blatt_01_guth_venker_jaekel

May 4, 2021

0.1 Abgabe SMD Blatt 01

0.1.1 von Nico Guth, David Venker, Jan Jäkel

[1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

---

1 Aufgabe 1 Numerische Stabilität

Betrachten Sie die Funktionen
(a) $f(x) = (x^3 + 1/3) - (x^3 - 1/3)$ und
(b) $g(x) = ((3 + x^3/3) - (3 - x^3/3))/x^3$.
Bestimmen Sie empirisch, für welche Bereiche von x (grob) das numerische Ergebnis

- vom algebraischen um nicht mehr als 1% abweicht,
- gleich Null ist.

(c) Stellen Sie das Ergebnis in geeigneter Form graphisch dar (d. h. z. B. logarithmische x-Skala)!
`x = np.logspace(start, stop, num)`
(d) Wie ändert sich die Darstellung, wenn Sie die Datenpunkt mit dem Datentyp float32 bzw. float64
erstellen?
`x_32 = np.logspace(start, stop, num, dtype='float32')`
`x_64 = np.logspace(start, stop, num, dtype='float64')`

[2]:
```
f = lambda x: (x**3+1/3)-(x**3-1/3)
g = lambda x: ((3+x**3/3)-(3-x**3/3))/x**3
exact = 2/3
```

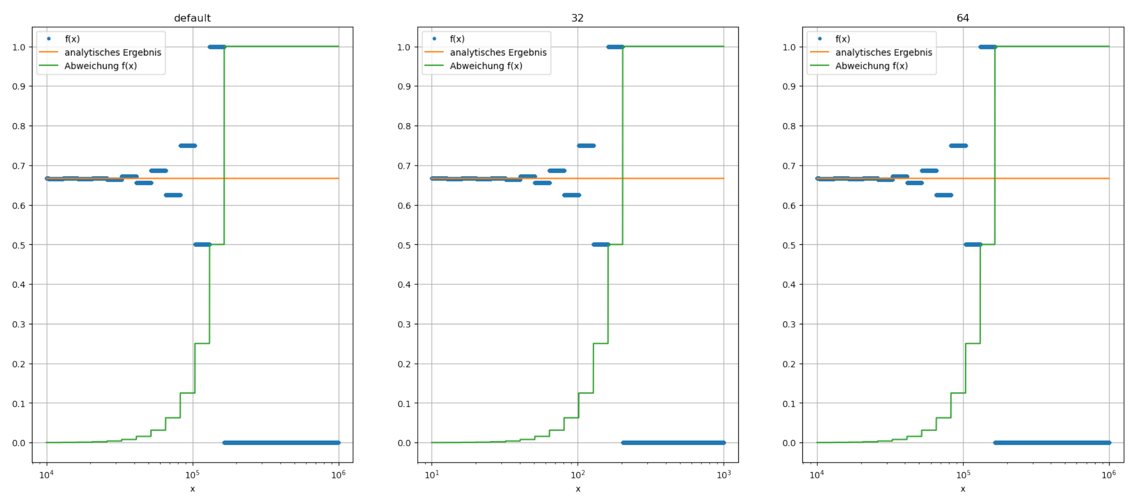
analytisches Ergebnis:
$f(x) = g(x) = 2/3$

1.1 a)

[3]:
```
x_size = 10000
x_a,f_x,rel_err_f = {},{},{}
x_a['default'] = np.logspace(4,6,x_size)
x_a['32'] = np.logspace(1,3,x_size,dtype='float32')
x_a['64'] = np.logspace(4,6,10000,dtype='float64')
```

```
for key in x_a: f_x[key] = f(x_a[key])
for key in x_a: rel_err_f[key] = np.abs(exact - f_x[key])/exact
```

