

Übersicht

- [[Anwendungen der Residuenrechnung]]
- f: $[a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$
- Laplace Transformation

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

- $Lf(s)$ existiert, wenn $\exists A, C \in \mathbb{R} \forall t \in \mathbb{R}^+ : |f(t)| \leq C e^{At}$
- Konvergenzabszisse $c_0(f)$
 - $\forall f \exists c_0(f) \in \mathbb{R} : \forall s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(s) > c_0(f) \text{ } Lf(s) \text{ existiert}$
 - $Lf(s)$ ist holomorphe Funktion für $\operatorname{Re}(s) > c_0(f)$
- Doetsch Symbol

– Beziehung zwischen f und Lf



Rechenregeln für L

$F(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\mathcal{L}F(s)$
$aF(t) + bG(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$a\mathcal{L}(F(s)) + b\mathcal{L}(G(s))$
$F(t), G(t), H(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$f(s), g(s), h(s)$
1	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{1}{s}$
$e^{\alpha t}$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{1}{s-\alpha}$
t^n	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n e^{\alpha t}$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$\sin \alpha t$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$
$\cos \alpha t$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$
$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$
$\alpha > -1, \quad t^\alpha$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
$\delta(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	1
$F^{(k)}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$s^k f(s) - s^{k-1} F(0) - s^{k-2} F'(0) - \dots - F^{(k-1)}(0)$
$t^k F(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$(-1)^k f^{(k)}(s)$

$\lambda > 0, \quad \begin{cases} F(t-\lambda) & \text{für } t \geq \lambda \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$e^{-\lambda s} f(s)$
$e^{-\alpha t} F(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$f(s+\alpha)$
$F(\rho t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{1}{\rho} f\left(\frac{s}{\rho}\right)$
$F * G(t) = \int_0^t F(\tau) G(t-\tau) d\tau$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$f(s)g(s)$
$\frac{F(t)}{t}$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\int_s^\infty f(v) dv$
$\int_0^t F(\tau) d\tau$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{f(s)}{s}$
$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) e^{st} ds$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$f(s)$

DGL lösen

Lineare DGL
 $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = f$ \longrightarrow $s^n \mathcal{L} y(s) + a_{n-1} s^{n-1} \mathcal{L} y(s) + \dots + a_0 \mathcal{L} y(s) + \text{Polynom} = \mathcal{L} f(s)$
 $\mathcal{L} y(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} (\mathcal{L} f(s) - \text{Polynom})$
 Rücktransformation

- Laplace Transformation auf lineare DGL
- dividieren statt DGL lösen
- Rücktransformation
- Beispiel: Rücktransformation mit PBZ

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{y'' + y}{s^2 + 1} \right] &= \frac{y(s) - y(0)}{s^2 + 1} + \frac{y'(0)}{s(s^2 + 1)} \\ \mathcal{L} y(s) &= \frac{s^2 y(s) - s y(0) - y'(0)}{(s^2 + 1)^2} + \frac{y(s)}{s} = \frac{1}{s} \\ y(s) &= \frac{1}{s+1} \left(\frac{s^2 + 1}{s} \right) = \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 + 1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s} = \frac{1}{s} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s} \Rightarrow 1 = \sin(t) \end{aligned}$$

Laplace Umkehrformel

[illegible]

- Rücktransformation mit CIF statt
 - PBZ
 - Bekanntsein der Rechenregeln für L
- Verschiebung in Gebiet mit Polstellen
 - \Rightarrow Residuensatz statt CIF

$$y(t) = \sum \text{Res} \left(\frac{s^3 + 3s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 5)} e^{st} \right).$$

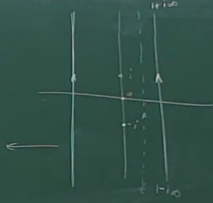
- * Verschieben des Kurvenintegrals im holomorphen Gebiet ändert nichts
- * Kurvenintegral = 0
- * Summe der Residuen bleibt übrig

Beispiele mit Umkehrformel

- gleiche Beispiel wie oben jedoch ohne PBZ

Bsp: $y'' + y = 1$ $y(0) = 1, y'(0) = -1$

$$Y(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 + 1)} \quad y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 + 1)} e^{st} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 + 1)} e^{st} ds + \left(\text{Res}_{s=0} \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 + 1)} e^{st} \right)$$


$$\text{Res}_{s=0} \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 + 1)} e^{st} = \frac{1}{1} e^{0t} = 1$$

$$\text{Res}_{s=i} \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 + 1)} e^{st} = \frac{-1-i+1}{i(2i)} e^{it} = -\frac{1}{2i} e^{it}$$

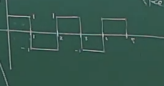
$$\text{Res}_{s=-i} \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 + 1)} e^{st} = \frac{1}{2i} e^{-it}$$

