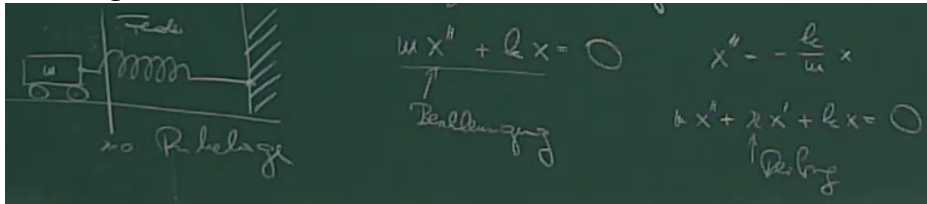


Übersicht

- $y^{(n)} + a_{n-1} * y^{(n-1)} + \dots + a_1 * y' + a_0 * y = 0$
 - a ... gegebene Konstanten
 - DGL n-ter Ordnung
 - Anwendungsfall: Masse-Feder abhängig von
 - * Masse mal Beschleunigung
 - * Reibung mal Geschwindigkeit
 - * Federzug mal Strecke



- zweidimensionales GLS lösbar, wenn zwei linear unabhängige Lösungen gegeben
 - z.B.
 - * $x(0)$ Anfangsauslenkung gegeben
 - * $x'(0)$ Anfangsgeschwindigkeit gegeben

Ansatz

- Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$

$$m \lambda^2 e^{\lambda t} + r \lambda e^{\lambda t} + k e^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \quad m \lambda^2 + r \lambda + k = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}$$

$$\tilde{x}_1(t) = e^{i \sqrt{\frac{k}{m}} t} \quad \tilde{x}_2(t) = e^{-i \sqrt{\frac{k}{m}} t} \quad x_1(t) = \frac{1}{2} (\tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_2(t)) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

$$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$
- Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \Rightarrow \quad p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Die Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ von p entsprechen Lösungen.

Wenn die Nullstellen verschieden sind, dann sind dies alle Lösungen von der Form $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$.

- Nullstellen des charakteristischen Polynoms entsprechen Lösungen
- alle Nullstellen verschieden \Rightarrow alle Lösungen gefunden

- Sei λ_1 eine beliebige Nullstelle von p : $p(\lambda_1) = p'(\lambda_1) = \dots = p^{(n-1)}(\lambda_1) = 0$

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) y(t)$$

$$\frac{p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) e^{\lambda_1 t}}{p(\lambda_1) e^{\lambda_1 t}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) e^{\lambda_1 t}}{p(\lambda_1) e^{\lambda_1 t}} = 0$$

Wenn λ_1 eine Nullstelle des DGLs ist, dann gehören zu λ_1 die Lösungen $e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{n-1} e^{\lambda_1 t}$.
- Wenn λ_1 eine Nullstelle des DGLs ist, dann gehören zu λ_1 die Lösungen $e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{n-1} e^{\lambda_1 t}$.

Vorgehensweise

- Gleichung in charakteristische Polynom umwandeln
- Polynom in Linearfaktoren zerlegen
 - mehrere Nullstellen ==> innere Resonanz
- umformen nach λ
 - quadratische Gleichung
- Fallunterscheidung der Diskriminante D
 - $D < 0$

- * zwei komplexe Lösungen ($x+iy$)
 - ◆ kongugiert ebenfalls Lösungen
- * umwandeln in reelle Lösungen
 - ◆ Nullstellen ergeben zusammen reelle Lösung
 - ◆ $\lambda_{1/2} = e^x e^{\pm iy} = e^x * \sin(y)/\cos(y)$

- $D = 0$
 - * Doppellösung ==> allgemeine Lösung

- $D > 0$
 - * zwei verschiedene reelle Lösungen

- Zusammenfassung

Beispiele

$$Bsp: \quad \bar{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(3n)!} \quad x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (3n) \frac{t^{2n-1}}{(3n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{(3n-1)!}$$

$$x''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-2}}{(3n-2)!} \quad x'''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{(3n-3)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(3n)!} = x(t)$$

$$d.B. \quad x(t) \text{ erfüllt die Dgl } x'' = x$$

$$\text{Char. Polynom: } \lambda^2 = 1 \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_4 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$x(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$x'(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + C_3 \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_4 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$x'(0) = C_1 - C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} C_4 = 0$$

$$x''(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_4 \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$x''(0) = C_1 + C_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} C_3 = 1$$

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$C_1 - C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} C_4 = 0$$

$$C_1 + C_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} C_3 = 1$$

$$C_1 = \frac{1}{3} e^t + \frac{2}{3} e^{-t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(3n)!}$$

[[Differentialgleichungen]]