Motivation

- [[Schätzer]] ist abhängig von Stichprobe
  - Parameter exakt zu schätzen unwahrscheinlich
- Konfidenzintervall
  - Dabei handelt es sich um ein Intervall, das den wahren Wert des Parameters mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ enthält.

Konfidenzintervall für μ

- Betrachten wir $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ und nehmen wir zunächst an, σ^2 wäre **bekannt**. Es gilt

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n) \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

- Seien $\alpha \in (0,1)$ und z_p das p-Quantil der $\mathrm{N}(0,1)$–Verteilung. Aus Symmetriegründen gilt $z_p = -z_{1-p}$. Damit folgt

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha.$$

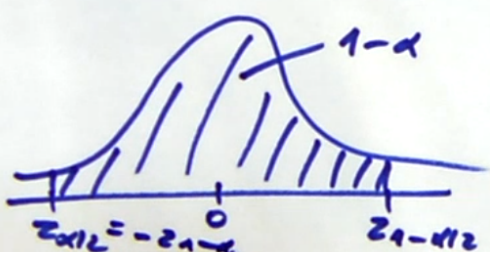
  - Herleitung

$$\mathbb{P}\Big(-z_{1-\alpha/2} \leq \underbrace{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{Z} \leq z_{1-\alpha/2}\Big)$$

$$= F(z_{1-\alpha/2}) - F(\underbrace{-z_{1-\alpha/2}}_{= z_{\alpha/2}})$$

$$= F(z_{1-\alpha/2}) - F(z_{\alpha/2})$$

$$= 1-\alpha/2 - \alpha/2 = 1-\alpha$$

  - 

- $$\mathrm{CI}_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Studentsche t-Verteilung

- Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei σ^2 diesmal **unbekannt** ist.
- Wir schätzen σ^2 mittels $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ und betrachten
  $$T = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu}{S}.$$
- $n - 1$ Freiheitsgraden, $T \sim \mathrm{t}(n-1)$.
- Sei $t_{n-1,p}$ das p-Quantil dieser Verteilung. Analog zum vorherigen Fall erhalten wir für μ diesmal das Konfidenzintervall
  $$\mathrm{CI}_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{X} - t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\,,\ \bar{X} + t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right].$$
  - symmetrisch wie [[Normalverteilung]]
  - $$z_p = -z_{1-p} \qquad \text{und} \qquad t_{n,p} = -t_{n,1-p}.$$

Beispiel

- geg.: 2.7 3.0 2.0 2.7 3.2
  3.2 2.9 2.3 2.2 3.3 normalverteilt

  ges.: 95% Konfidenzintervall für μ.

  $n = 10$ $\alpha = 0.05$ $(1 - 95\%)$

  $\bar{x} = 2.75$ $s \approx 0.46$

  $t_{n-1,1-\alpha/2} = t_{9,0.975} \approx 2.26$

  $CI(\mu) = \left[\bar{x} - t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\,,\ \bar{x} + t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

  $= [2.42,\ 3.08]$

Chi-Quadrat-Verteilung

Konfidenzintervall für σ^2

$X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, diesmal möchten wir ein Konfidenzintervall für die Varianz σ^2 angeben. Ein wichtiges Resultat besagt, dass

$$\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1),$$

also folgt die empirische Varianz einer **Chi–Quadrat–Verteilung** mit $n-1$ Freiheitsgraden. Bezeichnet $q_{n-1,p}$ das p-Quantil dieser Verteilung, dann ist

$$\mathrm{CI}_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S^2}{q_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{q_{n-1,\alpha/2}} \right],$$

ein entsprechendes Konfidenzintervall für σ^2 (Übung).

-

[[T-Score Confidence Interval]] [[Z-Score Confidence Interval]]