

- Taylor Polynom $P(x, \dots, y)$ mit mehreren Variablen
 - nähert $f(x, \dots, y)$ für die ersten Ableitungen gut an
 - $a_{n_1 n_2} = \frac{1}{n_1! n_2!} \frac{\partial^{n_1+n_2} f}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2}}(0, 0)$

$$a_{n_1 \dots n_p} = \frac{\binom{n}{n_1, \dots, n_p}}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_p^{n_p}}(0, \dots, 0)$$

- Multinomialkoeffizient
 - $\binom{n}{n_1, \dots, n_p} = \frac{n!}{n_1! \dots n_p!}$
 - Parameteranzahl in zweiter Zeile = n
 - Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Multinomialer Lehrsatz

$$(a_1 + \dots + a_p)^n = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_p \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_p = n}} \binom{n}{n_1, \dots, n_p} a_1^{n_1} \dots a_p^{n_p}$$

$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_p \frac{\partial}{\partial x_p} \right)^n = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_p \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_p = n}} \binom{n}{n_1, \dots, n_p} h_1^{n_1} \dots h_p^{n_p} \frac{\partial^n}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_p^{n_p}}$$

Satz von Taylor

- $U \subseteq \mathbb{R}^p$ offen
- liegen x_0 und $x_0 + h$ samt Verbindungsstrecke in U
- $\Rightarrow f(x_0 + h) = \sum_{v=0}^n \frac{1}{v!} (h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_p \frac{\partial}{\partial x_p})^v f|_{x_0} + \frac{1}{(n+1)!} (h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_p \frac{\partial}{\partial x_p})^{n+1} f|_{x_0 + \theta h}$
 - 1. Term Taylor-Polynom
 - 2. Term Rest

Extremwerte für Funktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

- im eindimensionalen
 - Extremstelle, wenn $f'(x) = 0$
 - Min/Max, wenn $f''(x) > / < 0$
- mehrdimensionalen
 - Extremstelle, wenn Gradient von $f(x) = 0$
 - Max, wenn Hessematrix im Punkt negativ definit

- Min, wenn Hessematrix im Punkt positiv definit
- kein Extremum, wenn indefinit
 - * sondern Sattelpunkt
- semidefinit ==> keine Aussagekraft
- Definitheit
 - * quadratische Form $Q_A(x)$

$$Q_A(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

- * positiv definit $\Leftrightarrow Q_A(x) > 0 \forall x \neq 0$
- * negativ definit $\Leftrightarrow Q_A(x) < 0 \forall x \neq 0$
- * positiv semidefinit $\Leftrightarrow Q_A(x) \geq 0 \forall x \neq 0$
- * negativ semidefinit $\Leftrightarrow Q_A(x) \leq 0 \forall x \neq 0$
- * ansonsten indefinit

- Rechnerische Bestimmung von Extrema im mehrdimensionalen

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \quad A = A^T$$

$$\Delta_j = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} \end{pmatrix}$$

- Vorzeichen von Unterdeterminanten
 - * positiv def. \Leftrightarrow positives Vorzeichen
 - * negativ def. \Leftrightarrow alternierendes Vorzeichen

Satz A pos. def. $\Leftrightarrow \Delta_j > 0 \quad j=1, \dots, n.$

A neg. def. $\Leftrightarrow (-1)^j \Delta_j > 0 \quad j=1, \dots, n$

$\det(-A) = (-1)^n \det(A)$

- Aussagekraft der Δ_j
 - * eins der $\Delta = 0 \Rightarrow$ keine Aussagekraft
 - * alle $\Delta > 0 \Rightarrow$ Min

- * ungerade $\Delta < 0$, gerade $\Delta > 0 \implies \text{Max}$
- * ein gerades $\Delta < 0 \implies \text{Sattelpunkt}$

[[Mehrdimensionale Differentialrechnung]]