Wahrscheinlichkeitstheorie für Informatikstudien (Kapitel #7)

Siegfried Hörmann

TU Graz

WS 2020/21

Kursaufbau

1. Wahrscheinlichkeitsräume.
2. Laplace-Experimente.
3. Wichtige diskrete Verteilungen.
4. Zufallsvariablen.
5. Zufallsvektoren.
6. Momente.
7. Bedingte Wahrscheinlichkeiten.
8. Unabhängigkeit.
9. Konvergenz von Zufallsvariablen.
10. Der zentrale Grenzwertsatz.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

> Wir führen ein Experiment durch und interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis A eintritt, gegeben der Tatsache dass Ereignis B bereits passiert ist.

In einem Laplace Modell kann man das so sehen:

- Da B bereits passiert ist, ist die neue Menge der möglichen Resultate B (also quasi das neue Ω).
- Falls A eintritt, wissen wir, dass $A \cap B$ eintritt.
- Daher—im Laplace Modell—ist die W-keit von A gegeben B

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Beispiel

Wir ziehen zweimal ohne Zurücklegen aus einer Urne. Seien N_1 schwarze und $N - N_1$ weiße Kugeln in der Urne. Angenommen die erste Kugel ist schwarz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch die zweite Kugel schwarz ist?

(1) Direkt ausrechnen: Nach dem ersten Zug sind noch $N - 1$ Kugeln übrig, davon $N_1 - 1$ schwarze. Daher

$$P(2.\ \text{schwarz} \mid 1.\ \text{schwarz}) = \frac{N_1 - 1}{N - 1}.$$

(2) Formel verwenden: es ergibt sich, dass

$$P(2.\ \text{schwarz} \mid 1.\ \text{schwarz}) = \frac{P(\text{beide schwarz})}{P(1.\ \text{schwarz})} = \frac{\binom{N_1}{2}}{\binom{N}{2}} \bigg/ \frac{\binom{N_1}{1}}{\binom{N}{1}}.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Da die stochastischen Modelle in Kapitel 1 und 2 durch ein Laplace Modell eingeführt wurden, macht es Sinn die bedingte Wahrscheinlichkeit im Allgemeinen wie folgt einzuführen.

Sei $P(B) > 0$. Dann nennen wir $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ die **bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B**.

Beachte: Die Definition von $P(A|B)$ folgt hier unserem intuitiven Ansatz. Man beachte aber, dass dies eine formale Definition ist!

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass $A \mapsto P_B(A) = P(A|B)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeiten

Die folgenden wichtigen Sätze basieren auf dieser neuen Definition:

Satz (Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit)

Sei $\Omega = \bigcup_{i\geq 1} B_i$ *und* $B_i \cap B_j = \emptyset$ *falls* $i \neq j$*, mit* $B_i \in \mathcal{A}$*. Dann gilt für alle* $A \in \mathcal{A}$

$$P(A) = \sum_{i\geq 1} P(B_i)P(A|B_i).$$

Beweis.

Wir nehmen $P(B_i) > 0$ für alle i an (sonst kann B_i ohnehin ignoriert werden). Dann folgt wegen $A = \cup_{i\geq 1}(A \cap B_i)$, der σ-Additivität und der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit die Aussage. $\square$

Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeiten

Man beachte: das Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit könnte man auch so aufschreiben:

$$P(A) = \sum_{i \geq 1} P(A \cap B_i).$$

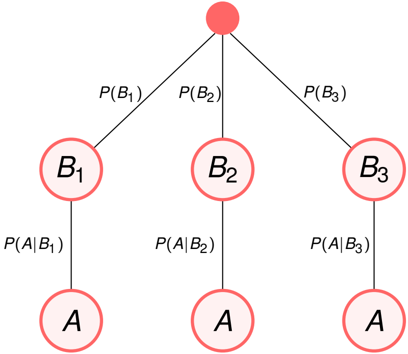
Was ist der Vorteil von der Erweiterung

$$P(A \cap B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)} P(B_i) = P(A|B_i)P(B_i)?$$

Anwort: Ähnlich wie im Eingangsbeispiel dieses Kapitels ist das direkte Ausrechnen der bedingten W-keit oft viel einfacher, als $P(A \cap B_i)$ zu bestimmen. Oder es ist durch die Problemstellung von Anfang an $P(A|B_i)$ gegeben.

Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeiten

Ein Wahrscheinlichkeitsbaum hilft dabei, das Problem zu visualisieren.



Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeiten

Beispiel

Wir betrachten 4 benachbarte Gemeinden die eine Region bilden. Die Gemeinden haben 3000, 12000, 5000 bzw. 2000 Einwohner. Der Anteil der Einwohner die mit dem Auto pendeln beträgt 40%, 10%, 35% bzw. 70%. Wie gross ist der Anteil der Autopendler in der Region insgesamt?

Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeiten

Beispiel (Ziegenproblem)

Bei einer Gewinnshow können Kandidaten sich für eine von 3 Türen entscheiden. Hinter einer Tür ist ein Auto, hinter den beiden anderen sind Ziegen. Nachdem die Kandidatin eine Tür gewählt hat, öffnet der Moderator eine der beiden anderen Türen in der sich ein Ziege befindet und bietet der Kandidatin an, dass sie sich nochmals umentscheiden darf. Soll sie das tun?

Der Satz von Bayes

Korollar (Satz von Bayes)

Sei $\Omega = \bigcup_{i \geq 1} B_i$ *und* $B_i \cap B_j = \emptyset$ *für* $i \neq j$, *mit* $B_i \in \mathcal{A}$. *Dann gilt für jedes* $A \in \mathcal{A}$

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i \geq 1} P(B_i)P(A|B_i)}.$$

Beweis.

Folgt sofort aus dem vorherigen Resultat. $\square$

Der Satz von Bayes

Beispiel

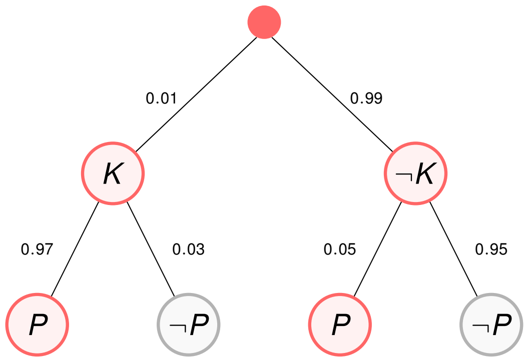
Angenommen die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Krankheit zu haben (Ereignis K) ist 1%. Hat ein Patient diese Krankheit, so gibt es einen Test, der in 97% der Fälle positiv ist (die Krankheit aufdeckt). Andererseits, ist die Person gesund, so ist der Test in 95% der Fälle negativ (also keine Krankheit). Wir führen den Test an einer zufälligen Person durch.

(a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test die Person als krank einstuft?

(b) Angenommen der Test ist positiv (also Person ist als krank eingestuft). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie wirklich krank ist?

Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit

Zugehöriger Wahrscheinlichkeitsbaum.



Modelle höherer Ordnung

Proposition (Multiplikationsregel)

Für alle $A_i \subset \mathcal{A}$ mit $P(A_i) > 0$ haben wir

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Beweis.

(1) Induktion: $n = 1$ ✓ (2) Die Aussage hält für $n - 1$ mit $n \geq 2$:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_{n-1}|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-2}).$$

Dann folgt die Aussage wegen

$$P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) = \frac{P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)}{P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}.$$

$\square$

Bemerkung: Was passiert wenn $P(A_i) = 0$ für ein i?

Modelle höherer Ordnung

Beispiel

Wir teilen an 3 Spieler je 5 Bridgekarten aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jeder der drei genau ein Ass hat?

Beispiel

Wir wählen n Personen im Kurs aus. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 von ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben?