Resumen Mate 1

Este resumen fue hecho en base a las teóricas durante el dictado de las clases virtuales (primer cuatrimestre del 2020), justo el primer cuatrimestre con el nuevo programa de la materia.

Lema de los límites iterados

Si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \Rightarrow \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = L$$

Aproximación por curvas

Si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b} f(x,y) = L \Rightarrow \exists\ \mathbf{r}(t) \Big/ \lim_{t\to t_o} \mathbf{r}(t) = (a,b)$$

Luego

$$\lim_{t\to t_o} f(\mathbf{r}(t)) = L$$

Continuidad

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(a,b) \in D$. Decimos que f es continua en (a,b) sii:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Derivadas Parciales

$$f_x(x_o,y_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h,y_o)-f(x_o,y_o)}{h}$$

$$f_y(x_o,y_o) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x_o,y_o+k)-f(x_o,y_o)}{k}$$

Teorema de Clairaut-Schwarz

Si f_x y f_y son continuas en un disco $D \subset \mathbb{R}^2$, entonces con $(a, b) \in D$, se tiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$$

Diferenciación

El gradiente de f se define:

$$\nabla f(x_o, y_o) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o), \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \right)$$

f es diferenciable en (x_o, y_o) si:

$$\lim_{(x,y) \to (x_o, y_o)} \frac{f(x, y) - f(x_o, y_o) - \nabla f(x_o, y_o) \cdot (x - x_o, y - y_o)}{||(x - x_o, y - y_o)||} = 0$$

Si f_x y f_y existen y son continuas en un entorno de (x_o, y_o), entonces f es diferenciable en (x_o, y_o)

Regla de la cadena

Versión 1 Sea $z = f(x, y)$ diferenciable en (a, b) y $\mathbf{r}(t) = (g(t), h(t))$ una función vectorial tal que $\mathbf{r}(t_o) = (a, b)$ y $\mathbf{r}$ es diferenciable en t_o. Entonces $f \circ \mathbf{r}$ es diferenciable en t_o y:

$$(f \circ \mathbf{r})'(t_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot g'(t_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot h'(t_o)$$

Versión 2 Sea $z = f(x, y)$, $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Derivada direccional

Dado un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$, se define la derivada direccional de f dada por $\mathbf{u}$ a:

$$D_u f(x_o, y_o) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_o, y_o) = \lim_{h \to o} \frac{f(x_o + ah, y_o + bh) - f(x_o, y_o)}{h}$$

Si f es diferenciable en (x_o, y_o), entonces:

$$D_u f(x_o, y_o) = \nabla f(x_o, y_o) \cdot \mathbf{u}$$

Plano Tangente

El plano tangente a f en $[x_o, y_o, f(x_o, y_o)]$ es igual a:

$$z = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_o,y_o)} (x - x_o) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_o,y_o)} (y - y_o) + f(x_o, y_o)$$

Teorema

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_o, y_o) \in D$, f diferenciable en (x_o, y_o). El vector u donde $D_u f((x_o, y_o))$ es máximo viene dado por:

$$u = \frac{\nabla f(x_o, y_o)}{|\nabla f(x_o, y_o)|} \text{ Si } \nabla f(x_o, y_o) \neq (0, 0)$$

El valor máximo de $D_u f(x_o, y_o)$ es $|\nabla f(x_o, y_o)|$

Teorema de la función implícita

Sea $f(x, y)$ una función de clase C^1, $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_o, y_o) = k$ y supongamos que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \neq 0$. Entonces existe $\phi(x)$ tal que $\phi(x_o) = y_o$, ϕ es de clase C^1 y $f(x, \phi(x)) = k \ \forall x$.

$$\phi'(x_o) = -\frac{f_x(x_o, y_o)}{f_y(x_o, y_o)}$$

Con tres variables:

$$\phi_x(x, y) = -\frac{f_x(x, y, z)}{f_z(x, y, z)}$$

$$\phi_y(x, y) = -\frac{f_y(x, y, z)}{f_z(x, y, z)}$$

Polinomio de Taylor (orden 2)

Sea $f(x, y)$, $f : D$[1] $\to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. [2] El polinomio de Taylor de orden 2 de f centrado en $P = (a, b)$, se define:[3]

$$P_2(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + \frac{1}{2!} f_{xx}(a, b)(x-a)^2 + f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2!} f_{yy}(a, b)(y-b)$$

Observar que si el orden del polinomio de Taylor es 1 lo que nos queda es la formula del plano tangente al punto (a, b) de f. También se llama polinomio de Maclaurin al polinomio de Taylor centrado en el origen.

