Definition

- Varianz σ^2 bekannt
- Test von

  $$\mathcal{H}_0: \quad \mu = \mu_0 \qquad \text{vs} \qquad \mathcal{H}_1: \quad \mu \neq \mu_0.$$

  - Unter $\mathcal{H}_0$ gilt

    $$X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(\mu_0, \sigma^2),$$

    woraus folgt $\mathrm{E}(\bar{X}) = \mu_0$.
- Weicht $\bar{x}$ „stark" von μ_0 ab, ist $\mathcal{H}_0$ nicht haltbar. Wir wählen deshalb den kritischen Bereich

  $$K = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |\bar{x} - \mu_0| > c \right\},$$

  für ein $c > 0$.
-
- Es gilt

  $$\bar{X} \sim \mathrm{N}(\mu_0, \sigma^2/n) \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1).$$

  - Setze

    $$Z = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}.$$

  - Sei $z_{1-\alpha/2}$ das $(1-\alpha/2)$-Quantil von Z (standardnormalverteilt). Dann ist

    $$P_{\mu_0}\left(|Z| > z_{1-\alpha/2}\right) = \alpha.$$

- Gauß-Test mit kritischem Bereich K

  - $$K = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |z(x)| > z_{1-\alpha/2} \right\}$$

Verwerfungsbereiche

- Sei $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ mit **bekanntem** σ^2 und α ein gegebenes Signifikanzniveau. Definiere $z = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}$.

Hypothese	Verwerfe $\mathcal{H}_0$
$\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0$ $\mathcal{H}_1 : \mu \neq \mu_0$	$\lvert z \rvert > z_{1-\alpha/2}$
$\mathcal{H}_0 : \mu \leq \mu_0$ $\mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0$	$z > z_{1-\alpha}$
$\mathcal{H}_0 : \mu \geq \mu_0$ $\mathcal{H}_1 : \mu < \mu_0$	$z < z_{\alpha}$

- Selbst unter Verletzung der Normalverteilungsannahme lässt sich der Gauß–Test für großes n anwenden. Aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes ist Z nämlich approximativ normalverteilt.

Anwendung

- Sei $X_1, \ldots, X_{25} \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ mit bekanntem $\sigma^2 = 0.81$. Wir testen

$$\mathcal{H}_0 : \quad \mu = 3 \qquad \text{vs} \qquad \mathcal{H}_1 : \quad \mu \neq 3.$$

zum Niveau $\alpha = 0.05$. Aus der realisierten Stichprobe berechnen wir $\bar{x} = 3.3$. Die Teststatistik ergibt

$$z = \sqrt{25}\,\frac{3.3 - 3}{0.9} = \frac{5}{3}.$$

- Der Tabelle entnehmen wir $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} \approx 1.96$. Da

$$\lvert z \rvert = \frac{5}{3} < 1.96,$$

ist $x \notin K$ und wir verwerfen $\mathcal{H}_0$ *nicht* zum Niveau $\alpha = 0.05$.

Beispiele

- Befüllanlage

Eine Befüllanlage für Flaschen muss regelmäßig überprüft und gegebenenfalls neu geeicht werden. Die Anlage sollte in jede Flasche genau einen Liter einfüllen. Angenommen, die Menge pro Flasche ist normalverteilt mit $\mu = 1$ und $\sigma = 0.003$ Liter. Nun ist gefragt, ob die tatsächliche Füllmenge vom Sollwert zu stark abweicht. Zur Überprüfung werden 100 Flaschen zufällig ausgewählt.

Wie formulieren Sie einen statistischen Test?

Aus den 100 Flaschen ergibt sich $\bar{x} = 1.005$ Liter. Wie entscheiden Sie sich?

$\mathcal{H}_0 : \mu = 1 \qquad \mathcal{H}_1 : \quad \mu \neq 1.$

$\alpha = 0.05$

$n = 100 \qquad \sigma = 0.003 \quad \rightarrow$ Gauß-Test

$\mu_0 = 1$

$$z = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} = \sqrt{100}\,\frac{1.005 - 1}{0.003}$$

$$\approx 16.66 > z_{1-\alpha/2}$$

$\Rightarrow$ Verwerfe die Nullhypothese