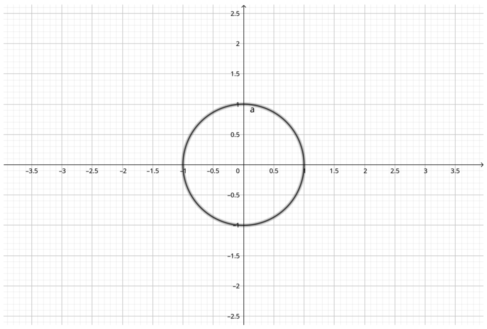
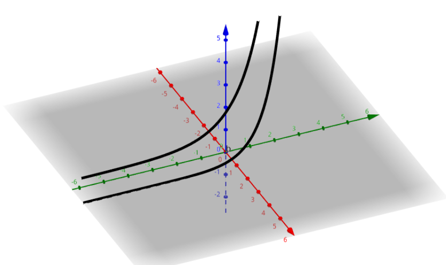
1. a) $\theta(t) = (\sin(t), \cos(t))$
   $\theta : \Re \rightarrow (x, y) \in \Re^2 : |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1$
   - $\sin(t)$ sabemos que es continua en todos los $\Re$
   - $\cos(t)$ sabemos que es continua en todos los $\Re$
   - $\sin(t) + \cos(t)$ por algebra de limites es contina en todos los $\Re$

   b) $\theta(t) = (\frac{\sin(t)}{t}, \ln\big(t^2 - t\big), t^2)$
   - $f(x) = \frac{\sin(t)}{t}$
     $f : \Re - 0 \rightarrow \Re$
     - $\sin(t)$ es continua
     - t es continua
     - $\frac{\sin(t)}{t}$ es continua en todos los puntos menos t = 0
   - $g(x) = \ln\big(t^2 - t\big)$
     - $t^2 - t$ es continua
     - $\ln\big(t^2 - t\big)$ es continua $\Leftrightarrow t^2 - t > 0$ $t^2 - t > 0 \Leftrightarrow t^2 > t \overset{por\ f\ t\neq 0}{\Leftrightarrow} |t| > \sqrt{t} \equiv 0 < t < 1$

     $g : \Re - (0, 1) \rightarrow \Re$
   - $h(x) = t^2$
     $h : \Re \rightarrow \Re$
     t^2 es continua en todo $\Re$

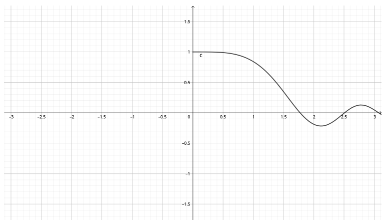
   $\theta(t) : \Re - (0, 1) \rightarrow \Re^3$

   c) $\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t))$
   - $\theta_1(t) = \sqrt{t}$
   - $\theta_2(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & si\ t \neq 0 \\ 1\ si\ t = 0 \end{cases}$
   - $\theta_1(t) = \sqrt{t}$
     $\theta_1(t) : \Re_{\geq 0} \rightarrow \Re_{\geq 0}$
     $\sqrt{t}$ Es continua en todo su dominio
   - $\theta_2(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & si\ t \neq 0 \\ 1\ si\ t = 0 \end{cases}$
     $\theta_2(t) : \Re \rightarrow [1, -1]$
     - $\frac{\sin(t)}{t}$ es continua en todos los puntos menos en $t = 0$
     - $\theta_2(t) es continua \Leftrightarrow$
       $\lim_{x\rightarrow 0} \theta_2(t) = \theta_2(0) \Leftrightarrow$
       $\lim_{x\rightarrow 0} \theta_2(t) = 1$
       $\lim_{x\rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} \overset{L'H}{\equiv}$
       $\lim_{x\rightarrow 0} \frac{\cos(t)}{1} = 1$

$\Rightarrow \theta_2(t)$ es continua en todo su dominio ■

$\theta : \Re_{\geq 0} \to \Re^2$



2. *a*) 1) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} x+y=1$
   $\|(x-1,y)\| < \delta \Rightarrow |x+y-1| < \epsilon$
      - $|x-1| \leq \|(x-1,y)\| < \delta$
      - $|y| \leq \|(x-1,y)\| < \delta$

