# Stichprobenvarianz

Donnerstag, 28. Oktober 2021 16:41

**Aufgabe 29** *Stichprobenvarianz* **5 P.**

Für alle Berechnungen sind $x_1, \dots, x_n$ die Ausprägungen der quadratisch integrierbaren, paarweise unkorrelierten, reellwertigen Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ mit der Varianz $\sigma^2$ und dem Mittelwert $\mu$.

**(a)** Testen Sie, ob die Formel (arithmetisches Mittel)

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{1}$$

eine erwartungstreue Schätzfunktion für den Mittelwert $\mu$ der Grundgesamtheit ist. Falls die Schätzfunktion nicht erwartungstreu ist, suchen Sie nach einer geeigneten Korrektur.

**(b)** Der Standardfehler des arithmetischen Mittels (1) ist definiert als die Wurzel aus der Varianz von $\bar{X}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}\left((\bar{X}-\mu)^2\right) = \mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{2}$$

gilt.
*Tipp:* Schauen Sie sich Rechenregeln für das Rechnen mit Varianzen an.

**(c)** Testen Sie, ob die Formel

$$S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \tag{3}$$

eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Varianz $\sigma^2$ der Grundgesamtheit ist. Falls die Schätzfunktion nicht erwartungstreu ist, suchen Sie nach einer geeigneten Korrektur.

**(d)** Meist ist die Varianz $\sigma^2$ der Grundgesamtheit unbekannt und es wird der Schätzer (1) für $\mu$ genutzt und (3) wird zu:

$$S_1'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2. \tag{4}$$

Testen Sie, ob (4) eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Varianz $\sigma^2$ der Grundgesamtheit ist. Falls die Schätzfunktion nicht erwartungstreu ist, suchen Sie nach einer geeigneten Korrektur.
*Tipp:* Erweitern Sie den Summanden mit $-\mu+\mu$ und nutzen Sie die gegebene Relation (2).


Nico Guth
Jan Philipp Jäkel
David Venker


a) $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E(\hat{\mu}) = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$
$$= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu = \mu \quad \text{erwartungstreu}$$

b) zu zeigen: $E((\bar{X}-\mu)^2) = Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

$$Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

mit $Var(X_i) = \sigma^2$

c) $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

$$E(\hat{\sigma}^2) = E(S_0^2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left((X_i-\mu)^2\right) = \frac{n}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

d) $S_1'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

$$E(\hat{\sigma}^2) = E(S_1'^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left((X_i-\bar{X}+\mu-\mu)^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(\left[(X_i-\mu)+(\mu-\bar{X})\right]^2\right)$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = E(S_1'^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left((X_i - \bar{X} + \mu - \mu)^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(\left[(X_i - \mu) + (\mu - \bar{X})\right]^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left((X_i - \mu)^2 + 2(X_i - \mu)(\mu - \bar{X}) + (\mu - \bar{X})^2\right)$$

$$= \sigma^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(2(X_i - \mu)(\mu - \bar{X}) + (\mu - \bar{X})^2\right) \qquad \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left((X_i - \mu)^2\right) = \sigma^2\right]$$

$$= \sigma^2 + \frac{1}{n} E\left(-\sum_{i=1}^{n} 2(X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) + \sum_{i=1}^{n} (\bar{X} - \mu)^2\right) \qquad \left[E\left((\bar{X} - \mu)^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}\right]$$

$$= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} 2(X_i - \mu)(\bar{X} - \mu)\right), \qquad \left[\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2}{\cancel{n}} E\left((\bar{X} - \mu) \cdot \cancel{n}(\bar{X} - \mu)\right) \qquad \left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - n\mu = n \cdot (\bar{X} - \mu)\right]$$

$$= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - 2 \cdot E\left((\bar{X} - \mu)^2\right)$$

$$= \frac{n\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} - 2 \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$

$$= \frac{n\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2 (n-1)}{n}$$

Der Faktor $\frac{(n-1)}{n}$ ist eine Verzerrung!

Also: $\frac{n}{(n-1)} \hat{S}_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = S_1^2$

$$\frac{n}{n-1} E(S_1'^2) = \sigma^2 = E\left(\frac{n}{n-1} S_1'^2\right) \checkmark$$