PRACTICA $\boxed{4}$ Hoja 1

Ej $\boxed{2}$ a) Nos dieron una curva de $\mathbb{R}^2$ en forma paramétrica

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2\sqrt{t} \\ y(t) = -t \end{cases} \quad \text{con } t \text{ variando de } 0 \text{ a } 9$$

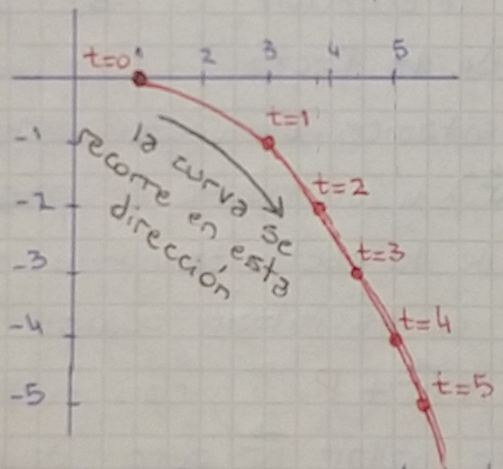
o sea: $r : [0,9] \to \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (1 + 2\sqrt{t}\,;\, -t)$$

Nos piden, entre otras cosas, que la grafiquemos. Comencemos por ahí...

Una opción es ir armando una tabla de valores para diferentes "t", ir marcando en el plano los puntos correspondientes... y luego verificar con GeoGebra que la curva nos está quedando bien.

t	$(x(t);y(t))$
0	(1,0)
1	(3,-1)
2	(3,8 ; -2)
3	(4,46 ; -3)
4	(5,-4)
5	(5,47 ; -5)



Otra opción sería tratar de hallar una relación entre $x(t)$ e $y(t)$. En nuestro ejemplo $y(t) = -t$, o sea: $t = -y$ con lo cual x se convierte en:

$$x(t) = 1 + 2\sqrt{t} \qquad (\text{Notar: } x \geq 1 \text{ pues } t \geq 0)$$

$$x = 1 + 2\sqrt{-y}$$

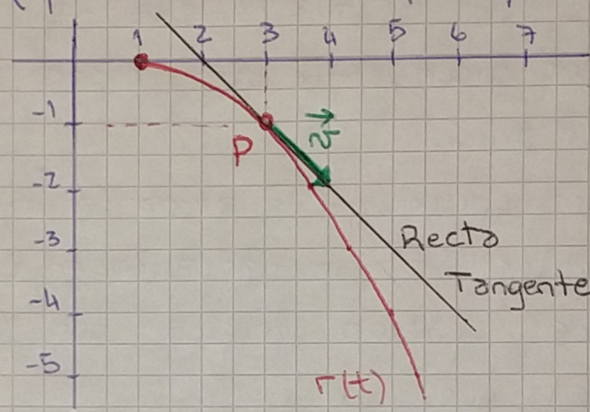
sii $\quad x - 1 = 2\sqrt{-y}$

Elevando al cuadrado: $\quad (x-1)^2 = 4(-y)$

sii $\quad y = -\frac{1}{4}(x-1)^2$

Que corresponde a una parábola con vértice $V = (1,0)$ y ramas hacia abajo. En realidad, sólo es una rama de dicha parábola pues como $t \geq 0$, entonces $x = 1 + \underbrace{2\sqrt{t}}_{\geq 0}$ será mayor o igual a 1. Nuestro gráfico es ok!

Tenemos graficado nuestra curva y bien ubicado el punto en cuestión : $P=(3,-1)$, correspondiente al valor de $t=1$
Esto último lo podemos visualizar en la tabla de valores que hicimos antes o bien pensando que $y=-t$ con lo cual si queremos que la segunda coordenada sea $y=-1$, es claro que t vale 1 (y también se verifica que $x=1+2\sqrt{1}=3$)



Volvamos a graficar la curva $r(t)$; el punto $P=(3,-1)$; y la recta tangente en ese punto:
Para poder dar la ecuación paramétrica de la Recta Tangente necesitamos un vector dirección de la recta (el vector $\vec{v}$) y un punto de paso (claramente P)
Los puntos de la recta tangente serán aquellos (x,y) de $\mathbb{R}^2$ que se escriban como:

$$(x,y)=\lambda\vec{v}+P \quad \text{, con } \lambda \text{ parámetro real.}$$

Sólo nos falta hallar $\vec{v}$ pero, dada una curva $r(t)$ y un punto $P=r(t_0)$ (en nuestro caso $t_0=1$, $P=r(1)$) el vector tangente a la curva $r(t)$ en el punto t_0 es $\vec{v}=r'(t_0)=(x'(t_0)\,;\,y'(t_0))$
Mas aún: cuando $r(t)$ representa la posición de un móvil a lo largo del tiempo (t), $v(t_0)$ representa el vector velocidad del móvil en el instante t_0.
En nuestro ejercio $r'(t)=\left((1+2\sqrt{t})'\,;(-t)'\right)=\left(\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{t}}\,;-1\right)$
Luego $\vec{v}=r'(1)=(1,-1)$ lo cual se corresponde con nuestro dibujo. La Recta tangente es:
$(x,y)=\lambda(1,-1)+(3,-1)$

$$\boxed{(x,y)=(\lambda+3\,;-\lambda-1) \quad \text{con } \lambda\in\mathbb{R}}.$$

