# blatt18_guth_venker_jaekel

December 5, 2021

[1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

[2]:
```
# matplotlib Einstellungen
%config InlineBackend.figure_formats = ['svg','png']
import matplotlib as mpl
mpl.rcParams['font.size'] = 14
mpl.rcParams['figure.figsize'] = (7,5)
mpl.rcParams['xtick.minor.visible'] = True
mpl.rcParams['ytick.minor.visible'] = True
```

[3]:
```
# initialize random number generator
rng = np.random.default_rng(seed=42)
```

## 1 Aufgabe 39 Kolmogorow-Smirnow-Test

Zu Untersuchen: Ähnlichkeit von Poisson- und Gauß-Verteilung

Nullhypothese:
Die beiden Datensätze stammen aus der gleichen Verteilung

Datensätze aus Poisson- und Gauß-Verteilung

Ab welchem $\lambda = \mu = \sigma^2$ können die beiden Verteilungen nicht mehr unterschieden werden?

### 1.1 a) Wie sind $\mu$ und $\sigma$ der Gauß-Verteilung zu wählen um der Poisson-Verteilung mit $\lambda$ ähnlich zu sein?

Wähle $\mu = \sigma^2 = \lambda$

Laut Wikipedia gilt die Ähnlichkeit ab einem $\lambda \approx 30$.
Allerdings ist die Poisson-Verteilung für diskrete Werte und die Gauß-Verteilung für kontinuierliche Werte.

### 1.2 b) Kolmogorow-Smirnow-Test Implementierung

Teste ob zwei gebinnte Datensätze $X, Y$ aus der gleichen Verteilung stammen.
Nullhypothese: Die Datensätze folgen dergleichen Verteilung

Dafür bilde die kumulierten Verteilungsfunktionen $S_X, S_Y$. (normiert auf 1)

Test Statistik: $d_{\max} = \max_z |S_X(z) - S_Y(z)|$

Lehne den Test ab wenn $\sqrt{\frac{n_X \cdot n_Y}{n_X + n_Y}} \cdot d_{\max} > K_\alpha$

Wobei für große $n_X, n_Y$ gilt $K_\alpha = \sqrt{\ln(2/\alpha)/2}$

[4]:
```
def kstest(X, Y, alpha):
    """
    Kolmogorov-Smirnow-Test
    Test if X and Y follow the same distribution
    X,Y are binned datasets
    requirement: same binning

    return False if the Test is rejected
    return True if the Test is not rejected
    """
    n_X = np.sum(X)
    n_Y = np.sum(Y)

    # Bilde die kummulierte Verteilungsfunktionen
    S_X = np.cumsum(X)/n_X
    S_Y = np.cumsum(Y)/n_Y

    # Bestimme den maximalen Abstand
    d_max = np.max(np.abs(S_X-S_Y))

    K_alpha = np.sqrt(np.log(2/alpha)/2)

    return np.sqrt(n_X*n_Y/(n_X+n_Y))*d_max <= K_alpha
```

