Übersicht

- analog zu [[Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten]] jedoch mit Störfunktion
- $y^{(n)} + a_{n-1} * y^{(n-1)} + ... + a_1 * y' + a_0 * y = s(t)$
  - $s(t)$ Störfunktion
    - Linearkombination von $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^m e^{\lambda t}, ...$
- allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung
  - $y(t) = y_P(t) + y_H(t)$
    - $y_P(t)$ ist eine Lösung der inhomogenen Gleichung
    - $y_H(t)$ ist allgemeine Lösung der homogenen Gleichung
- innere Resonanz, wenn Nullstelle λ mehrfach auftritt
- äußere Resonanz für $f_i(x)$, wenn
  - $f_i(x)$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

Ansatz für partikuläre Lösung

- abhängig von Resonanz und s(x)
- keine äußere

  Um einen Ansatz in den nun folgenden Formen durchführen zu können, darf **keine** äußere Resonanz vorliegen.

  - $f_i(x) = A \ldots$ (const.)

    Ansatz für f_i : B (const.)

  - $f_i(x) = x^m$ bzw. $f_i(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m$

    Ansatz für f_i : $B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m$

  - $f_i(x) = Ae^{\mu x}$

    Ansatz für f_i : $Be^{\mu x}$

  - $f_i(x) = A\sin(kx)$, $f_i(x) = A\cos(kx)$, $f_i(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$

    Ansatz für f_i : $C\sin(kx) + D\cos(kx)$

  - $f_i(x) = Ae^{\mu x}\sin(kx)$, $f_i(x) = Ae^{\mu x}\cos(kx)$, $f_i(x) = e^{\mu x}(A\cos(kx) + B\sin(kx))$

    Ansatz für f_i : $e^{\mu x}(C\cos(kx) + D\sin(kx))$

  - $f_i(x) = e^{\mu x}P(x)$ ($P(x) \ldots$ Polynom)

    Ansatz für f_i : $e^{\mu x}Q(x)$ ($Q(x) \ldots$ Polynom vom selben Grad wie
  -

    $P(x)$)

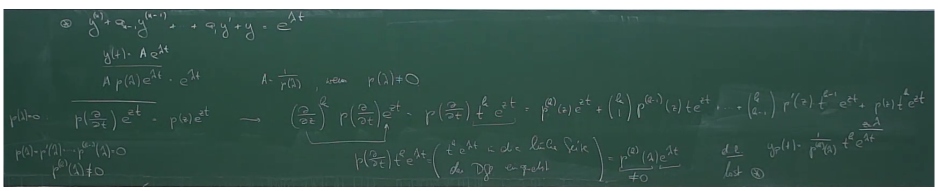
    - $f_i(x) = P(x)\sin(kx)$, $f_i(x) = P(x)\cos(kx)$ ($P(x) \ldots$ Polynom)

      Ansatz für f_i : $Q(x)\sin(kx) + R(x)\cos(kx)$ ($Q(x), R(x) \ldots$ Polynome)
  -
- äußere und keine innere

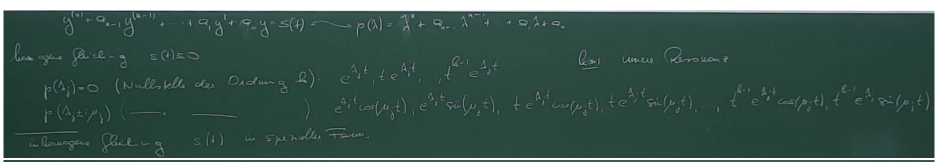
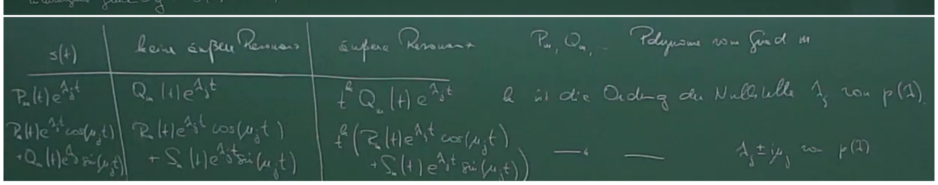
  - Ansatz x multiplizieren
- äußere und innere
  - Ansatz mit linearem Polynom x^n multiplizieren
  - n ist Ordnung von λ
- keine äußere und keine innere
  - nicht mit Polynom multiplizieren
- Cheat-Sheet
  -

