

## DGL System

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{f}(\vec{x}) & U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen} \\ \vec{x}' &= \vec{f}(\vec{x}) & x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ & & x'_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \text{ in Koordinaten} \\ & & x'_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

### Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{f}(\vec{x}) \quad \text{unter der Anfangsbedingung} \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \in U. \\ \vec{x}(t) &= \vec{x}_0 + \int_0^t \vec{f}(\vec{x}(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

gleiches als wie kein Satz von Picard-Lindelöf.  
 Die Lösung des ANP existiert und ist eindeutig bestimmt.

## Lineares System

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= A \vec{x} & A \text{ } n \times n \text{-Matrix} \\ \vec{x}(t) &= e^{tA} \vec{x}_0 \end{aligned}$$

### $e^{tA} =$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

### $\lambda$ [[Eigenwerte]] von A

$$\begin{aligned} \vec{y}' &= A \vec{y} & \vec{y}(t) \in \mathbb{R}^n, & A \text{ } n \times n \text{-Matrix, fest} \\ \vec{y}(t) &= e^{tA} \vec{y}(0). \end{aligned}$$

$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n$  Eigenwerte von A.

### $\vec{y}' = A \vec{y} \quad \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ dann genügt es, $n$ linear unabhängige Lösungen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ zu finden.

An diesen lässt sich dann die allgemeine Lösung  $\vec{y}(t) = \mu_1 \vec{y}_1(t) + \dots + \mu_n \vec{y}_n(t)$  schreiben.  
 zu jedem Eigenwert  $\lambda_j$  und zugehörigen Eigenvektor  $\vec{v}_j$  gehört die Lösung  $\vec{y}_j = e^{\lambda_j t} \vec{v}_j$ .

- Beispiele:

- reelle Eigenwerte

$\vec{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \vec{y}$ . bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren des Vektors.

$\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 3 & -5-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)(-5-\lambda) - 1 \cdot 3 = 15 + 8\lambda + \lambda^2 - 3 = \lambda^2 + 8\lambda + 12$   
 $\lambda_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16-12} = -4 \pm 2 = \begin{matrix} -6 \\ -2 \end{matrix}$

\*  $\lambda_1 = -6$ :  $3x_1 + x_2 = 0 \quad (-3x_1 + x_2 = -6x_1)$   $A \vec{v} = -6 \vec{v}$   
 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$   
 $\lambda_2 = -2$ :  $-x_1 + x_2 = 0 \quad (-3x_1 + x_2 = -2x_1)$   
 $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{y} = e^{-6t} \vec{v}_1 \quad \vec{y}' = -6 e^{-6t} \vec{v}_1$   
 $\vec{y}' = -2 e^{-2t} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} e^{-2t} \vec{v}_2 = e^{-2t} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$   
 allgemeine Lösung:  $\vec{y}(t) = \mu_1 e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$

- \* jede Anfangsbedingung lösbar durch Wahl von  $\mu_1, \mu_2$

- komplexe Eigenwerte

- \* zweite Eigenwert komplex konjugiert

$\vec{y}' = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}$ .  $\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$   
 $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$

\*  $\lambda_1 = -2+i$ :  $-2x_1 - x_2 = (-2+i)x_1$   
 $-ix_1 - x_2 = 0 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$   
 $\lambda_2 = -2-i$ :  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{y}(t) = e^{(-2+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + e^{(-2-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$   
 $= \frac{1}{2} e^{-2t} \left( (e^{it} (\cos(t) + i \sin(t)) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + (e^{-it} (\cos(t) - i \sin(t)) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$   
 $= \frac{1}{2} e^{-2t} \left( \begin{pmatrix} i \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + i \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) - i \sin(t) \end{pmatrix} \right)$

\*  $= e^{-2t} \begin{pmatrix} -\sin(t) - \sin(t) \\ \cos(t) - \cos(t) \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

- doppelter Eigenwert

$\vec{y}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \vec{y}$   $\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(-3-\lambda) + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 3 + 1 = (\lambda+2)^2$   
 $\lambda_{1,2} = -2$   $-x_1 - x_2 = -2x_1 \quad x_1 - x_2 = 0 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$   $\dim \text{Nullf.} = 1 < \dim \text{Matrix} = 2$

\*  $A \vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_1$   $-x_1 - x_2 = -2x_1 + 1 \quad x_1 - x_2 = 1 \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   
 $A \vec{v}_2 = \lambda \vec{v}_2 + \vec{w}_1$   $x_1 - 3x_2 = -2x_1 + 1 \quad x_1 - x_2 = 1 \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{y}(t) = e^{-2t} \vec{v}_1 + t e^{-2t} \vec{w}_1$   $\vec{y}'(t) = -2 e^{-2t} \vec{v}_1 + e^{-2t} (\vec{v}_1 - 2t \vec{w}_1)$   $\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \vec{y}(t)$   
 $\vec{y}'(t) = -2 e^{-2t} \vec{v}_1 + e^{-2t} (\vec{v}_1 - 2t \vec{w}_1)$   $\vec{y}(t) = e^{-2t} (\vec{v}_1 + t \vec{w}_1)$   $\vec{y}'(t) = -2 e^{-2t} \vec{v}_1 + e^{-2t} (\vec{v}_1 - 2t \vec{w}_1)$   $\vec{y}(t) = e^{-2t} (\vec{v}_1 + t \vec{w}_1)$   $\vec{y}'(t) = -2 e^{-2t} \vec{v}_1 + e^{-2t} (\vec{v}_1 - 2t \vec{w}_1)$   $\vec{y}(t) = e^{-2t} (\vec{v}_1 + t \vec{w}_1)$

\*  $\vec{y}' = A \vec{y}$   $\vec{y}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

## Inhomogenes lineares System

[[Differentialgleichungen]]