## 1.3 c) Prüfe Ähnlichkeit von Poisson- und Gauß-Verteilung

### 1.3.1 Erstelle gebinnte Datensätze der Poisson- und Gauß-Verteilung

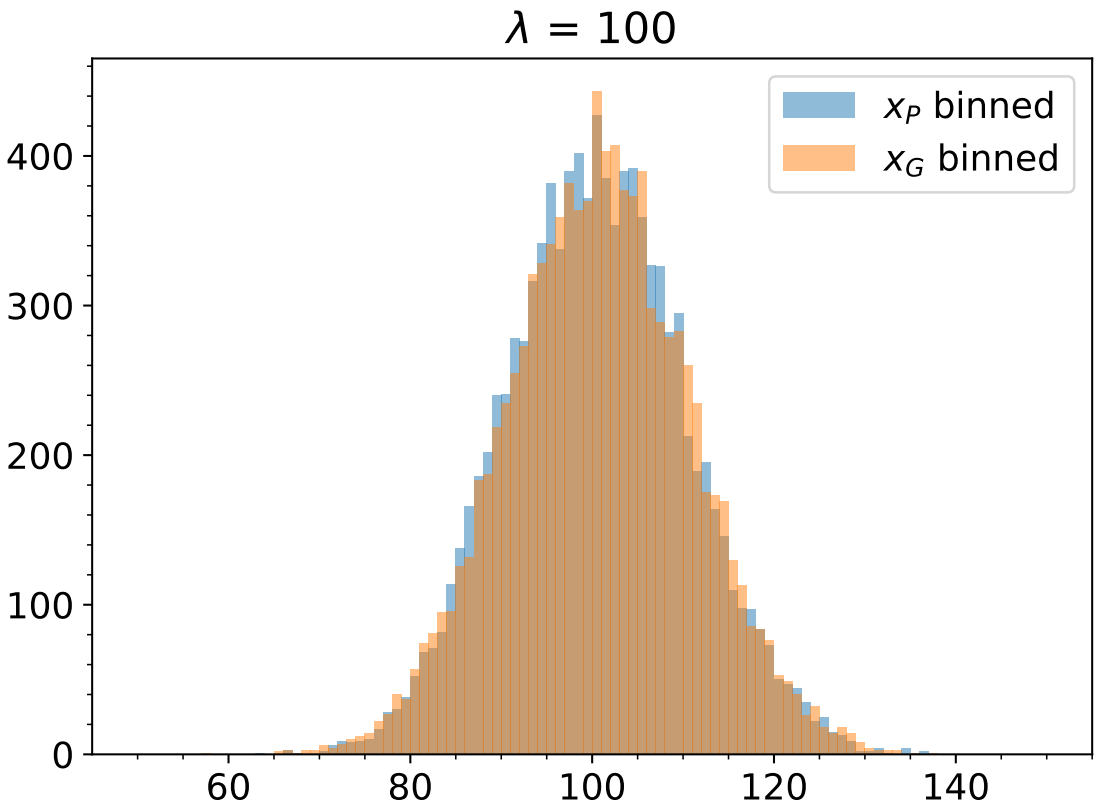
- 10000 Zufallszahlen pro Verteilung
- Gauß-Verteilte Zahlen auf ganze Zahlen runden
- 100 Bins im Intervall $[\mu - 5\sigma, \mu + 5\sigma]$

[5]:
```
def drawRawData(lam, size):
    # Poissonverteilte Zahlen ziehen
    x_P = rng.poisson(lam, size)
    # Normalverteilte Zahlen ziehen
    x_G = rng.normal(lam, np.sqrt(lam), size)
    return x_P, x_G
```

[6]:
```
def generateData(lam, size=10000, n_bins=100):
    mu = lam
    sigma = np.sqrt(lam)
    x_P, x_G = drawRawData(lam=lam, size=size)
```

```
    # Runde die Normalverteilten Zahlen zu ganzen Zahlen
    x_G = np.round(x_G)

    # Bin-Grenzen:
    bins = np.linspace(mu-5*sigma, mu+5*sigma, n_bins+1)

    # Gebinnte Datensätze
    x_P_binned, _ = np.histogram(x_P, bins)
    x_G_binned, _ = np.histogram(x_G, bins)

    return bins, x_P_binned, x_G_binned
```

[7]:
```
# Plotte ein Beispiel
lam = 100
bins, x_P, x_G = generateData(lam=lam)

bin_widths = np.diff(bins)
bin_centers = bins[:-1] + bin_widths/2

plt.title(f'$\lambda$ = {lam}')
plt.bar(bin_centers, x_P, width=bin_widths, alpha=0.5, label='$x_P$ binned')
plt.bar(bin_centers, x_G, width=bin_widths, alpha=0.5, label='$x_G$ binned')
plt.legend()
plt.show()
```




### 1.3.2 Ab welchem $\lambda$ kann die Nullhypothese bei einem $\alpha = 5\%$ nicht mehr verworfen werden?

- Führe den Kolmogorov-Test für jedes $\lambda \in [1, 10000]$ durch.

[8]:
```
from tqdm.auto import tqdm
```

[9]:
```
alpha = 0.05
lams = range(1,10000)
results = np.zeros_like(lams)
for i,lam in enumerate(tqdm(lams)):
    bins, x_P, x_G = generateData(lam)
    results[i] = kstest(x_P, x_G, alpha)
```

```
  0%|          | 0/9999 [00:00<?, ?it/s]
```