$s(x)$	y_{sp}
$P(x)$	$Q(x)$
$e^{\lambda x}P(x)$	$e^{\lambda x}Q(x)$
$e^{\lambda x}\cos(\omega x)$	$e^{\lambda x}(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$
$e^{\lambda x}\sin(\omega x)$	$e^{\lambda x}(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$
$e^{\lambda x}P(x)\cos(\omega x)$	$e^{\lambda x}(Q_1(x)\cos(\omega x) + Q_2(x)\sin(\omega x))$
$e^{\lambda x}P(x)\sin(\omega x)$	$e^{\lambda x}(Q_1(x)\cos(\omega x) + Q_2(x)\sin(\omega x))$

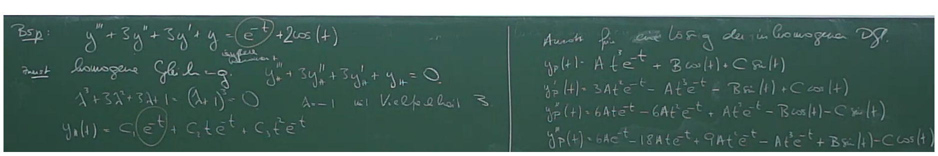
Herleitung

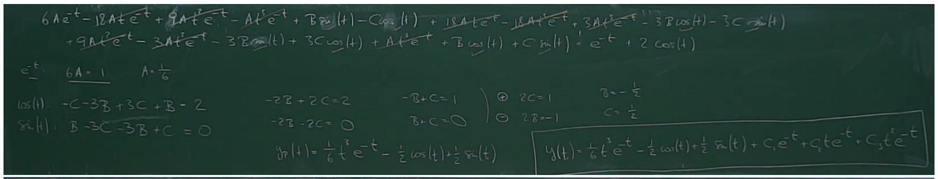
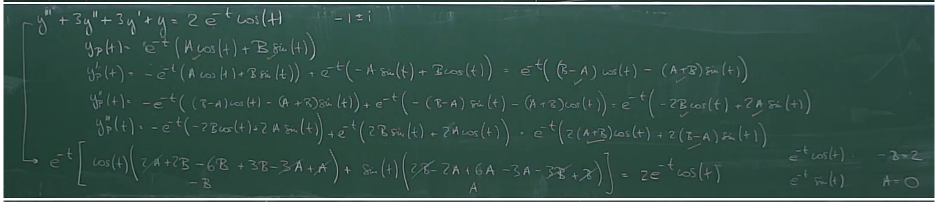
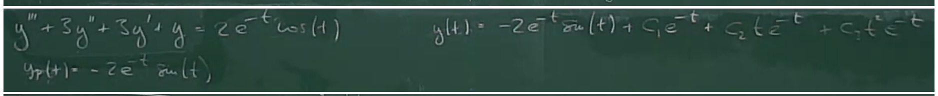
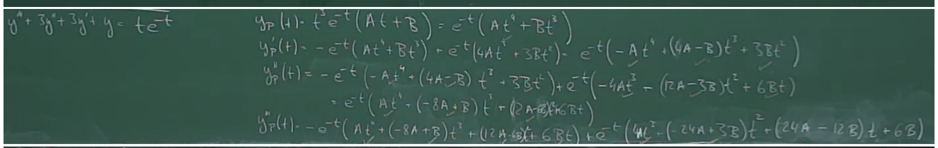
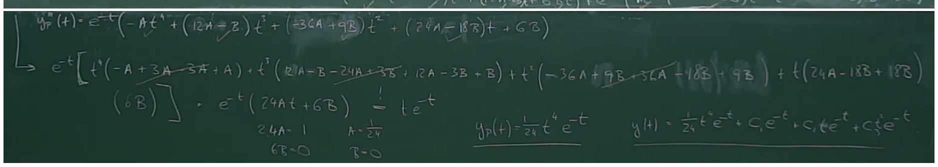
- 

