Gamma-Astronomie

Samstag, 6. November 2021 13:07

Aufgabe 32 *γ-Astronomie* **5 P.**

Bei einer typischen Messung in der γ-Astronomie wird das Teleskop auf eine Position (*on*-Position) gerichtet, an der eine γ-Strahlungs-Quelle vermutet wird. In der anschließenden Messung werden N_{on} Ereignisse über einen Zeitraum t_{on} aufgezeichnet. In den gemessenen Ereignissen N_{on} befinden sich sowohl Untergrund- als auch Signalphotonen. Um zu ermitteln, wie viel Untergrund vorhanden ist, wird ebenfalls an einer anderen Position ohne Quelle (*off*-Position) gemessen. Bei dieser Messung werden N_{off} Photonen-Ereignisse in einer Zeit t_{off} gemessen.

Um zu entscheiden, ob sich an der *on*-Position eine Quelle befindet, soll mit einem Likelihood-Quotienten-Test getestet werden, ob ein signifikanter Überschuss an Photonen über der Untergrund-erwartung für die *on*-Position gemessen wurde (hier noch nicht, erst in Kapitel *Testen*).

Ziel dieser Aufgabe ist es, vorbereitend die richtige Likelihood-Funktion für den späteren Likelihood-Quotienten-Test aufzustellen.

Nutzen Sie für die Bearbeitung der Aufgabe die Ausdrücke:

- $\alpha = \frac{t_{\text{on}}}{t_{\text{off}}}$: Quotient der unterschiedlichen Messzeiten
- $b = \langle N_{\text{off}} \rangle$: Unbekannter Erwartungswert für die Zahl der Untergrundphotonen während der Messzeit t_{off}
- s: Unbekannter Erwartungswert für die Zahl der Signal Photonen während der Messzeit t_{on} aus der γ-Strahlungs-Quelle. Nicht zu verwechseln mit der gesamten Erwartung für die *on*-Position.

(a) Wie groß ist der Erwartungswert $\langle N_{\text{on}} \rangle$, ausgedrückt durch s, b und α?

(b) Welchen Wahrscheinlichkeitsverteilungen folgen N_{on} und N_{off}?
Tipp: Die gezählten Ereignisse kommen unabhängig voneinander im Detektor an.

(c) Wie sieht die Likelihoodfunktion $\mathcal{L}(b, s)$ für die Parameter b und s aus?

(d) Welche Werte $\hat{b}$ und $\hat{s}$ maximieren $\mathcal{L}$?
Tipp: Nutzen Sie die negative Likelihood-Funktion, dann wird die Rechnung einfacher.

(e) Berechnen Sie die Kovarianzmatrix von $\hat{b}$ und $\hat{s}$. Wie hängt die Kovarianzmatrix mit der Likelihood zusammen? Ist diese Art der Fehlerberechnung exakt?

(a) $\alpha = \frac{t_{on}}{t_{off}}$, $b = \langle N_{off} \rangle$

b: Erwartungswert der off Ereignisse (Untergrund)

s: Erwartungswert der Signal Ereignisse

$$\frac{\langle N_{on} \rangle - s}{t_{on}} = \frac{b}{t_{off}}$$

$$\Leftrightarrow \langle N_{on} \rangle = b \cdot \alpha + s$$

b) Welche W. Verteilungen haben N_{on} , N_{off} ?

N_{on} ist Poissonverteilt: $P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda)$

$\lambda = np$, n Versuche

$= \langle N_{on} \rangle$ p Treffwahrscheinlichkeit

N_{off} ist Poissonverteilt: $P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$

mit $\lambda = \langle N_{off} \rangle$

$$P_{on}(N_{on}) = \frac{(b\alpha+s)^{N_{on}}}{N_{on}!} \exp(-(b\alpha+s))$$

$$P_{off}(N_{off}) = \frac{b^{N_{off}}}{N_{off}!} \exp(-b)$$

c) Likelihood-Funktion $\mathcal{L}(b, s)$

$$\mathcal{L}(b,s) = P_{on}(N_{on})\ P_{off}(N_{off})$$
$$= \frac{(b\alpha+s)^{N_{on}}}{N_{on}!}\cdot \exp(-(b\alpha+s))\cdot \frac{b^{N_{off}}}{N_{off}!}\exp(-b)$$
$$= \frac{(b\alpha+s)^{N_{on}}}{N_{on}!}\ \frac{b^{N_{off}}}{N_{off}!}\ \exp\Big(-b\cdot(\alpha+1)-s\Big)$$

