Blatt 7

Freitag, 11. Juni 2021 13:38

Aufgabe 14:

a) Beschreibung der PCA

Ziel: Dimensionsreduktion

gegeben: $N \times d$ Datenmatrix X

jede Reihe stellt einen Punkt dar

Vorgehensweise:

1) Zentriere Daten um Mittelwert
2) Berechne Kovarianzmatrix
3) Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren der Kovarianzmatrix
4) Bilde die $d \times k$ Matrix W

   mit den Eigenvektoren der k größten Eigenwerte

   als Spalten
5) Wende W auf jede Zeile vom zentrierten X an

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

1)

$= (1 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$

b)

$X_1 : [1, 3, 1, 2, 3, 2]$

$X_2 : [1, 0, 3, 0, 1, 1]$

$d = 2, \; N = 6$

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vdots$

1)

$$\vec{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i$$

$$\vec{\mu} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zentrierte Daten: $\vec{x}'_i = \vec{x}_i - \vec{\mu}$

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

2) Kovarianzmatrix:

$$\mathrm{Cov}(X) = E\left[(X - E[X])(X - E[X])^T\right]$$

$$\mathrm{cov}(X) = E[\vec{x}' \cdot \vec{x}'^T]$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \vec{x}'_i \cdot \vec{x}'^T_i$$

$$= \frac{1}{6} \Bigg[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} (-1 \quad 0) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \quad -1) + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} (-1 \quad 2)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} (0 \quad -1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \quad 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \quad 0) \Bigg]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

3)

Eigenwerte von $\mathrm{Cov}(X)$

$$\det\left(\mathrm{cov}(X) - \mathbb{1}\lambda\right) = 0$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)(1-\lambda) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{4}$$

$$= \lambda^2 - \frac{5}{3}\lambda + \frac{5}{12} = 0$$

pq: $\lambda_\pm = -\left(-\frac{5}{6}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{5}{12}}$

$$\lambda_\pm = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{5}{18}} = \frac{1}{6}\left(5 \pm \sqrt{10}\right)$$

$$\max(\lambda) = \frac{1}{6}\left(5 \pm \sqrt{10}\right)$$

Eigenvektoren der größten $k=1$ Eigenwerte

$$\lambda = \frac{1}{6}\left(5 + \sqrt{10}\right)$$

$$\left(\mathrm{cov}(X) - \lambda\mathbb{1}\right)\vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{2}\\ & \end{pmatrix}\vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} \vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6}(-1-\sqrt{10}) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}(1-\sqrt{10}) \end{pmatrix} \vec{V} = 0$$

$$\text{I} \quad -\frac{1}{6}(1+\sqrt{10})\, V_1 - \frac{1}{2} V_2 = 0$$

$$\text{II} \quad -\frac{1}{2} V_1 - \frac{1}{6}(1-\sqrt{10})\, V_2 = 0$$

$$\text{II} \Leftrightarrow \quad V_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)(1+\sqrt{10})\, V_1$$

$$V_2 = -\frac{1}{3}(1+\sqrt{10})\, V_1$$

wähle $V_1 = 3$

$$\Rightarrow V_2 = -1-\sqrt{10}$$

$\vec{V}$ normieren

$$\hat{\vec{V}} = \frac{1}{|\vec{V}|}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3^2+(1+\sqrt{10})^2}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1-\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$W = \frac{1}{\sqrt{3^2+(1+\sqrt{10})^2}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1-\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

5) Transformiere X

$$X' = X \cdot W$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 \\ -1-\sqrt{10} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3^2+(1+\sqrt{10})^2}}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-1-\sqrt{10} \\ 9 \\ 3-3-3\sqrt{10} \\ 6 \\ 9-1-\sqrt{10} \\ 6-1-\sqrt{10} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3^2+(1+\sqrt{10})^2}}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-\sqrt{10} \\ 9 \\ -3\sqrt{10} \\ 6 \\ 8-\sqrt{10} \\ 5-\sqrt{10} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3^2+(1+\sqrt{10})^2}}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.227 \\ 1.754 \\ -1.849 \\ 1.169 \\ 0.943 \\ 0.358 \end{pmatrix}$$