[1] Disco abierto centrado en $P = (a, b)$
[2] Existen $f_x, f_y, f_x x, f_x y = f_y x, f_y y$ en D y son continuas
[3] Como las derivadas cruzadas se repiten y son dos no van divididas por 2

Propiedad del polinomio de Taylor de orden 2

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - P_2(x,y)}{||(x-a, y-b)||^2} = 0$$

Si el polinomio es de orden 1 pasa algo similar

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - P_1(x,y)}{||(x-a, y-b)||} = 0$$

Notar que es equivalente a la formula de diferenciabilidad.

Formula de Lagrange del Resto

Sea $f(x,y)$ una función de clase C^3 es un disco centrado en $P=(a,b)$. Entre (a,b) y (x,y) hay un punto $Q=(c,d)$ tal que se define al resto de orden 2 así[4]:

$$R_2(x,y) = \frac{f_{xxx}(Q)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f_{xxy}(Q)}{2}(x-a)^2(y-b) + \frac{f_{xyy}(Q)}{2}(x-a)(y-b)^2 + \frac{f_{yyy}(Q)}{3!}(y-b)^3$$

Matriz Hessiana

Sea $f = f(x,y)$, la matriz Hessiana de f se define:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

Si $f = f(x,y,z)$:

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y,z) & f_{xy}(x,y,z) & f_{xz}(x,y,z) \\ f_{yx}(x,y,z) & f_{yy}(x,y,z) & f_{yz}(x,y,z) \\ f_{zx}(x,y,z) & f_{zy}(x,y,z) & f_{zz}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Extremos locales

Sea $f = f(x,y)$, se dice que:

- f tiene un **máximo local** en (a,b) si hay un disco D centrado en (a,b) tal que $\forall (x,y) \in D, f(x,y) \leq f(a,b)$.
  Si $f(x,y) \leq f(a,b) \quad \forall (x,y) \in \text{Dom}(f)$ enotonces es un **máximo absoluto**.
- f tiene un **minimo local** en (a,b) si hay un disco D centrado en (a,b) tal que $\forall (x,y) \in D, f(x,y) \geq f(a,b)$.
  Si $f(x,y) \geq f(a,b) \quad \forall (x,y) \in \text{Dom}(f)$ enotonces es un **minimo absoluto**.

[4]De vuelta las derivadas cruzadas se repiten (y hay 3 de cada una) es por eso que van divididas por 2 en vez de 3!

Supongo que f tiene un extremo local en (a, b); y ademas tiene derivadas parciales entonces:

$$\begin{cases} f_x(a,b) = 0 \\ f_y(a,b) = 0 \end{cases}$$

A los puntos (a, b) que cumplen con esto junto con los puntos en los que no exsista alguna de las dos derivadas parciales, se los llama **puntos criticos**.

Criterio del Hessiano

Sea $f = f(x, y)$ una función de clase C^2 en un disco D. Hay un cierto punto $(a, b) \in D$ que es punto critico de f. Se define a $d = \det[H_f(a, b)]$, entonces:

- Si $f_{xx}(a, b) > 0$ y $d > 0 \Rightarrow$ en (a, b) hay un **minimo local estricto** en D.
- Si $f_{xx}(a, b) < 0$ y $d > 0 \Rightarrow$ en (a, b) hay un **máximo local estricto** en D.
- Si $d < 0 \Rightarrow$ en (a, b) hay un **punto de silla** en D.

Definiciones útiles

- Un conjunto A es cerrado si los puntos que estan en el borde de A (frontera de A, ∂A) forman parte de A.
- $P \in \partial A$ si para algún $r > 0$, $\exists D_r(P)$ [5] tal que en D hay puntos de A y puntos que no son de A.
- Un conjunto A es acotado si $\exists D / A \subset D$
- Un conjunto es compacto si se cumple que es acotado y cerrado.

Teorema de Weierstrass (V.1)

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces g alcanza minimos y máximos absolutos en $[a, b]$

Teorema de Weierstrass (V.2)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y A un conjunto compacto, entonces f alcanza máximos y minimos absolutos en A.

