Übersicht

- analog zu [[Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten]] jedoch mit Störfunktion
- $y^{(n)} + a_{n-1} * y^{(n-1)} + ... + a_1 * y' + a_0 * y = s(t)$
  - $s(t)$ Störfunktion
    * Linearkombination von $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^m e^{\lambda t}, ...$
- allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung
  - $y(t) = y_P(t) + y_H(t)$
    * $y_P(t)$ ist eine Lösung der inhomogenen Gleichung
    * $y_H(t)$ ist allgemeine Lösung der homogenen Gleichung
- innere Resonanz, wenn Nullstelle λ mehrfach auftritt
- äußere Resonanz für $f_i(x)$, wenn
  - $f_i(x)$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

Ansatz für partikuläre Lösung

- abhängig von Resonanz und s(x)
- keine äußere

  Um einen Ansatz in den nun folgenden Formen durchführen zu können, darf **keine** äußere Resonanz vorliegen.

  - $f_i(x) = A \ldots$ (const.)

    Ansatz für f_i : B (const.)

  - $f_i(x) = x^m$ bzw. $f_i(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m$

    Ansatz für f_i : $B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m$

  - $f_i(x) = Ae^{\mu x}$

    Ansatz für f_i : $Be^{\mu x}$

  - $f_i(x) = A\sin(kx)$, $f_i(x) = A\cos(kx)$, $f_i(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$

    Ansatz für f_i : $C\sin(kx) + D\cos(kx)$

  - $f_i(x) = Ae^{\mu x}\sin(kx)$, $f_i(x) = Ae^{\mu x}\cos(kx)$, $f_i(x) = e^{\mu x}(A\cos(kx) + B\sin(kx))$

    Ansatz für f_i : $e^{\mu x}(C\cos(kx) + D\sin(kx))$

  - $f_i(x) = e^{\mu x}P(x)$ $(P(x) \ldots$ Polynom)

    Ansatz für f_i : $e^{\mu x}Q(x)$ $(Q(x) \ldots$ Polynom vom selben Grad wie

  - $P(x))$

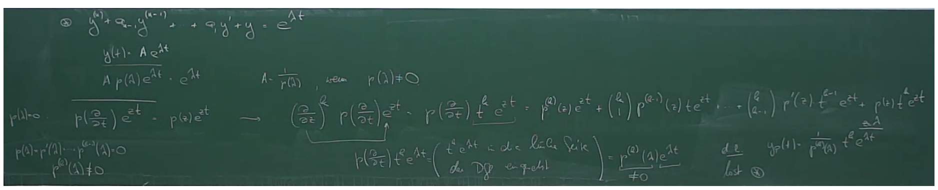
    - $f_i(x) = P(x)\sin(kx)$, $f_i(x) = P(x)\cos(kx)$ $(P(x) \ldots$ Polynom)

      Ansatz für f_i : $Q(x)\sin(kx) + R(x)\cos(kx)$ $(Q(x), R(x) \ldots$ Polynome)
  -
- äußere und keine innere

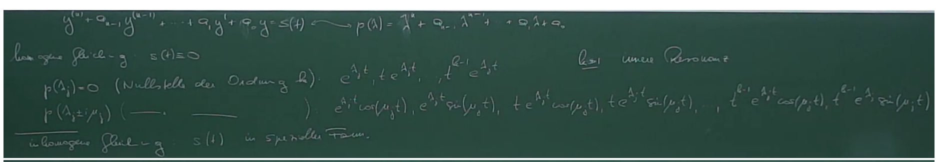
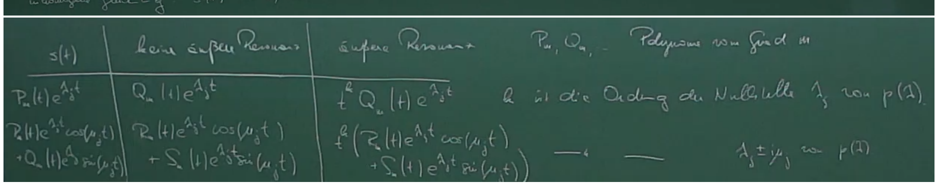
  - Ansatz x multiplizieren
- äußere und innere
  - Ansatz mit linearem Polynom x^n multiplizieren
  - n ist Ordnung von λ
- keine äußere und keine innere
  - nicht mit Polynom multiplizieren
- Cheat-Sheet
  -

$s(x)$	y_{sp}
$P(x)$	$Q(x)$
$e^{\lambda x}P(x)$	$e^{\lambda x}Q(x)$
$e^{\lambda x}\cos(\omega x)$	$e^{\lambda x}(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$
$e^{\lambda x}\sin(\omega x)$	$e^{\lambda x}(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$
$e^{\lambda x}P(x)\cos(\omega x)$	$e^{\lambda x}(Q_1(x)\cos(\omega x) + Q_2(x)\sin(\omega x))$
$e^{\lambda x}P(x)\sin(\omega x)$	$e^{\lambda x}(Q_1(x)\cos(\omega x) + Q_2(x)\sin(\omega x))$

