

**ACHTUNG: Eine Verbreitung  
der Unterlagen außerhalb der  
Vorlesung bzw. der  
dazugehörigen Übungen ist  
nicht gestattet !**

**Diese Vorlesung basiert auf: Hering et al., „Physik  
für Ingenieure“**

ISSN 0937-7433

ISBN 978-3-642-22568-0

DOI 10.1007/978-3-642-22569-7

Springer Heidelberg Dordrecht London New York

e-ISBN 978-3-642-22569-7

## 3. Thermodynamik

- **Thermodynamische Grundbegriffe**
- **Temperatur**
- **Thermische Ausdehnung**
- **Zustandsgleichung idealer Gase**
- **Hauptsätze der Thermodynamik**
- **Wärmeübertragung**

**Ziel:**

- Beschreibung der Zustände von **kompliziert zusammengesetzten makroskopischen Systemen**
- und deren Änderung infolge der Wechselwirkung mit der Umgebung
- durch eine geringe Anzahl **makroskopischer Variablen** (Druck, Temperatur, thermodynamische Potentiale)

**Phänomenologische Thermodynamik:**

makroskopisch messbare Systemeigenschaften

**Statistische Thermodynamik:**

mikroskopische Betrachtung; Zurückführung auf Wechselwirkungen der Atome und Moleküle.

**3.1.2 Thermodynamische Grundbegriffe****System:**

**Räumlich abgegrenzter Bereich, der herausgelöst von seiner Umgebung betrachtet wird.**

Tabelle 3.1 Thermodynamische Systeme

Bezeichnung des Systems	Kennzeichen der Systemgrenzen	Beispiele
offen	durchlässig für Materie und Energie	Wärmeübertrager, Gasturbine
geschlossen	durchlässig für Energie, undurchlässig für Materie	geschlossener Kühlschrank, Warmwasserheizung, Heißluftmotor
abgeschlossen	undurchlässig für Energie und Materie	verschlossenes Thermosgefäß
adiabat	undurchlässig für Materie und Wärme, durchlässig für mechanische Arbeit	rasche Kompression in einem Gasmotor

Aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

**Mechanik:** Lage eines Punktes durch drei Koordinaten

**Thermodynamik:** Zustand eines Systems durch Zustandsgrößen beschrieben

**Thermische Zustandsgrößen** (direkt messbar)

Druck (p), Volumen (V), Temperatur (T)

**Kalorische Zustandsgrößen** (abgeleitet)

Innere Energie (U), Enthalpie (H), Entropie (S)

**Gleichgewichtszustand:**

- Situation eines Systems, wenn die **Zustandsgrößen zeitlich konstant** bleiben.
- Im Gleichgewicht: Zustandsgrößen durch **Zustandsgleichung** verknüpft

Übergang von Gleichgewichtszustand 1 zu Gleichgewichtszustand 2:

**Änderung der Zustandsgrößen hängt nur vom Anfangs- und Endzustand ab (Art der Prozessführung irrelevant)**

$$\Delta Z = Z_2 - Z_1$$

**Prozessgrößen:**

Wärme (Q), mechanische Arbeit (W)

Vom Verlauf des Prozesses abhängig !

## Thermodynamische Größen häufig:

### Extensive Größen:

- Hängen von Substanzmenge des Systems (Masse,  $m$ ; Stoffmenge,  $\nu$ ) ab
- z.B.: innere Energie, Enthalpie

### Intensive Größen:

- Von Substanzmenge unabhängig
- Extensive Größen werden zu intensiven, wenn man sie durch die Substanzmenge dividiert

#### Spezifische Größe:

$$x = \frac{X}{m}$$

#### Molare Größe:

$$X_m = \frac{X}{\nu}$$

## Umrechnung:

$$X_m = x \frac{m}{\nu} = xM$$

$M$  ... molare Masse

Molare Masse bestimmt aus relativer Atommasse,  $A_r$ , bzw. Molekülmasse,  $M_r$ , aus dem Periodensystem !

$$M = M_r \frac{g}{mol}$$

Teilchenzahl:  $6,0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  (**Avogadro'sche Konstante**)

Beispiel: Um 2 kg  $H_2O$  zu verdampfen ist eine Verdampfungswärme  $Q = 4,512 \text{ MJ}$  erforderlich. Wie hoch sind die spezifische und molare Verdampfungswärme von Wasser

