Blatt 12

Donnerstag, 21. Oktober 2021 13:37

David Venker
Jan Jäkel
Nico Guth

Aufgabe 27 *Fehlerfortpflanzung* **5 P.**

Die Parameter einer Ausgleichsgeraden $y = a_0 + a_1 x$ wurden zu $a_0 = 1{,}0 \pm 0{,}2$ und $a_1 = 1{,}0 \pm 0{,}2$ bestimmt. Der Korrelationskoefffizient ist $\rho = -0{,}8$. Bestimmen Sie die Unsicherheit eines Wertes y als Funktion von x.

(a) Bestimmen Sie das Resultat analytisch sowohl unter Berücksichtigung der Korrelation als auch unter Vernachlässigung der Korrelation.

$y = a_0 + a_1 x$ mit $a_0 = 1{,}0 \pm 0{,}2$

$a_1 = 1{,}0 \pm 0{,}2$

Korrelationskoeffizient: $\rho = -0{,}8$

$$\rho_{xy} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$\mathrm{cov}(x,y) = E[(x - E[x])(y - E[y])]$$

gesucht $\Delta y(x)$ bzw. σ_y

a) analytisch

$$\sigma_y = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial a_0} \cdot \sigma_{a_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a_1} \sigma_{a_1}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial y}{\partial a_0} \frac{\partial y}{\partial a_1} \cdot \mathrm{cov}(a_0, a_1)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$y = a_0 + a_1 x$

$$\frac{\partial y}{\partial a_0} = 1 \qquad \frac{\partial y}{\partial a_1} = x \qquad \mathrm{cov}(a_0, a_1) = \sigma_{a_0} \cdot \sigma_{a_1} \cdot \rho_{a_0 a_1}$$

mit korrelation:

$$\sigma_y = \left[\sigma_{a_0}^2 + x^2 \sigma_{a_1}^2 + 2x\, \sigma_{a_0} \sigma_{a_1} \rho_{a_0 a_1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_y = \left[(1 \cdot 0{,}2)^2 + (x \cdot 0{,}2)^2 + 2 \cdot 1 \cdot x \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot (-0{,}8)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[0{,}04(1 + x^2) + 2 x \cdot 0{,}04 \cdot (-0{,}8)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0{,}2\left[1 + x^2 - 1{,}6 \cdot x\right]^{\frac{1}{2}}.$$

ohne korrelation:

$$\sigma_y = \left[\sigma_{a_0}^2 + x^2 \sigma_{a_1}^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0{,}2\sqrt{x^2 + 1}$$

blatt12_guth_venker_jaekel

October 24, 2021

[1]:
```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
```

0.1 Aufgabe 27: Fehlerfortpflanzung

[2]:
```
mean_a0 = mean_a1 = 1.0
sigma_a0 = sigma_a1 = 0.2
rho = -0.8
```

[3]:
```
def y(x,a0,a1):
    return a0+a1*x
```

0.1.1 b) numerisch sigma_y bestimmen durch Monte Carlo Simulation

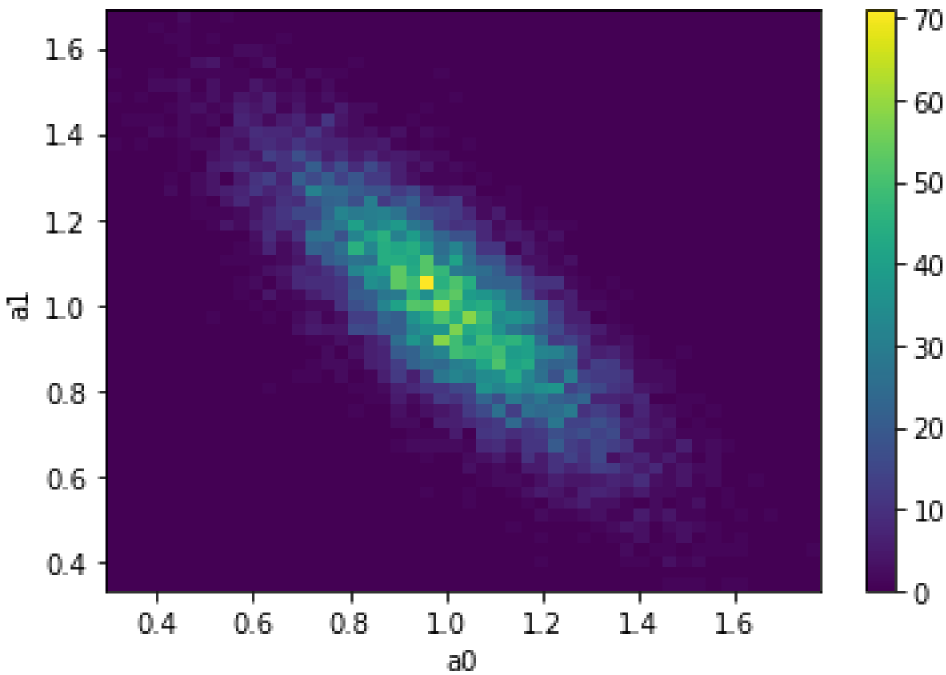
[4]:
```
rng = np.random.default_rng(42)
```

