ACHTUNG: Eine Verbreitung der Unterlagen außerhalb der Vorlesung bzw. der dazugehörigen Übungen ist nicht gestattet !

Diese Vorlesung basiert auf: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

ISSN 0937-7433
ISBN 978-3-642-22568-0 e-ISBN 978-3-642-22569-7
DOI 10.1007/978-3-642-22569-7
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

5. Schwingungen und Wellen

- **Periodische Zustandsänderungen z.B. in mechanischen und elektromagnetischen Systemen**
- **Energie wird zwischen „Energiereservoirs“ hin und her bewegt (z.B.: potentiell ↔ kinetisch, elektrisch ↔ magnetisch)**

Periodizität beschrieben durch:

Schwingungsdauer, Periode, T

Frequenz, f

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

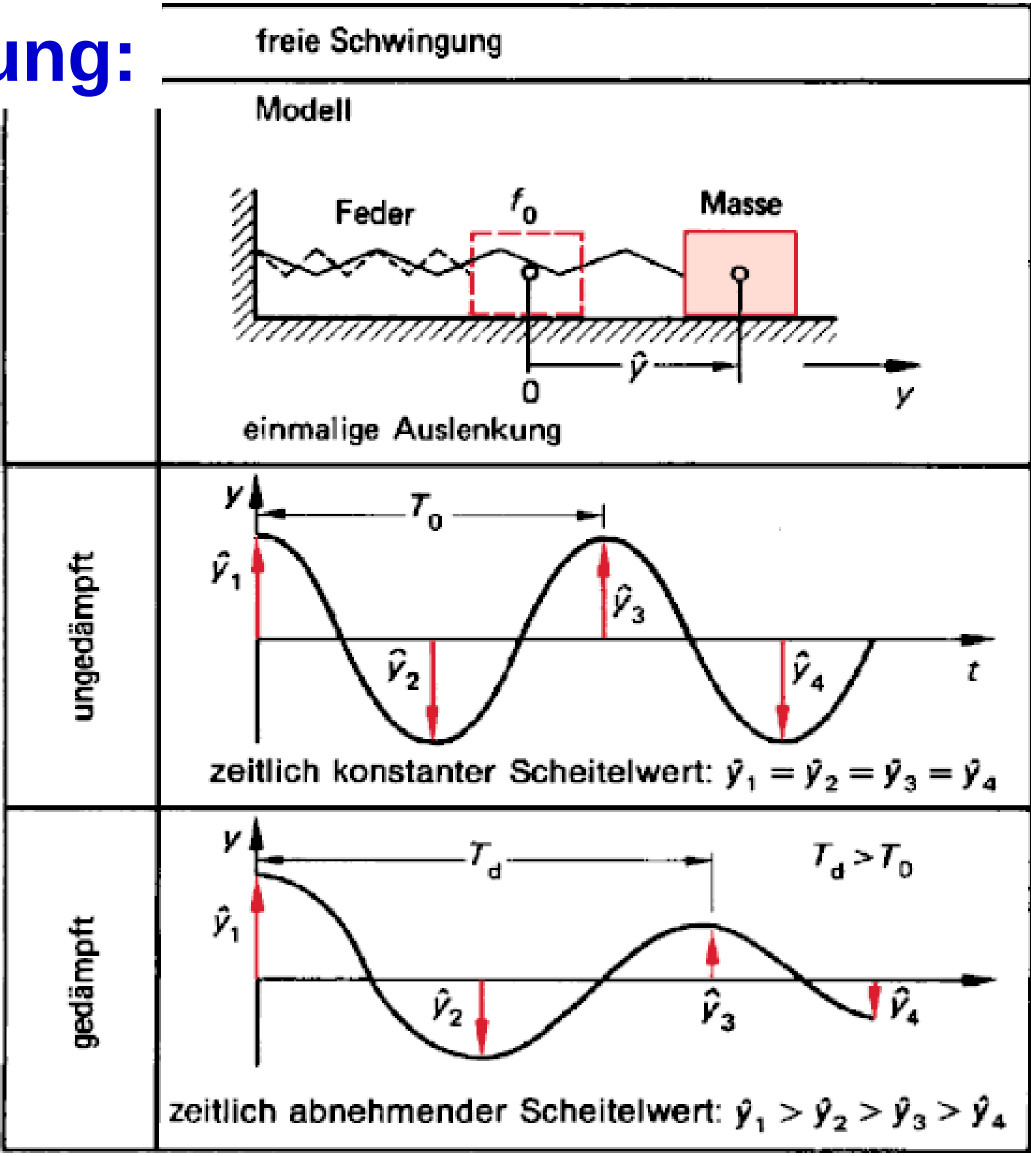
Schwingung: **periodische Bewegung eines einzelnen schwingungsfähigen Objects (Oszillators)**

Welle: **Bewegung vieler aneinander gekoppelter Elemente**

5.1 Schwingungen

aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Überblick freie Schwingung:



System einmal ausgelenkt und dann sich selbst überlassen

System schwingt mit systemtypischer Eigenfrequenz

Gedämpfte Schwingung:
äußere Kräfte (z.B. Reibung) → Energieverlust des Oszillators

Eigenfrequenz reduziert

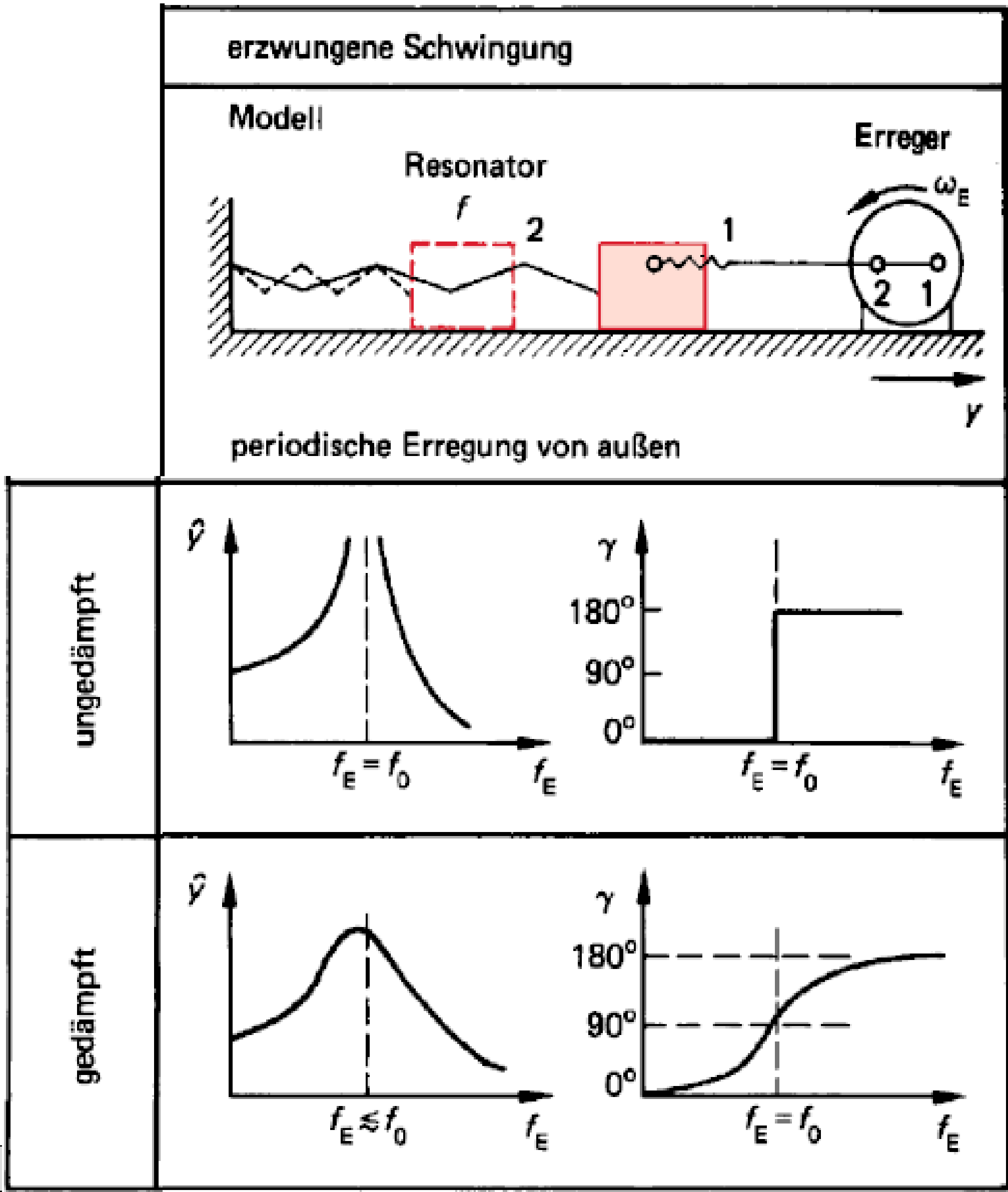
Überblick erzwungene Schwingung:

aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure"

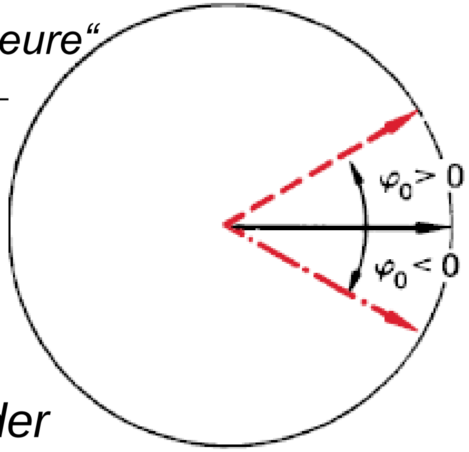
Erreger treibt Resonator periodisch an

System schwingt mit Erregerfrequenz, f_E

Unterschied zwischen Eigenfrequenz, f_0 und f_E bestimmt: Amplitude, Phasenverschiebung



aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“



Zentrale Eigenschaft von Schwingungen:

