



FISICA DEI PLASMI

APPUNTI DI:
ANDREA GALIATI
NICOLÒ MONE

Tratti dal corso del prof. F. Califano,
anno 2025

Indice

1 Introduzione	2
1.1 Cosa è un plasma?	2
2 Costruiamo una teoria che descriva un plasma	4
2.1 Equazione di continuità	5
2.2 Equazioni del moto (tre componenti)	5
2.3 Equazione di stato	5
2.4 Linearizzazione delle equazioni	6
2.5 Evoluzione dell'elemento fluido	6
2.6 Ruolo delle collisioni nella diffusione del calore	7
2.6.1 Entropia	7
2.6.2 Entalpia	7
2.7 Plasmi e regime fluido, come trattarli	8
2.7.1 Ancora sulla linearizzazione: il comportamento ondulatorio	8
2.7.2 Onda piana armonica	9
2.7.3 Onde di plasma	9
2.7.4 Chiusura Plasma freddo	10
2.7.5 Confronto tra ipotesi e risultati, verifica a posteriori del regime di plasma freddo .	10
2.7.6 Chiusura politropica	11
2.8 Schermatura di Debye	11
2.9 Onda e.m. che investe un plasma	12
2.10 Parametro di plasma	14
3 Teorema di connessione (conservazione del flusso)	15
4 Una trattazione statistica per i plasmi	18
4.1 L'equazione di Vlasov	18
4.2 Da Vlasov alle equazioni fluide	19
4.3 Equazione dell'energia	21
5 Modello ad un fluido (Magnetoidrodinamica)	22
5.1 Equazione di continuità ad un fluido	22
5.2 Equazione del moto ad un fluido	22
5.3 Legge di Ohm generalizzata	23
5.4 Onde di Alfvén	25
5.5 Onde Magnetosoniche	26
6 Riconnesse	27
6.1 equazione di faraday	27
6.2 equazione del moto	28
6.3 equazioni MHD incomprimibile	29
6.4 ipotesi e time ordering	30
6.4.1 zona ideale	30
6.4.2 zona resistiva	30
6.5 caso particolare con soluzione analitica	31
7 Onde ion acustic	32
7.1 Equazioni di base	32
7.2 soluzione onda piana e relazione di dispersione	32
8 Dumping di Landau	34
8.1 Equazioni di partenza e condizioni	35
8.1.1 intrappolamento e non linearità	36
8.2 Trasformata di fourier	37
8.2.1 Onda di plasma a ioni fissi	37
8.2.2 Regime di propagazione senza dumping	38

8.2.3	regime con dumping	39
8.3	Soluzione con distribuzione generica	40
8.4	Soluzione con maxwelliana	40
9	Equilibrio MHD	41
9.1	equazione della dinamica all'equilibrio	41
9.2	Equazione di Faraday	41
10	Seminario sui plasmi spaziali	42
11	Seminario sulla propulsione spaziale	43
11.1	La "Rocket Equation"	43
11.2	I diversi tipi di propulsione	43
11.3	Fondamenti di accelerazione al plasma	43

1 Introduzione

All'interno di questo corso affronteremo un'introduzione alla fisica dei plasmi, facendo principalmente riferimento a testi come '*Fisica dei plasmi*' di G.Pucella e S.Segre, '*Principles of plasma physics*' di N.A.Krall e A.W.Trivelpiece, '*Plasma physics and fusion energy*' di J.Freidberg.

Vedremo che la trattazione è spesso approssimata, talvolta ignorando completamente alcuni fenomeni poco rilevanti al fine di presentare un'introduzione. La descrizione del plasma per molti versi ricalca quella di un fluido ma con grandi differenze a causa delle forze elettromagnetiche in gioco e le minori collisioni.

Mentre i fluidi, pur avendo grosse difficoltà analitiche, hanno un'unica descrizione fisica a tutte le scale, i plasmi presentano tre regimi distinti in cui la fisica è diversa, vi saranno diverse approssimazioni e set di equazioni:

- **regime fluido:** In cui il plasma viene trattato come un continuo, quando le variazioni spaziali e temporali sono molto più lente delle scale cinematiche. Potremo costruire una descrizione a due fluidi mettendo assieme *conservazione della massa*, *equazione del moto*, *conservazione dell'energia*, *equazione di stato* per ciascuna specie (ioni ed elettroni). Questa descrizione può portare poi ad una descrizione ad un fluido comunemente chiamata **magnetoidrodinamica** (MHD);
- **regime cinetico:** Quando le scale del fenomeno sono paragonabili a quelle caratteristiche del sistema come il raggio di Larmor r_L , la lunghezza di Debye λ_D o il libero cammino medio λ_{mfp} , qui saremo tenuti a descrivere il plasma come un sistema di particelle collisionless;
- **regime dissipativo:** È il regime in cui le piccole resistenze, viscosità, collisionalità non trascurabile, o le regioni sottili diventano importanti.

Tutti i regimi presentano forti non linearità; sotto le non linearità si celano modi lineari, ma questi interagiscono tra loro creando un comportamento complesso.

1.1 Cosa è un plasma?

Il plasma è uno stato della materia simile ad un gas ma completamente ionizzato, la sua composizione dipende dal problema fisico che stiamo affrontando, ma in generale è un sistema di cariche slegate con le seguenti caratteristiche:

- Globalmente neutro, $n_e \approx n_i$;
- Dominato dalle forze elettromagnetiche: Le particelle sono abbastanza lontane (o $k_B T$ è abbastanza grande) da avere

$$U \ll k_B T$$

- Collisioni rare (o poco significative): Per questo nei plasmi "non c'è una termodinamica" ma l'energia viene trasferita su scale sempre più piccole senza dissipazione di energia in calore, per questo può anche succedere che l'energia diluita possa anche ripresentarsi sotto forma di fenomeno a grande scala.
- Comportamento collettivo: Le particelle interagiscono con la distribuzione di carica e le correnti di tutto il sistema contemporaneamente.

Dato che il plasma è relativamente rarefatto, la distanza media tra le cariche è molto maggiore della scala tipica delle interazioni forti ($\lambda_{DB} = \frac{\hbar}{p} \sim 10^{-8}$ cm, lunghezza di De Broglie), $d >> \lambda_{DB}$, per cui non contano gli effetti quantistici, ma prevarranno le forze elettromagnetiche (auto-generate o esterne).

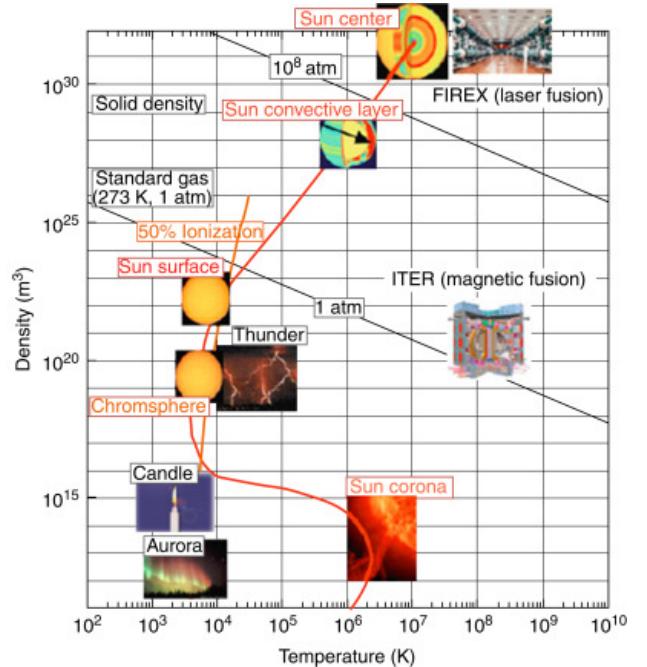


FIG. 1: densità e temperature tipiche di alcune diverse manifestazioni dello stato di plasma

Le collisioni sono estremamente rare e le distanze fra le particelle r_n sono molto maggiori della distanza di minimo approccio r_0 , , definita da:

$$\frac{e^2/r_0}{T} \sim 1$$

. Ciò vuol dire che considerate la frequenza della dinamica del sistema ω_D e la frequenza collisionale ν_c :

$$\text{Per i plasmi: } \frac{\nu_c}{\omega} \rightarrow 0 \quad \text{Per i gas: } \frac{\nu_c}{\omega} \rightarrow \infty$$

Il sistema è dominato dalle forze elettromagnetiche: le cariche e il loro moto generano campi elettrici e magnetici, inoltre possono essere presenti campi esterni (elettrici, magnetici o elettromagnetici). Si tratta di un sistema N-body, e come nella meccanica statistica è necessario passare a un modello continuo. In fluidodinamica ciò funziona bene; per i plasmi vedremo che la questione è più complessa.

Le equazioni che otterremo sono le equazioni del moto e l'equazione di continuità, come tipicamente in fluidodinamica. il problema è che in fluidodinamica si può chiudere il sistema con la termodinamica, ma in fisica dei plasmi la termodinamica non ci aiuta molto e bisogna "tirare fuori dal cappello" la chiusura che dobbiamo provare a inventare a seconda della situazione fisica.

2 Costruiamo una teoria che descriva un plasma

Elemento fluido

Possiamo basare la nostra descrizione del plasma su qualcosa di simile a quel che è l'elemento fluido in fluidodinamica.

L'elemento fluido è un concetto teorico, una regione cubica di lato ℓ in un più grande sistema di lunghezza caratteristica $L \gg \ell$, tale che la distanza delle particelle all'interno dell'elemento sia $d \ll \ell$.

Per questo l'elemento fluido è da considerarsi come un punto $\vec{x} = (x, y, z)$ e questo ci permette di descrivere il sistema con proprietà intensive (pressione, densità, velocità) per singolo elemento.

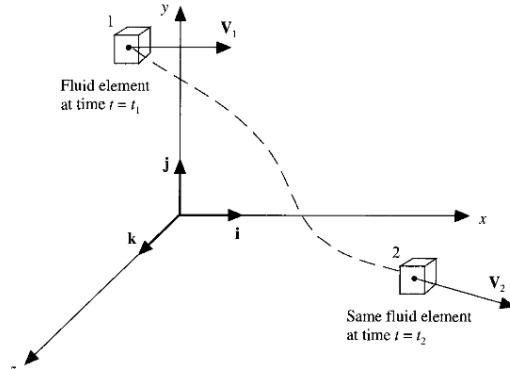
Le grandezze definite per il cubetto (grandezze termodinamiche) diventano campi continui: ad esempio $\rho(\vec{x})$, $p(\vec{x})$, ...

Il cubetto ΔV , detto *elemento fluido*, ha la caratteristica che il tempo con cui una molecola ne fuoriesce è molto maggiore del tempo caratteristico di evoluzione del sistema (dato l'altissimo numero di collisioni/ rateo di collisioni).

La descrizione è sensata per un fluido in cui $\frac{\nu_c}{\omega_D} \rightarrow +\infty$ perché le particelle collidono così spesso da rimanere all'interno dell'elemento mentre esso si muove, permettendoci di trattare l'e.f. come una "super-particella" di massa $mn\Delta V$ e velocità \vec{u} .

Nei plasmi, generalmente rarefatti e ad alta temperatura, le collisioni sono poche (ad esempio un protone del vento solare tipicamente ha al massimo una interazione in 1 U.A.). Le particelle in un cubetto (avevo scritto elemento fluido ma individuare cosa sia un elemento fluido in un plasma non è facilissimo...) non sono quindi le stesse a tempi successivi. Tuttavia è possibile individuare regimi in cui il plasma si comporta come un fluido: si ottengono le stesse equazioni, ma senza poggiarsi sugli stessi pilastri teorici della fluidodinamica.

Come può quindi essere valido per un plasma in cui $\frac{\nu_c}{\omega_D} \rightarrow 0$? perché i la presenza di campi esterni genererà movimento delle particelle con un certo raggio di girazione, sarà questo e non le collisioni a definire la dimensione ℓ^3 dell'elemento fluido.



Derivata lagrangiana

Nel seguito apparirà più volte la derivata lagrangiana, anche detta "materiale" o "collettiva", operatore ricorrente della meccanica del continuo e della fluidodinamica:

$$\frac{D}{Dt} f = \frac{\partial}{\partial t} f + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f ,$$

dove $\vec{u} \cdot \vec{\nabla}$ è il termine convettivo che tiene conto di come il campo f vari non nel tempo ma come effetto del flusso del campo stesso.

Più in particolare, la derivata lagrangiana della velocità, $\frac{D}{Dt} \vec{u} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$ viene chiamata accelerazione idrodinamica, ma ne incontreremo molte altre.

Andiamo a definire nelle prossime sezioni le equazioni che saranno il pilastro della nostra teoria fluida, legate ad una visione euleriana della teoria dei plasmi che andremo a costruire in questo capitolo, nella quale descriveremo dei campi quali la densità $\rho(\vec{x}, t)$, la velocità $\vec{v}(\vec{x}, t)$, la pressione $p(\vec{x}, t)$, la densità di carica $\rho_q(\vec{x}, t)$, la corrente $\vec{J}(\vec{x}, t)$ oltre che chiaramente $\vec{E}(\vec{x}, t)$ e $\vec{B}(\vec{x}, t)$.

2.1 Equazione di continuità

Prima equazione della fluidodinamica, anche detta equazione di continuità della massa, è valida trascu-rando gli effetti di ricombinazione e ionizzazione che alterano il numero di ioni/elettroni nella popolazione, si ricava facilmente con un approccio euleriano e usando il teorema della divergenza:

$$\int_A \rho \vec{v} \, d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \quad \Rightarrow \quad \int_V \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) dV = \int_V -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0} \quad , \quad (1)$$

dove $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ è la variazione locale della densità nel tempo, che non è altro che equivalente al flusso di materia che entra ed esce dall'elemento fluido, il flusso di massa $\vec{\nabla}(\rho \vec{u})$.

Riconosciamo, sviluppando $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$, che due termini possono essere accorpati per riscrivere la formula usando una derivata materiale:

$$\left(\frac{d\rho}{dt} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\rho \right) + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 .$$

Interpretazione: un volumetto di fluido può cambiare densità solo comprimendosi o espandendosi. Nel limite di incomprimibilità si impone $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ e rimane solamente $\frac{D\rho}{Dt} = 0$; questo limine è utile quando si studiano fenomeni senza compressione (es. onde trasversali EM, onde di Alfvén), fenomeni longitudinali come le onde magnetosonore, invece, prevedono compressione e richiedono di non imporre la incomprimibilità.

2.2 Equazioni del moto (tre componenti)

Da uno studio della lagrangiana e quindi delle forze che agiscono sull'elemento, si ottiene quella che in fluidodinamica è l'equazione idrodinamica. Consideriamo solamente le forze interne all'elemento fluido perché tendenzialmente in un fluido la pressione è isotropa e quindi all'esterno è tutto compensato.

$$\vec{F} = - \int P d\vec{A} = - \int \vec{\nabla} P dV$$

sfruttando il punto di vista lagrangiano seguo l'elemento che accelera. Otteniamo così la nostra equazione del moto simil $\vec{F} = m\vec{a}$:

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{u} = -\vec{\nabla} P$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = -\nabla P + \text{grav} + \text{col} + \dots .$$

Oltre la pressione in genere si usa almeno anche un termine gravitazionale:

$$\boxed{\rho \frac{D}{Dt} \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \vec{f}} \quad . \quad (2)$$

Aggiungiamo un termine \vec{f} perché ci aspettiamo che per i plasmi ci siano anche forze elettromagnetiche che in questa prima forma puramente fluidodinamica non esplicitiamo (cfr. equazioni di Eulero).

2.3 Equazione di stato

Noi vorremmo risolvere il sistema di equazioni che stiamo costruendo per 5 variabili (\vec{u} , p , ρ), quindi, le quattro equazioni appena introdotte non bastano, il sistema necessita di una chiusura, qui interviene l'equazione di stato della pressione in funzione della densità:

$$p(\rho) \quad \text{ad esempio una politropica tipica dei fluidi: } P = c\rho^\gamma$$

Alla fine ci sono tante variabili (3 componenti della velocità + densità + pressione = 5 variabili) quante equazioni (una di conservazione della massa, tre equazioni del moto, la politropica): il sistema è chiuso.

2.4 Linearizzazione delle equazioni

Scriviamo le variabili come valore medio più una piccola perturbazione:

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad \vec{u} = \vec{u}_0 + \delta\vec{u}, \quad P = P_0 + \delta P$$

La perturbazione è piccola nel senso che

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \ll 1$$

e i prodotti di termini del primo ordine vengono trascurati:

$$\delta\rho \delta\vec{u} \ll \rho \vec{u}$$

Mentre i prodotti tra ordine zero e ordine uno rimangono.

$$(\rho_0 + \delta\rho)(\rho_0 + \delta\rho) = \rho_0^2 + 2\rho_0\delta\rho + (\delta\rho)^2 \xrightarrow{0}$$

2.5 Evoluzione dell'elemento fluido

In fluidodinamica si studia l'evoluzione dell'*elemento fluido*. ho un fluido e nei vari punti la velocità varia soprattutto per la condizione di contatto dei bordi. (nei casi si fluido incompressibile come l'acqua allora è inevitabile che si formino dei vortici)

L'evoluzione dell'elemento fluido può essere descritta in due modi:

- **Approccio lagrangiano:** si segue il cubetto nel tempo. metto una paperella nel fiume e vedo dove va a finire, o meglio scelgo un elemento fluido e vedo dove va a finire. in un momento iniziale t_0 mi trovo in $x_0 = x(t_0)$ e in un momento successivo mi troverò in un altro punto. posso definire la velocità lagrangiana che è la velocità $\vec{v}(\vec{x}(t), t)$ del mio elemento fluido. nei momenti successivi l'elemento fluido si sarà spostato di $\vec{\xi}(t) = \int_{t_0}^t \vec{v}(\vec{x}(t'), t') dt'$. e si troverà nel punto

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{\xi}(t)$$

- **Approccio euleriano:** si osservano quantità fisiche in un punto fisso dello spazio come una stazione meteo. Fisso un sistema di riferimento e guardo cosa viene e cosa va. definisco la velocità del fluido rispetto al mio sistema di riferimento, $\vec{u}(\vec{x}, t)$ con \vec{x} che è un punto fissato. inizialmente in x ho un elemento fluido che se ne va e al suo posto ci sarà un nuovo elemento fluido.

Per precisione: chiamiamo t_E e t_L i tempi nei due approcci (anche se sono uguali). Le velocità si indicano \vec{u} (euleriana) e \vec{v} (lagrangiana).

In approccio lagrangiano:

$$\vec{x}(t_L) = \vec{x}_0 + \vec{\xi}(\vec{x}_0, t_L), \quad \vec{v} = \frac{d\vec{\xi}}{dt}$$

$$\text{Poiché } \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \Rightarrow \vec{v} = \vec{u}$$

A proposito di questi due approcci: torniamo a $\frac{D}{Dt}n + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})n = 0$, la derivata lagrangiana della densità ci fa vedere che seguendo l'elemento fluido l'unica cosa che può far variare la densità è una compressione (o rarefacimento) del mio fluido.

Fare la derivata euleriana equivale alla derivata lagrangiana a meno di un termine correttivo che tiene conto della direzione in cui va il mio fluido.

Per chiudere il sistema in termodinamica si assume spesso isotropia ($P \propto T$) (tensore degli stress diagonale). Nei plasmi l'isotropia non vale, perché i campi magnetici introducono direzioni privilegiate: parallela al campo (particelle libere) e ortogonale (particelle bloccate). Nonostante la mancanza di equazione di stato, isotropia e collisioni, la MHD (magnetoidrodinamica) funziona in molte condizioni.