[5]:
```
cov = [
    [sigma_a0**2, rho*sigma_a0*sigma_a1],
    [rho*sigma_a0*sigma_a1, sigma_a1**2]
]
```

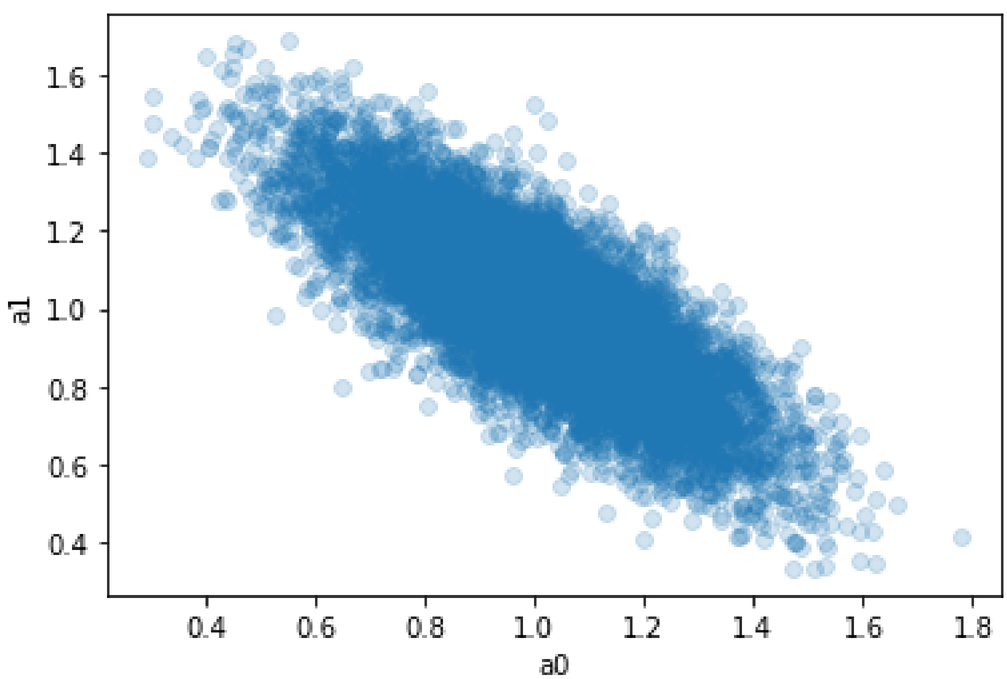
[6]:
```
a = rng.multivariate_normal(mean = [mean_a0, mean_a1], cov = cov, size=10000)
a.shape
```

[6]:
```
(10000, 2)
```

[7]:
```
plt.hist2d(a[:,0],a[:,1],bins=50)
plt.xlabel('a0')
plt.ylabel('a1')
plt.colorbar();
```



[8]:
```
plt.scatter(a[:,0],a[:,1],alpha=0.2)
plt.xlabel('a0')
plt.ylabel('a1');
```



0.1.2 c) Vorhersagen y(x) für x=-3,0,+3

analytisch

[9]:
```
def sigma_y_analytical(x):
    return np.sqrt(sigma_a0**2+x**2*sigma_a1**2 + 2*x*sigma_a0*sigma_a1*rho)
```