PRACTICA $\boxed{4}$ Hoja 3

Ej ④ a) Dada $f(x;y) = x^2 y^3$ nos piden que calculemos ambas derivadas parciales f_x y f_y. Por tratarse $f(x,y)$ de una función diferenciable (es un polinomio) podemos calcular sus derivadas parciales usando reglas de derivación (y las tablas de derivadas de funciones de una variable).

Para calcular $f_x(x,y)$ tenemos que derivar a $f(x,y)$ respecto de la variable "x". Como "y^3" no depende de "x" lo pensamos como constante y no lo derivamos, sólo derivamos "x^2" (respecto de x)

O sea: $f_x(x,y) = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} \cdot y^3 = 2x\, y^3$

Para calcular $f_y(x,y)$ derivamos a $f(x,y)$ respecto de "y". La expresión "x^2" es constante respecto a la variable "y" por lo que solo derivamos y^3, Luego: $f_y(x,y) = \underbrace{x^2}_{\text{constante para "y"}} \cdot \underbrace{3y^2}_{\text{derivada de } y^3}$

Para cada punto $P=(x,y)$ obtenemos el <u>Vector Gradiente</u>

$\nabla f(p) = (f_x(x,y) \; ; f_y(x,y))$, o sea: $\nabla f(p) = (2xy^3 \; , 3x^2y^2)$

En particular, si $P=(2,1)$ (el punto que dá el ejercio) entonces $\nabla f(p) = (4 \; ; 12)$

$\hookrightarrow x=2 \; ; y=1$

La parte de graficar recomiendo hacerla con GeoGebra. Tengamos en cuenta que el gráfico de f será una superficie de $\mathbb{R}^3$ formada por puntos (x,y,z) con $z = f(x,y)$, es decir: puntos $(x,y,f(x,y))$.

El punto $(P, f(P))$ es un punto de dicha superficie: $(\underbrace{2,1}_{P} ; \underbrace{f(2,1)}_{f(P)=4})$, mientras que $\nabla f(p)$ es un vector de dos coordenadas "en el plano del piso" (plano xy) pues $\nabla f(p) = (4,12)$

PRACTICA $\boxed{4}$ Hoja 4

Ej ④ b) $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2y^2}$. Como x^2y^2 es mayor o igual que cero para todo (x,y), ocurre que el denominador de f es siempre mayor o igual que 1 ... por lo cual nunca se anula. O sea: f es diferenciable en cualquier (x,y) por división de funciones diferenciables (polinomios) con denominador no nulo. Podemos calcular f_x y f_y usando reglas de derivación.

Reescribamos $f(x,y) = y \cdot (1+x^2y^2)^{-1}$ para derivar con mas facilidad (de lo contrario podemos usar regla de la división para derivar)

Para calcular f_x sólo debemos derivar la expresión $(1+x^2y^2)^{-1}$ pues "y" es constante respecto de "x"

$$f_x(x,y) = y \cdot \underbrace{(-1)(1+x^2y^2)^{-2}}_{\text{derivada de } (1+x^2y^2)^{-1}} \cdot \underbrace{(0+2xy^2)}_{\text{derivada de } 1+x^2y^2 \text{ respecto de "x" } (y^2 \text{ es constante para "x")}}$$

Regla de la cadena

Luego: $f_x(x,y) = -y \dfrac{1}{(1+x^2y^2)^2} \, 2xy^2$

$$f_x(x,y) = \frac{-2xy^3}{(1+x^2y^2)^2}$$

Para derivar respecto de "y" hay que tener más cuidado pues $f(x,y)$ es un producto de dos expresiones que dependen de "y" (hay que usar Regla del Producto)

$$f_y(x,y) = \underbrace{1}_{\text{derivada de "y"}} \cdot \underbrace{(1+x^2y^2)^{-1}}_{\text{segunda expresión sin derivar}} + \underbrace{y}_{\text{"y" sin derivar}} \underbrace{(-1)(1+x^2y^2)^{-2}(0+x^2 \cdot 2y)}_{\text{Derivada de la segunda expresión respecto de "y" (usando Regla de la Cadena como hicimos antes)}}$$

PRACTICA $\boxed{4}$ Hoja 5

Con lo cual:

$$f_y(x,y) = \frac{1}{1+x^2y^2} - \frac{2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} =$$

Sacando denominador común $(1+x^2y^2)^2$

$$f_y(x,y) = \frac{1+x^2y^2 - 2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

Esta derivada era más sencilla si la calculábamos directamente usando Regla de la División en la expresión original de $f(x,y) = \frac{y}{1+x^2y^2}$

A veces lo que facilita algunas cuentas hace que otras sean más complicadas. Hay que estar atento a eso para encarar cada cuenta del modo más simple posible.

