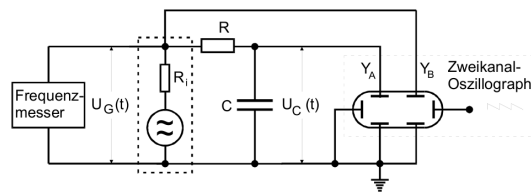


Abbildung 6: Schaltung zur Messung der Amplitude und der Phasenverschiebung [1]

Die Schaltung ist nach Abbildung 6 aufzubauen. Die Amplitude der Kondensatorspannung und die Phasenverschiebung zwischen  $U_0$  und  $U_C$  ist in Abhängigkeit von der Frequenz  $f$  zu messen. Die Frequenz ist mehrere Male zu variieren und daraufhin ist die Spannung  $U_C$  am Oszilloskop abzulesen. Sicherheitshalber wird die Generatorspannung  $U_0$  ebenfalls bei jeder Frequenz zu messen. Es ist wichtig zu beachten, dass die Frequenzen über mindestens drei Zehnerpotenzen hinweg eingestellt werden. Die Phasenverschiebung zwischen den beiden Spannungen lässt sich ebenfalls am Oszilloskop ablesen, indem die Spannungen gleichzeitig angezeigt werden und die Nulldurchgänge verglichen werden. Nach Gleichung 12 kann dann die Phasenverschiebung berechnet werden.

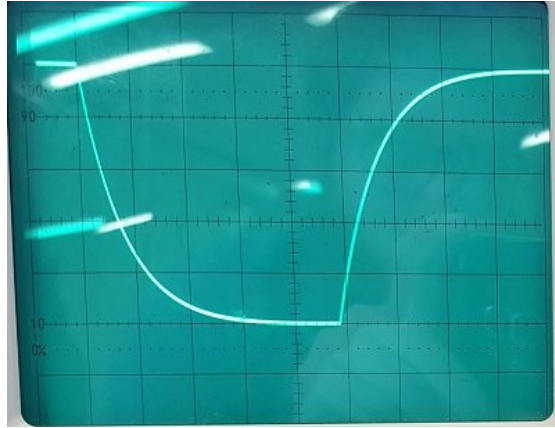
### 3.3 RC-Kreis als Integrator

Damit diese Messung gelingen kann muss eine für den Integrator geeignete Frequenz eingestellt werden, diese findet man bei einem  $\omega \gg \frac{1}{RC}$ . Um den Effekt des Integrators zu sehen, werden nacheinander eine Sinusspannung, Rechteckspannung und eine Dreieckspannung ein. Auf dem Oszilloskop ergibt der zeitliche Verlauf von  $U_C$  eine Stammfunktion von  $U_0$  nach Gleichung 14. Von beiden Oszillogrammen ist jeweils für jede Spannung ein Bild anzufertigen.

## 4 Auswertung

### 4.1 Bestimmung der Zeitkonstante bei angelegter Rechteckspannung

Im ersten Teil des Versuchs, wie in Unterabschnitt 3.1 beschrieben, kann nur ein Foto der Entladekurve als Messergebnis dienen, dieses ist in Abbildung 7 dargestellt.



**Abbildung 7:** Foto der Entladekurve des RC Glieds bei angeschlossener Rechteckspannung mit 100 Hz wobei die x-Achse auf 1 ms und die y-Achse auf 0,2 V geregelt ist

