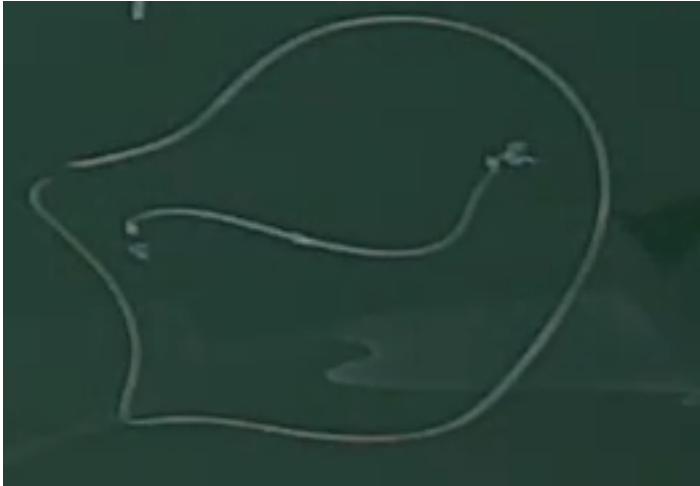


Motivation

- Funktionen mit komplexen Argumenten und komplexen Werten untersuchen
- Analysis neu entwickeln

Neue Definitionen

- U ist ein Gebiet ($U \subseteq \mathbb{C}$)
 - offen
 - zusammenhängend



- $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig, wenn

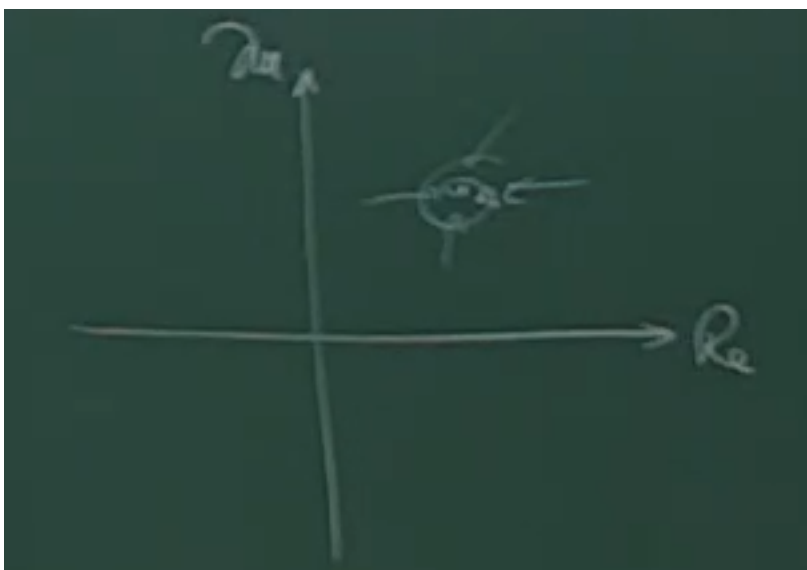
$$z \in U \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall z \in U \quad |z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Differenzierbarkeit in \mathbb{C}

- differenzierbar, wenn Grenzwert existiert
 - einmal differenzierbar \implies beliebig oft differenzierbar

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

- mehrere Möglichkeiten der Annäherung, da zweidimensional



$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0))}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$

- Grenzwert

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y_0) - v(x_0, y_0))}{x - x_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0, y) - v(x_0, y_0))}{i(y - y_0)} = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

- Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

– Multiplikation führt zu Drehstreckung

* [[Spezielle Abbildungen]]

- Cauchy-Riemann-Gleichungen

– seien u und v Real- und Imaginäranteil einer komplex differenzierbaren Funktion

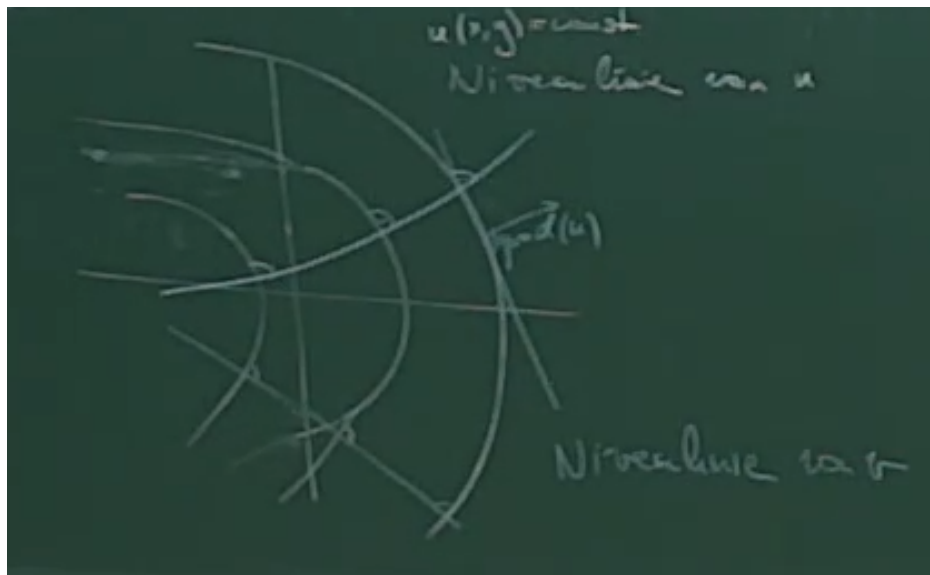
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

