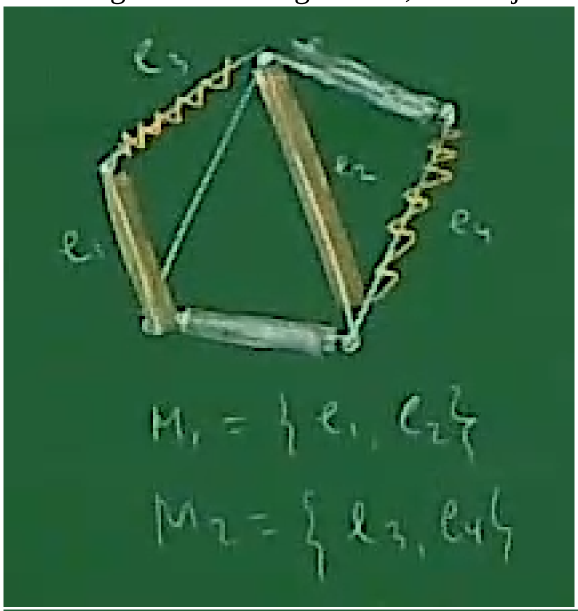
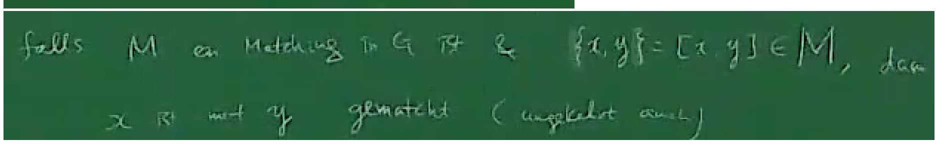
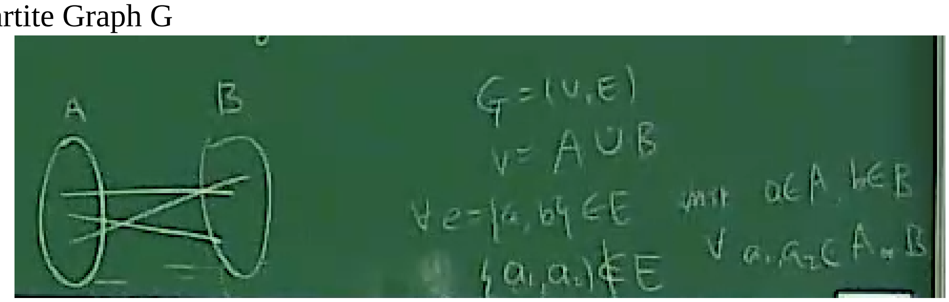
Matching

- Matching in G ist Menge M   E, sodass jeder Knoten höchstens eine Kante von M berührt
- 