**Tabelle 1:** Abgelesene Werte aus Abbildung 7 mit y-Achse als Kondensatorspannung  $U_C$  und x-Achse als Zeit  $t$

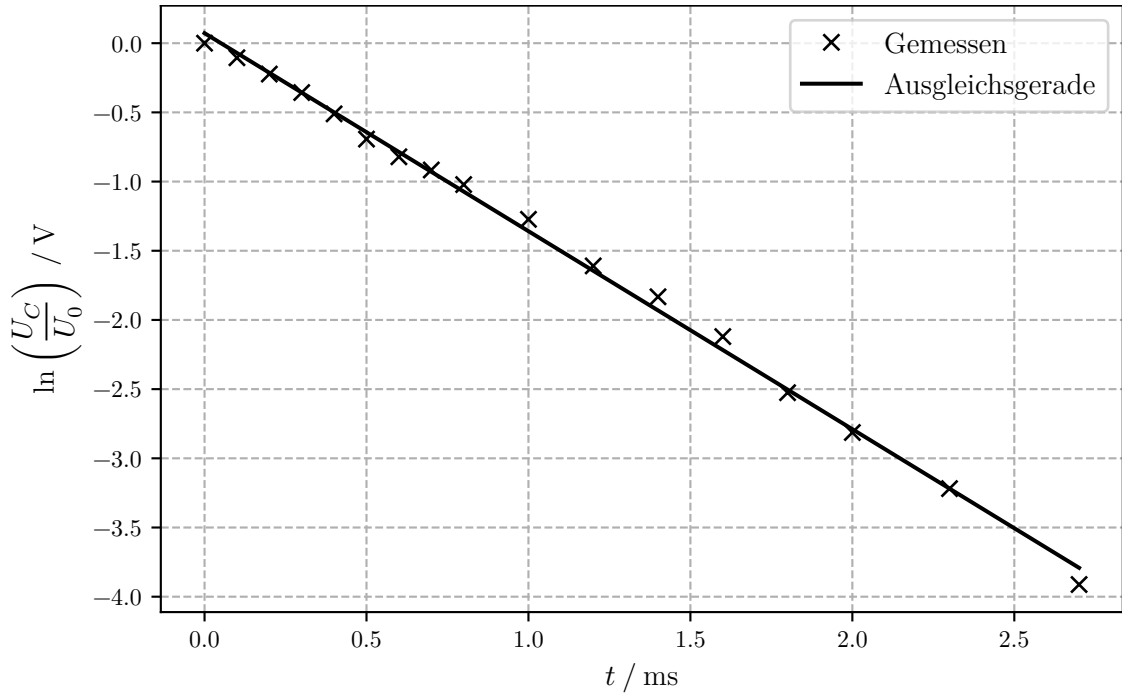
$U_C / \text{V}$	$t / \text{ms}$	$U_C / \text{V}$	$t / \text{ms}$
1.00	0.00	0.28	1.00
0.90	0.10	0.20	1.20
0.80	0.20	0.16	1.40
0.70	0.30	0.12	1.60
0.60	0.40	0.08	1.80
0.50	0.50	0.06	2.00
0.44	0.60	0.04	2.30
0.40	0.70	0.02	2.70
0.36	0.80		

Wenn die Werte aus Tabelle 1 nun als Graph mit y-Achse  $\ln\left(\frac{U_C}{U_0}\right)$  dargestellt werden, entsteht Abbildung 8, wobei  $U_0 = 1 \text{ V}$  ist.

Diese Darstellung entspricht der Gleichung

$$\ln\left(\frac{U_C}{U_0}\right) = -\frac{t}{RC} \quad (15)$$





**Abbildung 8:** Graph der Werte aus Tabelle 1 und der passenden Ausgleichsgerade

wie aus Gleichung 3 zu sehen ist. Die entsprechende Ausgleichsgerade wurde in Python mit der Bibliothek SciPy[2] mit

$$f(x) = ax + b \quad (16)$$

berechnet. Wobei sich hier eine Steigung von  $a = (-1431 \pm 19) \text{ s}^{-1}$  ergibt. Damit lässt sich die Zeitkonstante als

$$RC = (0,6988 \pm 0,0092) \text{ ms} \quad (17)$$

bestimmen.

