

Übersicht

- [[Sortiervverfahren]]
- gegeben Array von unterschiedlichen Elementen
- Divide and Conquer
 - in zwei Subarrays aufteilen
 - Teilarrays rekursiv sortieren
 - sortierte Arrays zusammenfügen
- Input
 - Array a
 - linke/kleinste Index l
 - rechte/größte Index r
- zwischen l und r wird sortiert

Algorithmus

- l=1 und r=n beim ersten Aufruf
- p:=a[r] ist Pivot-Element
- vergleiche a[l] bis a[r-1] mit p
- sortiere um, sodass
 - a[k]=p
 - a[i]<p für i<k
 - a[i]>p für i>k
- ruf Quicksort rekursiv für linke und rechte Seite auf
 - links mit den Parametern
 - * l=l, r=k-1
 - rechts mit den Parametern
 - * l=k+1, r=r
- angenommen alle Eingabepermutationen sind gleich wahrscheinlich
- C_n ist Anzahl der Vergleiche für Array mit n Elementen
 - $C_n = 2(n+1)(H_{n+1} - 2 + \frac{1}{n+1})$
 - $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$
 - * n-te harmonische Zahl
- $H_n - \ln(n) - \gamma$ konvergiert gegen 0 für $n \rightarrow \infty$
 - γ :=Euler-Mascheroni-Konstante
 - ~ 0.577
- $\frac{C_n}{2n \ln(n)}$ konvergiert gegen 1 asymptotisch

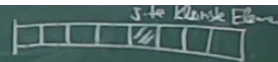
- Beweis

Beweis $C_0 = C_1 = 0$

$\forall n \geq 2$

$$C_n = n-1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (C_{j-1} + C_{n-j})$$

(# Vergleiche mit Pivot)

$$= n-1 + \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} C_j$$


Rekursion

$$n C_n - (n-1) C_{n-1} =$$

$$n(n-1) + 2 \sum_{j=0}^{n-1} C_j - \left((n-1)(n-2) + 2 \sum_{j=0}^{n-2} C_j \right)$$

$$= n^2 - n - (n^2 - 3n + 2)$$

$$= 2 \left(\sum_{j=0}^{n-1} C_j - \sum_{j=0}^{n-2} C_j \right)$$

$$n C_n - (n-1) C_{n-1} = 2(n-1) + 2 C_{n-1} \Rightarrow n C_n = 2(n-1) + (n+1) C_{n-1}$$

vs $n a_n = 2(n-1) + (n-1) a_{n-1}$

*) Setze $b_n := n a_n$ & $b_0 = b_1 = 0$

*) $\Leftrightarrow b_n = 2(n-1) + b_{n-1}$

$b_n - b_{n-1} = 2(n-1)$

$b_{n-1} - b_{n-2} = 2(n-2)$

$b_{n-2} - b_{n-3} = 2(n-3)$

$b_1 - b_0 = 0$

$\Rightarrow b_n - b_1 = 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = 2 \left(\sum_{k=1}^n n - \sum_{k=1}^n k \right)$

$b_n = 2 \left(n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} \right) = n(n-1)$

$$n C_n = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} + \frac{(n+1) C_{n-1}}{n(n+1)}$$

$$\frac{C_n}{n+1} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} + \frac{C_{n-1}}{n}$$

Setze $d_n = \frac{C_n}{n+1}$ Dann erhalten wir

$$d_n = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} + d_{n-1}$$

$$d_n - d_{n-1} = 2 \cdot \frac{(n-1)}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow d_n = 2 \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{k(k+1)}$$

$$= 2 \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k+1)} \right)$$

$$= 2 \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right)$$

$$= 2 \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 2 \left(2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right)$$

$$= 2 \left(2 \left(\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \right) - \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right) \right)$$

$$= 2 \left(2 \left(H_{n+1} - \frac{1}{2} \right) - \left(H_n - \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$= 2 \left(2 H_{n+1} - \frac{1}{2} - H_n + \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2 \left(H_{n+1} - H_n \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{2}{n+1}$$

[[Nicht Lineare Rekursion]]