[10]:
```
results
```

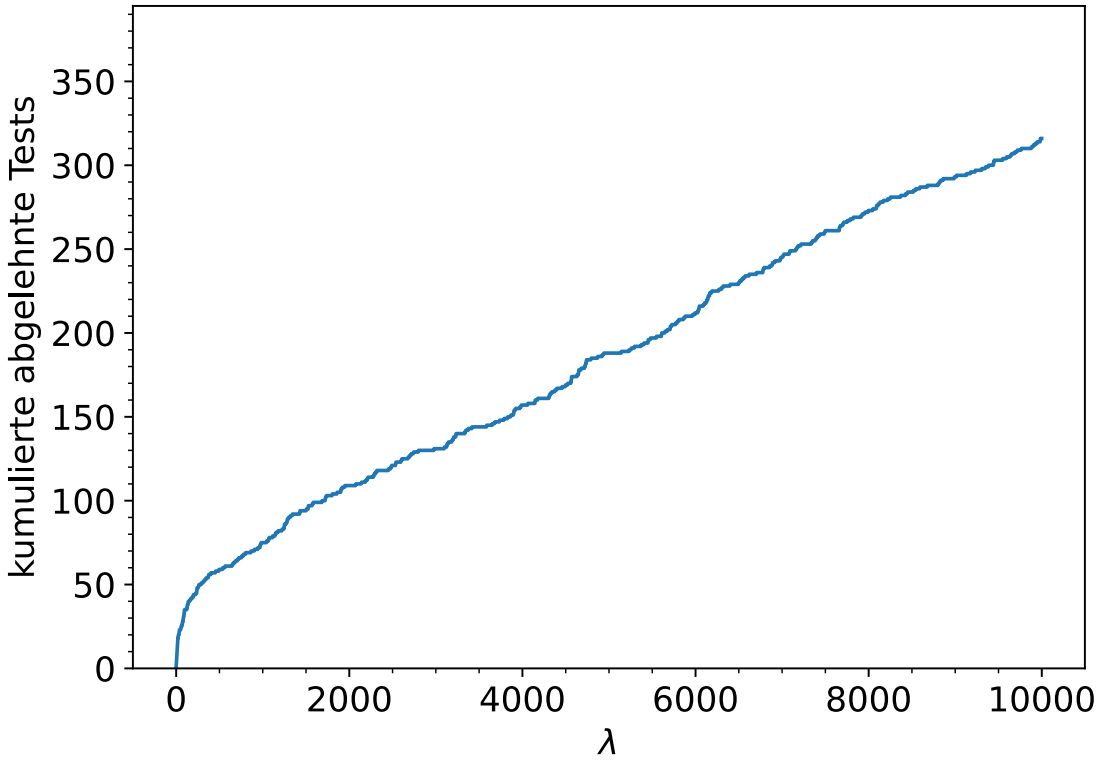
[10]:
```
array([0, 0, 0, …, 1, 1, 1])
```

Erklärung der Plots weiter unten:
Die Frage ist, ab wann der Test nur noch True zurückgibt.

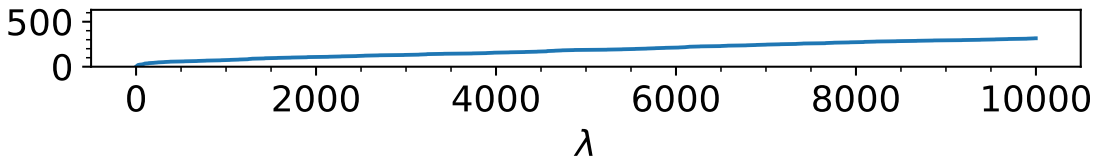
Dafür ist im Plot aufgetragen wie viele Tests bis zu $\lambda$ abgelehnt wurden.
Da im Optimalfall ab einem bestimmten $\lambda_0$ keine Tests mehr abgelehnt werden sollten, sollte der Plot ab $\lambda_0$ konstant bleiben, bzw. eine Steigung von nahezu 0 haben.

