Definition

- Zwei Zufallsvariablen X and Y heißen unabhängig, falls

  $$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

  für alle infrage kommenden Mengen A und B (z.B. Intervalle).

  Man kann zeigen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn

  $$\begin{aligned} F^{XY}(x,y) &= P(X \le x, Y \le y) \\ &= P(X \le x)P(Y \le y) = F^X(x)F^Y(y). \end{aligned}$$
- [[Zufallsvariable]] sind unabhängig, wenn

  $$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f^{X_i}(x_i),$$

  - *falls eine Dichte existiert.*

  $$p_{k_1,\ldots,k_n} = \prod_{i=1}^{n} p_{k_i}^{X_i},$$

  - *falls eine PMF existiert.*
- *Sind die Zufallsvariablen X_n unabhängig, so sind auch Funktionen $g_n(X_n)$ unabhängig.*
- [[Erwartungswert]] von unabhängigen ZV

  $$E(XY) = E(X)E(Y).$$

  -

Beispiele

- Sendestation

Ein Empfänger bekommt Signale von 3 Sendestationen. Die Signalstärke X_j der j-ten Station folgt einer Verteilung F_j, also $P(X_j \leq x) = F_j(x) = 1 - e^{-\lambda_j x}$, $x \geq 0$. Dabei ist $\lambda_1 = 1.3$, $\lambda_2 = 2.1$ und $\lambda_3 = 0.8$. Man kann annehmen, dass die Signalstärken der Stationen voneinander unabhängig sind. Um das Signal korrekt zu verarbeiten, braucht der Empfänger von mindestens einem Sender eine Signalstärke > 0.5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Signal korrekt verarbeitet wird?

–

Signal stärke

X_j ... Signalstärke Station $j = 1, 2, 3$

$F_j(x) = P(X_j \leq x) = 1 - e^{-\lambda_j x}$ $\quad x \geq 0$

$P(\text{mindestens ein } X_j > 0.5) =$

$1 - P(\text{kein } X_j > 0.5) =$

$1 - P(X_1 \leq 0.5 \wedge X_2 \leq 0.5 \wedge X_3 \leq 0.5) =$

$1 - P(X_1 \leq 0.5)\, P(X_2 \leq 0.5)\, P(X_3 \leq 0.5) =$

$1 - (1 - e^{-\lambda_1 0.5})(1 - e^{-\lambda_2 0.5})(1 - e^{-\lambda_3 0.5}) = ?$

–

- Niederschlagsmenge

An einem Ort ist die maximale 3-stündige Niederschlagsmenge innerhalb eines Jahres Weibull-verteilt, d.h. die CDF ist gleich

$$F(x) = 1 - e^{-(\lambda(x-\mu))^k}, \quad x \geq \mu.$$

Angenommen wir wüßten, dass $\lambda = 1/10$, $k = 2$ und $\mu = 15$. Weiters sind diese extremen Niederschlagsmengen voneinander unabhängig. Wir suchen einen Wert z derart, dass die Wahrscheinlichkeit innerhalb der nächsten 100 Jahren z zu überschreiten, kleiner als 5% ist.

–

Extremniederschlag

$$F(x) = 1 - e^{-(\lambda(x-\mu))^k}, \quad x \geq \mu$$

$$X_j \overset{iid}{\sim} F \qquad = 1 - e^{-\left(\frac{1}{10}(x-15)\right)^2}$$

$$P\left(\max_{1 \leq j \leq 100} X_j \geq z\right) \leq 0.05 \iff$$

$$\underbrace{P\left(\max_{1 \leq j \leq 100} X_j < z\right)}_{} \geq 0.95$$

- $$P\left(\bigcap_{j=1}^{100} \{X_j < z\}\right) = (F(z))^{100} = \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{10}(z-15)\right)^2}\right)^{100} \overset{!}{=} 0.95$$

- $$\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{10}(z-15)\right)^2}\right)^{100} \overset{!}{=} 0.95$$

  $$\log\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{10}(z-15)\right)^2}\right) = (\log 0.95)/100$$

  $$e^{-\left(\frac{1}{10}(z-15)\right)^2} = -e^{(\log 0.95)/100} + 1$$

  $$z = 10\sqrt{-\log\left(1 - e^{(\log 0.95)/100}\right)} + 15$$

Alternative Herleitung für [[Diskrete Verteillungen]]

- [[Binomialverteilung]] hergeleitet
  - Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige ZVen mit $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1 - p$.
    Sei $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Was ist dann $P(S_n = k)$?
  - $$P(S_n = k) = P(\{X_1 = 1, \ldots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_n = 0\} \cup \ldots \cup \{X_1 = 0, \ldots, X_{n-k} = 0, X_{n-k+1} = 1, \ldots, X_n = 1\})$$
    $$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
- [[Geometrische Verteilung]] hergeleitet
  - Seien $X_1, X_2, \ldots$ iid ZVen, die die Werte 0 und 1 annehmen. Angenommen $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1 - p$. Sei T der erste Zeitpunkt in welchem die Zahl 1 vorkommt. Bestimme $P(T = k)$.

$$P(T=k) = P(X_1=0, X_2=0, \ldots, X_{k-1}=0, X_k=1)$$

$$= \underbrace{P(X_1=0)}_{1-p}\underbrace{P(X_2=0)}_{1-p}\cdots\underbrace{P(X_{k-1}=0)}_{1-p}\,\underbrace{P(X_k=1)}_{p}$$

$$= (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p \qquad (q = 1-p)$$