

- $= \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ 
  - $x$  - Realteil -  $\operatorname{Re}(z)$
  - $y$  - Imaginärteil -  $\operatorname{Im}(z)$
  - $i$  - imaginäre Einheit
- $i = \sqrt[2]{-1}$
- $i^2 = -1$

## Grundrechenarten

- $(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
- $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
- $\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$  für  $x^2 + y^2 \neq 0$

## Ordnungen/Vergleiche

- keine Ordnung auf
  - $i > 0 \implies i^2 = -1 > 0$
  - $i < 0 \implies i^2 = -1 > 0$

## Konjugation

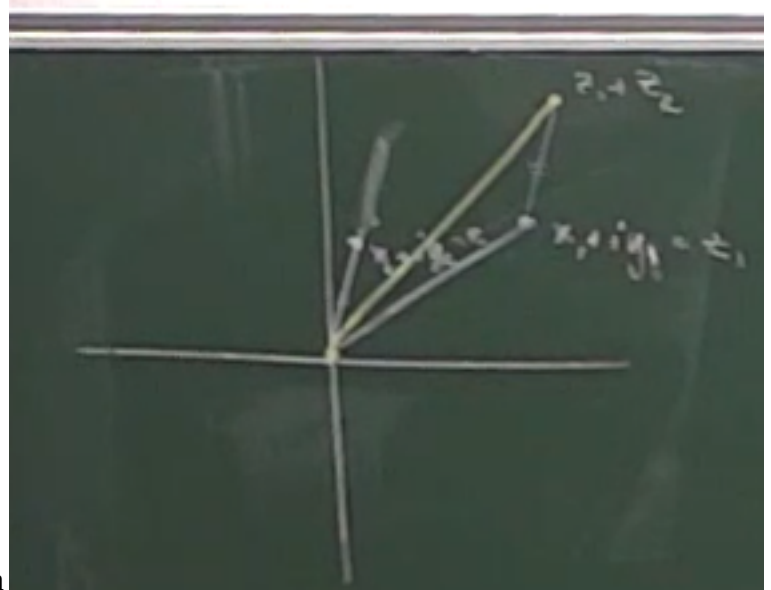
- konjugiert komplexe Zahl  $x - iy = \overline{x+iy}$  (eigentlich mit Strich darüber)
- $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$
- $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$
- $(Z + W) = (Z) + (W)$
- $(Z \cdot W) = (Z) \cdot (W)$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

## Wurzel

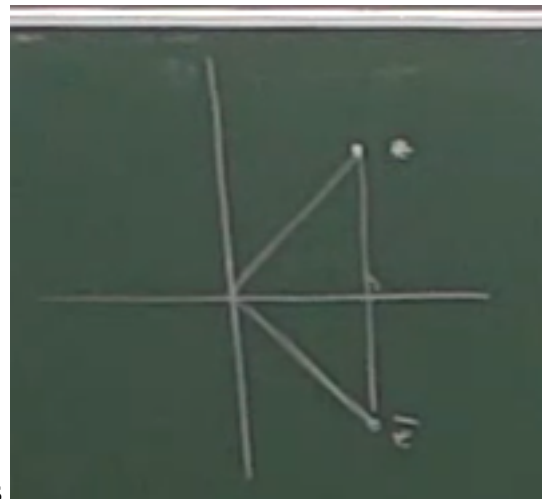
- Sei  $z^2 = a + ib$ 
  - $x^2 - y^2 = a$
  - $2xy = b$
  - $x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$
  - $y = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$
  - Vorzeichen sind so zu wählen, dass  $2xy = b$  gilt  $\implies$  2 Lösungen
    - \*  $+x, -y$
    - \*  $-x, +y$

## Komplexe Zahlen im Graph

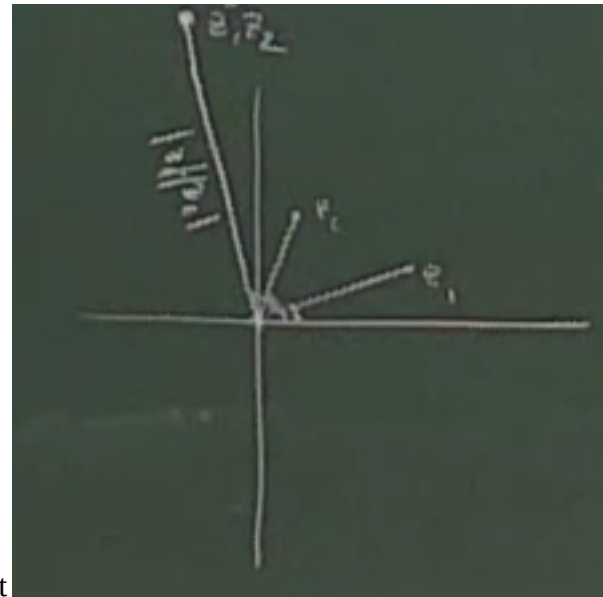
- X/Y-Diagramm
  - $x = \operatorname{Re}(z)$
  - $y = \operatorname{Im}(z)$
- Rechenoperationen:



- Addition  $\implies$  Zahlen zusammenhängen



- Konjugieren  $\implies$  Spiegeln an Achse des Realteils



– Multiplikation ==> Längen multipliziert und Winkel addiert

## Wurzel ziehen in

- $z^n = w$   $w \neq 0, n$
- $z = |z|e^{i\varphi}$  - unbekannt
- $w = |w|e^{i\psi}$  - bekannt
  - $|w| = \sqrt[n]{a + bi}$
  - $\psi$ 
    - \*  $|w|e^{i\psi} = |w|(\cos(\psi) + i\sin(\psi))$
    - \*  $\cos(\psi) = a/|w|$ 
      - ◆ 2 Lösungen
      - ◆  $\arccos(a/|w|) = \psi$
      - ◆  $-\arccos(a/|w|) = \psi$
    - \*  $\sin(b/|w|) = \psi$ 
      - ◆ positiv ==>  $\arccos(a/|w|) = \psi$
      - ◆ negativ ==>  $-\arccos(a/|w|) = \psi$
- Formel:  $z = \sqrt[n]{|w|} \exp\left(\frac{i}{n}(\psi + 2k\pi)\right) k=0, \dots, n-1$ 
  - hergeleitet durch  $z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |w|e^{i\psi} = w$
  - keine Lösung für  $w=0$

## Multiplikation

- $z, w$ 
  - $z = |z|e^{i\varphi}$
  - $w = |w|e^{i\psi}$
- $zw = |z||w|e^{i(\psi+\varphi+2k\pi)}$

## Logarithmus

- $\log(w) = \ln|w| + i\arg(w)$ 
  - $\arg(w) \in (-\infty, \infty]$
- $i^i = e^{i\log(i)} = e^{i^2 \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$