15. Untersuchen Sie die folgenden rekursiv definierten Folgen (x_n) auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte:

$$(a) \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - x_n^2), \quad n \geq 1, \quad x_1 = 0,$$

$$(b) \quad x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 1$$

16. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

gilt.

17. Zeigen Sie: $\lim\limits_{n \to \infty} (\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}) = \frac{1}{2}$.

Hinweis: Schätzen Sie den Klammer-Ausdruck geeignet nach oben und unten ab, und zeigen Sie von den beiden neuen Folgen, dass sie den Grenzwert $\frac{1}{2}$ besitzen!

18. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

    (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$,

    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2}{n^4+1}$.

19. Sei $0 < a < b$. Die rekursiv definierten Folgen (a_n) und (b_n) mit $a_0 = a,\ b_0 = b$ und

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = \text{harmonisches Mittel von } a_n \textit{ und } b_n,$$

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = \text{arithmetisches Mittel von } a_n \textit{ und } b_n$$

bilden eine Intervall-Schachtelung für das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ von a und b. (Hinweis: $a_n b_n = ab$ für alle $n \in \mathbb{N}$).