   $|x+y-1| \leq |x-1| + |y| < 2\cdot\delta \Rightarrow$
   $\delta = \frac{\epsilon}{2}$

   2) $\lim_{(x,y)\to(-1,8)} xy=-8$
   $\|(x+1,y-8)\| < \delta \Rightarrow |xy+8| < \epsilon$
      - $|x+1| \leq \|(x+1,y-8)\| < \delta$
      - $|y-8| \leq \|(x+1,y-8)\| < \delta$

   $|xy+8| = |((x+1)-1)((y-8)+8)+8| =$
   $|(x+1)(y-8)+(x+1)(8)+(-(y-8))-8+8| =$
   $|(x+1)(y-8)+(x+1)(8)+(-(y-8))| \overset{DesigualdadTriangular}{\leq}$
   $|(x+1)(y-8)| + 8|x+1| + |y-8| <$
   $\delta\cdot\delta + 8\delta + \delta = \delta^2 + 9\delta \overset{\delta\leq 1}{\equiv}$
   $10\delta \Rightarrow \delta = \frac{\epsilon}{10}$

   b) 1) $\epsilon = 1 \Rightarrow \delta = \frac{1}{10}$
   2) $\epsilon = \frac{1}{100} \Rightarrow \delta = \frac{1}{1000}$

3. $\lim_{(x,y)\to(2,3)} y\sin(x\cdot y-6)=0$

$\|(x-2,y-3)\| < \delta \Rightarrow |y\cdot\sin(x\cdot y-6)| < \epsilon$

- $|x-2| \leq \|(x-2,y-3)\| < \delta$
- $|y-3| \leq \|(x-2,y-3)\| < \delta$

$|y\cdot\sin(x\cdot y-6)| \equiv$
$|((y-3)+3)\cdot\sin(((x-2)+2)\cdot((y-3)+3)-6)| \equiv$
$|((y-3)+3)\cdot\sin((x-2)(y-3)+3(x-2)+2(y-3)+6-6)| \equiv$
$|((y-3)+3)\cdot\sin((x-2)(y-3)+3(x-2)+2(y-3))| \equiv$
$|(y-3)+3| \cdot |\sin((x-2)(y-3)+3(x-2)+2(y-3))|$
$(x,y)\to(2,3) \Rightarrow (x-2)(y-3)+3(x-2)+2(y-3)\to 0$
$\star : x\to 0 \Rightarrow \mathrm{sen}(x) \leq x$
$|(y-3)+3| \cdot |\sin((x-2)(y-3)+3(x-2)+2(y-3))| \overset{\star}{\leq}$
$|(y-3)+3| \cdot |(x-2)(y-3)+3(x-2)+2(y-3)| \overset{DesTrian}{\leq}$
$(|y-3|+3)\cdot(|x-2|\,|y-3| + 3|x-2| + 2|y-3|\,) =$
$(|y-3|+3)\cdot(|x-2|\,|y-3| + 3|x-2| + 2|y-3|\,) <$
$(\delta+3)\cdot(\delta^2+5\delta) \overset{\delta\leq 1}{\leq}$
$(\delta+3)\cdot(6\delta) =$

$6\delta^2 + 18\delta \overset{\delta\leq 1}{\leq}$

$24\delta = \epsilon \Rightarrow \delta = \text{mín}(1, \frac{\epsilon}{24})$

4. *a)* $\text{lím}_{(x,y)\to(7,2)} x^2 + y^2 - xy$
   $7^2 + 2^4 - (7 \cdot 2) = 39$

   b) $\text{lím}_{(x,y)\to(0,1)} xe^{xy}$
   $0 \cdot 1 = 0$

   c) $\text{lím}_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4-xy}{x^2+3y^2}$
   $\frac{4-2}{4+3(1)} = \frac{2}{7}$

   d) $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{x-y}{x+y}$
   $\text{lím}_{x\to 0} f(x,0) = 1$
   $\text{lím}_{y\to 0} f(0,y) = -1$
   $\Rightarrow$ *Por curvas* $\nexists L$

