

Definition

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein W-Raum. Wir bezeichnen zwei Ereignisse A und B in \mathcal{A} als unabhängig, falls $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Kurz: $A \perp B$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A).$$

-
- verallgemeinert auf mehr als 2 [[Ereignisse]]

Unabhängigkeit: Wir nennen A_1, \dots, A_n unabhängig, falls

$$(*) \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i) \quad \text{für alle } \emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}.$$

Lemma: Ist A von B unabhängig, dann ist auch A von B^c unabhängig.

- Beispiel

Wir spielen Roulette. Wir setzen in 3 Runden jeweils 5 €. Im ersten Spiel setzen wir auf rot, im zweiten setzen wir auf 1 – 12 und im letzten Spiel setzen wir auf die Zahl 23. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir mindestens 10 € gewinnen?

Roulette 3 Spiele \rightarrow Rot 5 €
 \rightarrow 1-12 10 € jeweils 5 €
 \rightarrow 23 17,5 €

$P(\text{mindestens 10 € Gewinn}) = ?$ \downarrow Gewinn

$A_1 \dots$ Gewinn in 1. Spiel
 $A_2 \dots$ — 4 — 2. — 4 —
 $A_3 \dots$ — 4 — 3. — 4 —

$$P\left((A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \\
&\quad + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \\
&\quad + P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \\
&= P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) P(A_3) + P(A_1) P(A_2) P(A_3^c) + \dots \\
&= (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) P(A_3) + P(A_1) P(A_2) (1 - P(A_3)) \\
&P(A_1) = \frac{18}{37} \quad P(A_2) = \frac{12}{37} \quad P(A_3) = \frac{1}{37}
\end{aligned}$$