Periodizität

$$\boxed{y(t) = y(t+T)}$$

Als Projektion der Kreisbewegung auf x-Achse

In Praxis: Sehr viele Schwingungen harmonisch

(Auslenkung folgt sin oder cos Funktion)

$$\boxed{y(t) = \hat{y}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

$\hat{y}$ … **Amplitude**

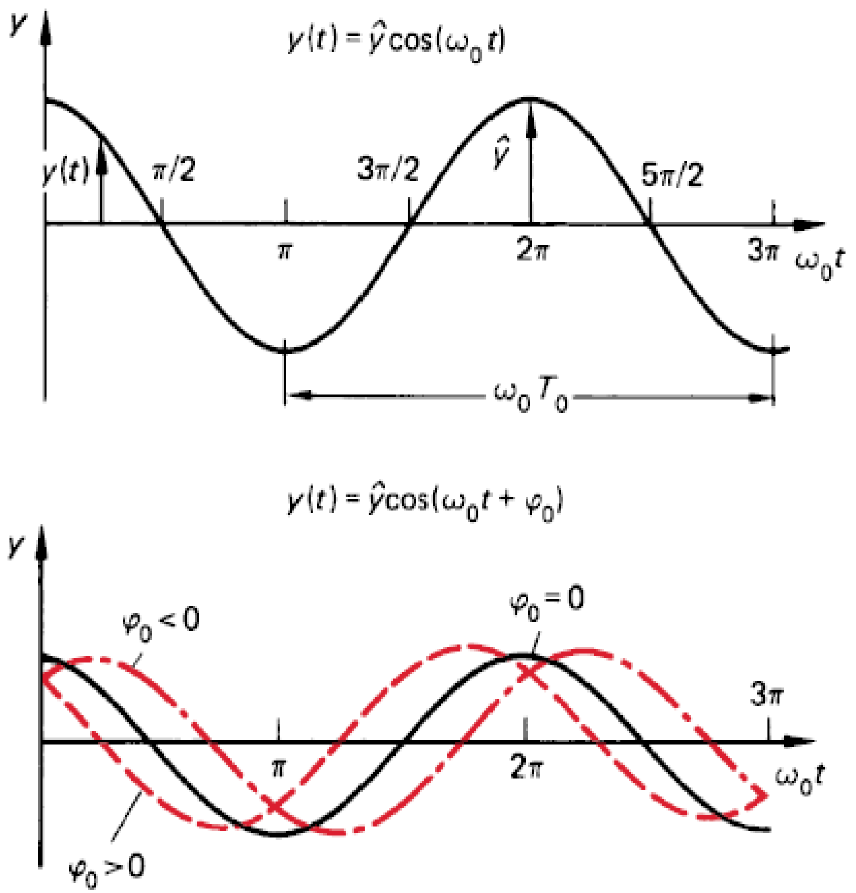
$\omega_0 = 2\pi\, f_0 = 2\pi / T_0$

… **Keisfrequenz**

φ_0 … **Nullphasenwinkel**

a)

b)



5.1.2 Freie Schwingung

Ungedämpftes Feder-Masse System:

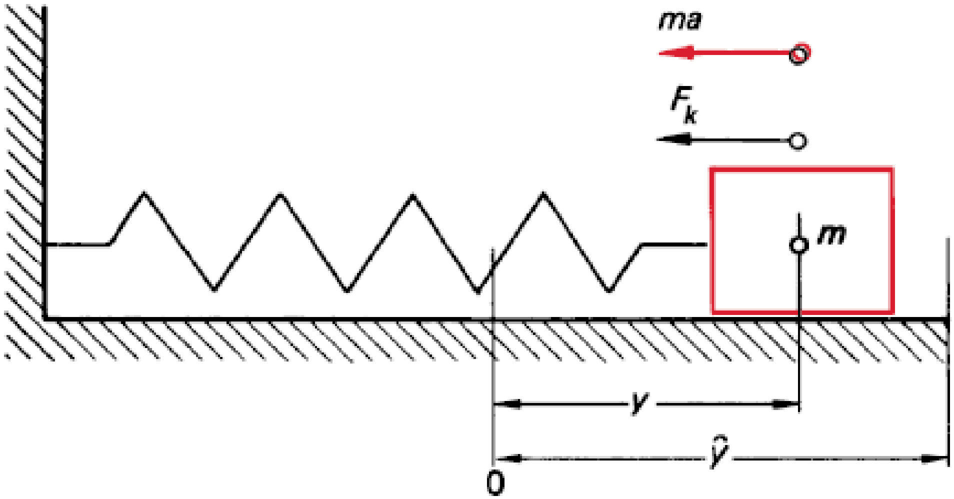
Bewegungsgleichung:

$$F_k = -ky = ma = m\ddot{y}$$

Hook'sches Gesetz
+ 2. Newtonsches Axiom

Schwingungsgleichung:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0}$$



Lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
→ klassischer Lösungsansatz:

$$\boxed{y(t) = \hat{y}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

Abb. 5.5 Eindimensionales Feder-Masse-System

Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure"

Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung ergibt:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

φ_0 ergibt sich aus den Randbedingungen

Für 0 und π:
Gesamte Energie als potentielle Energie der Feder gespeichert

Für $\pi/2$ und $3\pi/2$:
Gesamte Energie kinetische Energie der Masse

Dazwischen: Umverteilung

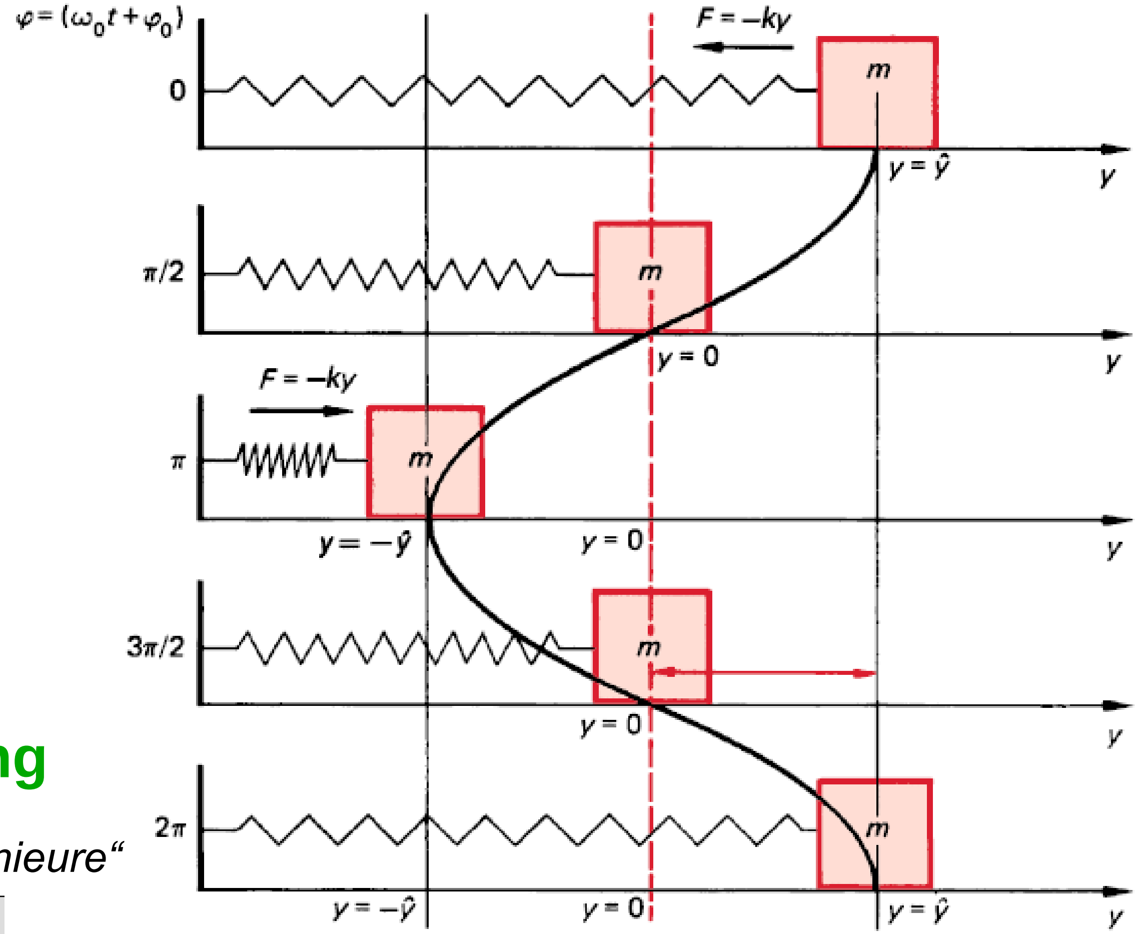


Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Allgemeine Differentialgleichung der freien, ungedämpften harmonischen Schwingung

$$\frac{d^2}{dt^2}(Variable) + K \cdot (Variable) = 0$$

Bedingung für Vorliegen so einer Differentialgleichung: Bewegungsursache (Kraft, Drehmoment) proportional aber entgegengesetzt zur Variablen

Lösung äquivalent zu Feder-Masse System:

$$\omega_0 = \sqrt{K};\ T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{K}}$$

Elektromagnetische Schwingung

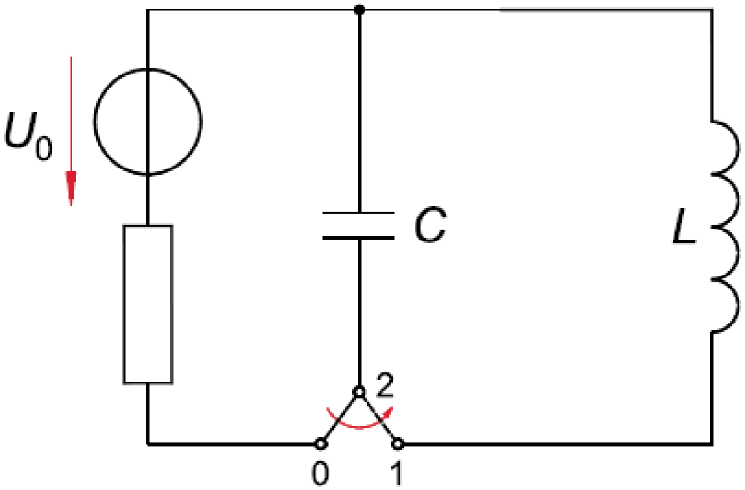


Abb. 5.17 Ungedämpfter elektromagnetischer Schwingkreis

Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Ausgangspunkt:

$$u_L + u_C = 0$$

$$u_L = L\frac{di}{dt};\ u_C = \frac{q}{C};\ i = \frac{dq}{dt}$$

u … Wechselspannung
i … Wechselstrom
q … im Kondensator gespeicherte Ladung
L … Induktivität der Spule
C … Kapazität des Kondensators

