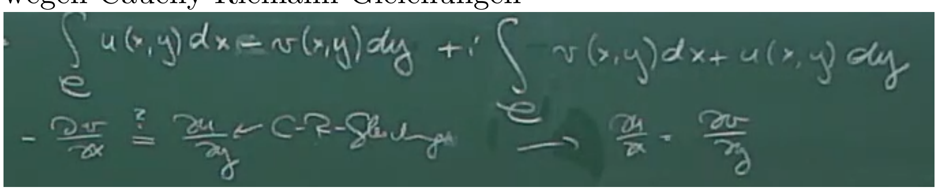
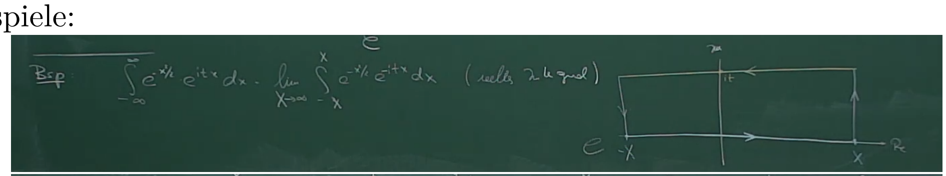
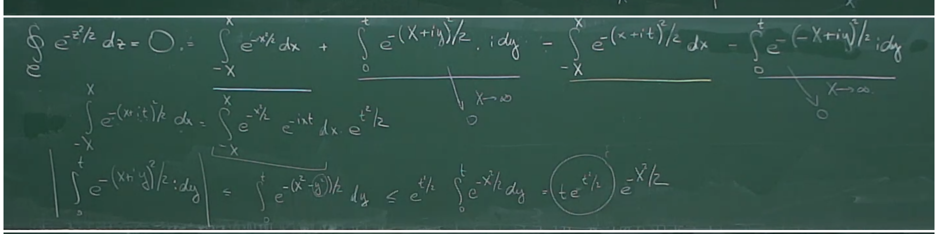
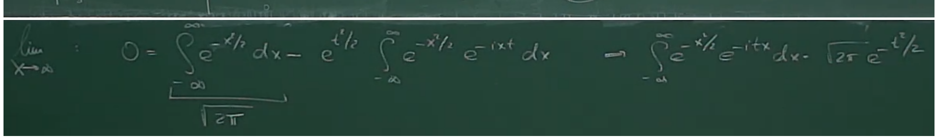
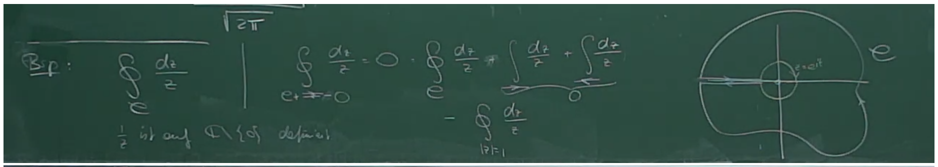
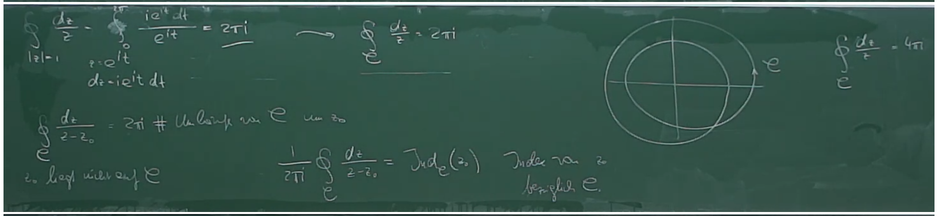
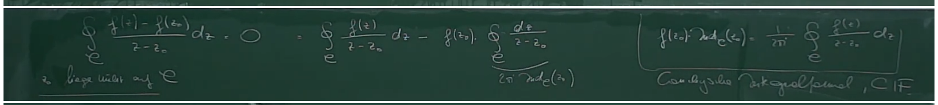
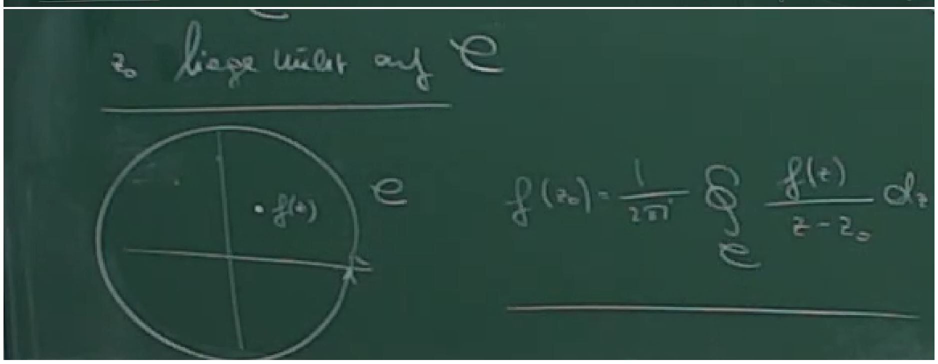
Überblick

