

On a déjà étudié les niveaux dans un graphe simple orienté sans circuit. Dans le paragraphe V.5, on va étudier l'algorithme M.P.M.

(Il y a une autre méthode : P.E.R.T : "Program evaluation and research task", utilisée par les américains dans les années cinquantes pour la réalisation d'un programme de constructions des fusées Polaris lorsqu'il y a eu des tensions politiques entre les américains et les cubains).

## V.5 Méthode M.P.M

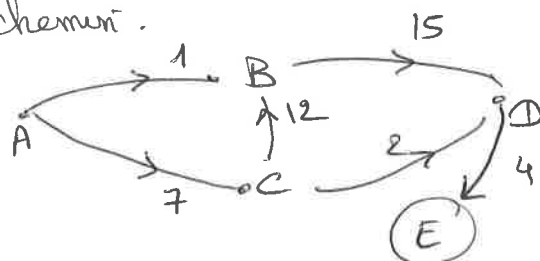
(méthode des potentiels Métra).

Def: On appelle graphe valué, un graphe dans lequel un nombre entier naturel est affecté à chaque arc.  
Ce nombre est la valeur de l'arc.  
Ce nombre peut représenter le coût, la durée, la distance,.....

Dans cette partie, on va s'intéresser à la valeur d'un chemin et non pas la longueur d'un chemin.

La valeur d'un chemin est la somme des valeurs affectées aux arcs qui constituent le chemin.

ex :



- le chemin A B D a pour valeur 16.
- le chemin A C B D 34.

On va étudier la méthode à travers un exemple ; ensuite on va généraliser.

Ex: Un projet est constitué de plusieurs tâches A, B, C, D, E, F, G et on a :

Tâches	A	B	C	D	E	F	G
Tâches précédentes		A	A	B	C	B	D, E
Durée de la tâche (en jours)	4	6	7	10	4	5	6

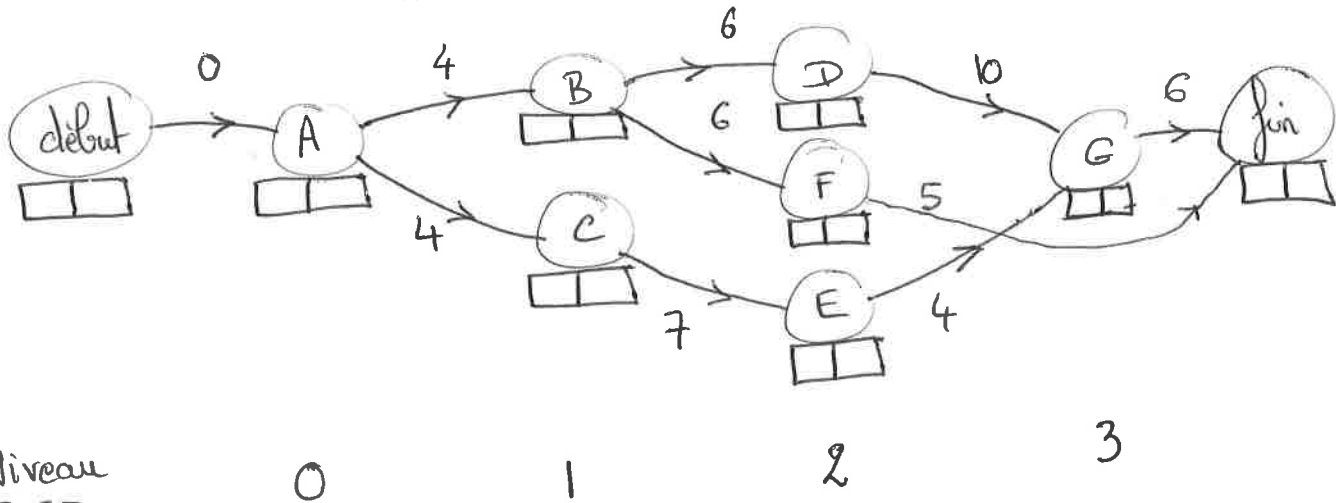
étape 1 : Chercher les niveaux : on obtient :

