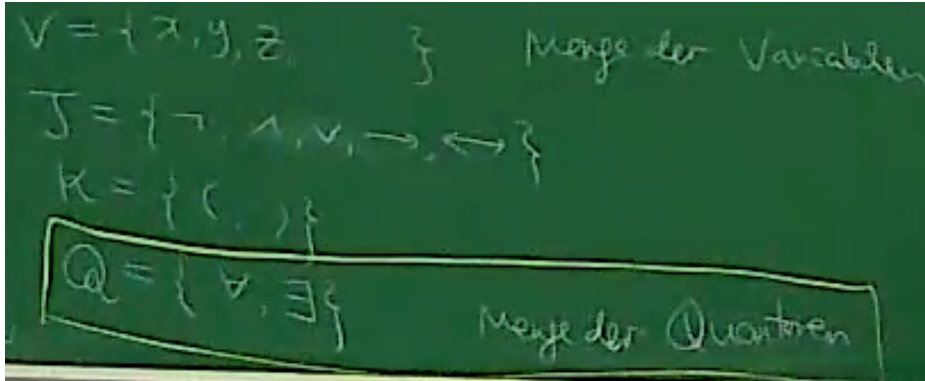
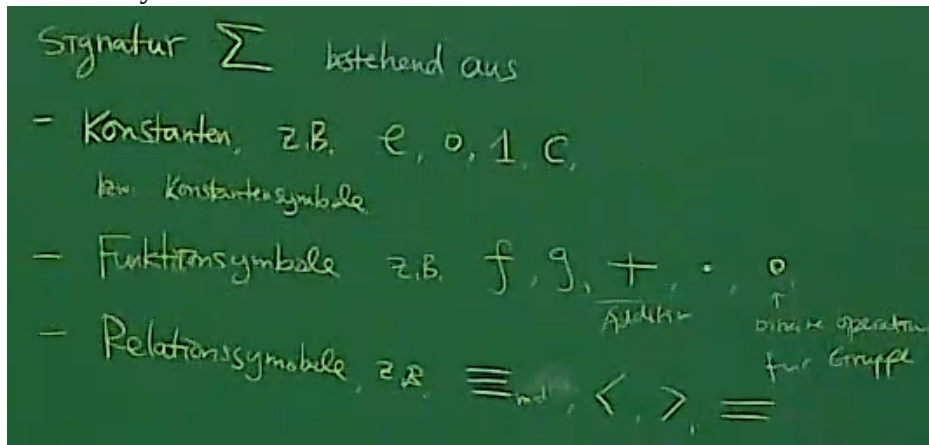


Sprache erster Stufe

- V Menge der Variablen
- J Menge der Junktoren
- K Menge der Klammern
- Q Menge der Quantoren



- Signatur Σ bestehend aus
 - Konstantensymbole
 - Funktionssymbole
 - Relationssymbole



- Stelligkeit
 - Funktions- und Relationssymbole besitze fixe Parameteranzahl
 - Stelligkeit = Parameteranzahl
- Menge der Terme über V und Σ
 - alle Variablen und Konstanten sind Terme
 - Funktionen, welche Terme als Input bekommen, sind auch Terme
- Menge aller Formeln über V und Σ $F_{V,\Sigma}$
 - Primformeln
 - * T und $\neg T$ sind Formeln
 - * Terme $t_1, t_2 \implies t_1 = t_2$ ist Formel
 - * Relationen, welche Terme als Input bekommen, sind auch Formeln

- für jede Formel P ist jede Junktoren/Quantorenverknüpfung auch eine Formel
 - * $\neg P$
 - * ...
- Menge der freien Variablen $FV(P)$ für $P \in F_{V,\Sigma}$
 - P ist Primformel $\implies FV(P) =$ Menge aller Variablen in P
 - $FV(P) = FV(\neg P)$
 - falls P und Q Formeln $\implies FV(P \wedge Q) = FV(P \vee Q) = FV(P) \cup FV(Q)$
 - Variablen aus Quantoren sind gebundene Variablen

Für eine Variable $x \in V$ gilt $FV(\forall x P) = FV(P) \setminus \{x\} = FV(\exists x P)$
 In dem Fall heißt x eine gebundene Variable.

- Beispiel: Vereinigung beider Mengen exklusive Quantoren

Bsp. $P = (\forall x (\neg x=1)) \wedge (\forall y \ y=f(x,z))$

$FV(P) = FV(Q) \cup FV(R)$

$= (\{x\} \setminus \{x\}) \cup (\{x,y,z\} \setminus \{y\})$

$= \{x,z\}$

Σ -Struktur und Σ -Modell

- Σ -Struktur $= (A, \Sigma)$ besteht aus Grundmengen A und Strukturmenge Σ für die gilt
 - für jede Konstante $C \in \Sigma$ existiert $C^A \in A$
 - für jede n -stellige Funktion $f \in \Sigma$ existiert $f^A : A^n \rightarrow A$
 - für jede n -stellige Relation $R \in \Sigma$ existiert $R^A \subseteq A^n$

Bsp. Seien $V = \{x, y, z, \dots\}$ Variablenmenge

(V, \circ) eine Gruppe mit neutralem Element e :

dh. (i) $\forall x, y, z \in V \quad ((x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z))$

(ii) $\exists e \in V \quad ((x \circ e = x) \wedge (e \circ x = x))$

(iii) $\forall x \in V \quad \exists x^{-1} \in V \quad ((x \circ x^{-1} = e) \wedge (x^{-1} \circ x = e))$

$\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe mit neutralem Element 0

Ist Σ -Struktur mit $\Sigma = \{e, \circ\}$, $e^{\mathbb{Z}} = 0$, $\circ^{\mathbb{Z}} = +$

- Abbildung $\omega : V \rightarrow A$ heißt Belegung
- Σ -Modell $M = (A, \omega) = M(A, \Sigma, \omega)$
 - A mit Belegung ω heißt Σ -Modell für $F_{V,\Sigma}$
 - $\forall P \in F_{V,\Sigma}$ wird Auswertung von P in M mithilfe von ω kanonisch definiert

* Auswertung P^M

Bsp.

$$p = \exists z ((x=y+z) \wedge (x > z))$$

mit einer Belegung

$$\omega: V \rightarrow \mathbb{Z}$$

wobei $\omega(x) = 1$ & $\omega(y) = 13$

Auswertung von p im Σ -Modell \mathcal{M}

$$p = \exists z ((1=13+z) \wedge (1 > z))$$

[[Aussagenlogische Formeln]]