

## Lineare Rekursion

- $a_n$  mit  $n$ 
  - $a_n = c_1 * a_{n-1} + c_2 * a_{n-2} + \dots + c_l * a_{n-l}$ 
    - \*  $\Rightarrow a_n - c_1 * a_{n-1} - c_2 * a_{n-2} - \dots - c_l * a_{n-l} = 0$
  - $c_i$  Konstante
  - Anfangsbedingung/startwert fix gegeben
- Charakteristische Polynom
  - $Q(x) = x^l - c_1 * x^{l-1} - c_2 * x^{l-2} - \dots - c_l$
  - hat  $Q(x)$   $l$  verschiedene Nullstellen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ 
    - \*  $a_n = \alpha_1 * \lambda_1^n + \alpha_2 * \lambda_2^n + \dots + \alpha_l * \lambda_l^n$
    - \* Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ , sodass Anfangsbedingungen erfüllt
- Beispiel: Fibonacci-Folge

Fibonacci-Zahlenfolge,  $(a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0)$

$$Q(x) = x^2 - x - 1$$

hat Nullstellen

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Nach dem Satz X gilt

$$a_n = \alpha_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$
$$= \left( 1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2(4 - \sqrt{5})} \right) \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2(4 - \sqrt{5})} \right) \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Anfangsbedingungen

$$1 = a_0 = \alpha_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 + \alpha_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2$$

$$1 = a_1 = \alpha_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 + \alpha_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1$$

$$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\alpha_1 + \alpha_2 \left( 3-\sqrt{5} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{(4-\sqrt{5})}{2} \alpha_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

## Erzeugende Funktionen

- formale Potenzreihe
  - $A(z) := a_0 + a_1 * z + a_2 * z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n * z^n$
  - $z$  formale Variable
- $A(z)$  heißt erzeugende Funktion/Potenzreihe der Folge  $a_n$
- $[z^n]A(z) := a_n$ 
  - Reskalierung
    - \*  $[z^n]A(z) = n[z^n]A(z)$
  - Rechenregeln
    - \*  $A(z) + B(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$
    - \*  $A(z) * B(z) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n a_k * b_{n-k} \right) z^n$
    - \*  $\frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{n \geq 0} a_n * z^n \right) = \sum_{n \geq 1} n * a_n * z^{n-1}$
- $B(z)$  ist Reziprokes von  $A(z)$ , wenn  $A(z) * B(z) = B(z) * A(z) = 1$ 
  - $A(z) = \frac{1}{B(z)}$
  - Beispiele:
    - \* geometrische Reihe

$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$  (geometrische Reihe).  $1-z$  ist das Reziproke von  $A(z)$ .  
 $A(z)(1-z) = (1+z+z^2+z^3+\dots)(1-z) = (1-z) + (z-z^2) + (z^2-z^3) + \dots = 1$   
 Also  $A(z) = \frac{1}{1-z}$ . Für  $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ,  $\frac{1}{1-\beta z} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n z^n$

\* Fibonacci

Bsp. Fibonacci-Zahlen (\*)  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ,  $n \geq 2$  mit  $a_0 = a_1 = 1$ .

(\*)  $\Rightarrow a_n z^n = a_{n-1} z^n + a_{n-2} z^n$  für  $n \geq 2$   
 $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n$   $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$   
 $\Rightarrow A(z) - a_0 - a_1 z = z \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} + z^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^{n-2}$   
 $\quad \quad \quad = z \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = z(A(z) - a_0)$   $\quad \quad \quad = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z^2 A(z)$   
 $\Rightarrow A(z) - a_0 - a_1 z = zA(z) - a_0 z + z^2 A(z)$   
 $\Rightarrow \frac{A(z) - zA(z) - z^2 A(z)}{A(z)(1-z-z^2)} = a_0 + a_1 z - a_0 z = 1$

$\Rightarrow A(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$

•  $a_n$  bestimmen?

$\Rightarrow A(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$  Nenner  $= z^2(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1)$   
 $Q(x) = x^2 - x - 1$   
 Nullst. von  $Q(x)$ :  $\beta_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\beta_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$   
 Also  $Q(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)$   $\beta_1 - \beta_2 = \sqrt{5}$   
 $1-z-z^2 = z^2(\frac{1}{z^2} - \beta_1 \frac{1}{z} + \beta_2) = (1-\beta_1 z)(1-\beta_2 z)$   
 Partialbruch-  
 zerlegung  $A(z) = \frac{1}{(1-\beta_1 z)(1-\beta_2 z)} = \frac{\alpha_1}{1-\beta_1 z} + \frac{\alpha_2}{1-\beta_2 z}$   
 multipl. mit  $(1-\beta_1 z)(1-\beta_2 z) = 1-z-z^2$   
 $\Leftrightarrow 1 = \alpha_1(1-\beta_2 z) + \alpha_2(1-\beta_1 z)$   
 Einsetzen  $z = \frac{1}{\beta_1}$ :  $1 = \alpha_1(1 - \frac{\beta_2}{\beta_1}) = \alpha_1 \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1}$   
 $z = \frac{1}{\beta_2}$ :  $1 = \alpha_2(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}) = \alpha_2 \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2}$   
 D.h.  $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} = \frac{\beta_1}{\sqrt{5}}$   $\alpha_2 = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} = -\frac{\beta_2}{\sqrt{5}}$   
 D.h.  $A(z) = \frac{\beta_1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1-\beta_1 z} - \frac{\beta_2}{\sqrt{5}} \frac{1}{1-\beta_2 z}$   
 $a_n = [z^n] A(z) = \frac{\beta_1}{\sqrt{5}} \beta_1^n - \frac{\beta_2}{\sqrt{5}} \beta_2^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$

[[Kombinatorik]]