Algoritmos sobre secuencias ya ordenadas

Algoritmos y Estructuras de Datos I

Apareo (merge) de secuencias ordenadas

- **Problema:** Dadas dos secuencias ordenadas, unir ambas secuencias en un única secuencia ordenada.
- Especificación:

  proc $merge(\text{in } a, b : seq\langle\mathbb{Z}\rangle, \text{out } result : seq\langle\mathbb{Z}\rangle)\{$
  $\quad \text{Pre } \{ordenado(a) \ \wedge \ ordenado(b)\}$
  $\quad \text{Post } \{ordenado(result) \ \wedge \ mismos(result, a++b)\}$
  $\}$

  pred $mismos(s, t : seq\langle\mathbb{Z}\rangle)\{$
  $\quad (\forall x : \mathbb{Z})(\#apariciones(s, x) = \#apariciones(t, x)$
  $\}$
- ¿Cómo lo podemos implementar?
  - Podemos copiar los elementos de a y b a la secuencia c, y después ordenar la secuencia c.
  - Pero selection sort e insertion sort iteran apróximadamente $|c|^2$
  - ¿Se podrá aparear ambas secuencias en una única pasada?

Apareo de secuencias ordenadas

Ejemplo:

- $a =$

1	3	5	7	9	
↑	↑	↑	↑	↑	↑
i	i	i	i	i	i

- $b =$

2	4	6	8	
↑	↑	↑	↑	↑
j	j	j	j	j

- $c =$

?1	?2	?3	?4	?5	?6	?7	?8	?9	
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k

Apareo de secuencias

- ¿Qué invariante de ciclo tiene esta implementación?

$$
\begin{aligned}
I \quad \equiv \quad & ordenado(a) \land ordenado(b) \land |c| = |a| + |b| \\
\land \quad & ((0 \leq i \leq |a| \ \land \ 0 \leq j \leq |b| \ \land \ k = i + j) \\
\land_L \quad & (mismos(subseq(a, 0, i) + + subseq(b, 0, j), subseq(c, 0, k)) \\
\land \quad & ordenado(subseq(c, 0, k)))) \\
\land \quad & i < |a| \ \rightarrow_L \ (\forall t : \mathbb{Z})(0 \leq t < j \rightarrow_L b[t] \leq a[i]) \\
\land \quad & j < |b| \ \rightarrow_L \ (\forall t : \mathbb{Z})(0 \leq t < i \rightarrow_L a[t] \leq b[j])
\end{aligned}
$$

- ¿Qué función variante debería tener esta implementación?

$$fv = |a| + |b| - k$$

Apareo de secuencias

```
vector<int> merge(vector<int> &a, vector<int> &b) {
  vector<int> c(a.size()+b.size());
  int i = 0; // Para recorrer a
  int j = 0; // Para recorrer b
  int k = 0; // Para recorrer c

  while( k < c.size() ) {
    if( /*Si tengo que avanzar i */ ) {
      c[k++] = a[i++];
    } else if(/* Si tengo que avanzar j */)  {
      c[k++] = b[j++];
    }
  }
  return c;
}
```

- ¿Cuándo tengo que avanzar i? Cuando j está fuera de rango ó cuando i y j están en rango y $a[i] < b[j]$
- ¿Cuándo tengo que avanzar j? Cuando no tengo que avanzar i

Apareo de secuencias

```
vector<int> merge(vector<int> &a, vector<int> &b) {
  vector<int> c(a.size()+b.size(),0);
  int i = 0; // Para recorrer a
  int j = 0; // Para recorrer b
  for(int k=0; k < c.size(); k++) {
    if( j>=b.size() || ( i<a.size() && a[i] < b[j] )) {
      c[k] = a[i];
      i++;
    } else  {
      c[k] = b[j];
      j++;
    }
  }
  return c;
}
```

- Al terminar el ciclo, ¿ya está la secuencia c con los valores finales?