[4]:
```
plt.subplots(1,3,figsize=(20,8),dpi=100)

i=1
for key in x_a:
    plt.subplot(1,3,i)
    plt.xscale('log')
    plt.yticks(np.arange(0.0,1.1,0.1,))
    plt.xlabel('x')
    plt.title(key)

    plt.plot(x_a[key], f_x[key],'.',label='f(x)')
    plt.plot(x_a[key], np.full_like(x_a[key],exact),'-',label='analytisches␣
↪Ergebnis')
    plt.plot(x_a[key], rel_err_f[key],'-',label='Abweichung f(x)')

    plt.grid(which='major')
    plt.legend()
    i += 1
```



[5]:
```
for key in x_a:
    print(f'Präzision: {key}')
    print(f'  Letztes x für Abweichung von f(x) < 1% :␣
↪x={x_a[key][rel_err_f[key]<0.01][-1]:.2f}')
    print(f'  Erstes x für f(x)=0 : x={x_a[key][f_x[key]==0][0]:.2f}')
```

```
Präzision: default
  Letztes x für Abweichung von f(x) < 1% : x=41272.58
  Erstes x für f(x)=0 : x=165166.43
```

```
Präzision: 32
  Letztes x für Abweichung von f(x) < 1% : x=50.78
  Erstes x für f(x)=0 : x=203.20
Präzision: 64
  Letztes x für Abweichung von f(x) < 1% : x=41272.58
  Erstes x für f(x)=0 : x=165166.43
```

1.2 a) Ergebnis:

Für $x < 0$ verhält es sich genau gleich, da das Negative vorzeichen nur zum Unterschied im ersten Bit führt.

Präzision	Bereich für Abweichung < 1%	Bereich für $f(x) = 0$
Python Standard	$\|x\| < 4 \cdot 10^4$	$\|x\| > 1.7 \cdot 10^5$
float32	$\|x\| < 5 \cdot 10^1$	$\|x\| > 2.0 \cdot 10^2$
float64	$\|x\| < 4 \cdot 10^4$	$\|x\| > 1.7 \cdot 10^5$

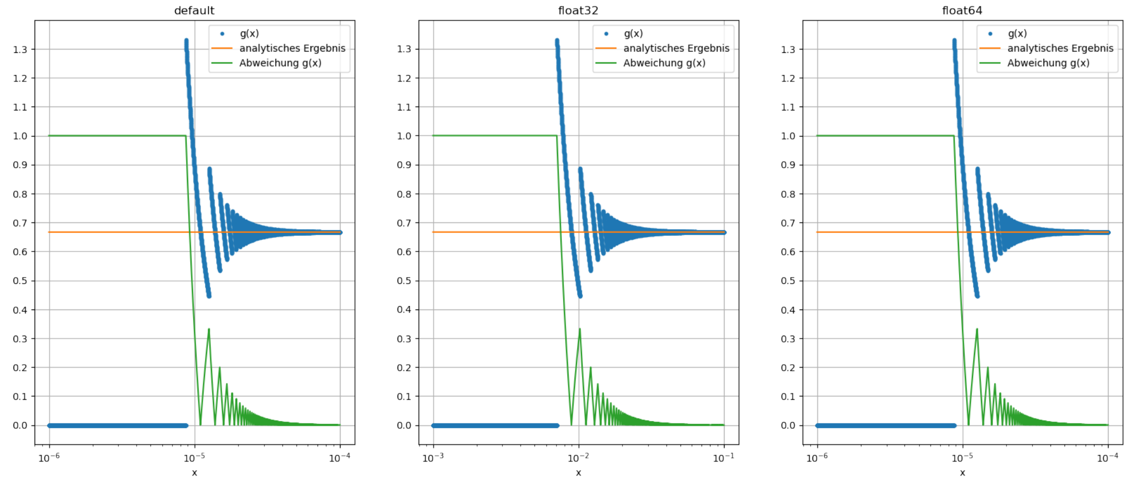
Also arbeitet Python standardmäßig mit float64.