In particolare nei plasmi si ha anisotropia per la pressione $P_{\parallel \vec{B}} \neq P_{\perp \vec{B}}$, i satelliti nel plasma spaziale misurano una distribuzione maxwelliana solamente sul piano $\perp \vec{B}$.

2.6 Ruolo delle collisioni nella diffusione del calore

Controintuitivamente, molte collisioni riducono la diffusione termica (es. gas perfetto).

Consideriamo un volumetto V , all'istante $t=0$ avrà una certa energia interna e flusso di calore dati da:

$$U = \rho c_v T ,$$

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T ,$$

dove \vec{q} è la densità di corrente termica e k la conducibilità. L'energia interna varia a seconda dello scambio di calore, della compressione o dal calore generato internamente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int U dV = - \int (\vec{q} \cdot \hat{n}) dS .$$

Applicando il teorema della divergenza:

$$\int_{\partial V} (\vec{q} \cdot \hat{n}) dS = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dV \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = -k \nabla^2 T .$$

Se non c'è flusso di massa $\Rightarrow d\rho/dt = 0$, quindi:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \rho c_v \frac{dT}{dt} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -D \nabla^2 T ,$$

avendo definito la diffusività $D = \frac{k}{\rho c_v}$, che ha dimensioni $[D] = m^2 s^{-1}$ ed è tale che $\frac{D}{L} \sim \frac{1}{\tau}$, cioè:

$$D \sim \lambda_{mfp}^2 \nu_c = \frac{v_{th}^2}{\nu_c} ,$$

dove $v_{th} \sim \lambda_{mfp} \nu_c$ è la velocità termica, λ_{mfp} il libero cammino medio e ν_c frequenza collisionale.

$$\nu_c \rightarrow \infty \implies D \rightarrow 0$$

Molte collisioni \Rightarrow diffusione lenta di energia \implies comportamento adiabatico \implies ho una relazione tra densità e pressione (equazione di stato politropica). Non confondere collisioni (viscosità) e trasporto di calore.

2.6.1 Entropia

Nei plasmi, se la frequenza collisionale va all'infinito, $\nu_c \rightarrow \infty$ (cioè siamo adiabatici) vale:

$$\frac{dS}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) S = 0$$

2.6.2 Entalpia

Riprendiamo la definizione di Entalpia W dalla termodinamica, le collisioni nei fluidi ci impongono entropia costante nell'elemento fluido (consideriamo V il volume specifico).

Il giochino adesso è esprimere l'equazione della dinamica (trascurando il campo gravitazionale) in termini dell'entalpia

$$dW = T dS + V dP = V dP \implies \rho \vec{\nabla} W = \vec{\nabla} P$$

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} W$$

vorticità

Definiamo la vorticità come il rotore del campo di velocità

$$\vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad w_i = \epsilon_{ijk} \partial_j u_k$$

Le linee di campo della vorticità sono dette linee di vorticità. Le linee di vorticità possono essere trasportate e spiegazzate ma non possono venire spezzate e riconnesse. (non bisogna confondere le linee di vorticità con le streamline che sono le linee tangenti al campo di velocità punto per punto)

Facendo il rotore dell'equazione dinamica espressa in termini dell'entalpia possiamo trovare la vorticità. Allo stesso tempo possiamo utilizzare una formula del calcolo vettoriale per scrivere la derivata materiale come un rotore più un gradiente. Usiamo anche che per campo scalare ϕ (come W e come $|u|^2$) vale $\nabla \times \nabla \phi = 0$.

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = -\nabla \times [\vec{u} \times \vec{w}]$$

Quest'equazione descrive l'evoluzione della vorticità.

2.7 Plasmi e regime fluido, come trattarli

Abbiamo introdotto alcune quantità e ragionamenti dalla fluidodinamica, fin'ora non abbiamo però sviluppato un vero modello ad un fluido, per come abbiammo svolto tutto fin'ora sarebbe più opportuno riconoscere che vi siano due fluidi, uno per ciascuna specie.

Andiamo a vedere tramite linearizzazione, quindi trattando le equazioni viste fin'ora perturbativamente, quali comportamenti del plasma riusciamo già a far emergere con questo primo modello di plasma.

2.7.1 Ancora sulla linearizzazione: il comportamento ondulatorio

in generale stiamo considerando di ogni grandezza, il valore medio e una perturbazione,

$$\text{valore medio: } x_0 = \frac{1}{V} \int x dV, \quad \text{perturbazione: } \delta x \ll x_0$$

Quindi scrivendolo per ciascuna grandezza: $\rho = \rho_0 + \delta\rho; \vec{u} = \vec{u}_0 + \delta\vec{u}; p = p_0 + \delta p$.

Andiamo a linearizzare l'equazione di continuità della massa, assumendo $\rho_0 = \text{cost.}$ e - come condizione di equilibrio - $\vec{u}_0 = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \delta\rho) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{u}_0 + \delta\rho \vec{u}_0 + \rho_0 \delta\vec{u} + \delta\rho \delta\vec{u}) \stackrel{\sim 0}{=} 0 ,$$

il termine all'ordine zero è banalmente nullo, d'altro canto il termine di ordine 2 è trascurabile e rimane il termine di ordine 1:

$$\partial_t(\delta\rho) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \delta\vec{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{In 1D: } \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0 .$$

Prendiamo invece dall'equazione del moto, trascurando le collisioni ed il termine gravitazionale, andiamo a linearizzare l'equazione tenendo i termini di ordine più basso, ponendo $\vec{u}_0 = 0, \partial_t u_0 = 0$ e sottraendo la forma di equilibrio $\rho_0 D_t u_0 = -\vec{\nabla} P_0$:

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \delta\rho) \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 + \delta u) + [(\mu_0 + \delta u) \cdot \vec{\nabla}] (u_0 + \delta u) \right] &= -\vec{\nabla} (P_0 + \delta P) \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} (\delta u) &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \delta P \end{aligned}$$

Per chiudere il sistema di equazioni utilizziamo l'equazione di stato politropica: $P = c\rho^\gamma$, così che usando $\nabla(\delta P) = c\gamma\rho_0^{\gamma-1}\nabla(\delta\rho)$ (derivante dallo sviluppo binomiale) si possa esprimere il termine destro come $\frac{\partial\delta P}{\partial x} = \gamma\frac{P_0}{\rho_0}\frac{\partial(\delta\rho)}{\partial x}$.

Definita $c_s^2 = \gamma\frac{P_0}{\rho_0}$ la **velocità del suono**, possiamo ottenere infine l'equazione del moto linearizzata: $\rho_0\frac{\partial}{\partial t}(\delta u) = c_s^2\frac{\partial}{\partial x}(\delta\rho)$.

Abbiamo costruito quindi un modellino fluido in una dimensione costituito dalle equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\delta\rho) = \rho_0\frac{\partial}{\partial x}(\delta u), \\ \frac{\partial}{\partial t}(\delta u) = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}(\delta P), \\ \delta P = c_s^2\delta\rho \end{cases}$$

Inseriamo la terza equazione nella seconda come fatto poco sopra e la deriviamo per ∂_x , mentre si deriva l'eq. di continuità nel tempo ∂_t , si vede comparire in entrambe il termine $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$, che isoliamo per ottenere l'uguaglianza:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta\rho) = c_s^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\delta\rho)$$

Il risultato ci consola, perché vuol dire che le perturbazioni di pressione all'interno del plasma così modellizzato si propagano come un'onda di velocità caratteristica c_s . Fornita una piccola perturbazione di densità o pressione, la loro variazione genera un gradiente che accelera il fluido secondo l'equazione del moto, il fluido muovendosi modifica ancora la densità/pressione e così via, creando un'oscillazione autopropagante, un'onda di pressione.

2.7.2 Onda piana armonica

Poniamo che le soluzioni siano del tipo $\delta\rho(x, t) = \hat{\rho}e^{i(kx - \omega t)}$ e $\delta u(x, t) = \hat{u}e^{i(kx - \omega t)}$.

Dalle equazioni linearizzate, facendo una trasformata di Fourier e quindi $\partial_x \rightarrow ik$, $\partial_t \rightarrow -i\omega$:

$$\begin{cases} -i\omega\delta\rho + ik\rho_0\delta u = 0, \\ -i\omega\rho_0\delta u = -ik\delta P, \\ ik\delta P = -ikc_s^2\delta\rho \end{cases}$$

Segue la relazione di dispersione:

$$\boxed{\omega^2 = k^2 c_s^2}$$

Conclusione: l'onda sonora in un gas è non dissipativa, con relazione di dispersione costante (ogni armonica si propaga alla stessa velocità).

È possibile quindi anche una shockwave, al contrario di un sasso in acqua. Nei plasmi, invece, esistono molti regimi con relazioni di dispersione differenti a seconda di frequenze e scale di lunghezza caratteristiche.

2.7.3 Onde di plasma

Abbiamo capito quindi che le onde nei plasmi sono la principale reazione collettiva, tipicamente sono la risposta ad un eventuale spilanciamento di carica.

Ad esempio, per capirne la natura, studiamo il caso semplice in cui sono gli elettroni a muoversi e oscillare mentre gli ioni rimangono fermi (vista la differenza di massa di un fattore ~ 2000). In principio potremmo usare le equazioni fluide costruite nei paragrafi precedenti separatamente per le due specie, ma ci soffermiamo solo sugli elettroni.

Continuiamo ad ampliare questo nostro modello che per ora somiglia solo lontanamente ad un plasma. Linearizziamo anche le densità numeriche di elettroni e ioni $n_{e/i} = \frac{N_{e,i}}{V} = n_{0,e/i} + \delta n_{e/i}$ (tendenzialmente $n_e \sim n_i$) e consideriamo gli ioni come immobili e per gli elettroni $\vec{u}_e = \vec{u}_0 + \vec{\delta u}$ con $\langle \vec{u}_0 \rangle = 0$, questa volta vogliamo studiare il comportamento aggiungendo un campo $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{\delta E}$ con $\vec{B}_0 = 0$:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\delta n_e) + n_0 \frac{\partial}{\partial x}(\delta u) = 0, \\ m_e n_{0,e} \frac{\partial}{\partial t}(\delta u) = -\frac{\partial}{\partial x}(\delta P) + e n_0 \frac{\partial}{\partial x}(\delta \phi), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\delta \phi) = 4\pi e \delta n_e. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -i\omega \delta n_e + i k n_{0,e} \delta u_e = 0 \\ -i\omega m_e n_{0,e} \delta u = i k e n_{0,e} \delta \phi \\ -k^2 \delta \phi = 4\pi e \delta n_e \end{cases}$$

Come scritto nel sistema l'equazione di Poisson viene espressa in funzione della densità di elettroni e ioni partendo da $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi(n_{0,i} - n_{0,e} - \delta n_e)$. Da dalle condizioni in cui ci troviamo ora ci rendiamo conto manchi una chiusura, come fare?

1. politropica: come se fosse un gas, siamo nel modello fluido quindi insomma non è così folle
2. Considerare la risposta dielettrica dominante rispetto alla risposta termica. è detta approssimazione di plasma freddo. significa considerare $c_\phi \gg v_{th,e}$. nei regimi elettromagnetici ci sono onde ad alta frequenza e la risposta termica è troppo lenta. Cioè la dinamica è dominata dalla risposta dovuta al termine del campo elettrico e non da quello della pressione

2.7.4 Chiusura Plasma freddo

Dobbiamo trascurare il contributo della pressione nell'eqauzione della dinamica $\nabla P \sim 0$. Ripartiamo ancora dal nostro sistema in trasformata sviluppando con onde piane, $\sim e^{i(kx - \omega t)}$:

$$\begin{cases} -i\omega \delta n_e + i k n_{0,e} \delta u = 0, \\ -i\omega m_e n_{0,e} \delta u = i k e n_{0,e} \delta \phi, \\ -k^2 \delta \phi = 4\pi e \delta n_e. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = \frac{4\pi e^2 n_{0,e}}{m_e} \equiv \omega_{p,e}^2}$$

La relazione di dispersione trovata è fondamentale, è la **frequenza di plasma elettronica** o nel limite $k \rightarrow 0$ la **frequenza di Langmuir** e definisce la frequenza di oscillazione tipica degli elettroni in risposta a variazioni locali del campo.

Si faccia attenzione al fatto che questa relazione è dispersiva, non è che se non compare k nell'espressione di ω allora non c'è dispersione, perché non c'è dispersione quando $\omega/k = cost$. è vero, però che in questo

caso la **velocità di gruppo** è nulla, $v_g \equiv \frac{d\omega}{dk} = 0$.

Il plasma reagisce alla stessa frequenza indipendentemente dalla lunghezza d'onda.

2.7.5 Confronto tra ipotesi e risultati, verifica a posteriori del regime di plasma freddo

Per ora abbiamo ipotizzato di poter trascurare il gradiente di pressione, ora per ogni specie a immaginiamo ci sia un comportamento $P_a = n_a T_a$ come in un gas perfetto ($k_B = 1$, in tutto il corso si lavora in unità naturali), che linearizzato diventerebbe $\delta P = T_0 \delta n$ (non ho δT perché non ho collisioni).

Nel ricavare la frequenza di plasma abbiamo supposto che la **velocità termica degli elettroni** $v_{th,e}$ fosse trascurabile rispetto alla **velocità di fase** $c_\phi \equiv \frac{\omega}{k} \gg v_{th}$, vediamo bene il perché: l'equazione di moto - reinserita la pressione come appena ipotizzata - diventa ora:

$$-i\omega m_e n_{0,e} \delta u = i k e n_{0,e} \delta \phi - i k T_{0,e} \delta n_e$$

Allora confrontando i termini in un rapporto, vediamo che il termine di pressione è trascurabile nel caso in cui $c_\phi \gg v_{th}$, definita $v_{th,e}^2 \equiv T_{0,e}/m_e$ la **velocità termica elettronica**:

$$\frac{\omega m_e n_{0,e} \delta u}{k \delta P} \sim \frac{\omega^2}{k^2} \frac{m_e}{T_{0,e}} \sim \frac{\omega^2}{k^2} \frac{1}{v_{th,e}^2} \sim \frac{c_\phi^2}{v_{th,e}^2}$$

Introduciamo anche la **lunghezza d'onda caratteristica** $\lambda \sim 1/k$ e confrontiamo $\frac{\omega^2}{k^2}$ con $v_{th,e}$:

$$\frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} \lambda^2 v_{th,e}$$

$$\lambda^2 > \frac{v_{th,e}}{\omega_p} \equiv \frac{T}{4\pi n_0 e^2}$$

ω_p è la frequenza di plasma e dovrebbe avere anche il contributo degli ioni che comunque è migliaia di volte minore quindi per noi per il momento la frequenza di plasma è direttamente $\omega_{p,e}$.

Se la lunghezza d'onda la posso confrontare con quella caratteristica sono tranquillo che la mia approssimazione di plasma freddo sia valida.

L'espressione a membro destro dell'ultima disegualanza è definita come lunghezza caratteristica, è detta **lunghezza di Debye**, $\frac{T}{4\pi n_0 e^2} \equiv \lambda_D$. Nello spazio può venire misurata.

Generalmente nel regime di plasma freddo tra λ e λ_D passano svariati ordini di grandezza, solamente quando cominciano a diventare confrontabili vediamo un cambio di comportamento, lo vediamo con la correzione che segue (chiusura politropica).

2.7.6 Chiusura politropica

Abbiamo già introdotto in questo capitolo l'idea di usare $P = cn^\gamma$ come chiusura alle nostre equazioni, ora torniamo a farlo per ricavare la correzione termica alla relazione di dispersione ricavata per il plasma freddo:

$$\frac{\partial P_e}{\partial x} = \gamma cn_e^{\gamma-1} \frac{\partial n_e}{\partial x} = \gamma \frac{P_e}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x}$$

Linearizzando ed imponendo ancora una volta $P = n_{0,e} T_e$

$$\frac{\partial \delta P_e}{\partial x} = \gamma \frac{P_{0,e}}{n_{0,e}} \frac{\partial \delta n_e}{\partial x} = \gamma T \frac{\partial \delta n_e}{\partial x}$$

Così abbiamo la chiusura voluta, da unire all'equazione di continuità linearizzata a quella del moto e Poisson, tutte ancora una volta in trasformata di Fourier:

$$\begin{cases} \text{dalla politropica: } \delta P = \gamma T_{0,e} \delta n_e \\ \text{dalla continuità: } \frac{\omega}{k} \delta n = n_0 \delta u, \\ \text{dal moto: } -i\omega m_e n_0 \delta u = e n_0 \delta E - i k \delta P, \\ \text{da Poisson: } \delta \phi = -\frac{4\pi e}{k^2} \delta n_e. \end{cases}$$

Dopo aver inserito la politropica nell'equazione del moto abbiamo: $-i\omega m_e n_0 \delta u = iken_0 \delta \phi - ikT_{0,e} \delta n_e$. Il δP serve per poter utilizzare l'equazione completa della dinamica, in questo caso non siamo più in regime di plasma freddo e la risposta termica comincia ad avere un ruolo. Inseriamo nell'equazione del moto linearizzata le forme di $\delta \phi$ e δu ricavate dalle altre equazioni

$$\begin{aligned} -i\omega m_e \nu \sigma \left(\frac{\omega}{m_e k} \delta n \right) &= iken_0 \left(-\frac{4\pi e}{k^2 \delta n} \right) - ik\gamma T_{0,e} \delta n \\ \omega^2 &= \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} + k^2 \gamma \frac{T_{0,e}}{m_e} \end{aligned}$$

Riconosciamo le definizioni date precedentemente:

$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + \gamma k^2 v_{th,e}} \quad (3)$$

$$\omega = \omega_p^2 \left(1 + \gamma \frac{k^2 v_{th,e}}{\omega_p^2} \right) = \omega_p^2 (1 + \gamma k^2 \lambda_D^2)$$

2.8 Schermatura di Debye

Supponiamo di avere una entrambe le specie ad equilibrio termico, che cioè seguano una distribuzione di Boltzmann rispetto all'energia $\propto e^{-E/T}$, quindi dato che $E = q\phi(x)$:

$$n_i = n_0 e^{-e\phi/T}, \quad n_e = n_0 e^{+e\phi/T}.$$

In un plasma la condizione di potenziale debole, $e\phi \ll T$ (con $K_B = 1$ in unità nat.), ci porta ad espandere:

$$n_i = n_0 \left(1 - \frac{e\phi}{T} \right) , \quad n_e = n_0 \left(1 + \frac{e\phi}{T} \right) .$$

Inseriamo queste densità delle due specie in Poisson per avere un'equazione dalla quale definiamo la **lunghezza di Debye** $\lambda_D = \sqrt{\frac{T}{8\pi e^2 n_0}}$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= -4\pi e(n_i - n_e) = -4\pi e n_0 \left[\mathcal{J} - \frac{e\phi}{T} - (\mathcal{J} + \frac{e\phi}{T}) \right] \\ \boxed{\nabla^2 \phi = \frac{8\pi e^2 n_0}{T} \phi \equiv \frac{1}{\lambda_D^2} \phi} \end{aligned} \quad (4)$$

Ci mettiamo in coordinate sferiche dove il potenziale dipende solo radialmente, $\phi \equiv \phi(r)$ ed il gradiente laplaciano in coordinate polari si riduce quindi al termine $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d\phi}{dr} \right] = \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr}$.

