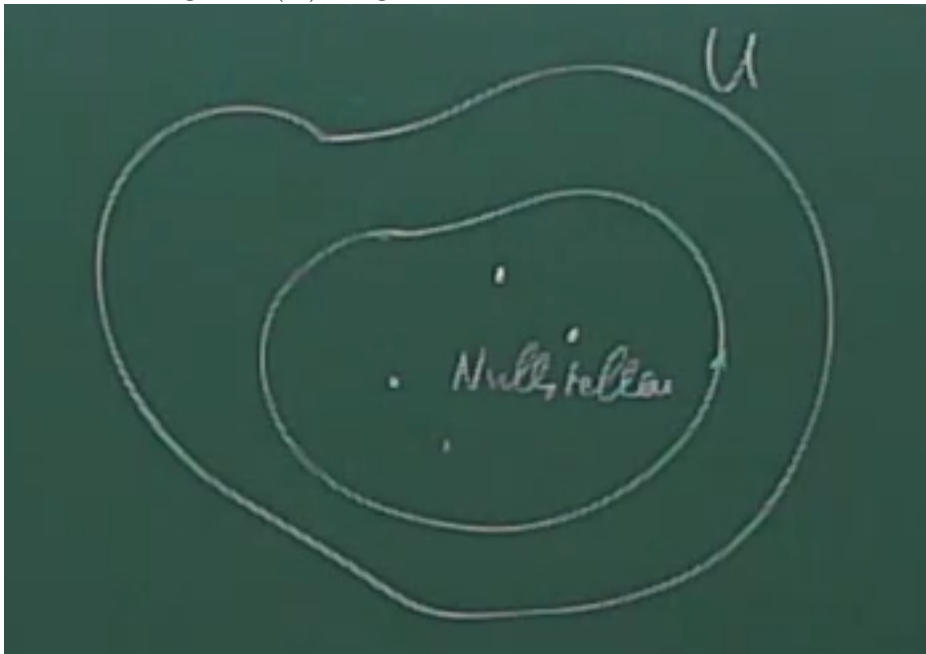
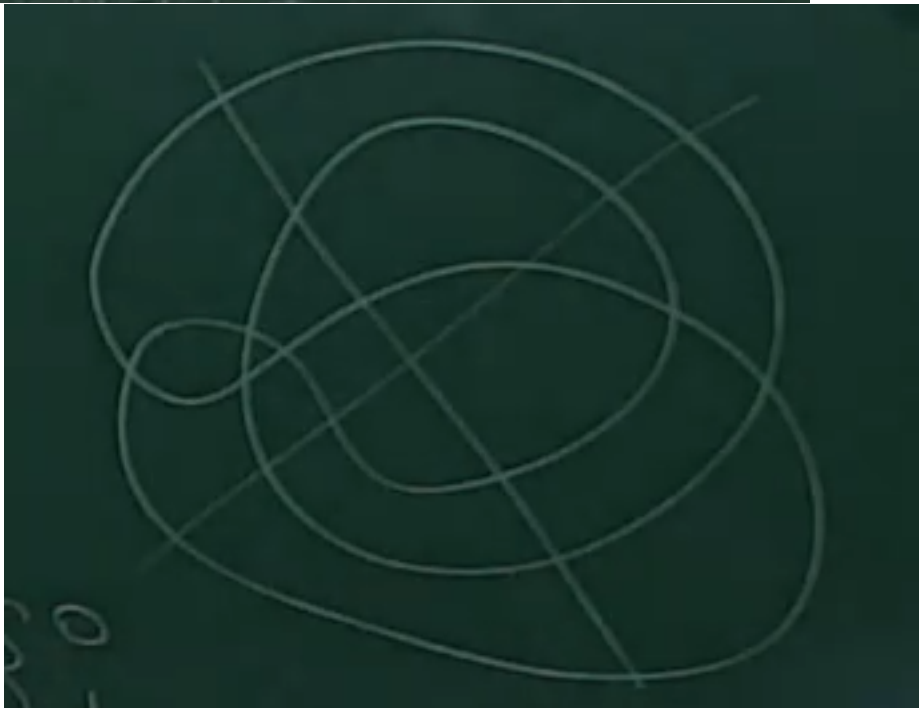