1.3 b)

[6]:
```
x_size = 10000
x_b,g_x,rel_err_g = {},{},{}
x_b['default'] = np.logspace(-6,-4,x_size)
x_b['float32'] = np.logspace(-3,-1,x_size,dtype='float32')
x_b['float64'] = np.logspace(-6,-4,x_size,dtype='float64')
for key in x_b:
    g_x[key] = g(x_b[key])
    rel_err_g[key] = np.abs(exact - g_x[key])/exact
```

[7]:
```
plt.subplots(1,3,figsize=(20,8),dpi=100)

i=1
for key in x_b:
    plt.subplot(1,3,i)
    plt.xscale('log')
    plt.yticks(np.arange(0.0,1.5,0.1,))
    plt.xlabel('x')
    plt.title(key)

    plt.plot(x_b[key],g_x[key],'.',label='g(x)')
    plt.plot(x_b[key],np.full_like(x_b[key],exact),'-',label='analytisches␣
↪Ergebnis')
    plt.plot(x_b[key],rel_err_g[key],'-',label='Abweichung g(x)')

    plt.grid(which='major')
    plt.legend();
```

```
    i+=1
```



[8]:
```python
for key in x_b:
    print(f'Präzision: {key}')
    print(f'  Erstes x für Abweichung von g(x) < 1% : x={x_b[key][rel_err_g[key]<0.01][0]:.2e}')
    print(f'  Letztes x für f(x)=0 : x={x_b[key][g_x[key]==0][-1]:.2e}')
```

```
Präzision: default
  Erstes x für Abweichung von g(x) < 1% : x=1.10e-05
  Letztes x für f(x)=0 : x=8.73e-06
Präzision: float32
  Erstes x für Abweichung von g(x) < 1% : x=8.91e-03
  Letztes x für f(x)=0 : x=7.10e-03
Präzision: float64
  Erstes x für Abweichung von g(x) < 1% : x=1.10e-05
  Letztes x für f(x)=0 : x=8.73e-06
```

1.4 b) Ergebnis

Für $x < 0$ verhält es sich genau gleich, da das Negative vorzeichen nur zum Unterschied im ersten Bit führt.

Präzision	Bereich für Abweichung < 1%	Bereich für $g(x) = 0$
Python Standard	$\lvert x\rvert > 1 \cdot 10^{-5}$	$\lvert x\rvert < 9 \cdot 10^{-6}$
float32	$\lvert x\rvert > 9 \cdot 10^{-3}$	$\lvert x\rvert < 7 \cdot 10^{-3}$
float64	$\lvert x\rvert > 1 \cdot 10^{-5}$	$\lvert x\rvert < 9 \cdot 10^{-6}$

2 Aufgabe 2 Numerische Stabilität und Kondition

Der Ausdruck $f(E,\theta)$ stellt einen Summanden des differentiellen Wirkungsquerschnitts für die Reaktion $e^-e^+ \rightarrow \gamma\gamma$ dar und ist gegeben durch
$f(E,\theta) = \frac{2+\sin^2\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta}$.
mit
$\beta = \sqrt{1-\gamma^{-2}}$,
$\gamma = \frac{E}{M}$ $(m = 511keV)$.

(a) Ist diese Gleichung für $f(E,\theta)$ numerisch stabil? In welchem Bereich von θ ist die Gleichung für $E = 50GeV$ numerisch instabil?

(b) Beheben Sie die Stabilitätsprobleme durch eine geeignete analytische Umformung. (Hinweis: Nutzen Sie $1-\beta^2 = 1/\gamma^2$ und $1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$)

(c) Zeigen Sie, dass Sie die Stabilitätsprobleme behoben haben, indem Sie beide Gleichungen im kritischen Intervall darstellen.

(d) Berechnen Sie die Konditionszahl. Wie hängt diese von θ ab?

(e) Stellen Sie den Verlauf der Konditionszahl als Funktion von $(0\ \theta\ \pi)$ grafisch dar. In welchem Bereich ist das Problem gut bzw. schlecht konditioniert?