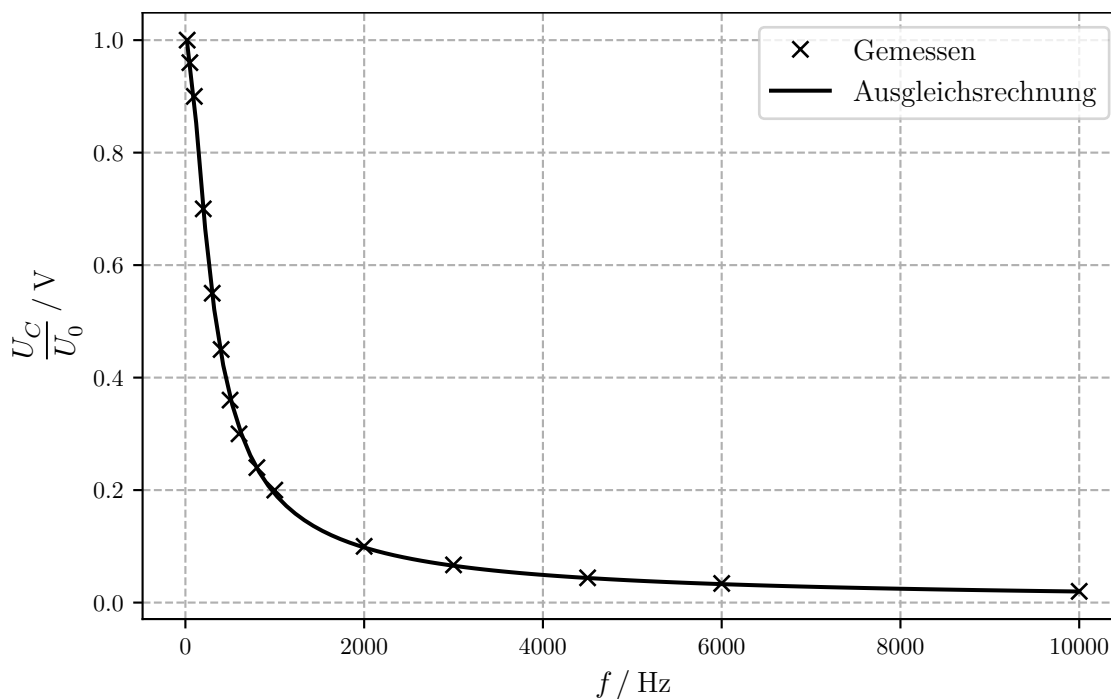
## 4.2 Bestimmung der Zeitkonstante bei angelegter Sinusspannung

Die Ergebnisse der im Unterabschnitt 3.2 beschriebenen Durchführung sind in Tabelle 2 dargestellt. Hierbei ist zu beachten, dass die Werte  $a_{\text{gemessen}}$  bei einer invertierten Generatorspannung abgelesen wurden. Also entspricht der zeitliche Abstand  $a_{\text{gemessen}}$  der Zeit zwischen steigendem Nulldurchgang der Kondensatorspannung und abfallendem Nulldurchgang der Generatorspannung. Somit ergeben sich die für Gleichung 12 gesuchten  $a$  durch

$$a = \frac{1}{2f} - a_{\text{gemessen}}. \quad (18)$$

**Tabelle 2:** Messergebnisse zu Unterabschnitt 3.2 mit Generatorfrequenz  $f$ , Kondensatorspannung  $U_C$ , zeitlichen Abständen  $a_{\text{gemessen}}$  und  $a$

$f / \text{Hz}$	$U_C / \text{V}$	$a_{\text{gemessen}} / \text{ms}$	$a / \text{ms}$
20	1.000	25.000	0.000
50	0.960	9.200	0.800
100	0.900	4.200	0.800
200	0.700	1.850	0.650
300	0.550	1.150	0.517
400	0.450	0.800	0.450
500	0.360	0.620	0.380
600	0.300	0.500	0.333
800	0.240	0.360	0.265
1000	0.200	0.280	0.220
2000	0.100	0.130	0.120
3000	0.067	0.085	0.082
4500	0.044	0.056	0.055
6000	0.034	0.042	0.041
10000	0.020	0.025	0.025