Tenemos, para cada punto $P=(x,y)$ del Dominio de f, calculado su vector gradiente:

$$\nabla f(P) = \left(\underbrace{\frac{-2xy^3}{(1+x^2y^2)^2}}_{f_x} \; ; \; \underbrace{\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}}_{f_y} \right)$$

En particular, si $P=(1,1)$, el punto correspondiente al gráfico de f es $(P, f(P)) = (\underbrace{1, 1}_{P}, \underbrace{1/2}_{f(1,1)})$

y su gradiente es:

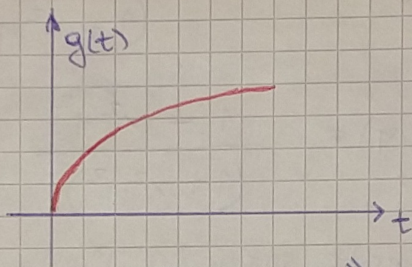
$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{-2}{2^2} , \frac{1-1}{2^2} \right) = (-1, 0)$$

PRACTICA $\boxed{4}$ Hoja 6

Ej ⑦ c) Dado $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, tenemos que calcular las derivadas de segundo orden. Para ello deberemos hallar primero las de primer orden: f_x, f_y

Antes que nada veamos que $x^2+y^2 \geq 0$ para todo (x,y) con lo cual f está bien definida en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

Por otro lado: x^2+y^2 es un polinomio (diferenciable) y $g(t) = \sqrt{t}$ es una función derivable si $t>0$. Basta ver el gráfico de $g(t)$ para notar que no es derivable en $t=0$ (la "candidata" a Recta Tangente es vertical!)



Es por esto que cabe la posibilidad que tengamos "problemas" en los puntos donde x^2+y^2 valga cero (el origen $(0,0)$).

En todos los (x,y) donde x^2+y^2 sea positivo $(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ $f(x,y)$ será diferenciable por composición de funciones diferenciables... podemos calcular f_x y f_y usando reglas de derivación:

Como $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Regla de la cadena

Entonces: $$f_x(x,y) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{Derivada de } \sqrt{t} \text{ evaluada en } x^2+y^2} \; \underbrace{2x}_{\text{Derivada de } x^2+y^2 \text{ respecto de } x}$$

$$f_x(x,y) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \quad ; \quad f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Analoga (y simétricamente) tenemos que

$$f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Claramente vemos que ninguna de estas dos expresiones pueden evaluarse en $(x,y) = (0,0)$.

Tal como habíamos anticipado: Tenemos "problemitas" en el origen.

Para calcular $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$ NO PODEMOS usar las reglas de derivación. Ni siquiera estamos seguros que f sea diferenciable en (0,0) ... ¡ni que existan las derivadas parciales!

Para intentar hallar $f_x(0,0)$ debemos hacerlo por definición:

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+0^2}-0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{t}{t} = 1 \\ \lim\limits_{t\to 0^-} \frac{-t}{t} = -1 \end{cases}$$

$\sqrt{t^2} = |t|$

Con lo cual $f_x(0,0)$ no existe (por lo que f no es diferenciable en el origen)

Analogamente sale que $f_y(0,0)$ tampoco existe pues

$$f_y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t}$$

Tenemos que $f(x,y)$ es diferenciable solo en los (x,y) de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y que las expresiones de sus derivadas parciales de primer orden son:

$$f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ; \quad f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Más aún: tanto x^2+y^2 como $g(t) = \sqrt{t}$ (con $t>0$) tienen derivadas segundas continuas... y derivadas terceras ... y cuartas ... O sea: que se pueden calcular (sin necesidad de recurrir a la definición) las derivadas de cualquier orden de ambas expresiones. Por lo tanto: podremos calcular las derivadas parciales de f de segundo orden derivando (por reglas) a las expresiones de f_x y f_y... Además: las derivadas mixtas serán iguales ($f_{xy} = f_{yx}$) ya que serán continuas (por división de continuas)

Para calcular $f_{xx}(x,y)$ debemos derivar a f_x respecto a "x": (usemos Regla de la División)

Derivada de $\sqrt{x^2+y^2}$ respecto a "x"

$$f_{xx}(x,y) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+y^2} - x \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cancel{2}x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$$

