

## Überblick

- sei eine Kurve  $C [a,b] \rightarrow U$  stückweise differenzierbar
  - $t \mapsto z(t)$
  - $f$  holomorph auf  $U$
- $\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$ 
  - Substitution mit  $z = z(t)$ ,  $dz = z'(t) dt$
  - unabhängig von Parametrisierung
- Zerlegung in Real- und Imaginärteil
  - $\int_C f(z) dz = \int_C (u(x, y) + i(v(x, y))) * (dx + i dy) =$
  - $\int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dy + u(x, y) dx$
- wegunabhängig, wenn
  - Definitionsbereich von  $f$  sternförmig
  - $\oint f(z) dz = 0$ 
    - \* wegen Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$\int_C u(x,y) dx = v(x,y) dy + i \int_C v(x,y) dx + u(x,y) dy$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{C-R-Steinung} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

## Cauchyscher Integralsatz

- $\oint f(z)dz = 0$ , wenn
  - U sternförmig
  - f holomorph
  - C geschlossen in U
- Beispiele:

Bsp:  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x/2} e^{itx} dx = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^X e^{-x/2} e^{itx} dx$  (real & imag)

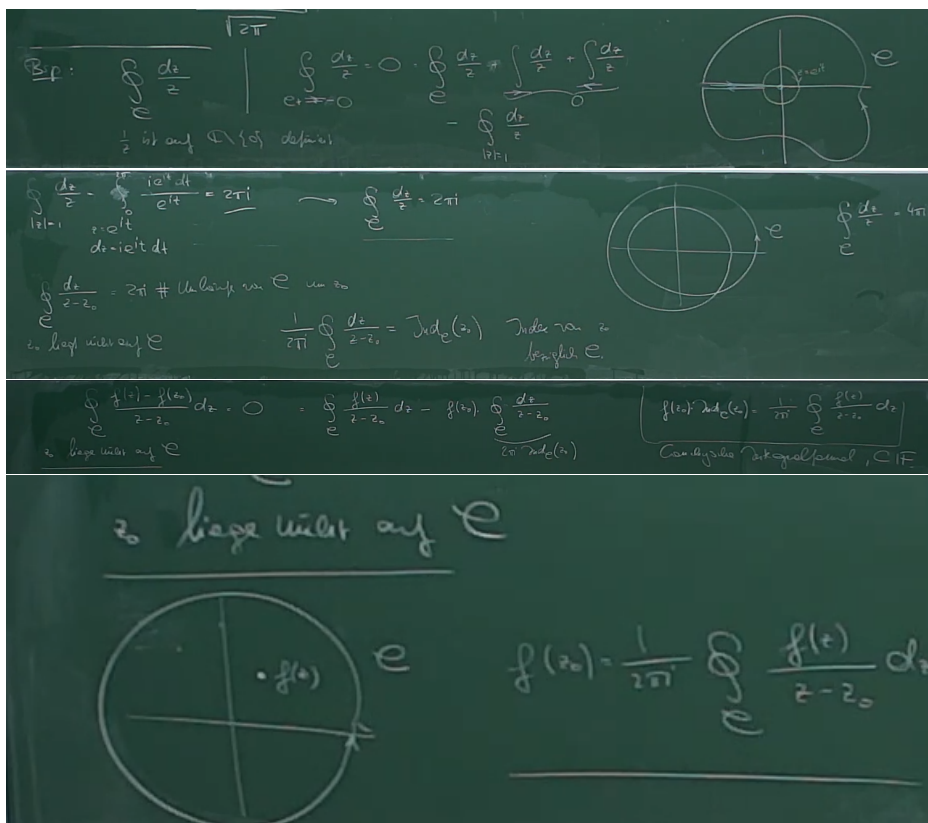
$\oint e^{-z^2/2} dz = 0 = \int_{-X}^X e^{-x/2} dx + \int_0^t e^{-(X+iy)^2/2} i dy - \int_{-X}^X e^{-(x+it)^2/2} dx - \int_0^t e^{-(-X+iy)^2/2} i dy$

$\int_{-X}^X e^{-(x+it)^2/2} dx = \int_{-X}^X e^{-x^2/2} e^{-ixt} dx e^{t^2/2}$

$\left| \int_0^t e^{-(x+iy)^2/2} i dy \right| = \left| \int_0^t e^{-(x^2-y^2)/2} dy \right| \leq e^{t^2/2} \int_0^t e^{-y^2/2} dy \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{t^2/2} \cdot e^{-t^2/2}$

$\lim_{X \rightarrow \infty} 0 = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx}_{\sqrt{2\pi}} - e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-ixt} dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-ixt} dx = \sqrt{2\pi} e^{-t^2/2}$