**Abbildung 9:** Graph des Spannungsverhältnisses  $U_C/U_0$  in Abhängigkeit zur Generatorfrequenz  $f$  aus der Tabelle 2 wobei die Generatorspannung konstant auf 1 V bleibt

Durch die Gleichung

$$\frac{U_C}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f)^2 R^2 C^2}} \quad (19)$$

lässt sich nun die Zeitkonstante  $RC$  bestimmen indem eine Ausgleichsrechnung wie in Abbildung 9 mit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi x)^2 a^2}} \quad (20)$$

ausgeführt wird. Diese Ausgleichsrechnung wurde mit der Python Bibliothek SciPy[2] ausgeführt und ergibt die Zeitkonstante

$$RC = (0,8078 \pm 0,0056) \text{ ms.} \quad (21)$$

Eine weitere Möglichkeit die Zeitkonstante zu berechnen ist mithilfe der frequenzabhängigen Phase  $\varphi$  zwischen Generator- und Kondensatorspannung. Diese lässt sich über Gleichung 12 berechnen. Die so berechneten  $\varphi$  sind in Tabelle 3 gelistet.

**Tabelle 3:** Generatorfrequenz  $f$ , Kondensatorspannung  $U_C$  und die mit  $a$  berechnete Phasenverschiebung  $\varphi$

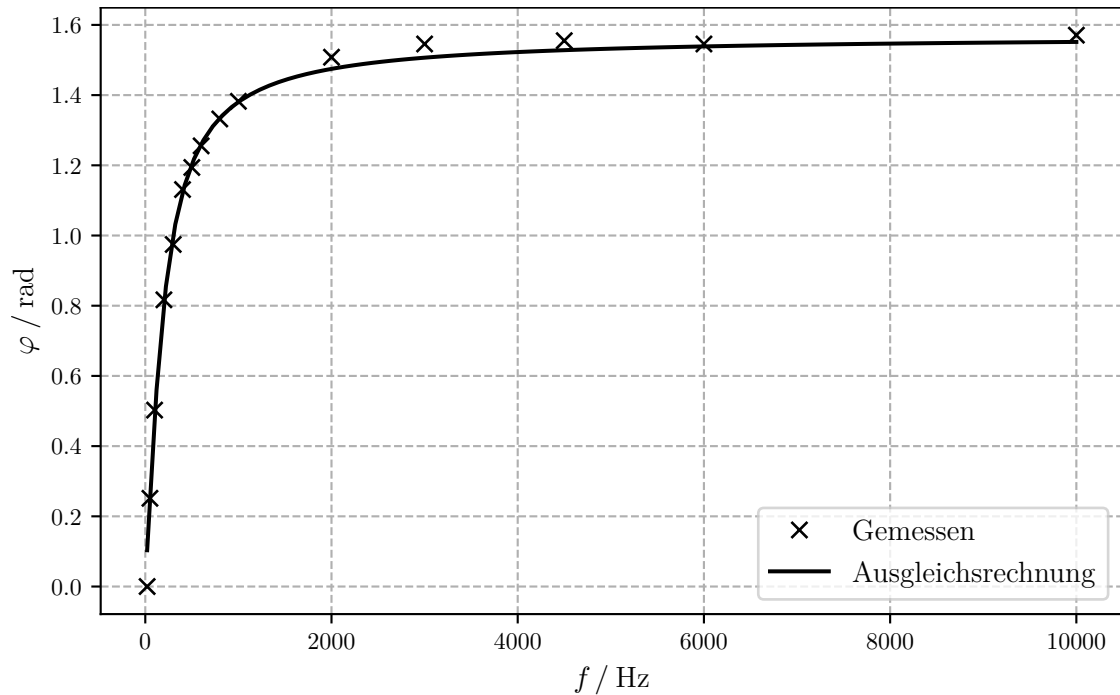
$f / \text{Hz}$	$U_C / \text{V}$	$\varphi / \text{rad}$
20	1.000	0.000
50	0.960	0.251
100	0.900	0.503
200	0.700	0.817
300	0.550	0.975
400	0.450	1.131
500	0.360	1.194
600	0.300	1.255
800	0.240	1.332
1000	0.200	1.382
2000	0.100	1.508
3000	0.067	1.546
4500	0.044	1.555
6000	0.034	1.546
10000	0.020	1.571