Derivada de "x"

La "función de abajo" al cuadrado

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =$$

sacando denominador común $\sqrt{x^2+y^2}$ en la resta de arriba

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{\frac{\cancel{x^2}+y^2-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Para calcular $f_{yy}(x,y)$ hay que derivar respecto a "y" la expresión $f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

PRACTICA $\boxed{4}$ Hoja 9

En forma análoga a lo que hicimos recién (y totalmente simétrica, intercambiando la "x" por la "y") obtendremos $f_{yy}(x,y) = \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

Para calcular las derivadas de segundo orden mixtas, como vale que $f_{xy} = f_{yx}$, basta con derivar f_x respecto de "y" (o bien: derivar f_y respecto de "x")

Calculemos la derivada de $f_x(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

respecto de "y" (usando Regla de la División)

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{0 \cdot \sqrt{x^2+y^2} - x \, \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \cancel{2} y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$$

Derivada de "x" respecto de "y"

Derivada de $\sqrt{x^2+y^2}$ respecto de "y"

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

¡Es claramente continua pues $x^2+y^2 \neq 0$!

Queda como ejercicio verificar que si derivamos f_y respecto de "x" obtenemos esta misma expresión.

Tenemos así calculadas las cuatro derivadas segundas:

$$f_{xx} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad ; \quad f_{yy} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Ej 13 a) Para poder estudiar la continuidad de f en el origen (0,0,0) debemos verificar si se cumplen (o no) las condiciones: i) Existe $f(0,0,0)$: $f(0,0,0) = \sqrt{|0|} = 0$ ¡VALE!

ii) Existe $\ell = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$: ¡VALE! pues

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sqrt{|\underbrace{xyz}_{0}|} = 0$$, "ℓ" existe y vale cero.

↳ Por álgebra de límites: $\sqrt{0} = 0$

iii) $\ell = f(0,0,0)$: ¡VALE!

Con lo cual $f(x,y,z) = \sqrt{|xyz|}$ es continua en (0,0,0)

Veamos ahora si existen $f_x(0,0,0)$, $f_y(0,0,0)$ y $f_z(0,0,0)$ (derivadas parciales). No podemos derivar por reglas de derivación pues la función $g(t) = |t|$ no es derivable en $t=0$, y en f, lo de "adentro del módulo" (xyz) se anula en el origen.

Debemos tratar de calcular (si es que existen) las derivadas parciales por definición.

$$f_x(0,0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0,0) - f(0,0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{|t.0.0|} - 0}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

Análogamente sale que $f_y(0,0,0) = f_z(0,0,0) = 0$

Para analizar si f es diferenciable en (0,0,0) debemos verificar si se cumplen, o no, las siguientes condiciones:

i) Existen $f_x(0,0,0)$, $f_y(0,0,0)$, $f_z(0,0,0)$: ¡VALE! (las tres existen y valen cero)

ii) $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z) - f_x(0,0,0)\cdot x - f_y(0,0,0)\, y - f_z(0,0,0)\, z - f(0,0,0)}{\|(x,y,z) - (0,0,0)\|}$$

debe existir y valer cero.

Analicemos pues el límite:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sqrt{|xyz|}}{\|(x,y,z)\|}$$

Como se trata de un límite indeterminado del tipo "$\frac{0}{0}$" intentemos primero ver qué pasa si nos restringimos a curvas que pasen por el origen.

Por ejemplo: la recta $x = y = z$ (con $x \to 0$), es decir: nos acercamos al origen mediante puntos de la recta parametrizada como: $(x, y, z) = (x, x, x)$ con $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x,x,x)}{\|(x,x,x)\|} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{|x^3|}}{\sqrt{3x^2}} = \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{|x^2 \cdot x|}{3x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{\cancel{x^2}\,|x|}{3\cancel{x^2}}} = 0$$

Pareciera como si "el grado" del numerador "le ganara" al del denominador. De ser así podríamos sospechar que el límite vale efectivamente cero y tratar de probarlo por definición. O sea:

Dado $\varepsilon > 0$ tenemos que hallar $\delta > 0$ tal que si $\|(x,y,z)\| < \delta$ valga que $\left| \frac{f(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|} \right| < \varepsilon$

Recordemos acotaciones útiles: $|x| \leq \|(x,y,z)\| < \delta$ (lo mismo con $|y|$ y $|z|$)

$$\left| \frac{f(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|} \right| = \frac{\sqrt{|x||y||z|}}{\|(x,y,z)\|} \leq \frac{\sqrt{\|(x,y,z)\|^3}}{\|(x,y,z)\|} = \|(x,y,z)\|^{3/2 - 1} =$$

Uso la acotación anterior y que la raíz cuadrada es creciente como función

$= \|(x,y,z)\|^{1/2} < \delta^{1/2} = \sqrt{\delta}$ Si quiero que $\left| \frac{f(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|} \right|$ sea menor a ε, bastará con elegir δ menor a ε^2. $(\delta < \varepsilon^2)$

Luego: $f(x,y,z)$ es diferenciable en $(0,0,0)$

Ej (13) b) Para analizar la continuidad de f en el origen debemos verificar que se cumplan las tres condiciones:

i) Existe $f(0,0)$: ¡VALE! pues $f(0,0)=0$ (por la definición de f)

ii) Existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$

Todo indicaría que este límite existe y vale cero (vemos que el numerador tiene "mayor grado" que el denominador).

