Motivation

- aus Daten Rückschlüsse über Population ziehen

  Wir nehmen an, die Körpergröße (m) einer erwachsenen Person sei normalverteilt mit Erwartungswert μ. Der Wert des Parameters μ ist uns allerdings *nicht* bekannt.

  Von 4 Erwachsenen messen wir die folgenden Körpergrößen:

  $$1.68, 1.77, 1.70, 1.69.$$

  Können wir anhand der erhobenen Daten Rückschlüsse auf den unbekannten Parameter ziehen?

-

Definition

- Wir betrachten eine Verteilung F_θ, die durch einen **unbekannten Parameter** (oder Parametervektor) $\theta \in \mathbb{R}^d$ charakterisiert wird. Dabei ist bekannt, dass θ im **Parameterraum** $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$ liegt.
- Es sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Zufallsstichprobe aus der Population F_θ mit $\theta \in \Theta$. Wir behandeln nun die folgenden Fragen:
- Schätzer für θ
  - $$\hat{\theta} = f(X_1, \ldots, X_n),$$
  - [[Statistiken]]
- Schätzwert
  - $$f(x_1, \ldots, x_n),$$
- Beispiele für Schätzer
  - **Beispiel.** Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, dann ist $\mathrm{E}(X_1) = \mu$. Nach dem Gesetz der großen Zahlen konvergiert $\bar{X}$ gegen $\mathrm{E}(X_1)$. Somit bietet sich $\bar{X}$ als Schätzer für μ an.
  - **Beispiel.** Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$, dann ist $\mathrm{E}(X_1) = 1/\lambda$. Nach dem Gesetz der großen Zahlen konvergiert $\bar{X}$ gegen $\mathrm{E}(X_1)$. Somit bietet sich $1/\bar{X}$ als Schätzer für λ an.

Eigenschaften der [[Normalverteilung]]

- Eine Zufallsvariable Z folgt einer **Standardnormalverteilung** ($Z \sim \mathrm{N}(0,1)$), wenn sie die Dichte

  $$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}, \qquad z \in \mathbb{R}$$

  besitzt. Die zugehörige Verteilungsfunktion

  $$F_Z(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_Z(z)\,\mathrm{d}z =: \Phi(x)$$

- Eine Zufallsvariable X folgt einer Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 ($X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$), wenn

  $$X = \mu + \sigma Z,$$

  wobei $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

  Man kann zeigen, dass
  - $\mathrm{E}(X) = \mu$ und $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$,
  - die Dichte von X gegeben ist durch

  $$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

- Linearkombination unabhängiger, normalverteilter Zufallsvariablen ist normalverteilt
  - Es folgt
    - $$\bar{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n).$$
  - weil
    - $$\mathrm{E}(\bar{X}) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = \mu$$

      $$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$
  -

Verteilung $\bar{X}$ als Schätzer für μ

- $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2).$
-

Parameterräume

- $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$

  $$\lambda \in \Theta = (0, \infty),$$

  $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Bernoulli}(p)$

  $$p \in \Theta = (0, 1),$$

  $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Unif}([2, \theta])$

  $$\theta \in \Theta = (2, \infty),$$

  $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

  $$(\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty).$$