Definiamo la nuova incognita $u = r\phi$ (e quindi $\phi = u/r$):

$$\frac{d\phi}{dr} = -\frac{u}{r^2} + \frac{u'}{r} \quad \& \quad \frac{d^2\phi}{dr^2} = \frac{2u}{r} - \frac{2u'}{r^2} + \frac{u''}{r} .$$

Usando queste due forme rispetto ad u per le derivate possiamo riscrivere il laplaciano e tutta l'ee.4 per avere:

$$\nabla^2 \phi = \frac{2\mathcal{J}}{r^3} - \frac{2u'}{r^2} + \frac{u''}{r} + \frac{2}{r} \left[-\frac{u'}{r^2} + \frac{u''}{r} \right] = \frac{1}{\lambda_D^2} \frac{u}{r} ,$$

così che reinserendo ϕ troviamo in definitiva l'eq. differenziale:

$$u'' = u/\lambda_D^2 \quad \Rightarrow \quad \phi'' + \frac{2}{r} \phi' = \frac{1}{\lambda_D^2} \phi , \quad (5)$$

che ha soluzione della forma $u(r) = Ae^{-r/\lambda_D} + Be^{+r/\lambda_D}$ nella sua forma più generale.

Vediamo subito che la soluzione con esponenziale crescente non è fisica, farebbe divergere il potenziale all'infinito, rimane quindi il primo termine da cui imponendo una condizione iniziale si trova:

$$\boxed{\phi(r) = \phi_0 \frac{e^{-r/\lambda_D}}{r}}$$

Questo potenziale trovato può essere studiato in due limiti importanti, se ci troviamo a distanze da una carica molto minori della lunghezza di Debye, $r \ll \lambda_D$, questa forma va come un potenziale nel vuoto: $\sim 1/r$.

La particolarità dei plasmi è invece nell'altro limite, quando $r \geq \lambda_D$, in questo caso avviene il fondamentale fenomeno del **Debye shielding** $\sim e^{-r/\lambda_D}$

2.9 Onda e.m. che investe un plasma

Per il momento abbiamo cercato di trattare il plasma come un fluido, non siamo riusciti propriamente a vederlo come un singolo fluido ma più come due fluidi separati - uno di elettroni ed uno di ioni - ma già questo ci ha portato a ricavare alcune proprietà di un plasma.

Dato che il plasma è fatto di particelle cariche ci chiediamo ora come reagisca all'essere investito da un'onda elettromagnetica. Abbiamo già visto che il plasma è globalmente neutro ed anche come non vi siano campi globali auto-generati nel plasma in quanto l'effetto di una carica viene schermato dopo una lunghezza di Debye, però vogliamo capire come il plasma reagisca ad un campo che arriva dall'esterno (capitolo 5 Krall, cold-plasma, unmagnetised, linear response).

Partiamo dall'equazione del moto fluida per le due specie ma poniamo $\vec{B}_0 = 0$ (plasma non magnetizzato) così che nella forza elettromagnetica rimanga solo il termine di campo elettrico, inoltre non consideriamo $\nabla p_\alpha = 0$ per vedere un primo risultato in plasma freddo ed ignoriamo il termine collettivo:

$$n_\alpha \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial t} = \frac{n_\alpha}{m_\alpha} q_\alpha \vec{E}$$

Ancora una volta si assumono onde piane così che il passaggio in Fourier sia immediato:

$$\Rightarrow -i\omega n_{0,\alpha} \delta \bar{u}_\alpha = \frac{n_{0,\alpha} q_\alpha}{m_\alpha} \bar{E}$$

Prima di trasformare con Fourier anche le condizioni date dall'equazione di Maxwell-Ampère riportiamo la definizione di corrente di plasma e vi inseriamo l'espressione della variazione di velocità per avere una forma della risposta lineare del plasma:

$$\vec{j} = \sum_\alpha q_\alpha n_{0,\alpha} \delta \bar{u}_\alpha = \sum_\alpha q_\alpha n_{0,\alpha} \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha (-i\omega)} \bar{E} \right) = -\frac{i}{\omega} \sum_\alpha \frac{q_\alpha^2 n_{0,\alpha}}{m_\alpha} \bar{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \Rightarrow \quad i\vec{k} \times \vec{B} = -\frac{i\omega}{c} \bar{E} + \frac{4\pi}{c} \frac{i}{\omega} \sum_\alpha \frac{n_{0,\alpha} q_\alpha^2}{m_\alpha} \bar{E}$$

Vogliamo un'equazione con solo \vec{E} al suo interno, quindi usiamo anche Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = -\frac{ic}{\omega} \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

Reiseriamo questa forma di \vec{B} nell'equazione di Maxwell-Ampère insieme alla definizione di **frequenza di plasma** $\omega_P^2 = \omega_{p,e}^2 + \omega_{p,i}^2 \sim \omega_{pe}^2$ ($\omega_{P,\alpha}^2 \equiv \frac{4\pi n_{0,\alpha} q_\alpha^2}{m_\alpha}$):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \right) \vec{E}$$

Ora facciamo alcune considerazioni, l'onda si propaga con $\vec{k} = (k_x, 0, 0)$ mentre il campo elettrico possiamo scomporlo in $\vec{E} = (E_x, E_\perp)$.

Sappiamo poi da una identità che $\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} - k^2 \vec{E}$, ma se $\vec{k} \perp \vec{E}$, allora $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$:

$$k^2 \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \right) \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_P^2}$$

Questa è la **relazione di dispersione** per un'onda elettromagnetica trasversa che si propaga in un plasma freddo, omogeneo e non magnetizzato.

Notiamo comportamenti interessanti nei limiti:

- per $\omega \gg \omega_P$ l'onda si propaga nel plasma esattamente come nel vuoto perché si riduce a $\omega^2 = k^2 c^2$;
- nel caso contrario, $\omega \ll \omega_P$, l'onda ha una relazione di dispersione $k^2 = (\omega^2 - \omega_P^2)/c^2 \approx -\omega_P^2/c^2$, questo vuol dire che k è complesso ($k \approx i\omega_P/c$). Questo cosa implica? $\exp(i(\frac{\omega_P}{c})x) = \exp(-\omega_P x/c)$, l'onda è **evanescente**

Dal caso di onda evanescente definiziamo la lunghezza caratteristica di smorzatura dell'esponenziale e quindi dell'onda che penetra nel plasma, la **electron skin depth** $d_e \equiv c/\omega_P$

velocità di gruppo e di fase

Ci chiediamo quanto valga la **velocità di fase** $v_f \equiv \omega/k$ per venire a scoprire che sia sempre $> c$:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{k^2 \omega^2 + \omega_P^2}}{k} = \sqrt{1 + \frac{\omega_P^2}{k^2 c^2}} c$$

Se invece ci chiediamo quale sia la **velocità di gruppo** $v_g \equiv \partial \omega / \partial k$:

$$2\omega \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2k c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{k c^2}{\sqrt{k^2 c^2 + \omega_P^2}} = -\frac{c}{\sqrt{1 + \omega_P^2/k^2 c^2}}$$

Sulle grandezze caratteristiche dei plasmi

Nella fisica dei plasmi ci sono diverse lunghezze caratteristiche non solo quella di Debye che definiscono anche in parte i regimi di validità delle diverse teorie che andremo a sviluppare.

- la **distanza di minimo approccio** r_0 è definita come quell'energia potenziale coulombiana tra due particelle cariche tale che sia dell'ordine dell'energia termica, $e^2/r_0 \sim T$. È molto difficile che le particelle cariche si avvicinino così tanto in un plasma, quindi questa lunghezza ci aiuta solo a capire quanto conti l'interazione;
- La **lunghezza di Debye**, appena definita, è tipicamente $\gg r_0$ ed è la scala dello schermaggio elettrico, oltre questa distanza da una carica il suo potenziale viene schermato esponenzialmente, in linea con la natura globalmente neutra del plasma;
- C'è poi il **raggio di Larmor**, $r_{L,s} = \frac{m_s |v_\perp|}{q_s B}$ delle due specie, $r_{L,e} \ll r_{L,i}$;
- Altra grandezza è la **skip depth** delle due specie, la profondità di penetrazione dei campi magnetici, $\delta_s = \sqrt{\frac{m_s}{4\pi n q_s^2}} c$;
- Esiste poi il **mean free path**, ovvero la lunghezza media percorsa fra due urti successivi. In un gas diremmo che $\lambda_{mfp} \approx n\sigma$ invece per un plasma si stima

$$\nu_C = v_{th} n \sigma \approx v_{th} n e^2 / T^2 \sim n/T^{3/2},$$

il che vuol dire che scaldando il plasma questo diventa meno collisionale;

- vengono poi tutte le lunghezze caratteristiche della magneto-idrodinamica (MHD), molto maggiori di tutte quelle appena citate, tanto che in questo modello ad un solo fluido non si vedono i comportamenti delle cariche singole e molti fenomeni a cui danno origine.

Si vede anche che dalle definizioni

$$\lambda_D = v_{th} / \omega_P$$

$$\lambda_{mfp} = v_{th} / \nu_C$$

si trova una relazione significativa fra lunghezza di Debye e cammino libero medio:

$$\lambda_D / \lambda_{mfp} = \nu_C / \omega_P$$

2.10 Parametro di plasma

Definiamo la **sfera di Debye** come la sfera di raggio λ_D attorno ad una certa carica qualsiasi. Ci chiediamo in questo paragrafo quante particelle siano contenute in questa sfera.

$$\text{da definizione: } \lambda_D^2 \approx \sqrt{\frac{T}{n e^2}}$$

$$(n \lambda_D^3)^2 = \frac{n^2 T^3}{n^3 e^6} = \frac{T^3}{n e^6} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n \lambda_D^3} = \sqrt{n} e^3 / T^{3/2}$$

Una prima stima del numero di cariche contenute nella sfera di Debye è $n \lambda_D^3$ e - notando che $n \lambda_D^3 = (T/V)^{3/2} \ll 1$ - si trova che un plasma rispetta la condizione: $n \lambda_D^3 \gg 1$.

Si definisce **parametro di plasma** la grandezza:

$$g \equiv \frac{\nu_C}{\omega_P} = \frac{\nu_C v_{th}}{v_{th} \omega_P} = \frac{d_e}{\lambda_{mfp}}$$

Considerando $r_0 = e^2 / T$ ed $r_n = n^{1/3}$, il rapporto sarà: $r_n/r_0 = \frac{n^{1/3} T}{e^2} = \frac{T}{e^2 n^{1/3}} = g^{-2/3}$, quindi $r_n = r_0 g^{-2/3}$.

Invece, prendendo $\lambda_D \sim \sqrt{\frac{T}{e^2 n_0}}$, dal rapporto $\lambda_D / r_n = \sqrt{T}/e n^{1/6} = g^{-1/3}$ ricaviamo la relazione $\lambda_D = r_n g^{-1/3}$.

3 Teorema di connessione (conservazione del flusso)

Introduciamo qui alcuni risultati decisamente importanti per la fisica dei plasmi:

- **Teorema di Alfvén:** secondo il teorema di Alfvén (anche 'legge del congelamento'), in un fluido conduttore con resistività nulla (MHD ideale), le linee di campo 'restano congelate' in un dato volume del fluido, in altri termini il flusso magnetico attraverso ogni superficie S delimitata da un contorno chiuso C in moto in maniera solidale col flusso è costante;
- **Teorema di connessione:** sempre in MHD ideale, se due elementi di plasma (\vec{x}_1, \vec{x}_2) sono inizialmente collegati da una linea di campo magnetico ($d\vec{l}$), allora rimangono collegati per sempre. Per dirla formalmente: se in $t = 0$ si ha che $d\vec{l} \times \vec{B} = 0$ allora $\forall t$ successivi valgono sia $\frac{D}{Dt}(d\vec{l} \times \vec{B}) = 0$ che $d\vec{l} \times \vec{B} = 0$.

Le principali conseguenze di questi teoremi sono che

1. Si conserva la topologia globale
2. Stati di energia più bassa, ma con topologia diversa, sono proibiti
3. regioni di plasma non connesse, rimangono per sempre non connesse.

è fondamentale per la validità di questi teoremi che valga la legge ideale di Ohm. ovvero è nullo il campo elettrico nel sistema di riferimento dell'elemento fluido

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{u} \times \vec{B}}{c} = 0$$

Teorema : conservazione del flusso

Per capire cosa vuol dire che le linee di campo non si rompono e perché, prendiamo due elementi di fluido infinitamente vicini, $d\vec{l}$, dopo un tempo dt ciascun punto si muove con la velocità del fluido, $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{u}(\vec{x})dt$.

$$d\vec{l} + \delta(d\vec{l}) = d\vec{l} + [(\vec{u} + d\vec{u}) - \vec{u}] dt = d\vec{l} + d\vec{u}dt \implies \delta(d\vec{l}) = d\vec{u}dt$$

$d\vec{u}$ è l'incremento del campo di velocità in direzione $d\vec{l}$

$$d\vec{u} = (d\vec{l} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$$

$$d\vec{l} + \delta(d\vec{l}) = d\vec{l} + [\vec{u}(\vec{x} + d\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x})] dt = d\vec{l} + (d\vec{l} \cdot \nabla)\vec{u} dt$$

Capiamo quindi che la variazione nel tempo della distanza fra i due elementi che si muovono è descritto da $\frac{d(\delta\vec{l})}{dt} = (\delta\vec{l} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$. Nota che se $d\vec{l}$ è lungo una linea di campo allora $d\vec{l} \times \vec{B} = 0$, noi ci chiediamo se partendo solo dalle equazioni dell'elettromagnetismo possiamo provare che queste linee di campo non si spezzino. Quindi vogliamo calcolare:

$$\frac{D}{Dt}(\delta\vec{l} \times \vec{B}) = \frac{D\delta\vec{l}}{Dt} \times \vec{B} + \delta\vec{l} \times \frac{D\vec{B}}{Dt}$$

Consideriamo la legge di faraday e la legge di Ohm ideale:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad \vec{E} = -\frac{\vec{u} \times \vec{B}}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B})$$

Seguiamo \vec{B} attraverso una linea di campo facendo la derivata materiale, questo ci servirà subito l'evoluzione delle linee di campo. Per semplificare l'espressione ci ricordiamo (insomma) un'identità vettoriale:

$$\frac{D\vec{B}}{Dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{B} = (*)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) = \vec{u} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

$$(*) = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$

Sostituendo $\partial \vec{B} / \partial t$ con l'identità vettoriale, il termine con gradiente della derivata materiale si elide e possiamo cancellare anche $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ per via della seconda equazione di Maxwell.

Allora inserendo questo risultato di $\partial \vec{B} / \partial t$ assieme a quello prima definito già definito all'inizio di $\frac{d(\delta \vec{l})}{dt} = (\delta \vec{l} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$, si trova infine che l'evoluzione della connessione fra i due elementi fluidi segue:

$$\frac{d}{dt} (\delta \vec{l} \times \vec{B}) = \delta \vec{l} \times [(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}] + (\delta \vec{l} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \times \vec{B}$$

Se si considera il caso $\delta \vec{l} \parallel \vec{B}$, che implica $\delta \vec{l} \times \vec{B} = 0$, allora $\delta \vec{l} \times (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = 0$ e la formula trovata poco fa va ad annullarsi completamente portando a $\frac{d}{dt} (\delta \vec{l} \times \vec{B}) = 0$: per vederlo basta porre $\delta \vec{l}$ come un riscalamento $\alpha \vec{B}$:

$$\boxed{\frac{d}{dt} (\delta \vec{l} \times \vec{B}) = \alpha \vec{B} \times [(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}] + (\alpha \vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \times \vec{B} = \dots = 0}$$

Si vede abbastanza già così come si annulli tutto grazie alla condizione di parallelismo.

Questo risultato ci porta a osservare che la linea di campo non si rompe finché non avviene la *riconnessione*. Per violare la legge di Ohm devo avere $\eta \vec{J}$, sono questi i casi in cui può avvenire la riconnessione (la legge di Ohm viene violata prima alle scale degli ioni e poi dopo viene violata alle scale degli elettroni).

$$S = \frac{T_r}{T_a} = \frac{T_{\text{resistivo}}}{T_{\text{alfvén}}}$$

La resistività fa capire come in tempi molto più brevi del tempo diffusivo cambia la topologia del campo.

Flusso magnetico: su una superficie chiusa fa zero, in generale è

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \phi$$

Teorema : Alfvén

Finché siamo in MHD ideale vale che:

$$\boxed{\frac{d\phi}{dt} = 0}$$

Usando il teorema di Liebnitz per integrare su domini mobili:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = \int_{S(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_{C(t)} \vec{B} \cdot (\vec{u} \times d\vec{l})$$

il primo termine del termine a destra è la variazione locale di flusso dovuta al cambiamento di B nel tempo, il secondo termine invece rappresenta il cambiamento dovuto al fatto che C si è letteralmente mosso.

Usiamo anche il teorema di Stokes e che $\vec{B} \cdot (\vec{u} \times d\vec{l}) = -\vec{u} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = \int_{S(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} - \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) \right) d\vec{S}$$

in MHD ideale è valida la legge di Ohm ideale $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B})$ e quindi

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} - \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) = 0 \implies \int_{S(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} - \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) \right) d\vec{S} = 0$$

ed abbiamo così dimostrato il teorema per cui $\boxed{\frac{d\Phi}{dt} = 0}$.

4 Una trattazione statistica per i plasmi

Trattare un plasma con un modello *many-body* ci porterebbe ad un problema irrisolvibile, per questo introduciamo ora un framework statistico che ci permetterà di ricavare l'equazione di Vlasov e da questa di ricollegarci alle equazioni fluide attraverso i suoi momenti.

Continueremo a supporre di essere in un regime non-collisionale, le particelle di ogni specie saranno sottoposte a campi elettrici e magnetici collettivi, l'energia cinetica sarà da considerarsi molto maggiore dell'energia d'interazione in modo che la carica generica sia statisticamente indipendente.

Come prima cosa si introduce la **funzione di distribuzione**

$$F(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, t) \quad .$$

Questa funzione di distribuzione può essere ridotta alla s-esima particella

$$F^{(s)}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s, t) = \int F d\vec{x}_{s+1} \dots d\vec{x}_n d\vec{v}_{s+1} \dots d\vec{v}_n$$

Nel limite puramente non collisionale, $g \ll 1$, $F^{(1)}(\vec{x}_1, \vec{v}_1)$ se invece ci fosse una seconda carica vicina dovremmo scrivere:

$$F^{(2)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = F^{(1)}(\vec{x}_1, \vec{v}_1) F^{(1)}(\vec{x}_2, \vec{v}_2) [1 - P_{12}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2)] \quad ,$$

dove P_{12} è detta **funzione di correlazione**. Per la funzione P_{12} si può ricavare una forma del tipo: $P_{12} \sim \frac{\lambda_D}{|x|} e^{-|x|/\lambda_D}$.

In generale, se partiamo da un plasma all'equilibrio ed iniettiamo energia i tempi in cui questa si distribuisce sono così lunghi che la funzione di correlazione risulta trascurabile.

Si può vedere sul Krall come, ipotizzando una distribuzione maxwelliana, il risultato sia che $P_{12} = nT(1-g)$ e quindi scala come la temperatura.

