- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert für alle x
  - $i^2 = -1$
  - $e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$
  - $= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = cos(x) + sin(x)$
    * $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = cos(x)$
    * $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = sin(x)$
  - $e^{ix} = cos(x) + isin(x)$
- $sin(x)^2 + cos(x)^2 = 1$
- 2π-periodisch
- $|sin(x)| \leq 1$ und $|cos(x)| \leq 1$
- $sin(-x) = -sin(x)$
  - gerade Funktion
- $cos(-x) = cos(x)$
  - ungerade Funktion
- $sin(x)$ und $cos(x)$ sind alternierende Reihen
- $sin(x)$ und $cos(x)$ sind bijektiv in [0,2π)

Additionstheoreme

- $cos(x + / - y) = cos(x) * cos(y) - / + sin(x) * sin(y)$
  - $cos(x + y) = cos(x) * cos(y) - sin(x) * sin(y)$
  - $cos(x - y) = cos(x) * cos(y) + sin(x) * sin(y)$
    * $cos(x)cos(y) = \frac{1}{2}(cos(x + y) + cos(x - y))$
    * $sin(x)sin(y) = \frac{1}{2}(cos(x - y) - cos(x + y))$
- $sin(x + / - y) = sin(x) * cos(y) + / - cos(x) * sin(y)$
  - $sin(x + y) = sin(x) * cos(y) + cos(x) * sin(y)$
  - $sin(x - y) = sin(x) * cos(y) - cos(x) * sin(y)$
    * $sin(x)cos(y) = \frac{1}{2}(sin(x + y) + sin(x - y))$
    * $cos(x)sin(y) = \frac{1}{2}(sin(x + y) - sin(x - y))$
- Äquivalenzen mit α und β siehe VO#21
- Spezialisierungen
  - $sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$
  - $cos(2x) = cos(x)cos(x) - sin(x)sin(x) = 2cos(x)^2 - 1 = 1 - 2sin(x)^2$

Besondere Stellen

- sin(x) und cos(x) wiederholen sich periodisch alle 2π
  - $cos(x + 2k\pi) = cos(x)$
  - $sin(x + 2k\pi) = sin(x)$

- $e^{i\pi} = cos(\pi) + isin(\pi) = -1$
- Nullstellen
  - $cos(x) = 0$ ==> $\frac{\pi}{2} + k\pi$
  - $sin(x) = 0$ ==> $k\pi$
  - für k
- Extremwerte
  - $cos(x) = 1$ ==> $2k\pi$
  - $cos(x) = -1$ ==> $(2k+1)\pi$
  - $sin(x) = 1$ ==> $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
  - $sin(x) = -1$ ==> $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$
  - für k

Umkehrfunktionen von cos(x) und sin(x)

- arc(us)cosinus und arc(us)sinus
  - Umkehrfunktionen der eingeschränkten cos(x) und sin(x)
  - Zyklometrische Funktionen
  - messen Einheitskreisbogen ab
- Zurückrechnen:
  - $cos(x) = y$
    * $\{x \in \mathbb{R} | cos(x) = y\}$ = $\{arccos(y) + 2k\pi, 2k\pi - arccos(y) | k \in \mathbb{Z}\}$

  - $sin(x) = y$
    * $\{x \in \mathbb{R} | sin(x) = y\}$ = $\{arcsin(y) + 2k\pi, (2k+1)\pi - arcsin(y) | k \in \mathbb{Z}\}$

TODO Polarkoordinaten

- VO 23 bis min 18

Tangens und Cotangens

- $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$
  - nicht definiert für cos(x)=0
- $cot(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$
  - $cot(x) = \frac{1}{tan(x)}$
  - nicht definiert für sin(x)=0
- $tan(-x) = -tan(x)$
  - ungerade Funktion
- π-periodisch
- Monotonie

- streng monoton wachsend auf $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- somit injektiv und stetig
- tanx(x) näher sich +/-∞ and
  - rechte Intervallende ==> $\frac{\pi}{2}$ ∞
  - linken Intervallende ==> $\frac{-\pi}{2}$ -∞
- Laut ZWS
  - für jedes y   gibt es ein $x_1, x_2 \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
  - sodass $tan(x_1) < y < tan(x_2)$ ==> über Intervallschachtelung herausfindbar
  - $tan(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist surjektiv ==> bijektiv

Umkehrfunktionen von tan(x) und cot(x)

- …

[[Funktionen]] [[Komplexe Zahlen]] [[Exponentialfunktion]]