[11]:
```
cumulated_rejections = np.cumsum(results == 0)
```

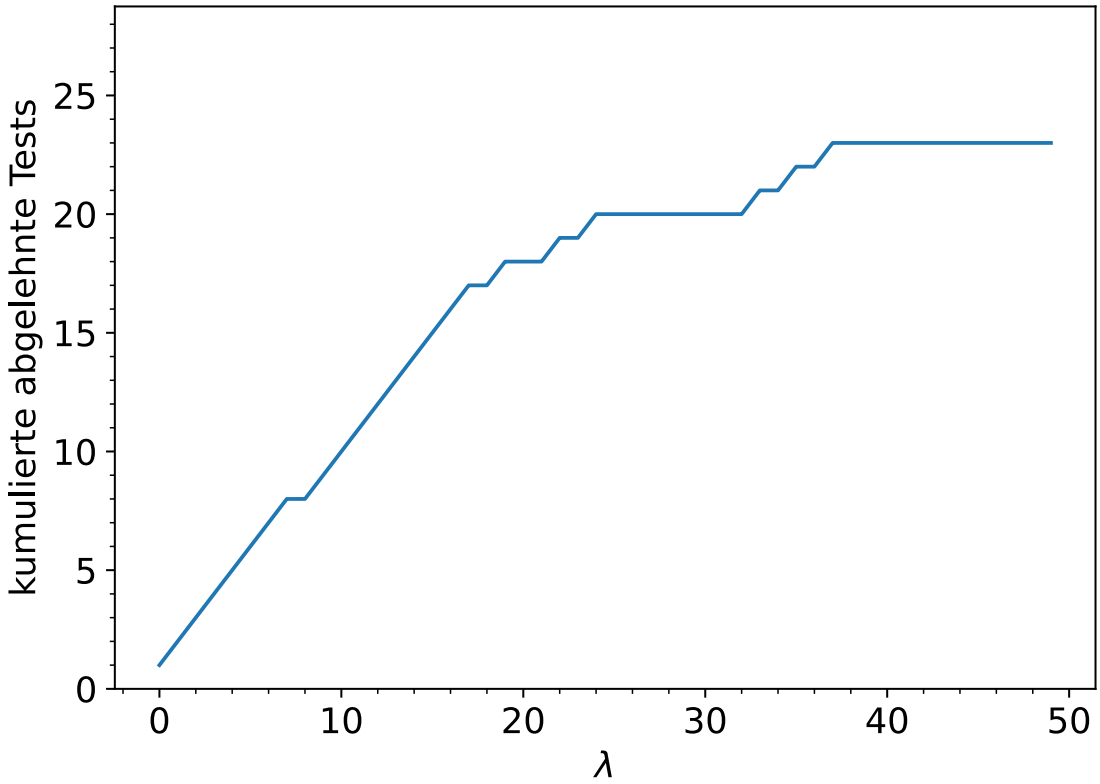
[12]:
```
# Ergebnisse im Plot darstellen
plt.plot(cumulated_rejections)
plt.ylim(0, 1.25*cumulated_rejections[-1])
plt.xlabel('$\lambda$')
plt.ylabel('kumulierte abgelehnte Tests')
plt.show()
```




[13]:
```
# Ergebnisse im Plot darstellen (aspect = equal)
plt.gca().set_aspect('equal')
plt.plot(cumulated_rejections)
plt.ylim(0, 2*cumulated_rejections[-1])
plt.xlabel('$\lambda$')
plt.show()
```




[14]:
```
# Ergebnisse im Plot darstellen (nur die ersten 50 Lambda)
plt.plot(cumulated_rejections[:50])
plt.ylim(0, 1.25*cumulated_rejections[:50][-1])
plt.xlabel('$\lambda$')
plt.ylabel('kumulierte abgelehnte Tests')
plt.show()
```