Teorema : Teorema di Liouville

riccome sarà utile in seguito richiamiamo il teorema di Liouville: data la nostra funzione di distribuzione F che descrive il plasma ad ogni tempo occuperà un punto dello spazio delle fasi 2n-dimensionale, tracciando nel tempo una traiettoria di fase; secondo il teorema la derivata temporale totale della densità degli stati sarà nulla.

$$\frac{d}{dt}F = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}F + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x F + \vec{a} \cdot \vec{\nabla}_v F = 0$$

O per esprimere ancor più esplicitamente:

$$\frac{d}{dt}F = \frac{\partial}{\partial t}F + \sum_i^N \vec{v}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i}F + \sum_i^N \vec{a}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_i}F = 0 \quad (6)$$

4.1 L'equazione di Vlasov

Dal teorema di Liouville si giunge all'equazione più nota della fisica dei plasmi, l'equazione di Vlasov, integrando su tutte le particelle da 2 ad N vediamo che il primo termine di eq.6 è legato alla $F^{(1)}$:

$$\int \frac{\partial F^{(n)}}{\partial t} dx_1 \dots dx_n dv_1 \dots dv_n = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int F^{(n)} dx_2 \dots dx_n dv_2 \dots dv_n \right) = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}$$

Mentre per il secondo e terzo termine di eq.6

$$\begin{aligned} \int \sum_i^N \vec{v}_i \cdot \frac{\partial F^{(n)}}{\partial \vec{x}_1} dx_2 \dots dx_n dv_2 \dots dv_n &= \int v_1 \cdot \frac{\partial F^{(n)}}{\partial \vec{x}_1} dx_2 \dots dx_n dv_2 \dots dv_n + \underbrace{\int \sum_{i=2}^N \vec{v}_i \cdot \frac{\partial F^{(n)}}{\partial \vec{x}_i} dx_2 \dots dx_n dv_2 \dots dv_n}_{= \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} \int F^{(n)} dx_2 \dots dx_n dv_2 \dots dv_n} = \\ &= \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} \int F^{(n)} dx_2 \dots dx_n dv_2 \dots dv_n = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \vec{x}_1} \quad , \end{aligned}$$

$$\sum_i^N \int \vec{a}_i \cdot \frac{\partial F^{(n)}}{\partial \vec{x}_i} dx_2 ... dx_n dv_2 ... dv_n = \int \vec{a}_1 \cdot \frac{\partial F^{(n)}}{\partial \vec{v}_1} dx_2 ... dv_n + \vec{a}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \int F^{(n)} dx_2 ... dv_n + \dots$$

$$\dots + \sum_{i=2}^N \int \vec{a}_i \cdot \frac{\partial F^{(n)}}{\partial \vec{v}_i} dx_2 ... dv_n = \vec{a}_1 \cdot \frac{\partial F^{(n)}}{\partial \vec{v}_1} \quad .$$

Per esplicitarla $\vec{a}_i = \vec{E} + \frac{\vec{v}_i \times \vec{B}}{c}$, ma in questa forma abbiamo tenuto conto unicamente dell'accelerazione dovuta ai campi, per tener conto di interazioni fra particelle aggiungiamo un termine \vec{a}_{ij} a quest'accelerazione e integriamo anch'esso:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j>i} \int \vec{a}_{ij} \cdot \frac{\partial F^{(n)}}{\partial \vec{v}_i} dx_2 ... dx_n dv_2 ... dv_n = \sum_{j>i}^N \int \vec{a}_{ij} \cdot \frac{\partial F^{(n)}}{\partial \vec{v}_i} dx_2 ... dx_n dv_2 ... dv_n \quad .$$

Per la generica particella $j = \alpha$ ci concentriamo sull'ultimo integrale all'interno della sommatoria, possiamo portare fuori $\vec{a}_{1\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_\alpha}$ in modo che l'integrale ci restituisca un $F^{(2)}$ che però possiamo esprimere in termini della funzione di correlazione P_{12} definita all'inizio del paragrafo, per cui:

$$\int \vec{a}_{1\alpha} \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \vec{v}_1} (\vec{x}_1, \vec{v}_1) F(\vec{x}_\alpha, \vec{v}_\alpha) dx_\alpha dv_\alpha + \int \vec{a}_{1\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \left(F^{(1)}(\vec{x}_1, \vec{v}_1) P_{12}(\vec{x}_1, \vec{x}_\alpha, \vec{v}_1, \vec{v}_\alpha) \right) F^{(1)}(\vec{x}_\alpha, \vec{v}_\alpha) dx_\alpha dv_\alpha \quad ,$$

il primo termine di quest'espressione andrà a contribuire al termine del tipo $\vec{a}_1 \cdot \partial_{\vec{v}_1} F^{(1)}$ mentre inseriamo il secondo termine collisionale dipendente da P_{12} in un termine non conosciuto C:

$$\boxed{\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \vec{x}_1} + \vec{a}_1 \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \vec{v}_1} = \mathcal{C}} \quad (7)$$

Questa è conosciuta come **equazione di Boltzmann**, può essere scritta per ciascuna specie ma per determinarne il risultato sarà necessario esplicitare \vec{E} , \vec{B} ed il termine di scattering $\mathcal{C} \sim (\partial f_S / \partial t)_{coll.}$. Infine, nel limite in cui è possibile ignorare lo scattering di particelle arriviamo finalmente all'equazione cardine della descrizione statistica dei plasmi, l'**equazione di Vlasov**:

$$\boxed{\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial \vec{x}_1} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial \vec{v}_1} = 0} \quad (8)$$

4.2 Da Vlasov alle equazioni fluide

Cerchiamo di ricollegare questa trattazione statistica alle equazioni fluide di inizio corso, osservando per prima cosa come le funzioni di distribuzione sia legata alla densità di particelle di una specie nello spazio delle posizioni n_α e più in generale a quantità macroscopiche:

$$n_\alpha = \int f_\alpha d\mathbf{v} \quad \int f_\alpha \vec{v}_\alpha d\mathbf{v} = n_\alpha \vec{u}_\alpha$$

Questi sono momenti di ordine zero ed uno della funzione di distribuzione f_α .

Riprendiamo ora l'eq.8 ed integriamone i diversi membri sullo spazio delle velocità:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d\mathbf{v} &= \frac{\partial}{\partial t} \int f_\alpha d\mathbf{v} = \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} \\ \int \vec{v}_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{x}} d\mathbf{v} &= \int \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\vec{v}_\alpha f_\alpha) d\mathbf{v} = \int f_\alpha \cancel{\frac{\partial}{\partial \vec{x}}} \vec{v}_\alpha d\mathbf{v} + \int \cancel{\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{x}}} \cdot \vec{v}_\alpha d\mathbf{v} = \cancel{\frac{\partial}{\partial \vec{x}}} (n_\alpha \vec{u}) \\ \int \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}_\alpha} d\mathbf{v} &= \int \frac{\partial}{\partial \vec{v}_\alpha} \left[f_\alpha \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) \right] d\mathbf{v} - \cancel{\int f_\alpha \frac{\partial}{\partial \vec{v}_\alpha} \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right)} = 0 \end{aligned}$$

Rimettendo assieme questi 3 membri si ottiene dunque infine l'**equazione di continuità** per la specie α , dove rientrano i momenti di ordine zero ed uno di f_α :

$$\boxed{\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla}_x \cdot (n_a \vec{u}) = 0} \quad (9)$$

Definito per brevità $\vec{D} = \vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c}$, integriamo di nuovo Vlasov ma stavolta moltiplicando per \vec{v}_α :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_\alpha} [\vec{v}_\alpha \vec{D} f_\alpha] &= f_\alpha \vec{D} \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \vec{v}_\alpha} + \vec{v}_\alpha \frac{\partial (f_\alpha \vec{D})}{\partial \vec{v}_\alpha} = \\ &= f_\alpha \vec{D} \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \vec{v}_\alpha} + \vec{v}_\alpha D \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}_\alpha} \\ \int \vec{v}_\alpha \vec{D} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}_\alpha} d\vec{v}_\alpha &= - \int \vec{D} f_\alpha d\vec{v}_\alpha = -n_\alpha \vec{E} - n_\alpha \frac{\vec{u}_\alpha \times \vec{B}}{c} \\ \int \vec{v}_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{x}_\alpha} d\vec{v}_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \vec{x}_\alpha} \int \vec{v}_\alpha \vec{v}_\alpha f_\alpha d\vec{v}_\alpha = \frac{\partial}{\partial \vec{x}_\alpha} (\langle \vec{v}_\alpha \vec{v}_\alpha \rangle - n_\alpha) \end{aligned}$$

Così infine da Vlasov si arriva alla forma:

$$\frac{\partial (n_\alpha \vec{u}_\alpha)}{\partial t} + n_\alpha \nabla \cdot \langle \vec{v} \vec{v} \rangle_\alpha - n_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\vec{E} + \frac{\vec{u}_\alpha \times \vec{B}}{c} \right) = 0$$

Per il calcolo di $\langle \vec{v} \vec{v} \rangle_\alpha$ è utile scomporre la velocità in $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ (cfr. prox sezione di approfondimento) con $\vec{u} = \langle \vec{v} \rangle$ velocità media mentre \vec{w} è la velocità della singola particella oltre la media \vec{u} e che verifica $\langle \vec{w} \rangle = 0$.

$$\langle \vec{v} \vec{v} \rangle_\alpha = \langle (\vec{u} + \vec{w})(\vec{u} + \vec{w}) \rangle_\alpha = \bar{u}_\alpha \bar{u}_\alpha + \cancel{u_\alpha \langle \vec{w}_\alpha \rangle} + \cancel{\langle \vec{w}_\alpha \rangle \vec{u}_\alpha} + \langle \vec{w}_\alpha \vec{w}_\alpha \rangle$$

così che:

$$\boxed{\frac{\partial (n_\alpha \vec{u}_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot [n_\alpha (\bar{u}_\alpha \bar{u}_\alpha + \langle \vec{w}_\alpha \vec{w}_\alpha \rangle)] - n_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\vec{E} + \frac{\vec{u}_\alpha \times \vec{B}}{c} \right) = 0} \quad (10)$$

Quest'ultima trovata è - di fatto - un'**equazione del moto**.

Definizioni a margine

La velocità introdotta sopra $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$ ($= \vec{v} - \langle \vec{v} \rangle$) è detta **velocità peculiare**. Possiamo definire anche un **tensor di pressione**:

$$\mathbf{P} = m \int (\vec{v} - \vec{u})(\vec{v} - \vec{u}) f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v} = mn_\alpha \langle \vec{w} \vec{w} \rangle ,$$

da cui si ottiene:

$$\frac{\partial (n\vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \bar{u}_\alpha \bar{u}_\alpha) + \frac{1}{m} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} - \frac{nq}{m} \left(\vec{E} + \frac{\vec{u}_\alpha \times \vec{B}}{c} \right) = 0$$

Osserviamo che per il primo termine vale $\frac{\partial (n\vec{u})}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial t} \vec{u} + n \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ ed in modo simile $\vec{\nabla} \cdot (n\vec{u}\vec{u}) = (n\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{u}(\vec{\nabla} \cdot (n\vec{u}))$, mentre riconosciamo la derivata totale $n \frac{D\vec{u}}{Dt} = n \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + n(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$. Riconosciamo un'equazione di continuità $\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla}_x \cdot (n_\alpha \vec{u})$ moltiplicata per \vec{u} che porta i termini ad elidersi. Moltiplichiamo il tutto per m e, definito $\vec{p} = m\vec{u}$, si arriva infine alla forma:

$$\boxed{n \frac{D\vec{p}}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} + nq \left(\vec{E} + \frac{\vec{u} \times \vec{B}}{c} \right)} .$$

In generale il tensore \mathbf{P} si può supporre abbia una parte isotropa almeno su grandi scale: $\mathbf{P} = p\mathbf{I} + \Pi$. Sotto questa ipotesi per cui $|\nabla p| \gg |\nabla \cdot \Pi|$ è utile definire una pressione isotropa $p = \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{P} = \frac{1}{3} mn \langle w^2 \rangle$ che in un gas ideale per cui la pressione è legata alla temperatura da $p = nT$ ci porta alla temperatura $T = \frac{1}{3} m \langle w^2 \rangle$ (più che una temperatura una stima dell'energia cinetica per specie).

4.3 Equazione dell'energia

Ripetiamo un processo simile a quello del paragrafo precedente per trovare l'equazione del moto; ripartendo dall'equazione di Vlasov, eq.8, questa volta moltiplichiamo prima per $\frac{1}{2}mv^2$ per poi integrare sullo spazio delle velocità, ancora una volta andiamo a fare il calcolo sui tre termini separatamente per poi ricavarne un risultato:

$$\int \frac{1}{2}mv^2 \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2}mv^2 f d\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon$$

$$\int \frac{1}{2}mv^2 \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} d\vec{v} = \frac{1}{2}m \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \int v^2 \vec{v} f d\vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}$$

$$\int \frac{q}{2}v^2 \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) \frac{\partial f}{\partial v} d\vec{v} = \frac{q}{2} \int v^2 \vec{D} \frac{\partial f}{\partial v} d\vec{v} = -nq\vec{u} \cdot \vec{E} = -\vec{J} \cdot \vec{E}$$

Come si vede evidenziato in blu abbiamo definito tre grandezze: nel primo termine si è definita una sorta di energia media (più un'**energia cinetica collettiva locale**) $\varepsilon = \int \frac{1}{2}mv^2 f d\vec{v} = \frac{1}{2}mn\langle v^2 \rangle$; nel secondo termine si è definito il **flusso di energia convettiva** $\vec{Q} = \frac{1}{2}m \int v^2 \vec{v} f d\vec{v} = \frac{1}{2}mn\langle v^2 \vec{v} \rangle$; nel terzo termine invece riincontriamo una definizione di **corrente di particelle**. Mettendo assieme questi risultati otteniamo un'equazione per il bilancio di energia:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{Q} + \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (11)$$

Viste le precedenti definizioni di velocità peculiare $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ potremmo anche scomporre le definizioni date in $\varepsilon = \frac{1}{2}mn\langle u^2 \rangle + \frac{1}{2}mn\langle w^2 \rangle = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{3}{2}nT$, per il flusso di energia convettiva $\vec{Q} = \frac{1}{2}mu^2(n\vec{u}) + \frac{3}{2}nT\vec{u} + \frac{1}{2}mn(2\vec{u} \cdot \langle \vec{w}\vec{w} \rangle) + \frac{1}{2}mn\langle w^2 \vec{w} \rangle$ dove il primo termine di questi è un flusso di energia, il secondo un flusso di calore $\vec{q} = \frac{3}{2}nT\vec{u}$, il terzo è invece dovuto alle forze di pressione ($P \cdot u = \frac{1}{2}mn(2\vec{u} \cdot \langle \vec{w}\vec{w} \rangle)$) ed il quarto ad un lavoro di pressione macroscopico.

5 Modello ad un fluido (Magnetoidrodinamica)

Assumendo che si trovi una chiusura, come l'incomprimibilità o una politropica, il nostro sistema di equazioni fluide a cui ci siamo ricondotti nel capitolo precedente vanno ancora accoppiate alle equazioni dell'elettrodinamica.

Finora abbiamo trovato le equazioni di bilancio del numero di particelle (equazione di continuità), equazione della quantità di moto (o impulso) ed equazione dell'energia per le varie specie che compongono il plasma, ma nel caso più semplice di due fluidi (ioni + elettroni) possiamo fare alcune definizioni per ricondurci ad una descrizione ad un fluido, la **magnetoidrodinamica**; descrizione che spazia su molti ordini di grandezza ma perdendo alcuni aspetti cinetici:

$$\begin{aligned} \text{densità di massa : } & \rho = \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} = m_i n_i + m_e n_e \sim \frac{n}{2} (m_i + m_e) \\ \text{velocità media : } & \bar{u} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} u_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha}} \sim \frac{n_0}{n_0} \frac{m_i \vec{u}_i + m_e \vec{u}_e}{m_i + m_e} \sim \vec{u}_i + \frac{m_e}{m_i} \vec{u}_e \\ \text{corrente : } & \vec{J} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \end{aligned}$$

Si nota che per la densità di massa il contributo è dato principalmente dagli ioni, come per la velocità al primo ordine potremmo approssimare $\bar{u} \sim \vec{u}_i$.

5.1 Equazione di continuità ad un fluido

Ricordiamo che l'equazione di continuità per una singola specie è $\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha})$. Partiamo da quest'ultima, moltiplicandola per m_{α} e facciamo una somma sulle specie per ottenere una nuova equazione di continuità a singolo fluido:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

(12)

In modo del tutto simile potremmo definire l'equazione di continuità di carica:

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}) = 0$$

(13)

5.2 Equazione del moto ad un fluido

Riprendiamo anche l'eq. del moto per l'impulso trovata per i due fluidi in eq.10 e la moltiplichiamo per m_{α} :

$$\frac{\partial (m_{\alpha} n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \vec{v} \vec{v} \rangle_{\alpha}) - q_{\alpha} n_{\alpha} (\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{u}_{\alpha} \times \vec{B}) = 0$$

Avevamo usato $\mathbf{P}_{\alpha} = n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \vec{w} \vec{w} \rangle_{\alpha}$, con $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, ma ora noi vogliamo una pressione di singolo fluido $\mathbf{P} = \sum_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha} = p \mathbf{I} + \Pi$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\alpha} &= n_{\alpha} m_{\alpha} \langle (\vec{v} - \vec{u})(\vec{v} - \vec{u}) \rangle_{\alpha} = n_{\alpha} m_{\alpha} [\langle \vec{v} \vec{v} \rangle_{\alpha} - \langle \vec{v} \vec{u} \rangle_{\alpha} - \langle \vec{u} \vec{v} \rangle_{\alpha} + \langle \vec{u} \vec{u} \rangle_{\alpha}] = \\ &= n_{\alpha} m_{\alpha} [\langle \vec{v} \vec{v} \rangle_{\alpha} - \vec{u}_{\alpha} \vec{u} - \vec{u} \vec{u}_{\alpha} + \vec{u} \vec{u}] \end{aligned}$$

Usiamo $\langle \vec{v} \rangle = \vec{u}_{\alpha}$ e calcoliamo $\mathbf{P} = \sum_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha}$:

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \vec{v} \vec{v} \rangle_{\alpha} - \underbrace{\left(\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \right)}_{\rho \vec{u} \vec{u}} \vec{u} - \underbrace{\left(\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \right)}_{\rho \vec{u} \vec{u}} + \underbrace{\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{u} \vec{u}}_{\rho \vec{u} \vec{u}}$$

Vogliamo riprendere ora l'eq. del moto ad un fluido moltiplicata per la massa e sommarla sulle due specie. Ricordando che $\rho\vec{u} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}$ vediamo che nell'equazione di inizio paragrafo il primo termine diventa $\partial_t(\rho\vec{u})$ mentre il secondo termine può essere ricondotto al tensore di pressione che abbiamo appena espanso, quindi i primi due termini assieme sono:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \vec{v} \vec{v} \rangle_{\alpha} &= \mathbf{P} + \rho \vec{u} \vec{u} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} &= \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{\vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u})}_{\text{eq. di continuità}} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} = \\ &= \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} = \rho \frac{D \vec{u}}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} \end{aligned}$$

Per il terzo termine, quello di forza:

$$\sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{u} \times \vec{B} \right) = \underbrace{\left(\sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \right)}_{\rho_c} \vec{E} + \underbrace{\left(\sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \right)}_{\vec{j}} \times \vec{B} / c = \rho_c \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}$$

dove ρ_c è uno sbilancio di carica quindi è vicino a zero, ma non nullo. In definitiva:

$$\boxed{\rho \frac{D \vec{u}}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} + \rho_c \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} = 0} \quad (14)$$