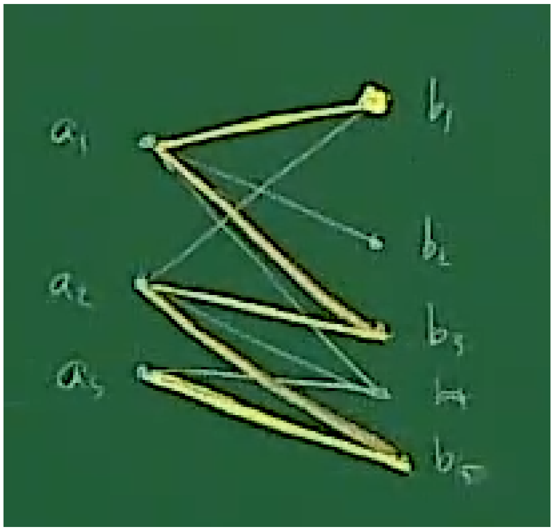
- 

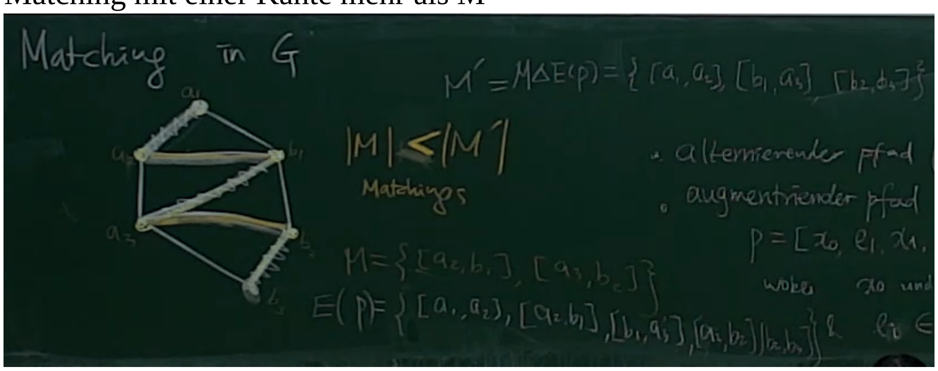
- Matching ist perfekt, wenn jeder Knoten gematcht ist
  - $|M| = \frac{|V|}{2}$
  - größtmögliches Matching

Satz von Hall

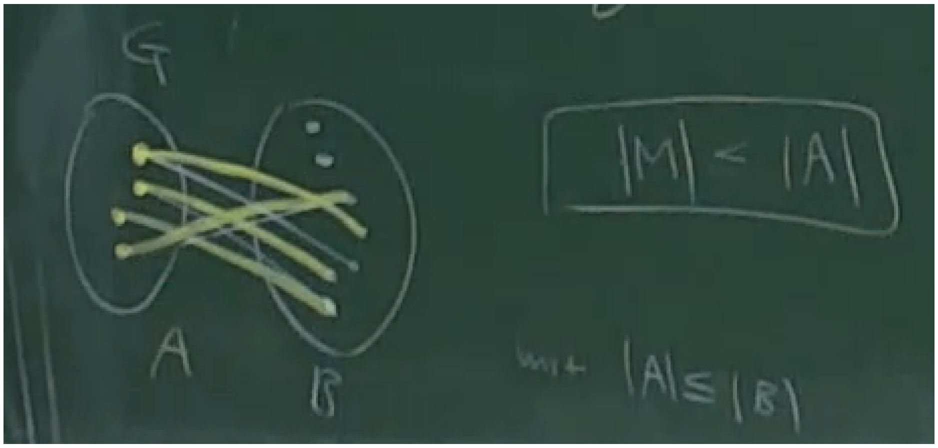
- bipartite Graph G
  - 

- G hat Matching, wenn $N(S) \geq |S|$ für $\forall S \subseteq A$

- 

- Pfad $P = (x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, ..., e_n, x_n)$ alternierend bzgl. M, wenn
  - x_0 ungematcht:
    * $e_i \in M$ für gerade i
    * $e_i \notin M$ für ungerade i
- P ist augmentierend bzgl. M, wenn
  - alternierend
  - letzte Knoten x_kn ungematcht
  - $M' = M \triangle E(P) = (M/E(P)) \cup (E(P)/M)$ symmetrische Differenz
    * Matching mit einer Kante mehr als M
    * 

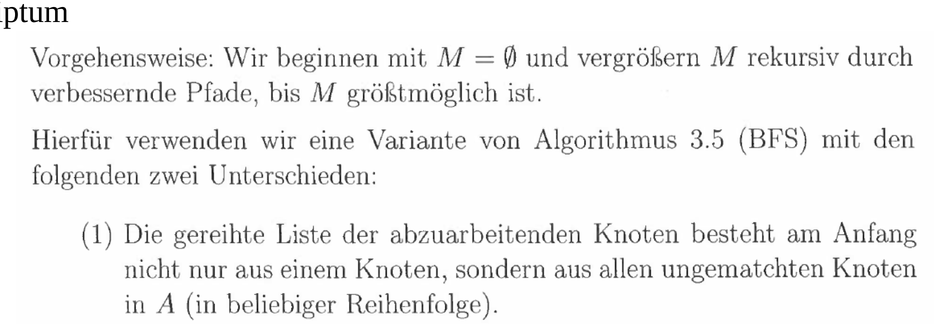
- falls M nicht größtmöglich ==> augmentierender Pfad existiert
  - nicht größtmöglich solange $|M| < |A|$ mit $|A| \leq |B|$