### 3.1.3 Temperatur

- Der menschlichen Empfindung direkt zugänglich.
- Exakte Definition (= Messvorschrift) über Wirkungsgrad einer idealen Wärmekraftmaschine
- Verknüpft mit kinetischer Energie der Teilchen in einem System

Zwischen zwei in Kontakt befindlichen Körpern unterschiedlicher Temperatur: **Temperaturausgleich** (wärmerer wird kälter und kälter wird wärmer)

Im thermodynamischen Gleichgewicht haben alle Bestandteile eines Systems dieselbe Temperatur (nullter Hauptsatz der Thermodynamik)

### Temperaturskalen:

Festlegung von 2 Fixpunkten der Temperatur und Unterteilung des Bereichs dazwischen in bestimmte Zahl von Skalenteilen.

#### Celsius Skala ( $\vartheta$ in $^{\circ}\text{C}$ ):

Schmelz und Siedepunkt des Wassers unter Normaldruck  
→  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  bis  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$

#### Absolute Temperaturskala (T in Kelvin):

Absoluter Temperaturnullpunkt (0 Kelvin) und **Tripelpunkt** des Wassers (273,15 Kelvin)

$$\frac{\vartheta}{^{\circ}\text{C}} = \frac{T}{\text{K}} - 273,15$$

Zustand in dem fester, flüssiger und gasförmiger Aggregatzustand miteinander im Gleichgewicht sind

## Temperaturmessung:

### Temperaturabhängige Eigenschaften von Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern !

- Thermische Ausdehnung einer Flüssigkeit oder eines Gases
- Dampfdruck einer Flüssigkeit
- Thermische Ausdehnung eines Metallstabs
- Verbiegung eines Bimetallstreifens
- Thermospannung zwischen zwei Verbindungsstellen verschiedener Metalle (Seebeck-Effekt)
- Temperaturabhängigkeit des Widerstandes von Metallen und Halbleitern
- Energiestromdichte oder „Farbe“ der von einem Körper abgegebenen elektromagnetischen Strahlung (Pyrometer)
- ....

## 3.1.4 Thermische Ausdehnung

### Festkörper:

#### Längenausdehnung

$$\frac{dl}{l} = \alpha(T) dT$$

Aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

**Tabelle 3.4** Mittlerer linearer Längenausdehnungskoeffizient  $\alpha$  einiger Festkörper in verschiedenen Temperaturbereichen

$\alpha$  ...

#### Längenausdehnungskoeffizient

Für kleine Temperaturbereiche  
mit  $\alpha = \text{konstant}$ :

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta T$$

$$l_2 = l_1 [1 + \alpha(T_2 - T_1)]$$

Temperaturbereich	$10^6 \alpha$ in $\text{K}^{-1}$	$10^6 \alpha$ in $\text{K}^{-1}$
	$0^\circ\text{C} \leq \vartheta \leq 100^\circ\text{C}$	$0^\circ\text{C} \leq \vartheta \leq 500^\circ\text{C}$
Aluminium	23,8	27,4
Kupfer	16,4	17,9
Stahl C 60	11,1	13,9
rostfreier Stahl	16,4	18,2
Invarstahl	0,9	
Quarzglas	0,51	0,61
gewöhnliches Glas	9	10,2

## Volumenausdehnung:

$$\begin{aligned}
 V_2 &= l_2^3 = l_1^3 [1 + \alpha(T_2 - T_1)]^3 = \\
 &= V_1 [1 + 3\alpha(T_2 - T_1) + 3\alpha^2(T_2 - T_1)^2 + \alpha^3(T_2 - T_1)^3] \approx \\
 &\approx V_1 [1 + 3\alpha(T_2 - T_1)]
 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T \text{ mit } \gamma = 3\alpha$$

$\gamma \dots$   
**Raumausdehnungskoeffizient**

Beispiel: Messingkugel ( $\alpha = 19 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ) hat bei  $\vartheta = 20^\circ\text{C}$  den Durchmesser  $d_1 = 20,00 \text{ mm}$ . Auf welche Temperatur muss man sie erwärmen, damit sie in einem Ring mit Innendurchmesser  $d_2 = 20,03 \text{ mm}$  steckenbleibt. Wie hat sich ihr Volumen verändert?