Daraus ergibt sich:

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0;\ \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{LC}i = 0;\ \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0}$$

Lösung:

$$q(t) = \hat{q}\cos(\omega_0 t + \varphi_{0q})$$

$$i(t) = \hat{i}\cos(\omega_0 t + \varphi_{0i})$$

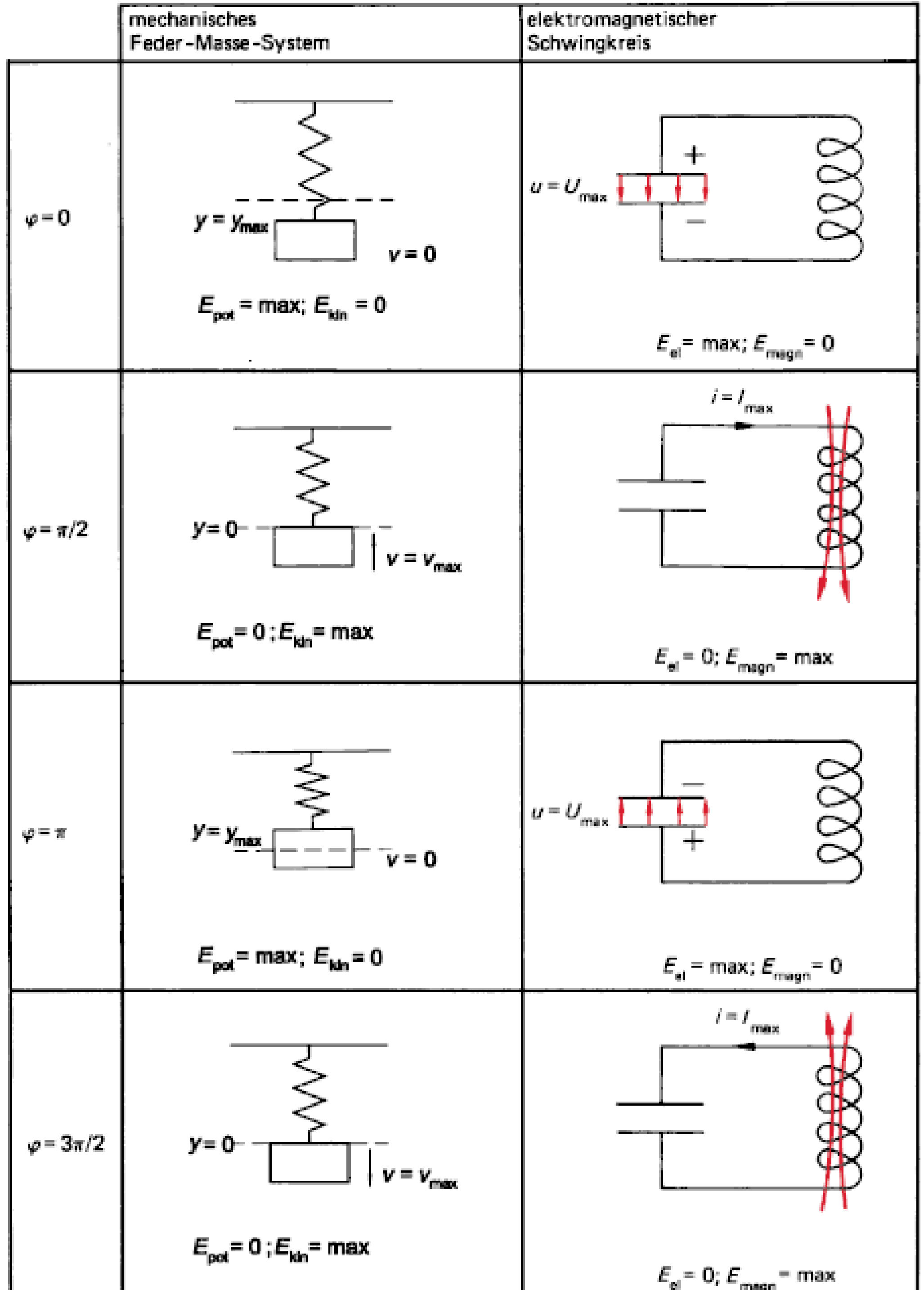
$$u_C(t) = \hat{u}_C\cos(\omega_0 t + \varphi_{0u_C})$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};\ T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$$

Periodischer Austausch zwischen elektrischer und magnetischer Energie.

Spule als „träges“ Element, das sich Stromänderung widersetzt.

aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“



Freie gedämpfte Schwingung:

- **Reibungskräfte dämpfen Schwingung, sodass sie mit der Zeit zur Ruhe kommt.**
- **Umwandlung von E_{ges} in thermische Energie.**

a) Geschwindigkeitsunabhängige Reibung (z.B. Gleitreibung), F_R $$F_R = \pm\mu F_N$$

b) Viskose Reibung $$F_R = -d\,v$$

c) Turbulente Reibung $$F_R = \pm b\,v^2$$

± da sich Richtung der Reibungskraft mit der Bewegungsrichtung ändert
μ, d, b … Reibungskoeffizienten, F_N … Normalkraft, v … Geschwindigkeit

$$\ddot{y} \pm \frac{\mu}{m} F_N + \frac{k}{m} y = 0; \quad \boxed{\ddot{y} + \frac{d}{m}\dot{y} + \frac{k}{m} y = 0;} \quad \ddot{y} \pm \frac{b}{m}\dot{y}^2 + \frac{k}{m} y = 0$$

Geschwindigkeitsproportionale Reibung

$$\ddot{y} + 2\delta\,\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

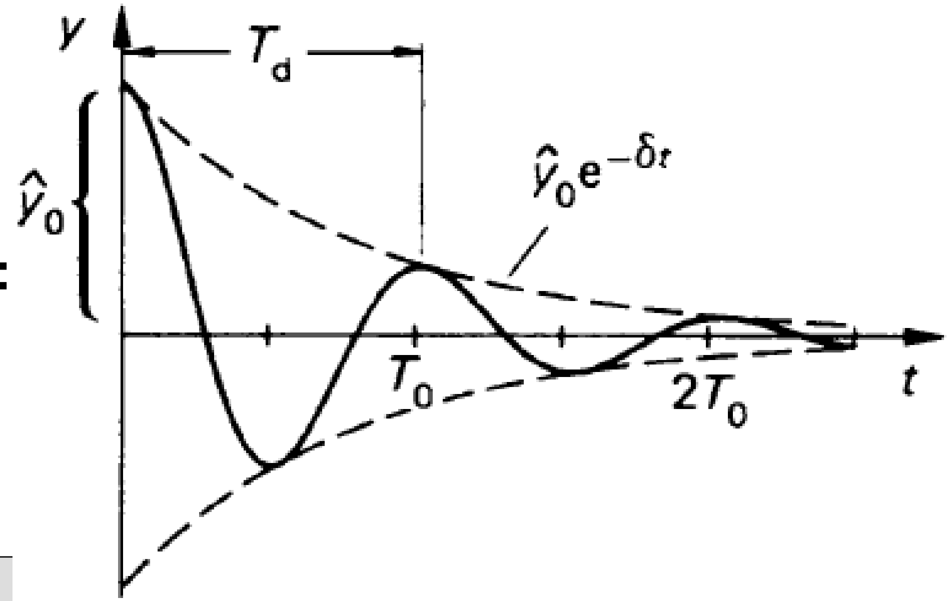
δ … **Abklingkoeffizient** (δ = d/(2m))

ω_0 … **Kreisfrequenz des ungedämpften Schwingers**

„Schwingfall" (tatsächliche Schwingung nur für $\omega_0 > \delta$) :

$$y(t) = \underbrace{\hat{y}_0 e^{-\delta t}}_{\text{mit der Zeit abnehmende Amplitude}} \cos(\omega_d t + \varphi_0)$$

Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure"



Mit der (reduzierten) Kreisfrequenz:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Analog: gedämpfter elektromagnetischer Schwingkreis

Energieverlustrate = am Widerstand umgesetzte Leistung

$$-\frac{dE_{el}}{dt} = i^2 R$$

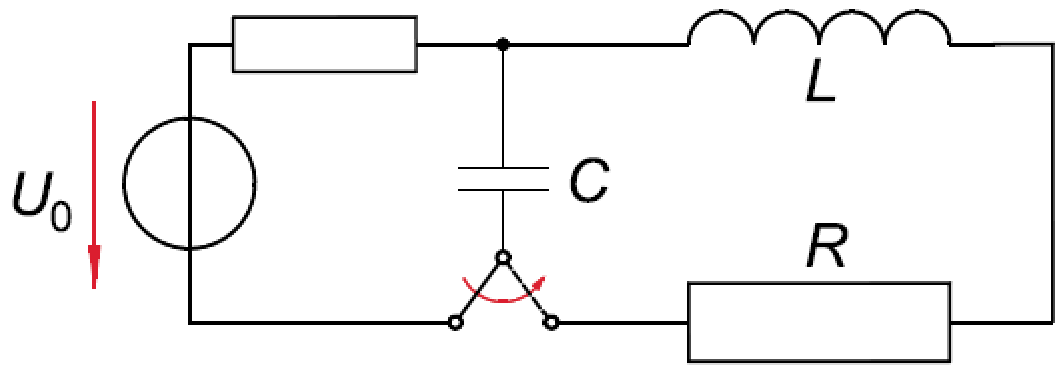


Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) = i^2 R$$

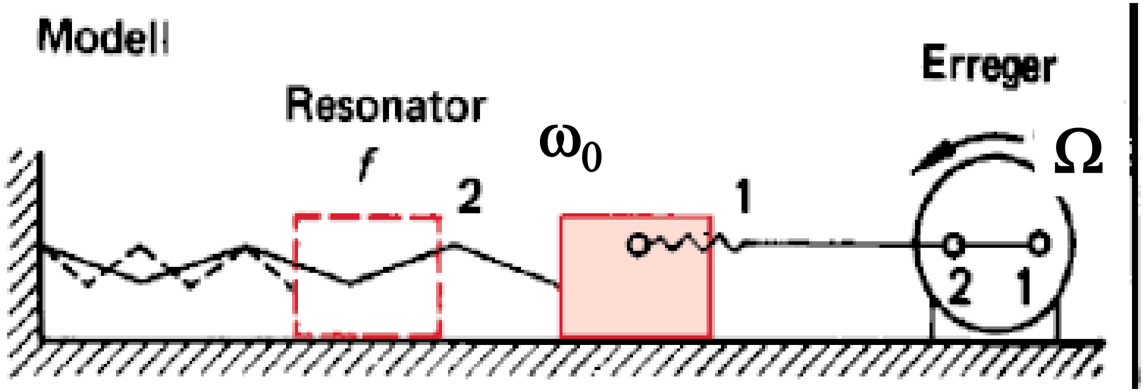
$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0}$$

