

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

$$f(x,y) = \frac{(x-1)^2 x^2 y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

### Pruebo por curvas

- iterado  $x = 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = \frac{0}{(y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

- iterado  $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = \frac{0}{(x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

si  $\exists L : \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \Rightarrow L = 0$

### Intento demostrar por sandwich

$$\exists g(x,y) : \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0 \wedge 0 \leq |f(x,y)| \leq |g(x,y)|$$

$$|f(x,y)| = \left| \frac{(x-1)^2 x^2 y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right| =$$

$$\frac{(x-1)^2 x^2 y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{(x-1)^2 x^2 y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}} =$$

$$\frac{(x-1)^2 x^2 y^2 (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}{x^2+y^2} =$$

$$\frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot (x-1)^2 x^2 (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq y^2 \Rightarrow 1 \geq \frac{y^2}{x^2+y^2} : \star$$

$$\frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot (x-1)^2 x^2 (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}} \stackrel{\star}{\leq}$$

$$1 \cdot (x-1)^2 x^2 (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}} =$$

$$(x-1)^2 x^2 (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

$$\Rightarrow g(x,y) = (x-1)^2 x^2 (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$0 \leq |f(x,y)| \leq |g(x,y)|$$

$$\Rightarrow \exists L \wedge L = 0 \quad \square$$

2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

$$f(x,y)$$

### Pruebo por curvas

- iterado  $x = 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0,y)$$

- iterado  $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0)$$

- rectas  $y = mx$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx)$$

- curvas  $y = x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2)$$

### Intento demostrar por sandwich

$$\exists g(x,y) : \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0 \wedge 0 \leq |f(x,y)| \leq |g(x,y)|$$

**Pruebo por definición**

$$\exists \epsilon, \delta(\epsilon) > 0 : \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y)| < \epsilon$$