- F: V –> V
  - lineare Selbstabbildung
  - $Av = \lambda v$
    - v - Eigenvektor
    - λ - Eigenwert
    - A quadratisch
  - dim(V) endlich ==> EW/EV Problem für Matrizen

Eigenwert/Eigenvektor-Problem

- $Av = \lambda v = \lambda I v$ ==> $(A - \lambda I)v = 0$
  - homogenes lineares Gleichungssystem
  - nichttriviale Lösung $v \neq 0$, wenn $det(A - \lambda I) = 0$
    - $det(A - \lambda I) = 0$ charakteristische Gleichung
    - $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$ charakteristisches Polynom
    - $P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + b_1\lambda + b_0$
    - Polynomgleichung mit reellen Koeffizienten ==> genau $A^{n \times n}$ hat n Eigenwerte
      - mit Vielfachheit gezählt
- $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k1} ... (\lambda - \lambda_r)^{kr}$
  - $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq ... \neq \lambda_r$
  - λ_n hat algebraische Vielfachheit k_n
    - algebraische Vielfachheit
      - wie oft λ_1 Lösung $P(\lambda) = 0$ ist
      - wie oft ein λ_1 vorkommt bzw. Exponent von $(\lambda - \lambda_1)^k$
- $Av = \lambda v$ ==> Eigenvektoren spannen zum Eigenwert einen Unterraum von $\mathbb{C}^n$
  - $Eigen(\lambda, A) := v \in \mathbb{C}^n : Av = \lambda v = Kern(A - \lambda I)$
  - geometrische Vielfachheit - Dimension des Eigenraum

Vorgehensweise

- Eigenwerte bestimmen
  - Lösen der charakteristischen Gleichung $det(A - \lambda I) = 0$
  - Polynom als Lösung
  - dessen Nullstellen/Eigenwerte und Vielfachheiten bestimmen
- Eigenvektoren bestimmen
  - Gleichung $(A - \lambda I)v = 0$ für alle Eigenwerte lösen
    - ∞ Lösungen
  - Eigenraum/span/Dimensionen bestimmen
    - $Eigen(\lambda_*, A) = Span(v_1, ..., v_n)$
    - geometrische Vielfachheit = $dimEigen(\lambda_*, A)$

Sonstiges

- $1 \leq$ geom V(λ) $\leq$ alg V(λ)
  - alg V(λ) = 1 <==> geom V = 1
  - geom V(λ) = alg V(λ) für alle EW von A ==> $A^{n\times n}$ besitzt n l. u. EV
    - n l. u. EV, wenn alle EW verschieden
- Det(A) = $\prod_{j=1}^{n} \lambda_j$
- Spur(A) = $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j$ = Summe der Hauptdiagonalelemente