(S102) 215

A : niveau 0  
B, C : — 1

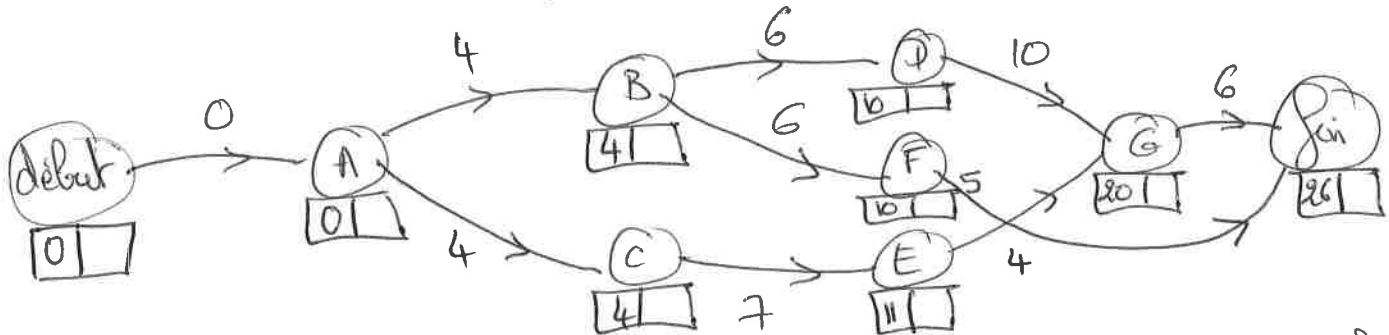
D, E, F : niveau 2  
G : niveau 3

étape 2 : On donne la représentation "linéaire" du graphe en mettant sur chaque arc la durée de la tâche à l'origine de l'arc, en ajoutant deux tâches fictives "début" et "fin" et deux cases en-dessous de chaque tâche fictive. (la lecture "inverse" du tableau donné permet de chaque sommet).




hg : la tâche "début" a une durée égale à "0" par convention.

étape 3 : On remplit d'abord la case située à gauche :  
Par convention, pour "début", c'est "0".

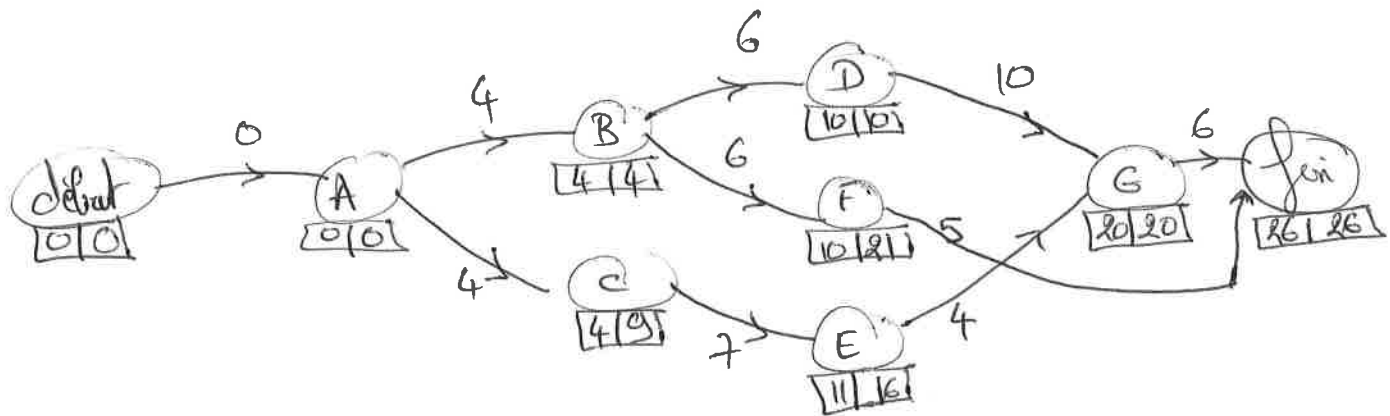


On considère la valeur maximale des chemins qui mènent à la tâche considérée. (→ explication orale).