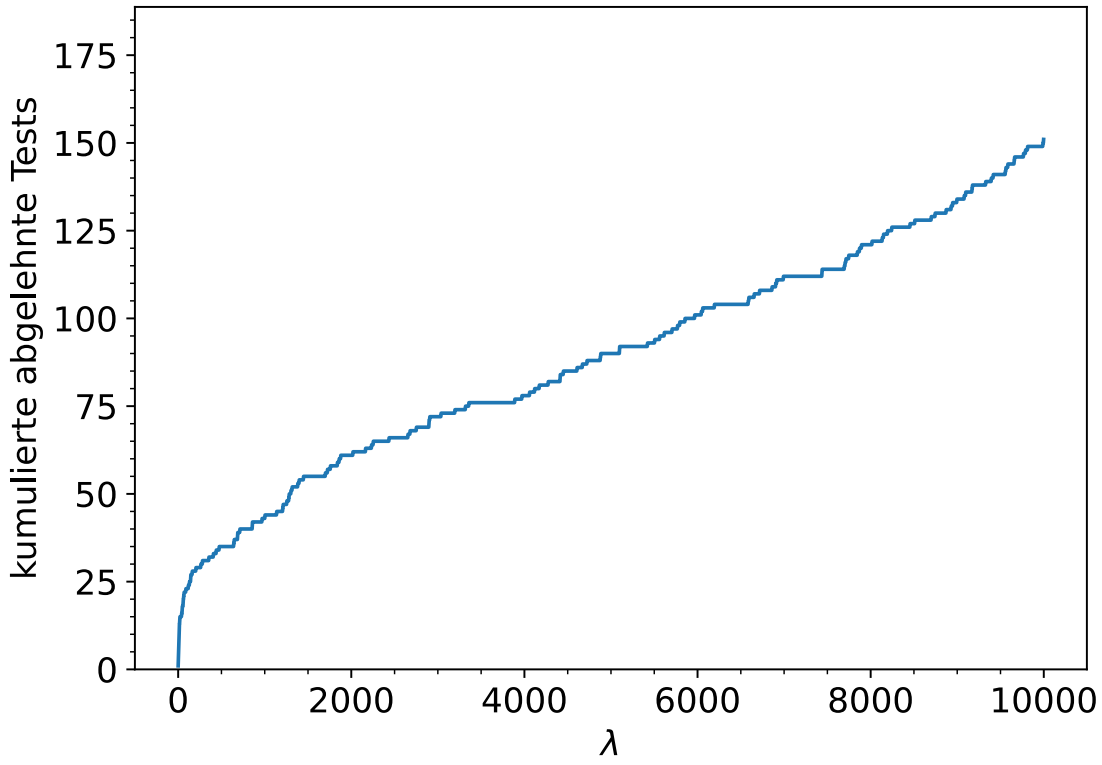

In den Plots sieht man, dass auch bei $\lambda \approx 10000$ noch Tests abgelehnt werden.
Auch wenn die Steigung sehr gering ist (siehe 2ter Plot).

Also ist entweder in unserer Analyse etwas schiefgelaufen oder es gibt keine klare Grenze ab der sich Poisson- und Gauß-Verteilung so sehr ähneln, dass der Test diese nicht mehr unterscheiden kann.

### 1.4 d) wie c) nur mit $\alpha = 2.5\%$ und $\alpha = 0.1\%$

[15]:
```
alpha = 0.025
lams = range(1,10000)
results = np.zeros_like(lams)
for i,lam in enumerate(tqdm(lams)):
    bins, x_P, x_G = generateData(lam)
    results[i] = kstest(x_P, x_G, alpha)

cumulated_rejections = np.cumsum(results == 0)

# Ergebnisse im Plot darstellen
plt.plot(cumulated_rejections)
plt.ylim(0, 1.25*cumulated_rejections[-1])
plt.xlabel('$\lambda$')
plt.ylabel('kumulierte abgelehnte Tests')
plt.show()
```

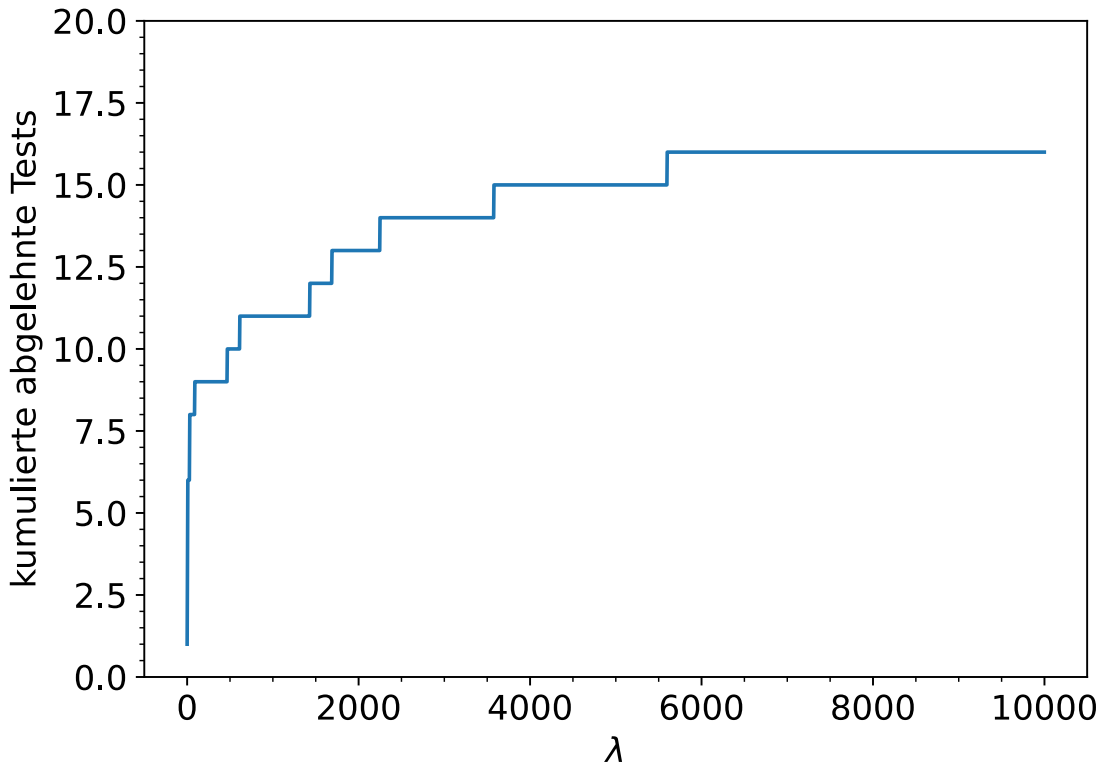
```
  0%|          | 0/9999 [00:00<?, ?it/s]
```