## Flüssigkeiten:

**Lediglich Volumsausdehnung relevant**

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$$

**Tabelle 3.5** Raumausdehnungskoeffizient  $\gamma$  einiger Flüssigkeiten bei der Temperatur  $\vartheta = 20^\circ\text{C}$

Stoff	$10^3 \gamma \text{ in K}^{-1}$
Wasser	0,208
Quecksilber	0,182
Pentan	1,58
Ethylalkohol	1,10
Heizöl	0,9 bis 1,0

Aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

## Anomalie des Wassers:

**Wasser hat bei  $\vartheta = 4^\circ\text{C}$  seine größte Dichte von  $\rho_{\text{max}} = 0.999973 \text{ kg/dm}^3$**

**Gase:**

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$$

V außerdem von p abhängig !

- $\gamma$  für alle Gase fast gleich
- Insbesondere für  $p \rightarrow 0$  (ideales Gas):  $\gamma = 1/273,15 \text{ K}^{-1}$
- Ideales Gas würde bei  $T \rightarrow 0$  kein Volumen einnehmen

Je geringer der Druck und je höher die Temperatur, umso ähnlicher wird ein **reales Gas** einem **idealen Gas** !

**3.1.5 Zustandsgleichung des idealen Gases**

Kombination der Gesetze von Boyle-Mariotte, Gay-Lussac und Charles (die jeweils 2 der Zustandsgrößen kombinieren) ergibt:

Für eine bestimmte Stoffmenge  
eines idealen Gases gilt:

$$\frac{pV}{T} = \text{konst.}$$

**Satz von Avogadro:**

$\nu = 1$  mol eines idealen Gases nimmt beim Normzustand ( $p = 1 \text{ bar}$ ,  $\vartheta = 0^\circ\text{C}$ ) das Volumen von  $22,414 \text{ dm}^3$  ein.



$$pV = \nu R_m T$$

mit der **universellen Gaskonstante**:  
 $R = 8,3145 \text{ J/(mol K)}$



## Umrechnung auf Teilchenzahl:

$$pV = \nu N_A \frac{R_m}{N_A} T = N k T$$

**Avogadro'sche Konstante:**  $N_A = 6,0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

**Boltzmann-Konstante:**  $k = 1,38065 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

*Beispiel: Gefäß mit 2 l Inhalt wird bei  $\vartheta=22^\circ\text{C}$  evakuiert und dann bei gleichbleibender Temperatur bis zu einem Überdruck von 2 bar (Luftdruck  $p_L = 1016 \text{ hPa}$ ) mit He gefüllt. Wie groß ist die im Gefäß enthaltene Teilchenzahl, Teilchenmenge und Masse ?*

## 3.2 Kinetische Gastheorie

Ableitung der thermodynamischen Eigenschaften der Gase aus der **Bewegung der Gasmoleküle** unter Verwendung der Gesetze der **klassischen Mechanik**.

**Modellsubstanz ideales Gas:**

- große Anzahl gleichartiger Teilchen (Atome, Moleküle);
- deren räumliche Ausdehnung ist vernachlässigbar (punktförmig);
- keine Wechselwirkung zwischen Teilchen außer bei Stößen;
- Stöße zwischen Teilchen und mit Gefäßwänden elastisch und von vernachlässigbarer Dauer

**Erfüllt wenn:** Teilchendichte gering; T weit über Siedetemperatur

### 3.2.1 Druck auf Gefäßwand:

**Annahme:** Ein Teilchen der Masse  $m_M$  im Würfel

Reflexion an Wand bewirkt  $\Delta p$ :

$$\Delta p_i = 2m_M v_{xi}$$

Mittlerer Kraftstoß auf rechte Wand:

$$\bar{F}_i = \frac{\Delta p_i}{\Delta t} = \frac{2m_M v_{xi}}{2a/v_{xi}} = \frac{m_M v_{xi}^2}{a}$$

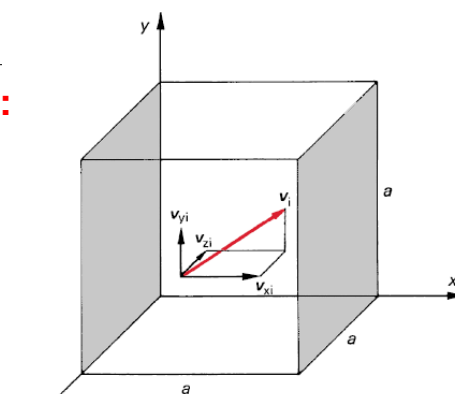


Abb. 3.5 Zur kinetischen Gastheorie: Würfel mit einem Molekül der Geschwindigkeit  $v_i$ .  $x, y, z$  Koordinaten,  $a$  Kantenlänge