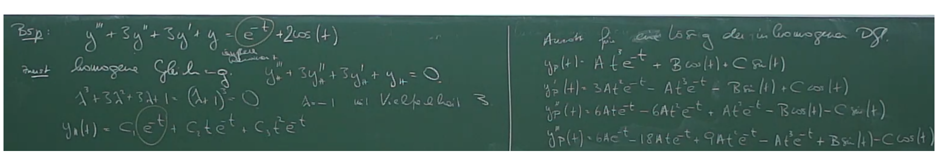
Herleitung

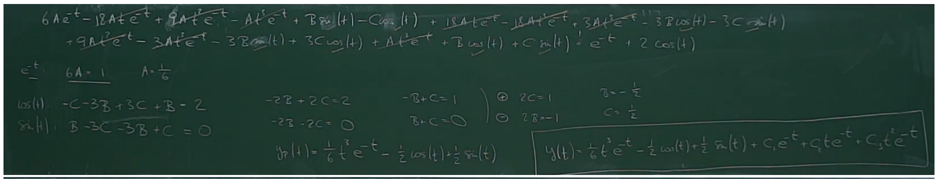
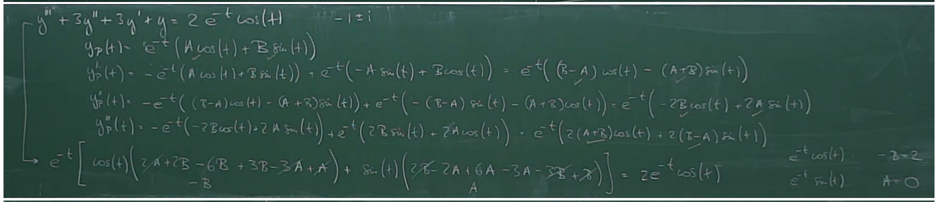
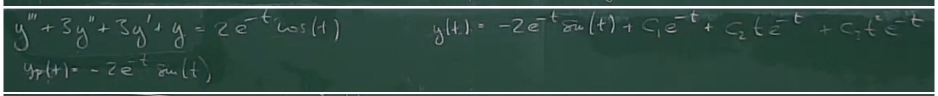
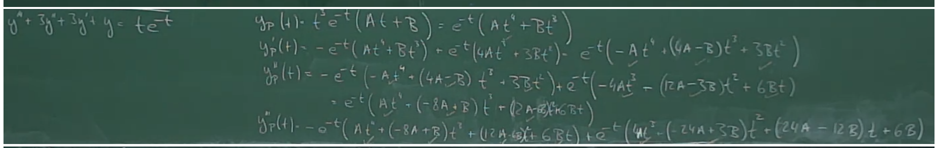
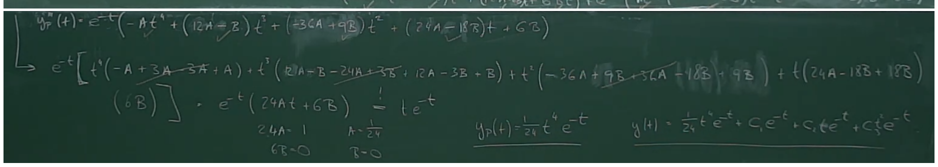
- 

Zusammenfassung

- 
- 

Beispiel

- 

- 
e^{-t}: $6A = 1$ $A = \frac{1}{6}$
$\cos(t)$: $-C - 3B + 3C + B = 2$
$\sin(t)$: $B - 3C - 3B + C = 0$
$-2B + 2C = 2$
$-2B - 2C = 0$
$-B + C = 1$
$B + C = 0$
$2C = 1$
$2B = -1$
$B = -\frac{1}{2}$
$C = \frac{1}{2}$
$y_P(t) = \frac{1}{6} t^3 e^{-t} - \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)$
$y(t) = \frac{1}{6} t^3 e^{-t} - \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) + C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + C_3 t^2 e^{-t}$
- 
$y''' + 3y'' + 3y' + y = 2e^{-t}\cos(t)$
$-1 \pm i$
$y_P(t) = e^{-t}(A\cos(t) + B\sin(t))$
$e^{-t}\cos(t)$: $-B = 2$
$e^{-t}\sin(t)$: $A = 0$
- 
$y''' + 3y'' + 3y' + y = 2e^{-t}\cos(t)$
$y(t) = -2e^{-t}\sin(t) + C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + C_3 t^2 e^{-t}$
$y_P(t) = -2e^{-t}\sin(t)$
- 
$y''' + 3y'' + 3y' + y = te^{-t}$
$y_P(t) = t^3 e^{-t}(At + B) = e^{-t}(At^4 + Bt^3)$
- 
$24A = 1$ $A = \frac{1}{24}$
$6B = 0$ $B = 0$
$y_P(t) = \frac{1}{24} t^4 e^{-t}$
$y(t) = \frac{1}{24} t^4 e^{-t} + C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + C_3 t^2 e^{-t}$