Probémoslo (por definición): Dado $\varepsilon>0$ busco $\delta>0$ de modo que si $\underbrace{\|(x,y)\|}_{\|(x,y)-(0,0)\|} < \delta$ entonces $|f(x,y) - \underbrace{0}_{\ell=0}| < \varepsilon$

Pero $|f(x,y)| = \dfrac{|x^4-y^4|}{x^2+y^2} = \dfrac{|x^4-y^4|}{\|(x,y)\|^2} \underset{\text{Desigualdad Triangular}}{\leq} \dfrac{|x^4|+|y^4|}{\|(x,y)\|^2} \leq$

$|x| \leq \|(x,y)\|$

$|y| \leq \|(x,y)\|$

$\leq \dfrac{\|(x,y)\|^4 + \|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^2} = \dfrac{2\|(x,y)\|^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{\|(x,y)\|^2}} < 2\delta^2$

Basta tomar $\delta < \sqrt{\varepsilon/2}$ (para que valga $2\delta^2<\varepsilon$) para asegurar que $|f(x,y)| < \varepsilon$

Luego: la condición ii) se cumple, "ℓ" existe y vale cero

iii) $\ell = f(0,0)$: ¡VALE!

Por lo tanto f es continua en el origen.

Analicemos la existencia de las derivadas parciales (f_x, f_y)

Tenemos que hacerlo por definición ya que se trata de una función partida.

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0} \frac{\frac{t^{\cancel{4}\,2}-0^4}{\cancel{t^2}} - 0}{t} =$$

$$= \lim_{t\to0} \frac{t^2}{t} = \lim_{t\to0} t = 0 \quad , \quad f_x(0,0)=0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{t\to0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0} \frac{\frac{0^4-t^4}{t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to0} \frac{-t^2}{t} = 0$$

Analicemos si f es diferenciable en (0,0,0), es decir si cumple (o no) las condiciones:

i) Existen $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ ¡VALE! (ambas derivadas parciales valen cero, según lo calculado antes)

ii) El límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y) - f_x(0,0)\cdot x - f_y(0,0)\,y - f(0,0)}{\|(x,y)\|}$

debe existir y valer cero.

Veamos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} - 0 - 0 - 0}{\|(x,y)\|} \overset{x^2+y^2=\|(x,y)\|^2}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{\|(x,y)\|^3}$$

Pareciera que este límite sí dá cero y podemos probarlo haciendo una acotación similar a la que hicimos cuando probamos la continuidad de f:

Dado $\varepsilon>0$ busco $\delta>0$ de modo que si $\|(x,y)\|<\delta$ eso asegure que $\left|\dfrac{x^4-y^4}{\|(x,y)\|^3}\right| < \varepsilon$

Desigualdad Triangular

$$\text{Pero } \left|\frac{x^4-y^4}{\|(x,y)\|^3}\right| = \frac{|x^4-y^4|}{\|(x,y)\|^3} \le \frac{|x^4|+|y|^4}{\|(x,y)\|^3} \le$$

$\hookrightarrow |x| \le \|(x,y)\|$
$|y| \le \|(x,y)\|$

$$\le \frac{2\,\|(x,y)\|^{\cancel{4}}}{\cancel{\|(x,y)\|^3}} < 2\delta$$

Basta tomar $\delta < \varepsilon/2$ para asegurar $\left|\dfrac{x^4-y^4}{\|(x,y)\|^3}\right| < \varepsilon$

Luego: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$, se verifica ii) con lo cual f es diferenciable. Como el gráfico de f es una superficie suave en $\mathbb{R}^3$ (por ser f diferenciable) en el punto $(0,0,f(0,0)) = (0,0,0)$ puede aproximarse por su plano tangente: $\pi: \; z = f(0,0) + f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\cdot y$

$$\boxed{\pi: \quad z = 0}$$

PRACTICA $\boxed{4}$ Hoja 14

Ej (14) b) Tenemos que calcular la derivada de la función $f\circ r$ usando Regla de la Cadena.