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it}) = 1 - \sin(t)$$

• Rechteckschwingung mit unendlich Polen

Bsp: $y'' + 2y' + 2y = f(t)$ $y(0) = y'(0) = 0$

Rechteckschwingung



$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n}^{2n+1} 1 \cdot e^{-st} dt + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n+1}^{2n+2} (-1) e^{-st} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-2n}}{s} - \frac{e^{-(2n+1)}}{s} + \frac{e^{-(2n+1)}}{s} - \frac{e^{-(2n+2)}}{s} \right) = \frac{1}{s} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n} (1 - e^{-1}) \right) = \frac{1 - e^{-1}}{s(1 - e^{-2})} = \frac{e^{-1} - 1}{s(e^2 - 1)}$$

$$s^2 Y(s) + 2s Y(s) + 2Y(s) = \frac{e^{-1} - 1}{s(e^2 - 1)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \frac{e^{-1} - 1}{s(e^2 - 1)}$$

$$\text{Res}_{s=-(2+i)\pi} \frac{e^{-1} - 1}{s(s^2 + 2s + 2)} e^{st} = \frac{-1-1}{(2+i)\pi ((2+i)\pi^2 + 2(2+i)\pi + 2)} e^{(2+i)\pi t}$$

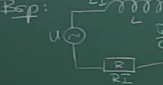
$$\text{Res}_{s=-(2-i)\pi} \frac{e^{-1} - 1}{s(s^2 + 2s + 2)} e^{st} = \frac{-1+1}{(-2-i)\pi ((-2-i)\pi^2 + 2(-2-i)\pi + 2)} e^{(-2-i)\pi t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-2 e^{(2+i)\pi k t}}{(2+i)\pi ((2+i)\pi^2 + 2 - 2(2+i)\pi)} + \frac{e^{-1-i} - 1}{(-1+i)(2i)} \frac{e^{-t} e^{it}}{e^{1+i} + 1} + \frac{e^{-1-i} - 1}{(-1-i)(-2i)} \frac{e^{-t} e^{-it}}{e^{-1-i} + 1}$$

periodisch mit Periode 2
'eingelagerten Zustand'

$\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$
'transiente Lösung'

• Kirchhoffsche Gesetz

Bsp: 

$$L \dot{I} + \frac{Q}{C} + RI = U$$

$$L \ddot{I} + \frac{\dot{Q}}{C} + R \dot{I} = \dot{U}$$

$$L \ddot{I} + R \dot{I} + \frac{1}{C} I = \dot{U}$$

$$\mathcal{L}\{L \ddot{I} + R \dot{I} + \frac{1}{C} I\} = \mathcal{L}\{\dot{U}\}$$

$$(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}) \mathcal{L}\{I\} = s \mathcal{L}\{U\} - U(0)$$

$$\mathcal{L}\{I\} = \frac{s \mathcal{L}\{U\} - U(0)}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}$$

zu part. Auflösgang
Skript-Lösung


Anfangswerte $\rightarrow e^{-\frac{R}{2L}t}$

$$\mathcal{L}\{U\} = \frac{1}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\{I\} = \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C})}$$

$$I(t) = \text{Res}_{s=i\omega} \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C})} e^{st} + \text{Res}_{s=-\frac{R}{2L} \pm i\frac{\sqrt{4L/C - R^2}}{2L}} \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C})} e^{st}$$

eingelagerten Zustand

$$\text{Res}_{s=i\omega} \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C})} e^{st} = \frac{i\omega}{2i\omega(-L\omega^2 + R i\omega + \frac{1}{C})} e^{i\omega t} = \frac{e^{i\omega t}}{2i\omega(L\omega^2 + R + \frac{1}{iC\omega})}$$


Exkurs: Distributionen

$$\begin{aligned} \text{Theorem 1.1 (Leibniz rule)} \quad \frac{d}{dt} \int_a^b f(t, x) dx &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx + f(t, b) \frac{db}{dt} - f(t, a) \frac{da}{dt} \\ \text{Proof:} \quad \frac{d}{dt} \int_a^b f(t, x) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^b f(t+h, x) dx - \int_a^b f(t, x) dx \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^b f(t, x) dx + \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx h + o(h) \right) \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \delta(s) &= \int_0^\infty \delta(t) e^{-st} dt = 1 \\ \mathcal{L} y(s) &= \frac{1}{s^2 + 2s + 2} e^{-(s+1)(t-1)} = \frac{e^{-(s+1)(t-1)}}{s^2 + 2s + 2} \\ \mathcal{L} y(s) &= \frac{e^{-(s+1)(t-1)}}{s^2 + 2s + 2} = \frac{e^{-(s+1)(t-1)}}{(s+1)^2 + 1} \\ \mathcal{L} y(s) &= \frac{e^{-(s+1)(t-1)}}{(s+1)^2 + 1} = \frac{e^{-(s+1)(t-1)}}{(s+1)^2 + 1} \\ \mathcal{L} y(s) &= \frac{e^{-(s+1)(t-1)}}{(s+1)^2 + 1} = \frac{e^{-(s+1)(t-1)}}{(s+1)^2 + 1} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{|\vec{x}-\vec{x}_0|=R} f(\vec{x}) \frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} \cdot d\vec{s}(\vec{x}) = \iiint_{|\vec{x}-\vec{x}_0|<R} f(\vec{x}) \cdot \frac{d\vec{s}\left(\frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}\right)}{\underbrace{\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)}} d\vec{x} d\vec{y} d\vec{z}$$