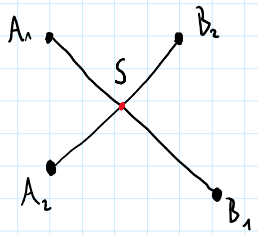
V408 Schnittpunkte 2er Geraden

Donnerstag, 16. Juli 2020 12:07

Rechnung für Python Code der Auswertung von V408 Geometrische Optik

Ziel Schnittpunkt von 2 Geraden



Gerade 1: $\vec{g}_1 = \vec{A}_1 + t_1(\vec{B}_1 - \vec{A}_1)$, $t_1 \in [0,1]$

Gerade 2: $\vec{g}_2 = \vec{A}_2 + t_2(\vec{B}_2 - \vec{A}_2)$, $t_2 \in [0,1]$

Annahme: es gibt einen Schnittpunkt

Schnittpunkt $\vec{S} = \vec{g}_1 = \vec{g}_2$

$$\Leftrightarrow \vec{A}_1 + t_1(\vec{B}_1 - \vec{A}_1) = \vec{A}_2 + t_2(\vec{B}_2 - \vec{A}_2)$$

$$\Leftrightarrow t_1(\vec{B}_1 - \vec{A}_1) - t_2(\vec{B}_2 - \vec{A}_2) = \vec{A}_2 - \vec{A}_1$$

$$\begin{pmatrix} (\vec{B}_1 - \vec{A}_1) & -(\vec{B}_2 - \vec{A}_2) \end{pmatrix} \vec{t} = \vec{A}_2 - \vec{A}_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{1,x} - a_{1,x} & -(b_{2,x} - a_{2,x}) \\ b_{1,y} - a_{1,y} & -(b_{2,y} - a_{2,y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{2,x} - a_{1,x} \\ a_{2,y} - a_{1,y} \end{pmatrix}$$

Inverse 2×2 - Matrix: $M^{-1} = \frac{1}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}$

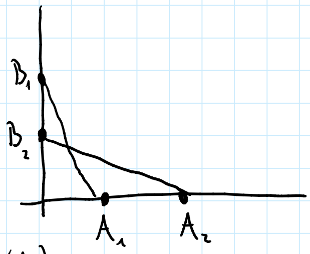
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(b_{1,x} - a_{1,x})(-(b_{2,y} - a_{2,y})) - (-(b_{2,x} - a_{2,x}))(b_{1,y} - a_{1,y})} \begin{pmatrix} -(b_{2,y} - a_{2,y}) & b_{2,x} - a_{2,x} \\ -(b_{1,y} - a_{1,y}) & b_{1,x} - a_{1,x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2,x} - a_{1,x} \\ a_{2,y} - a_{1,y} \end{pmatrix}$$

$$t_1 = \frac{1}{(b_{2,x} - a_{2,x})(b_{1,y} - a_{1,y}) - (b_{1,x} - a_{1,x})(b_{2,y} - a_{2,y})} \left(-(b_{2,y} - a_{2,y})(a_{2,x} - a_{1,x}) + (b_{2,x} - a_{2,x})(a_{2,y} - a_{1,y}) \right)$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \vec{A}_1 + t_1(\vec{B}_1 - \vec{A}_1)$$

$$= \vec{A}_1 + t_1 \begin{pmatrix} b_{1,x} - a_{1,x} \\ b_{1,y} - a_{1,y} \end{pmatrix}$$

Aufgabenvorgabe:



$$A_i = \begin{pmatrix} g_i \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{i,y} = 0 \quad , \quad a_{i,x} = g_i$$

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \end{pmatrix} \Rightarrow b_{i,x} = 0 \quad , \quad b_{i,y} = b_i$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{1}{(-g_2)(b_1) - (-g_1)(b_2)} \left(-b_2(g_2 - g_1) + 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{b_2(g_1 - g_2)}{g_1 b_2 - g_2 b_1}$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} g_1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -g_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$