

Programación con invariantes 2

Ejercicio 1

Calcular la suma de todos los números primos positivos mayores a 2 hasta n (inclusive):

```
1 int suma = 0;
2 int i = 3;
3 while(i <= n) {
4     if (esPrimo(i)){
5         suma = suma + i;
6     }
7     i++;
8 }
9 return suma;
```



Invariantes

1. En general, un buen invariante debe incluir el rango de la(s) variable(s) de control del ciclo.
2. Además, debe incluir alguna afirmación sobre el acumulador del ciclo.

Ejercicio 1

Calcular la suma de todos los números primos positivos mayores a 2 hasta n (inclusive):

```
1 int suma = 0;
2 int i = 3;
3 while(i <= n) {
4     if (esPrimo(i)){
5         suma = suma + i;
6     }
7     i++;
8 }
9 return suma;
```



Ejercicio 1

Calcular la suma de todos los números primos positivos mayores a 2 hasta n (inclusive):

$$I \equiv 3 \leq i \leq n + 1 \wedge suma = \sum_{k=3}^i \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi}$$

```
1 int suma = 0;
2 int i = 3;
3 while(i <= n) {
4     if (esPrimo(i)){
5         suma = suma + i;
6     }
7     i++;
8 }
9 return suma;
```

$$P_c \equiv i = 3 \wedge suma = 0 \wedge n > 2$$

$$Q_c \equiv i = n + 1 \wedge suma = \sum_{k=3}^n \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi}$$

Ejercicio 1

$$P_c \Rightarrow I \quad ?$$

$$i = 3 \wedge suma = 0 \wedge n > 2 \Rightarrow 3 \leq i \leq n + 1 \wedge suma = \sum_{k=3}^i \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi} \quad ?$$

- $i = 3 \wedge suma = 0 \wedge n > 2 \Rightarrow 3 \leq i \leq n + 1$ 👍

- $i = 3 \wedge suma = 0 \wedge n > 2 \Rightarrow suma = \sum_{k=3}^i \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi}$ 👎

$$0 = \sum_{k=3}^3 \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi} \equiv 0 = 3$$



Ejercicio 1

Calcular la suma de todos los números primos positivos mayores a 2 hasta n (inclusive):

$$I \equiv 3 \leq i \leq n + 1 \wedge suma = \sum_{k=3}^i \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi}$$

```
1 int suma = 0;
2 int i = 3;
3 while(i <= n) {
4     if (esPrimo(i)){
5         suma = suma + i;
6     }
7     i++;
8 }
9 return suma;
```

$$P_c \equiv i = 3 \wedge suma = 0 \wedge n > 2$$

$$Q_c \equiv i = n + 1 \wedge suma = \sum_{k=3}^n \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi}$$

Ejercicio 1

Calcular la suma de todos los números primos positivos mayores a 2 hasta n (inclusive):

$$I \equiv 3 \leq i \leq n + 1 \wedge suma = \sum_{k=3}^{i-1} \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi}$$

```
1 int suma = 0;
2 int i = 3;
3 while(i <= n) {
4     if (esPrimo(i)){
5         suma = suma + i;
6     }
7     i++;
8 }
9 return suma;
```


$$P_c \equiv i = 3 \wedge suma = 0 \wedge n > 2$$

$$Q_c \equiv i = n + 1 \wedge suma = \sum_{k=3}^n \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi}$$

Ejercicio 1

$$P_c \Rightarrow I \quad ?$$

$$i = 3 \wedge suma = 0 \wedge n > 2 \Rightarrow 3 \leq i \leq n + 1 \wedge suma = \sum_{k=3}^{i-1} \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi} \quad ?$$

- $i = 3 \wedge suma = 0 \wedge n > 2 \Rightarrow 3 \leq i \leq n + 1$ 

- $i = 3 \wedge suma = 0 \wedge n > 2 \Rightarrow \mid suma = \sum_{k=3}^{i-1} \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi}$

$$0 = \sum_{k=3}^2 \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi} \equiv 0 = 0$$