(f) Was ist der Unterschied zwischen Stabilität und Kondition?

2.1 a)

$E = 50$ GeV $\Rightarrow \beta \approx 1$
$\Rightarrow 1 - \beta^2\cos^2\theta \approx 0$ für $\cos^2\theta \approx 1$
Also ist diese Gleichung für $\cos^2\theta \approx 1$ numerisch instabil, da dort eine Singularität vorliegt und durch sehr kleine Zahlen dividiert wird.

2.2 b)

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \frac{2+\sin^2\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta} && \text{mit } \sin^2\theta+\cos^2\theta = 1 && (1)\\
&= \frac{2+\sin^2\theta}{1-\beta^2+\beta^2\sin^2\theta} && && (2)\\
&= \frac{\left(\frac{2}{\sin^2\theta}\right)+1}{\left(\frac{1-\beta^2}{\sin^2\theta}\right)+\beta^2} && \text{mit } 1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} && (3)\\
&= \frac{\left(\frac{2}{\sin^2\theta}\right)+1}{\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)+1} =: g(\theta) && && (4)
\end{aligned}$$

2.3 c)

Im Folgenden wird die relative Abweichung der Funktionen $f(\theta)$ und $g(\theta)$ geplotted, indem als exakter Wert `float64` und als numerischer Wert `float32` angenommen wird.
Es werden für γ und β die Werte

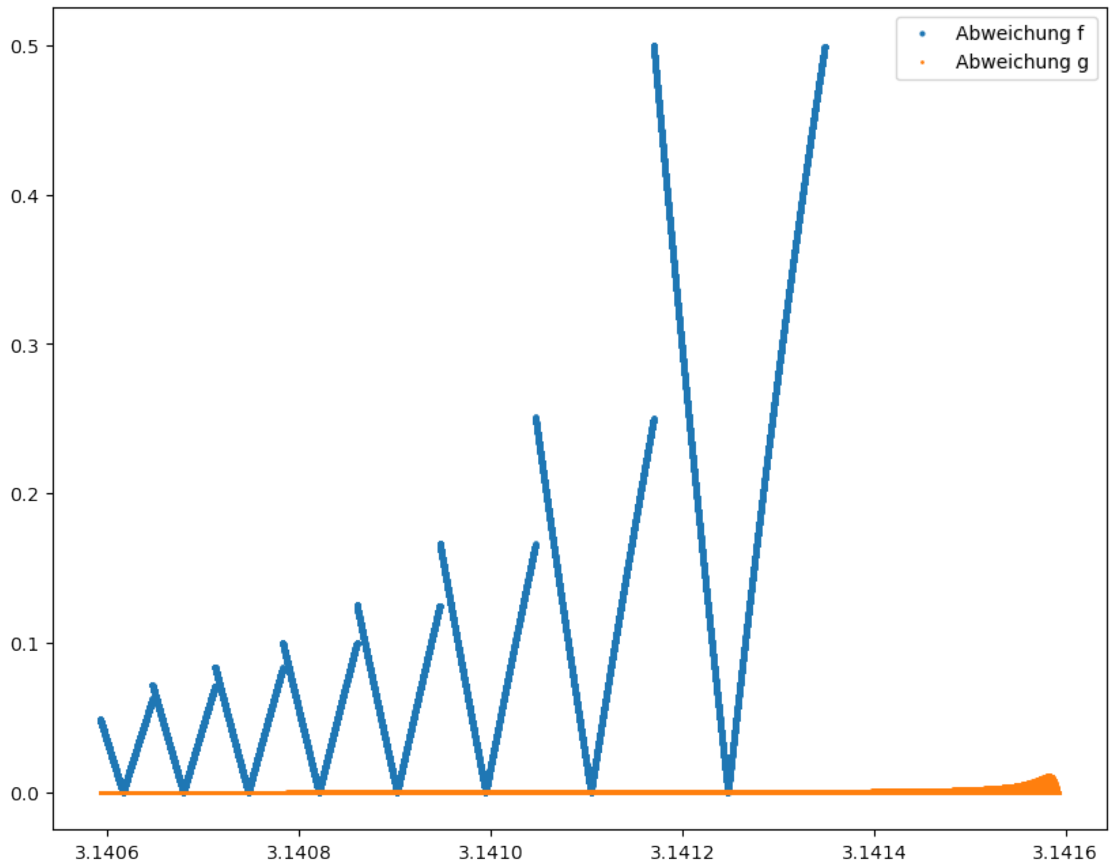
$$E = 50 \text{ GeV} \tag{5}$$
$$m = 511 \text{ keV} \tag{6}$$