Apareo de secuencias

```
vector<int> merge(vector<int> &a, vector<int> &b) {
  vector<int> c(a.size()+b.size(),0);
  int i = 0; // Para recorrer a
  int j = 0; // Para recorrer b
  for(int k=0; k < c.size(); k++) {
    if( j>=b.size() || ( i<a.size() && a[i] < b[j] )) {
      c[k] = a[i];
      i++;
    } else  {
      c[k] = b[j];
      j++;
    }
  }
  return c;
}
```

- ¿Cuál es el tiempo de ejecución de peor caso de `merge`?

Tiempo de ejecución de peor caso

```
vector<int> merge(vector<int> &a, vector<int> &b) {
  vector<int> c(a.size()+b.size(),0); // inicializa O(|a|+|b|)
  int i = 0; // O(1)
  int j = 0; // O(1)
  for(int k=0; k < c.size(); k++) { // O(1)
    if( j>=b.size() || (i<a.size() && a[i] < b[j] )) { //O(1)
      c[k] = a[i]; // O(1)
      i++; // O(1)
    } else  {
      c[k] = b[j]; // O(1)
      j++; // O(1)
    }
  }
  return c; // copia secuencia O(|a|+|b|)
}
```

- Sea $n = |c| = |a| + |b|$
- El `while` se ejecuta $n + 1$ veces.
- Por lo tanto, $T_{merge}(n) \in O(n)$

The welfare crook

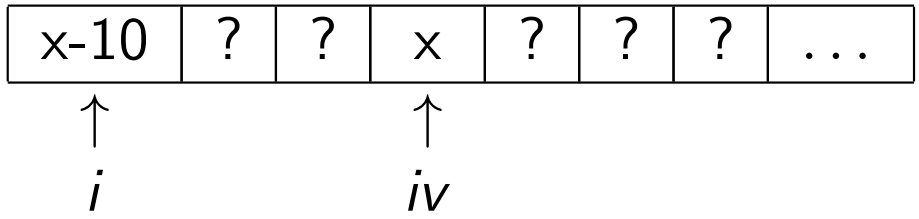
- **Problema:** Dadas tres secuencias ordenadas, sabemos que hay al menos un elemento en común entre ellos. Encontrar los índices donde está al menos uno de estos elementos repetidos.
- Usamos iv, jv y kv para denotar las posiciones en las que las secuencias coinciden.
- proc $crook(\text{in } a, b, c : seq\langle\mathbb{Z}\rangle, \text{out } i, j, k : \mathbb{Z})\{$

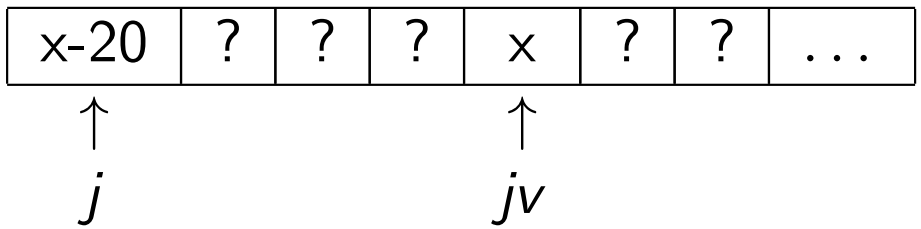
  Pre $\{ordenado(a) \ \wedge \ ordenado(b) \ \wedge \ ordenado(c)$
  $\wedge(\exists iv, jv, kv : \mathbb{Z})$
  $\big((0 \leq iv < |a| \wedge \ 0 \leq jv < |b| \wedge \ 0 \leq kv < |c|)$
  $\wedge_L \ a[iv] = b[jv] = c[kv]\big)\}$

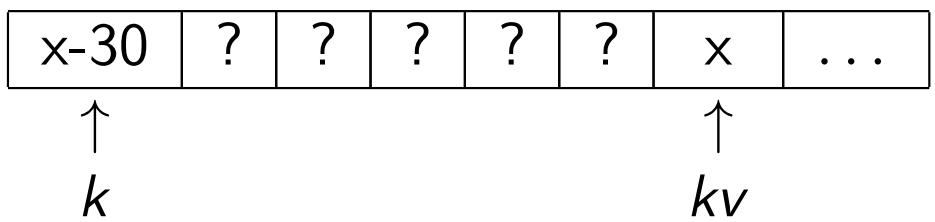
  Post $\{\big(0 \leq i < |a| \wedge \ 0 \leq j < |b| \wedge \ 0 \leq k < |c|\big) \wedge_L$
  $a[i] = b[j] = c[k]\}$

