

Definition

$$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} =: p_k.$$

-
- [[Binomialverteilung]] konvergiert gegen Poisson Verteilung für seltene Ereignisse
 - n sehr groß
 - p sehr klein

Herleitung

Die Poisson-Verteilung $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Unter obigen Annahmen, haben wir für jedes fixe ℓ , dass $(n-\ell)p \rightarrow \lambda$. Für jedes fixe k gilt $(1-p)^{-k} \rightarrow 1$. Daher folgt, dass

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= \frac{n \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{np \times (n-1)p \times \dots \times (n-k+1)p}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{pn}{n}\right)^n}_{\rightarrow e^{-\lambda}} \underbrace{(1-p)^{-k}}_{\rightarrow 1} \\ &\rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} =: p_k. \end{aligned}$$

Handwritten notes: $(1-p)^{n-k} = (1-p)^n (1-p)^{-k} \approx 1$

• $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$

Beispiele

- Lotto

Angenommen 20 Mio. Lottoscheine wurden verkauft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens 2 Gewinner zu haben? Wir verwenden die Poisson Approximation und erhalten $np \approx 2.46$.

$$P(\text{mindestens 2 Lotto Ger}) = 1 - P(0 \text{ oder } 1 \text{ Ger})$$

$$\left. \begin{array}{l} n = 20 \text{ Mio.} \\ p = \frac{1}{\binom{45}{6}} \end{array} \right\} n \cdot p \approx 2,46 = \lambda$$

$$P(0 \text{ Ger}) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n \approx e^{-\lambda}$$

$$P(1 \text{ Ger}) = \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} \approx e^{-\lambda} \lambda$$

$$1 - e^{-\lambda} - e^{-\lambda} \lambda$$

• Fußball

Angenommen die Anzahl der Tore pro Spiel eines Clubs folgt einer Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = 2$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft in mindestens einem Spiel (in einer Saison mit 50 Spielen) mehr als 4 Tore schießt?

$$\begin{aligned} P(>4 \text{ Tore in einem einzigen Spiel}) &= \\ 1 - P(\leq 4 \text{ Tore}) &= 1 - \sum_{k=0}^4 \underbrace{P(k \text{ Tore})}_p = p \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \frac{e^{-2} 2^k}{k!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{mindestens in einem von 50 Spielen } > 4 \text{ Tore}) &= \\ 1 - P(\text{nie mehr als 4 Tore}) &= \\ 1 - \binom{50}{0} p^0 (1-p)^{50} &= \underline{\underline{1 - (1-p)^{50}}} \end{aligned}$$