Aufgabe 34 *Likelihoodkurve*

Aus einer Poisson-Verteilung werden 3 Stichproben, nämlich die Zahlen 13, 8 und 9 entnommen.

(a) Berechnen Sie die negative Log-Likelihood-Funktion als Funktion des einzigen Parameters λ und stellen Sie sie graphisch dar.

Poisson-Verteilung: $P(k|\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$ $\quad \lambda = n \cdot p$

$n \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl der Versuche
$p \mathrel{\hat{=}}$ Erfolgswahrscheinlichkeit (Erfolgsw'keit)
$k \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl der Erfolge

gegeben: $N = 3$ unabhängige Messwerte k_i
$(k_1 = 13,\ k_2 = 8,\ k_3 = 9)$

Likelihood-Funktion:

$$L(\lambda|\vec{k}) = \prod_{i=1}^{N} P(k_i|\lambda)$$

$$F(\lambda|\vec{k}) := -\ln(L(\lambda|\vec{k}))$$

hier:

$$\Rightarrow F(\lambda|\vec{k}) = -\ln(P(k_1|\lambda)) - \ln(P(k_2|\lambda)) - \ln(P(k_3|\lambda))$$

$$\text{mit } \ln(P(k_i|\lambda)) = \ln\left(\frac{\lambda^{k_i}}{k_i!}\exp(-\lambda)\right) = k_i \ln(\lambda) - \ln(k_i!) - \lambda$$

$$\Leftrightarrow F(\lambda|\vec{k}) = -\sum_{i=1}^{N}\left(k_i \ln(\lambda) - \ln(k_i!) - \lambda\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{F(\lambda|\vec{k}) = +N\lambda - \ln(\lambda)\sum_{i=1}^{N} k_i + \sum_{i=1}^{N}\ln(k_i!)}$$

mit $k_1 = 13$, $k_2 = 8$, $k_3 = 9$:

$$F(\lambda|\vec{k}) = 3\lambda - \ln(\lambda)\cdot 30 + 45{,}9586$$

(b) Bei welchem Wert von λ liegt das Minimum $-\ln \mathcal{L}_{\max}$?

Minimum bestimmen mit $\frac{d}{d\lambda} F(\lambda|\vec{k}) \stackrel{!}{=} 0$

Minimum bestimmen mit $\frac{d}{d\lambda} F(\lambda|\vec{k}) \overset{!}{=} 0$

$$\frac{d}{d\lambda} F(\lambda|\vec{k}) = N - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N} k_i = 3 - \frac{30}{\lambda} \overset{!}{=} 0$$

$\Leftrightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i$ ist der Schätzer für λ

$\Leftrightarrow \hat{\lambda} = 10$

(c) Für welche Werte von λ nimmt $-\ln\mathcal{L}$ die Werte

$$-\ln\mathcal{L}_{\max} + \frac{1}{2} \quad ,$$
$$-\ln\mathcal{L}_{\max} + 2 \quad \text{und}$$
$$-\ln\mathcal{L}_{\max} + \frac{9}{2}$$

an und was sagen diese Werte aus?

$F(\lambda|\vec{k}) \overset{!}{=} F(\hat{\lambda}|\vec{k}) + c \quad$ wobei $c \in \{\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}\}$

$$F(\hat{\lambda}|\vec{k}) = 3\cdot 10 - \ln(10)\cdot 30 + 45{,}9586$$
$$\approx 6{,}8810$$

$\Rightarrow 3\lambda - \ln(\lambda)\cdot 30 + 45{,}9586 \overset{!}{=} F(\hat{\lambda}|\vec{k}) + c$

nicht analytisch lösbar

(d) Vergleichen Sie diese Werte mit der Näherung über eine Taylor-Entwicklung 2. Ordnung, indem Sie die Näherung sowohl zusammen mit der Likelihood graphisch darstellen als auch die Werte aus **(c)** bestimmen. Wofür könnte die Näherung nützlich sein?

$$F(\lambda|\vec{k}) = +N\lambda - \ln(\lambda)\sum_{i=1}^{N} k_i + \sum_{i=1}^{N} \ln(k_i!)$$

$$F(\lambda|\vec{k}) = +N\lambda - \ln(\lambda)\sum_{i=1}^{N} k_i + \sum_{i=1}^{N} \ln(k_i!)$$

Taylor-Entwicklung von $F(\lambda|\vec{k})$ um $\hat{\lambda}$ bis zur 2. Ordnung:

$$F(\lambda|\vec{k}) \approx F(\hat{\lambda}) + F'(\hat{\lambda})(\lambda-\hat{\lambda}) + \frac{1}{2}F''(\hat{\lambda})(\lambda-\hat{\lambda})^2$$

$$F(\lambda|\vec{k}) \approx F(\hat{\lambda}) + \left(N - \frac{1}{\hat{\lambda}}\sum_{i=1}^{N} k_i\right)(\lambda-\hat{\lambda}) + \frac{1}{2}\left(+\frac{1}{\hat{\lambda}^2}\sum_{i=1}^{N} k_i\right)(\lambda-\hat{\lambda})^2$$

Damit die analytische Lösung von c):

$$F(\lambda) \overset{!}{=} F(\hat{\lambda}) + c$$

$$\Leftrightarrow \left(N - \frac{1}{\hat{\lambda}}\sum_{i=1}^{N} k_i\right)(\lambda-\hat{\lambda}) + \frac{1}{2}\left(+\frac{1}{\hat{\lambda}^2}\sum_{i=1}^{N} k_i\right)(\lambda-\hat{\lambda})^2 - c = 0$$

definiere $\alpha := \sum_{i=1}^{N} k_i$

$$\Leftrightarrow \left(N - \frac{\alpha}{\hat{\lambda}}\right)(\lambda-\hat{\lambda}) + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\hat{\lambda}^2}(\lambda-\hat{\lambda})^2 - c = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\hat{\lambda}^2}\lambda^2 + \lambda\left(N - \frac{\alpha}{\hat{\lambda}} - \frac{\alpha}{\hat{\lambda}^2}\hat{\lambda}\right) - \hat{\lambda}\left(N - \frac{\alpha}{\hat{\lambda}}\right) + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\hat{\lambda}^2}\hat{\lambda}^2 - c = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{2\hat{\lambda}^2}{\alpha}\lambda\left(N - 2\frac{\alpha}{\hat{\lambda}}\right) - 2\frac{\hat{\lambda}^2}{\alpha}\hat{\lambda}\left(N - \frac{\alpha}{\hat{\lambda}}\right) + 2\frac{\hat{\lambda}^2}{\alpha}\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\hat{\lambda}^2}\hat{\lambda}^2 - 2\frac{\hat{\lambda}^2}{\alpha}c = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda\left(2\frac{\hat{\lambda}^2}{\alpha}N - 4\hat{\lambda}\right) - \frac{2}{\alpha}\hat{\lambda}^3\left(N - \frac{\alpha}{\hat{\lambda}}\right) + \hat{\lambda}^2 - 2\frac{\hat{\lambda}^2}{\alpha}c = 0$$

pq-Formel

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\left(\frac{\hat{\lambda}^2}{\alpha}N - 2\hat{\lambda}\right) \pm \left[\left(\frac{\hat{\lambda}^2}{\alpha}N - 2\hat{\lambda}\right)^2 + \frac{2}{\alpha}\hat{\lambda}^3\left(N - \frac{\alpha}{\hat{\lambda}}\right) - \hat{\lambda}^2 + 2\frac{\hat{\lambda}^2}{\alpha}c\right]^{\frac{1}{2}}$$