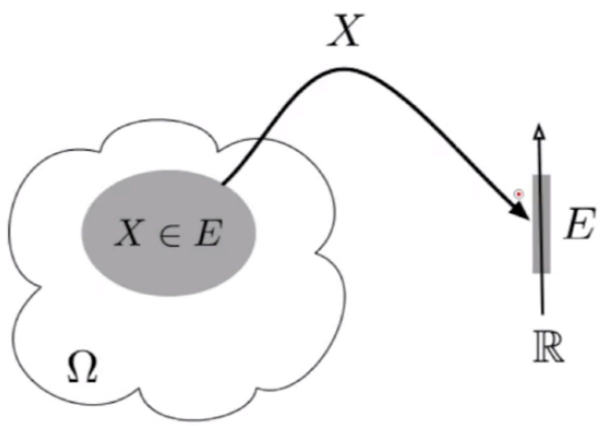
Definition

- Zufallsvariable ZV
  - $X : \Omega \to \Omega'$
    - oft $\Omega' = \mathbb{N}/\mathbb{R}$
  - $\omega \to X(\omega)$
  - weist jedem Elementarereignis einen Wert zu
  - erzeugt Ereignisse - Urbild von Ereignissen

$$\{X \in E\} = \{\omega : X(\omega) \in E\} = \underbrace{X^{-1}(E)}_{\text{das Urbild von } E}$$



- diskret, wenn X nur abzählbar viele Werte annimmt
- stetig, wenn nicht abzählbar

Beispiele

- Würfeln
  - Wir würfeln 2x und interessieren uns für die Summe der Augenzahlen. Beschreibe ein geeignetes Ω und eine ZV X.

2 x Würfeln

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2 \qquad \omega = (\omega_1, \omega_2)$$

$$X(\omega) = X((\omega_1, \omega_2)) = \omega_1 + \omega_2$$

$$A = \{X = 3\} = \{\omega \mid X(\omega) = 3\}$$

$$= \{(1,2), (2,1)\}$$

–

- Binomialmodell

  > Wir ziehen 5x aus einer Urne (w weiße und s schwarze Kugeln) mit Zurücklegen. Wir wählen das übliche Ω für ein Laplace-Experiment. Beschreibe formal die ZV X, welche die Anzahl der weißen Kugeln angibt.

  –

5 x aus Urne ziehen (mit Zurücklegen)

$$(1, \dots, w, w+1, \dots, s+w)$$

$$\Omega = \{1, \dots, s+w\}^5 \qquad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_5)$$

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{5} I\{\omega_k \in \{1, \dots, w\}\}$$

–

Beispiel (Roulette)

Wir spielen Roulette. Sei X der Gewinn wenn 5 € auf eine ungerade Zahl gesetzt wird. Sei $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 36\}$. Dann ist

$$X(\omega) = \begin{cases} 5 & \text{für } \omega = 1, 3, 5, ... \\ -5 & \text{für } \omega = 0, 2, 4, 6, ... \end{cases}$$

Also $\{X = 5\} = \{1, 3, \dots, 35\}$.

Beispiel (Würfel)

Wir würfeln mit 2 Würfel. Sei X der Mittelwert und $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$. Dann ist

$$X(\omega) = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2).$$

Also $\{X \geq 5\} = \{(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6), (4, 6), (6, 4)\}$.

- ### Beispiel (Binomiale Zufallsvariable)

  Wir spielen Roulette und setzen auf rot. Sei X die Anzahl der Erfolge bei 3 Spielen. Sei $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 18, 19, \dots, 36\}^3$. Dann ist

  $$X(\omega) = \sum_{k=1}^{3} I\{\omega_k \in \{1, \dots, 18\}\}.$$

  Wir haben z.B.

  $$\{X > 1\} = \{\omega \colon X(\omega) > 1\} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), \dots, (36, 18, 18)\}.$$

-