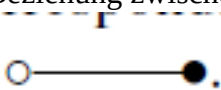


Übersicht

- [[Anwendungen der Residuenrechnung]]
- $f: [a, \infty) \rightarrow$
- Laplace Transformation

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

-
- $Lf(s)$ existiert, wenn $\exists A, C \in \mathbb{R} \forall t \in \mathbb{R}^+ : |f(t)| \leq C e^{At}$
- Konvergenzabszisse $c_0(f)$
 - $\forall f \exists c_0(f) \in \mathbb{R} : \forall s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(s) > c_0(f) \text{ } Lf(s) \text{ existiert}$
 - $Lf(s)$ ist holomorphe Funktion für $\operatorname{Re}(s) > c_0(f)$
- Doetsch Symbol
 - Beziehung zwischen f und Lf



Rechenregeln für L

$F(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\mathcal{L}F(s)$
$aF(t) + bG(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$a\mathcal{L}(F(s)) + b\mathcal{L}(G(s))$
$F(t), G(t), H(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$f(s), g(s), h(s)$
1	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{s}$
$e^{\alpha t}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{s-\alpha}$
t^n	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n e^{\alpha t}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$\sin \alpha t$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$
$\cos \alpha t$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$
$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$
$\alpha > -1, \quad t^\alpha$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
$\delta(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	1
$F^{(k)}(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$s^k f(s) - s^{k-1} F(0) - s^{k-2} F'(0) - \dots - F^{(k-1)}(0)$
$t^k F(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$(-1)^k f^{(k)}(s)$

$\lambda > 0, \quad \begin{cases} F(t-\lambda) & \text{für } t \geq \lambda \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\circ \text{---} \bullet$	$e^{-\lambda s} f(s)$
$e^{-\alpha t} F(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$f(s+\alpha)$
$F(\rho t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{\rho} f\left(\frac{s}{\rho}\right)$
$F * G(t) = \int_0^t F(\tau) G(t-\tau) d\tau$	$\circ \text{---} \bullet$	$f(s)g(s)$
$\frac{F(t)}{t}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\int_s^{\infty} f(v) dv$
$\int_0^t F(\tau) d\tau$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{f(s)}{s}$
$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) e^{st} ds$	$\circ \text{---} \bullet$	$f(s)$

DGL lösen

Lineare DGL
 $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f$
 $\xrightarrow{\text{Laplace}}$
 $s^n L y(s) + a_{n-1} s^{n-1} L y(s) + \dots + a_1 s L y(s) + a_0 L y(s) = L f(s)$
 $L y(s) = \frac{L f(s) - \text{Polynom}}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$
 Partialbruchzerlegung

- Laplace Transformation auf lineare DGL
- dividieren statt DGL lösen
- Rücktransformation
- Beispiel: Rücktransformation mit PBZ

Beispiel: $y'' + y = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
 $\xrightarrow{\text{Laplace}}$
 $(s^2 + 1)Y(s) = \frac{1}{s} + s - 1$
 $Y(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 + 1)}$
 $\frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2 + 1}$
 $A = 1$, $B = -1$
 $y(t) = 1 - \sin(t)$

Laplace Umkehrformel

$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} L f(s) e^{st} ds$
 $\xrightarrow{\text{Residuensatz}}$
 $L f(s) = \int_0^\infty f(u) e^{-su} du$
 $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_0^\infty f(u) e^{-su} du e^{st} ds$
 $f(t) = \int_0^\infty f(u) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{s(t-u)} ds \right) du$
 $f(t) = \int_0^\infty f(u) \delta(t-u) du = f(t)$

- Rücktransformation mit CIF statt
 - PBZ
 - Bekanntsein der Rechenregeln für L
- Verschiebung in Gebiet mit Polstellen
 - \Rightarrow Residuensatz statt CIF

$$y(t) = \sum \text{Res} \left(\frac{s^3 + 3s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 5)} e^{st} \right).$$

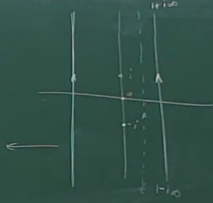
- * Verschieben des Kurvenintegrals im holomorphen Gebiet ändert nichts
- * Kurvenintegral = 0
- * Summe der Residuen bleibt übrig

Beispiele mit Umkehrformel

- gleiche Beispiel wie oben jedoch ohne PBZ

Bsp: $y'' + y = 1$ $y(0)=1$, $y'(0)=-1$

$$Y(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 + 1)} \quad y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 + 1)} e^{st} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 + 1)} e^{st} ds + \left(\text{Res}_{s=0} \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 + 1)} e^{st} \right)$$


$$\text{Res}_{s=0} \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 + 1)} e^{st} = \frac{1}{1} e^{0t} = 1$$

$$\text{Res}_{s=i} \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 + 1)} e^{st} = \frac{-1-i+1}{i(2i)} e^{it} = -\frac{1}{2i} e^{it}$$

