1. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \wedge g \in C^2$

   $p(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ polinomio de taylor de orden 2 en $(0, 0)$

   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   $f(x, y) = \sin^2(x - y) + 2g(x, y) \Rightarrow$

   ### Analizo las derivadas de p

   - $p_x(x, y) = 2x + 3y$
   - $p_y(x, y) = 3x + 2y$
   - $p_{xx}(x, y) = 2$
   - $p_{xy}(x, y) = 3$
   - $p_{yy}(x, y) = 2$

   ### Como p es el polinomio de taylor de g en $(0, 0)$ en $(0, 0)$ sus derivadas coinciden

   - $g(0, 0) = p(0, 0) = 0$
   - $g_x(0, 0) = p_x(0, 0) = 0$
   - $g_y(0, 0) = p_y(0, 0) = 0$
   - $g_{xx}(0, 0) = p_{xx}(0, 0) = 2$
   - $g_{yy}(0, 0) = p_{yy}(0, 0) = 3$
   - Como $g, p \in C^2 : g_{xy}(0, 0) = g_{yx}(0, 0) = p_{xy}(0, 0) = p_{yx}(0, 0) = 2$

   a) **Analizo f y sus derivadas**

   Propongo $r(x, y) = \sin^2(x - y) \in C^2$ al ser trigonometrica

   - $r_x(x, y) = 2\sin(x - y)\cos(x - y)$
   - $r_y(x, y) = -2\sin(x - y)\cos(x - y)$
   - $r_{xx}(x, y) = 2(\cos(x - y)\cos(x - y) + \sin(x - y)(-\sin(x - y))) =$
     $2(\cos^2(x - y) - \sin^2(x - y))$
   - $r_{xy}(x, y) = r_{yx}(x, y) = 2\cos^2(x, y)(-1) - 2\sin^2(x - y)(-1) =$
     $2\sin^2(x - y) - 2\cos^2(x - y) =$
     $2(\sin^2(x - y) - \cos^2(x - y))$
   - $r_{yy}(x, y) = -2\cos^2(x - y)(-1) + 2\sin^2(x - y)(-1) =$
     $2\cos^2(x - y) - 2\sin^2(x - y) =$
     $2(\cos^2(x - y) - \sin^2(x - y))$

   $f(x, y) = r(x, y) + 2g(x, y)$

   - $f(0, 0) = r(0, 0) + 2g(0, 0) = 0 + 2(0) = 0$
   - $f_x(0, 0) = r_x(0, 0) + 2g_x(0, 0) = 0 + 2(0) = 0$
   - $f_y(0, 0) = r_y(0, 0) + 2g_y(0, 0) = 0 + 2(0) = 0$
   - $f_{xx}(0, 0) = r_{xx}(0, 0) + 2g_y(0, 0) = 2 + 2(2) = 6$
   - $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0) = r_{xy}(0, 0) + 2g_y(0, 0) = -2 + 2(2) = 2$
   - $f_{yy}(0, 0) = r_{yy}(0, 0) + 2g_y(0, 0) = 2 + 2(3) = 8$

   ### Desarrollo el polinomio de taylor de orden 2 en $(0, 0)$

   $t(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{f_{xx}(0,0)x^2}{2} + \frac{f_{yy}(0,0)y^2}{2} + f_{xy}(0, 0)xy =$

   $t(x, y) = 0 + 0x + 0y + \frac{\cancelto{3}{6}\, x^2}{\cancel{2}} + \frac{\cancelto{4}{8}\, y^2}{\cancel{2}} + 2xy =$

   $t(x, y) = 3x^2 + 4x^2 + 2xy$

   b) $\nabla f(0, 0) = (0, 0) \Rightarrow$ es un punto critico

Analizo por el criterio del Hessiano

$det(H_f(0,0)) = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy} \cdot f_{yx} = 6 \cdot 8 - 2 \cdot 2 = 44$

$det(H_f(0,0)) > 0 \wedge f_{xx} > 0 \overset{por\ el\ criterio\ del\ Hessiano}{\Rightarrow} (0,0)$ es un mínimo local de f

2. **Datos**

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- $f(x,y) = xy$
- $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \leq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 4\}$

Por Weiertrass como f es continua y D compacto f alcanza maximos y minimos absolutos en D

Analizo D

- $x \geq 0$
- $y \leq 0$
- $x^2 + y^2 \leq 4$

$x^2 + y^2 = 4$ describe una circunferencia de radio 2 centrada en el $(0,0)$ y por $x \geq 0 \wedge y \leq 0$ solo me quedo con el 4to cuadrante