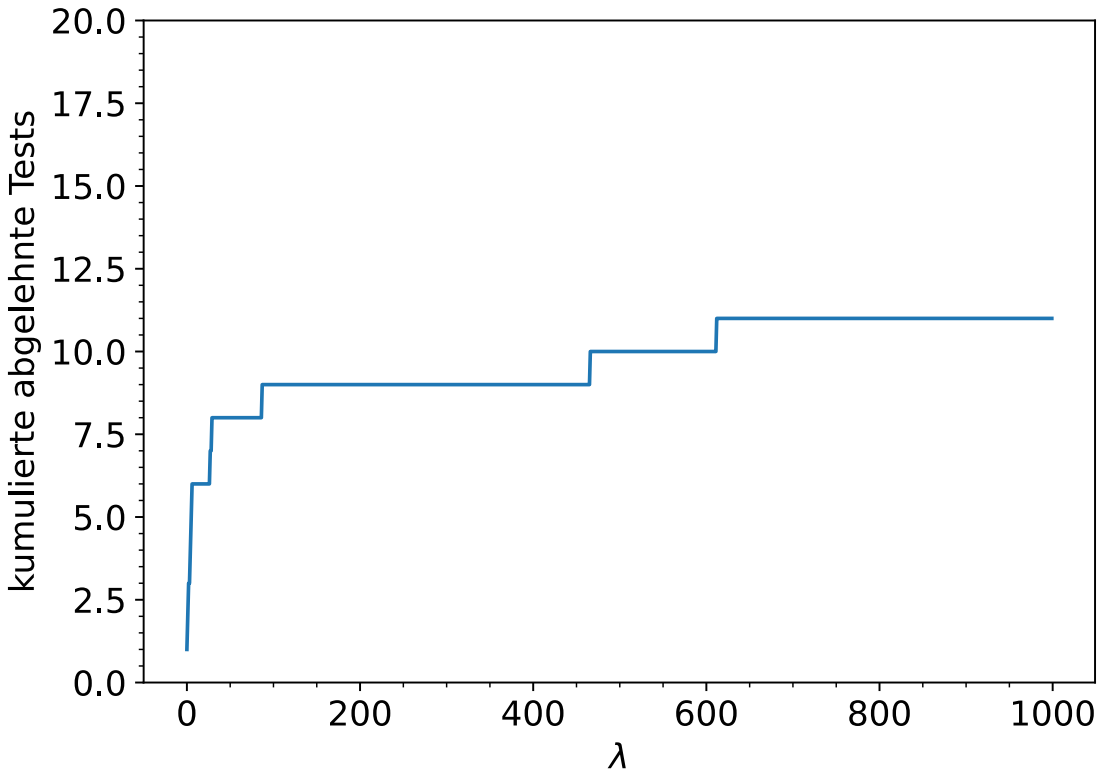

[16]:
```
alpha = 0.001
lams = range(1,10000)
results = np.zeros_like(lams)
```

```
for i,lam in enumerate(tqdm(lams)):
    bins, x_P, x_G = generateData(lam)
    results[i] = kstest(x_P, x_G, alpha)

cumulated_rejections = np.cumsum(results == 0)

# Ergebnisse im Plot darstellen
plt.plot(cumulated_rejections)
plt.ylim(0, 1.25*cumulated_rejections[-1])
plt.xlabel('$\lambda$')
plt.ylabel('kumulierte abgelehnte Tests')
plt.show()
```

```
  0%|          | 0/9999 [00:00<?, ?it/s]
```




[17]:
```
# Ergebnisse im Plot darstellen
plt.plot(cumulated_rejections[:1000])
plt.ylim(0, 1.25*cumulated_rejections[-1])
plt.xlabel('$\lambda$')
plt.ylabel('kumulierte abgelehnte Tests')
plt.show()
```




Auch hier lässt sich erkennen, dass es keine klare Grenze ergibt, wobei bei $\alpha = 0.1\%$ die Grenze $\lambda_0 \approx 150$ schon ganz gut passt.

## 2 Aufgabe 40 Ballon-Experiment

Die analytischen Berechnungen sind im Handschrift Teil weiter unten.

