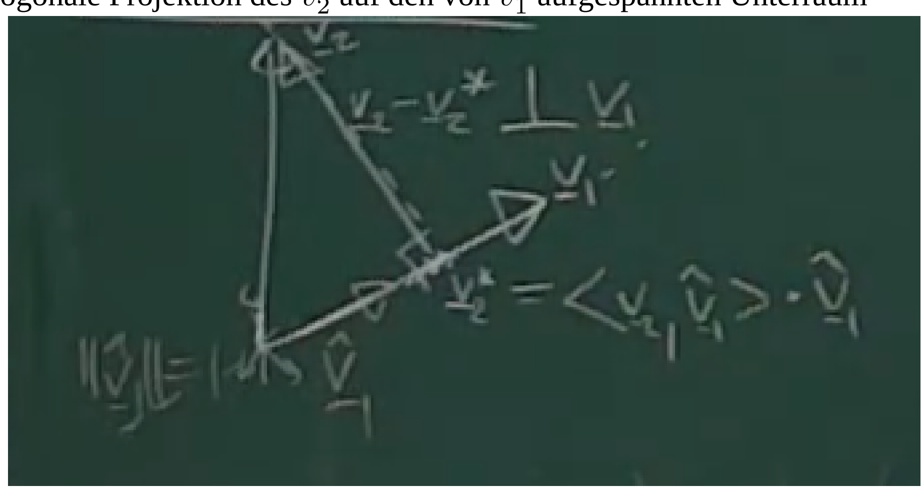
- im reellen unitären VR $\varphi := <(v, w) >= arcos(\frac{<v,w>}{||v||||w||})$
  - $-1 \leq \frac{<v,w>}{||v||||w||} \leq 1$
    - wegen Schwarzsche Ungleichung
    - $0 \leq \varphi \leq \pi$
  - kein Winkel für $v = 0$ oder $w = 0$
- Eigenschaften
  - $<(v, w) =<(w, v)$
  - $v, w \neq 0$ und $< v, w >= 0$ ==> $<(v, w) = \frac{\pi}{2}$ ==> v orthogonal zu w
  - $<(v, -v) = \pi$
- WInkelmessung hängt von der Definition des Skalarprodukt ab
- im $V = \mathbb{R}^n$
  - Winkel bzgl. kanonischem Skalarprodukt ist der “geometrische” Winkel

Orthogonalität und orthonormiert

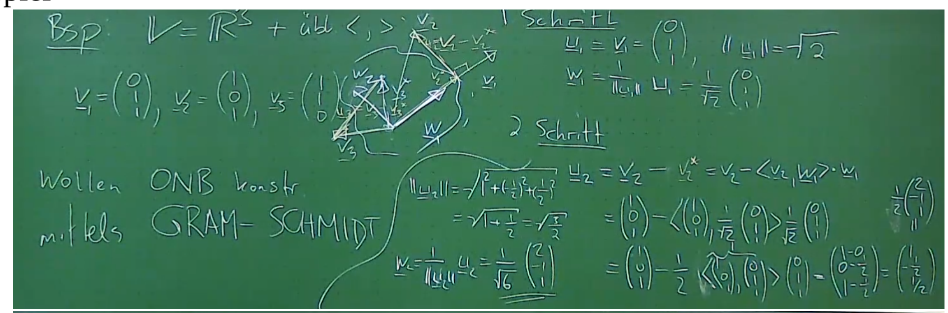
- im unitären VR sind v und w orthogonal, wenn
  - $< v, w >= 0$ bzgl. gewähltem Skalarprodukt
- {} ≠ A V ist orthonormiert, wenn
  - alle v A normiert
  - alle v A die Länge 1 haben <==> ||v||=1
  - paarweise orthogonal sind
- Jede endlich orthonormierte Teilmenge eines unitären VR mit <,> ist linear
  - Beweis VO#18 1:43

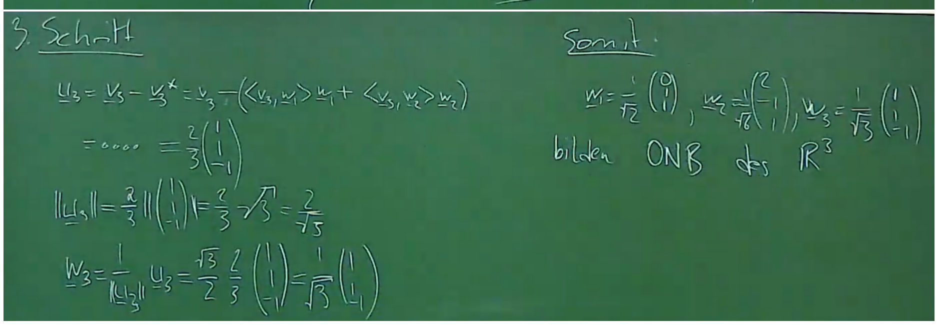
Orthonormierungsverfahren von GRAM-SCHMIDT

- Orthogonale Projektion des v_2 auf den von v_1 aufgespannten Unterraum
  - 

  - $v_2^* =< v_2, v_1' > v_1'$
    - v’ normierter Vektor von v
- Verfahren um Orthonormalbasis zu bilden

- unitärer VR V mit <,> und induzierter Norm $||.|| = \sqrt{<,>}$
- linear unabhängige Menge des Raumes $v_1, ..., v_n$
- Unterraum $W = w_1, ..., w_n$ mit
  - $w_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1$
  - $w_i = \frac{1}{||u_i||} u_i$
    - i = 2,..,n
    - $u_i = v_i - v_i^*$
      - $v_i = \sum_{k=1}^{i-1} < v_i, w_k > w_k$

- Beispiel
  - 

  - 

[[Unitäre Räume]] [[Schwarzsche Ungleichung]]