En nuestro ejemplo $f(x,y) = \cos(x+4y)$ y $r(t) = (\underbrace{5t^4}_{x(t)}, \underbrace{1/t}_{y(t)})$

Por supuesto que podríamos escribir explícitamente la función compuesta (reemplazando en $f(x,y)$ la x por $x(t) = 5t^4$ y la y por $y(t) = 1/t$) y derivar normalmente ... propongo que lo hagamos al final de todo, a modo de comprobación.

Para usar la Regla de la Cadena es muy práctico hacer un breve esquema que nos permita visualizar qué funciones tenemos, en qué orden se componen y de dónde sale cada una (y a dónde llega)

$f(x,y) = \cos(x+4y)$ es $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $z = f(x,y)$

$r(t) = (5t^4, 1/t)$ es $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, con $x(t) = 5t^4$, $y(t) = 1/t$

O sea:

variable t   variable z

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right, "f\circ r(t) = z"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

variable (x,y)

$f\circ r(t) = z$

Con lo cual $f\circ r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es una función de las del CBC.

Para calcular su derivada usaremos el Caso 1 de la Regla de la Cadena (ver STEWART, Pág 924) cuya fórmula dice

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Tenemos que tener en cuenta que <u>$z = f\circ r(t)$ depende únicamente de la variable "t"</u> por lo cual <u>no</u> puede quedar nada en función de "x" ni de "y". Si recordamos un poco la regla de la cadena del CBC para funciones de una variable... decía algo del estilo "la derivada de la función de afuera evaluada en la de adentro, por la derivada de la de adentro".

Esa idea sigue valiendo: En este caso la "función de afuera" es la f y sus derivadas ($f_x = \frac{\partial f}{\partial y}$ y $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$) deben quedar evaluadas "en la función de adentro" (que es $r(t)$).

Luego tenemos:

$$(f\circ r)'(t) = f_x(r(t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(t) + f_y(r(t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(t)$$

$$(f\circ r)'(t) = -\text{sen}(x+4y)\Big|_{r(t)} \cdot \overbrace{20t^3}^{\partial x/\partial t} + \left(-\text{sen}(x+4y)\cdot 4\Big|_{r(t)}\right) \cdot \overbrace{\left(-1/t^2\right)}^{\frac{\partial y}{\partial t}}$$

"evaluado en..."

$$(f\circ r)'(t) = -\text{sen}\left(5t^4 + 4/t\right) 20t^3 + 4\,\text{sen}\left(5t^4 + 4/t\right) \frac{1}{t^2}$$

Verifiquemos esto sin usar la Regla de la Cadena.

$$f\circ r(t) = f(r(t)) = f(5t^4, 1/t) = \cos\left(5t^4 + \frac{4}{t}\right)$$

Entonces:

$$(f\circ r)'(t) = -\text{sen}\left(5t^4 + \frac{4}{t}\right) \cdot \left(5t^4 + 4/t\right)' =$$

$$= -\text{sen}\left(5t^4 + 4/t\right) \cdot \left(20t^3 - 4/t^2\right) =$$

$$= -\text{sen}\left(5t^4 + 4/t\right) 20t^3 + \text{sen}\left(5t^4 + 4/t\right) \frac{4}{t^2}$$

que claramente da igual que si usamos la fórmula de la Regla de la Cadena para derivar la función compuesta $f\circ r(t)$ (no sé si solo a mí me pasa pero desde que empecé con este ejercio esto de $f\circ r(t)$ me suena a coche viejo ... perdón, mala mía)

Ej 16 b) Tenemos que usar la Regla de la Cadena para calcular las derivadas parciales $\partial z/\partial s$, $\partial z/\partial t$.

Organicemos la situación:

$z = \text{sen}(x)\cdot\cos(y)$, o sea: $z = f(x,y)$ con $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x = st^2$, $y = s^2 t$, o sea $(x(s,t), y(s,t)) = g(s,t)$, con $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

PRACTICA $\boxed{4}$ Hoja 16

$$\begin{tikzcd} \overset{(s,t)}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g(s,t)=z"'] & \overset{(x,y)}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \to z \end{tikzcd}$$

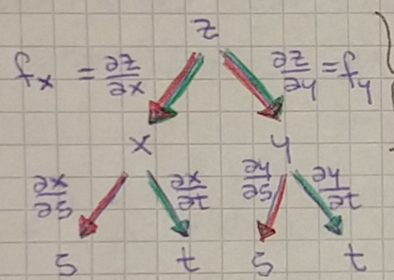
$z = f(x,y)$

$g(s,t) = (x(s,t)\,;\,y(s,t))$

$f \circ g(s,t) = z$

Por lo tanto $f\circ g$ depende únicamente de las variables (s,t) (pasando por x e y) y sus únicas derivadas parciales son respecto a dichas variables (y deben quedar expresadas únicamente en variables s y t)