5.3 Legge di Ohm generalizzata

Ora si nota che siamo partiti da 2 equazioni quindi possiamo ricavarne altrettante, c'è ancora dell'informazione da estrarre dall'eq. del moto. Prendiamo di nuovo la medesima equazione e stavolta la moltiplichiamo per q_{α} , per poi sommare su α :

$$\underbrace{\sum_{\alpha} \frac{\partial (q_{\alpha} n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha})}{\partial t}}_{\partial \vec{j} / \partial t} + \sum_{\alpha} q_{\alpha} \nabla \cdot (n_{\alpha} \langle \vec{v} \vec{v} \rangle_{\alpha}) - \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \frac{n_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{u}_{\alpha} \times \vec{B}) = 0$$

ora questa diversa forma da cui partire ci condurrà all'equazione di Ohm generalizzata. Per il secondo termine torniamo a giocare con la definizione di velocità peculiare:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v} \vec{v} \rangle &= \langle (\vec{u} + \vec{w})(\vec{u} + \vec{w}) \rangle = \vec{u} \vec{u} + \langle \vec{w} \vec{w} \rangle_{\alpha} + \langle \vec{w} \vec{u} \rangle_{\alpha} + \langle \vec{u} \vec{w} \rangle_{\alpha} = \\ &= \vec{u} \vec{u} + \langle \vec{w} \vec{w} \rangle_{\alpha} + (\vec{u}_{\alpha} - \vec{u}) \vec{u} + \vec{u} (\vec{u}_{\alpha} - \vec{u}) = \end{aligned}$$

Se ora andiamo a richiamare l'equazione dell'energia del capitolo precedente possiamo trovare una chiusura $\sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{Q} + \vec{E} \cdot \vec{J} \\ \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} m v^2 f d\vec{v} + \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \int v^2 \vec{v} f d\vec{v} + \int \frac{q}{2} v^2 \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) \frac{\partial f}{\partial v} d\vec{v} &= 0 \end{aligned}$$

poi fa robe:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} \frac{\partial}{\partial t} (n_{\alpha} \langle v^2 \rangle_{\alpha}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \nabla \cdot (n_{\alpha} \langle v^2 \vec{v} \rangle_{\alpha}) - \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \vec{w}_{\alpha} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle v^2 \rangle_{\alpha} \right] &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{3}{2} \sum_{\alpha} n_{\alpha} T_{\alpha} \right] \end{aligned}$$

Sappiamo che $P_{\alpha} = \frac{1}{3} m_{\alpha} n_{\alpha} \langle \vec{w} \vec{w} \rangle = n_{\alpha} T_{\alpha}$ e per magia ci ritroviamo in mano $\frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{3}{2} p)$. Poi vogliamo cercare di calcolare $\langle v^2 \vec{v} \rangle_{\alpha}$:

$$\begin{aligned}\langle v^2 \vec{v} \rangle_\alpha &= \langle [(\vec{w} + \vec{u}) \cdot (\vec{w} + \vec{u})] (\vec{w} + \vec{u}) \rangle_\alpha \\ &= \langle w^2 \vec{w} \rangle_\alpha + \langle \vec{w}^2 \vec{u} \rangle_\alpha + \langle u^2 \vec{w} \rangle_\alpha + u^2 \vec{u} + 2\langle (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{w} \rangle_\alpha + 2\langle (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{u} \rangle_\alpha\end{aligned}$$

e - a questo punto - cerchiamo un modo intelligente di ridurre questi termini, in particolare riconoscendo i flussi di calore di singola specie \vec{q}_α , le pressioni di singola specie p_α e ricordando le definizioni di ρ , $\rho \vec{u}$ e \mathbf{P} :

$$\begin{aligned}(\vec{w} \cdot \vec{u}) \vec{w} &= \tilde{\mathbf{w}} \tilde{\mathbf{w}} \cdot \vec{u} \Rightarrow \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \langle \vec{w} \vec{w} \rangle_\alpha \cdot \vec{u} = \mathbf{P} \cdot \vec{u} \\ \frac{1}{2} \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \langle w^2 \vec{w} \rangle_\alpha &\equiv \sum_\alpha \vec{q}_\alpha = Q \\ \frac{1}{2} \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \langle w^2 \vec{u} \rangle_\alpha &= \frac{1}{2} \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \langle w^2 \rangle_\alpha \vec{u} = \frac{3}{2} \sum_\alpha p_\alpha \vec{u} = \frac{3}{2} \sum_\alpha n_\alpha T_\alpha \vec{u} \\ \frac{1}{2} \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha u^2 &= \frac{1}{2} \rho u^2 \vec{u} \\ \langle u^2 \vec{w}_\alpha \rangle &= u^2 \langle \vec{w} \rangle_\alpha = u^2 \langle \vec{u}_\alpha - \vec{u} \rangle\end{aligned}$$

Quindi dopo tutti questi calcoli a latere abbiamo che per il secondo termine dell'equazione dell'energia, in definitiva:

$$\frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \nabla \cdot (n_\alpha \langle v^2 \vec{v} \rangle_\alpha) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \vec{u} + \frac{3}{2} p \vec{u} + \mathbf{P} \cdot \vec{u} + \vec{q} \right)$$

Otteniamo così l'eq dell'**energia per singolo fluido** (in caso *collision-less*):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{3}{2} p \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \vec{u} + \frac{3}{2} \rho \vec{u} + \mathbf{P} \cdot \vec{u} + \mathbf{q} \right) = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Torniamo quindi all'equazione del moto e per semplificare i conti assumiamo che gli ioni siano protoni così da avere carica $+e$:

$$\begin{cases} \vec{j} = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha = n_e (\vec{u}_i - \vec{u}_e); \\ \vec{u} = \vec{u}_i + \frac{m_e}{m_i} \vec{u}_e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_i = \vec{u} + \frac{m_e}{m_i} \frac{\vec{j}}{n_e} \\ \vec{u}_e = \vec{u} - \frac{\vec{j}}{n_e} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \sum_\alpha q_\alpha \nabla \cdot (n_\alpha \langle vv \rangle_\alpha) - \sum_\alpha \frac{n_\alpha}{m_\alpha} q_\alpha^2 (\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) = 0$$

Per il secondo termine possiamo 'portare fuori' la divergenza e sviluppiamo:

$$\begin{aligned}\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \langle vv \rangle_\alpha &= n_e \langle \vec{v} \vec{v} \rangle_i - n_e \langle \vec{v} \vec{v} \rangle_e \\ &= n_e [\langle [\vec{v}_i - \vec{u}] [\vec{v}_i - \vec{u}] + \vec{u} \rangle_i - \langle [\vec{v}_e - \vec{u}] [\vec{v}_e - \vec{u}] + \vec{u} \rangle_e] = \\ &= n_e \left(\underbrace{\langle (\vec{v}_i - \vec{u}) (\vec{v}_i - \vec{u}) \rangle_i}_{\text{press. singola specie } \langle ww \rangle_i} + \cancel{\vec{u} \vec{u}}^0 + \langle (\vec{v}_i - \vec{u}) \vec{u} \rangle_i + \underbrace{\langle \vec{u} (\vec{v}_i - \vec{u}) \rangle_i}_{\vec{u} \langle v_i - \vec{u} \rangle_i = \vec{u} (\vec{u}_i - \vec{u})} \right) - n_e (\dots)_e \\ \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \langle vv \rangle_\alpha &= \frac{e}{m_i} p_i - \frac{e}{m_e} p_e + (\vec{j} \vec{u} + \vec{u} \vec{j}) (1 + \frac{m_e}{m_i})\end{aligned}$$

Quindi nell'equazione del moto abbiamo:

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[e \left(\frac{p_i}{m_i} - \frac{p_e}{m_e} \right) + \vec{j} \vec{u} + \vec{u} \vec{j} \right] - \frac{ne^2}{m_e} \left(\vec{E} + \frac{\vec{u} \times \vec{B}}{c} - \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{n e c} \right) = \eta \dots$$

Prendiamo il termine con q_α^2 :

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha}}{m_{\alpha}} q_{\alpha}^2 \left(\vec{E} + \frac{\vec{u}_{\alpha} \times \vec{B}}{c} \right) &= ne^2 \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_e} \right) \vec{E} + ne^2 \left(\sum_{\alpha} \frac{\vec{u}_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right) \times \vec{B} / c \\ &= \frac{ne^2}{m_e} \vec{E} + \frac{n_e^2}{m_e} \left(\vec{u} + \frac{\vec{j}}{m_e} \right) \times \frac{\vec{B}}{c}\end{aligned}$$

dove per il termine in parentesi al secondo membro lo sviluppo sarebbe:

$$\sum_{\alpha} \frac{\vec{u}_{\alpha}}{m_{\alpha}} = \frac{\vec{u}}{m_i} + \frac{m_e \vec{j}}{m_i^2 n_e} + \frac{\vec{u}}{m_e} - \frac{\vec{j}}{m_e n_e} = \frac{1}{m_e} \left[\vec{u} \left(1 + \frac{m_e}{m_i} \right) - \frac{\vec{j}}{n e} \left(1 + \frac{m_e^2}{m_i^2} \right) \right]$$

Otteniamo così (sono stanco capo...):

$$\sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \left(\vec{E} + \frac{\vec{u}_{\alpha} \times \vec{B}}{c} \right) \approx \frac{n_e^2}{m_e} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{u} \times \vec{B} - \frac{1}{n e c} \vec{j} \times \vec{B} \right)$$

5.4 Onde di Alfvén

Le onde in MHD si dividono in tre gruppi, due magnetosoniche e poi le onde di Alfvén.

Le **onde di Alfvén** sono onde non dispersive, inoltre non sono compressive, quindi l'energia che trasportano può essere portata più lontano rispetto ad onde compressive.

Ancora una volta linearizziamo ρ , p , \vec{u} , usiamo un pedice 0 per le quantità ad equilibrio ed un pedice 1 per le fluttuazioni. Per il campo magnetico in particolare scriviamo $\vec{B} = B_0 \hat{e}_z + \vec{b}$.

Il nostro sistema di equazioni linearizzate è:

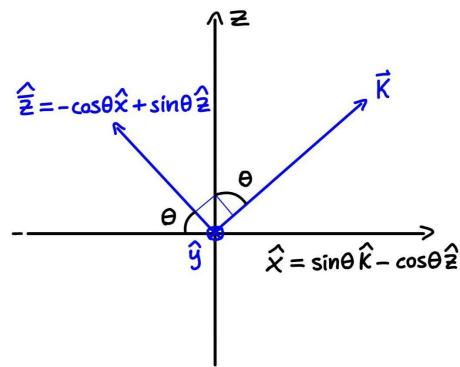
$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \frac{1}{4\pi} B_0 \hat{e}_z \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \\ \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times B_0 \hat{e}_z) \\ \vec{\nabla} p = c_s^2 \vec{\nabla} \rho_1 \end{cases}$$

Proseguiamo i calcoli in trasformata di Fourier:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -c_s^2 \vec{\nabla} \rho_1 + \frac{1}{4\pi} B_0 \hat{e}_z \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \\ \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times B_0 \hat{e}_z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{i} \omega \rho_1 = \cancel{i} \rho_0 \vec{k} \cdot \vec{u} \\ \cancel{i} \omega \rho_0 \vec{u} = \cancel{i} c_s^2 \vec{k} \rho_1 - \cancel{i} \frac{1}{4\pi} B_0 \hat{e}_z \times (\vec{k} \times \vec{b}) \\ -\cancel{i} \omega \vec{b} = \cancel{i} \vec{k} \times (\vec{u} \times B_0 \hat{e}_z) \end{cases}$$

Facciamo caso di passare da un sistema di riferimento $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ che stavamo usando ad un sistema $(\hat{k}, \hat{y}, \hat{z})$ come da figura 2.

Calcoliamo ora il triplo prodotto della seconda equazione nel sistema:



$$\vec{k} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{k} & \hat{y} & \hat{z} \\ k & 0 & 0 \\ b_k & b_y & b_z \end{vmatrix} = -kb_z \hat{y} + kb_y \hat{z}$$

FIG. 2: cambio di sistema di riferimento $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \rightarrow (\hat{k}, \hat{y}, \hat{z})$

$$\vec{B}_0 \times (\vec{k} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & B_0 \\ -k_{\parallel} b_y & -kb_{\bar{z}} & k_{\perp} b_y \end{vmatrix} = \hat{x} (k B_0 b_{\bar{z}}) - \hat{y} (k_{\parallel} b_y B_0) + \hat{z} (0)$$

Ne deriva che la seconda equazione diventa $\omega \rho_0 \vec{u} = c_s^2 \vec{k} \rho_{\parallel} + \frac{1}{4\pi} (k B_0 b_{\bar{z}} \hat{x} - k_{\parallel} b_y B_0 \hat{y})$. Finito questo rimaneggiamento passiamo a fare lo stesso per la terza equazione:

$$\vec{u} \times \vec{B}_0 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & B_0 \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = -b_0 u_y \hat{x} + b_0 u_x \hat{y}$$

$$\vec{k} \times (\vec{u} \times \vec{B}_0) = \begin{vmatrix} \hat{k} & \hat{y} & \hat{z} \\ k & 0 & 0 \\ -\sin\theta B_0 u_y & \cos\theta B_0 u_x & \cos\theta B_0 u_y \end{vmatrix} = -k_{\parallel} B_0 u_y \hat{y} + k B_0 u_x \hat{z}$$

In questo modo abbiamo ridotto il sistema ad uno di :

$$\begin{cases} \omega b_y = -k_{\parallel} B_0 u_y \\ \omega \rho_0 u_y = \frac{B_0}{4\pi} k_{\parallel} b_y \end{cases}$$

da questo sistema otteniamo $\omega u_y = \omega^2 b_y / (k_{\parallel} B_0)$ e $\rho_0 \omega^2 b_y / (k_{\parallel} B_0) = B_0 k_{\parallel} b_y / (4\pi)$ che ci permettono di scrivere una **relazione di dispersione** per le onde di Alfvén $\forall \theta$, notando che per $\theta = \pi/2$ non vi sono onde:

$$\boxed{\omega^2 = k_{\parallel}^2 c_a^2 = k^2 \cos^2 \theta c_a^2} \quad (15)$$

L'energia si propaga lungo \hat{z} mentre l'onda si propaga lungo \hat{k}

$$c_{\phi} = \frac{\omega}{k} = c_a \cos\theta \quad \tau_y = c_a \hat{z} = \frac{d\omega}{dk}$$

5.5 Onde Magnetosoniche

Riprendiamo il sistema precedente:

$$\begin{cases} \omega \rho_1 = \rho_0 \vec{k} \cdot \vec{u} = \rho_0 (k_{\perp} u_x + k_{\parallel} u_z) \\ \omega \rho_0 \vec{u} = \vec{c}_s^2 \vec{k} \rho_1 + \frac{B_0}{4\pi} \hat{e}_z \times (\vec{k} \times \vec{b}) \\ \omega \vec{b} = -\vec{k} \times (\vec{u} \times \vec{B}_0) \end{cases}$$

$$\omega \rho_0 \vec{u} = c_s^2 \frac{\rho_0}{\omega} (k_{\perp} u_x + k_{\parallel} u_z) \vec{k} + \frac{k B_0 b_{\bar{z}}}{4\pi} \hat{x} + \dots \hat{y}$$

Usiamo il fatto che $\frac{k^2 B_0^2}{4\pi \rho_0} u_x = k^2 c_a^2 u_x$ per ottenere:

$$\omega^2 u_x = c_s^2 (k_{\perp} u_x + k_{\parallel} u_z) k_{\perp} + k^2 c_a^2 u_x = (k_{\perp} c_s^2 + k^2 c_a^2) u_x + (c_s^2 k_{\parallel} k_{\perp}) u_z$$

Prendendo $\omega \rho_0 u_z = c_s^2 \rho_1 k_{\parallel}$ scriviamo poi $\omega^2 \rho_0 u_z = c_s^2 k_{\parallel} \rho_0 (k_{\perp} u_x + k_{\parallel} u_z)$ così da giungere al sistema:

$$\begin{cases} (\omega^2 - c_s^2 k_{\perp}^2 - k_{\parallel}^2 c_a^2) u_x - k_{\parallel} k_{\perp} c_s^2 u_z = 0 \\ k_{\parallel} k_{\perp} c_s^2 u_x - (\omega^2 - c_s^2 k_{\parallel}^2) u_z = 0 \\ (\omega^2 - k_{\perp}^2 c_s^2 - k^2 c_a^2) (\omega^2 - k_{\parallel}^2 c_s^2) + (k_{\parallel}^2 k_{\perp}^2 c_s^4) = 0 \\ \omega^4 - \omega^2 k^2 (c_a^2 + c_s^2) + k_{\parallel}^2 k^2 c_a^2 c_s^2 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{1}{2} \left[c_a^2 + c_s^2 \pm \sqrt{(c_a^2 + c_s^2)^2 - 4c_a^2 c_s^2 \cos^2 \theta} \right]} \quad (16)$$

6 Riconnessione

La riconnessione è una transizione verso uno stato di energia minore che sarebbe proibita per la MHD. Viene violata localmente la legge di OHM ideale in una regione (detta zona ad x o zona resistiva) di dimensione caratteristica δ infinitesima rispetto al sistema totale. Viene cambiata globalmente la topologia creando una cosittetta isola di campo, inoltre viene liberata una grandissima quantità di energia. Questa quantità di energia viene presa dalla struttura stessa del campo che si riarrangia nella sua interezza in una configurazione meno energetica.

Matematicamente abbiamo un'eq differenziale al quart'ordine "struttura tipo strato limite in fluidodinamica". Il termine del quart'ordine (la derivata più alta) $\eta \frac{d^4}{dx^4} \bar{b}$ non conta mai tranne che nelle regioni di grandi gradienti perché è guidato da un coefficiente piccolissimo, d'altra parte è proprio questo termine invece a guidare la soluzione nelle regioni interne (zona ad x) dove si hanno forti gradienti (e possibilmente il termine all'origine zero è nullo), in cui $\frac{d}{dx} \sim \frac{1}{\delta}$ e δ è la lunghezza caratteristica dello strato resistivo, che va raccordata alla soluzione delle regioni esterne in cui invece $\frac{d}{dx} \sim \frac{1}{L}$, L è la dimensione caratteristica MHD "lunghezza scala del campo di equilibrio". Il tempo caratteristico della riconnessione (tasso di crescita $\frac{1}{\gamma}$) è in mezzo tra il tempo resistivo e il tempo di alfvén:

$$1 \ll \frac{1}{\gamma \tau_a} \ll \frac{\tau_R}{\tau_a} \equiv S \equiv R_a \text{ che è un numero enorme}$$

Noi osserviamo chiaramente che la riconnessione avviene anche in 3D ma per il momento la studiamo in 2D, anzi mi sa che non è nemmeno ben definito come diamine funzioni la riconnessione in 3D.

