$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6+y^2} & si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si(x,y) = (0,0) \end{cases}$

QvQ f tiene derivadas direccionales para todo $v \in \Re^2$ en el origen pero no es continua

$v = (v_1, v_2) \wedge \|v\| = 1$

Pruebo por definicion de derivadas direccionales

$\lim_{h \to 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h}$

$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{(hv_1)^3 (hv_2)}{(hv_1)^6 + (hv_1)^2} - 0}{h} =$

$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(hv_1)^3 (hv_2)}{(hv_1)^6 + (hv_1)^2} =$

$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^4 v_1^3 v_2}{h^6 v_1^6 + h^2 v_1^2} =$

$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^{2 \cdot \cancelto{1}{2}} v_1^3 v_2}{\cancel{h^2} (h^4 v_1^6 + v_1^2)} =$

$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{1}}{\cancel{h}} \cdot \frac{h^{\cancelto{1}{2}} v_1^3 v_2}{h^4 v_1^6 + v_1^2} = \frac{v_1^3 \cdot v_2}{v_1^2} = v_1 \cdot v_2$

Pruebo limites por la curva $y = mx^3, m \in \Re$

$\lim_{x \to 0} f(x, mx^3) =$

$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 m x^3}{x^6 + m^2 x^6} =$

$\lim_{x \to 0} \frac{m \cancel{x^6}}{(m^2+1) \cancel{x^6}} = \frac{m}{m^2+1}$

si $m \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x, mx^3) \neq 0 \Rightarrow \nexists lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$

Por lo tango f no es continua en el origen