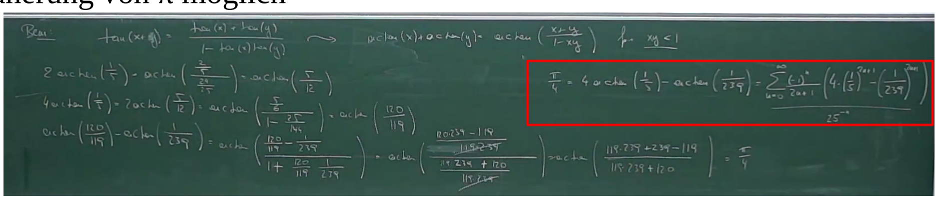
- Neue Schreibweise für $ln(1+x)$
  - Da $ln'(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ für $|x| < 1$
    - Ableitung der Potenzreihe = $\frac{1}{1+x}$ für $|x| < 1$
    - $g(x) = f(x) - ln(1+x)$ ==> $g'(x) = 0$ ==> konstant
    - $ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ für $|x| < 1$
    - alternierende Reihe mit monoton fallenden Gliedern
  - Leibnizkriterium anwendbar
    - $|\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} - ln(1+x)| \leq \frac{x^{N+1}}{N+1}$ für 0 < x < 1
    - Wegen Stetigkeit bleibt Ungleichung für x–>1 gültig
      - $|\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n} - ln(2)| \leq \frac{1}{N+1}$
  - Potenzreihendarstellung $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = ln(2)$
- Neue Schreibweise für $arctan'(x)$
  - $arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ für |x| < 1
    - $arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1})$
  - Potenzreihendarstellung $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$
  - Annäherung von π möglich
    - 
    - desto größer n, desto mehr Nachkommastellen von π

Beweis von Ungleichungen

- Beispiel: für $x > -1$ gilt $ln(1+x) \leq x$
  - $h(x) = x - ln(1+x)$
  - $h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$
  - $\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = h'(\varepsilon x) = \frac{\varepsilon x}{1+\varepsilon x}$ 0 < ε < 1
    - mit x multipliziert
    - $h(x) = \frac{\varepsilon x^2}{1+\varepsilon x} \geq 0$

Berechnung von Grenzwerten - Bernoulli de l'Hospital

- $f'(x_0) = \lim x \to x_0(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0})$ = "$\frac{0}{0}$"
- $\lim x \to x_0 f(x) = \lim x \to x_0 g(x) = 0$
  - laut verallg. MWS: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ für ξ zwischen x und x0
    - wenn x–>x0 geht, dann geth auch ξ–>x0
  - Bernoulli de l'Hospital:
    - Seien f,g auf x0   I diffbar und $f(x_0) = g(x_0) = 0$
    - Dann gilt:

        - Wenn lim $x \to x_0 \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert
        - dann existiert lim $x \to x_0 \frac{f(x)}{g(x)}$ und ist gleich
    - darf mehrmals angewendet werden
        - Grenzwert der n-ten Ableitung existiert ==> gleich für n-1 ==> …
- de l'Hospital gilt auch für
    - lim $x \to x_0 f(x) =$ lim $x \to x_0 g(x) = \infty$ = "$\frac{\infty}{\infty}$"

[[Anwendungen der Differentialrechnung]] [[Konvergenzkriterien für Reihen]]