



## 1. Secuencias

**Ejercicio 1.** ★ Evaluar las siguientes expresiones:

- |  |  |
|--|--|
| a) $ \langle 4, 3, 1 \rangle $                                     | f) $\text{subseq}(\langle 2, 3, 5, 7, 11 \rangle, 0, 3)$     |
| b) $\text{addFirst}(\pi, \langle 2, 3, 5, 7, 11 \rangle)$          | g) $\pi \in \langle 2, 3, 5, 7, 11 \rangle$                  |
| c) $\langle 0, 1, 2, 3 \rangle[3]$                                 | h) $\text{subseq}(\langle 2, 3, 5, 7, 11 \rangle, 3, 2)$     |
| d) $\text{concat}(\langle 2, 3 \rangle, \langle 5, 7, 11 \rangle)$ | i) $1 \in \langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$                     |
| e) $\text{head}(\text{tail}(\langle 5, 6, 7, 8 \rangle))$          | j) $\text{subseq}(\langle 2, 3, 5, 7, 11 \rangle, 0, 65536)$ |

**Ejercicio 2.** ★ Sea  $x$  de tipo  $\text{seq}(\mathbb{Z})$ . ¿Cuáles de las siguientes igualdades sobre secuencias son válidas?

- |  |  |
|--|--|
| a) $ x  =  \text{tail}(x)  + 1$  | e) $x = \text{addFirst}(\text{head}(x), \text{tail}(x))$ |
| b) $x = \text{subseq}(x, 0,  x  - 1)$  | f) $x[0] = \text{head}(x)$                               |
| c) $x = \text{subseq}(x, 0,  x )$  | g) $i \in x = \text{head}(\text{subseq}(x, i, i + 1))$   |
| d) $\text{concat}(\text{addFirst}(3, x), y) = \text{addFirst}(3, \text{concat}(x, y))$ | h) $\text{tail}(x) = \text{subseq}(x, 1,  x )$           |

En los casos incorrectos, ¿puede dar condiciones sobre las listas en cuestión para que lo sean?

**Ejercicio 3.** ★ Sea  $s_0, s_1$  secuencias de tipo  $T$  y  $e$  un elemento de tipo  $T$ . Indicar para cada una de las siguientes afirmaciones si son verdaderas o falsas. En caso de ser falsa, mostrar un contraejemplo.

- a)  $|\text{addFirst}(e, s_0)| = 1 + |s_0|$
- b)  $|\text{addFirst}(e, s_0)| = |\text{tail}(s_0)|$
- c)  $|\text{concat}(s_0, s_1)| = |s_0| + |s_1|$
- d)  $s_0 = \text{tail}(\text{addFirst}(e, s_0))$
- e)  $\text{head}(\text{addFirst}(e, s_0)) = e$
- f)  $\text{addFirst}(e, s_0) = \text{tail}(s_0)$
- g)  $\text{head}(\text{addFirst}(e, \text{tail}(s_0))) = \text{head}(\text{tail}(\text{addFirst}(e, s_0)))$
- h)  $\text{addFirst}(e, s_0)[0] = e$
- i)  $\text{addFirst}(e, s_0)[0] = \text{head}(\text{addFirst}(e, s_0))$

**Ejercicio 4.** ★ Escriba las siguientes predicados auxiliares sobre secuencias de enteros, aclarando los tipos de los parámetros que recibe:

- a) *capicúa*, que es verdadera sii una secuencia es capicúa. (Por ejemplo,  $\langle 0, 2, 1, 2, 0 \rangle$  es capicúa y  $\langle 0, 2, 1, 4, 0 \rangle$  no).
- b) *esPrefijo*, que es verdadera sii una secuencia es prefijo de otra.
- c) *estáOrdenada*, que es verdadera sii la secuencia está ordenada de menor a mayor.

- d) *todosPrimos*, que es verdadera sii todos los elementos de la secuencia son números primos.
- e) *todosIguales*, que es verdadera sii todos los elementos de la secuencia son iguales.
- f) *hayUnoParQueDivideAlResto*, que determina si hay un elemento par en la secuencia que divide a todos los otros elementos de la secuencia.
- g) *hayUnoEnPosiciónParQueDivideAlResto*, que determina si hay un elemento en una posición par de la secuencia que divide a todos los otros elementos contenidos en la secuencia.
- h) *sinRepetidos*, que determina si la secuencia no tiene repetidos.
- i) *otroMayorADerecha*, que determina si todo elemento de la secuencia, salvo el último, tiene otro mayor a su derecha.
- j) *todoEsMúltiplo*, que determina si todo elemento de la secuencia es múltiplo de algún otro.
- k) *enTresPartes*, que determina si en la secuencia aparecen (de izquierda a derecha) primero 0s, después 1s y por último 2s. Por ejemplo  $\langle 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2 \rangle$  cumple con *enTresPartes*, pero  $\langle 0, 1, 3, 0 \rangle$  o  $\langle 0, 0, 0, 1, 1 \rangle$  no. ¿Cómo modificaría la expresión para que se admitan cero apariciones de 0s, 1s y 2s (es decir, para que por ejemplo  $\langle 0, 0, 0, 1, 1 \rangle$  o  $\langle \rangle$  sí cumplan *enTresPartes*)?

**Ejercicio 5.** Especificar las siguientes funciones y predicados auxiliares. En caso de no ser posible, explicar las razones.

- a) *fun intercambiarPrimeroPorUltimo*( $s : \text{seq}(\mathbb{Z})$ ) :  $\text{seq}(\mathbb{Z})$ . Que intercambia el último valor por el primero en una secuencia.
- b) *pred esReverso*( $s : \text{seq}(\mathbb{Z})$ ,  $t : \text{seq}(\mathbb{Z})$ ). Que indica si la secuencia  $s$  es el reverso de la secuencia  $t$ .
- c) *fun reverso*( $s : \text{seq}(\mathbb{Z})$ ) :  $\text{seq}(\mathbb{Z})$ . Que indica el reverso de una secuencia.
- d) *fun agregarTresCeros*( $s : \text{seq}(\mathbb{Z})$ ) :  $\text{seq}(\mathbb{Z})$ . Que agrega 3 ceros al final de la secuencia  $s$ .
- e) *fun agregarNCeros*( $s : \text{seq}(\mathbb{Z})$ ,  $n : \mathbb{Z}$ ) :  $\text{seq}(\mathbb{Z})$ . Que agrega  $n$  ceros al final de la secuencia  $s$ .
- f) *fun sumarUno*( $s : \text{seq}(\mathbb{Z})$ ) :  $\text{seq}(\mathbb{Z})$ . Que suma 1 a cada uno de los elementos de la secuencia  $s$ .
- g) *fun ordenar*( $s : \text{seq}(\mathbb{Z})$ ) :  $\text{seq}(\mathbb{Z})$ . Que ordena la lista de menor a mayor.

**Ejercicio 6. ★** Sean  $P(x : \mathbb{Z})$  y  $Q(x : \mathbb{Z})$  dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen y sea  $s$  una secuencia de enteros. Escribir el predicado asociado a cada uno de los siguientes enunciados:

- a) “Si un entero en  $s$  cumple  $P$ , también cumple  $Q$ ”
- b) “Todos los enteros de  $s$  que cumplen  $P$ , no cumplen  $Q$ ”
- c) “Todos los enteros de  $s$  que están en posiciones pares y cumplen  $P$ , no cumplen  $Q$ ”
- d) “Todos los enteros de  $s$  que cumplen  $P$  y están en posiciones que cumplen  $Q$ , son pares”
- e) “Si hay un entero en  $s$  que no cumple  $P$  entonces ninguno en  $s$  cumple  $Q$ ”
- f) “Si hay un entero en  $s$  que no cumple  $P$  entonces ninguno en  $s$  cumple  $Q$ ; y si todos los enteros de  $s$  cumplen  $P$  entonces hay al menos dos elementos de  $s$  que cumplen  $Q$ ”

**Ejercicio 7.** Sea  $P(x : \mathbb{Z})$  un predicado cualquiera y  $s$  una secuencia de enteros. Explicar cuál es el error de traducción a fórmulas de los siguientes enunciados. Dar un ejemplo en el cuál sucede el problema y luego corregirlo.

- a) “Todo elemento en una posición válida de la secuencia cumple  $P$ ”:  $(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < |s|) \wedge_L P(s[i]))$
- b) “Algún elemento en una posición válida de la secuencia cumple  $P$ ”:  $(\exists i : \mathbb{Z})((0 \leq i < |s|) \rightarrow_L P(s[i]))$

**Ejercicio 8. ★**

Sean  $P(x : \mathbb{Z})$  y  $Q(x : \mathbb{Z})$  dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen, sea  $s$  una secuencia de enteros y sean  $a$ ,  $b$  y  $k$  enteros. Decidir en cada caso la relación de fuerza entre las dos fórmulas:

- a)  $P(3)$  y  $(\forall k : \mathbb{Z})((0 \leq k < 10) \rightarrow P(k))$

- b)  $P(3)$  y  $k > 5 \wedge (\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < k) \rightarrow P(i))$
- c)  $(\forall n : \mathbb{Z})((n \in s \wedge P(n)) \rightarrow Q(n))$  y  $(\forall n : \mathbb{Z})((n \in s) \rightarrow Q(n))$
- d)  $(\exists n : \mathbb{Z})(n \in s \wedge P(n) \wedge Q(n))$  y  $(\forall n : \mathbb{Z})((n \in s) \rightarrow Q(n))$
- e)  $(\exists n : \mathbb{Z})(n \in s \wedge P(n) \wedge Q(n))$  y  $|s| > 0 \wedge ((\forall n : \mathbb{Z})((n \in s) \rightarrow Q(n)))$
- f)  $(\exists n : \mathbb{Z})(n \in s \wedge P(n) \wedge Q(n))$  y  $(\forall n : \mathbb{Z})(n \in s \rightarrow (P(n) \wedge Q(n)))$

**Ejercicio 9.** Sea  $s$  una secuencia de enteros. Determinar si los siguientes pares de expresiones son equivalentes. En caso de que no lo sean, ilustrar con ejemplos.