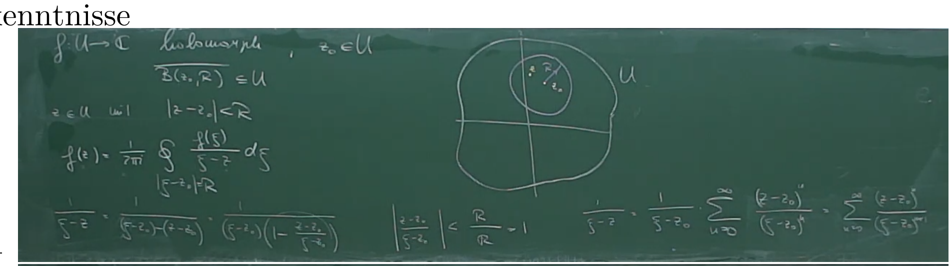
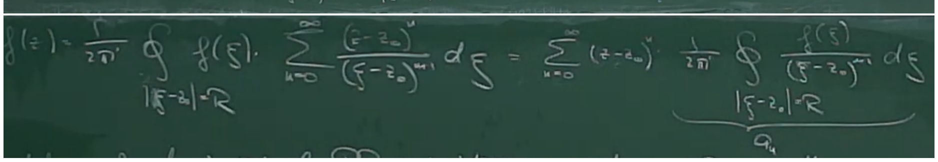
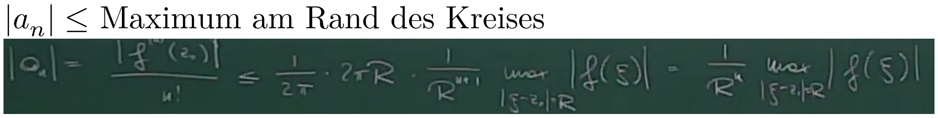
- sei eine Kurve C [a,b]–>U stückweise differenzierbar
  - t–>z(t)
  - f holomorph auf U
- $\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$
  - Substitution mit $z = z(t)$, $dz = z'(t)dt$
  - unabhängig von Parametrisierung
- Zerlegung in Real- und Imaginärteil
  - $\int_C f(z)dz = \int_C (u(x,y) + i(v(x,y))) * (dx + idy) =$
  - $\int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C v(x,y)dy + u(x,y)dy$
- wegunabhängig, wenn
  - Definitionsbereich von f sternförming
  - $\oint f(z)dz = 0$
    - wegen Cauchy-Riemann-Gleichungen
    - 

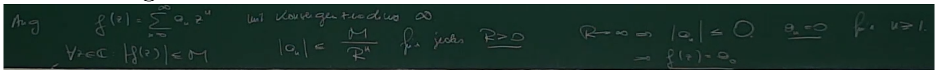
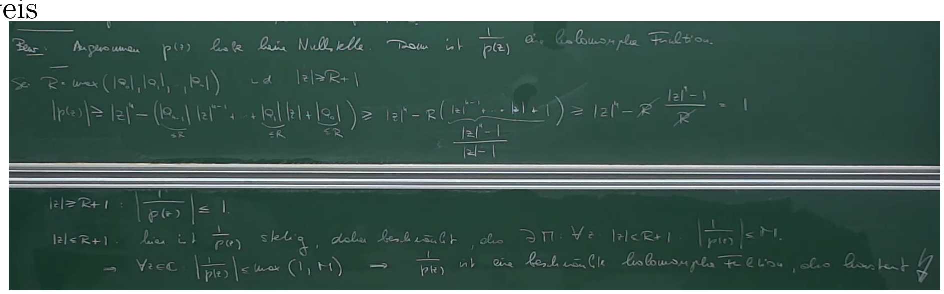
Cauchyscher Integralsatz

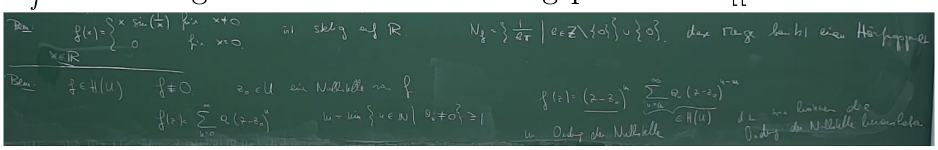
- $\oint f(z)dz = 0$, wenn
  - U sternförmig
  - f holomorph
  - C geschlossen in U
- Beispiele:
  - 
  - 
  - 
- Umläufe zählen

- 
- 
- 

- 

- Cauchysche Integralformel
  - $f(z_0) * Ind_C(z_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$
- Erkenntnisse
  - 
  - 
  - f lässt sich als Potenzreihe mit Konvergenzradius ≥R darstellen
  - f beliebig oft differenzierbar
  - $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi} \oint_{|\zeta - z_0|} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$
    * $= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$
    * C eine Kurve in U mit $Ind_C(z_0) = 1$
- Cauchy-Abschätzung
  - Maximumprinzip
    * $|a_n| \leq$ Maximum am Rand des Kreises
    * 

- Satz von Liouville
  - Sei f eine ganze Funktion und beschränkt ==> f ist konstant
  - 
- Fundamentalsatz der Algebra
  - Polynom p(z) mit Grad n≥1
  - $\exists z_0 : p(z_0) = 0$
  - jedes Polynom hat eine komplexe Nullstelle
  - Beweis
    - 

* Nullstellen holomorpher Funktionen
  - $N_f = \{z \in U | f(z) = 0\}$ Nullstellenmenge
  - N_f entweder ganz U oder kein Häufungspunkt laut [[Satz von Bolzano-Weierstraß]]
  - 
* Seien f,g holomorph auf U, C eine Kurve aus U
  - $\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = g(z) ==> f(z) = g(z) : \forall z \in U$
  - Definitionen der elementaren Funktionen (exp,log,...) für $z \in \mathbb{C}$ sind die einzig möglichen Fortsetzungen der reellen elementaren Funktionen
*

[[Komplexe Analysis]]