   e) $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{x^4-4y^2}{x^2+2y^2}$
   $\text{lím}_{x\to 0} f(x,0) = 0$
   $\text{lím}_{y\to 0} f(0,y) = -2$
   $\Rightarrow$ *Por curvas* $\nexists L$

   f) $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{xy}{x^2+y^2}$
   $\text{lím}_{x\to 0} f(x,0) = 0$
   $\text{lím}_{y\to 0} f(0,y) = 0$
   $\text{lím}_{y\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2}$
   $\Rightarrow$ *Por curvas* $\nexists L$

   g) $\text{lím}_{(x,y)\to(1,0)} = \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}$
   $\text{lím}_{x\to 1} f(x,0) = 0$
   $\text{lím}_{y\to 0} f(0,y) = 0$
   $\text{lím}_{x\to 1} f(x,x) = \frac{x(x-1)}{(x-1)^2+x^2} = 0$
   $\text{lím}_{x\to 1} f(x,(x-1)) = \frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2} = \frac{1}{2}$
   $\Rightarrow$ *Por curvas* $\nexists L$

   h) $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   $\text{lím}_{x\to 0} f(x,0) = 0$
   $\text{lím}_{y\to 0} f(0,y) = 0$
   Sospecho que $L = 0$, lo pruebo por definición
   $\|(x,y)\| < \delta \Rightarrow |\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| < \epsilon$

   - $|x| \leq \|(x,y)\| < \delta$
   - $|y| \leq \|(x,y)\| < \delta$

   $|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| =$
   $\frac{|y||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$
   $\frac{|y||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$
   $\frac{|y||y|}{\|(x,y)\|} \leq$
   $\frac{\|(x,y)\|\|(x,y)\|}{\|(x,y)\|} =$
   $\|(x,y)\| \leq \delta \Rightarrow \delta = \epsilon\blacksquare$

   i) $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$
   $\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} =$
   $\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} =$
   $x^2 + y^2$
   $(x,y) \to (0,0) \Rightarrow x^2 + y^2 \to 0 \qquad \blacksquare$

j) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{y^2\sin^2(x)}{x^4+2y^4}$
$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$
$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$
$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin^2(x)}{x^4+2x^4} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin^2(x)}{3x^4} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}} \cdot \overbrace{\frac{\sin(x)}{x}}^{\to 1} \cdot \overbrace{\frac{\sin(x)}{x}}^{\to 1} = \frac{1}{3}$
$\Rightarrow \nexists L$

k) $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{x^2(y-3)^2e^x}{x^2+(y-3)^2}$

- $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(-3)^2e^x}{x^2+(-3)^2} = 0$
- $\lim_{y\to 3} f(0,y) = \lim_{y\to 3} \frac{0}{(y-3)^2} = 0$
- $\lim_{y\to 3} f(y-3,y) = \lim_{y\to 3} \frac{\cancel{(y-3)^2}(y-3)^2e^{y-3}}{2\cancel{(y-3)^2}} =$
  $\lim_{y\to 3} \frac{\overbrace{(y-3)^2}^{\to 0}\overbrace{e^{y-3}}^{\to 1}}{2} = 0$

Sospecho que $L = 0$ pruebo por definición
$\|(x, y-3)\| < \delta \Rightarrow |\frac{x^2(y-3)^2e^x}{x^2+(y-3)^2}| < \epsilon$

- $|x| \leq \|(x, y-3)\| < \delta$
- $|y-3| \leq \|(x, y-3)\| < \delta$

$|\frac{x^2(y-3)^2e^x}{x^2+(y-3)^2}| =$
$\frac{|x^2(y-3)^2e^x|}{x^2+(y-3)^2} =$
$\frac{x^2(y-3)^2|e^x|}{x^2+(y-3)^2} \overset{x\to 0 \Rightarrow e^x\to 1}{=}$
$\frac{x^2(y-3)^2}{x^2+(y-3)^2} \leq$
$\frac{\cancel{\|(x,y-3)\|^2}\|(x,y-3)\|^2}{\cancel{\|(x,y-3)\|^2}} \overset{\delta<1}{\leq}$
$\delta = \epsilon \Rightarrow$
$\delta = \min(1, \epsilon)$ ∎