[5] Disco centrado en P y de radio r

Multiplicadores de Lagrange (una restricción)

Supongamos que una función ($f = f(x, y)$ ó $f = f(x, y, z)$) considerada en un dominio dado por una ecuación ($g(x, y) = k$ ó $g(x, y, z) = k$) tiene un extremo (local) en P. Ademas f, g son diferenciables en P y $\nabla g \neq \vec{0}$. Entonces,

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$$

Multiplicadores de Lagrange (dos restricciones)

Sea $f = f(x, y, z)$ en un dominio $g(x, y, z) = k$ y $h(x, y, z) = l$, con un extremo en P. Ademas f, g, h son diferenciables en P y $\nabla g(P)$ y $\nabla h(P)$ no son múltiplos. Entonces,

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P) + \mu \nabla h(P)$$

Campos Vectoriales

Un conjunto vectorial en $\mathbb{R}^2$ es una función $F = F(x, y)$ con dominio en $D \subset \mathbb{R}^2$, $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ con $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Un conjunto vectorial en $\mathbb{R}^3$ es una función $F = F(x, y, z)$, $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ con $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

El campo gradiente de f se define como: $\nabla f = (f_x, f_y)$

Un campo vectorial es conservativo si existe una función $f / F = \nabla f$, a f se lo llama un potencial de F.

Teoremas

Sea $F = (P, Q)$ con P, Q de clase C^1. Si F es conservativa $\Rightarrow Q_x = P_y$.

Si $F = (P, Q)$ está definido en $\mathbb{R}^2$ (también vale en un disco) y $Q_x = P_y \Rightarrow F$ es conservativa.

Lineas de Flujo

Dado un campo vectorial $F = F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ y $\sigma(t), t \in \mathbb{R}$ una curva en $\mathbb{R}^2$. A $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ se le llama linea de flujo del campo F, si:

$$\sigma'(t) = F(\sigma(t))$$

Campos en $\mathbb{R}^3$

Sea $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$. Un campo F es conservativo si existe $f(x,y,z)$ $(f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$tal que:

$$F = \nabla f, \qquad \begin{cases} P = f_x \\ Q = f_y \\ R = f_z \end{cases}$$

Entonces f es un potencial de F

Rotacional (rotor) en $\mathbb{R}^3$

Sea $F = (P, Q, R)$ y P, Q, R tienen derivadas parciales. Llamamos al rotacional de F:

$$\nabla \times F = \mathrm{rot}(F) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

Notar que $\mathrm{rot}(F)$es un nuevo campo vectorial. Una regla memotecnica de calcular el rotor es calculando el determinante de la siguiente pseudo matriz:

$$\nabla \times F = \mathrm{rot}(F) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Teoremas

Sea $F = F(x,y,z)$ de clase $C^2 \Rightarrow \mathrm{rot}(\nabla F) = (0,0,0)$.

Si F es un campo conservativo $(F = \nabla f) \Rightarrow \mathrm{rot}(F) = (0,0,0)$

Sea $F = (P, Q, R)$ con dominio en $\mathbb{R}^3$ (también vale con una bola), de clase C^1 y $\nabla \times F = (0,0,0)$ entonces F es conservativo $(\exists f / \nabla f = F)$

Divergencia

Sea $F = (P, Q, R)$ y P, Q, R tienen derivadas parciales. La divergencia de F es:

$$\nabla \cdot F = \mathrm{div}(F) = P_x + Q_y + R_z$$

Notar que $\mathrm{div}(F)$ es un campo escalar

Teorema

$F = (P, Q, R)$ con P, Q, R de clase $C^2 \Rightarrow \mathrm{div}(\mathrm{rot}(F)) = 0$

Suma de Riemann

En $\mathbb{R}$

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, si el limite existe:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x} = \int_a^b f(x)dx$$

Si la función es positiva la integral termina siendo el area debajo de la curva en el intervalo $[a, b]$. Y en general vale:

$$f_{\text{promedio}} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

En $\mathbb{R}^2$

Sea $f : R \to \mathbb{R}$ con $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ una función continua. Entonces, si el limite existe:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \underbrace{\frac{b-a}{n} \frac{d-c}{m}}_{\Delta A} = \iint_R f(x, y)dA$$

Si la función es positiva la doble integral es el volumen debajo de la superficie. En general vale:

$$f_{\text{promedio}} = \frac{\iint_R f(x, y)dA}{(b-a)(d-c)}$$

En $\mathbb{R}^3$

Sea $f : Q \to \mathbb{R}$ con $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \in [a, b], y \in [c, d], z \in [e, f]\}$ una función continua. Entonces, si existe el limite:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ l\to\infty}} \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \underbrace{\frac{b-a}{n} \frac{d-c}{m} \frac{f-e}{l}}_{\Delta V} = \iiint_Q f(x, y, z)dV$$

