Definition

- Vergleich unterschiedlicher [[Schätzer]] erfordert gewisse Kriterien
- mittlere quadratische Fehler eines Schätzers $\bar{\theta}$
  - $$\mathsf{E}_\theta\left[(\hat{\theta}-\theta)^2\right] = \mathsf{Var}_\theta(\hat{\theta}) + \mathsf{Bias}_\theta(\hat{\theta})^2.$$
- Bias von $\bar{\theta}$
  - $$\mathsf{Bias}_\theta(\hat{\theta}) = \mathsf{E}_\theta(\hat{\theta}) - \theta$$
  - erwartungstreu, wenn 0 $\leftrightarrow$ MSE = Varianz
- Beweis
  - $$\mathbb{E}[(\hat{\theta}-\theta)^2] = \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}] + \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2]$$
    $$= \mathbb{E}[(\hat{\theta}-\mathbb{E}[\hat{\theta}])^2] + \cancel{\mathbb{E}[2(\hat{\theta}-\mathbb{E}[\hat{\theta}])(\mathbb{E}[\hat{\theta}]-\theta)]}$$
    $$+ \mathbb{E}[(\mathbb{E}[\hat{\theta}]-\theta)^2] \qquad 2(\mathbb{E}[\hat{\theta}]-\theta) * \underbrace{\mathbb{E}[(\hat{\theta}-\mathbb{E}[\hat{\theta}])]}_{=0}$$
    $$= \mathbb{V}\mathrm{ar}(\hat{\theta}) + \mathrm{Bias}(\hat{\theta})^2$$
    $$\mathbb{E}[\underbrace{(\mathbb{E}[\hat{\theta}]-\theta)^2}_{\text{Zahl}}] = (\underbrace{\mathbb{E}[\hat{\theta}]-\theta}_{\mathrm{Bias}(\hat{\theta})})^2$$

Beispiele

- **Beispiel.** Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$. Der Parameter μ wird durch $\bar{X}$ geschätzt. Dann ist der MSE
  $$\mathsf{E}\left[(\bar{X}-\mu)^2\right] = \mathsf{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$
- **Beispiel.** Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{Bernoulli}(p)$. Der Parameter p wird abermals durch $\bar{X}$ geschätzt. Der MSE entspricht dann
  $$\mathsf{E}\left[(\bar{X}-p)^2\right] = \mathsf{Var}(\bar{X}) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Beispiel. Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Wir schätzen den Parameter σ^2 durch

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2.$$

Für den MSE gilt (Übung)

- $$\mathrm{E}\left[(S^2 - \sigma^2)^2\right] = \mathrm{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$