## Zählen von Nullstellen

- gesucht # Nullstellen innerhalb von  $C$  (Vielfachheit gezählt)
- $U$  sternförmig,  $f \in H(U)$ ,  $C$  geschlossen in  $U$



$f \in H(U)$       $2d_C(z) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$



Sei  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $m$  von  $f$ . Dann gilt

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \text{ mit } g(z_0) \neq 0.$$

Daraus ergibt sich

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z)$$

und weiter

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

also

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = m = \operatorname{ord}_{z_0}(f).$$

Es gilt daher

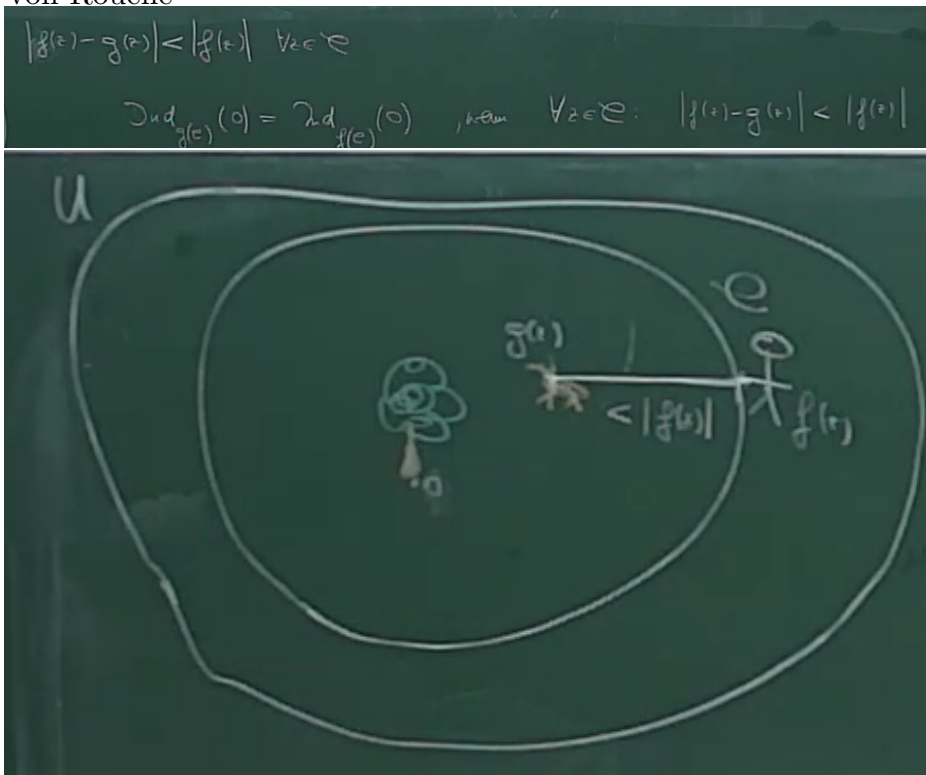
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \operatorname{Ind}_{f(C)}(0) = \sum_n \operatorname{ord}_{z_n}(f) \operatorname{Ind}_C(z_n).$$

•

- Satz vom logarithmischen Residuum

$$\# \text{ Nullstellen von } f \text{ innerhalb von } \mathbb{C} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \# \text{ Umkreise von } f(\mathbb{C}) \text{ um } 0.$$

- Satz von Rouché

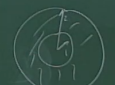


– Beispiel

Bsp.  $p(z) = z^{2022} + 16z^{1492} + 18$   
 Es gibt keine Nullstelle auf  $|z| = 1$ .  
 $f(z) = 18$   
 $g(z) = p(z)$   
 $|f(z) - g(z)| = |z^{2022} + 16z^{1492}| \leq |z|^{2022} + 16|z|^{1492} = 17 < 18 = |f(z)|$

