

Motivation

- [[Schätzer]] ist abhängig von Stichprobe
 - Parameter exakt zu schätzen unwahrscheinlich
- Konfidenzintervall
 - Dabei handelt es sich um ein Intervall, das den wahren Wert des Parameters mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ enthält.

Konfidenzintervall für μ

Betrachten wir $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ und nehmen wir zunächst an, σ^2 wäre **bekannt**. Es gilt

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \iff \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Seien $\alpha \in (0, 1)$ und z_p das p -Quantil der $N(0, 1)$ -Verteilung. Aus Symmetriegründen gilt $z_p = -z_{1-p}$. Damit folgt

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha.$$

– Herleitung

The image shows a handwritten derivation of the confidence interval for the mean. It starts with the probability statement $P(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2})$, which is then transformed into $F(z_{1-\alpha/2}) - F(-z_{1-\alpha/2})$. This is simplified to $F(z_{1-\alpha/2}) - F(z_{\alpha/2})$, and finally to $1 - \alpha/2 - \alpha/2 = 1 - \alpha$. Below the equations is a sketch of a normal distribution curve with the central area labeled $1 - \alpha$ and the two tails shaded. The x-axis is marked with $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ and $z_{1-\alpha/2}$.

$$\begin{aligned} P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) \\ &= F(z_{1-\alpha/2}) - F(-z_{1-\alpha/2}) \\ &= F(z_{1-\alpha/2}) - F(z_{\alpha/2}) \\ &= 1 - \alpha/2 - \alpha/2 = 1 - \alpha \end{aligned}$$

$$CI_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

•

Studentsche t-Verteilung

• Seien $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, wobei σ^2 diesmal **unbekannt** ist.

Wir schätzen σ^2 mittels $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ und betrachten

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S}.$$

•

$n - 1$ Freiheitsgraden, $T \sim t(n - 1)$.

•

Sei $t_{n-1,p}$ das p -Quantil dieser Verteilung. Analog zum vorherigen Fall erhalten wir für μ diesmal das Konfidenzintervall

$$CI_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{X} - t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right].$$

•

– symmetrisch wie [[Normalverteilung]]

$$z_p = -z_{1-p} \quad \text{und} \quad t_{n,p} = -t_{n,1-p}.$$

–

Beispiel

geg.: 2.7 3.0 2.0 2.7 3.2
3.2 2.9 2.3 2.2 3.3 normalverteilt

ges.: 95% Konfidenzintervall für μ .

$$n = 10 \quad \alpha = 0.05 \quad (1 - 95\%)$$

$$\bar{X} = 2.75 \quad S \approx 0.46$$

$$t_{n-1,1-\alpha/2} = t_{9,0.975} \approx 2.26$$

$$CI(\mu) = \left[\bar{x} - t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

$$= [2.42, 3.08]$$

•

Chi-Quadrat-Verteilung

Konfidenzintervall für σ^2

$X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, diesmal möchten wir ein Konfidenzintervall für die Varianz σ^2 angeben. Ein wichtiges Resultat besagt, dass

$$\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1),$$

also folgt die empirische Varianz einer **Chi-Quadrat-Verteilung** mit $n-1$ Freiheitsgraden. Bezeichnet $q_{n-1,p}$ das p -Quantil dieser Verteilung, dann ist

$$\text{CI}_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S^2}{q_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{q_{n-1,\alpha/2}} \right],$$

• ein entsprechendes Konfidenzintervall für σ^2 (Übung).

[[T-Score Confidence Interval]] [[Z-Score Confidence Interval]]