d) $$-\ln(\mathcal{L}(b,s)) = -\ln\left(\frac{(b\alpha+s)^{N_{on}}}{N_{on}!}\ \frac{b^{N_{off}}}{N_{off}!}\right) + b(\alpha+1) + s = F(b,s)$$
$$= -\ln\left((b\alpha+s)^{N_{on}}\right) + \ln(N_{on}!) - \ln(b^{N_{off}}) + \ln(N_{off}!) + b(\alpha+1)+s$$
$$= -N_{on}\cdot\ln(b\alpha+s) + \ln(N_{on}!) - N_{off}\ln(b) + \ln(N_{off}!) + b(\alpha+1)+s$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = -N_{on}\cdot\frac{1}{b\alpha+s}\cdot\alpha - N_{off}\cdot\frac{1}{b} + \alpha+1$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -N_{on}\ \frac{1}{b\alpha+s} + 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial b} \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{-N_{on}\,\alpha}{b\alpha+s} - \frac{N_{off}}{b} + \alpha + 1 = 0 \qquad \mathrm{I}$$

$$\frac{-N_{on}}{b\alpha+s} + 1 = 0 \quad \mathrm{II} \Leftrightarrow N_{on} = b\alpha+s$$

$$\mathrm{II} \text{ in } \mathrm{I}: \quad \cancel{-\alpha} - \frac{N_{off}}{b} \cancel{+\alpha} + 1 = 0$$
$$-\frac{N_{off}}{b} + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{N_{off} = \hat{b} = b}$$

$$\text{in } \mathrm{II}: \quad N_{on} = N_{off}\,\alpha + s$$
$$\Leftrightarrow \boxed{s = N_{on} - N_{off}\,\alpha \mathrel{\hat{=}} \hat{s}}$$

e) $$\frac{\partial F}{\partial b} = -N_{on}\cdot\frac{1}{b\alpha+s}\cdot\alpha - N_{off}\cdot\frac{1}{b} + \alpha+1$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -N_{on}\ \frac{1}{b\alpha+s} + 1$$

$\mathrm{cov}(b,s)$?

$$\frac{\partial^2 F}{\partial b^2} = N_{on}\,\alpha^2\cdot(b\alpha+s)^{-2} + N_{off}\,(b)^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = N_{on}\,(b\alpha+s)^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = N_{on}\,(bd+s)^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial b \partial s} = N_{on}\, d \cdot (bd+s)^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial b} = N_{on}\,(bd+s)^{-2} \cdot d$$

Ableitungsmatrix: $$G = \begin{pmatrix} N_{on}\, d^2 \cdot (bd+s)^{-2} + N_{off}\,(b)^{-2} & N_{on}\, d \cdot (bd+s)^{-2} \\ N_{on}\, d \cdot (bd+s)^{-2} & N_{on}\,(bd+s)^{-2} \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = Cov(b, s)$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} N_{on}\,(bd+s)^{-2} & -N_{on}\, d \cdot (bd+s)^{-2} \\ -N_{on}\, d \cdot (bd+s)^{-2} & N_{on}\, d^2 \cdot (bd+s)^{-2} + N_{off}\,(b)^{-2} \end{pmatrix} \cdot \left(\cancel{N_{on}^2\, d^2\, (bd+s)^{-4}} + N_{off} N_{on}\,(b)^{-2} (bd+s)^{-2} - \cancel{N_{on}^2\, d^2\, (bd+s)^{-4}} \right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} N_{on}\,\cancel{(bd+s)^{-2}} & -N_{on}\, d \cdot \cancel{(bd+s)^{-2}} \\ -N_{on}\, d \cdot \cancel{(bd+s)^{-2}} & N_{on}\, d^2 \cdot \cancel{(bd+s)^{-2}} + N_{off}\,(b)^{-2} \end{pmatrix} \cdot \frac{b^2\,(bd+s)^2}{N_{off} N_{on}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{b^2}{N_{off}} & -\frac{d \cdot b^2}{N_{off}} \\ -\frac{d b^2}{N_{off}} & \frac{b^2 d^2}{N_{off}} + \frac{(bd+s)^2}{N_{on}} \end{pmatrix}$$

Wie hängt es zusammen?

$$Cov(b,s) = \frac{1}{\frac{\partial^2 F}{\partial b^2}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial s}\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial b}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial s} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial b} & \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \end{pmatrix}$$