### 2.1 a) Maximum Likelihood mit $\lambda_i = \lambda$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_i$$

[18]:
```
K = np.array([4135, 4202, 4203, 4218, 4227, 4231, 4310]).astype(float)
T = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]).astype(float)
N = len(K)
```

[19]:
```
lam = 1/N*np.sum(K)
print(f'lambda = {lam}')
```

```
lambda = 4218.0
```

## 2.2 b) Maximum Likelihood mit $\lambda_i = t_i \cdot \alpha + \beta$

$$F(\alpha, \beta | \vec{k}, \vec{t}) = -\ln(L(\alpha, \beta | \vec{k}))$$

$$F(\alpha, \beta | \vec{k}, \vec{t}) = -\sum_{i=1}^{N} k_i \ln(t_i\alpha + \beta) - \ln(k_i!) - (t_i\alpha + \beta)$$

Minimiere F numerisch.

[20]:
```
def F(x):
    a = x[0]
    b = x[1]
    summands = [k_i*np.log(t_i*a+b) - (t_i*a + b) for t_i,k_i in zip(T,K)]
    return -np.sum(summands, axis=0) # - np.log(np.factorial(K))
```

[21]:
```
from scipy.optimize import minimize
```

[22]:
```
result = minimize(F, x0=[20, 4000])
a, b = result.x
print(f'alpha = {a:.2f}')
print(f'beta = {b:.2f}')
```

```
alpha = 21.34
beta = 4132.97
```

## 2.3 c) Likelihood-Quotienten-Test mit Wilks Theorem

$$\Gamma(\vec{k}, \vec{t}) = \frac{\sup_{\vec{\lambda_0}}(L(\vec{\lambda}|\vec{k}))}{\sup_{\vec{\lambda_1}}(L(\vec{\lambda}|\vec{k}))}$$

$$D = -2\ln(\Gamma(\vec{k}, \vec{t}))$$

$$D = -2\sum_{i=1}^{N} k_i \ln(t_i\hat{\alpha} + \hat{\beta}) - k_i \ln(\hat{\lambda}) - (t_i\hat{\alpha} + \hat{\beta}) + \hat{\lambda}$$

$$\text{Signifikanz } = \sqrt{|D|} \cdot \sigma$$

[23]:
```
def D(K,T,a,b,lam):
    summands = K*np.log(T*a+b) - K*np.log(lam) - (T*a+b) + lam
    return -2* np.sum(summands)
```

[24]:
```
D_c = D(K,T,a,b,lam)
significance_c = np.sqrt(-D_c)
print(f'D_c = {D_c}')
print(f'Signifikanz = {significance_c:.4f} * sigma')
```

```
D_c = -3.1172917158455675
Signifikanz = 1.7656 * sigma
```

### 2.4 d) Ein weiterer Messwert ($k = 4402, t = 14$)

[25]:
```
K_d = np.append(K, 4402)
T_d = np.append(T, 14)
```

[26]:
```
D_d = D(K_d,T_d,a,b,lam)
significance_d = np.sqrt(-D_d)
print(f'D_d = {D_d}')
print(f'Signifikanz = {significance_d:.4f} * sigma')
```

```
D_d = -10.82967862377518
Signifikanz = 3.2908 * sigma
```

Ohne dem Messwert an Tag 14 erhalten wir:
$\alpha_c = 1.7656\sigma$
Mit dem Messwert an Tag 14 erhalten wir:
$\alpha_d = 3.2908\sigma$

Die Signifikanz aus der c) ist mit $\approx 1.8$ recht gering und die Steigung in den Messwerten könnte auch durch Zufall kommen.

Die Signifikanz aus der d) ist mit $\approx 3.3$ schon recht hoch und es ist anzunehmen, dass der Kollege Recht hatte mit der Annahme einer steigenden Zählrate.

[ ]:

# A40 Ballon-Experiment

Freitag, 3. Dezember 2021 13:08

**Aufgabe 40** *Ballon-Experiment*

Bei einem Ballon-Experiment zur Messung des Flusses der kosmischen Strahlung in der oberen Atmosphäre wird über einen Zeitraum von einer Stunde Protonen mit einer Energie zwischen 1 GeV und 100 GeV gezählt. Über einen Zeitraum von einer Woche wird jeden Tag ein Messdurchgang von einer Stunde Dauer vorgenommen. Ihre Messdaten lauten:

| Tag | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Counts | 4135 | 4202 | 4203 | 4218 | 4227 | 4231 | 4310 |

**(a)** Nehmen sie an, dass der Fluss der kosmischen Strahlung konstant im Messzeitraum ist. Berechnen Sie mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode die wahrscheinlichste Zählrate.