[10]:
```
for x in [-3,0,3]:
    print(f'y(x={x})={y(x,mean_a0,mean_a1):.4f} \t␣
 ↪sigma_y_analytical(x={x})={sigma_y_analytical(x):.4f}')
```

```
y(x=-3)=-2.0000          sigma_y_analytical(x=-3)=0.7694
y(x=0)=1.0000    sigma_y_analytical(x=0)=0.2000
y(x=3)=4.0000    sigma_y_analytical(x=3)=0.4561
```

numerisch

[11]:
```
for x in [-3,0,3]:
    y_ = y(x,a[:,0],a[:,1])
    print(f'y(x={x})={np.mean(y_):.4f} \t sigma_y_analytical(x={x})={np.std(y_):
 ↪.4f}')
```

```
y(x=-3)=-2.0000          sigma_y_analytical(x=-3)=0.7661
y(x=0)=1.0012    sigma_y_analytical(x=0)=0.1980
y(x=3)=4.0023    sigma_y_analytical(x=3)=0.4594
```

Die analytisch und die numerisch berechneten Mittelwerte und Standardabweichungen sind sich sehr ähnlich und man erkennt deutlich, dass beide Varianten sinnvoll sind. Man sollte immer abwägen ob eine analytische Berechnung machbar ist, aber die numerische Berechnung liefert auch gute Ergebnisse.

[ ]:
```

```

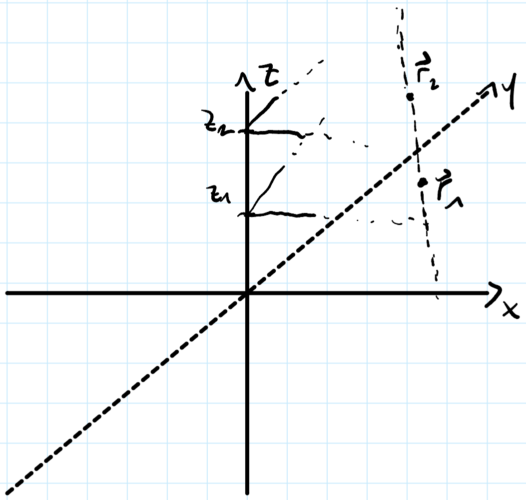
Aufgabe 28 *Teilchenspuren* **5 P.**

In einem Teilchenphysikexperiment stehen 2 Ebenen von Driftkammern senkrecht zur z-Achse an den Positionen z_1 und z_2 (kein Magnetfeld, Vakuum). Sie messen die jeweilige x-Position (x_1 und x_2) eines hindurchfliegenden geladenen Teilchens mit den Fehlern σ_{x_1} und σ_{x_2} ohne Korrelation.

(a) Berechnen Sie die Geradengleichung

$$x = az + b,$$

die die Bewegung des Teilchens in der x–z-Ebene beschreibt, sowie die Fehler, die Kovarianzmatrix und den Korrelationskoeffizienten von a und b.



$x = az + b$

gegeben (x_1, z_1) und (x_2, z_2)

- a und b:

$$x_1 = a z_1 + b \iff b = x_1 - a z_1$$

$$x_2 = a z_2 + b = a z_2 + x_1 - a z_1$$

$$\iff x_2 - x_1 = a(z_2 - z_1)$$

$$\iff a = \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1}$$

$$b = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} \cdot z_1$$

- Fehler: Gauß'sche Fehlerfortpflanzung ohne Korrelation

$$\sigma_a = \left[\left(\frac{\partial a}{\partial x_1}\sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial x_2}\sigma_{x_2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{\partial a}{\partial x_1} = -\frac{1}{z_2 - z_1} \qquad \frac{\partial a}{\partial x_2} = \frac{1}{z_2 - z_1}$$

$$= \left[\left(\frac{\sigma_{x_1}}{z_2 - z_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{x_2}}{z_2 - z_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_a = \frac{1}{z_2 - z_1}\sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}$$

$$\sigma_b = \left[\left(\frac{\partial b}{\partial x_1}\sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial x_2}\sigma_{x_2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{\partial b}{\partial x_1} = 1 + \frac{z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_2}{z_2 - z_1} \qquad \frac{\partial b}{\partial x_2} = -\frac{z_1}{z_2 - z_1}$$

$$= \left[\left(\frac{z_2}{z_2 - z_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{-z_1}{z_2 - z_1}\right)^2 \sigma_{x_2}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_b = \frac{1}{z_2 - z_1}\sqrt{z_2^2 \sigma_{x_1}^2 + z_1^2 \sigma_{x_2}^2}$$