Le condizioni del problema sono che ci mettiamo in 2D ($\partial_z = 0$) in approssimazione incomprimibile $\nabla \cdot \vec{u} = 0$

$$u_z = 0, \quad b_z = 0, \quad \vec{u}_0 = 0$$

$$\vec{B} = B_0(x)\hat{y} + \vec{b}$$

Praticamente l'intensità del campo magnetico seguendo l'asse x ha valori asintotici B_0 per $x \rightarrow \infty$ e $-B_0$ per $x \rightarrow -\infty$. poi c'è una zona di alto gradiente di dimensioni caratteristiche L lunghezza scala del campo di equilibrio,

$$L \sim \frac{B_0}{B'_0} \quad L \gg \delta$$

Per fare un esempio dell'andamento tipico possiamo considerare $B_0(x) = \tanh \frac{x}{L}$
I campi di variazione sono

$$\vec{b} = b_x(x, y)\hat{x} + b_y(x, y)\hat{y}, \quad \vec{u} = u_x(x, y)\hat{x} + u_y(x, y)\hat{y}$$

Dalla fluidodinamica sappiamo che possiamo scrivere il campo 2D come gradiente di un campo ausiliario

$$\vec{b} = \nabla \psi \times \hat{z} = \partial_y \psi \hat{x} - \partial_x \psi \hat{y}, \quad \vec{u} = \nabla \phi \times \hat{z} = \partial_y \phi \hat{x} - \partial_x \phi \hat{y}$$

Dopodiché ho bisogno dell'equazione di Faraday ("dell'induzione")

6.1 equazione di faraday

Vorrei tanto sapere come mai l'equazione di faraday è proprio scritta così, io non me la ricordo mica come si arriva a questo punto e mi auguro di scoprirlo presto... cmq davanti ad eta potrebbe esserci un 4π o comunque una costante

$$\partial_t \vec{B} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}_0) + \eta \nabla^2 \vec{b}$$

facciamo tutti i conti passo passo

$$\vec{u} \times \vec{B}_0 =$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_y \phi & \partial_x \phi & 0 \\ 0 & B_0 & 0 \end{vmatrix} = B_0 \delta_y \phi \hat{z}$$

$$\nabla \times [\vec{u} \times \vec{B}_0] =$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \partial_y \phi \end{vmatrix}$$

$= B_0 \partial_{yy} \phi \hat{x} - \partial_x [B_0 \partial_y \phi] \hat{y} = B_0 \partial_{yy} \phi \hat{x} - (B'_0 \partial_y \phi + B_0 \partial_{xy} \phi) \hat{y}$ dove $B'_0 = \partial_x B_0$ e in generale d'ora in poi i termini col primo si intende derivata lungo x.

$$\nabla^2 \vec{b} = (\partial_{xx} + \partial_{yy})(\partial_y \psi \hat{x} - \partial_x \psi \hat{y}) = (\partial_{xxy} + \partial_{yyy})\psi \hat{x} - (\partial_{xxx} + \partial_{yyx})\psi \hat{y}$$

chiaramente la derivata rispetto al tempo del campo elettrico mi ammazza il campo medio B_0

$$\partial_t \vec{B} = \partial_t \vec{b} = \partial_{ty} \psi \hat{x} - \partial_{tx} \psi \hat{y}$$

Metto tutto insieme, separo le componenti e impongo una bella soluzione piana (non è per davvero un'onda piana, al massimo posso dire che è un ansatz)

$$\sim f(x) e^{iky - \gamma t}$$

:

- componente \hat{x} :

$$\partial_{ty} \psi = B_0 \partial_{yy} \phi + \eta(\partial_{xxy} + \partial_{yyy})\psi$$

tutti i termini contengono un ∂_y e quindi posso integrare in ∂_y .

$$\gamma \psi = ikB_0 \phi + \eta(\psi'' - k^2 \psi)$$

- componente y:

ho ricucito la derivata del prodotto.

$$-\partial_{tx} \psi = -(B_0 \partial_y \phi)' - \eta(\partial_{xxx} - \partial_{yyx})\psi$$

Infine mi interesso di normalizzare l'equazione praticamente in temini di $L, \tilde{c}_a, \tilde{B}$ che sono i valori caratteristici di ϕ e di ψ . compare il termine parente stretto di $\eta, \frac{t_a}{t_r} = S^{-1}$. alla fine dela fiera quello che viene fuori è per quanto riguarda la componente x

$$\gamma \psi = ikB_0 \phi + S^{-1}(\psi'' - k^2 \psi)$$

Attenzione !!! e la componente y quanto fa??

6.2 equazione del moto

dall'incompressibilità si ha sicuramente che non vi sono variazioni nella densità che è uniformemente ρ_0 ; il termine $\vec{u} \nabla \cdot \vec{u}$ è del second'ordine e lo lasciamo perdere sin da subito.

$$\rho_0 \partial_t (\nabla \times \vec{u}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times [(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}]$$

intanto sicuramente posso linearizzare e mi trovo solamente i termini di primo grado.

$$\rho_0 \partial_t (\nabla \times \vec{u}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times [(\nabla \times \vec{b}) \times \vec{B}_0] + \frac{1}{4\pi} \nabla \times [(\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{b}]$$

ora di nuovo bisogna fare i prodotti vettoriali e i rotori per benino benissimo

$$\nabla \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & 0 \\ \partial_y \psi & -\partial_x \psi & 0 \end{vmatrix} = -(\partial_{xx} \psi + \partial_{yy} \psi) \hat{z}$$

$$\nabla \times \vec{u} = -(\partial_{xx} \phi + \partial_{yy} \phi) \hat{z}$$

$$\nabla \times \vec{B}_0 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & 0 \\ 0 & B_0 & 0 \end{vmatrix} = \partial_x B_0 \hat{z} = B'_0 \hat{z}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \vec{b}) \times \vec{B}_0 &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -(\partial_{xx} + \partial_{yy})\psi \\ 0 & B_0 & 0 \end{vmatrix} = B_0(\partial_{xx} + \partial_{yy})\psi \hat{x} \\
(\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & B'_0 \\ \partial_y \psi & \partial_x \psi & 0 \end{vmatrix} = B'_0 \partial_x \psi \hat{x} + B'_0 \partial_y \psi \hat{y} \\
\nabla \times [(\nabla \times \vec{b}) \times \vec{B}_0] &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & 0 \\ B_0(\partial_{xx} + \partial_{yy})\psi & 0 & 0 \end{vmatrix} = -B_0(\partial_{yxx} + \partial_{yyy})\psi \hat{z} \\
\nabla \times [(\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{b}] &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & 0 \\ B'_0 \partial_x \psi & B'_0 \partial_y \psi & 0 \end{vmatrix} = [\partial_x(B'_0 \partial_y \psi) - B'_0 \partial_{yx} \psi] \hat{z} = \\
&= [B''_0 \partial_y \psi + B'_0 \partial_{yx} \psi - B'_0 \partial_{yy} \psi] \hat{z} = B''_0 \partial_y \psi \hat{z}
\end{aligned}$$

$$4\pi\rho_0\partial_t(\partial_{xx} + \partial_{yy})\phi = B_0(\partial_{yxx} + \partial_{yyy})\psi - B''_0\psi$$

imponendo una soluzione di tipo onda piana (oddio non è mica vero che è un'onda piana... chiedere) le derivate rispetto al tempo fanno scendere un γ , le derivate seconde rispetto ad x danno un doppio primo, le derivate seconde rispetto a y danno $-k^2$. ora bisogna normalizzare e γ lo normalizzo col tempo di alfvén, ϕ è una velocità per una lunghezza e quindi va diviso per $\tilde{c}_a L$, se moltiplico per L^2 normalizzo sia la derivata seconda rispetto a x sia rispetto a k^2 .

$$\frac{\tau_a L^2}{L \tilde{c}_a} = \frac{L^2}{\tilde{c}_a L / \tau_a} \sim \frac{L^2}{\tilde{c}_a^2}$$

allora se moltiplico il membro a sx per $\tau_a \frac{L}{\tilde{c}_a}$ mi rimane la densità ρ_0 . dall'altra parte la ψ è $\sim \tilde{B}L \implies \psi''$ e anche $k^2\psi \sim \frac{\tilde{B}}{L}$ contando anche il k davanti a tutto e il campo magnetico hoche il membro a dx è $\sim B^2/L^2$. il fattore con cui ho moltiplicato il membro a sx mi fa diventare il membro a destra $\sim \frac{\tilde{B}}{\tilde{c}_a^2}$.

Se riesco a capire che $\rho_0 \sim \frac{\tilde{B}^2}{\tilde{c}_a^2}$ sono a cavallo.

in alternativa mi piace anche magari che $\rho_0 \sim \frac{\tilde{B}}{\tilde{c}_a^2}$ perché comunque mi va bene che sia in termini del campo magnetico.

Credo che ho bisogno dell'equazione di continuità per riuscire a dimensionare campo magnetico e densità.

6.3 equazioni MHD incomprimibile

1.

$$\gamma(\phi'' - k^2\phi) = ikB_0(\psi'' - k^2\psi) - ikB_0\psi$$

2.

$$\gamma\psi - ikB_0\phi = S^{-1}(\psi'' - k^2\psi)$$

è da qui che emerge l'equazione differenziale del quart'ordine. il termine alla derivata quarta è effettivamente quello legato al numero di Raynolds magnetico, S^{-1} è un numero piccolissimo e sono necessari grandi gradienti per farlo uscire fuori. Queste equazioni presentano una singolarità ed è in quel punto che comincia a contare il termine del quart'ordine. Quando la velocità di fase dell'onda di alfvén matcha la velocità del suono locale ovvero quando $\frac{\omega}{k} \sim c_a(x_0)$ in x_0 c'è la singolarità. Avere questa singolarità non necessariamente porta ad una riconnesseone, è infatti questo il caso anche per le oscillazioni di kelvinHelmoltz in cui le onde fanno risonanza con la disomogeneità e dissipano l'energia, però se il campo magnetico passa da zero e fa un'inversione "si inverte", posso avere la riconnesseone. in questo caso l'energia viene liberata dal campo medio che cambiando configurazione passa ad uno stato di minore energia.

DOMANDA:

Ma nel caso di KelvinHelmoltz avviene un cambiamento di Topologia?

6.4 ipotesi e time ordering

- H1: assumo che esistano due regioni con diversi regimi
 - REGIONE IDEALE
in cui il termine resistivo non conta e in questa zona i gradienti sono

$$\partial_x \sim \frac{1}{L} \sim k \sim \delta_y$$

e considerando che stiamo considerando le grandezze normalizzate possiamo dire che le derivate nelle due direzioni sono dello stesso ordine

$$\delta_x \sim \delta_y \sim 1$$

- REGIONE RESISTIVA :

$$\partial_x \sim \frac{1}{\delta}, \quad \delta \ll L$$

- H2: Ordering dei tempi

$$1 \ll \frac{1}{\gamma \tau_a} \ll S$$

da ora in poi scriviamo solamente γ condiserandolo un fattore adimensionale.

Queste due ipotesi mi permettono di semplificare il sistema di equazioni,

6.4.1 zona ideale

Qui l'equazione (2) ha il termine in S che non conta nulla e possiamo dire invece che

$$\gamma\psi \sim ikB_0\phi$$

da cui concludiamo che per quanto riguarda gli ordini/andamenti

$$\gamma\psi \sim \phi$$

Questo permette di passare all'equazione (1) in cui possiamo considerare che $\gamma\phi \sim \gamma^2\psi$, a questo punto trascuriamo il primo termine.

$$(\psi'' - k^2\psi) = \psi$$

Definiamo un valore che quantifica quanto la derivata è fottuta. è una misura di quanto varia la discontinuità a seconda della lunghezza d'onda.

$$\Delta' = \left. \frac{d}{dx} \ln \psi \right|_{0^-}^{0^+} = \frac{\psi'(0^+) - \psi'(0^-)}{\psi(0)}$$

Quando Δ' è negativo il sistema è stabile, quando Δ' è positivo, è possibile che il sistema vada verso un'instabilità.

6.4.2 zona resistiva

abbiamo un'ordering spaziale del tipo

$$\frac{\partial}{\partial_x} \sim \frac{1}{\delta} \gg \frac{\partial}{\partial_y} \sim k$$

Questo ordering implica che in questo caso le derivate rispetto a x sono molto maggiori delle derivate rispetto a y . Poi dobbiamo anche imporre che quando $\frac{x}{\delta} \ll 1$ la soluzione nella zona interna resistiva si agganci a quella della zona esterna.

$$\phi'' \gg k^2\phi \quad \psi'' \gg k^2\psi$$

Riprendiamo le equazioni normalizzate

$$\begin{cases} \gamma(\phi'' - k^2\phi) = ikB_0(\psi'' - k^2\psi) - ikB_0''\psi \\ \gamma\psi - ikB_0\phi = S^{-1}(\psi'' - k^2\psi) \end{cases}$$

siccome nella prima equazione membro a membro si ha solamente confronti tra termini si ordine 1 ($kB_0''\psi$ è di ordine 1) e temini di ordine $\frac{1}{\delta^2}$, si può eliminare direttamente ogni termine che non abbia la derivata seconda. nella seconda equazione invece è possibile fare questa considerazione solamente nella parte a dx.

$$\begin{cases} \gamma\phi'' = ikB_0\psi'' \\ \gamma\psi - ikB_0\phi = S^{-1}\psi'' \end{cases}$$

ora dobbiamo procedere a cercare l'ordinamento di questi termini in termini di γ, S, Δ' e δ .

Inanzitutto definiamo con una funzione di Guess il campo magnetico nella regione resistiva, che ricordiamo essere sottilissima, spessa δ .

$$B_0(x) = \tilde{B}x \sim \tilde{B}\delta$$

$$\psi - \frac{ik\tilde{B}}{\gamma}x\phi = \frac{S^{-1}}{ik\tilde{B}\delta}\phi''$$

nella regione interna vale la funzione ψ_{int} di cui abbiamo definito il rapporto incrementale della derivata logaritmica essere Δ' . Con un passaggio algebrico si scrive la differenza al numeratore come integrale definito della derivata

$$\Delta' = \frac{1}{\psi_{int}(0)} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{d^2}{dx^2} \psi_{int} dx$$

l'integrale è dell'ordine di $\psi''\delta$

$$\implies \psi'' \sim \frac{\Delta'}{\delta\psi(0)}$$

Ora devo fare il bilanciamento dei termini, e controlliamo prima i termini con la ϕ . Ricordiamoci che k e \tilde{B} sono di ordine 1. x è ordine δ

$$\phi'' \sim \frac{\phi}{\delta^2} \sim \frac{(k\tilde{B}\delta)^2}{\gamma} S\phi \implies \gamma \sim \delta^4 S$$

6.5 caso particolare con soluzione analitica

Nella regione ideale quindi come equazione differenziale abbiamo

$$B_0(\psi'' - k^2\psi) = B_0''\psi$$

esiste una possibilità che permette di trovare una soluzione analitica: imponendo che

$$B_0(x) = \tanh(x)$$

si trova

$$\psi_{\pm} = e^{\mp kx} [1 \pm \frac{\tanh(x)}{k}]$$

la notazione è un pochino buffa e ci dice che la funzione è definita a tratti, con un pezzo che vale per le x negative e un pezzo che vale per le x positive. Questa funzione è continua in tutto il dominio (in particolare esiste finito il valore $\psi(0) = 1 \forall k$ ma ha un punto angoloso in zero pertanto la derivata diverge in 0, con un asintoto che va in su e un asintoto che va in giù).

$$\psi'_{\pm} = \mp k\psi_{\pm} \pm \frac{e^{\mp kx}}{k} \cosh^2(x)$$

Definiamo un valore che quantifica quanto la derivata è fottuta. è una misura di quanto varia la discontinuità a seconda della lunghezza d'onda.

$$\Delta' = \frac{d}{dx} \ln \psi \Big|_{0-}^{0+} = \frac{\psi'(0^+) - \psi'(0^-)}{\psi(0)}$$

$$\Delta' = -k + \frac{1}{k} - (+k - \frac{1}{k}) = 2(\frac{1}{k} - k)$$

Quando Δ' è negativo il sistema è stabile, quando Δ' è positivo, è possibile che il sistema vada verso un'instabilità. non ho capito cosa ha detto il professore a rigurardo dell' Δ' poco negativo che evolve molto lentamente.

in ogni caso $\Delta' < 0 \iff k > \frac{1}{k} \iff k$ grandi, ovvero piccole λ .

7 Onde ion acustic

Onde elettrostatiche di tipo austico, ovviamente si possono ricavare da vlasov ma noi non lo facciamo (e ppe questo non avremo il LandauDamping).

Noi le ricaviamo con il modello a due fluidi, che va dall'MHD alle onde di plasma. se partissimo direttamente dall'MHD non troveremmo le onde di plasma, ma noi invece le troveremo.

$$\vec{E}_0 = 0 \implies \vec{E} = \vec{E}_1$$

abbiamo un plasma non magnetizzato

$$\vec{B}_0 = 0 \implies \vec{B} = \vec{b}$$

$$\vec{u}_0 = 0 \implies \vec{u} = \vec{u}_1$$

il termine $\vec{u}_1 \times \vec{b}$ è del second'ordine ed è pertanto per noi nullo, significa che la nostra onda è polarizzata longitudinalmente e non abbiamo onde elettromagnetiche che avrebbero bisogno del mampo magnetico,

$$\vec{E} \parallel \vec{u} \parallel \vec{k}$$

La velocità di fase dell'onda ionacustic è molto minore delle velocità termiche in gioco.

$$v_f \ll v_{th,I} \ll v_{th,e}$$

i tempi scale sono tali da avere una risposta inerziale (Adiabatica) da parte degli ioni e una risposta termica (isotermia) da parte degli elettronni. questo implica che devo usare due politropiche diverse per le due specie.

7.1 Equazioni di base

$$n_\alpha = n_{0\alpha} + n_{1\alpha} \quad P_\alpha = P_{0\alpha} + P_{1\alpha} \quad \alpha = I, e$$

equazione di continuità

$$\partial_t n_\alpha + \nabla \cdot (n_\alpha \vec{u}_\alpha) = 0$$

linearizzo

$$\partial_t n_{1\alpha} + \nabla \cdot (n_{0\alpha} \vec{u}_{1\alpha}) = 0$$

equazione del moto

$$m_\alpha n_{0\alpha} \partial_t \vec{u}_{1\alpha} = -\nabla P_{1\alpha} + n_{0\alpha} q_\alpha (\vec{E} + \frac{\vec{u}_{1\alpha} \times \vec{b}}{c})^0$$

chiusura politropica

La scriviamo già linearizzata

$$P_{1\alpha} = \gamma_\alpha \frac{P_{0\alpha}}{n_{0\alpha}} n_{1\alpha}$$

7.2 soluzione onda piana e relazione di dispersione

Cerco una soluzione ad onda piana

$$\sim e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

trovo un sistema di equazioni che se risolte mi danno la relazione di dispersione.
Riusulta utile definire una sorta di "velocità del suono per la specifica specie"

$$v_{0\alpha}^2 = \frac{\gamma_\alpha P_{0\alpha}}{m_\alpha n_{0\alpha}}$$

Tolgo i segni di vettore perché il nostro problema adesso è unidimensionale.

$$\begin{cases} -in_{1\alpha} - in_{0\alpha} ku_\alpha = 0 \\ -i\omega m_\alpha n_{0\alpha} u_\alpha = -iP_{1\alpha} k + n_{0\alpha} q_\alpha E \\ P_{1\alpha} = \gamma_\alpha \frac{P_{0\alpha}}{n_{0\alpha}} n_{1\alpha} \end{cases} \implies u_\alpha = \frac{iq_\alpha}{m_\alpha} \frac{\omega}{\omega^2 - k^2 v_{0\alpha}^2} E$$

adesso che abbiamo le velocità possiamo ricavare le correnti moltiplicando ogni equazione per $n_\alpha q_\alpha$ e summando le α

$$\sigma E = J = \sum_\alpha J_\alpha = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha u_\alpha$$

ne segue che

$$\sigma = \sum_a \frac{in_\alpha q_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{\omega}{\omega^2 - k^2 v_{0\alpha}^2}$$

$$\text{esplicito la dipendenza dalla frequenza di plasma } \omega_{p\alpha}^2 = \frac{4\pi n_0 \alpha q_\alpha^2}{m_\alpha}$$

$$\sigma = \frac{i}{4\pi\omega} \sum_\alpha \frac{\omega_{p,\alpha}^2 \omega^2}{\omega^2 - k^2 v_{0\alpha}^2}$$

d'altra parte

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma$$

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_{pI}^2}{\omega^2 - k^2 v_{0I}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k^2 v_{0e}^2}$$

si vede subito che nel limite di plasma freddo si può trascurare il termine degli ioni e vengono fuori le onde di plasma freddo con correzione termica, come è molto bene che sia.