étape 4 : On remplit ensuite la case située à droite :  
On recopie le nombre qu'on a trouvé dans la case gauche de "fin".  
càd.  on recopie et on met 26.

On considère la valeur minimale des "différences" en parcourant Si02 3/5  
le graphe de droite vers la gauche.

← sens du parcours.

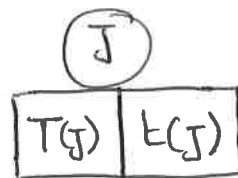


(fin des étapes).

Il faut maintenant interpréter ces nombres:

Interprétation:

Soit  $J$  une tâche:



et on note  $d(J)$  la durée  
de la tâche  $J$ .

$T(J)$ : c'est la date au plus tôt de début d'une tâche  $J$ .  
C'est la date à partir de laquelle toutes les tâches précédant sont terminées.  
C'est le plus grand des nombres  $T(I) + d(I)$  où  $I$  est une tâche qui précède immédiatement  $J$ .

$E(J)$ : c'est la date au plus tard de début d'une tâche  $J$ .  
C'est la date la plus grande permettant de commencer la tâche sans retarder la fin du projet.  
C'est le plus petit des nombres  $E(K) - d(J)$  où  $K$  est une tâche succédant immédiatement à  $J$ .

Rq:  $T(J) \leq t(J)$

pour toute tâche  $J$ . (S102) 4/5

⚠ Dans certains cours sur Internet, on a changé la place de  $T$  et  $t$ . Dans votre programme " $T$ " se situe à gauche et " $t$ " à droite.

On finit ce chapitre avec la notion de "marge" et de "chemin critique":

Def: • La marge totale  $MT(J)$  d'une tâche  $J$  est le retard maximum possible pour le début de la tâche  $J$  sans retarder la fin du projet:

$$MT(J) = t(J) - T(J).$$

• La marge libre  $ML(J)$  d'une tâche  $J$  est le retard maximum possible pour le début de la tâche  $J$  sans retarder la date au plus tôt de début de chaque tâche suivant immédiatement  $J$ .

$$ML(J) = \min_K \{ T(K) - T(J) - d(J), \text{ } \}_{\substack{K \\ \text{successeurs} \\ \text{de } J}}$$

Il y a aussi la "marge certaine" ou "absolue"; dans votre programme cette marge n'est pas demandée.

ex: Voir le cas qu'on a étudié:

•  $MT(E) = t(E) - d(E) = 16 - 11 = 5.$

On peut se permettre au max 5 jours de retard pour le début de  $J$  sans retarder le projet.

•  $MT(A) = ?$  C'est le plus petit de ces nombres:  
 $T(B) - T(A) - d(A) = 4 - 0 - 4 = 0$   
 $T(C) - T(A) - d(A) = 4 - 0 - 4 = 0$

C'est "0". Pas de retard possible pour le début de la tâche A

sans retarder la date au plus tôt de début des tâches B etc. (S102) 5/5

Def:

- Une tâche critique est une tâche de marge totale nulle.
- Un chemin critique est constitué d'une succession de tâches critiques reliant le début à la fin.
- La durée minimale de réalisation d'un projet est la valeur d'un chemin critique. (voir les cases fin).

ex: Voir le cas étudié :

- D est une tâche critique (il y en a d'autres).
- A B D G est un chemin critique.
- la durée minimale de réalisation de ce projet est 26 jours.

(Fin chap V)

Exercice: Donner les dates au plus tôt et au plus tard (représentation linéaire + cases):

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H
Tâches précédentes		A	A	B	B, C	C	B, E, F	D, G
Durée	1	3	2	5	1	7	4	2

D'autres exercices ont été déjà envoyés par mail. (à voir).