verwendet.
Es wird in einem Bereich $\theta \in [\pi - \mathrm{d}\theta, \pi]$ geplottet.
Mit $\mathrm{d}\theta = 10^{-3}$

[9]:
```
E = 50*10**9 #eV
m = 511*10**3 #eV
gamma = E/m
beta = np.sqrt(1-gamma**(-2))

f = lambda beta,theta: (2+np.sin(theta)**2)/(1-beta**2*np.cos(theta)**2)
g = lambda gamma,theta: ( 2/np.sin(theta)**2 +1 )/(1/gamma**2 * (1/np.
↪sin(theta)**2 - 1) + 1)

pi = np.pi
theta_size = 100000
dtheta = 10**-3
theta_min = pi-dtheta
thata_max = pi
theta_64 = np.linspace(theta_min,thata_max,theta_size,dtype='float64')
theta_32 = np.linspace(theta_min,thata_max,theta_size,dtype='float32')

f_theta_64 = f(beta,theta_64)
f_theta_32 = f(beta,theta_32)
g_theta_64 = g(gamma,theta_64)
g_theta_32 = g(gamma,theta_32)
```

```
<ipython-input-9-f0f11ab2dada>:6: RuntimeWarning: divide by zero encountered in
true_divide
  f = lambda beta,theta: (2+np.sin(theta)**2)/(1-beta**2*np.cos(theta)**2)
```

[10]:
```
plt.figure(figsize=(10,8),dpi=100)
plt.plot(theta_64,np.abs(f_theta_64-f_theta_32)/f_theta_64,'.
↪',markersize=4,label='Abweichung f')
plt.plot(theta_64,np.abs(g_theta_64-g_theta_32)/g_theta_64,'.
↪',markersize=2,label='Abweichung g')
plt.legend();
```



2.3.1 Was sieht man am Plot?

In der Nähe von $\theta = \pi$ werden die Abweichungen von f nicht mehr angezeigt, weil dort ein "divide by zero" Error kommt.
g kann so nahe an $n \cdot \pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) geplottet werden wie man will und es kommt kein Error.
Außerdem ist die Abweichung von g deutlich geringer als die Abweichung von f.
Also scheint $g(\theta)$ die deutlich stabilere Funktion zu sein.

2.4 d)

Konditionszahl von $f(\theta)$:

$$f(\theta) = \frac{2 + \sin^2\theta}{1 - \beta^2\cos^2\theta} \tag{7}$$

$$f'(\theta) = -\frac{2\sin\theta\cos\theta(3\beta^2 - 1)}{(1 - \beta^2\cos^2\theta)^2} \tag{8}$$

$$K = \left|\theta\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\right| = \left|-\frac{2\theta\sin\theta\cos\theta(3\beta^2 - 1)}{(1 - \beta^2\cos^2\theta)(2 + \sin^2\theta)}\right| \tag{9}$$

