

Práctica 8: Integración

Se sugiere complementar la resolución de los ejercicios de esta práctica con GeoGebra.

Integrales impropias

1. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}, & \text{(b)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{(c)} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx, \\ \text{(d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} & \text{(e)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}, & \text{(f)} \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^5}} dx, \\ \text{(g)} \int_{-1}^3 \frac{dx}{(1-x)^3}, & \text{(h)} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2x) dx, & \text{(i)} \int_0^4 \frac{x}{x^2-4} dx. \end{array}$$

Integración en \mathbb{R}^2

2. Usar una suma de Riemann con $m = n = 2$ para estimar el valor de $\iint_R x e^{-xy} dA$, donde $R = [0, 2] \times [0, 1]$. Tomar los puntos de muestra como las esquinas superiores derechas.
3. Calcular las siguientes integrales identificandolas primero como el volumen de un sólido.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \iint_R 3 dA, \text{ donde } R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 6\}, \\ \text{(b)} \iint_R (5-x) dA, \text{ donde } R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3\}. \end{array}$$

4. Calcular las siguientes integrales.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_1^4 \left(\int_0^2 (6x^2y - 2x) dy \right) dx, & \text{(b)} \int_0^4 \left(\int_0^2 y^3 e^{2x} dx \right) dy, \\ \text{(c)} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\int_{-1}^5 \cos(y) dx \right) dy, & \text{(d)} \int_1^3 \left(\int_1^5 \frac{\ln(y)}{xy} dy \right) dx. \end{array}$$

5. Calcular las siguientes integrales.

(a) $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1} dA$, donde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3\}$,

(b) $\iint_R \frac{x}{1 + xy} dA$, donde $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

6. Calcular el volumen del sólido dado en cada uno de los siguientes casos.

(a) Bajo del paraboloides hiperbólico $z = 3y^2 - x^2 + 2$ y arriba del rectángulo $R = [-1, 1] \times [1, 2]$.

(b) Acotado por el cilindro $z = 16 - x^2$ y el plano $y = 5$ en el primer octante.

7. Calcular las siguientes integrales.

(a) $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xy^2 dx dy$, (b) $\int_0^1 \int_{x^2}^x (1 + 2y) dy dx$.

8. Calcular las siguientes integrales.

(a) $\iint_D y^2 dA$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, -y - 2 \leq x \leq y\}$,

(b) $\iint_D \frac{y}{x^5 + 1} dA$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$.

9. Expresar D como región de tipo I y también como región de tipo II. Luego, calcular de las dos maneras la integral.

(a) $\iint_D x dA$, donde D está encerrada por las rectas $y = x$, $y = 0$, $x = 1$,

(b) $\iint_D xy dA$, donde D está encerrada por las curvas $y = x^2$ y $y = 3x$.

10. Calcular las siguientes integrales.

(a) $\iint_D x \cos(y) dA$, donde D está acotada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$,

(b) $\iint_D y^2 dA$, donde D es la región triangular con vértices $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(4, 1)$,

(c) $\iint_D xy^2 dA$, donde D está encerrada por $x = 0$ y $x = \sqrt{1 - y^2}$.

11. Calcular el volumen del sólido dado en cada uno de los siguientes casos.

- (a) Bajo la superficie $z = 1 + x^2y^2$ y arriba de la región en el plano xy acotada $x = y^2$ y $x = 4$.
- (b) Acotado por los planos coordenados y el plano $3x + 2y + z = 6$.
- (c) Acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ en el primer octante.

12. Calcular las siguientes integrales invirtiendo el orden de integración.

$$(a) \int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy, \quad (b) \int_0^1 \int_x^1 e^{x/y} dy dx.$$

Aplicaciones

13. Supongamos que tenemos una lámina que ocupa una región D del plano xy y su densidad (en unidades de masa por unidad de área) en un punto (x, y) en D está dada por $\rho(x, y)$, donde ρ es una función continua en D , entonces, la masa de dicha lámina m está dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA.$$

Los físicos consideran también otros tipos de densidad que se pueden tratar de la misma manera. Por ejemplo, si se distribuye una carga eléctrica sobre una región D y la densidad de carga (en unidades de carga por unidad de área) en un punto (x, y) en D está dada por $\sigma(x, y)$, entonces, la carga total Q está dada por

$$Q = \iint_D \sigma(x, y) dA.$$

Una carga eléctrica está distribuida sobre el rectángulo $0 \leq x \leq 5$, $2 \leq y \leq 5$ de manera que la densidad de carga en un punto (x, y) está dada por $\sigma(x, y) = 2x + 4y$ (medida en coulombs por metro cuadrado). Calcular la carga total en el rectángulo.