E_{el} … gesamte elektrische Energie
u … Wechselspannung
i … Wechselstrom
q … im Kondensator gespeicherte Ladung
L … Induktivität der Spule
C … Kapazität des Kondensators
R … ohmscher Widerstand

5.1.3 Erzwungene Schwingung

Mechanisch oder elektrisch schwingungsfähiges System (Resonator) wird von einer äußeren periodischen Kraft oder Spannung (Erreger) angetrieben

Nach ausreichend langer Einschwingdauer:
System schwingt mit der Kreisfrequenz des Erregers, Ω



aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Inkl. Dämpfung ergibt sich folgende (inhomogene) Differentialgleichung:

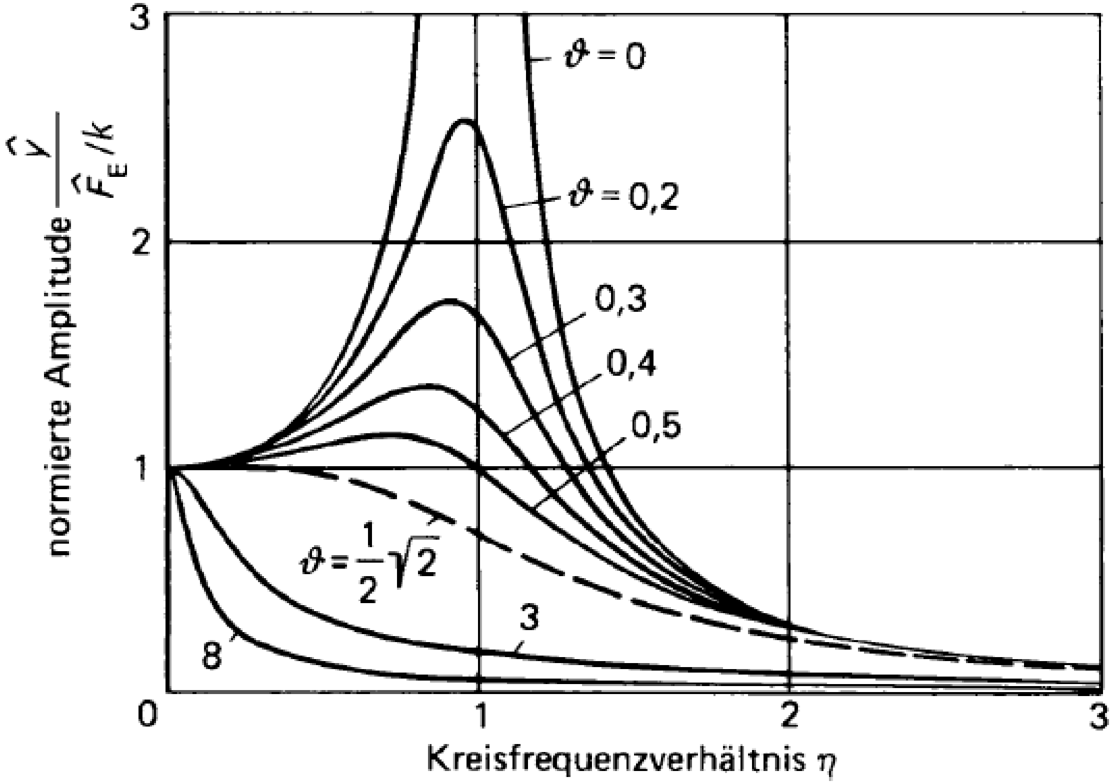
$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 2\delta\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \frac{\hat{F}_E}{m}\cos(\Omega t)}$$

Lösung für ausreichend große t:

harmonische Schwingung beschrieben durch Amplitude, Ω und Phasenwinkel φ.

Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure"

Amplitudenresonanzfunktion



Kreisfrequenzverhältnis:

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

Erreger (Ω), Resonator (ω_0)

η<<1 (quasistatischer Fall):

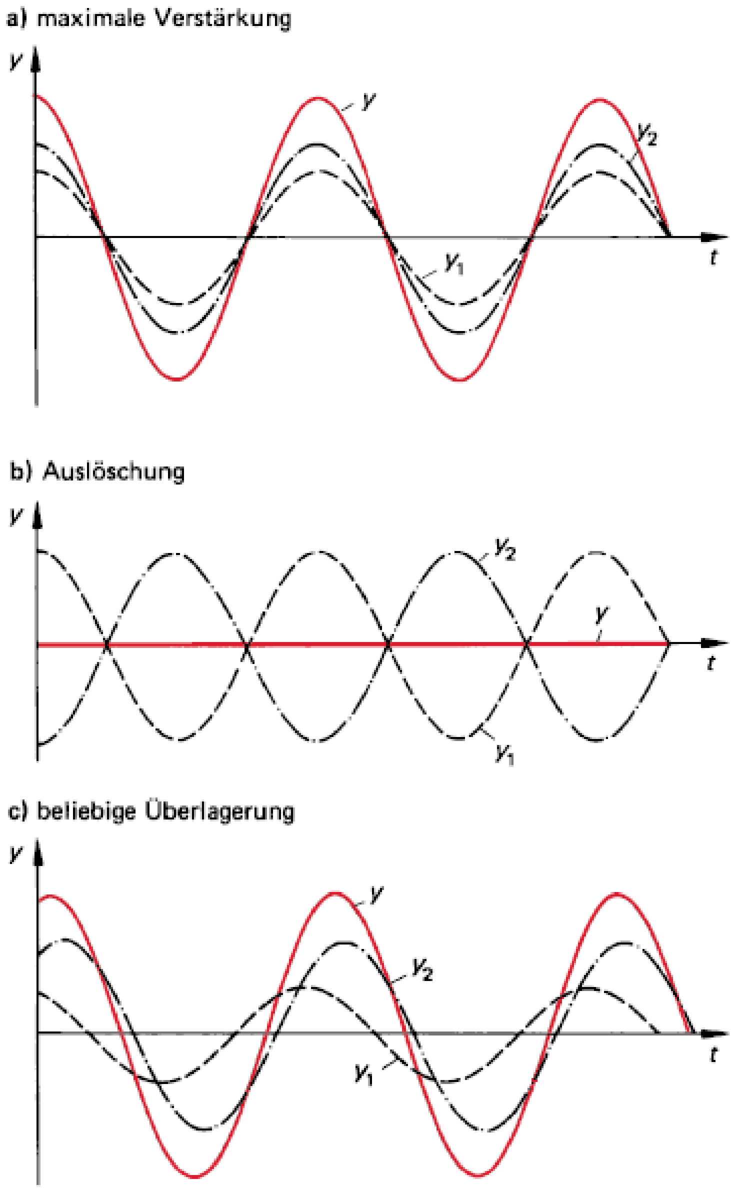
Resonator folgt Erreger mit geringer Phasenverschiebung

η~1 (Resonanzfall): Amplitude wird maximal; ohne Dämpfung: Resonanzkatastrophe (Erreger pumpt kontinuierlich Energie ins System → Amplitude divergiert)

η>>1 (hochfrequenter Fall): Amplitude geht gegen 0 ! Systeme zur Schwingungsdämmung.

5.1.4 Überlagerung von Schwingungen

Superpositionsprinzip: **Solange elastischer Bereich nicht verlassen wird sind die Einzelauslenkungen zu addieren.**



Harmonische Schwingungen gleicher Raumrichtung und gleicher Frequenz

- **Frequenz bleibt gleich**
- **Amplitude hängt von relativer Phasenlage ab**

Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Harmonische Schwingungen gleicher Raumrichtung und leicht unterschiedlicher Frequenz (Schwebung)

Reine Schwebung bei gleichen Amplituden

$$y_{neu}(t) = 2\underbrace{\hat{y}\cos(\pi f_s t)}\cos(\omega_{neu} t)$$

Amplituden moduliert mit Schwebungsfrequenz, f_s

$$\boxed{f_s = f_1 - f_2}$$

Resultierende Kreisfrequenz

$$\boxed{\omega_{neu} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}$$

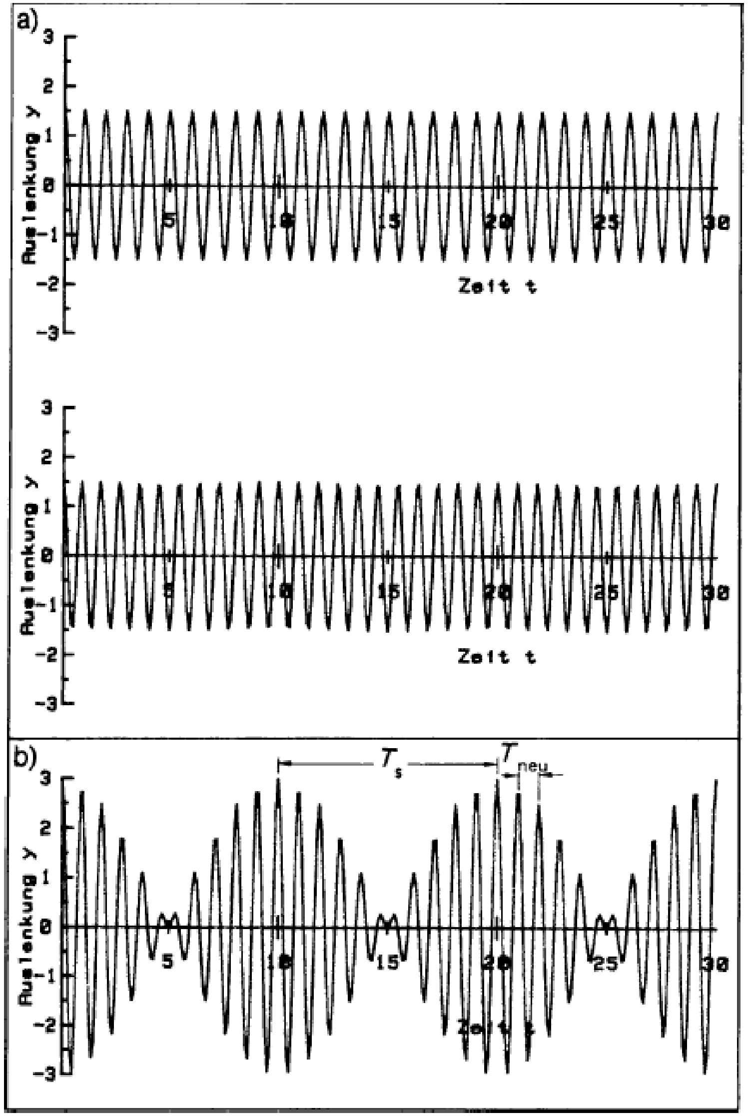


Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure"