– erfüllt Laplace/Potentialgleichung

– Gradient von v senkrecht auf Gradient von u

* Niveaulinien von u senkrecht auf Niveaulinien von v



*

- f ist holomorph $\iff f$ in jedem Punkt von U komplex differenzierbar
 - auf ganz \mathbb{C} holomorph \iff ganz holomorph

Komplexe Differenzierbarkeit bekannter Funktionen

- Potenzfunktionen

– holomorph

$$\mathbb{C} \setminus \{0\}: f(z) = z^Q \quad Q \in \mathbb{N}_0$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^Q - z_0^Q}{z - z_0} = z_0^{Q-1} + z_0^{Q-2}z + \dots + z_0^{Q-1}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^Q - z_0^Q}{z - z_0} = Q z_0^{Q-1} \quad f'(z) = Q z^{Q-1}$$

– somit sind auch Polynomfunktionen und Potenzreihen holomorph

- Potenzreihen

$$\text{Bsp. } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{PR ist konvergent für } |z| < R$$

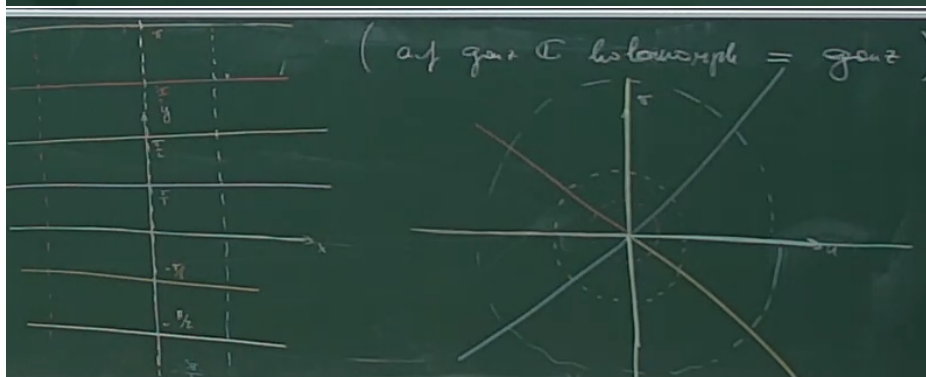
$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

- Exponentialfunktionen

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{ist auf ganz } \mathbb{C} \text{ holomorph} \quad \exp'(z) = \exp(z)$$

$$\exp(x+iy) = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) \quad u(x,y) = e^x \cos(y)$$

$$v(x,y) = e^x \sin(y)$$



* nimmt jeden Wert ($\neq 0$) unendlich oft an

- Logarithmus

- nicht auf ganz \mathbb{C} definiert

$$\log: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C} \text{ ist komplexwertig}$$

$$\log'(z) = \frac{1}{z}$$

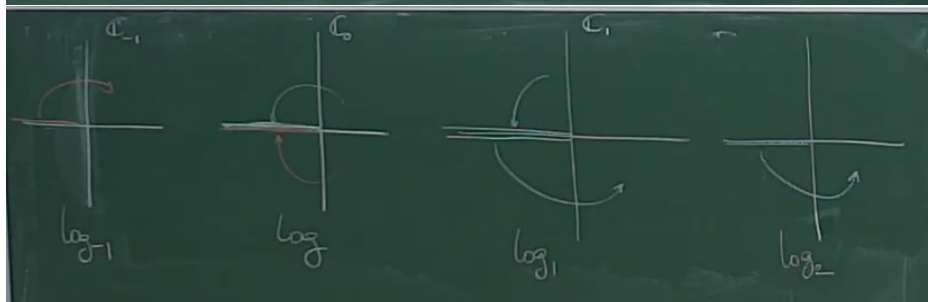
Bsp: $w = \exp(z)$ $z = ?$
 $w \neq 0$

$$w = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$|w| = e^x \quad x = \ln|w| \quad y = \operatorname{Arg}(w) + 2k\pi$$

$$\cos(y) + i \sin(y) = e^{iy} = \frac{w}{|w|} = e^{i \operatorname{Arg}(w)}$$

$$\operatorname{Log}: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{komplexer Logarithmus.}$$



- Winkelfunktionen

- Beispiel

Bsp: $f(z) = z^2$
 $f(x+iy) = \frac{x^2-y^2}{1} + \frac{2xyi}{i}$

$$x^2 - y^2 = C$$

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$(x+iy)(x-iy) = 0$$

Rechenregeln für Ableitungen

- Rechenregeln bleiben erhalten

$$\begin{aligned}
 (f+g)'(z) &= f'(z) + g'(z) && \text{Summenregel} \\
 (f \cdot g)'(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) && \text{Produktregel} \\
 (f \circ g)'(z) &= f'(g(z)) \cdot g'(z) && \text{Kettenregel} \\
 \left(\frac{f}{g}\right)'(z) &= \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2} && \text{Quotientenregel}
 \end{aligned}$$

[[test/a.md/Analysis]] [[Komplexe Zahlen]]