14. El momento de una partícula respecto a un eje se define como el producto de su masa y su distancia respecto a dicho eje. Supongamos que tenemos una lámina que ocupa una región D del plano xy y su densidad en un punto (x, y) está dada por $\rho(x, y)$. Luego, el **momento** de toda la lámina **respecto al eje x** está dado por

$$M_x = \iint_D y\rho(x, y) dA.$$

De manera similar, el **momento respecto al eje y** está dado por

$$M_y = \iint_D x\rho(x, y) dA.$$

Finalmente, el **centro de masa** (\bar{x}, \bar{y}) (es decir, el punto en el cual la lámina de equilibra horizontalmente) está dado por

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde m es la masa de la lámina.

Sea D la región acotada por $y = 1 - x^2$ e $y = 0$. Calcular la masa y el centro de masa de una lámina que ocupa la región D cuya densidad en un punto (x, y) está dada por $\rho(x, y) = y$.

15. El momento de inercia (o segundo momento) de una partícula respecto a un eje se define como el producto de su masa y su distancia respecto a dicho eje al cuadrado. Supongamos que tenemos una lámina que ocupa una región D del plano xy y su densidad en un punto (x, y) está dada por $\rho(x, y)$. Luego, el **momento de inercia** de toda la lámina **respecto al eje x** está dado por

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dA.$$

De manera similar, el **momento de inercia respecto al eje y** está dado por

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dA.$$

También es de interés calcular el **momento de inercia respecto al origen**:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA.$$

Calcular los momentos de inercia I_x , I_y , I_0 para la lámina del ejercicio anterior.

16. Supongamos que se considera el nivel de colesterol de una persona elegida al azar de un cierto grupo de edad, o la estatura de una persona elegida al azar, o la duración de una batería de cierto tipo elegida en forma aleatoria. Tales cantidades se llaman **variables aleatorias continuas**, porque sus valores varían en realidad en un intervalo de números reales. Puede ser de interés conocer la probabilidad de que el nivel de colesterol sea mayor que 250, o la probabilidad de que la altura de una persona esté entre 60 y 70 pulgadas, o la probabilidad de que la duración de la batería sea de entre 100 y 200 horas. Si X representa la duración de la batería, dicha probabilidad se denota como $P(100 \leq X \leq 200)$.

Toda variable aleatoria continua X tiene una **función de densidad** $f(x)$ que verifica que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

La función de densidad $f(x)$ cumple que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$.

Consideremos ahora un par de variables aleatorias continuas X e Y . La **función de densidad conjunta** de X e Y es una función $f(x, y)$ de dos variables que verifica que la probabilidad de que (X, Y) esté en una región D es

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dA.$$

La función de densidad $f(x, y)$ cumple que $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dA = 1$.

Sean X e Y dos variables aleatorias cuya función de densidad conjunta es

$$f(x, y) = \begin{cases} Cx(1+y) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

a) Encontrar el valor de la constante C .

b) Calcular $P(X \leq 1, Y \leq 1)$.

Integración en \mathbb{R}^3

17. Calcular la siguiente integral

$$\iiint_E (xy + z^2) dV$$

donde $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}$.

18. Calcular las siguientes integrales.

$$(a) \int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x - y) dx dy dz, \quad (b) \int_1^2 \int_0^{2z} \int_0^{\ln(x)} xe^{-y} dy dx dz.$$

19. Calcular las siguientes integrales

$$(a) \iiint_E y dV,$$

donde $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x, x - y \leq z \leq x + y\}$,

$$(b) \iiint_E e^{z/y} dV, \text{ donde } E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq xy\},$$

$$(c) \iiint_E xy dV, \text{ donde } E \text{ está acotada por los cilindros parabólicos } y = x^2 \text{ y } x = y^2 \text{ y los planos } z = 0 \text{ y } z = x + y,$$

$$(d) \iiint_E x dV, \text{ donde } E \text{ está acotado por el paraboloide } x = 4y^2 + 4z^2 \text{ y el plano } x = 4.$$

20. Calcular el volumen del sólido encerrado por el cilindro $x^2 + z^2 = 4$ y los planos $y = -1$ y $y + z = 4$ usando una integral triple.
21. Considerar la integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy dz dx.$$

- (a) Graficar la región de integración.
- (b) Reescribir la integral en los otros cinco ordenes posibles.