Überlagerung harmonischer Schwingungen mit ganzzahligem Frequenzverhältnis, die senkrecht zueinander schwingen (Lissajous-Figuren)

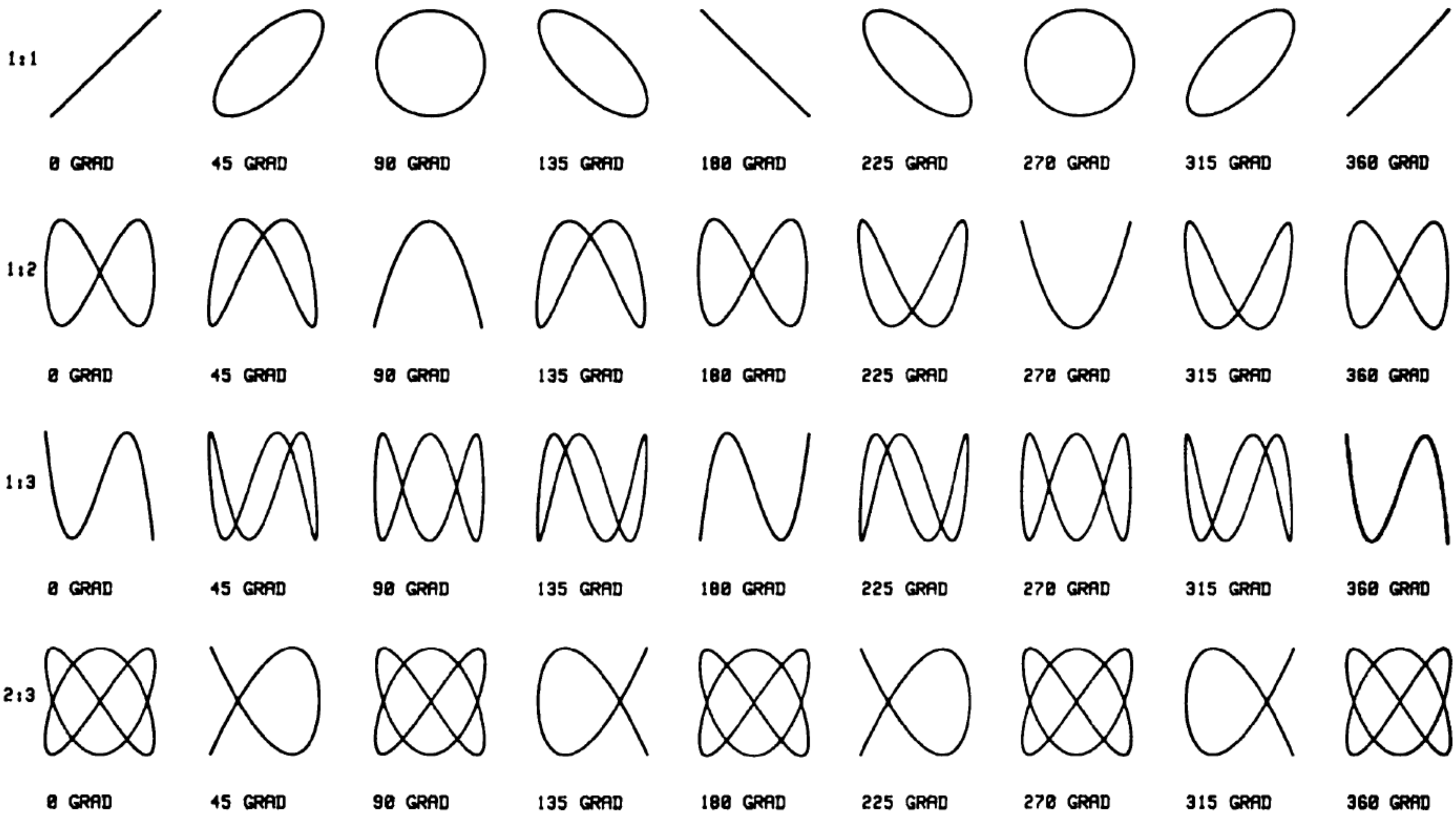


Abb. 5.41 Lissajous-Figuren unterschiedlicher Phasenlage für die Frequenzverhältnisse 1:1, 1:2, 1:3 und 2:3

5.2 Wellen

5.2.1 Grundlagen der Wellenausbreitung

- **Wellen entstehen, wenn schwingungsfähige Systeme aneinander gekoppelt sind**
- **Schwingung wird auf Nachbarn übertragen (gewisse Verzögerung**
- **→ räumliche Ausbreitung des Schwingungszustandes mit charakteristischer Fortpflanzungsgeschwindigkeit.**

Wellenausbreitung bewirkt Energie- aber keinen Materietransport.

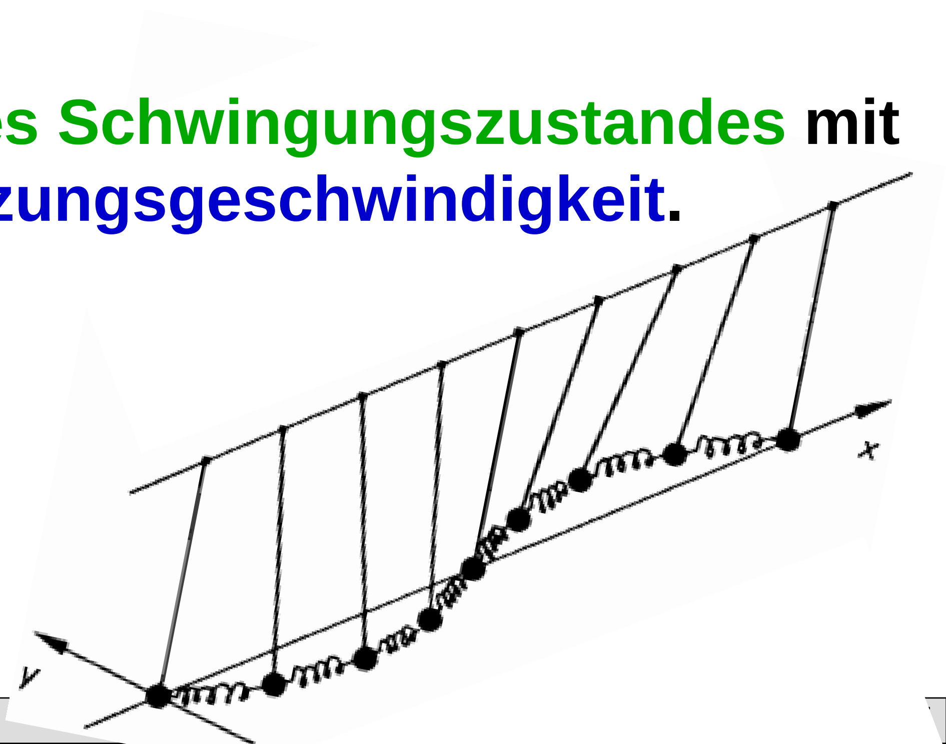


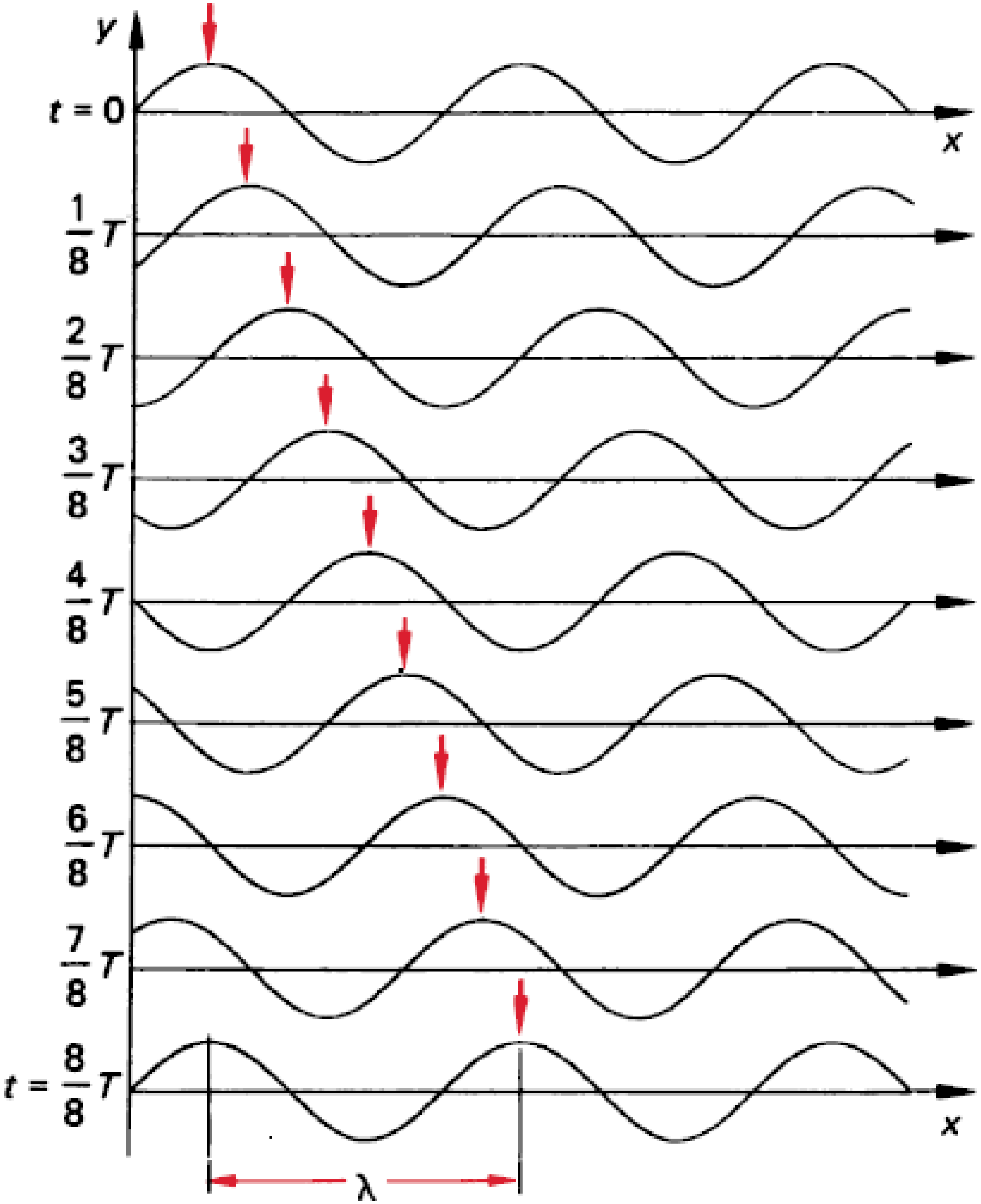
Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“ (adaptiert)

