Eigenschaften

- gelten für [[Erwartungswert für diskrete ZV]] von linearen Funktionen
  Seien X und Y in L^1 und $a \in \mathbb{R}$ konstant. Dann gilt
  (a) *Monotonie: $X \leq Y$ impliziert $EX \leq EY$.*
  (b) *Linearität: $aX \in L^1$ und $X + Y \in L^1$. Weiters,*
- $$E(aX) = aE(X) \quad und \quad E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$
- unverzerrter Schätzer
  - Sei $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ wobei alle $X_i \in L^1$. Dann ist $E(\overline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$. Haben alle X_i denselben Erwartungswert μ, dann ist $\overline{X}$ ein unverzerrter Schätzer von μ.
- Markovsche Ungleichung - Korollar
  - *Angenommen $|X|^p \in L^1$ für ein $p > 0$. Dann gilt $\forall \varepsilon > 0$*
    $$P(|X| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} E(|X|^p).$$
    Beweis. Wir haben
    $$I\{|X| > \epsilon\} \leq \left(\frac{|X|}{\varepsilon}\right)^p.$$
    Wegen der Monotonie folgt
    $$P(|X| > \varepsilon) = E(I\{|X| > \varepsilon\}) \leq E\left(\frac{|X|^p}{\varepsilon^p}\right).$$

Beispiele

- Binomialverteilung
  - Verwende die Linearität des Erwartungswertes um zu zeigen, dass $EX = np$ wenn $X \sim B_{n,p}$.

- (1) $\underline{X \sim B_{n,p}}$ $\leadsto$ $E(X) = np$

  $X = X_1 + \dots + X_n$ wobei $X_i = \begin{cases} 0 & 1-p \\ 1 & p \end{cases}$

  $EX_i = p$

  $$E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{p} = n \cdot p.$$

- Roulette
  - Wir spielen Roulette und setzen 5 Euro auf Rot (Auszahlung 1:1) und 15 Euro auf die Null (Auszahlung 35:1). Berechnen Sie den erwarteten Gewinn.
  - (2) Roulette 5 € auf Rot und 15 € auf Null

    $\leadsto E(X)$ $X \dots$ Gewinn

    $X_1 \dots$ Gewinn von Jeton „Rot"

    $X_2 \dots$ Gewinn von Jeton „Null"

    $$E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

    $$= 5\left(-\frac{1}{37}\right) + 15\left(-\frac{1}{37}\right) = 20 \cdot \left(-\frac{1}{37}\right)$$