**Druck durch ein Teilchen (Achtung, p hier Druck !):**

$$\bar{p}_i = \frac{\bar{F}_i}{a^2} = \frac{m_M v_{xi}^2}{V}$$

Aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

**durch N Teilchen:**

$$p = \frac{m_M}{V} (v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + v_{x3}^2 + \dots v_{xn}^2) = \frac{m_M}{V} \sum_{i=1}^N v_{xi}^2$$

Typische Situation im Normalzustand bei Luft:  $3 \cdot 10^{23}$  Treffer/s/cm<sup>2</sup>

**Lediglich statistische Aussagen möglich !**

**Mittleres Geschwindigkeitsquadrat:**

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{xi}^2$$

Druck:  $p = \frac{m_M}{V} N \overline{v_x^2}$

weiters gilt:  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

und (Gleichverteilung der Raumrichtungen):  $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$

### Grundgleichung der kinetischen Gastheorie:

$$p = \frac{1}{3} \frac{m_M}{V} N \overline{v^2} = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2} \quad \rho \dots \text{Dichte}$$

mittlere Geschwindigkeit:  $v_m = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$

### Im Bereich der Schallgeschwindigkeit !

Beispiel: Wie hoch ist die mittlere Geschwindigkeit der Gasmoleküle in  $N_2$  ( $\rho = 1,2505 \text{ kg/m}^3$ ) im Normzustand ( $p = 1,013 \text{ bar}$ ,  $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ )

### 3.2.2 Thermische Energie und Temperatur

$$\left. \begin{array}{l} \text{Kinetische Gastheorie: } pV = \frac{1}{3} N m_M \overline{v^2} \\ \text{Zustandsgleichung: } pV = N k T \end{array} \right\} \frac{1}{3} m_M \overline{v^2} = k T$$

Definition der mittleren kinetischen Energie:  $\overline{E}_{kin} = \frac{1}{2} m_M \overline{v^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{E}_{kin} = \frac{3}{2} k T}$$

T ist ein Maß für die mittlere kinetische Energie der Moleküle

Absoluter Nullpunkt der Temperatur  $\rightarrow$  Teilchen in Ruhe  
(aber: Nullpunktsenergie – QM Effekt)

Teilchen des idealen Gases hat 3 Freiheitsgrade → Faktor 3/2  
**Gleichverteilungssatz:**

Thermische Energie eines Moleküls verteilt sich gleichmäßig auf alle seine Freiheitsgrade. Pro Freiheitsgrad Energie von  $\frac{1}{2} kT$ .

$$\bar{E}_{kin} = \frac{f}{2} k T$$

f ... Zahl der Freiheitsgrade

Beispiel - N<sub>2</sub> Molekül:  
 3 Translationsfreiheitsgrade,  
 2 Rotationsfreiheitsgrade,  
 1 Schwingungsfreiheitsgrad

Verteilung der Geschwindigkeiten folgt **Maxwell'scher Verteilungsfunktion** (hier nicht behandelt)

Entscheidend: Wahrscheinlichkeit, P<sub>i</sub>, dass Zustand mit E<sub>i</sub> besetzt (**Boltzmann Faktor**):

$$P_i \propto e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

Boltzmann Faktor und Gleichverteilungssatz gelten im Bereich der klassischen Physik; z.B., bei niedrigen Temperaturen: **Quantenstatistik** !