Zusammenfassung

- 
- 

Beispiel

- 

- 
6Ae^-t − 18Ate^-t + 9At²e^-t − At³e^-t + B sin(t) − C cos(t) + 18Ate^-t − 18At²e^-t + 3At³e^-t − 3B cos(t) − 3C sin(t)
+ 9At²e^-t − 3At³e^-t − 3B sin(t) + 3C cos(t) + At³e^-t + B cos(t) + C sin(t) = e^-t + 2 cos(t)
e^-t: 6A = 1   A = 1/6
cos(t): −C − 3B + 3C + B = 2   −2B + 2C = 2   −B + C = 1
sin(t): B − 3C − 3B + C = 0   −2B − 2C = 0   B + C = 0
⊕ 2C = 1   B = −1/2
⊖ 2B = −1   C = 1/2
yp(t) = 1/6 t³e^-t − 1/2 cos(t) + 1/2 sin(t)
y(t) = 1/6 t³e^-t − 1/2 cos(t) + 1/2 sin(t) + C₁e^-t + C₂te^-t + C₃t²e^-t
- 
y''' + 3y'' + 3y' + y = 2e^-t cos(t)   −1 ± i
yp(t) = e^-t (A cos(t) + B sin(t))
yp'(t) = −e^-t (A cos(t) + B sin(t)) + e^-t (−A sin(t) + B cos(t)) = e^-t ((B − A) cos(t) − (A + B) sin(t))
yp''(t) = −e^-t ((B − A) cos(t) − (A + B) sin(t)) + e^-t (−(B − A) sin(t) − (A + B) cos(t)) = e^-t (−2B cos(t) + 2A sin(t))
yp'''(t) = −e^-t (−2B cos(t) + 2A sin(t)) + e^-t (2B sin(t) + 2A cos(t)) = e^-t (2(A + B) cos(t) + 2(B − A) sin(t))
e^-t [cos(t) (2A + 2B − 6B + 3B − 3A + A) + sin(t) (2B − 2A + 6A − 3A − 3B + B)] = 2e^-t cos(t)
−B
A
e^-t cos(t): −B = 2
e^-t sin(t): A = 0
- 
y''' + 3y'' + 3y' + y = 2e^-t cos(t)
y(t) = −2e^-t sin(t) + C₁e^-t + C₂te^-t + C₃t²e^-t
yp(t) = −2e^-t sin(t)
- 
y''' + 3y'' + 3y' + y = te^-t
yp(t) = t³e^-t (At + B) = e^-t (At⁴ + Bt³)
yp'(t) = −e^-t (At⁴ + Bt³) + e^-t (4At³ + 3Bt²) = e^-t (−At⁴ + (4A − B)t³ + 3Bt²)
yp''(t) = −e^-t (−At⁴ + (4A − B)t³ + 3Bt²) + e^-t (−4At³ + (12A − 3B)t² + 6Bt)
= e^-t (At⁴ + (−8A + B)t³ + (12A − 6B)t² + 6Bt)
yp'''(t) = −e^-t (At⁴ + (−8A + B)t³ + (12A − 6B)t² + 6Bt) + e^-t (4At³ + (−24A + 3B)t² + (24A − 12B)t + 6B)
- 
yp'''(t) = e^-t (−At⁴ + (12A − B)t³ + (−36A + 9B)t² + (24A − 18B)t + 6B)
e^-t [t⁴(−A + 3A − 3A + A) + t³(12A − B − 24A + 3B + 12A − 3B + B) + t²(−36A + 9B + 36A − 18B + 9B) + t(24A − 18B + 18B)
(6B)] = e^-t (24At + 6B) = te^-t
24A = 1   A = 1/24
6B = 0   B = 0
yp(t) = 1/24 t⁴e^-t
y(t) = 1/24 t⁴e^-t + C₁e^-t + C₂te^-t + C₃t²e^-t