Ejercicio 1

$$I \wedge \neg B \Rightarrow Q_C \text{ ?}$$

$$3 \leq i \leq n + 1 \wedge suma = \sum_{k=3}^{i-1} \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi} \wedge \neg(i \leq n) \Rightarrow$$

$$i = n + 1 \wedge suma = \sum_{k=3}^n \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi} \text{ ?}$$

- $3 \leq i \leq n + 1 \wedge suma = \sum_{k=3}^{i-1} \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi} \wedge \neg(i \leq n) \Rightarrow i = n + 1 \text{ ?}$

$$\neg(i \leq n) \equiv i > n \equiv i \geq n + 1$$

$$3 \leq i \leq n + 1 \wedge i \geq n + 1 \Rightarrow i = n + 1 \text{ 👍}$$

Ejercicio 1

$$I \wedge \neg B \Rightarrow Q_C \text{ ?}$$

$$3 \leq i \leq n + 1 \wedge suma = \sum_{k=3}^{i-1} \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi} \wedge \neg(i \leq n) \Rightarrow$$

$$i = n + 1 \wedge suma = \sum_{k=3}^n \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi} \text{ ?}$$

- $$3 \leq i \leq n + 1 \wedge suma = \sum_{k=3}^{i-1} \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi} \wedge \neg(i \leq n)$$

$$\Rightarrow suma = \sum_{k=3}^n \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi} \text{ ?}$$



Ejercicio 1

- $3 \leq i \leq n + 1 \wedge suma = \sum_{k=3}^{i-1} \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi} \wedge \neg(i \leq n)$

$$\Rightarrow suma = \sum_{k=3}^n \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi} \quad ?$$

$$\neg(i \leq n) \equiv i > n \equiv i \geq n + 1$$

$$3 \leq i \leq n + 1 \wedge i \geq n + 1 \Rightarrow i = n + 1 \wedge suma = \sum_{k=3}^{i-1} \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi}$$

$$\Rightarrow suma = \sum_{k=3}^n \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi}$$



Ejercicio 1

Calcular la suma de todos los números primos positivos mayores a 2 hasta n (inclusive)

$$I \equiv 3 \leq i \leq n + 1 \wedge suma = \sum_{k=3}^{i-1} \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi}$$

```
1 int suma = 0;
2 int i = 3;
3 while(i <= n) {
4     if (esPrimo(i)){
5         suma = suma + i;
6     }
7     i++;
8 }
9 return suma;
```

Ejemplo:
 $n = 7$

Principio de Iteración

Iteración	i	suma
1	3	0
2	4	3
3	5	3
4	6	8
5	7	8

Final de Iteración

Iteración	i	suma
1	4	3
2	5	3
3	6	8
4	7	8
5	8	15

Ejercicio 2

Calcular la suma de todos los números primos positivos mayores a 2 hasta n (inclusive) respetando el siguiente invariante:

$$I \equiv 3 \leq i \leq n + 2 \wedge i \bmod 2 = 1 \wedge suma = \sum_{k=3}^{i-2} \text{if } esPrimo(k) \text{ then } k \text{ else } 0 \text{ fi}$$

```
1 int suma = 0;
2 int i = 3;
3 while(i <= n) {
4   if (esPrimo(i)){
5     suma = suma + i;
6   }
7   i = i + 2;
8 }
9 return suma;
```

Ejemplo:
 $n = 7$

Principio de Iteración

Iteración	i	suma
1	3	0
2	5	3
3	7	8

Final de Iteración

Iteración	i	suma
1	5	3
2	7	8
3	9	15

- $P_C \Rightarrow I$?
- $I \wedge \neg B \Rightarrow Q_C$?
- Vale el Invariante al principio y al final de cada iteración ?

Invariantes

En general vamos a querer tener invariantes que capturen adecuadamente el comportamiento del ciclo

¿Cómo sabemos si un invariante es adecuado?

- Podemos ver:

- ▶ $P_C \Rightarrow I,$

- ▶ $I \wedge \neg B \Rightarrow Q_C,$

- ▶ Vale el Invariante al principio y al final de cada iteración

Cuidado: No es una demostración, es un chequeo que nos va a permitir encontrar errores (si los hay).