David Venker
Jan Jäkel
Nico Guth

Aufgabe 33 *Maximum-Likelihood*

Eine Zufallsvariable x soll einer Gleichverteilung

$$f(x) = \begin{cases} 1/b & 0 \le x \le b \\ 0 & x < 0 \quad \text{oder} \quad x > b \end{cases}$$

folgen.

(a) Bestimmen Sie einen Schätzer für den Parameter b mit der Maximum Likelihood Methode aus einer Stichprobe $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Likelihood Funktion:

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad f(x_i) = \frac{1}{b} \mathbb{1}_{[0,b]}(x_i)$$

$$\text{wobei } \mathbb{1}_{[0,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,b] \\ 0 & x \notin [0,b] \end{cases}$$

$$L(\vec{x}) = \frac{1}{b^n} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,b]}(x_i)}_{\mathbb{1}_{[0,b]}(\vec{x}) :=}$$

$$L(b|\vec{x}) = \frac{1}{b^n} \mathbb{1}_{[0,b]}(\vec{x}) \qquad \text{wobei } \mathbb{1}_{[0,b]}(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{wenn alle } x_i \in [0,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- maximiere $L(b|\vec{x})$:

1) $b \overset{!}{\geq} \max\{x_i\}$ sonst $L(b|\vec{x}) = 0$, wobei $\{x_i\}$ die Menge aller Messwerte ist

2) $\frac{1}{b^n}$ ist streng monoton fallend

Also wird $L(b|\vec{x})$ maximal für:

$$\hat{b} = \max\{x_i\}$$

(b) Ist diese Schätzung erwartungstreu? Wenn nein, wie kann das in diesem Fall korrigiert werden?

Erwartungstreu: $E(\hat{b}) \overset{!}{=} b$

$$\Leftrightarrow E(\hat{b}) = E(\max\{x_i\}) = \int_{-\infty}^{\infty} y \, \mathrm{PDF}(\max\{x_i\} = y) \, dy$$

$\Leftrightarrow E(\hat{b}) = E(\max\{x_i\}) = \int_{-\infty}^{\infty} y \, PDF(\max\{x_i\}=y) \, dy$

Dafür gesucht ist $P(\max\{x_i\}=y)$. (als W'keitsdichte)

Also die W'keit, dass der maximale Wert einer Stichprobe aus n Werten y ist.
Wobei die x_i gleichverteilt im Bereich $[a,b]$ sind.

Herleitung über die CDF einer Gleichverteilung zwischen $[a,b]$:

W'keit, dass ein Messwert $x_i \leq x$:

$$P(X_i \leq x) = CDF_{uniform}(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b < x \end{cases}$$

W'keit, dass alle $x_i \leq y$ sind, ist gleichbedeutend mit Wkeit für $\max\{x_i\} \leq y$.
also CDF der gesuchten PDF:

$$P(\max\{x_i\} \leq y) = \begin{cases} 0 & y < a \\ (P(X_i \leq y))^n & a \leq y \leq b \\ 1 & b < y \end{cases}$$

Wir erhalten die $PDF(y) = \frac{d}{dy} P(\max\{x_i\} \leq y)$

$$PDF(\max\{x_i\} = y) = \begin{cases} 0 & y < a \ , y > b \\ n \frac{y^{n-1}}{(b-a)^n} & a \leq y \leq b \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(\hat{b}) = \int_{-\infty}^{\infty} y \, PDF(\max\{x_i\}=y) \, dy$$

$$= \int_0^b y \, n \frac{y^{n-1}}{b^n} \, dy = \left[\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{b^n} \cdot y^{n+1}\right]_0^b$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{b^n} b^{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1} b$$

$\Rightarrow$ Der Schätzer $\hat{b} = \max\{x_i\}$ ist nicht erwartungstreu.

Korrektur finden:

Korrektur finden:

$$E(\hat{b}) = \frac{n}{n+1} b$$

$$\Longleftrightarrow \frac{n+1}{n} E(\hat{b}) = b$$

$$\Longleftrightarrow E\left(\frac{n+1}{n} \hat{b}\right) = b$$

$\Rightarrow$ korrigierter Schätzer: $\hat{b}' = \frac{n+1}{n} \max\{x_i\}$