

- Finde Extrema von  $f(x_1, \dots, x_n)$  unter den Nebenbedingungen
  - $N_1(x_1, \dots, x_n) = 0$
  - ...
  - $N_k(x_1, \dots, x_n) = 0$
- Anzahl der Nebenbedingungen k ist beliebig
- grad f senkrecht auch Tangentialebene von A
  - $\text{grad} f \in \text{span}\{\text{grad} N_1, \dots, \text{grad} N_p\}$
- Satz:
  - $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen
  - f (mind.) 1x stetig diffbar
  - Extremum  $x_0$  unter NB  $N_1(x) = \dots = N_k(x) = 0 \implies \exists \lambda$  für jede NB
  - $\text{grad}(f(x_0)) - \lambda_1 \text{grad}(N_1)(x_0) - \dots - \lambda_k \text{grad}(N_k)(x_0) = 0$ 
    - \*  $\text{grad} f = \lambda \text{grad} N$
- Vorgehensweise
  - in obige Formel einsetzen
  - eine Gleichung für jede Variable nach der abgeleitet wird
  - Determinante der Koeffizientenmatrix mit 0 gleichsetzen
    - \*  $\lambda$  bestimmen
  - $\lambda$  in Gleichung einsetzen und Variablenwerte bestimmen
    - \*  $\implies$  mögliche Extrema
    - \* Satz von Weierstraß  $\implies$  Min und Max muss existieren
    - \* Min und Max durch logische Vergleiche bestimmen?
- Anschauliches Beispiel

Satz:  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^1(M)$   
 $\vec{x}_0 \in M$  Extremum unter  $N_1(x) = \dots = N_k(x) = 0$   
 $\implies \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$   
 $\text{grad} f(x_0) - \lambda_1 \text{grad} N_1(x_0) - \dots - \lambda_k \text{grad} N_k(x_0) = 0$   
 Bsp:  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3$ ,  $N_1(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0$   
 $\text{grad} f = (2x, 2y)$ ,  $\text{grad} N_1 = (2x, 2y)$   
 $(2x, 2y) - \lambda(2x, 2y) = (0, 0) \implies (1-\lambda)x = 0, (1-\lambda)y = 0$   
 $\lambda = 1$   
 $x^2 + y^2 - 3 = 0 \implies x^2 + y^2 = 3$   
 $\lambda = 1 \implies x^2 + y^2 - 3 = 0 \implies x^2 + y^2 = 3$   
 $\lambda = 1 \implies x^2 + y^2 - 3 = 0 \implies x^2 + y^2 = 3$   
 $\lambda = 1 \implies x^2 + y^2 - 3 = 0 \implies x^2 + y^2 = 3$

[[Mehrdimensionale Differentialrechnung]]