Die mithilfe von SciPy[2] und

$$f(x) = -\arctan(-2\pi f a) \quad (22)$$

erstellte Ausgleichsrechnung ergibt nach Gleichung 11 eine Zeitkonstante

$$RC = (0,8258 \pm 0,0261) \text{ ms.} \quad (23)$$



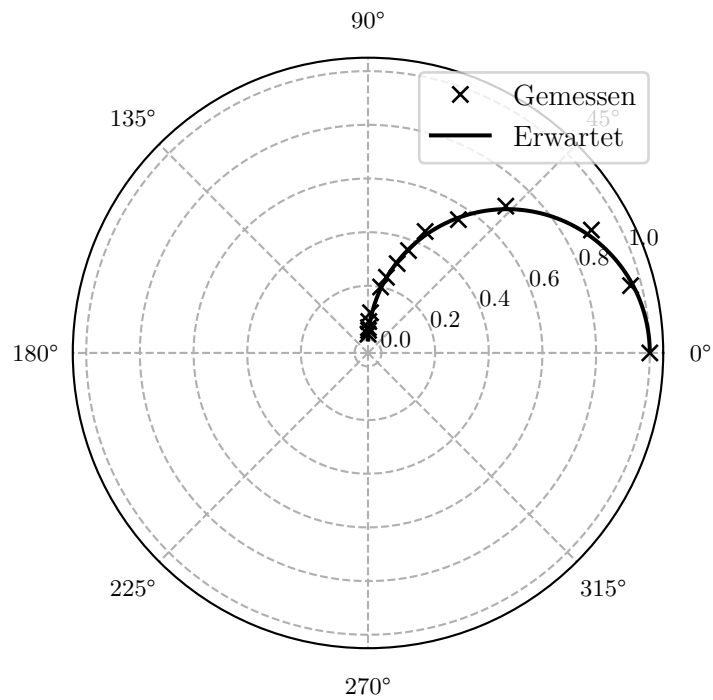
**Abbildung 10:** Die Phasenverschiebung  $\varphi$  zur Generatorfrequenz  $f$  aus Tabelle 3 abgebildet

Die Kondensatorspannung  $U_C$  wird nun in einem Polarkoordinatensystem in Abhängigkeit der Phase  $\varphi$  dargestellt. Die gemessenen Werte sind aus Tabelle 3 abzulesen und die erwartete Kurve wird nach Gleichung 13 berechnet.

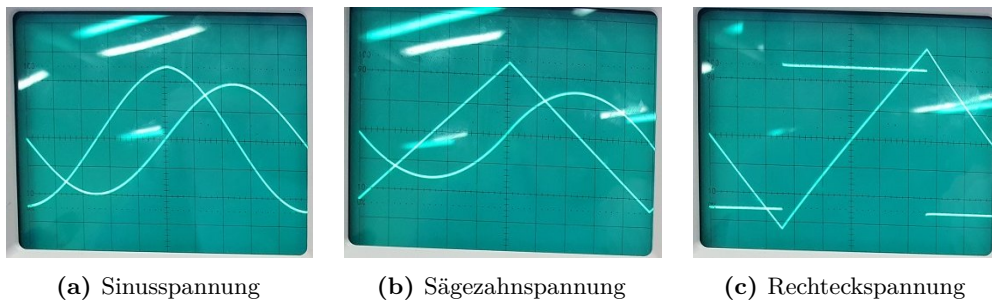
### 4.3 Betrachtung des RC-Glieds als Integrator

Im letzten Teil des Versuchs wie in Unterabschnitt 3.3 beschrieben sind die Ergebnisse nur in Form von Fotos darzustellen. Diese sind in Abbildung 12 zu sehen. Hierbei wurde jeweils die Generatorfrequenz von 5 kHz gewählt und sowohl die Generatorspannung als auch die Kondensatorspannung abgebildet.