Per trovare la relazione generale imponiamo che ci troviamo in un modo normale che è quindi quando $\epsilon = 0$ trovo la relazione di dispersione risolvendo l'equazione di secondo grado. devo ricordarmi che $\omega_{pI}^2 \sim \frac{1}{m_I} \ll \omega_{pe}^2 \sim \frac{1}{m_e}$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left((k^2(v_{0I}^2 + v_{0e}^2) + \omega_{pe}^2) \left\{ 1 \pm \left[1 - \frac{2k^2 v_{0e}^2 \omega_{pI}^2 + v_{0I}^2 \omega_{pe}^2 + k^2 v_{0I}^2 v_{0e}^2}{(k^2(v_{0I}^2 + v_{0e}^2) + \omega_{pe}^2)^2} \right] \right\} \right)$$

Per procedere più agevolmente poniamo $\omega^2 = \frac{A}{2}[1 \pm (1 - B)^{\frac{1}{2}}]$. Vediamo che B è piccolo $B \sim \frac{m_e}{m_I}$ e quindi possiamo taylorizzare. (per intenderci il numeratore va come $\frac{1}{m_I m_e}$ e il denominatore va come $\frac{1}{m_e^2}$.)

$$\omega^2 \sim \frac{A}{2}[1 \pm (1 - \frac{B}{2})]$$

Otteniamo due soluzioni, una è ovviamente la soluzione delle onde di plasma con correzione termica, questo perché stiamo considerando il modello a due fluidi in cui le onde di plasma sono previste.

$$\omega_{th}^2 = A = k^2 v_{0e}^2 + \omega_{pe}^2$$

l'altra soluzione invece è quella che ci interessa:

$$\omega_{IA}^2 = \frac{AB}{2}$$

$$\omega_{IA}^2 = k^2 \frac{\omega_{pe}^2 v_{0I}^2 + \omega_{pI}^2 v_{0e}^2 + k^2 v_{0I}^2 v_{0e}^2}{\omega^2 + k^2 v_{0e}^2}$$

ora metto in evidenza v_{0e}^2 sopra e sotto e poi riconosco la lunghezza di debye

$$\lambda_{D\alpha}^2 = \frac{\omega_{p\alpha}^2}{v_{th,\alpha}^2}, \quad \frac{\lambda_{De}^2}{\lambda_{DI}^2} = \frac{T_e}{T_I}$$

Ho anche una relazione vagamente misteriosa che spero di riuscire a motivare studiando

$$v_{0I}^2 = \frac{\gamma_I P_{0I}}{m_I n_{0I}} = \frac{\gamma_I T_I}{m_I}$$

RELAZIONE DI DISPERSIONE DELLE ONDE MAGNETOSONORE

$$\frac{\omega_{IA}^2}{k^2} = v_{0I}^2 \frac{k^2 + \frac{1}{\lambda_{De}^2} + \frac{1}{\lambda_{DI}^2}}{k^2 + \frac{1}{\lambda_{De}^2}}$$

Regimi Riconosciamo 3 regimi a seconda dell'ordinamento della lunghezza d'onda.

1.

$$k^2 \ll \frac{1}{\lambda_{De}^2} \iff \lambda^2 \gg \lambda_{De}^2, \quad k^2 \ll \frac{1}{\lambda_{DI}^2} \iff \lambda^2 \gg \lambda_{DI}^2$$

Questa relazione non ci dice in che maniera sono ordinate le λ_D e di conseguenza le T . In linea di principio è possibile che siano qualsiasi.

2. Oscillazioni di plasma degli ioni

$$k^2 \gg \frac{1}{\lambda_{De}^2} \iff \lambda^2 \ll \lambda_{De}^2, \quad k^2 \ll \frac{1}{\lambda_{DI}^2} \iff \lambda^2 \gg \lambda_{DI}^2$$

$$\begin{aligned} \lambda_{De}^2 \ll \lambda^2 \ll \lambda_{DI}^2 &\implies T_I \gg T_e \\ \frac{\omega^2}{k^2} = v_{0I}^2 \left(1 + \frac{\lambda_{De}^2}{\lambda_{DI}^2}\right) &= \frac{\gamma_I}{m_I} T_I \left(\frac{T_e + T_I}{T_I}\right) \\ \boxed{\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\gamma_I}{m_I} (T_e + T_I)} \end{aligned}$$

Questa può essere vista come una sorta di velocità del suono, infatti queste sono le tipiche onde ionacustiche. Si vede che l'inerzia è data dagli ioni nel senso che compare m_I mentre la risposta termica è data da entrambi, anche se quando $T_I \sim T_e$ tipicamente avviene il Dumping di Landau e l'onda non si propaga (a meno che non si faccia una forzatura). Invece le onde che sopravvivono sono quelle con $T_e \gg T_i$ "Se poi ho un forzaggio sono fuori dal regime lineare perché cambio la funzione di distribuzione e cambia anche la risposta dielettrica"

3.

$$k^2 \gg \frac{1}{\lambda_{De}^2} \iff \lambda^2 \ll \lambda_{De}^2, \quad k^2 \gg \frac{1}{\lambda_{DI}^2} \iff \lambda^2 \ll \lambda_{DI}^2$$

Questo caso è praticamente insensato perché siamo al di sotto delle lunghezze di Debye e praticamente non possiamo nemmeno dire di avere a che fare con un plasma. In questo caso la soluzione ha come relazione di dispersione una relazione analoga alle onde di plasma, ma per gli ioni.

$$\omega^2 = \omega_{pI}^2 + k^2 v_{0I}^2$$

Alla fine della fiera quando si parla di onde IonAcoustic si parla del caso uno e tendenzialmente con $T_e \gg T_i$. Tendenzialmente nel caso delle onde IonAcoustic si ha $v_f \gg v_{th,I}$ (e quindi gli ioni hanno una risposta adiabatica) mentre $v_f \ll v_{th,e}$ (e quindi gli elettroni hanno una risposta isotermica). Nel caso invece in cui $T_I \sim T_e$ siamo nelle condizioni in cui tendenzialmente l'onda non sopravvive perché avviene il Dumping di Landau. Se l'onda viene sforzata con un intervento esterno la distribuzione si appiattisce finché non smette di avvenire il Dumping

8 Dumping di Landau

Questo è un caso di interazione Onda-particella, abbiamo una distribuzione di energia/velocità delle particelle f non necessariamente maxwelliana, basta che abbia una monotonicità locale, tipicamente ci interessa il caso in cui è monotona decrescente (se è monotona crescente avviene il fenomeno opposto LD^{-1}).

La velocità di fase v_f dell'onda (qualsiasi tra tutte quelle dell'inventario dei plasmi) per qualche caso si trova a sovrapporsi ad f ovvero si trova in risonanza con la distribuzione e ci sono delle particelle che viaggiano localmente a velocità $v \sim v_f$. In altre parole alcune particelle viaggeranno assieme all'onda nello stesso verso e con la stessa velocità e quindi vedono un campo elettrostatico e accelerano; in media questo effetto si vede nel caso in cui ci sono un pochino più di particelle con $v < v_f$ rispetto alle particelle con $v > v_f$ presenti in minor numero: sono di più gli elettroni che accelerano rispetto a quelli che frenano. In un plasma magnetizzato, nella direzione del campo, le onde possono propagarsi sempre e non avviene il Dumping.

Ci occupiamo quindi del caso in cui il plasma non è magnetizzato.

Per trovare matematicamente questo effetto è necessario considerare l'equazione cinetica del plasma, ovvero l'equazione di Vlasov. Ciò è molto cool perché non è necessaria una chiusura, Inoltre nell'equazione

di Vlasov l'entropia è un'invariante $\frac{d}{dt}(f \ln f) = \frac{dS}{dt} = 0$.

"*La isolinee della funzione di distribuzione possono venire spiegazzate stretchate spostate ma non possono venire strappate connesse e riconnesse*".

Le isolinee sono più dense nello spazio delle fasi nelle regioni in cui si ha un maggiore gradiente della distribuzione. se abbiamo un effetto tipo vortice in v_f allora da quelle parti comincia l'avvoltoamento dell'isolinea e lì si ha il cambio di segno della velocità nel sistema di riferimento dell'onda (se stiamo parlando di trapping)

Il Dumping di Landau viene chiamato tradizionalmente *Dumping, (ovvero smorzamento)* Però non è il tipico smorzamento perché l'onda non diventa calore "*non avviene la termalizzazione*", quindi enunciamo alcuni dogmi sul Dumping di landau:

- smorzamento \neq dissipazione
- NON è l'equivalente di un attrito
- NON è l'equivalente di una resistività
- NON è l'equivalente di una viscosità
- NON viene prodotto calore
- NON aumente l'entropia
- Il dumping di Landau è un trasferimento di energia dall'onda alle particelle
- Questa energia può venire recuperata (anche se non al 100%)

ja nii on.

8.1 Equazioni di partenza e condizioni

- Condizioni generali:

Il plasma non è magnetizzato

$$\vec{B}_0 = 0 \quad \vec{B}_1 = 0 \quad \vec{B} = 0$$

Il campo elettrico medio è nullo, ovvero del campo elettrico abbiamo solo la fluttuazione, vale che il campo elettrico è il gradiente di un potenziale.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 = -\vec{\nabla}\phi$$

La distribuzione è di una specie $a = e, I$ è $f_a = f_{a0}(\vec{v}) + f_{a1}(\vec{x}, \vec{v}, t)$, con f_{a0} che non dipende da altro che \vec{v} , non ho ben capito perché...

La distribuzione è pari $f(v) = f(-v)$

- equazione di Vlasov

$$\frac{\partial}{\partial t} f_a + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} f_a + \frac{q_a}{m_a} \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f_a = 0$$

Quando linearizzo i primi termini è tutto abbastanza naturale: f_{0a} non dipende né da \vec{x} né da t e quindi rimane solamente il termine f_{a1} . Per quanto riguarda il termine $\vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f_a$, le cose sono più delicate;

è vero che all'istante iniziale

$$\frac{\partial f_{a0}}{\partial v} \gg \frac{\partial f_{a1}}{\partial v}$$

ma i gradienti ∂_v evolvono nel tempo e può arrivare un momento in cui la nostra linearizzazione non vale più e i gradienti evolvono in maniera da avere

$$\frac{\partial f_{a0}}{\partial v} \sim \frac{\partial f_{a1}}{\partial v}$$

Questo può avvenire dopo un certo tempo *di intrappolamento* τ_t .

In ogni caso, quando vale la linearizzazione, abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{a1} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} f_{a1} + \frac{q_a}{m_a} \vec{E}_1 \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f_{a0} = 0$$

- equazione di poisson

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi e(n_I - n_e)$$

Questa equazione è già linearizzata perché $\vec{E} = \vec{E}_1$ e $n_{0e} = n_{0I}$.

$$-\nabla^2 \phi = 4\pi e(n_I - n_e)$$

8.1.1 intrappolamento e non linearità

Prendiamo un'onda che si propaga con velocità di fase $v_f \sim \omega_p/k$, significa che ho un campo elettrico lungo una certa direzione

$$E = \hat{E} \sin(kx - \omega_p t)$$

Se un elettrone viaggia con $v \sim v_f$ lungo la stessa direzione del campo, vede un *campo elettrostatico* e subisce un'accelerazione. Se ci mettiamo nel SDR dell'onda possiamo dire che l'elettrone si trova in una buca di potenziale e oscilla con un moto armonico rimanendo "intrappolato".

$$m\ddot{x} = -e\hat{E} \sin kx \simeq -e\hat{E}kx$$

$$\begin{aligned}\tau_t &= \sqrt{\frac{m}{e\hat{E}k}} \\ \tau_L &= \frac{1}{k^3 \lambda_D^3} e^{-(\frac{3}{2} + \frac{1}{2k^2 \lambda_D^2})}\end{aligned}$$

Questa cosa succede per quegli elettroni che erano un pochino più veloci di v_f che decelerano fino a sincronizzarsi e succede a quegli elettroni un pochino più lenti di v_f che accelerano fino a sincronizzarsi con l'onda. gli elettroni sincronizzati oscillano attorno alla buca di potenziale, l'oscillazione (se osservata nel SDR dell'onda) implica addirittura un cambio del verso della velocità, capiamo subito che la fluttuazione del campo EM non genera solo una fluttuazioncina nella distribuzione, genera un grande cambiamento, tant'è che alcune particelle cambiano verso e passano da v a $-v$. Il numero di elettroni intrappolati aumenta nel tempo. la distribuzione in velocità viene modificata e si vede un appiattimento della distribuzione nell'intorno di v_f . Il tempo che ci mette a comparire questo appiattimento è τ_t . Quando questo accade non vale più la nostra analisi lineare. la linearizzazione delle equazioni vale quindi entro un limite fisico dato dal tempo di intrappolamento.

il tempo caratteristico della dinamica è τ_D ($\sim \omega_p^{-1}$)

il tempo caratteristico dello smorzamento di landau è τ_L

è rilevante l'effetto dell'intrappolamento solamente nel caso in cui $\tau_D < \tau_t < \tau_L$, perchè l'onda fa tempo ad acchiappare abbastanza elettroni da cambiare la distribuzione appiattendola e quindi sopravvivere. il plasma permette all'onda di propagarsi perchè perdiamo la locale monotonicità della distribuzione

Ovviamente Se $\tau_L < \tau_t$ l'onda viene uccisa prima che l'intrappolamento possa avere qualche effetto.

Inoltre il tempo di trapping dipende dall'ampiezza dell'onda, quindi è assolutamente necessario che l'intrappolamento avvenga prima che lo smorzamento abbia agito.

Possiamo vedere lo smorzamento anche considerando l'equazione di Vlasov 1D (perchè siamo in asse con l'oscillazione) linearizzata (infatti è solo una considerazione qualitativa)

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{e\hat{E}}{m} \sin(kx - \omega t) \frac{\partial f_0}{\partial v}$$

la soluzione è presto detta... e a dire la verità non ce ne frega molto, magari è roba da seminario

$$f_1 = f_1(v, t=0) \cos(kx - kvt) - \frac{e\hat{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \left[\frac{\cos(kx - \omega_e t)}{kv - \omega_e} - \frac{\cos(kx - kvt)}{kv - \omega_e} \right]$$

in ogni caso noi vogliamo sviluppare attorno a $v \sim v_f$

$$\partial_v f_1 \approx \frac{ek\hat{E}}{m} t^2 \partial_v f_0 \frac{\cos(kx - \omega_e t)}{2} \propto t^2$$

vediamo che succede un gran problema, perchè la nostra ipotesi NON è $f_0 \gg f_1$ bensì

$$\left| \frac{\partial f_0}{\partial v} \right| \gg \left| \frac{\partial f_1}{\partial v} \right|$$

e vediamo che la derivata del temrime f_1 cresce quadraticamente collo scorrere del tempo in un tempo $\tau_t \sim \sqrt{\frac{m}{e\hat{E}k}}$ diventa di ordine di 1, e infatti ben sappiamo che l'interpolamento modifica la funzione di distribuzione, non vale la linearità , è tutto un disastro...

"il trapping è un fenomeno cinetico non dissipativo con cui andiamo a saturare la cascata di energia verso le scale più piccole"

"In genere è la dissipazione che bilancia l'energia iniettata alle scale più piccole, il trapping in qualche maniera si sostituisce alla dissipazione, il sistema usa in questo modo la sua energia"

"Un altro esempio di fenomeno non dissipativo: ho il termine dispersivo va come k^3 a un certo punto della cascata arrivo a k abbastanza grossi che il sistema è in grado di generare un onda grande ed in grado di autosostenersi che butta via l'energia senza andare a scale più piccole. Questo è detto meccanismo di Korteweg-De Vries"

Si genera un solitone...

8.2 Trasformata di fourier

La via utilizzata più spesso nei libri è quella di fare una trasformata di laplace, che se ho capito bene dà come soluzione un transiente + un modo normale che sopravvive più a lungo (al quale noi siamo interessati), in ogni caso noi facciamo anzi la trasformata di fourier andando a cercare direttamente il modo normale "poco smorzato " che corrisponde ad un polo lontano. spero che sarà più chiaro nella prossima lezione.

cerchiamo i temrini che vanno come $\sim e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$ e questi termini avranno una parte immaginaria e una parte reale, la parte reale rappresenta l'oscillazione mentre la parte immaginaria rappresenta lo smorzamento.

$$f_1 = \sum_k f_{1k} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}; \quad \phi = \sum_k \phi_k e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

scrivo anche le concentrazioni in temrini della distribuzione (mi interessano solamente i termini di fluttuazione per via della quasineutralità del plasma) e questa cosa è vera modo per modo (k per k) anche attraverso la trasformata.

$$n_k = \int f_{1k} d\vec{v}$$

$$\text{eq Vlasov: } -i\omega f_{ak} + i\vec{k} \cdot \vec{v} f_{ak} - \frac{-iq_a}{m_a} (\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_v) f_{a0} \phi_k = 0$$

Da questa trovo f_k :

$$f_k = - \sum_a \frac{q_a}{m_a} \frac{(\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_v) f_{a0}}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})} \phi_k$$

Non ho capito come mai risulta che $\vec{k} \parallel \vec{E}$.

$$\text{eq Poisson: } -(ik)^2 \phi_k = 4\pi e \int (f_{1k} - f_{ek}) d\vec{v}$$

La soluzione del sistema di equazioni è

$$k^2 \phi_k = -4\pi e \sum_a \frac{q_a}{m_a} \int \frac{(k \cdot \vec{\nabla}_v) f_{0a}}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})} d\vec{v} \phi_k$$

$$k^2 = -4\pi e \sum_a \frac{q_a}{m_a} \int \frac{(k \cdot \vec{\nabla}_v) f_{0a}}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})} d\vec{v}$$

8.2.1 Onda di plasma a ioni fissi

consideriamo un'onda di plasma con frequenza tale che gli ioni non fanno tempo di reagire, quindi il contributo degli ioni si ha solamente in n_0 per mantenere ovviamente la quasineutralità. Se non facessimo questa assunzione troveremmo una soluzione con anche le onde IA, (magari ci proverò in futuro).