- Kovarianzmatrix zw. a und b

da für die Trafo in die Form $\vec{a} = \underline{B}\,\vec{x}$

wobei: $\vec{a} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} \\ b &= x_1 - \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} \cdot z_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= \frac{-x_1}{z_2 - z_1} + \frac{x_2}{z_2 - z_1} \\ b &= \frac{(z_2 - z_1)x_1 + x_1 \cdot z_1}{z_2 - z_1} + \frac{-x_2 \cdot z_1}{z_2 - z_1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{B} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{z_2 - z_1} & \frac{1}{z_2 - z_1} \\ \frac{z_2}{z_2 - z_1} & \frac{-z_1}{z_2 - z_1} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{B} = \frac{1}{z_2 - z_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ z_2 & -z_1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{aus Vorlesung} \quad \vec{y} = \underline{B}\,\vec{x} \Rightarrow \underline{Var}[\vec{y}] = \underline{B} \cdot \underline{Var}[\vec{x}] \cdot \underline{B}^T}$$

hier ist $Var[\vec{x}] = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 \end{pmatrix}$ und $\underline{B} = \frac{1}{z_2 - z_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ z_2 & -z_1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Var[\vec{a}] = \left(\frac{1}{z_2 - z_1}\right)^2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ z_2 & -z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & z_2 \\ 1 & -z_1 \end{pmatrix}$$

$$= (z_2 - z_1)^{-2} \begin{pmatrix} -\sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_2}^2 \\ z_2 \sigma_{x_1}^2 & -z_1 \sigma_{x_2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & z_2 \\ 1 & -z_1 \end{pmatrix}$$

$$= (z_2 - z_1)^{-2} \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 & -z_2 \sigma_{x_1}^2 - z_1 \sigma_{x_2}^2 \\ -z_2 \sigma_{x_1}^2 - z_1 \sigma_{x_2}^2 & z_2^2 \sigma_{x_1}^2 + z_1^2 \sigma_{x_2}^2 \end{pmatrix}$$

Korrelationskoeffizient:

$$\rho_{ab} = \frac{cov(a,b)}{\sigma_a \cdot \sigma_b} \qquad cov(a,b) = -(z_2 \sigma_{x_1}^2 + z_1 \sigma_{x_2}^2) \cdot (z_2 - z_1)^2$$

$$\sigma_a = \frac{1}{z_2 - z_1} \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}$$

$$\sigma_b = \frac{1}{\ \ } \cdot \sqrt{z_2^2 \sigma^2 + z_1^2 \sigma_x^2}$$

$$\sigma_b = \frac{1}{z_2 - z_1}\sqrt{z_2^2\,\sigma_{x_1}^2 + z_1^2\,\sigma_{x_2}^2}$$

$$\rho_{ab} = \frac{\cancel{(z_2 - z_1)^2}}{\cancel{(z_2 - z_1)^2}} \cdot \frac{-z_2\,\sigma_{x_1}^2 - z_1\,\sigma_{x_2}^2}{\sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}\cdot\sqrt{z_2^2\,\sigma_{x_1}^2 + z_1^2\,\sigma_{x_2}^2}}$$

(b) Die Messungen in den beiden Driftkammerebenen bei z_1 und z_2 sollen nun verwendet werden, um die Position des Teilchens im nächsten Detektorelement vorherzusagen. Dies sei eine weitere Driftkammerebene parallel zu den ersten beiden bei $z = z_3$. Berechnen Sie also mit Hilfe der in (a) bestimmten Geradengleichung die Position x_3 und ihren Fehler bei $z = z_3$.

$$x = a\,z + b$$

$$x_3 = a \cdot z_3 + b$$

$$\sigma_{x_3} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_3}{\partial a}\cdot\sigma_a\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial b}\,\sigma_b\right)^2 + 2\cdot\frac{\partial x_3}{\partial a}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial b}\cdot \mathrm{cov}(a,b)}$$

$$= \sqrt{z_3^2\,\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + 2\cdot z_3\cdot \mathrm{cov}(a,b)}$$

(c) Wie ändert sich der Fehler von x_3, wenn Sie fälschlich die Korrelation zwischen a und b nicht berücksichtigen?

$$\sigma_{x_3} = \sqrt{z_3^2\,\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$$