- a) ■  $(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < |s|) \rightarrow_L ((\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s|) \wedge i < j) \rightarrow_L s[i] < s[j]))$  y  
 ■  $(\forall j : \mathbb{Z})((0 \leq j < |s|) \rightarrow_L ((\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s|) \wedge i < j) \rightarrow_L s[i] < s[j]))$
- b) ■  $(\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \wedge_L ((\exists j : \mathbb{Z})((0 \leq j < |s| \wedge i < j - 1) \wedge_L \text{TodosIguales}(\text{subseq}(s, i, j)))))$  y  
 ■  $(\exists j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \wedge_L ((\exists i : \mathbb{Z})((0 \leq i < |s| \wedge i < j - 1) \wedge_L \text{TodosIguales}(\text{subseq}(s, i, j)))))$ .  
 donde *todosIguales* es el definido en el item e) del ejercicio 4.
- c) ■  $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \rightarrow_L ((\exists j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \wedge_L s[i] = s[j])))$  y  
 ■  $(\exists j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \wedge_L ((\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s|) \rightarrow_L s[i] = s[j])))$

## 2. Sumatorias y Productorias

**Ejercicio 10.** ★ Evaluar las siguientes expresiones:

- |   |  |
|---|--|
| a) $\sum_{i=0}^2 \langle 4, 3, 1 \rangle[i]$                  | f) $\sum_{i=15}^2 \langle 2, 3, 5, 7, 11 \rangle[i]$   |
| b) $\sum_{i=0}^0 \langle \pi, 2, 3, 5, 7, 11 \rangle[i]$      | g) $\sum_{i=2}^{15} \langle 2, 3, 5, 7, 11 \rangle[i]$ |
| c) $\sum_{i=0}^{-1} \langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle[i]$         | h) $\sum_{i=1}^3 \langle 2, 3, 5, 7, 11 \rangle[i]$    |
| d) $\sum_{i=0}^5 \frac{1}{i}$                                 | i) $\sum_{i=0}^4 \langle 1, 1, 1, 1, 1 \rangle[i]$     |
| e) $\sum_{i=0}^{\sqrt{-1}} \langle 2, 3, 5, 7, 11 \rangle[i]$ | j) $\sum_{i=0}^4 \langle 0, 0, 0, 0, 0 \rangle[i]$     |

**Ejercicio 11.** ★ Escribir un predicado que usando sumatorias indique si un número entero es primo .

**Ejercicio 12.** Sea  $s$  una secuencia de elementos de tipo  $\mathbb{Z}$ . Escribir una expresión tal que:

- a) Cuento la cantidad de veces que aparece el elemento  $e$  de tipo  $\mathbb{Z}$  en la secuencia  $s$ .
- b) Sume los elementos en las posiciones impares de la secuencia  $s$ .
- c) Sume los elementos mayores a 0 contenidos en la secuencia  $s$ .
- d) Sume los inversos multiplicativos ( $\frac{1}{x}$ ) de los elementos contenidos en la secuencia  $s$  distintos a 0.
- e) Cuento la cantidad de elementos primos no repetidos en la secuencia  $s$ .

**Ejercicio 13.** Escribir un predicado que indique si una secuencia es permutación de otra secuencia. Una secuencia es permutación de otra secuencia si ambas secuencias poseen los mismos elementos y la misma cantidad de apariciones por elemento. Ejemplos:

- $\langle 1, 2, 3 \rangle$  es permutación de  $\langle 3, 2, 1 \rangle$
- $\langle 1, 2, 3 \rangle$  es permutación de  $\langle 1, 2, 3 \rangle$
- $\langle 1, 1, 2, 3 \rangle$  es permutación de  $\langle 3, 2, 1, 1 \rangle$

- $\langle 1, 2, 3 \rangle$  no es permutación de  $\langle 1, 1, 3 \rangle$
- $\langle 1, 1, 2, 3 \rangle$  es permutación de  $\langle 1, 3, 2, 1 \rangle$

**Ejercicio 14.** ★ Sea  $m$  una secuencia de secuencias de tipo  $\mathbb{Z}$ , escribir una expresión tal que:

- a) Sume los elementos contenidos en todas las secuencias.
- b) Cuento la cantidad de secuencias vacías
- c) Sume el valor del último elemento de cada secuencia no vacía
- d) Retorne True sii todas las secuencias poseen el mismo tamaño.
- e) Retorne la suma de todas las posiciones impares de cada secuencia.

**Ejercicio 15.** Sea  $s$  un *String*, escribir una expresión que cuente la cantidad de apariciones del caracter vacío (' ').

**Ejercicio 16.** ★ Sea  $s$  un *String*, escribir una expresión que cuente la cantidad de apariciones de un dígito (caracteres '0' al '9').