Definition

- $$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} =: p_k.$$
- [[Binomialverteilung]] konvergiert gegen Poisson Verteilung für seltene Ereignisse
    - n sehr groß
    - p sehr klein

Herleitung

Die Poisson-Verteilung

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Unter obigen Annahmen, haben wir für jedes fixe ℓ, dass $(n-\ell)p \to \lambda$. Für jedes fixe k gilt $(1-p)^{-k} \to 1$. Daher folgt, dass

$$p \cdot p \cdots p$$

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n \cdots (n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \underbrace{\frac{np \times (n-1)p \times \cdots \times (n-k+1)p}{k!}}_{\to \frac{\lambda^k}{k!}} \underbrace{\left(1-\frac{pn}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{(1-p)^{-k}}_{\to 1}$$

$$\to \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} =: p_k.$$

$$(1-p)^{n-k} = (1-p)^n (1-p)^{-k}$$

$$= \Big(1 - \frac{\overset{\lambda}{pn}}{n}\Big)^n \underbrace{(1-p)^{-k}}_{\approx 1}$$

- $$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x \quad (n \to \infty)$$

Beispiele

- Lotto
    - Angenommen 20 Mio. Lottoscheine wurden verkauft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens 2 Gewinner zu haben? Wir verwenden die Poisson Approximation und erhalten $np \approx 2.46$.

P (mindestens 2 Lotto 6er) $= 1 - P$(0 oder 1 6er)

$n = 20$ Mio.
$p = \frac{1}{\binom{45}{6}}$ $\Bigg\}$ $n \cdot p \approx 2{,}46 = \lambda$

$P(0 \text{ 6er}) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n \approx e^{-\lambda}$

$P(1 \text{ 6er}) = \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} \approx e^{-\lambda}\lambda$

$1 - e^{-\lambda} - e^{-\lambda}\lambda$

–

- Fußball

Angenommen die Anzahl der Tore pro Spiel eines Clubs folgt einer Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = 2$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft in mindestens einem Spiel (in einer Saison mit 50 Spielen) mehr als 4 Tore schießt?

–

P(>4 Tore in einem einzigen Spiel) $=$

$1 - P(\leq 4 \text{ Tore}) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \underbrace{P(k \text{ Tore})}_{\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-2}2^k}{k!}} = p$

P (mindestens in einem von 50 Spielen >4 Tore) $=$

$1 - P$ (nie mehr als 4 Tore) $=$

$1 - \binom{50}{0} p^0 (1-p)^{50} = \underline{1 - (1-p)^{50}}$

–