

## Problemstellung

- Gleichungssystem mit  $p + q$  Variablen und  $p$  Gleichungen
  - nach  $q$  Variablen auflösen

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) &= 0 \\ &\vdots \\ f_p(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) &= 0 \end{aligned}$$

Nach  $y_1, \dots, y_q$  auflösen, d.h.  $y_i = y_i(x_1, \dots, x_p)$   
 $i = 1, \dots, q$

- Vorgehensweise:
  - alle “ungewollten” Variablen auf linke Seite
  - Koeffizientenmatrix aufstellen
    - \* invertierbar  $\Leftrightarrow$  auflösbar nach “gewollten” Variablen

## Hauptsatz über implizite Funktionen

- $f: M \subseteq \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{R}^p$ 
  - $M$  offen
  - GLS mit  $p+q$  Variablen und  $p$  Gleichungen
  - $M(\zeta) : f_i(x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, y_{p+q}) = 0$
- auflösbar, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind
  - $f_i(\zeta) = 0$  für  $i = 1$  bis  $p$
  - Koordinatenfunktion  $f_i$  mindestens einmal stetig differenzierbar
    - \* für  $i = 1$  bis  $p$
  - Ableitungsmatrix (nicht Jacobi)
    - \*  $\det\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}\right) \neq 0$
- kann auch ohne Bedingungen auflösbar sein

Bsp.  $f(x, y) = x^2 - y^2 = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Trotzdem eindeutige Auflösung  $y = x$ .

Bsp.  $f(x, y) = x - y + \frac{1}{2} \sin(y) = 0 \quad \vec{\zeta} = (0, 0)$   
 $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$   
 $f_y(x, y) = -1 + \frac{1}{2} \cos(y) \Rightarrow f_y(0, 0) = -\frac{1}{2} \neq 0$   
 $\Rightarrow y = y(x)$  in  $M$  g. von 0

$y(0) = 0$   
 $y'(0) = ?$  (implizite Differentiation)  
 $x - y(x) + \frac{1}{2} \sin(y(x)) = 0 \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} \right.$   
 $1 - y'(x) + \frac{1}{2} \cos(y(x)) y'(x) = 0 \quad | x=0$   
 $1 - y'(0) + \frac{1}{2} \cos(0) y'(0) = 0$   
 $\Rightarrow y'(0) = 2$

[[Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen]][[Funktionen  $\mathbb{R}^p$  auf  $\mathbb{R}^q$ ]]