## 3.3 Hauptsätze der Thermodynamik

### 3.3.1 Wärme

T ... Maß für Energie, die in ungeordneter thermischer Bewegung steckt

→ **Temperaturausgleich = Energieübertrag**

- Flüssigkeiten und Gase: kinetische Energie der Translation und Rotation, Molekülschwingungen
- Festkörper: Schwingung der Atome um Ruhelage

**Wärme (Q) = Energie, die aufgrund eines Temperaturunterschieds übertragen wird**

**Wärme fließt stets in Richtung niedrigerer Temperatur**

**Wärmeübertrag = Energieübertrag**

**Wärmeübertrag → Temperaturerhöhung (Ausnahme - Phasenübergang: z.B.: Schmelzen, Verdampfen ...)**

$$\delta Q = m c(T) dT = \nu C_m(T) dT$$

$$Q_{12} = m \int_{T_1}^{T_2} c(T) dT = \nu \int_{T_1}^{T_2} C_m(T) dT$$

Anmerkung: häufig verwendete nicht-SI-Einheit: 1 kcal = 4,1868 kJ

**c(T) ... spezifische Wärmekapazität; C<sub>m</sub>(T) ... molare Wärmekapazität**

für kleine  $\Delta T$ : c bzw. C<sub>m</sub> ~ konstant →  $Q_{12} = m c (T_2 - T_1)$

*Beispiel: Wie groß ist die Wärme, die einem Stück Eisen (0,8 kg) zugeführt werden muss, um es von  $\vartheta = 20^\circ\text{C}$  auf  $\vartheta = 400^\circ\text{C}$  zu erwärmen (mittlere spezifische Wärmekapazität,  $c = 540 \text{ J/(kg K)}$ ). Auf welche Geschwindigkeit könnte man Stück Eisen damit beschleunigen?*

### 3.3.2 Erster Hauptsatz der Thermodynamik (Energieerhaltungssatz)

**Wärme = Energieform** (nicht ein Stoff = „Phlogiston“, wie bis zur Mitte des 19. Jhd. angenommen)

- In einem abgeschlossenen System bleibt die Energie erhalten
- Energie kann nicht vernichtet und nicht erzeugt, sondern nur umgewandelt bzw. zwischen verschiedenen Teilen des Systems ausgetauscht werden.
- Es gibt kein Perpetuum mobile erster Art (= Maschine, die Arbeit verrichtet ohne, dass ihr von außen Energie zugeführt wird).

### Innere Energie, U:

Gesamte thermische Energie, die in der ungeordneten Bewegung der Teilchen steckt

$$dU = \delta Q + \delta W$$

↑ Zustandsgröße
↑ Prozessgrößen

**Geschlossenes System: Änderung der inneren Energie = Summe von übertragener Wärme und Arbeit** (positiv: Wärme und Arbeit dem System zugeführt; negativ: Energie nach außen abgegeben)

$$U = N \frac{f}{2} kT = \nu \frac{f}{2} R_m T$$

Weitere nützliche Zustandsgröße: **Enthalpie,  $H$**

$$\boxed{H = U + pV} \quad dH = dU + p dV + V dp$$

### 3.3.6 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik - Reversibilität

**Reversible (umkehrbare) Prozesse:** Bei Umkehr des Prozesses wird der Ausgangszustand wieder erreicht, ohne dass Änderungen in der Umgebung zurückbleiben.

z.B.: Stoß von Billardkugeln, Vorgänge in der Mechanik ohne Wärmeentwicklung

**Irreversible (unumkehrbare) Prozesse:** Umkehr des Prozesses nur unter äußerer Einwirkung möglich, wobei eine Veränderung in der Umgebung zurückbleibt.

z.B.: Apfel fällt vom Baum und stößt inelastisch mit der Erde (Umwandlung in thermische Energie); Umkehrung verletzt 1. Hauptsatz nicht, wurde aber trotzdem noch nie beobachtet ...  
Diffusion, Wärmeübergang, ...

Reversible Prozesse: eigentlich idealisierte Grenzfälle ...

Thema des 2. Hauptsatzes: **Vorgabe der Richtung von selbst ablaufender Prozesse**

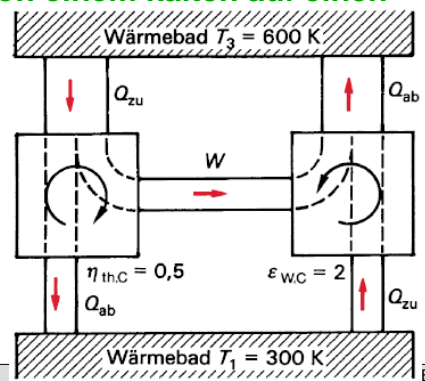
## 2. Hauptsatz der Wärmelehre:

- Es gibt keine periodisch arbeitende Maschine, die Wärme aus einer Wärmequelle entnimmt und vollständig in mechanische Arbeit umwandelt
- Es gibt kein Perpetuum mobile 2. Art
- Wärme geht nicht von selbst von einem kalten auf einen warmen Körper über.

