1. a) $r : \Re \to \Re^3$
$C : r(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t)) = (x, y, z)$
$r_1 : \Re \to \Re$
$r_2 : \Re \to \Re$
$r_3 : \Re \to \Re$

$$\begin{cases} 4 = x^2 + 4y^2 : \text{Describe un elipse con centro en } (0,0) \\ 2 = z - x : \text{Describe un plano } \Pi \end{cases}$$

$$4 = x^2 + 4y^2 \equiv 1 = \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} \equiv \begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 1\sin(t) \end{cases} \quad t \in \{0, 2\pi) : \star$$

$\Pi : z = 2 + x \overset{\star}{\Rightarrow}$
$z = 2 + 2\cos(t) \Rightarrow$

$$C : r(t) = \begin{cases} r_1(t) = 2\cos(t) \\ r_2(t) = \sin(t) \\ r_3(t) = 2 + 2\cos(t) \end{cases} \quad t \in \{0, 2\pi) \Rightarrow$$

$C : r(t) = (2\cos(t), \sin(t), 2 + 2\cos(t))$ con $t \in \{0, 2\pi)$ $\square$

b) 1) $P = (2, 0, 4) \in C \Leftrightarrow$

$\exists k \in \{0, 2\pi) : r(k) = (2, 0, 4) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} r_1(k) = 2\cos(k) = 2 \\ r_2(k) = \sin(k) = 0 \\ r_3(k) = 2 + 2\cos(k) = 4 \end{cases} \quad k \in \{0, 2\pi)$$

$r_2(k) = 0 \Leftrightarrow k \in (0, \pi) : \star$
$r_1(k) = 0 \wedge \star \Leftrightarrow k = 0$
$r_3(0) = 2 + 2\cos(0) = 4\checkmark$

$\Rightarrow r(0) = (2, 0, 4) \Rightarrow (2, 0, 4) \in C$ $\square$

2) Quiero hallar L es la recta tangente a C en el punto P
r esta compuesta por funciones trigonometricas continuas y derivables $\Rightarrow$
$\exists r'(k) \wedge L = \lambda \cdot r'(0) + P$
$r'(k) = (-2\sin(k), \cos(k), -2\sin(k))$
$\Rightarrow r'(0) = (0, 1, 0)$
$\Rightarrow L = \lambda \cdot (0, 1, 0) + (2, 0, 4)$ $\square$

2. a) $a = 1 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$
$f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

Pruebo por curvas

- iterado $x = 0$
  $\lim_{y\to 0} f(0, y) = \lim_{y\to 0} \frac{0y}{y^2} = 0$
- iterado $y = 0$
  $\lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{x0}{x^2} = 0$
- rectas $y = mx$
  $\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2} \wedge m \neq 0 \Rightarrow$
  $\lim_{x\to 0} f(x, mx) \neq 0$

$\Rightarrow$ por rectas el limite da distinto que por los iterados $\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$

b) $a = 2 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$
$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

Pruebo por curvas

- iterado $x = 0$
  $\lim_{y\to 0} f(0, y) = \lim_{y\to 0} \frac{0y^2}{y^2} = 0$
- iterado $y = 0$
  $\lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{x0}{x^2} = 0$
- rectas $y = mx$
  $\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3m^2}{x^2+(mx)^2} =$
  $\lim_{x\to 0} \frac{x^3m^2}{x^2(1+m^2)} =$
  $\lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{3}}m^2}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = 0$

Estimo que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$

Intento demostrar por sandwich

$\exists g(x, y) : \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0 \wedge 0 \leq |f(x, y)| \leq |g(x, y)|$

$|\frac{xy^2}{x^2+y^2}| =$
$\frac{|x|y^2}{x^2+y^2} =$
$|x| \frac{y^2}{x^2+y^2} =$

$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq y^2 \Rightarrow 1 \geq \frac{y^2}{x^2+y^2} : \star$

$|x| \frac{y^2}{x^2+y^2} \overset{\star}{\leq}$
$|x| \cdot 1 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$
$\Rightarrow g(x, y) = |x|$
$\Rightarrow$ por sandwich $f(x, y) \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0 \quad \square$

c) $a > 2 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$
$a = 2 + k : k > 0$
$f(x, y) = \frac{xy^{2+k}}{x^2+y^2}$
Estimo que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$

Intento demostrar por sandwich

$\exists g(x, y) : \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0 \wedge 0 \leq |f(x, y)| \leq |g(x, y)|$

$|\frac{xy^{2+k}}{x^2+y^2}| =$
$\frac{|x||y^k|y^2}{x^2+y^2} =$
$|x|\,|y^k| \frac{y^2}{x^2+y^2} =$

$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq y^2 \Rightarrow 1 \geq \frac{y^2}{x^2+y^2} : \star$