\*

Alle Nullstellen besitzen  $|z| < 2$   
 $|z| < 2$  hat eine Nullstelle  
 $f(z) = z^{2022}$  da 2022 in  $\mathbb{N}$   
 $g(z) = p(z)$

$$\left| f(z) - g(z) \right| = \left| z^{2022} + 18 \right| = 16 \cdot |z|^{1992} + 18 = 16 \cdot 2^{1992} + 18 = 2^{1996} + 18 = 2^{1997} < 2^{2022} = |f(z)|$$


## Bestimmung von Integralen

### • rationale Funktionen

–  $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , für die gilt

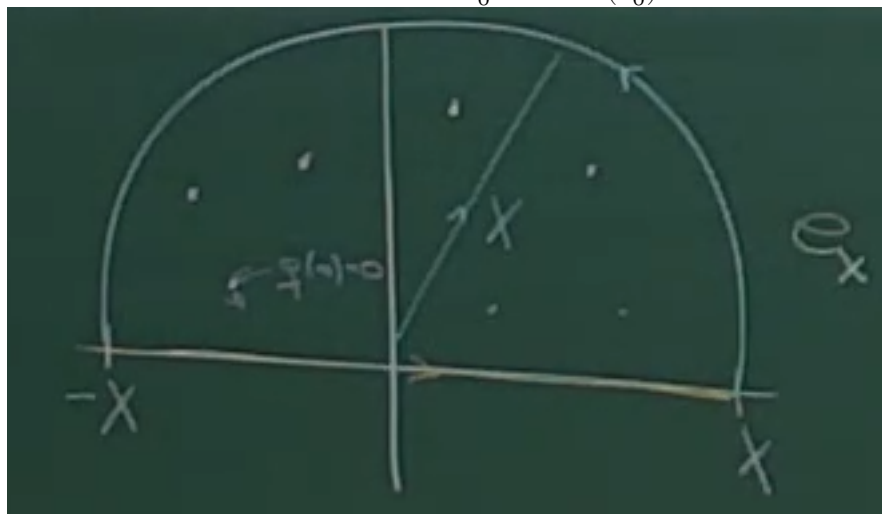
\* p, q Polynome

\*  $\deg(p) \leq \deg(q) - 2$

\* q hat keine reellen Nullstellen

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{q(z)=0 \\ \operatorname{Im}(z) > 0}} \operatorname{Res} R(z)$$

\* Summe der Residuen von Polen  $z_0$  mit  $\operatorname{Im}(z_0) > 0$



– Beispiel:

\* Pol erster Ordnung

Bsp:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 6x + 13)} dx$   
 $x^2 + 2x + 2 = 0 \quad x_{1,2} = -1 \pm i \quad x^2 + 6x + 13 = 0 \quad x_{3,4} = -3 \pm \sqrt{2}i = -3 \pm 2i$   
 $\operatorname{Res}_{z=-1+i} \frac{z^2+1}{(z^2+2z+2)(z^2+6z+13)} = \frac{z^2+1}{(z+2)(z^2+6z+13)} \Big|_{z=-1+i} = \frac{-2i+1}{(-2i+6+6i+13)} = \frac{1-2i}{(4+4i)(2i)} = \frac{(1-2i)(-i)}{(4+4i)(2)} = \frac{(-1+2i)(-i)}{130} = \frac{-18+i}{130}$   
 $\operatorname{Res}_{z=-3+2i} \frac{z^2+1}{(z^2+2z+2)(z^2+6z+13)} = \frac{z^2+1}{(z^2+2z+2)(z+6)} \Big|_{z=-3+2i} = \frac{5-12i+1}{(5-12i+6+4i+2)(-6+4i+6)} = \frac{6-12i}{(1-8i)(4i)} = \frac{(6-12i)(-i)}{130} = \frac{3-6i}{130}$   
 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \left( \frac{-18+i}{130} + \frac{3-6i}{130} \right) = 2\pi i \frac{(-15-3i)}{130} = \frac{10\pi}{13}$