En general vale:

$$f_{\text{promedio}} = \frac{\iiint_Q f(x, y, z)dV}{\text{Volumen de } Q}$$

Cálculo de Integrales

En $\mathbb{R}$

Regla de Barrow

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ con $g'(x)=f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = g(b)-g(a)$$

En $\mathbb{R}^2$

Integrales Iterados

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x.y)dx\right) dy$$

Teorema de Fubini

Sea $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ un función continua, entonces:

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

Integrales en dominios generales

Integrales en dominio de Tipo I

Sea $f:D\to\mathbb{R}$ y $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\leq x\leq b, g_1(x)\leq y\leq g_2(x)\}$. Entonces:

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right) dx$$

Integrales en dominio de Tipo II

Sea $f:D\to\mathbb{R}$ una función continua y $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : c\leq y\leq d, h_1(y)\leq x\leq h_2(y)\}$. Entonces:

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right) dy$$

Propiedades de integrales dobles

Sean $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $$\iint_D \alpha f(x,y) + \beta g(x,y) dA = \alpha \iint_D f(x,y) dA + \beta \iint_D g(x,y) dA$$

2. Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ y $(x,y) \in D$, entonces:
$$\iint_D f(x,y) dA \leq \iint_D g(x,y) dA$$

3. Supongamos que el dominio D se descompone en dos partes D_1, D_2 tal que $D_1 \cup D_2 = D$:
$$\iint_D f(x,y) dA = \iint_{D_1} f(x,y) dA + \iint_{D_2} f(x,y) dA$$

4. $$\iint_D dA = \text{Area de } D$$

Fubini en $\mathbb{R}^3$

Sea $f : Q \to \mathbb{R}^3$ con $Q = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ una función continua, entonces:

$$\begin{aligned}
\iiint_Q f(x,y,z) dV &= \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \left(\int_e^f f(x,y,z) dz \right) dA = \\
&= \iint\limits_{[a,b]\times[e,f]} \left(\int_c^d f(x,y,z) dy \right) dA = \\
&= \iint\limits_{[c,d]\times[e,f]} \left(\int_a^b f(x,y,z) dx \right) dA
\end{aligned}$$

Propiedades de integrales triples

1. Sea D_1, D_2 tal que $D = D_1 \cup D_2$, entonces:
$$\iiint_D f(x,y,z) dV = \iiint_{D_1} f(x,y,z) dV + \iiint_{D_2} f(x,y,z) dV$$

2. $$\iiint_D dV = \text{Volumen de } D$$

Integrales en dominios elementales de $\mathbb{R}^3$

Tipo I

$D = \{(x, z) \in D' \subset \text{ plano } xy, g_1(x, y) \leq y \leq g_2(x, y)\}$

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \iint_{D'} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dA$$

Tipo II

$D = \{(x, z) \in D'' \subset \text{ plano } xz, h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z)\}$

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \iint_{D''} \left(\int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x,y,z)dy \right) dA$$

Tipo III

$D = \{(x, z) \in D''' \subset \text{ plano } yz, k_1(y, z) \leq y \leq k_2(y, z)\}$

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \iint_{D'''} \left(\int_{k_1(y,z)}^{k_2(y,z)} f(x,y,z)dx \right) dA$$

Formula de cambio de variables

Integral simple

$$\int_c^d f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(u)du$$

$$u = g(x)$$
$$du = g'(x)dx$$

Integral doble

$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$

$$\iint_D f(x,y)dA(x,y) = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \underbrace{|JT(x,y)|}_{\neq 0} dA(u,v)$$

Jacobiano

El jacobiano de T se define como:

$$JT(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

Integral triple

$T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$

$$\iiint_D f(x,y,z)dV(x,y,z) = \iiint_{D'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|JT(u,v,w)|dV(u,v,w)$$

Jacobiano en $\mathbb{R}^3$

El jacobiano de T se define como:

$$JT(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

Coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

La transformación de diferenciales queda:

$$dA(x,y) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dA(r,\theta) = r dA(r,\theta)$$

Coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}, r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}$$

La transformación de diferenciales queda:

$$dV(x,y,z) = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| dV(r,\theta,z) = r dV(r,\theta,z)$$

Coordenadas Esféricas

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}, \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [o, \pi]$$

La transformación de diferenciales queda:

$$dV(x,y,z) = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right| dV(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2 \sin\varphi dV(\rho,\theta,\varphi)$$