

Singularität

- $z_0 \in U$ ist Singularität, wenn $f \in H(U \setminus \{z_0\})$
- punktierte Kreisscheibe

$$B'(z_0, r) = B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$$

- Singularitätsfälle
 - hebbare Singularität
 - Pol der Ordnung m
 - wesentliche Singularität
- Übersicht

$$U \subseteq \mathbb{C} \quad z_0 \in U \quad f \in H(U \setminus \{z_0\})$$

1. f bleibt um z_0 beschränkt $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existiert $\rightarrow f \in H(U)$ hebbare Singularität

2. $\exists m \in \mathbb{N} \quad (z - z_0)^m f(z)$ um z_0 beschränkt bleibt $\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$, $g \in H(U)$ Pol der Ordnung m

3. $\forall r > 0$ ist $f(B'(z_0, r))$ dicht in \mathbb{C} (oder ∞) $\Rightarrow f(B'(z_0, r)) \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$ keine hebbare Singularität

Hebbare Singularität

- sei f holomorph und beschränkt auf der punktierten Kreisscheibe $B'(z_0, r)$
- f holomorph auf $B(z_0, r)$

$$\begin{aligned} g(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) \\ \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) &= 0 \quad g \text{ ist stetig in } z_0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{m-1} f(z) = 0 \quad g \text{ ist in } z_0 \text{ differenzierbar} \end{aligned}$$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad a_0 = 0 = g(z_0)$$

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} (z - z_0)^k \quad a_m = 0 = g'(z_0)$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} (z - z_0)^k \quad f \in H(B(z_0, r))$$

- Beispiel

$$\text{Bsp. } f(z) = \frac{\sin(z)}{z} \quad z \neq 0$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1 \quad \Rightarrow f(z) \text{ ist um } z_0 = 0 \text{ beschränkt, damit holomorph um } z_0 = 0$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad \frac{\sin(z)}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}$$

Pol der Ordnung m

- $f \in H(U \setminus \{z_0\})$, wenn $\exists m \in \mathbb{N} : (z - z_0)^m f(z)$ holomorph auf U
- Ordnung des Pols = kleinste mögliche Wert von m
- $\exists a_0, \dots, a_{m-1} : f(z) = \left(\frac{a_0}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z - z_0} \right)$ holomorph in U
- Beispiel

$$\text{Bsp. } f(z) = \frac{1}{\sin(z)} \quad z \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$z \rightarrow 0$ $\frac{1}{\sin(z)} = \frac{1}{z - \frac{z^3}{6} + \dots}$ $\frac{1}{\sin(z)}$ hat eine Singularität für $z \rightarrow 0$ und ist daher holomorph um $z_0 = 0$.

Da $f(z)$ hat in $z_0 = 0$ eine Pol 3. Ordnung

$$\frac{1}{\sin(z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6z^3} + \dots = \frac{1}{z} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1 - \frac{z^2}{6} + \dots} - 1 \right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{6} \left(1 + \frac{z^2}{6} + \dots - 1 \right) = \frac{1}{z} + \frac{z^2}{36} + \dots$$

Wesentliche Singularität

- $\forall r > 0$ gilt $f(B'(z_0, r))$ dicht in

$$\left(\frac{1}{2} + 5000i \right) \in f(B'(z_0, r)) \quad f(B'(z_0, r)) = \mathbb{C} \text{ oder } \mathbb{C} \setminus \{u_0\}$$

- Beispiel

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad f\left(\frac{1}{z_0 + 20\pi i}\right) = e^{\frac{1}{z_0 + 20\pi i}} = \frac{1}{e^{20\pi i}} = 1 \quad \text{denn } e^{20\pi i} = 1 \quad \text{alle } u_k \neq 0 \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-2} \rightarrow 0$$

- Beweis

$$\begin{aligned} & \text{zu zeigen: } f(B'(z_0, r)) \text{ dicht in } \mathbb{C} \text{ für ein } r > 0 \\ & \text{d.h. } \exists u_0, \delta > 0 \quad \forall z \in B'(z_0, r) \quad |f(z) - u_0| \geq \delta \\ & g(z) = \frac{1}{f(z) - u_0} \in H(B'(z_0, r)) \\ & |g(z)| = \frac{1}{\delta} \quad \text{für } z \in B'(z_0, r) \Rightarrow g(z) \in H(B'(z_0, r)) \\ & \quad 1) \quad g(z_0) \neq 0 \quad f(z) = u_0 + \frac{1}{g(z)} \in H(U) \quad \text{keine Singularität} \\ & \quad 2) \quad g(z_0) = 0 \quad g(z) = (z - z_0)^n h(z) \quad h(z_0) \neq 0 \quad f(z) = u_0 + \frac{1}{(z - z_0)^n h(z)} \quad \text{Pol der Ordnung } n \end{aligned}$$

- sei $A \subset U$, sodass A in U keinen Häufungspunkt hat

- $f \in H(U/A)$ meromorph, wenn in A nur Pole hat

$$\omega(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \in H(\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}) \quad \text{d.h. in } z = 0 \quad \text{Pole erster Ordnung} \rightarrow \text{meromorph auf } \mathbb{C}$$

- harmonische Funktion

- $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ differenzierbar

- * wenn CR Gleichungen gelten

- ♦ \Rightarrow beliebig oft

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

- *

- ♦ \Rightarrow u und v harmonisch

[[Komplexe Kurvenintegrale]]