Annahme: Anzahl der Protonen ist Poisson-verteilt

$$P(k|\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda) \qquad \lambda = n \cdot p$$

$n \hat{=}$ Anzahl der Versuche
$p \hat{=}$ Erfolgswahrscheinlichkeit
$k \hat{=}$ Anzahl der Erfolge

Likelihood:

$$L(\lambda|\vec{k}) = \prod_{i=1}^{N} P(k_i|\lambda) \qquad N = 7$$

minimiere $F(\lambda) = -\ln(L(\lambda|\vec{k}))$

$$F(\lambda) = -\sum_{i=1}^{N} \ln(P(k_i|\lambda))$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} (k_i \ln(\lambda) - \ln(k_i!) - \lambda)$$

$$\frac{dF}{d\lambda} = -\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{k_i}{\lambda} - 1\right)$$

$$= N - \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{\lambda} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i$$ (Berechnung im Jupyter Notebook)

**(b)** Ihr Kollege sieht sich die Messwerte an und stellt die Hypothese auf, dass der Fluss der kosmischen Strahlung einen dramatischen Zuwachs erlebt. Nehmen sie einen linear ansteigenden Fluss an und berechnen sie numerisch mit Hilfe der Maxmimum-Likelihood-Methode die wahrscheinlichsten Flussparameter.

Nullhypothese: $\lambda_{0,i} = i \cdot \alpha + \beta$ $\quad i \hat{=}$ Tag (besser wäre ein $t_i$ gewesen wegen der dl, aber naja ...)

$$\Rightarrow P_i(\vec{k} \mid \alpha, \beta) = \frac{(i\alpha+\beta)^{k_i}}{k_i!} \exp(-(i\alpha+\beta))$$

$$\Rightarrow L(\alpha, \beta \mid \vec{k}) = \prod_{i=1}^{N} P_i(\vec{k} \mid \alpha, \beta)$$

Minimiere $F(\alpha, \beta) = -\ln(L(\alpha, \beta \mid \vec{k}))$

$$F(\alpha, \beta) = -\sum_{i=1}^{N} P_i(\vec{k} \mid \alpha, \beta)$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} k_i \ln(i\alpha+\beta) - \ln(k_i!) - (i\alpha+\beta)$$

bestimme $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ numerisch

(Berechnung im Jupyter Notebook)

**(c)** Berechnen sie mit Hilfe eines Likelihood-Quotienten-Tests die Signifikanz seiner Beobachtung. Beurteilen sie die erreichte Signifikanz.
*Hinweis:* Nehmen sie an, dass Wilks' Theorem hier gültig ist. Warum darf man dies annehmen?

Nullhypothese $H_0$: $\hat{\lambda}_{i,0} = i\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ (aus b)

Alternativhypothese $H_1$: $\hat{\lambda}_{i,1} = \hat{\lambda}$ (aus a)

Likelihood-Quotienten-Test:

$$\Gamma(\vec{k}) = \frac{\sup_{\lambda_0}(L(\vec{\lambda} \mid \vec{k}))}{\sup_{\lambda_1}(L(\vec{\lambda} \mid \vec{k}))} \quad \text{mit } L(\vec{\lambda} \mid \vec{k}) = \prod_{i=1}^{N} P(k_i \mid \lambda_i)$$

$$\text{mit } P(k \mid \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$$

mit $P(k|\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)$

mit Wilks Theorem:

$D = -2\ln(\Gamma(\vec{k}))$ ist $\chi^2$-verteilt

$$D = -2\sum_{i=1}^{N}\ln P(k_i|\hat{\lambda}_{0,i}) - \ln(P(k_i|\hat{\lambda}_i))$$

$$= -2\sum_{i=1}^{N}\ln P(k_i|i\hat{\alpha}+\hat{\beta}) - \ln(P(k_i|\hat{\lambda}_i)) \quad \text{mit} \quad P(k|\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)$$

$$D = -2\sum_{i=1}^{N}\left(k_i\ln(i\hat{\alpha}+\hat{\beta}) - k_i\ln(\hat{\lambda}) - (i\hat{\alpha}+\hat{\beta}) + \hat{\lambda}\right)$$

für $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}$ nutze die Werte aus a) und b)

(Berechnung im Jupyter Notebook)

**(d)** Ihr Kollege vollzieht eine Woche später eine weitere Messung um seine These zu untermauern. Seine Messung ergibt sich zu

| Tag | 14 |
|---|---|
| Counts | 4402 |

Berechnen sie erneut (a) bis (c) für diesen neuen Datensatz.

(Berechnung im Jupyter Notebook)