Para calcular $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$ podemos recurrir a la fórmula de Regla de la Cadena Caso 2 (ver Stewart, Pág 926) o bien hacer un diagrama de árbol que sirva como ayuda memoria:



$z = f(x,y)$

$x = x(s,t)\ ;\ y = y(s,t)$

Para calcular $\frac{\partial z}{\partial s}$ tenemos que sumar todas las ramas del árbol que terminen en "s" (marcadas en rojo)

y para calcular $\frac{\partial z}{\partial t}$ usamos las ramas que terminan en t (marcadas en verde)

Con lo cual:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = f_x \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + f_y \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f_x \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + f_y \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Donde f_x, f_y deben quedar dependiendo de "s" y "t",

es decir: $f_x = f_x(x(s,t)\,;\,y(s,t))$

$f_y = f_y(x(s,t)\,;\,y(s,t))$

Luego: $\frac{\partial z}{\partial s} = \underbrace{\cos(x)\cos(y)}_{f_x}\Big|_{(x(s,t);y(s,t))} \cdot \underbrace{t^2}_{\partial x/\partial s} + \underbrace{\text{sen}(x)(-\text{sen}y)}_{f_y}\Big|_{(x(s,t),y(s,t))} \cdot \underbrace{2st}_{\partial y/\partial s}$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial s} = \cos(st^2)\cos(s^2t)\cdot t^2 - \text{sen}(st^2)\,\text{sen}(s^2t)\,2st}$$

y también:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \underbrace{\cos(x)\cos(y)}_{f_x}\Big|_{(x(s,t);y(s,t))} \cdot \underbrace{2st}_{\frac{\partial x}{\partial t}} + \underbrace{\text{sen}(x)(-\text{sen}y)}_{f_y}\Big|_{(x(s,t),y(s,t))} \cdot \underbrace{s^2}_{\partial y/\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial t} = \cos(st^2)\cos(s^2t)\cdot 2st - \text{sen}(st^2)\,\text{sen}(s^2t)\,s^2}$$

Por supuesto en este ejemplo también podemos verificar si lo hicimos bien. Basta con componer:

$$z = f(x(s,t);y(s,t)) = \text{sen}(st^2)\cos(s^2t)$$

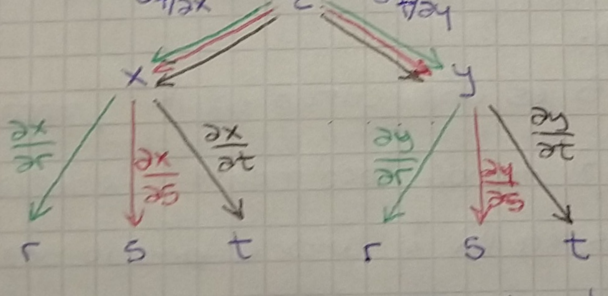
y luego calcular directamente $\frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Ej 17 a) Queremos calcular $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$ sabiendo que:

$z = f(x,y)$, $x = x(r,s,t)$, $y = y(r,s,t)$

Claramente $z = f(x(r,s,t), y(r,s,t))$ es una función que solo depende de las variables r,s,t (ya que "x" e "y" son variables intermedias)

Hagamos un diagrama de árbol como ayuda memoria:



Para poder calcular $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ bastará con seguir las ramas del árbol de color verde, rojo ó negro según el caso:

PRACTICA $\boxed{4}$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = f_x(x(r,s,t), y(r,s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + f_y(x(r,s,t); y(r,s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = f_x(x(r,s,t); y(r,s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + f_y(x(r,s,t); y(r,s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f_x(x(r,s,t); y(r,s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + f_y(x(r,s,t); y(r,s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Ej 23 a) Tenemos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2$

Consideramos la curva de nivel definida por:

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(x,y) = 1\}$ y el punto $a = (2,0)$

i) Para mostrar que $a \in S$ solo debemos verificar que cumpla la condición $f(a) = 1$, lo cual es cierto pues:

$$f(a) = f(2,0) = \frac{1}{4}2^2 - 0^2 = 1.$$

Como $a \in \mathbb{R}^2$ y cumple $f(a) = 1$, entonces $a \in S$.

ii) Queremos calcular las derivadas parciales de f en el punto $a = (2,0)$, o sea:

$f_x(2,0)$ y $f_y(2,0)$.

Como f es un polinomio podemos derivar por reglas de derivación y luego evaluar en $a = (2,0)$

$f_x(x,y) = \frac{1}{4} 2x = \frac{1}{2}x$, entonces $f_x(2,0) = 1$

$f_y(x,y) = -2y$, entonces $f_y(2,0) = 0$

iii) Queremos ver si en un entorno de $a = (2,0)$ el gráfico correspondiente a la curva de nivel S puede verse como el gráfico de una función ϕ.