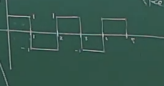
$$\text{Res}_{s=-i} \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 + 1)} e^{st} = \frac{1}{2i} e^{-it}$$

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it}) = 1 - \sin(t)$$

• Rechteckschwingung mit unendlich Polen

Bsp: $y'' + 2y' + 2y = f(t)$ $y(0)=y'(0)=0$

Rechteckschwingung



$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n}^{2n+1} 1 \cdot e^{-st} dt + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n+1}^{2n+2} (-1) e^{-st} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-2n}}{s} - \frac{e^{-(2n+1)}}{s} + \frac{e^{-(2n+1)}}{s} - \frac{e^{-(2n+2)}}{s} \right) = \frac{1}{s} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n} (1 - e^{-2}) \right) = \frac{1-e^{-2}}{s(1-e^{-2})} = \frac{e^2-1}{s(e^2+1)}$$

$$s^2 Y(s) + 2s Y(s) + 2 Y(s) = \frac{e^2-1}{s(e^2+1)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+2s+2} \frac{e^2-1}{s(e^2+1)}$$

$$\text{Res}_{s=(2n+1)\pi i} \frac{e^2-1}{s(s^2+2s+2)} e^{st} = \frac{-1-1}{(2n+1)\pi i ((2n+1)\pi i)^2 + 2(2n+1)\pi i + 2} e^{(2n+1)\pi i t} = \frac{-2 e^{(2n+1)\pi i t}}{(2n+1)\pi i ((2n+1)\pi i)^2 + 2(2n+1)\pi i + 2}$$

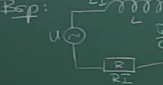
$$\text{Res}_{s=-1-i} \frac{e^2-1}{s(s^2+2s+2)} e^{st} = \frac{e^{-1-i}}{(-1-i)(2(-1-i)+2)} e^{-t} e^{-it} = \frac{e^{-1-i}}{(-1-i)(-2-i+2)} e^{-t} e^{-it} = \frac{e^{-1-i}}{(-1-i)(-i)} e^{-t} e^{-it} = \frac{e^{-1-i}}{1-i} e^{-t} e^{-it}$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-2 e^{(2n+1)\pi i t}}{(2n+1)\pi i ((2n+1)\pi i)^2 + 2(2n+1)\pi i + 2} + \frac{e^{-1-i}-1}{(-1-i)(2i)} \frac{e^{-t}}{e^{-1-i}+1} e^{it} + \frac{e^{-1-i}}{(-1-i)(-2i)} \frac{e^{-t}}{e^{-1-i}+1} e^{-it}$$

periodisch mit Periode 2
'eingelagerten Zähler'

$t \rightarrow \infty$
'transiente Lösungsanteile'

• Kirchhoffsche Gesetz

Bsp: 

$$L \dot{I} + \frac{Q}{C} + RI = U$$

$$L \ddot{I} + \frac{\dot{Q}}{C} + R \dot{I} = \dot{U}$$

$$L \ddot{I} + R \dot{I} + \frac{1}{C} I = \dot{U}$$

$$\mathcal{L} \left(L \ddot{I} + R \dot{I} + \frac{1}{C} I \right) = \mathcal{L}(\dot{U})$$


$$(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}) \mathcal{L}I(s) = s \mathcal{L}U(s) - U(0)$$

$$\mathcal{L}I(s) = \frac{s \mathcal{L}U(s)}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}} + \frac{1}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}} (LsI(0) + L\dot{I}(0) + RI(0) - U(0))$$

zu freier Annahme
Skulptur

Anfangswerte

$$U(t) = \sin(\omega t) \Rightarrow \mathcal{L}U(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C})} e^{st} ds$$


$$I(t) = \text{Res}_{s=\pm i\omega} \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C})} e^{st} + \text{Res}_{s=-\frac{R}{2L} \pm \dots} \dots$$

eingelagerten Zähler

$$\text{Res}_{s=i\omega} \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C})} e^{st} = \frac{i\omega}{2i\omega(-L(\omega^2) + R i\omega + \frac{1}{C})} e^{i\omega t} = \frac{e^{i\omega t}}{2i\omega(-L\omega^2 + R i\omega + \frac{1}{C})}$$

Exkurs: Distributionen

[illegible]