Borde de D

- $x = 0 \wedge -2 \leq y \leq 0$
- $y = 0 \wedge 0 \leq x \leq 2$
- $x^2 + y^2 = 4$

Analizo f en el interior de D

- $x > 0$
- $y < 0$
- $x^2 + y^2 < 4$

Busco los ptos criticos de f en el interior de D

$\nabla f(x,y) = (y,x) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ que se encuentra en el borde, entonces no tiene puntos criticos en el interior de D

Analizo el borde de D

a) $x = 0 \wedge 0 \leq y \leq -2$
$f(0,y) = 0$
Como $0 \leq y \leq -2$ y $f(x,y) = xy$ es decreciente por que y es negativo, entonces f alcanza su maximo sobre el eje y

b) $y = 0 \wedge 0 \leq x \leq 2$
$f(x,0) = 0$
Como $0 \leq y \leq -2$ y $f(x,y) = xy$ es decreciente por que y es negativo, entonces f alcanza su maximo sobre el eje x

c) $x^2 + y^2 = 4$

Paso a polares

$g(r,t) = f(r\sin(t), r\cos(t))$
$r = 2\wedge$ para estar en el borde de $D : \frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$
$h(t) = g(2,t) = 4\sin(t)\cos(t)$ con $\frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$
$h'(t) = 4(\sin^2(t) - \cos^2(t)) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7\pi}{4}$

- $y = 2\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -2\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$
- $x = 2\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Al ser f decreciente ya que y es negativo, su minimo es -2 que lo alcanza en $(\sqrt(2), -\sqrt(2))$

f alcanza su minimo absoluto en $(\sqrt(2), -\sqrt(2))$ que vale -2 y su maximo sobre los ejes $(0,y) : -2 \leq y \leq 0 \wedge (x,0) : 0 \leq x \leq 2)$

3. *a)* $\int\int_D e^x y^3 dA$
   $D =$
   - $x = y^4$
   - $x = 1$

   $\Rightarrow$
   - $0 \leq x \leq y^4$
   - $0 \leq y \leq 1$

   $\int_0^1 (\int_0^{y^4} e^x y^3 dx) dy$
   - $\int_0^{y^4} e^x y^3 dx =$
     $e^{y^4} y^3 - y^3$
   - $\int_0^1 e^{y^4} y^3 - y^3 dy =$
     $\int e^{y^4} y^3 dy$
     $u = y^4 \wedge du = 4y^3 dy \Rightarrow dy = \frac{du}{4y^3} \Rightarrow$
     $\int \frac{e^u}{4} du = \frac{1}{4}e^u + C = \frac{e^{y^4}}{4} + C \Rightarrow$
     $\int_0^1 e^{y^4} y^3 - y^3 dy \overset{Barrow}{=}$
     $\frac{e^{y^4}}{4} - \frac{y^4}{4}\Big|_0^1 =$
     $\frac{e}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e-2}{4}$

   b)
   - $x + 2y = 2$ describe un plano
     $x = 0 \Rightarrow y = 1$
     $y = 0 \Rightarrow x = 2$
     Como se encuentra en el primer octante
     $D' =$
     - $0 \leq x \leq 2 - 2y$
     - $0 \leq y \leq 1$
   - $z = x^2 + y^2$ describe un paraboloide
     $0 \leq z \leq x^2 + y^2$

   $\int_0^1 (\int_0^{2-2y} (\int_0^{x^2+y^2} 1dz) dx) dy$
   - $\int_0^{x^2+y^2} 1dz = x^2 + y^2$
   - $\int_0^{2-2y} x^2 + y^2 dx \overset{Barrow}{=}$
     $\frac{x^3}{3} + xy^2\Big|_0^{2-2y} =$
     $y^2(-2y+2) + \frac{(-2y+2)^3}{3}$
   - $\int_0^1 y^2(-2y+2) + \frac{(-2y+2)^3}{3} dy =$

- $\int_0^1 y^2(-2y+2)dy =$
  $\int_0^1 -2y^3 + 2y^2 dy \overset{Barrow}{=}$
  $-\frac{y^4}{2} + \frac{2y^3}{3}\Big|_0^1 =$
  $-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$
- $\int_0^1 \frac{(-2y+2)^3}{3} dy =$
  $\frac{1}{3}\int_0^1 -8y^3 + 24y^2 - 24y + 8dy \overset{Barrow}{=}$
  $\frac{1}{3}(-2y^4 + 8y^3 - 12y^2 + 8y\big|_0^1) =$
  $\frac{1}{3}(-2+8-12+8) = \frac{2}{3}$

$\int_0^1 y^2\left(-2y+2\right) + \frac{(-2y+2)^3}{3} dy = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

4. **No lo hice**