Auslenkungen sind orts- und zeitabhängig:

- Nach **Schwingungsdauer, T,** ist das Wellenbild wieder gleich.
- Räumlicher Abstand gleichartiger Zustände: **Wellenlänge, λ**

Fortpflanzungs/Phasen-geschwindigkeit, c:

$$\boxed{c = \frac{\lambda}{T} = \lambda\, f}$$



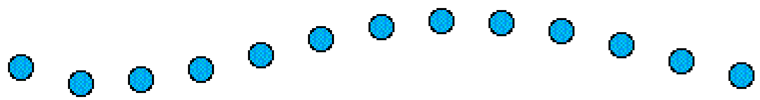
Laufende Transversalwelle

Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Verschiedene Arten von Wellen

Transversal- oder Querwellen:

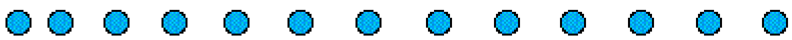
Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung !



falls die Schwingungsrichtung während der Ausbreitung beibehalten wird: linear polarisiert

Longitudinal- oder Längswellen:

Auslenkung in Richtung der Ausbreitungs !



Folge von Verdichtungen und Verdünnungen die sich ausbreitet

Auslenkung der Oszillatoren hängt von Ort und Zeit ab !

http://www.chembio.uoguelph.ca/educmat/chm729/phonons/cont.htm

Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Wellen in Kontinua

Im makroskopischen Sinn sind diskrete Oszillatoren für den Wellenbegriff nicht unbedingt notwendig !

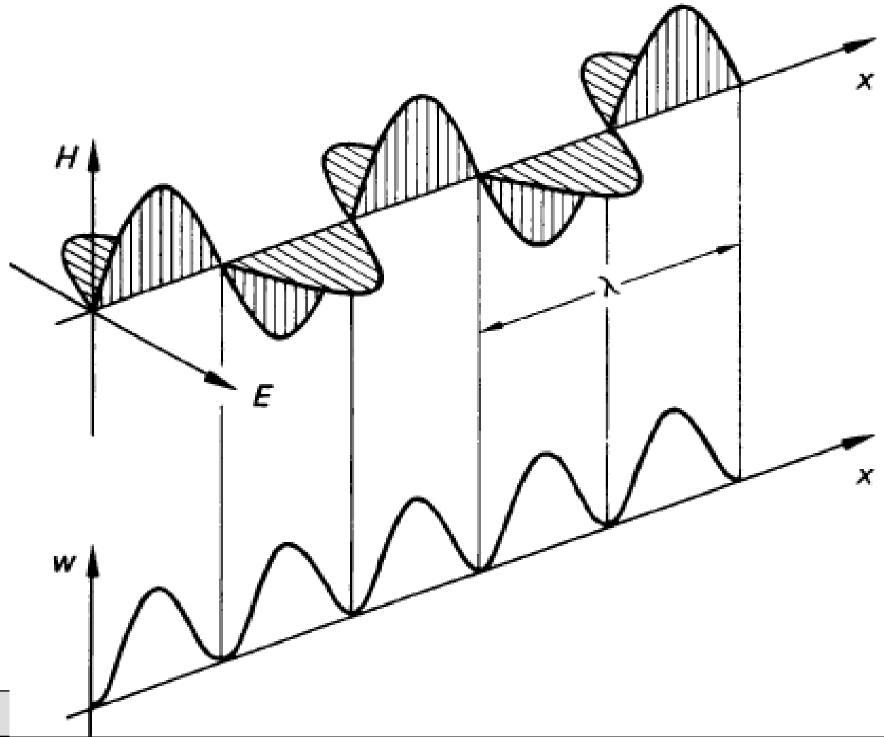
Gase und Flüssigkeiten ohne innere Reibung:
Longitudinalwellen; Transversalwellen nur an Oberflächen

Festkörper: Alle Wellentypen sind ausbreitungsfähig.

Elektromagnetische Wellen

$\vec{H}$ **und** $\vec{E}$ **schwingen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung**

- **Können sich in Materie oder im Vakuum ausbreiten.**
- **Kein Übertragungsmedium notwendig !**



Wellenfläche bzw. Wellenfront

Verbindet benachbarte Punkte mit gleichem Schwingungszustand (z.B.: Wellenberge)

z.B.:

Kugelwelle

Ebene Welle

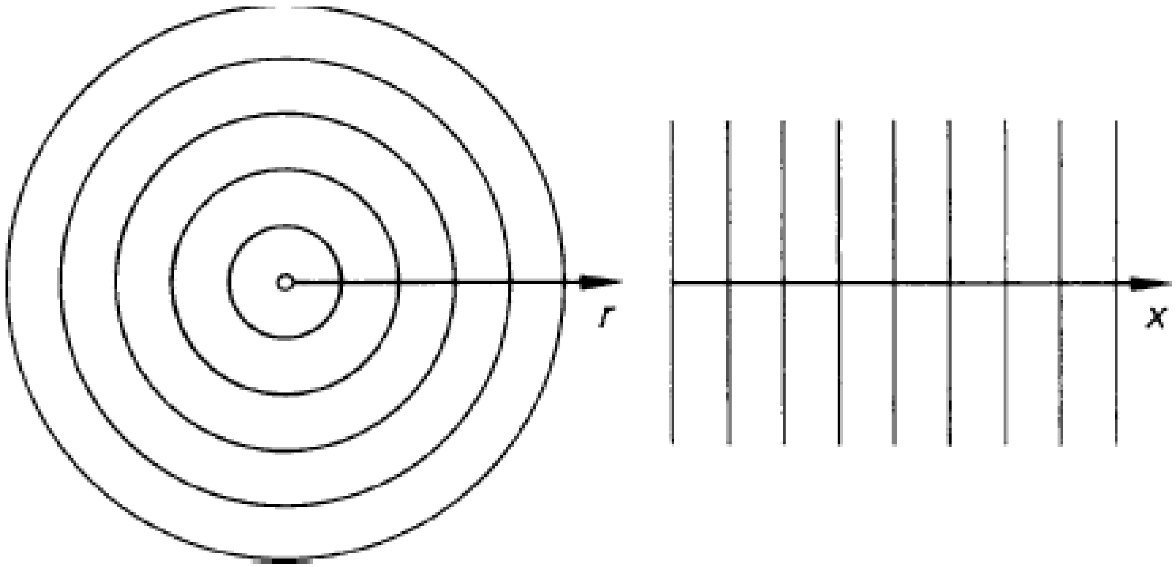


Abb. 5.51 Wellenflächen einer Kugelwelle und einer ebenen Welle

Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Harmonische Wellen

erzeugt durch harmonische Anregung

Auslenkung kommt am Ort x mit Zeitverzögerung Δt = x/c an:

$$y(x,t) = \hat{y}\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right)$$

mit: $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\boxed{y(x,t) = \hat{y}\cos(\omega t - kx + \varphi_0)}$$

nach rechts laufende Welle

Wellenzahl, k: $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$

$$\boxed{y(\vec{r},t) = \hat{y}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)}$$

In Richtung von $\vec{k}$ laufende
ebene Welle

$$\boxed{y(r,t) = \frac{\hat{y}_0}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0)}$$

Kugelwelle

Energietransport durch Wellen

- **In den Schwingungen der einzelnen Elemente steckt Energie (Deformationsenergie, kinetische Energie, elektrische, magnetische Feldenergie …)**
- **Eine laufende Welle transportiert Energie von einem Ort zum anderen.**

Intensität, Energiestromdichte, I: **pro Fläche und Zeit transportierte Energie**

$$I = wc$$ **w … Energiedichte; c … Ausbreitungsgeschwindigkeit**

z.B.: elektromagnetische Welle

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_r \mu_0 \vec{H}^2\right) = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}^2 = \mu_r \mu_0 \vec{H}^2$$

E … elektrische Feldstärke; H … magnetische Feldstärke

ε_0, μ_0 … Feldkonstanten; ε_r … Dielektrizitätskonstante; μ_r … Permeabilität

$$\bar{I} = \frac{1}{2} c \varepsilon_r \varepsilon_0 \hat{E}^2 = \frac{1}{2} c \mu_r \mu_0 \hat{H}^2$$

Wegen des zeitlichen Mittelwerts (Mittelwert der $\cos^2$-Funktion)

Vektoriell über Poynting'schen Vektor darstellbar: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

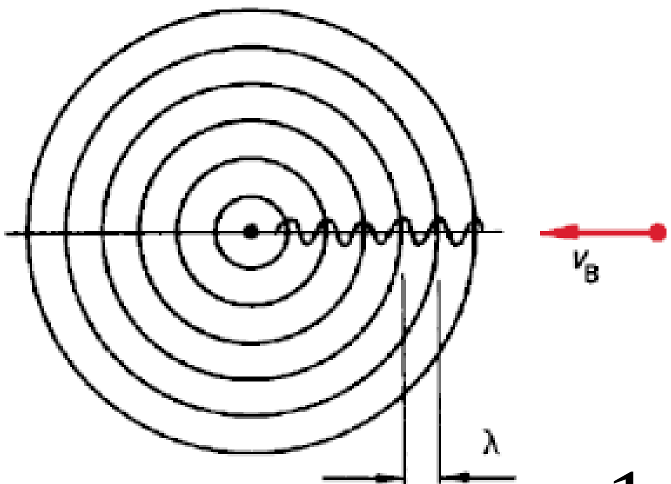
Zeitliches Mittel ergibt Intensität für Fläche senkrecht auf S.

