UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis I - Matemática I - Análisis II (C) - Análisis Matemático I (Q)

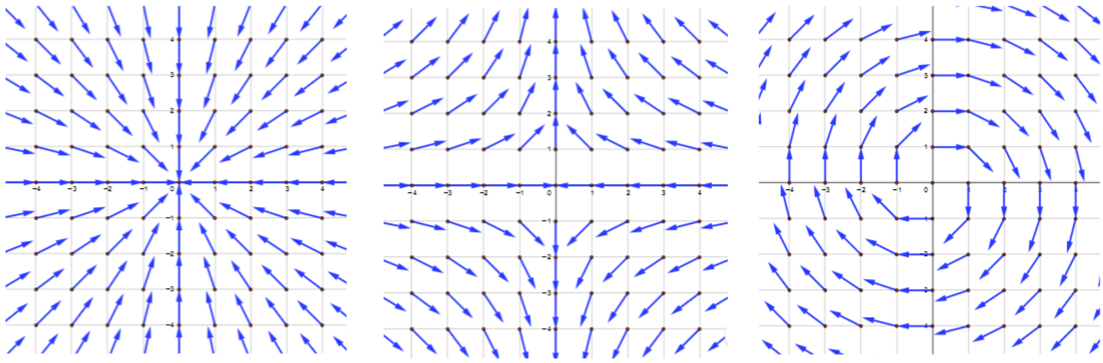
Práctica 7: Campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Se sugiere complementar la resolución de los ejercicios de esta práctica con GeoGebra.

1. Identificar qué campo vectorial $\mathbf{F}$ no fue graficado, y graficarlo.

   i. $\mathbf{F}(x,y) = (y, -x)$ ii. $\mathbf{F}(x,y) = (-x, -y)$,

   iii. $\mathbf{F}(x,y) = (\operatorname{sen}(x+y), \operatorname{sen}(x+y))$,   iv. $\mathbf{F}(x,y) = (-x, y)$.



(a) (b) (c)

2. Graficar los siguientes campos $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

   (a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, 1, -x)$,   (b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (1, y, 1)$,   (c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, 1, 1)$.

3. Encontrar los campos vectoriales gradiente de f.

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$,   (b) $f(x,y,z) = xyz$,   (c) $f(x,y,z) = \dfrac{e^{xz}}{y^2+x^2}$.

4. Dibujar las curvas de nivel de las funciones junto con sus campos vectoriales gradiente. ¿Qué observa?

   (a) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$,   (b) $f(x,y) = x^2 - y$,   (c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

5. Decidir si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial gradiente, y si lo es, encontrar la función potencial f (es decir, la función que verifica que $\mathbf{F} = \nabla f$).

   (a) $\mathbf{F}(x,y) = (x, y)$ (b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy + 2z)$,

   (c) $\mathbf{F}(x,y) = (e^x\cos(y), e^x\sin(y))$,   (d) $\mathbf{F}(x,y) = (y, x^2)$,

   (e) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, x, xy)$,   (f) $\mathbf{F}(x,y) = (2xy + y^{-2}, x^2 - 2xy^{-3})$, $y > 0$.

6. Las **líneas de flujo** (o **líneas de corriente**) de un campo vectorial $\mathbf{F}$ son las trayectorias que sigue una partícula cuyo campo de velocidades es $\mathbf{F}$. Es decir, $\mathbf{r}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una línea de flujo de $\mathbf{F}$ si se verifica que
$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).$$
Por tanto, los vectores en un campo vectorial son tangentes a las líneas de flujo.
Hallar una línea de flujo de cada uno de los siguientes campos que pase por el punto indicado.
   (a) $\mathbf{F}(x,y) = (x,-y)$, $p = (1,1)$,
   (b) $\mathbf{F}(x,y) = (1,x)$, $p = (1,0)$.

7. Para cada una de las siguientes trayectorias, hallar un campo vectorial $\mathbf{F}$ tal que $\mathbf{r}$ sea una línea de flujo de $\mathbf{F}$.
   (a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$,
   (b) $\mathbf{r}(t) = (t^3, \sqrt{t})$.

Rotor

8. Dibujar el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (0,x,0)$ y decidir (sin hacer la cuenta) si el rotor es cero en $\{x > 0\}$. Confirma tu intuición haciendo la cuenta.

9. Hallar el rotor de los siguientes campos vectoriales.
   (a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+yz, y+xz, z+xy)$,
   (b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (xye^z, 0, yze^x)$,
   (c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (\sin(yz), \sin(zx), \sin(xy))$.

10. Decidir si cada uno de los siguientes campos son o no conservativos. En caso de que lo sea, hallar f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.
   (a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$,
   (b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (xyz^2, x^2yz^2, x^2y^2z)$,
   (c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (1, \sin(z), y\cos(z))$,
   (d) $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^x\sin(yz), ze^x\cos(yz), ye^x\cos(yz))$.