5.
- $x = r\cdot\cos(\theta)$
- $y = r\cdot\sin(\theta)$

$\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)$

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \equiv$
$\lim_{(r,\theta)\to(0,0)} \frac{r^{\cancel{3}}(\sin^3(\theta)\cos^3(\theta))}{\cancel{r^2}}$
$\lim_{(r,\theta)\to(0,0)} \sin^3(\theta)\cos^3(\theta) = 0$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\cdot\ln\bigl(x^2+y^2\bigr) \equiv$
$\lim_{(r,\theta)\to(0,0)} r^2\bigl(\overbrace{\cancel{(\cos^2(\theta)\sin^2(\theta))}}^{1}\bigr)\cdot\ln\left(r^2\bigl(\overbrace{\cancel{(\cos^2(\theta)\sin^2(\theta))}}^{1}\bigr)\right) \equiv$
$\lim_{(r,\theta)\to(0,0)} r^2\cdot\ln\bigl(r^2\bigr) \equiv$
$\lim_{(r,\theta)\to(0,0)} r^2\cdot 2\cdot\ln(r) = 0$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2} \equiv$
$\lim_{(r,\theta)\to(0,0)} \frac{e^{r^2}-1}{r^2} = 1$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\bigl(x^2+y^2\bigr)}{x^2+y^2} \equiv$
$\lim_{(r,\theta)\to(0,0)} \frac{\sin\bigl(r^2\bigr)}{r^2} = 1$

6. *a)* $f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$
$\lim_{x\to 0} f(x,mx) \equiv$
$\lim_{x\to 0} \frac{x^8m^4}{(x^2+(mx)^4)^3} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{x^8m^4}{(x^4+2x^2(mx)^4+(mx)^8)((x^2+(mx)^4)}$
$\lim_{x\to 0} \frac{x^8m^4}{x^6+3x^8m^4+3x^{10}m^8+m^{12}x^{12}} = 0$

b) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2-x}$
$\lim_{x\to 0} f(x,mx) \equiv$
$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+mx^2-x} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{x\cancel{2}}{\cancel{x}(x(1+m)-1)} = 0$
$\lim_{x\to 0} f(x,x) =$
$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2\cancel{+x}\cancel{-x}} = 1$
Si $m = 0$ da 1, sino 0 $\Rightarrow\ \nexists L$

7. *a)* $f(x,y) = \frac{xy}{1+e^{x-y}}$
Ptos criticos $1 + e^{x-y} = 0 \Leftrightarrow$
$e^{x-y} = -1 \nexists\ (x,y) \in \Re^2 \Rightarrow$

- xy es un polinomio, por lo tanto es continua en $(x,y) \in \Re^2$
- $1 + e^{x-y}$ es continua en todo $(x,y) \in \Re^2$
- $\frac{xy}{1+e^{x-y}}$ es continua en todo $(x,y) \in \Re^2$ ya que el denominador no se anula

b) $f(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}$
f es continua en todos los puntos donde el denominador no se anula
$1 - x^2 - y^2 = 0 \equiv 1 - (x^2+y^2) = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1 \Rightarrow$
f es continua en $\{(x,y) \in \Re^2 : x^2+y^2 \neq 1\}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$
$\frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}$ es continua en todos los puntos donde el denominador no se anula
$2x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$
f es continua en el (0,0) $\Leftrightarrow$

1) $(0,0) \in Dom(f)$ ✓
2) $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ✓
3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ ×

Pruebo por curvas

- $x = 0$ $\lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y^3}{y^2} = 0$

Por el iterado x=0, si el limite existe es 0 que es distinto de 1, Por lo tanto f es continua en todo su dominio menos el (0,0)

d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$
$\frac{xy}{x^2+xy+y^2}$ es continua en todos los puntos donde el denominador no se anula
$x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$
f es continua en el (0,0) $\Leftrightarrow$

