

- jeder endlich-dimensionale VR V ist gleichwertig zu $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$
- $V \rightarrow W$ lineare Abbildung
 - lineare Transformation
 - Transformationsmatrix
 - * Spaltenvektoren der die lineare Abbildung F darstellenden Matrix M sind die Koordinatenvektoren der Bilder des Basisvektoren
 - ♦ $C_B(F(v_1)), \dots, C_B(F(v_n))$
 - * Beispiel

B_{sp}
 $P_2 \xrightarrow{F} P_1$
 $\left\{ \begin{matrix} 1+t \\ t+t^2 \\ 1+t^2 \end{matrix} \right\}_{B_1} \xrightarrow{F} \left\{ \begin{matrix} 1+t \\ 1-t^2 \end{matrix} \right\}_{B_2}$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^2$
 \downarrow
 $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^2$
 $M_B^A(F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$
 \downarrow
 \mathbb{R}^2

$P(t) \mapsto \frac{P(t)-P(0)}{t} = q(t)$
 $\frac{a+bt+ct^2}{t} \xrightarrow{F} \frac{b+ct}{t}$
 $Bilder \ v_n \ P_1, P_2$
 $P_1 = 1+t \xrightarrow{F} 1 = \frac{1}{2}q_0 + \frac{1}{2}q_1 \rightsquigarrow C_B(F(P_1)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
 $P_2 = t+t^2 \xrightarrow{F} 1+t = 1q_0 + 1q_1 \rightsquigarrow C_B(F(P_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $P_3 = 1+t^2 \xrightarrow{F} t = \frac{1}{2}q_0 - \frac{1}{2}q_1 \rightsquigarrow C_B(F(P_3)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Komposition von linearen Abbildungen

- Komposition wird durch das Produkt der darstellenden Transformationsmatrizen beschrieben

Inverse eines Isomorphismus

- Transformationsmatrix muss regulär sein bei isomorpher Abbildung
 - Inverse ist Transformationsmatrix für Umkehrabbildung

Rang der Transformationsmatrix

- $V^n \rightarrow W^m$
- $M_B^A(F) \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- F injektiv $\iff \text{Kern}(F) = \{0\} \iff \text{Rang}(M(F)) = n$
- F surjektiv $\iff \text{Bild}(F) = W \iff \text{Rang}(M(F)) = m$
- F bijektiv $\iff \dim(V) = \dim(W) \iff \text{Rang}(M(F)) = n \iff M_B^A(F)$ regulär

Bestimmen von Kern und Bild

- Kern VO#16
- Bild VO#16/17
- Dimensionsformel:

- $\dim V_n = \dim \text{Kern}(F) + \dim \text{Bild}(F)$
 - * $\dim \text{Kern}(F) = \#$ freie Variablen
 - * $\dim \text{Bild}(F) = \#$ nicht freie Variablen = Rang $M_B^A(F)$
 - * VO#18 - Fallunterscheidungen
 - ◆ $m=n \iff F$ bijektiv
 - ◆ $m < n \iff$ jedes F ist nicht injektiv
 - ◆ $m > n \iff$ jedes F ist nicht surjektiv

Elementare Zeilenumformungen

- Spaltenräume bleiben nicht gleich
- Zeilenräume bleiben gleich
 - $\text{Span}(\{\text{Zeilen von } A\}) = \text{Span}(\{\text{Zeilen von } A'\})$

[[Lineare Abbildungen]]