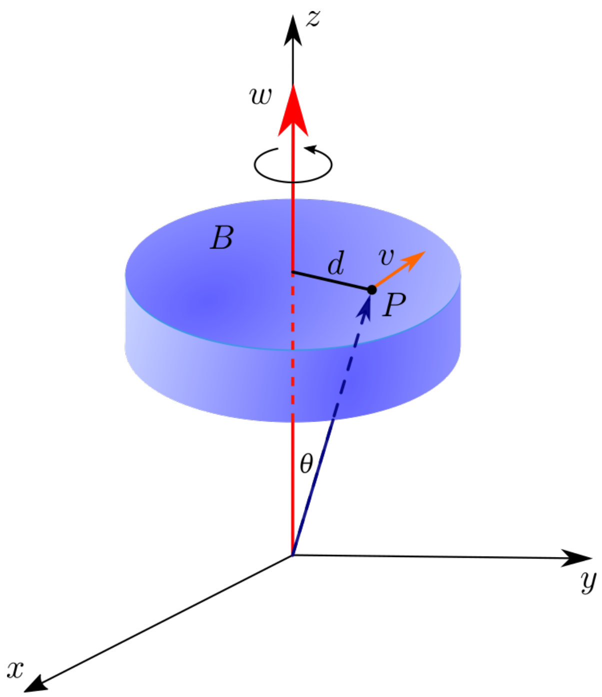
11. Demostrar que cualquier campo vectorial de la forma
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (f(x), g(y), h(z)),$$
donde f, g, h son funciones derivables, es irrotacional (es decir, rot $\mathbf{F} = 0$).

12. Este ejercicio demuestra la relación entre el vector rotacional y las rotaciones. Sea B un cuerpo rígido que gira alrededor del eje z. La rotación se puede describir mediante el vector $\mathbf{w} = (0, 0, \omega)$ donde ω es la velocidad angular de B, es decir, la velocidad tangencial de cualquier punto P en B dividida por la distancia d a partir del eje de rotación. Sea $\mathbf{r} = (x, y, z)$ el vector de posición de P.

    (a) Considerar el ángulo θ de la figura y demostrar que el campo de velocidades de B está dado por $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$.

    (b) Demostrar que $\mathbf{v} = (-\omega y, \omega x, 0)$.

    (c) Demostrar que $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.



Divergencia

13. Hallar la divergencia de los siguientes campos vectoriales.

    (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2z^3, x^3yz^2, x^2y^3z)$,

    (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z)$,

    (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \sin(y), e^y \sin(z), e^z \sin(x))$,

    (d) $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}, \dfrac{z}{x}\right)$.

14. Demostrar que cualquier campo de la forma

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (f(y,z), g(x,z), h(x,y)),$$

donde f, g y h son funciones diferenciables, es incompresible (es decir, div $\mathbf{F} = 0$).

15. Sea f un campo escalar y $\mathbf{F}$ un campo vectorial. Decidir si cada una de las siguientes expresiones tienen sentido. Si no es así, explicar por qué. Si tienen sentido, decidir si se trata de un campo vectorial o escalar.

(a) rot f, (b) ∇f, (c) div $\mathbf{F}$, (d) rot(∇f),

(e) $\nabla \mathbf{F}$, (f) ∇(div $\mathbf{F}$), (g) div(∇f), (h) rot(rot $\mathbf{F}$).

16. Demostrar las siguientes identidades, suponiendo que existen las derivadas parciales y que son continuas. Para f un campo escalar y $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ campos vectoriales, se define

$$\begin{aligned}(f\ \mathbf{F})(x,y,z) &= f(x,y,z)\mathbf{F}(x,y,z),\\ (\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(x,y,z) &= \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{G}(x,y,z),\\ (\mathbf{F}\times\mathbf{G})(x,y,z) &= \mathbf{F}(x,y,z)\times\mathbf{G}(x,y,z).\end{aligned}$$

(a) div $(f\ \mathbf{F}) = f$ div $\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla f$,

(b) rot$(f\ \mathbf{F}) = f$ rot $\mathbf{F} + (\nabla f)\times\mathbf{F}$,

(c) div$(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot$ rot $\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot$ rot $\mathbf{G}$,

(d) div$(\nabla f\times\nabla g) = 0$.

17. Para $\mathbf{r}(x,y,z) = (x,y,z)$ y $r = \|\mathbf{r}\|$, verificar las siguientes identidades.

(a) $\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$, (b) $\nabla\cdot(r\ \mathbf{r}) = 4r$ (c) $\nabla^2 r^3 = 12r$.

18. Sabemos que todos los campos vectoriales de la forma $\mathbf{F} = \nabla g$ satisfacen la ecuación rot $\mathbf{F} = 0$ y que todos los campos vectoriales de la forma $\mathbf{F} =$ rot $\mathbf{G}$ satisfacen la ecuación div $\mathbf{F} = 0$ (si se suponen que las derivadas parciales son continuas). Esto lleva a plantear la pregunta: ¿existen ecuaciones que deben satisfacer todas las funciones de la forma $f =$ div $\mathbf{G}$?

Demostrar que la respuesta a esta pregunta es "no" mediante la demostración de que *toda* función continua $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ es la divergencia de algún campo vectorial.

[*Sugerencia:* considerar $\mathbf{G}(x,y,z) = (g(x,y,z),0,0)$ donde $g(x,y,z) = \int_0^x f(t,y,z)dt$.]