\* Pol höherer Ordnung

$$\text{Bsp: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = 2\pi i \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$x_{1,2} = \pm i$$

$$\text{Res}_{z=i} \frac{z^2}{(z^2+1)^2} = \frac{d}{dz} \left( \frac{z^2(z-i)}{(z^2+1)^2} \right) \bigg|_{z=i} = \frac{d}{dz} \left( \frac{z^2}{(z+i)^2} \right) \bigg|_{z=i} = \frac{2z(z+i) - z^2 \cdot 2(z+i)}{(z+i)^3} \bigg|_{z=i} = \frac{2i(2i) - (-1) \cdot 2}{(2i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i}$$

- rationale Funktionen in Winkelfunktionen

- $R(\cos(x), \sin(x))$

- \* Winkelfunktionen durch komplexe Äquivalent ersetzen

- ♦  $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

- ♦  $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

- \*  $e^{ix}$  substituieren mit  $z$

$$z = e^{ix}$$

$$dz = ie^{ix} dx$$

$$dx = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(x), \sin(x)) dx = \int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) dx = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{dz}{iz} = 2\pi i \sum_{\substack{|a|<1 \\ \text{Res von } Q}} Q(z)$$

$Q(z) = R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \cdot \frac{1}{iz}$

- Beispiel:

$$\text{Bsp: } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 4 \cos(x)} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 2(e^{ix} + e^{-ix})} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{5 + 2(z + \frac{1}{z})} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2 + 5z + 2}$$

$$2z^2 + 5z + 2 = 0 \quad z_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 3}{4} \quad \begin{matrix} < -2 \\ < -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\text{Res}_{z=-\frac{1}{2}} \frac{1}{2z^2 + 5z + 2} = \frac{1}{4z + 5} \bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

- rationale Funktionen mal  $e^{itx}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} R(x) dx$$

- $R(x)$  mit  $\deg(p) < \deg(q) - 2$

- $t = 0$

- \*  $e^{itx} = e^0 = 1 \implies$  rationale Funktion ohne  $e^{itx}$

- $t > 0$

- \* obere Halbkreis wird integriert

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \mathcal{R}(x) dx = 2\pi \sum_{\substack{\text{Pol} \\ \mathcal{R}(z) \neq 0}} \text{Res}_{z_0} e^{itz} \mathcal{R}(z)$$

\*

–  $t < 0$

\* untere Halbkreis wird integriert

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \mathcal{R}(x) dx = -2\pi \sum_{\substack{\text{Pol} \\ \mathcal{R}(z) \neq 0}} \text{Res}_{z_0} e^{itz} \mathcal{R}(z)$$

\*

–  $\mathcal{R}$  reell  $\implies$  Konjugation von Integral für  $t > 0 =$  Integral für  $t < 0$

– Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{Bsp: } \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) \mathcal{R}(x) dx &= \text{Re} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \mathcal{R}(x) dx \right) \\ \text{Bsp: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+1} dx & \\ t > 0 & \quad \text{Res}_{z=i} \frac{e^{itz}}{z^2+1} = \text{Res}_{z=i} \frac{e^{itz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{it \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-t}}{2i} \end{aligned}$$

\*

$$\begin{aligned} \text{Bsp: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{itx}}{(x^2+1)^2} dx & \\ t > 0 & \quad \text{Res}_{z=i} \frac{z e^{itz}}{(z^2+1)^2} = \text{Res}_{z=i} \frac{z e^{itz}}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{d}{dz} \left( \frac{z e^{itz}}{(z+i)^2} \right) \Big|_{z=i} = \frac{(e^{it \cdot i} + i e^{-t})}{(2i)^2} = \frac{e^{-t}(1+i)}{-4} \\ t < 0 & \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-itx}}{(x^2+1)^2} dx = \overline{\left( i \frac{t}{2} e^{-t} \right)} = -i \frac{t}{2} e^{-t} \end{aligned}$$

\*

[[Laplace Transformation]]

[[Residuensatz]]