Hier ist zu sehen, dass die angelegte Spannung integriert wird. Eine Sinusspannung wird zu einer Sinusspannung um  $\pi/2$  verschoben, eine Sägezahnspannung wird zu einer parabolischen Spannung und eine Rechteckspannung wird zu einer Sägezahnspannung.



**Abbildung 11:** Kondensatorspannung  $U_C$  in Abhängigkeit von der Phase  $\varphi$  entnommen aus Tabelle 3



**Abbildung 12:** Fotos der Integratorschaltung für eine Generatorfrequenz von 5 kHz und verschiedene Generatorspannungstypen

## 5 Diskussion

Aus den drei verschiedenen Bestimmungsmethoden für die Zeitkonstante ergeben sich folgende Werte:

$$RC = (0,6988 \pm 0,0092) \text{ ms} \quad (24)$$

$$RC = (0,8078 \pm 0,0056) \text{ ms} \quad (25)$$

$$RC = (0,8258 \pm 0,0261) \text{ ms} \quad (26)$$

Die angegebenen Werte für den Widerstand  $R = (15,058 \pm 0,600) \text{ k}\Omega$  und den Kondensator  $C = 93,2 \text{ nF}$  ergeben allerdings eine Zeitkonstante

$$RC = (1,4034 \pm 0,0560) \text{ ms}. \quad (27)$$

Die Abweichungen der einzelnen Ergebnisse müssen im Folgenden erklärt werden.

An den Ergebnissen ist zu sehen, dass die verwendeten Messmethoden auf ähnliche Ergebnisse kommen. Allerdings sind die vorhandenen Abweichungen auf Ungenauigkeiten der Messmethoden zurückzuführen. So lässt sich beispielsweise am Oszilloskop die Spannung zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht sehr genau ablesen.

Nun ist allerdings auch zu sehen, dass die bestimmten Zeitkonstanten um etwa 50% von dem erwarteten Wert abweichen. Dies lässt sich vermutlich auf einen systematischen Fehler zurückführen, da die berechneten Ergebnisse nur eine kleine Abweichung aufzeigen. Eine genaue Ursache lässt sich jedoch nicht finden.

Auch wurde gezeigt, dass eine Schaltung bestehend aus einem Kondensator und einem Widerstand als Integrator dienen kann. Bei angeschlossener Sinusspannung wurde auch gezeigt, dass die Spannung am Kondensator in Abhängigkeit des Phasenunterschieds zwischen Generator- und Kondensatorspannung den erwarteten Zusammenhang aus Gleichung 13 abbildet.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 353 Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 2019.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.

## 6 Anhang

# V353 RC Kreis

$$R = 15,058 \pm 0,6 \text{ k}\Omega \quad C = 93,2 \text{ nF}$$

$$R_i = 50 \Omega$$

10% der Gesamtleitung

a) Generator Frequenz [Hz] nach t ms

500 100

1,7

Foto für Ausgleichsrechnung

b) f [Hz]	peak to peak		c)
	$U_0$ [V]	$U_c$ [V]	$\phi$ [rad]
100	1	0,900	<del>4,000</del> 4,200
50	1	0,960	<del>9,000</del> 9,200
200	1	0,700	<del>1,800</del> 1,850
300	1	0,550	<del>1,20</del> 1,150
400	1	0,450	<del>0,88</del> 0,80
500	1	0,360	0,620
600	1	0,300	0,500
800	1	0,240	0,360
1000	1	0,200	0,280
2000	1	0,100	0,130
3000	1	0,067	0,085
6000	1	0,034	0,042
10000	1	0,020	0,025
20	1	1,000	25,000
4500	1	0,044	0,056

J. Neuhäus

Abbildung 13: Kopie der Originalmessdaten