@ a: Wärmekraftmaschine muss immer Wärme an Senke tieferer Temperatur abgeben

@ b: man kann z. B. nicht einfach die Wärme der Meere in Energie verwandeln

@ c: unter Arbeitsaufwand ist das möglich ! (siehe Kühlschrank)



Egbert Zojer

## Weitere essentielle Zustandsgröße: Entropie, S

Gestattet Berechnung der „Irreversibilität“ eines Vorganges.

Definition: 
$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T} \Rightarrow \Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

Für adiabatische Systeme gilt: **In irreversiblen Prozessen steigt die Entropie, bei reversiblen bleibt S = konst.**

## Statistische Deutung der Entropie

Entropie steht in engem Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeit mit der sich ein Zustand realisieren lässt !

Entropie ist ein Maß für den Grad der Unordnung.

Egbert Zojer

Physik ET / Physik TE



$$S = k \ln W$$

**W ... thermodynamische Wahrscheinlichkeit** (= Zahl der Mikrozustände, die denselben Makrozustand ergeben)

Beispiel:

Der Makrozustand, der sich durch die meisten Mikrozustände erreichen lässt, ist der Wahrscheinlichste (Boltzmann)

Makrozustand $n_1; n_2$		Komplexionenzahl $W$
0:4	<div>1 2 3 4</div>	$W=1$
1:3	<div>1 2 3 4</div> <div>2 1 3 4</div> <div>3 1 2 4</div> <div>4 1 2 3</div>	$W=4$
2:2	<div>1 2 3 4</div> <div>1 3 2 4</div> <div>1 4 2 3</div> <div>2 3 1 4</div> <div>2 4 1 3</div> <div>3 4 1 2</div>	$W=6$
3:1	<div>1 2 3 4</div> <div>2 1 3 4</div> <div>3 1 2 4</div> <div>4 1 2 3</div>	$W=4$
4:0	<div>1 2 3 4</div>	$W=1$

Aus: Hering et al.,  
„Physik für  
Ingenieure“

Abb. 3.38 Verschiedene Mikrozustände bei der Verteilung von  $N = 4$  Molekülen auf die zwei Hälften eines Gefäßes

Egbert Zojer

k TE

### 3.7 Freie Energie, F, und Gibb'sche freie Enthalpie, G

In welche Richtung verlaufen Prozesse jetzt wirklich ?

$$F = U - T S$$

$$G = H - T S$$

Isotherm-isochores  
Systeme (V,T=konst.):

Reversible Prozesse:  
 $dF=0$  (F konst.)

Irreversible Prozesse:  
 $dF$  negativ.

Gleichgewichtszustand:  
**F = Minimum.**

Isotherm-isobare Systeme  
(p,T=konst.):

Reversible Prozesse:  
 $dG=0$  (F konst.)

Irreversible Prozesse:  
 $dG$  negativ.

Gleichgewichtszustand:  
**G = Minimum.**

Mathematisch aus 1. und 2. Hauptsatz der Wärmelehre ableitbar !

Egbert Zojer

Physik ET / Physik TE

### 3.3.8 Dritter Hauptsatz der Thermodynamik

Für reine Stoffe gilt:  $S=0$  für  $T=0$

Dies führt zu einem Widerspruch für den idealen (Carnot'schen) Kreisprozess → Der absolute Temperaturnullpunkt lässt sich nicht erreichen !

## 3.5 Wärmeübertragung

Wärmeübertragungsmechanismen:

Wärmeleitung

Konvektion

Wärmestrahlung

Festkörper (für ET/E am relevantesten !): Wärmeleitung durch Übertragung von Schwingungsenergie und kinetischer Energie der Leitungselektronen in Stößen.

Flüssigkeiten: Zusätzlich Strömungen erwärmter Teilmengen (freie oder erzwungene Konvektion)

Gase: Konvektion und Wärmestrahlung dominant.