5.2.3 Doppler Effekt

- **Frequenzverschiebung, wenn sich Quelle und Beobachter relativ zueinander bewegen.**
- **Welle mit Trägermedium: es ist relevant wer sich bewegt !**

z.B. <u>Schallwellen:</u>

ruhende Quelle, bewegter Beobachter



Zeitlicher Abstand, in dem Verdichtungen Ohr des Beobachters erreichen:

$$T_B = \frac{\lambda}{c \pm v_B}$$

Q … Quelle; B … Beobachter; T … Periodendauer, f … Frequenz, λ … Wellenlänge, c … Ausbreitungsgeschwindigkeit

Quelle ruht relativ zum Medium !

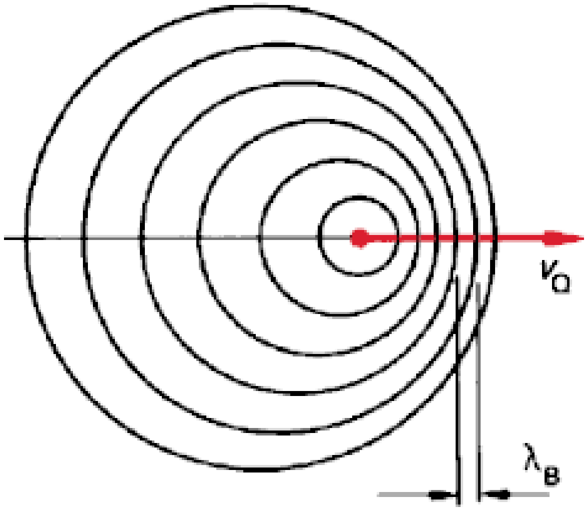
$$\Rightarrow \quad f_B = \frac{1}{\lambda}(c \pm v_B) = \frac{f_Q}{c}(c \pm v_B) = f_Q\left(1 \pm \frac{v_B}{c}\right)$$

Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

bewegte Quelle, ruhender Beobachter

Wellenlänge nimmt zu bzw. ab

$$f_B = f_Q \frac{1}{\left(1 \mp \frac{v_Q}{c}\right)}$$



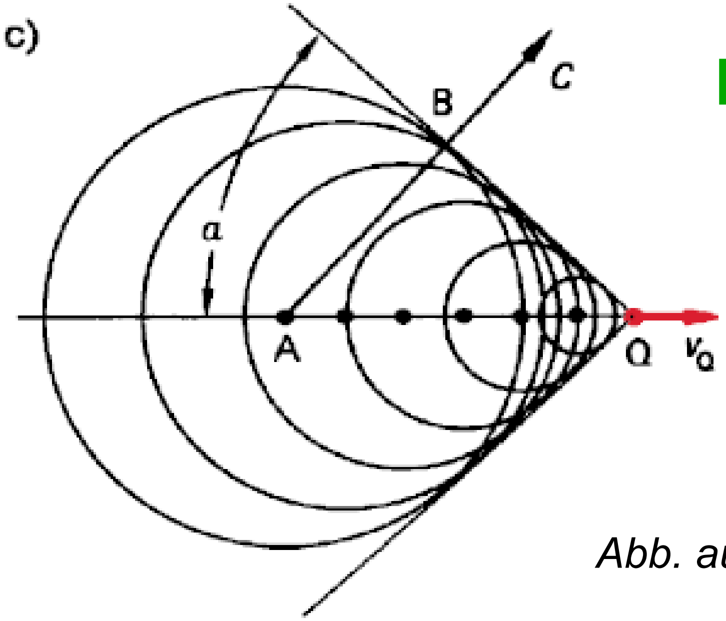
Elektromagnetische Strahlung:

Kein Trägermedium → nur Relativbewegung relevant !

$$f_B = f_Q \sqrt{\frac{c \pm v}{c \mp v}}$$

In allen obigen Gleichungen: oberes Vorzeichen für Annäherung !)

Überschallgeschwindigkeit $v_Q > c$



Mach'scher Kegel

- Stoßwelle, z.B. durch Flugzeug ausreichend
- Explosionsartige Überschallknall

Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure"

Beispiel: Wie schnell muss ein Autofahrer auf eine Blasmusikkapelle zufahren, damit der das Musikstück einen Halbton höher hört (Schallgeschwindigkeit in Luft: c=340m/s) ? Frequenzverhältnis: $\sqrt[12]{2} : 1$

5.2.4 Interferenz

Mehrere Wellen laufen durch ein Medium → (typischerweise) „Prinzip der ungestörten Superposition" anwendbar.

- **Ausbreitung der einen Welle beeinflusst die der anderen nicht.**
- **Momentanwerte additiv überlagert**

entscheidend: **Phasenverschiebung, φ**

Gangunterschied, Δ

$$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{\varphi}{2\pi}$$

z.B.: Zwei in dieselbe Richtung laufende ebene Wellen gleicher Amplitude

$$y_1 = \hat{y}\cos(\omega t - kx)$$

$$y_2 = \hat{y}\cos(\omega t - kx + \varphi) = \hat{y}\cos\left(\omega t - kx + 2\pi\frac{\Delta}{\lambda}\right)$$

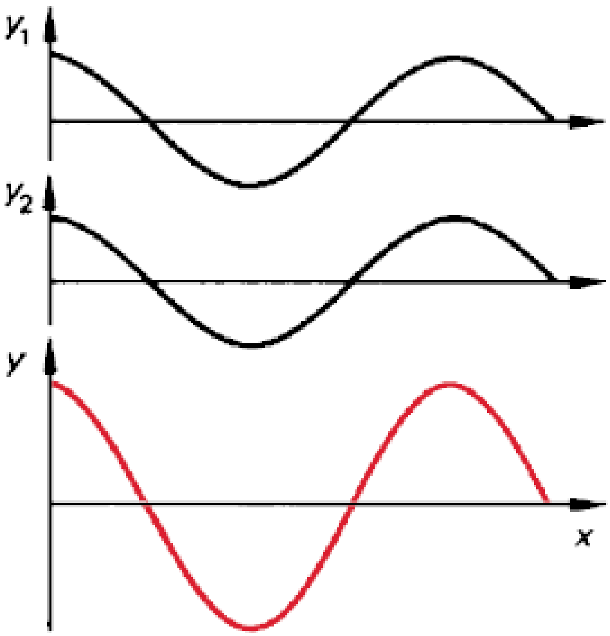
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

$$y = y_1 + y_2 = 2\hat{y}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(\omega t - kx + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Konstruktive Interferenz:

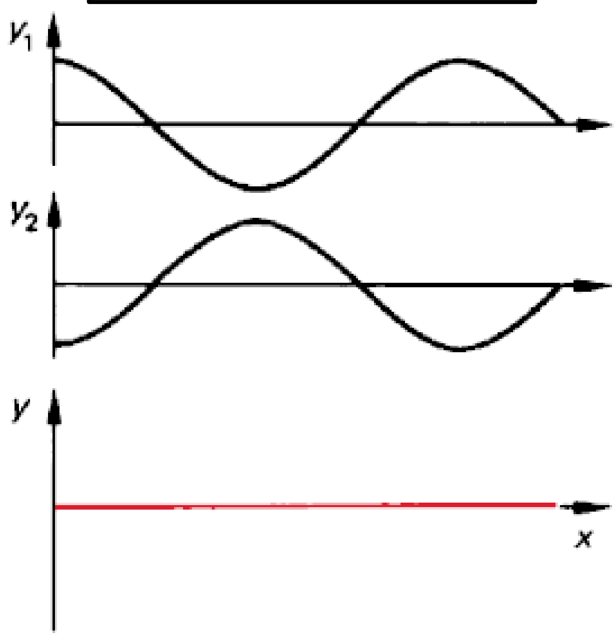
$$\boxed{\begin{aligned}\Delta &= m\lambda \\ \varphi &= m\,2\pi\end{aligned}}$$



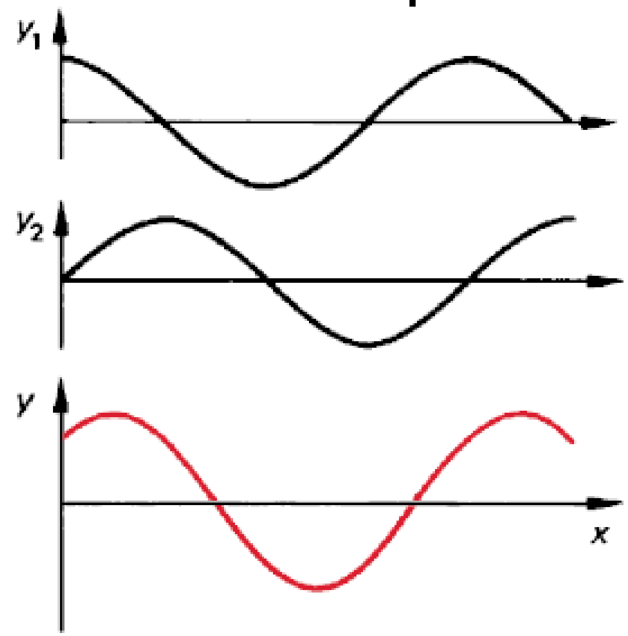
Destruktive Interferenz:

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta &= (2m+1)\frac{\lambda}{2} \\ \varphi &= (2m+1)\pi\end{aligned}}$$

m=0, 1, 2, 3, …

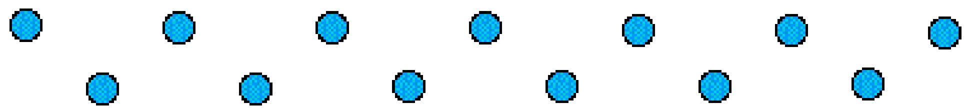


$$\Delta = \frac{\lambda}{4}$$



Stehende Welle

Interferenz zweier Wellen gleicher Amplitude und Frequenz aber entgegengesetzter Laufrichtung.