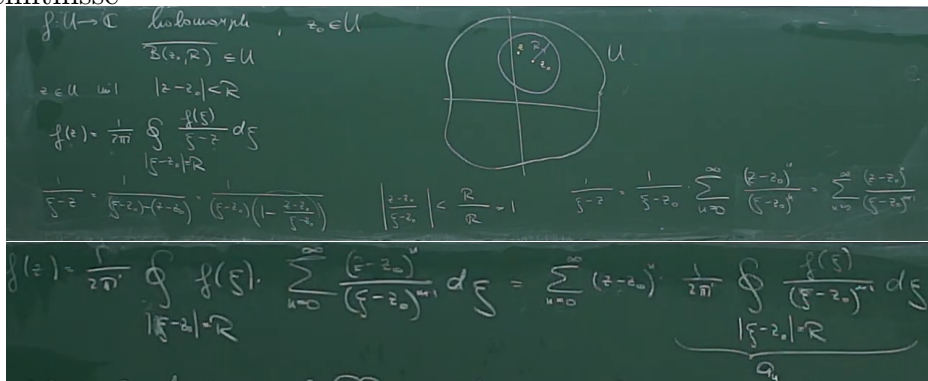
- Umläufe zählen



- Cauchysche Integralformel

$$f(z_0) \cdot \text{Ind}_C(z_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

- Erkenntnisse



– f lässt sich als Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\geq R$  darstellen

– f beliebig oft differenzierbar

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi} \oint_{C - z_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

$$* = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

\* C eine Kurve in U mit  $\text{Ind}_C(z_0) = 1$

- Cauchy-Abschätzung

– Maximumprinzip

$$* |a_n| \leq \text{Maximum am Rand des Kreises}$$

$$* |a_n| = \frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{1}{R^{n+1}} \max_{|\xi - z_0|=R} |f(\xi)| = \frac{1}{R^n} \max_{|\xi - z_0|=R} |f(\xi)|$$

– Satz von Liouville

- \* Sei  $f$  eine ganze Funktion und beschränkt  $\implies f$  ist konstant

*Anm:*  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$   
 \*  $\forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leq M \quad |a_n| \leq \frac{M}{R^n} \quad \text{f. jedes } R > 0 \quad R \rightarrow \infty \implies |a_n| \leq 0 \quad \underline{a_n = 0} \quad \text{f. } n \geq 1$

– Fundamentalsatz der Algebra

- \* Polynom  $p(z)$  mit Grad  $n \geq 1$
- \*  $\exists z_0 : p(z_0) = 0$
- \* jedes Polynom hat eine komplexe Nullstelle
- \* Beweis

*Bew:* Angenommen  $p(z)$  hat keine Nullstelle. Dann ist  $\frac{1}{p(z)}$  eine holomorphe Funktion.  
 Sei  $R = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|)$  und  $|z| \geq R+1$   
 $|p(z)| \geq |z|^n - (|a_0| |z|^{n-1} + |a_1| |z|^{n-2} + \dots + |a_{n-1}| |z|) \geq |z|^n - R(|z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \dots + |z|) \geq |z|^n - R \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} = |z|^n - R \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} = 1$   
 $|z| \geq R+1 : \left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq 1$   
 $|z| < R+1$  :  $\frac{1}{p(z)}$  ist stetig, daher beschränkt, also  $\exists M : \forall z : |z| < R+1 : \left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq M$   
 $\implies \forall z \in \mathbb{C} \quad \left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq \max(1, M) \implies \frac{1}{p(z)}$  ist eine beschränkte holomorphe Funktion, also konstant  $\checkmark$

• Nullstellen holomorpher Funktionen

- $N_f = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$  Nullstellenmenge
- $N_f$  entweder ganz  $U$  oder kein Häufungspunkt laut [[Satz von Bolzano-Weierstraß]]

*Bew:*  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z-z_0}{r}\right)^n$  für  $|z-z_0| < r$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$ .  $N_f = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$ . Das Menge hat einen Häufungspunkt.  
*Bew:*  $f \in H(U)$ ,  $f \not\equiv 0$ ,  $z_0 \in U$  eine Nullstelle von  $f$ .  
 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \rho > 0$ .  
 $f(z) = \frac{(z-z_0)^k}{(z-z_0)^k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k}$  mit  $a_k \neq 0$ .  
 In  $U$  ist die Nullstelle  $z_0$  eine Nullstelle von  $f$ , also ist  $z_0$  ein Häufungspunkt.

• Seien  $f, g$  holomorph auf  $U$ ,  $C$  eine Kurve aus  $U$

- $\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = g(z) \implies f(z) = g(z) : \forall z \in U$
- Definitionen der elementaren Funktionen (exp, log, ...) für  $z \in \mathbb{C}$  sind die einzig möglichen Fortsetzungen der reellen elementaren Funktionen

•

[[Komplexe Analysis]]