Análisis I - Matemática I - Análisis II (C) - Análisis Matemático I (Q)

Práctica 5: Polinomio de Taylor

1. Calcular el polinomio de Taylor de las siguientes funciones hasta el orden indicado en el punto dado.

   (a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, orden 5, $x_0 = 0$.

   (b) $f(x) = \sin x$, orden 4, $x_0 = 0$.

   (c) $f(x) = \sin x$, orden 5, $x_0 = 0$.

   (d) $f(x) = \cos x$, orden 5, $x_0 = 0$.

   (e) $f(x) = \ln x$, orden 4, $x_0 = 1$.

   (f) $f(x) = \sqrt{x}$, orden 3, $x_0 = 4$.

   (g) $f(x) = e^x$, orden 5, $x_0 = 0$.

   (h) $f(x) = (1+x)^6$, orden 6, $x_0 = 0$.

2. (a) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado tres para la función $f(x) = \ln(x+1)^2$.

   (b) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado tres para la función $g(x) = e^{x+2}$.

   (c) Desarrollar la función $p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ en potencias de $x - 2$;

   (d) Desarrollar la función $g(x) = \sqrt{x}$ en potencias de $x - 1$ hasta orden 3.

3. Obtener el polinomio de Taylor de orden n de las siguientes funciones en $x_0 = 0$.

   (a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

   (b) $f(x) = \cos x$.

   (c) $f(x) = \sin x$.

   (d) $f(x) = e^{2x}$.

   (e) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

   (f) $f(x) = \ln(1+x)$.

   Para cada uno de los ítems del ejercicio, usar GeoGebra para graficar la función junto con sus polinomios de Taylor de grados $n = 1, 2, 3$ y 4.

4. Si el polinomio de Taylor de f de orden 5 en $x_0 = 2$ es

$$p(x) = (x-2)^5 + 3(x-2)^4 + 3(x-2)^2 - 8,$$

   calcular $f^{(3)}(2)$ y $f^{(4)}(2)$. ¿Se puede conocer el valor de $f^{(6)}(2)$? ¿Cuánto vale $f^{(6)}(2)$ si el polinomio p es de orden 7?

5. Los polinomios de Taylor de orden 4 en $x_0 = 2$ de las funciones f y g son, respectivamente, $p(x) = -2+3(x-2)-3(x-2)^2+(x-2)^3$ y $q(x) = 5+12(x-2)^2-7(x-2)^4$.

   Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de $t(x) = f(x)g(x)$ y $s(x) = f(x)/g(x)$ en $x_0 = 2$.

6. Escribir la expresión del resto en cada caso:

   (a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x)$.
   (b) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + R_5(x)$.
   (c) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_5(x)$.
   (d) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_6(x)$.
   (e) $\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + R_3(x)$.

7. (a) Hallar p el polinomio de Maclaurin de orden 2 y la expresión del resto para la función $f(x) = \sqrt{1+x}$.
   (b) Estimar el error que se comete al aproximar $f(0,2)$ por $p(0,2)$.

8. Halle un intervalo que contenga a $x_0 = 0$ tal que la diferencia entre

   (a) $\cos x$ y $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$ sea menor que 5×10^{-5}.
   (b) $\sin x$ y x sea menor que 10^{-3}.

9. Calcular los polinomios de Taylor de primer y segundo orden de las funciones dadas en el punto indicado. Escribir la forma de Lagrange del resto.

   (a) $f(x,y) = (x+y)^2$ en $(0,0)$,
   (b) $f(x,y) = e^{x+y}$ en $(0,0)$,
   (c) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ en $(0,0)$,
   (d) $f(x,y) = x + xy + 2y$ en $(1,1)$,
   (e) $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos(y)$ en $(1,0)$,
   (f) $f(x,y) = e^x \sin(xy)$ en $(2, \frac{\pi}{4})$,
   (g) $f(x,y) = \ln(1+xy)$ en $(2,3)$,
   (h) $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$ en $(2,3,4)$.

   En los ítems (a)–(g), usar GeoGebra para realizar un gráfico de cada función junto con sus polinomios de Taylor.

10. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = xe^y$.

    (a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f centrado en $(1,0)$.
    (b) Usar este polinomio para aproximar el valor $f(0.98, 0.02)$.

11. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$.

(a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f centrado en $(1, 1)$.

(b) Usar el item anterior para aproximar $e^{\frac{4}{10}}$ usando que $\frac{4}{10} = (1+\frac{1}{10})^2 - (1-\frac{1}{10})^2$.

12. Calcular el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función

$$f(x, y) = \sin(x)\sin(y).$$

13. Sean $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x + 1, 2y - e^x)$ y $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, tales que el polinomio de Taylor de grado 2 de $g \circ f$ en $(0, 0)$ es

$$p(x, y) = 4 + 3x - 2y - x^2 + 5xy.$$

Calcular $\nabla g(1, -1)$.

14. Sea $f(x, y) = e^{xy}\cos(x + y)$.

(a) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de f centrado en $(0, 0)$.

(b) Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) + x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2}.$$

15. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^3 tal que su polinomio de Taylor de orden 3 en $(1, 1)$ es $p(x, y) = 1 - 3x + x^2 + xy + y^2 - y^3$. Analizar la existencia de los siguientes límites:

$$\text{(a)} \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y) - (1, 1)\|}, \qquad \text{(b)} \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y) - (1, 1)\|^2}.$$