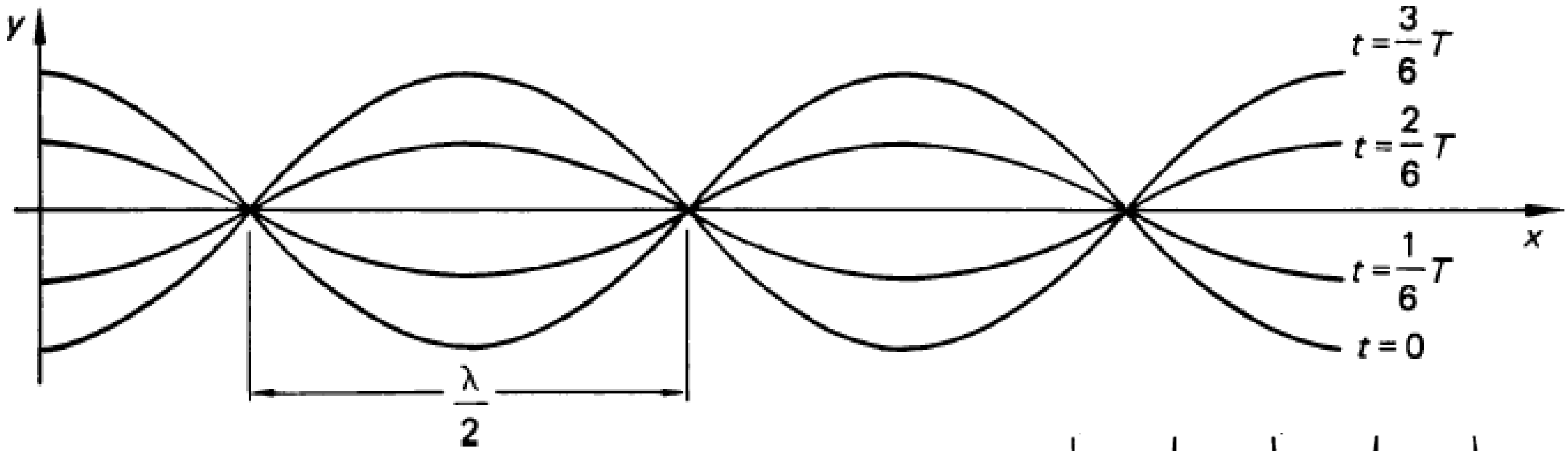
$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \hat{y}\cos(\omega t - kx) \\ y_2 &= \hat{y}\cos(\omega t + kx + \varphi) \end{aligned}\right\} \; y = 2\hat{y}\cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(k\,x + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Keine Kopplung zwischen Orts- und Zeitabhängigkeit

- **De facto: Oszillatoren mit ortsabhängiger Amplitude**
- **Alle λ/2 Schwingungsknoten bzw. Schwingungsbäuche**

http://www.chembio.uoguelph.ca/educmat/chm729/phonons/cont.htm

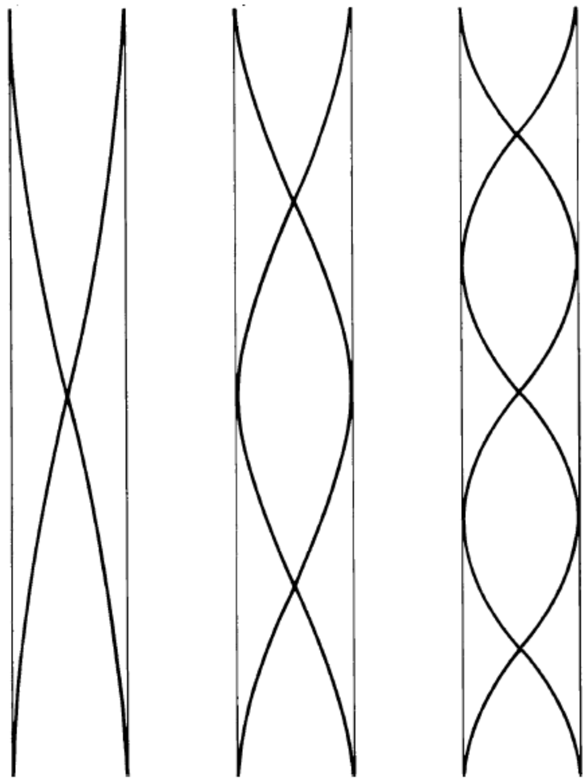
Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“



Realisiert beispielsweise durch Reflexion an einer „Wand“:

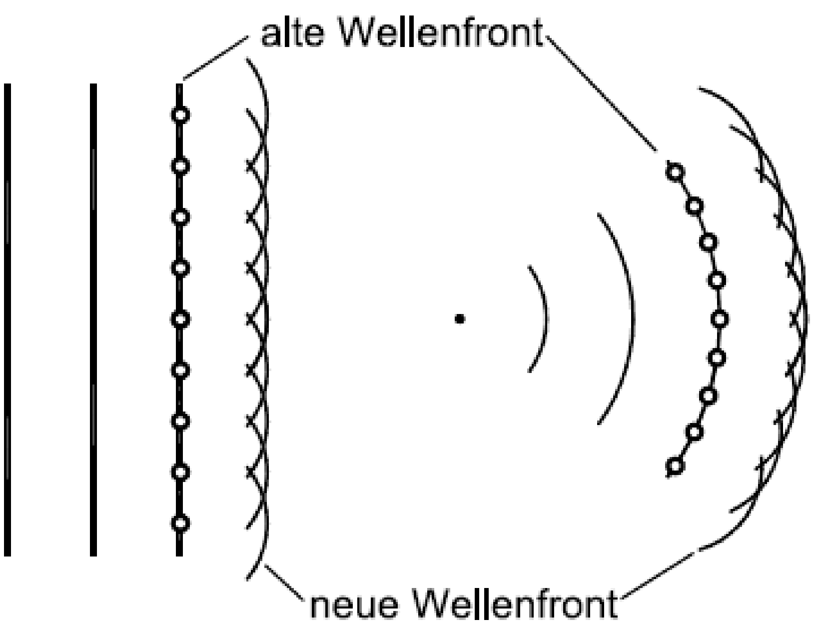
> **Je nachdem, ob Reflexion an festem oder losem Ende, dort Wellenknoten (Phasensprung um π/2 durch Reflexion) bzw. Bauch**

z.B. beidseitig offene Orgelpfeifen



Beugung: Wellenausbreitung in geometrischen Schatten eines Hindernisses.

Huygens-Fresnel'sches Prinzip:



- Jeder Punkt einer Wellenfront fungiert als Ausgangspunkt einer Elementarwelle (Kugelwelle)
- Spätere Wellenflächen sind die Einhüllenden aller Elementarwellen
- Schwingung in beliebigem Punkt ergibt sich aus Überlagerung aller von einer Wellenfront ausgehenden Elementarwellen

Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure"

z.B.: Beugung an einem Doppelspalt

(hier: Spaltöffnung << λ)

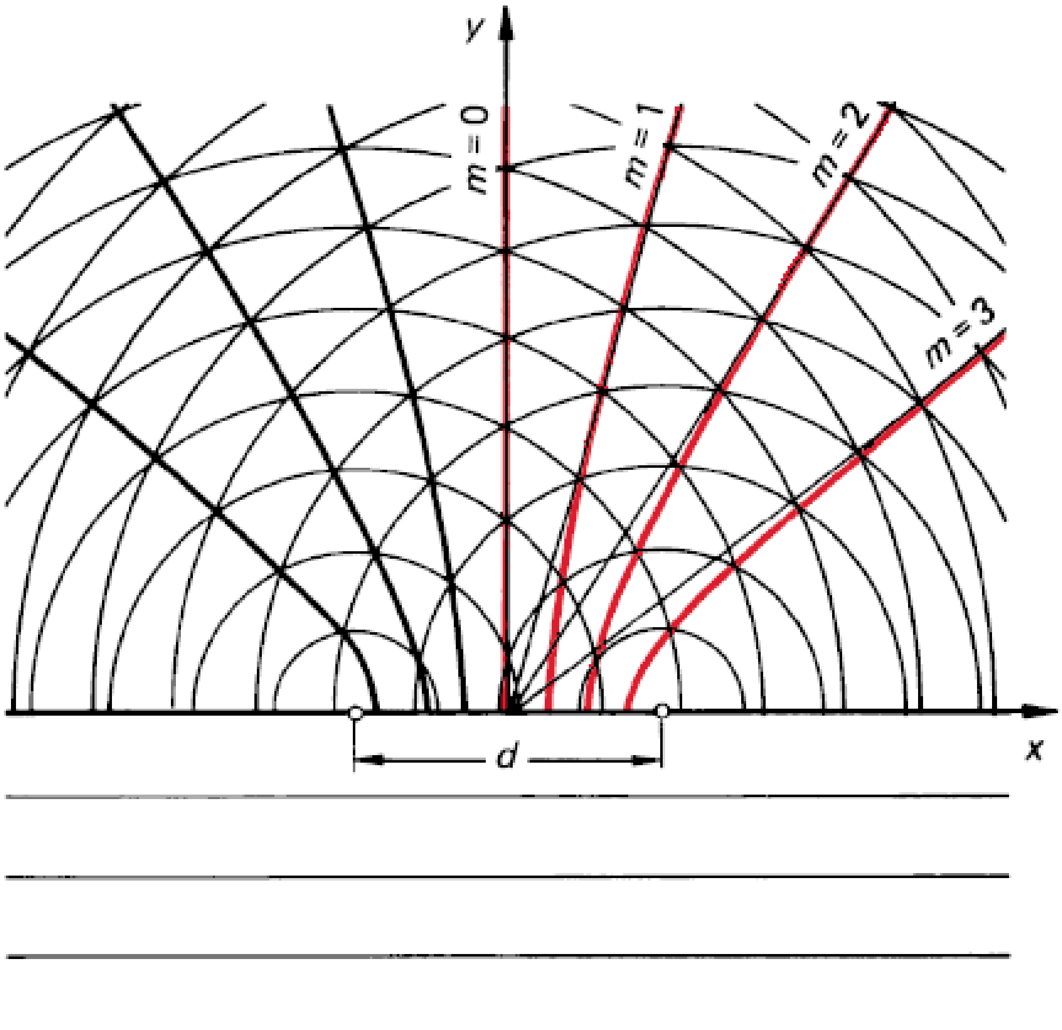


Abb. 5.64 Beugung am Doppelspalt

- **Verstärkung immer am Schnittpunkt zweier Elementarwellen ($\Delta = n\lambda$)**
- **Schar konfokaler Hyperbeln**
- ***Für Asymptoten gilt:***

$$\boxed{\sin\alpha_m = m\frac{\lambda}{d}}$$

α_m … Winkel zwischen Asymptote und y-Achse

Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“