- 

Bipartite Matching

- Input: $G = (A \cup B, E)$ bipartite Graph mit $|A| \leq |B|$
- Output: größtmögliche Matching in G
- erstelle M (aus augmentierter Pfad P) mit Kante mehr bis größtmöglich
- Verfahren:
  - sei $M = \emptyset$
  - wiederhole bis $|M| = |A|$
    - P=Augmenting-Path(G,M)
    - $M = M \triangle E(P)$
  - return M

Augmenting-Path

- Input: $G = (A \cup B, E)$ bipartite Graph, Matching M
- Output: augmentierender Pfad P bzgl. M
- Verfahren:
  - Skriptum
    - 

      Vorgehensweise: Wir beginnen mit $M = \emptyset$ und vergrößern M rekursiv durch verbessernde Pfade, bis M größtmöglich ist.

      Hierfür verwenden wir eine Variante von Algorithmus 3.5 (BFS) mit den folgenden zwei Unterschieden:

      (1) Die gereihte Liste der abzuarbeitenden Knoten besteht am Anfang nicht nur aus einem Knoten, sondern aus allen ungematchten Knoten in A (in beliebiger Reihenfolge).

(2) Liegt der aktuell erste Knoten x der Liste in B, dann

- beenden wir den Algorithmus, falls x ungematcht ist;
- ansonsten fügen wir den Knoten y, mit dem x gematcht ist, an das Ende der Liste hinzu, setzen $v(y) = x$ und entfernen x aus der Liste.

*

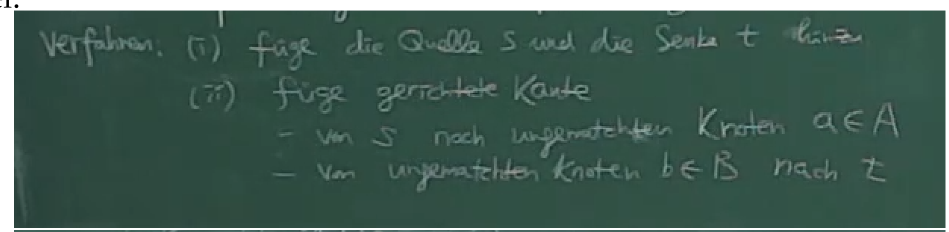
Solange M noch nicht größtmöglich ist, findet dieser Algorithmus einen ungematchten Knoten $x \in B$. Zusammen mit allen seinen Vorgängern (und den Kanten zwischen ihnen) bildet x einen verbessernden Pfad P.

Wir ersetzen M durch $M \triangle E(P)$ und wiederholen die obige BFS-Variante.

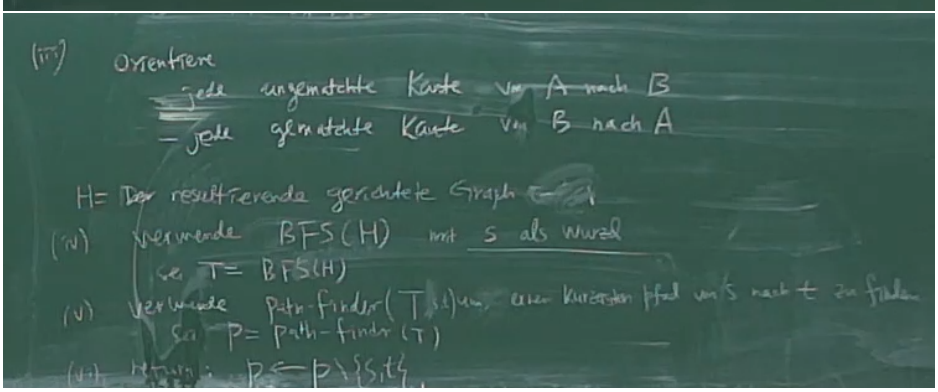
Der Algorithmus endet, sobald die BFS-Variante keinen ungematchten Knoten in B findet. Dann ist M größtmöglich.

*

– Tafel:



*



*

[[Graphentheorie]]