

Lineare Rekursion

- a_n mit $n \in \mathbb{N}$
 - $a_n = c_1 * a_{n-1} + c_2 * a_{n-2} + \dots + c_l * a_{n-l}$
 - * $\Rightarrow a_n - c_1 * a_{n-1} - c_2 * a_{n-2} - \dots - c_l * a_{n-l} = 0$
 - c_i Konstante
 - Anfangsbedingung/startwert fix gegeben
- Charakteristische Polynom
 - $Q(x) = x^l - c_1 * x^{l-1} - c_2 * x^{l-2} - \dots - c_l$
 - hat $Q(x)$ l verschiedene Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$
 - * $a_n = \alpha_1 * \alpha_1^n + \alpha_2 * \alpha_2^n + \dots + \alpha_l * \alpha_l^n$
 - * Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$, sodass Anfangsbedingungen erfüllt
- Beispiel: Fibonacci-Folge

Fibonacci-Zahlenfolge, $(a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0)$

$$Q(x) = x^2 - x - 1$$

hat Nullstellen

$$\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$\alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Nachdem Satz 2.8 gilt

$$a_n = \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$
$$= \left(1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2(4 - \sqrt{5})} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2(4 - \sqrt{5})} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Anfangsbedingungen

$$1 = a_0 = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2$$

$$1 = a_1 = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1$$

$$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\alpha_1 + \alpha_2 \left(3-\sqrt{5} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{(4-\sqrt{5})}{2} \alpha_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Erzeugende Funktionen

- formale Potenzreihe
 - $A(z) := a_0 + a_1 * z + a_2 * z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n * z^n$
 - z formale Variable
- $A(z)$ heißt erzeugende Funktion/Potenzreihe der Folge a_n
- $[z^n]A(z) := a_n$
 - Reskalierung
 - * $[z^n]A(z) = n[z^n]A(z)$
 - Rechenregeln
 - * $A(z) + B(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$
 - * $A(z) * B(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k * b_{n-k} \right) z^n$
 - * $\frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{n \geq 0} a_n * z^n \right) = \sum_{n \geq 1} n * a_n * z^{n-1}$
- $B(z)$ ist Reziprokes von $A(z)$, wenn $A(z) * B(z) = B(z) * A(z) = 1$
 - $A(z) = \frac{1}{B(z)}$
 - Beispiele:
 - * geometrische Reihe

$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (geometrische Reihe). $1-z$ ist das Reziproke von $A(z)$.
 $A(z)(1-z) = (1+z+z^2+z^3+\dots)(1-z) = (1-z) + (z-z^2) + (z^2-z^3) + \dots = 1$
 Also $A(z) = \frac{1}{1-z}$. Für $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\frac{1}{1-\beta z} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n z^n$

* Fibonacci

Bsp. Fibonacci-Zahlen (*) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 2$ mit $a_0 = a_1 = 1$.

(*) $\Rightarrow a_n z^n = a_{n-1} z^n + a_{n-2} z^n$ für $n \geq 2$
 $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n$ $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$
 $\Rightarrow A(z) - a_0 - a_1 z = z \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} + z^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^{n-2}$
 $\quad \quad \quad = z \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = z(A(z) - a_0)$ $\quad \quad \quad = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z^2 A(z)$
 $\Rightarrow A(z) - a_0 - a_1 z = zA(z) - a_0 z + z^2 A(z)$
 $\Rightarrow \frac{A(z) - zA(z) - z^2 A(z)}{A(z)(1-z-z^2)} = a_0 + a_1 z - a_0 z = 1$

$\Rightarrow A(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$

• a_n bestimmen?

$\Rightarrow A(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$ Nenner $= z^2(\frac{1}{z} - \frac{1}{z} - 1) = z^2 Q(\frac{1}{z})$
 $Q(x) = x^2 - x - 1$
 Nullst. von $Q(x)$: $\beta_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
 Also $Q(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)$ $\beta_1 - \beta_2 = \sqrt{5}$
 $1-z-z^2 = z^2(\frac{1}{z} - \beta_1)(\frac{1}{z} - \beta_2) = (1-\beta_1 z)(1-\beta_2 z)$
 Partialbruch-
 zerlegung $A(z) = \frac{1}{1-z-z^2} = \frac{\alpha_1}{1-\beta_1 z} + \frac{\alpha_2}{1-\beta_2 z}$
 multipl. mit $(1-\beta_1 z)(1-\beta_2 z) = 1-z-z^2$
 $\Leftrightarrow 1 = \alpha_1(1-\beta_2 z) + \alpha_2(1-\beta_1 z)$
 Einsetzen $z = \frac{1}{\beta_1}$: $1 = \alpha_1(1 - \frac{\beta_2}{\beta_1}) = \alpha_1 \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1}$
 $z = \frac{1}{\beta_2}$: $1 = \alpha_2(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}) = \alpha_2 \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2}$
 D.h. $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} = \frac{\beta_1}{\sqrt{5}}$ $\alpha_2 = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} = -\frac{\beta_2}{\sqrt{5}}$
 D.h. $A(z) = \frac{\beta_1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1-\beta_1 z} - \frac{\beta_2}{\sqrt{5}} \frac{1}{1-\beta_2 z}$
 $a_n = [z^n] A(z) = \frac{\beta_1}{\sqrt{5}} \beta_1^n - \frac{\beta_2}{\sqrt{5}} \beta_2^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$

[[Kombinatorik]]