  $\}$

The welfare crook

- $a =$ 

- $b =$ 

- $c =$ 

- ¿Cuál es el invariante de esta implementación?

$$I \equiv 0 \leq i \leq iv \ \wedge \ 0 \leq j \leq jv \ \wedge \ 0 \leq k \leq kv$$

- ¿Cuál es una función variante para esta implementación?

$$fv = (iv - i) + (jv - j) + (kv - k)$$

The welfare crook

- Comenzamos con $i = j = k = 0$, y vamos subiendo el valor de estas variables.

```
void crook(vector<int> &a, vector<int> &b, vector<int> &c,
     int &i, int &j, int &k) {
  i = 0, j = 0, k = 0;
  while( a[i] != b[j] || b[j] != c[k] ) {
    // Incrementar i, j o k!
  }
  // i=iv, j=jv, k=kv
}
```

The welfare crook

- ¿A cuál de los índices podemos incrementar?
- Alcanza con avanzar cualquier índice que no contenga al máximo entre $a[i]$, $b[j]$ y $c[k]$
- En ese caso, el elemento que no es el máximo no es el elemento buscado

```
i = 0, j = 0, k = 0;
while( a[i] != b[j] || b[j] != c[k] ) {
  if( a[i] < b[j] ) {
    i++;
  } else if( b[j] < c[k] ) {
    j++;
  } else {
    k++;
  }
}
```

The welfare crook

```
i = 0, j = 0, k = 0;
while( a[i] != b[j] || b[j] != c[k] ) {
  if( a[i] < b[j] ) {
    i++;
  } else if( b[j] < c[k] ) {
    j++;
  } else {
    k++;
  }
}
```

- ¿Por qué se preserva el invariante?
  1. $I \wedge B \wedge a[i] < b[j]$ implica $i < iv$, entonces es seguro avanzar i.
  2. $I \wedge B \wedge b[j] < c[k]$ implica $j < jv$, entonces es seguro avanzar j.
  3. $I \wedge B \wedge a[i] \geq b[j] \wedge b[j] \geq c[k]$ implica $k < kv$, por lo tanto es seguro avanzar k.

The welfare crook

```
void crook(vector<int> &a, vector<int> &b, vector<int> &c,
     int &i, int &j, int &k) {
  i = 0, j = 0, k = 0;
  while( a[i] != b[j] || b[j] != c[k] ) {
    if( a[i] < b[j] ) {
      i++;
    } else if( b[j] < c[k] ) {
      j++;
    } else {
      k++;
    }
  }
}
```

- ¿Cuántas iteraciones realiza este programa en **peor caso** (i.e. como máximo)?

Tiempo de ejecución de peor caso

```
void crook(vector<int> &a, vector<int> &b, vector<int> &c,
  int &i, int &j, int &k) {
  i = 0, j = 0, k = 0; // O(1)
  while( a[i] != b[j] || b[j] != c[k] ) { // O(1)
    if( a[i] < b[j] ) { // O(1)
      i++; // O(1)
    } else if( b[j] < c[k] ) { // O(1)
      j++; // O(1)
    } else {
      k++; // O(1)
    }
  }
}
```

- El `while` se ejecuta como mucho $|a| + |b| + |c|$ veces
- Sea $n = |a|$, $m = |b|$, $l = |c|$,
- $T_{crook}(n, m, l) \in O(n + m + l)$

Bibliografía

- Vickers et al. - Reasoned Programming
  - 6.6 - Sorted Merge (apareo)
- David Gries - The Science of Programming
  - Chapter 16 - Developing Invariants (Welfare Crook)