1) $(0,0) \in Dom(f)$ ✓
2) $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ×
3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$ ×

Pruebo por curvas

- $x=0 \Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y}{y^2} = 0$
- $y=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2} = 0$
- $y=x$
  $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$

El limite no existe

e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2-\sin(x^2y)}{\frac{1}{2}x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$\frac{xy^2-\sin(x^2y)}{\frac{1}{2}x^2+y^2}$ es continua en todos los puntos donde el denominador no se anula

$\frac{1}{2}x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow x=y=0$

f es continua en el (0,0) $\Leftrightarrow$

1) $(0,0) \in Dom(f)$ ✓
2) $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ✓
3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$ ✓

Pruebo por curvas

- $x=0 \Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{\sin(0)}{y^2} = 0$
- $y=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(0)}{\frac{1}{2}x^2} = 0$

$L=0$ Es candidato

$\exists\delta : \|(x,y)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)| < \epsilon$

$|\frac{xy^2-\sin(x^2y)}{\frac{1}{2}x^2+y^2}| \leq \frac{|x|y^2+|\sin(x^2y)|}{\frac{1}{2}x^2+y^2} \leq \frac{|x|y^2+x^2|y|}{\frac{1}{2}x^2+y^2} \leq \frac{|x|y^2+x^2|y|}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \leq$

$\frac{2\|(x,y)\|^{\cancel{3}}}{\frac{1}{2}\cancel{\|(x,y)\|^2}} \leq 4\delta < \epsilon \Leftrightarrow delta < \frac{\epsilon}{4}$

8. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^3\cos(y)}{(x-1)^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (1,0) \\ a \quad si\ (x,y) = (1,0) \end{cases}$

   Veo el limite de $f(x,y)$ en $(1,0)$

   Pruebo por curvas

   - $x=1 \Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{0\cdot\cos(y)}{(y^2} = 0$
   - $y=0 \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2} = 0$
   - $y=(x-1) \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^{\cancel{3}}\cos(x-1)}{2\cancel{(x-1)^2}} = 0$

   Pruebo por definición

   $\exists\delta : \|(x-1,y)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)| < \epsilon$

   $|\frac{(x-1)^3\cos(y)}{(x-1)^2+y^2}| \leq$

   $\frac{(x-1)^3|\cos(y)|}{(x-1)^2+y^2} \leq$

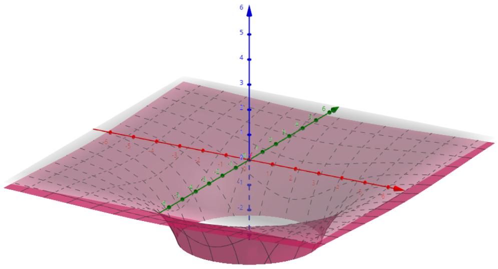
   $\frac{(x-1)^3|\cos(y)|}{(x-1)^2+y^2} \overset{\delta\leq 1}{\leq}$

   $\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2+y^2} \leq$

   $\frac{\|(x-1,y)\|^{\cancel{3}}}{\cancel{\|(x-1,y)\|^2}} = \delta \Rightarrow \delta = \min(1,\epsilon)$

9. $f(x,y) = \frac{20}{1-x^2-y^2}$

   a) $Dom(f) = \{(x,y) \in \Re^2 : \|(x,y)\| \neq 1\}$



b)

c) No, porque no existe el limite

10. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- $x = 0 \Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$
- $y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{0}{x^2} = 0$
- $y = x \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{2x^2}{2x^2} = 1$

Porque no existe el limite

11. a) $f(x,y) = \sin(x)$
$g(x) = \sin(x)$ es continua

b) $f(x,y) = \sin\left(x^2\right) + e^y$
$g(x) = \sin\left(x^2\right) + e^y$ es continua

12. a) $f(x,y) = (x^2, e^x)$
$f(x,y) = (g(x), h(x))$
- $g(x) = x^2$ es continua
- $h(x) = e^x$ es continua

b) $f(x,y) = (\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}, \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2})$
No es continua en el (0,0)