1. $a = 1 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
   $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

   ## Pruebo por curvas

   - iterado $x = 0$
     $\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0y}{y^2} = 0$
   - iterado $y = 0$
     $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x0}{x^2} = 0$
   - rectas $y = mx$
     $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2} \wedge m \neq 0 \Rightarrow$
     $\lim_{x\to 0} f(x,mx) \neq 0$

   $\Rightarrow$ por rectas el limite da distinto que por los iterados $\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
2. $a = 2 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
   $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

   ## Pruebo por curvas

   - iterado $x = 0$
     $\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0y^2}{y^2} = 0$
   - iterado $y = 0$
     $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x0}{x^2} = 0$
   - rectas $y = mx$
     $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3m^2}{x^2+(mx)^2} =$
     $\lim_{x\to 0} \frac{x^3m^2}{x^2(1+m^2)} =$
     $\lim_{x\to 0} \frac{x\cancel{^3}m^2}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = 0$

   Estimo que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

   ## Intento demostrar por sandwich

   $\exists g(x,y) : \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 \wedge 0 \leq |f(x,y)| \leq |g(x,y)|$

   $|\frac{xy^2}{x^2+y^2}| =$
   $\frac{|x|y^2}{x^2+y^2} =$
   $|x|\frac{y^2}{x^2+y^2} =$

   $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq y^2 \Rightarrow 1 \geq \frac{y^2}{x^2+y^2} : \star$

   $|x|\frac{y^2}{x^2+y^2} \overset{\star}{\leq}$
   $|x| \cdot 1 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$
   $\Rightarrow g(x,y) = |x|$
   $\Rightarrow$ por sandwich $f(x,y) \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0 \qquad \square$
3. $a > 2 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
   $a = 2 + k : k > 0$
   $f(x,y) = \frac{xy^{2+k}}{x^2+y^2}$
   Estimo que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Intento demostrar por sandwich

$\exists g(x,y) : \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 \wedge 0 \leq |f(x,y)| \leq |g(x,y)|$

$|\frac{xy^{2+k}}{x^2+y^2}| =$

$\frac{|x||y^k|y^2}{x^2+y^2} =$

$|x|\,|y^k|\,\frac{y^2}{x^2+y^2} =$

$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq y^2 \Rightarrow 1 \geq \frac{y^2}{x^2+y^2} : \star$

$|x|\,|y^k|\,\frac{y^2}{x^2+y^2} \overset{\star}{\leq}$

$|x|\,|y^k| \cdot 1 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0 \ \forall k$

$\Rightarrow g(x,y) = |x|\,|y^k|$

$\Rightarrow$ por sandwich $f(x,y) \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0 \qquad \square$

$\Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{xy^a}{x^2+y^2} \wedge \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{xy^a}{x^2+y^2} = 0 \ \forall a \geq 2 \qquad \square$