$|x|\,|y^k| \frac{y^2}{x^2+y^2} \overset{\star}{\leq}$
$|x|\,|y^k| \cdot 1 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0 \ \forall k$
$\Rightarrow g(x, y) = |x|\,|y^k|$
$\Rightarrow$ por sandwich $f(x, y) \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0 \quad \square$

$\Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \frac{xy^a}{x^2+y^2} \wedge \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \frac{xy^a}{x^2+y^2} = 0 \ \forall a \geq 2 \qquad \square$

3. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3e^y+3x^2y}{x^2+y^2} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Diferenciabilidad en $(0,0)$

f es diferenciable en $(0,0) \Leftrightarrow$
$\exists L \in \Re : \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\|(x,y)\|} = L \wedge L = 0$

Busco $\nabla f(0,0)$

$\nabla f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0))$

Por definición

- $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} =$
  $\lim_{h\to 0} f(h,0) - f(0,0) \cdot \frac{1}{h} =$
  $\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h^3}}{\cancel{h^3}} = 1$
- $f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} =$
  $f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} f(0,h) - f(0,0) \cdot \frac{1}{h}$
  $f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} \cdot \frac{1}{h} = 0$

$\nabla f(0,0) = (1,0)$
$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\|(x,y)\|} =$
$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3e^y+3x^2y}{x^2+y^2}-0-(1,0)\cdot(x-0,y-0)}{\|(x,y)\|} =$
$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3e^y+3x^2y}{x^2+y^2}-x}{\|(x,y)\|} =$
$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3e^y+3x^2y}{x^2+y^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} =$
$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3e^y+3x^2y}{x^2+y^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \overset{\star}{\lim_{(x,y)\to(0,0)}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} =$

- $\star : \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
  Por la recta $y = x$
  $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+x^2}} =$
  $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{2}|x|} =$
  $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
  $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{2}(-x)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
  $\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3e^y+3x^2y}{x^2+y^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \overset{\star}{\lim_{(x,y)\to(0,0)}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \wedge \nexists\star$
$\Rightarrow$ Por algebra del limites no $\nexists$ la resta de limites por lo tanto $\nexists L$
$\Rightarrow f(x,y)$ no es diferenciable en el $(0,0)$

4. Datos

- $f : \Re^2 \to \Re$
- $P = (2, 1, f(2,1))$
- $z = 2 - 3x + y = \Pi(x,y)$
- $f(2,1) = \Pi(2,1) = -3$
- f es diferenciable

- $f_x(2,1) = \Pi_x(2,1) = -3$
- $f_y(2,1) = \Pi_y(2,1) = 1$
- $x(s,t) = e^t + 1$
- $y(s,t) = s^2 + 2t$
- $x(1,0) = 2$
- $y(1,0) = 1$
- $v = (4,1)$
- $F(s,t) = f(x(s), y(s))$

Busco $\nabla F(1,0)$

$\nabla F(s,t) = (F_s(s,t), F_t(s,t))$

$f(x,y)$ es diferenciable en $(2,1) \wedge f(x(s,t), y(s,t)) = f(2,1) \wedge x(s,t), y(s,t)$ son diferenciables y continuas
$\Rightarrow$ Por regla de la cadena

- $F_s(s,t) = f_x(x(s,t), y(s,t)) \cdot x_s(s,t) + f_y(x(s,t), y(s,t)) \cdot y_s(s,t) =$
  $f_x(x(s,t), y(s,t)) \cdot 0 + f_y(x(s,t), y(s,t)) \cdot 2s$
  $\Rightarrow F_s(1,0) = f_x(2,1) \cdot 0 + f_y(2,1) \cdot 2(2) =$
  $0 + f_y(2,1) \cdot 2 = 2$
- $F_t(s,t) = f_x(x(s,t), y(s,t)) \cdot x_t(s,t) + f_y(x(s,t), y(s,t)) \cdot y_t(s,t) =$
  $f_x(x(s,t), y(s,t)) \cdot e^t + f_y(x(s,t), y(s,t)) \cdot 2$
  $\Rightarrow F_t(1,0) = f_x(2,1) \cdot e^0 + f_y(2,1) \cdot 2 =$
  $(-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -1$

$\Rightarrow \nabla F(1,0) = (2, -1)$

Busco versor unitario de v

$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{(4,1)}{\sqrt{17}} = (\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}})$

Busco derivada direccional

Como se que F es diferenciable en $(1,0)$
$\Rightarrow D_u F(1,0) = \nabla F(1,0) \cdot (\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}})$
$\Rightarrow D_u F(1,0) = (2,-1) \cdot (\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}) = \frac{7}{\sqrt{17}}$

Respuesta

La derivada en la dirección $(4,1)$ de F en el punto $(1,0)$ es $\frac{7}{\sqrt{17}}$ $\square$