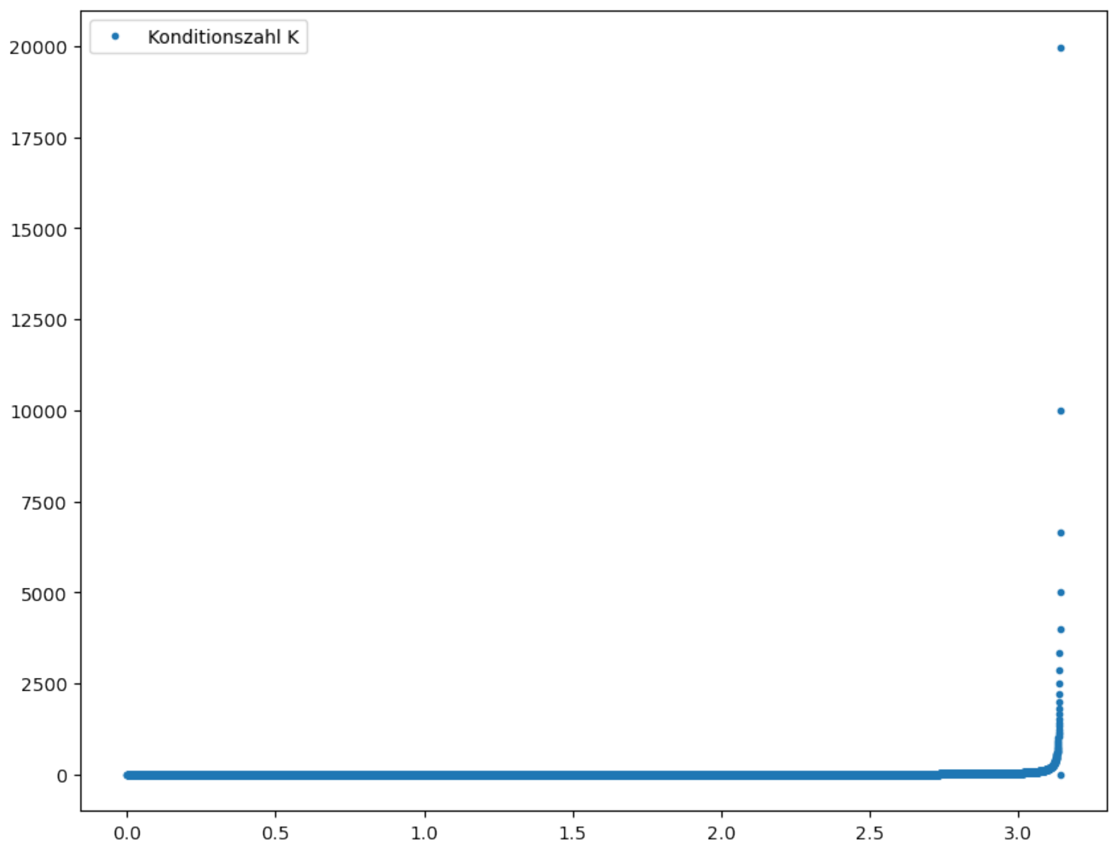
2.5 e)

[15]:

```
K = lambda beta,theta: np.abs( (2*theta*np.sin(theta)*np.
 ↪cos(theta)*(3*beta**2-1)) / ((1-beta**2*np.cos(theta)**2)*(2+np.
 ↪sin(theta)**2)))

E = 50*10**9 #eV
m = 511*10**3 #eV
gamma = E/m
beta = np.sqrt(1-gamma**(-2))

theta_size = 10000
theta = np.linspace(0,pi,theta_size)
```

[16]:

```
plt.figure(figsize=(10,8),dpi=100)
plt.plot(theta,K(beta,theta),'.',label='Konditionszahl K')
plt.legend();
```



Das Problem scheint um π deutlich schlechter konditioniert zu sein als um 0.

2.6 f)

- Stabilität: Abweichung der numerischen von der algebraischen Lösung durch Rundungsfehler.
- Kondition: Abweichung des Ergebnisses bei einem Fehler der Eingangsdaten ($x \rightarrow x + \Delta x$) ohne Rundungsfehler

[ ]:

```

```