Como el conjunto S es una curva en $\mathbb{R}^2$, para que sea gráfico de una función ϕ (al menos localmente) debería ser una ϕ que tome valores en $\mathbb{R}$ y cuyo codominio sea tambien $\mathbb{R}$.

($\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para que su gráfico sea una curva en $\mathbb{R}^2$)

Dicho de otro modo: queremos ver si los puntos que verifican la ecuación $\frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1$

pueden escribirse de modo que una de las variables esté en función de la otra (al menos cerca del punto $a=(2,0)$)

Eso nos hace pensar en el TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLICITA que nos asegura que bajo ciertas condiciones eso pasa.

Si tenemos $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, con derivadas parciales continuas. Consideramos $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=c\}$ ($c\in\mathbb{R}$, constante cualquiera). Si se cumple que un punto $a\in S$ ($a=(x_0,y_0)$) y que $f_x(a)\neq 0$. Entonces existe una $\phi: U\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, con U un conjunto abierto que contiene a "y_0" (un intervalo, por ejemplo) de modo que: $\phi(y_0)=x_0$, ϕ es derivable (con derivada continua) y vale además que $f(\phi(y),y)=c$ para todo $y\in U$ (o sea: $x=\phi(y)$ y todos los puntos del gráfico de ϕ están en S pues cumplen la ecuación $f(x,y)=c$).

Una vez recordado el Teorema, volvamos a nuestro ejercicio y chequeemos que se dan bien las condiciones (marcadas en rojo)

•) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\frac{1}{4}x^2-y^2$ es diferenciable y sus derivadas parciales ($f_x=\frac{1}{2}x$, $f_y=-2y$) son continuas ¡SE CUMPLE!

••) $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=1\}$, $a=(2,0)\in S$ ¡SE CUMPLE! (ya lo corroboramos antes)

•••) $f_x(a)=f_x(2,0)=1$ (cuenta hecha antes), con lo cual $f_x(a)\neq 0$

Estamos en condiciones de afirmar que existe $\phi: U\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable (con derivada continua), donde U es un entorno abierto que contiene a $y_0=0$, $\phi(0)=2$ ($\phi(y_0)=x_0$) y para cualquier $y\in U$, los puntos del gráfico de $x=\phi(y)$ son puntos de S, o sea: $(\phi(y),y)\in S$ para todo $y\in U$

o, lo que es lo mismo: la curva que es gráfico de ϕ

(formada por puntos $(\phi(y), y)$) coincide localmente con la curva S (al rededor del punto $a=(2,0)$)

iv) Ahora nos piden que calculemos la derivada de ϕ (es decir: $\phi'(y)$). Eso no es difícil de hacer:

Como sabemos que los puntos del gráfico de ϕ están en S, vale que

$$f(\phi(y); y) = 1 \qquad \forall y \in U$$

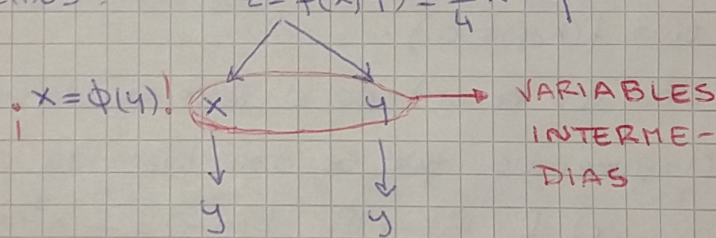
Derivemos ambos lados de la ecuación (por supuesto que la igualdad se mantiene pues hicimos lo mismo de ambos lados)

Toda la ecuación depende únicamente de la variable "y".

El lado derecho es constante, al derivar respecto de "y" da cero.

Para derivar $f(\phi(y), y)$ respecto de "y" debemos usar regla de la cadena: Tenemos:

$$z = f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2$$



Al derivar el lado izquierdo respecto de "y" queda:

$$f_x(\phi(y), y) \cdot \underbrace{\phi'(y)}_{\frac{\partial x}{\partial y}} + f_y(\phi(y), y) \cdot \underbrace{1}_{\frac{\partial y}{\partial y}}$$

A partir de $f(\phi(y); y) = 1$, derivando ambos lados obtenemos:

$$f_x(\phi(y), y)\ \phi'(y) + f_y(\phi(y), y) = 0$$

la derivada de "1"

Entonces $f_x(\phi(y), y) \cdot \phi'(y) = -f_y(\phi(y), y)$

Como en $y_0 = 0$ vale que $f_x(\phi(y_0), y_0) = f_x(2,0) = 1 \ (\neq 0)$ y además tanto ϕ como f_x son continuas (puesto que son diferenciables) entonces: para valores de "y" cercanos