### 3.5.1 Wärmeleitung

**Wärmestromdichte:** Pro Zeit  $\Delta t$  durch Fläche  $A$  transportierte Wärme  $\Delta Q$

$$\vec{j}_q = \frac{\Delta Q}{\Delta t A} \vec{e}_A = \frac{\dot{Q}}{A} \vec{e}_A \quad \vec{e}_A \dots \text{Einheitsvektor senkrecht auf } A$$

Verknüpfung mit Ursache (= **Temperaturgradient**):  
**Fourier'sches Grundgesetz des Wärmetransports**

$$\vec{j}_q = -\lambda \text{ grad } T \quad \lambda \dots \text{Wärmeleitfähigkeit}$$

$$\text{grad } T = \begin{pmatrix} \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

grad T zeigt in Richtung des größten Temperaturanstiegs

### Wärmeleitfähigkeit, $\lambda$ :

- $\lambda$  besonders niedrig in ruhenden Gasen (z.B.: Luft bei 20°C –  $\lambda = 0.026 \text{ W/(mK)}$ )
- $\lambda$  besonders hoch in Metallen (z.B.: Kupfer bei 20 °C –  $\lambda = 393 \text{ W/(mK)}$ ); hier direkt verknüpft mit elektrischer Leitfähigkeit
- $\lambda$  auch niedrig in Baustoffen mit Poren (z.B.: Ziegelstein –  $\lambda = 0,5 \text{ W/(mK)}$ )

**Hauptfrage:** Wie ändert sich nun die Temperatur an einem Ort, wenn dort eine Wärmequelle mit Energiedichte  $f$  vorliegt und gleichzeitig Wärme zu- bzw. abfließt ?

**Betrachte: Infinitesimales Volumenelement dV mit Masse dm****Zu- bzw. Abnahme der inneren Energie pro Zeit**

$$c \, dm \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{f} \, dV$$

$$- [j_{qx}(x+dx) - j_{qx}(x)] dy \, dz$$

$$- [j_{qy}(y+dy) - j_{qy}(y)] dx \, dz$$

$$- [j_{qz}(z+dz) - j_{qz}(z)] dx \, dy$$

mit  $j_{qx}(x+dx) = j_{qx}(x) + \frac{\partial j_{qx}}{\partial x} dx$

und nach Division durch  $dx \, dy \, dz$ 

$$c \, \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{f} - \left\{ \frac{\partial j_{qx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{qy}}{\partial y} + \frac{\partial j_{qz}}{\partial z} \right\}$$

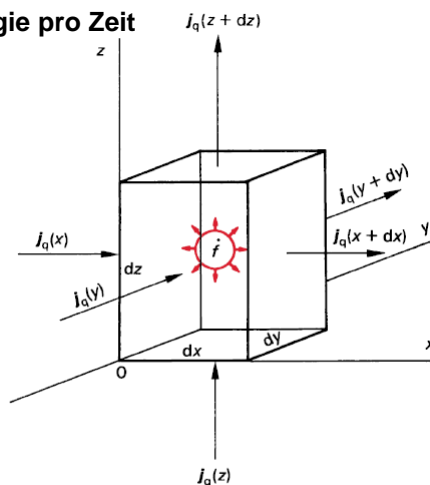


Abb. 3.52 Wärmeströme durch die Oberfläche eines Volumenelements  $dV = dx \, dy \, dz$  mit der Wärmequellendichte  $\dot{f}$

**Eliminierung der Wärmestromdichte mittels Grundgesetz des Wärmetransports:**

$$j_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, j_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, j_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$c \, \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{f} + \lambda \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\}$$

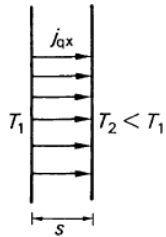
**Stationärer Fall (Temperatur zeitlich konstant) ohne Wärmequellen:**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Analoge  
Differentialgleichung  
auch für Potential in  
Elektrostatik !

## Eindimensionale Situation

planparallele Platte  
(eindimensionaler Fall)



Fourier-  
Grundgleichung

$$j_{qx} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

$$\dot{Q} = j_{qx} A \quad (3.138)$$

Temperaturprofil

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{s} x \quad (3.139)$$

Wärmestrom,  
einschichtige  
Trennwand

$$j_{qx} = \frac{\lambda}{s} (T_1 - T_2) \quad (3.140)$$

Wärmestrom,  
mehrschichtige  
Trennwand

$$j_{qx} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3}} \quad (3.141)$$

Aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“