Se l'onda di plasma si propaga in direzione x , posso integrare la distribuzione in dv_y e dv_z in quanto

il termine $(\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_v)$ non ha nulla a che vedere con quelle direzioni. L'integrale praticamente diventa un integrale 1D perché l'onda si propaga in un'unica direzione.

$$\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_v \rightarrow k\partial_u, \quad u \equiv v_x$$

Conviene definire la funzione di distribuzione normalizzata a 1 in termini di n_0 , perchè riconosco che ho, a meno di n_0 , la frequenza di plasma degli elettroni ω_e a moltiplicare l'integrale

$$g(u) = \frac{f(u)}{n_0} \quad \int f(u)du = n_0 \rightarrow \int g(u)du = 1$$

$$\phi_k = -\frac{\omega_e^2}{k^2} \int \frac{(\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_v)f_{0e}}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})} d\vec{v} \phi_k$$

$$1 + \frac{\omega_e^2}{k^2} \int \frac{k\partial_u g(u)}{k(\frac{\omega}{k} - u)} \partial_u = 0$$

8.2.2 Regime di propagazione senza dumping

Prendiamo un'onda con $v_f \gg v_{th}$, in questo caso la velocità di fase non si sovrappone alla distribuzione e possiamo dire che non ci sono elettroni che si muovono localmente con velocità $u \sim v_{th}$, ovviamente in questo caso la derivata della distribuzione è a maggior ragione nulla. Fisicamente risulta intuitivo che siamo decisamente nel caso in cui non si ha dumping.

Matematicamente questo significa che in corrispondenza della singolarità

$$\frac{\omega}{k} - u = 0$$

che porterebbe ad una divergenza, si ha una soppressione maggiore al numeratore e al netto di tutto il numeratore è uno zero più zero del denominatore e alla fine della fiera l'integrale non ha divergenze. A questo punto rimane solo da risolvere il nostro integralazzo:

$$\int \frac{\partial_u g(u)}{(\frac{\omega}{k} - u)^2} \partial_u$$

integro per parti e quando devo valutare il prodotto tra le primitive ai bordi del dominio posso mettere tutto a zero, ovviamente non ho particelle con velocità infinita!.

$$\int \frac{\partial_u g(u)}{(\frac{\omega}{k} - u)^2} \partial_u = \frac{g(u)}{(\frac{\omega}{k} - u)^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int \frac{g(u)}{(\frac{\omega}{k} - u)^2} du$$

Ora spero di avere capito da dove viene questa espansione...

ci dobbiamo occupare del secondo termine, la distribuzione conta qualcosa nella zona $u \ll \omega/k$, questo equivale a dire che possiamo espandere il denominatore attorno a $u = 0$.

$$\frac{1}{(\frac{\omega}{k} - u)^2} \simeq \frac{1}{(\frac{\omega}{k})^2} + \frac{2u}{(\frac{\omega}{k})^3} + \frac{3u^2}{(\frac{\omega}{k})^4} + \dots$$

Ora uso il fatto che la distribuzione è pari per cancellare il termine dispari nell'integrale

$$1 - \frac{\omega_e^2}{k^2} \int \frac{\partial_u g(u)}{(\frac{\omega}{k} - u)^2} \partial_u = 1 - \frac{\omega_e^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \left[\frac{k^2}{\omega^2} + \frac{2uk^3}{\omega^3} + \frac{3u^2k^4}{\omega^4} \right] du$$

Uso il fatto che la distribuzione è normalizzata ad 1 e anche che vale che (dovrei dimostrarlo)

$$\int g(u)du = 1, \quad \int g(u)u^2du = v_{th}^2$$

Troviamo la relazione di dispersione.

$$1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2} - \frac{3k^2v_{th}^2\omega_e^2}{\omega^4} = 0$$

Questa equazione ha due soluzioni ma solamente una è fisica (quella col +)

ricordiamoci sempre che $\frac{v_{th}^2}{\omega_e^2/k^2} \ll 1 \iff v_f \gg v_{th}$

$$\omega^2 = \frac{\omega_e^2 \pm \sqrt{\omega_e^4 \left[1 + \frac{12k^2 v_{th}^2}{\omega_e^2} \right]}}{2} \simeq \frac{\omega_e^2 \pm \omega_e^2 \left[1 + \frac{6k^2 v_{th}^2}{\omega_e^2} \right]}{2}$$

Questo risultato è molto importante perché analogo con dumping.

$$\boxed{\omega_+^2 = \omega_e^2 + 3k^2 v_{th}^2}$$

è proprio il caso di confrontare questo risultato con la relazione di dispersione ottenuta con le equazioni fluide chiuse con una politropica

$$\omega^2 = \omega_e + \gamma k^2 v_{th}^2$$

il professore ci dice che ci sono alcune cose che è bene notare

1. L'idea di utilizzare una chiusura politropica non è poi così folle.
2. molti eminentissimi coglioni dicono che questo $\gamma = 3$ era previsto perché è il coefficiente tipico per un gas monoatomico... califano invece dice che è soltanto una coincidenza senza un particolare significato profondo.
3. non ho mica ben capito cosa c'entra, da dove viene fuori ... btw, "alla maggior parte degli stimoli, I plasmi reagiscono in prima approssimazione alla frequenza di plasma indipendentemente da k ".

8.2.3 regime con dumping

Ripartiamo dalla nostra relazione del dielettrico, se $\epsilon(k, \omega) = 0$ allora abbiamo un modo normale, in generale abbiamo

$$\boxed{\epsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_e^2}{k^2} \int \frac{\partial_u g(u)}{(u - \frac{\omega}{k})} du}$$

Ricordiamoci sempre che stiamo facendo la TF cercando il modo che sopravvive più a lungo che corrisponde ad un *polo lontano* con $\omega_i \ll \omega_r$, praticamente stiamo dicendo che il dumping c'è ma poco. Per contestualizzare bene quello che stavamo facendo prima il polo c'era lo stesso ma era in una zona dove il dumping non avviene per come è popolata la distribuzione.

Sviluppiamo il nostro dielettrico attorno a ω_r , proprio considerando $\omega_i \ll \omega_r$.

$$\epsilon(k, \omega) \simeq \epsilon_r(k, \omega_r) + i\epsilon_i(k, \omega_r) + i\omega_i \frac{\partial \epsilon_r}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_r} - \omega_i \frac{\partial \epsilon_i}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_r}$$

impongo che siano nulle sia la parte reale che la parte immaginaria (per trovare il modo normale). Dalla parte immaginaria ottengo

$$\epsilon_i = -\omega_i \frac{\partial \epsilon_r}{\partial \omega} \Big|_{\omega_r} \implies \epsilon_i \sim \omega_i$$

Dalla parte reale emerge che il termine di derivata va come $\sim \omega_i^2$ e di conseguenza lo posso trascurare, così come ϵ_r . In generale la parte reale è zero, a meno di correzioni del second'ordine, che non ci interessano.

$$\omega_i = \frac{-\epsilon_i}{\frac{\partial \epsilon_r}{\partial \omega}}$$

comunque a questo punto abbiamo un integrale complesso da risolvere con il metodone2. Abbiamo un polo molto vicino all'asse dei reali e noi ci giriamo attorno, poi facciamo il giro circolare con $|\omega| \rightarrow \infty$ che fa zero.

Bisogna utilizzare la formula di PLEMELJ

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x)$$

$$\frac{1}{u-a} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{u-a}\right) + i\pi\delta(u-a)$$

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{u-a}\right) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{a-\epsilon} \frac{f(u)}{u-a} du + \int_{a+\epsilon}^{\infty} \frac{f(u)}{u-a} du \right]$$

Questo integrale ha la proprietà che le due divergenze sono uguali ma opposte e quindi si annullano a vicenda. In questo caso non è la distribuzione vuota ad ammazzare l'integrale ma è questa sottigliezza matematica, però l'effetto finale è lo stesso, è come se non avessi elettroni nel polo.

Questo mi permette di andare avanti nel calcolo come nel caso precedente assumendo che $v_f^2 \gg v_{th}^2$ (ovvero $v_f > v_{th}$) e trovare un risultato completamente analogo

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2} - \frac{3k^2 v_{th}^2 \omega_e^2}{\omega^4}$$

Questo è un caso un pochino borderline "*fa venire mal di pancia*" perché non siamo nelle condizioni più favorevoli per avere il dumping e la risonanza avviene con "pochi" elettroni. Purtroppo il calcolo dell'integrale in maniera analitica al di fuori di questa assunzione è molto complicato, e non solo... in un regime di forte smorzamento di landau ($\omega/k \sim v_{th}$) non vale la linearizzazione assunta inizialmente e quindi va tutto il conto a ramengo.

Nonostante ciò va detto che l'integrazione numerica di Vlasov porta a risultati sorprendentemente coerenti (nell'ordine del per cento)

Ora se faccio la derivata (calcolata in $\omega = \omega_r$) trovo due termini, uno dei quali è trascurabile in quanto $v_f^2 \gg v_{th}^2$.

$$\left. \frac{\partial \epsilon_r}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_r} = -2 \frac{\omega_e^2}{\omega_r^3} - \frac{12k^2 v_{th}^2 \omega_e^2}{\cancel{\omega_r^5}} \xrightarrow{0}$$

e a questo punto posso ricucire insieme tutti quanti i pezzi e trovare la parte immaginaria della frequenza, che poi sarebbe il coefficiente di smorzamento.

Bisogna gestire correttamente la δ che mi fa calcolare la funzione di distribuzione in $u = \omega_r/k$.

$$\boxed{\omega_i = \frac{-\epsilon_i}{\partial_\omega \epsilon_r} = \frac{\pi \omega_e^3}{2k^2} \partial_u g(u) \Big|_{u=\omega_r/k}}$$

8.3 Soluzione con distribuzione generica

$$\boxed{\omega_i = \frac{-\epsilon_i}{\partial_\omega \epsilon_r} = \frac{\pi \omega_e^3}{2k^2} \partial_u g(u) \Big|_{u=\omega_r/k}}$$

Questa è la parte immaginaria della frequenza ottenuta con la FT, se teniamo presente che stavamo cercando una soluzione con $e^{-i(\omega_r+i\omega_i)t}$ si vede che la parte immaginaria costituisce uno smorzamento (o un'amplificazione) esponenziale $\sim e^{\omega_i t}$.

In particolare ci piace molto il fatto che $\omega_i \propto \partial_u g(u)$ sicché quando $g(u)$ è decrescente si ha lo smorzamento, quando $g(u)$ cresce si ha LD^{-1} mentre non succede niente di niente se la distribuzione è piatta. Questo intuitivamente ci piace anche se pensiamo al fenomeno dell'intrappolamento anche se cade l'ipotesi della linearizzazione.

8.4 Soluzione con maxwelliana

"Non ho bisogno di una maxwelliana per avere Dumping, ma ho bisogno di una maxwelliana per fare il conto" scansoequivoci la maxwelliana è siffatta:

$$f = \frac{n_0}{\sqrt{(2\pi)^3 v_{th}^3}} e^{-\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2v_{th}^2}}$$

La nostra funzione di distribuzione in particolare è normalizzata e 1D

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} v_{th}} e^{-\frac{u^2}{2v_{th}^2}}$$

Da cui si trova agevolmente la parte immaginaria della frequenza che corrisponde al dumping.

$$\boxed{\omega_i = -\omega_e \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{(k\lambda_D)^3} e^{-\frac{3+k^2\lambda_D^2}{2}}}$$

Si vede che come atteso lo smorzamento scompare completamente per $k^2\lambda_D \rightarrow 0$.

9 Equilibrio MHD

Allora quando si parla di equilibrio ci permettiamo di dire che stiamo considerando il caso in cui $\vec{u} = 0$ e $\partial_t u = 0$.

Quel che non è vero, invece è che $\partial_t \vec{B} = 0$!. Anzi, l'equazione di Faraday in questo caso diventa un'equazione di diffusione del campo magnetico, è una sirta di dissipazione di cui abbiamo bisogno, anche noi metodi numerici della riconnesione hamiltoniana serve una dissipazione altrimenti il codice esplode accumulando energia magnetica alla più piccola scala che viene risolta dal codice ... questa cosa del codice mi torna abbastanza ma non ho capito invece in che senso ne abbiamo bisogno noi ora(?)... in ogni caso deve passare il messaggio che non c'è evoluzione dell'equilibrio ma su tempi molto più lunghi dei tempi dinamici avviene comunque unaq diffusione.

9.1 equazione della dinamica all'equilibrio

$$\nabla P = \frac{1}{4\pi} [(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}]$$

All'equilibrio le superfici isobare seguono le linee di campo magnetico e della corrente.

9.2 Equazione di Faraday

come già visto, assume la forma di un'equazione di diffusione.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \frac{c^2}{4\pi} \nabla^2 \vec{B}$$

10 Seminario sui plasmi spaziali

il professore Henry osservatore di nizza e centro plasmi di orleans. Vediamo come mai i plasmi spaziali sono così importanti dal punto di vista osservativo. Vediamo un'introduzione a come fare misure nello spazio. Perché fare misure di plasmi nello spazio?

1. in astrofisica si osservano onde EM neutrini e inde Grav, la fisica spaziale è la branca dell'astrofisica in cui le osservazioni si fanno in situ. Una delle cose interessanti su mercurio per esempio è che le particelle cariche vengono sparate direttamente sulla superficie non avendo l'atmosfera. la fisica spaziale evolve con la tecnologia con la capacità di portare in giro gli strumenti.
2. Quando vogliamo fare fisica fondamentale dobbiamo confrontare la teoria con la realtà, abbiamo il grosso problema delle collisioni e delle collisioni al bordo che rovinano la fisica. Nello spazio i bordi non ci sono più e poi oltretutto se le dimensioni dello strumento sono più grandi del libero cammino medio si crea turbolenza, ma nello spazio il libero cammino medio è un'unità astronomica. l'unica grandezza caratteristica che scala più o meno come uno strumento è l_D .

Misure del campo magnetico: se abbiamo uno spettro ampio e continuo servono tipicamente strumenti diversi.

- **DC Flux gate magnetometer:** misure istantanea di ampiezza e direzione del campo magnetico, il tempo di questa misura è tale che al massimo si può fare 10hz nelle missioni spaziali questoc'è sempre il principio si basa sull'isteresi dei ferromagnetici. tecnologia molto complessa di cui non staremo a parlare oggi.
- **AC Search coils magnetometer [Hz-MHz]** Questo strumento spesso si ha quando si vogliono fare misure per fisica fondamentale. Si misura la variazione del campo magnetico con una bobina (3 bobine "attenzione al cross talk") con nucleo ferromagnetico che concentra il flusso del campo magnetico, legge di faraday fa una tensione che è il segnale.

Misure del campo elettrico: tendenzialmente si fanno le misure con antenne (con due sfere o due fili) la coppia di robe cmq viene usata come voltmetro, conoscendo la differenza di potenziale viene facilmente il campo elettrico. Nel caso dei fili mettiamo a zero il rotore di B e la corrente è dovuta all'avariazione del campo elettrico. in entrambi i casi si va fino al Mhz. ma le antenne filo sono molto più sensibili, e il problema delle palle è lo shot noise, ma le palle fanno le misure DC. poi c'è il fatto che se devo fare foto allora non si può girare su un asse e i fili non si possono più usare. Le misure di campo elettrico hanno interesse anche per vedere l'accoppiamento tra il plasma e il campo elettromagnetico; oltre la frequenza di ciclotrone k oscilla parallelo al campo magnetico e non abbiamo più segnale siamo in regime elettrostatico, l'altro segnale che invece si ha a frequenze ancora più alte è il segnale alla frequenza di plasma che correla solamente con la densità, questo è il modo più sicuro che abbiamo per misurare la densità.

$$\omega_{pl}^2 \propto \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}$$

Se messo un antenna filo in un plasma, quando siamo ad una distanza più grande della lunghezza di Debye non si vedono gli elettroni più distanti, ma c'è un cilindro di raggio $r < l_D$ in cui gli elettroni che passano vicino all'antenna gli elettroni fanno segnale vengono visti per un tempo scala dell'ordine di $t \sim l_D/v_{th}$ che è poi l'inverso della frequenza di plasma questo è l'altro modo di misurare la densità. Se non ci sono onde nel mezzo le possiamo generare noi. Mando una certa corrente oscillante e magari eccito un autovalore del mezzo modi propri del plasma, provo tutte le frequenze e ogni tanto eccito un modo. tutte le volte che il dielettrico vale zero abbiamo un'onda, una risonanza. La relazione di dispersione delle larmi è

$$\omega(k) = \omega_{pl} \sqrt{1 + \gamma(k\lambda_D)^2} + i\gamma$$

(con $\gamma = 3$ perché è un'adiabatica con un grado di libertà perché sono le onde longitudinali.) il termine immaginario è dovuto allo smorzamento non collisionale di Landau. La misura più precisa che sappiamo fare è tempo o frequenza.

FD faraday cup serve a misurare le funzioni di distribuzione, si mette la griglia ad un certo potenziale davanti al detector, che praticamente filtra le particelle con potenziale maggiore. faremo un flusso di particelle di tipo

$$\Phi = \int_{E_k}^{\infty} f dE$$

Poi ha nominato lo strumento Top Hat che permettono di ottenere una misura già integrata su 2π .

11 Seminario sulla propulsione spaziale

La propulsione elettrica (in realtà, al plasma) è diventata chiave nello scenario della propulsione spaziale, ormai ogni satellite ha a bordo un propulsore al plasma.

Alcuni libri sul tema:

- Dan M. Goebel, Ira Katz, Ioannis G. Mikellides, '*Fundamentals of electric propulsion*', Wiley, 2023;
- Robert G. Jahn, '*Physics of electric propulsion*', Dover Publications, 2006.

11.1 La "Rocket Equation"

L'equazione in una dimensione, nel vuoto, per un satellite o razzo più importante deriva dalla conservazione della quantità di moto:

$$M \frac{dV}{dt} = T = - \frac{dM}{dt} = \dots \quad (17)$$

Se noi integriamo quest'equazione, nel caso più semplice di velocità effettiva di scarico costante, l'equazione di riduce alla forma nota come **Tsiolkovsky Equation**:

$$\int_{V_i}^{V_f} dV = - \int_{M_i}^{M_f} \frac{v_e dM}{M} = \dots$$

Considerando la massa come composta da $M_i = M_d + M_p$, dove M_d è la massa finale del razzo/satellite mentre M_p è la massa del propellente e quindi M_i è la massa del razzo/satellite prima del lancio:

$$\Delta V = I_{sp} g_0 \ln \frac{M_d + M_p}{M_d}$$

...
La potenza minima per produrre un *thrust* $T = \dot{m} v_e$ può essere calcolata come $P_{min} = \frac{1}{2} \dot{m} v_e^2 = \frac{T v_e}{2}$, possiamo definire l'efficienza invece come $\eta = \frac{P_{min}}{P}$

...

11.2 I diversi tipi di propulsione

La propulsione tradizionale è quella chimica, il lanciatore si basa sulla reazione fra due specie, solitamente azoto o ossigeno liquidi con idrogeno liquido, che causano un'espansione gas-dinamica che fornisce così una velocità proporzionale alla radice della temperatura, $v_e \sim \sqrt{T/m_p}$.

Quando si è già in orbita però risulta più conveniente utilizzare un propulsore elettrico, che prenda la sua energia elettrica da pannelli solari o centrali nucleari che forniscono l'energia al propellente per accelerare le particelle, $v_e \sim \sqrt{\epsilon/m_p}$. C'è un contro con la propulsione elettrica, nonostante possiamo dare l'accelerazione che vogliamo alle particelle in questo caso, il tempo in cui questa spinta viene fornita è solitamente ben più lungo rispetto alla propulsione chimica.

11.3 Fondamenti di accelerazione al plasma

$$mn \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = qn(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \vec{\nabla}p + \mathbf{P}_{coll} \quad (18)$$