

## Definition

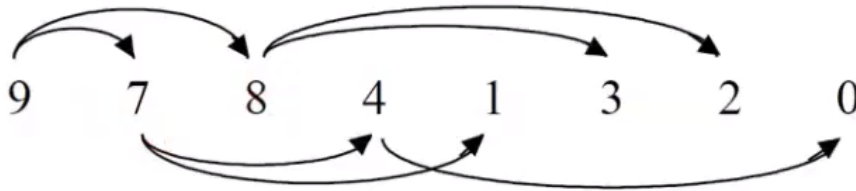
- Heap wird auch Halde genannt

### Definition (max-heap):

Eine Halde (Heap) ist ein **lineares Feld**  $A[0..n-1]$ , wobei gilt:  
 $A[i] \geq \max \{A[2i+1], A[2i+2]\}$ , für  $i=0,1,\dots,\lfloor n/2 \rfloor - 1$  (Haldenbedingung)

•

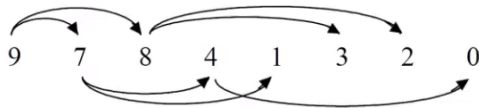
$n=8$



•

- nicht automatisch absteigend sortiert
- Darstellung als Graph/Binärbaum
  - siehe [[Bäume & Spannbäume]]

$n=8$



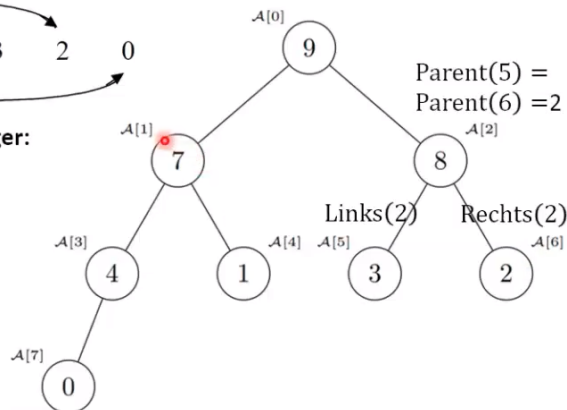
**Zugriff auf Nachfolger / Vorgänger:**

$$\text{Links}(i) = 2i + 1$$

$$\text{Rechts}(i) = 2i + 2$$

$$\text{Parent}(i) = \left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor$$

–



- Eigenschaften
  - $A[0]$  ist Maximum (Wurzel)
  - vollständiger Baum
    - \* letzte Ebene evtl. nicht komplett
  - jeder Teilbaum wieder Halde
  - $h = \lfloor \log_2(n) \rfloor$

## Heapify

- Verhalde-Prozedur

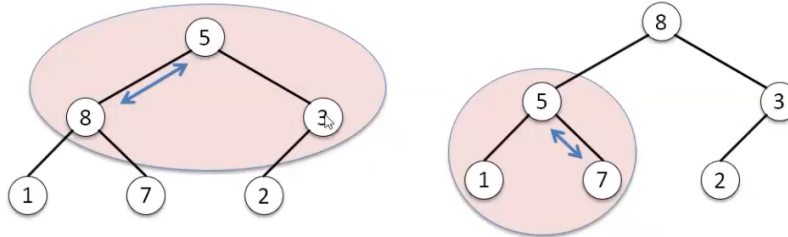
### Verhalten von Element A[i]

**Voraussetzung:** Die Teilbäume mit Wurzel LINKS(i) und RECHTS(i) sind Halden, aber Element i verletzt möglicherweise die Haldenbedingung.

VERHALDE(A,0)

$$A[i] \geq \max \{A[2i+1], A[2i+2]\}$$

Haldenbedingung (HB)



```
VERHALDE(A, i)
//N...aktuelle Haldengröße
1: l ← LINKS(i), r ← RECHTS(i)
2: index ← i
3: IF l < N and A[l] > A[i] THEN index ← l
4: IF r < N and A[r] > A[index] THEN index ← r
5: IF i ≠ index THEN
6:   vertausche A[i], A[index]
7:   VERHALDE (A, index)
```

index: Index von  
 $\max\{A[l], A[r], A[i]\}$

**Laufzeit:  $T(n) = O(\log n)$**

- Aufbau einer Halde mittel Heapify
  - gegeben lineares Feld in beliebiger Reihenfolge
  - Blätter (einzelnes Element) sind triviale Halden
  - Verhalde auf Eltern der Blätter (vorletzte Schicht) anwenden
  - Wiederholen für alle Knoten bis zur Wurzel

```
BAUE_HALDE(A)
1: FOR i ← [n/2]-1 DOWNT0 0
2:   VERHALDE (A, i)
```

– Laufzeit

**BAUE\_HALDE(A)**

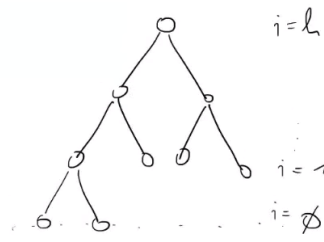
1: **FOR**  $i \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor - 1$  **DOWNTO** 0  
2:     **VERHALDE** (A, i)

– **Naive Analyse:**  $n/2 * \text{VERHALDE}$

Laufzeit:  $T(n) \in \frac{n}{2} O(\log n) \in O(n \log n)$

– **Aber:** Element der Höhe  $h$  kann in  $O(h)$  Zeit verhaldet werden  $\Rightarrow$  Laufzeit  $T(n) \in O(n)$

\*



$i=h$   
#Elemente  
 $2^{h-i}$   
 $i=1$   
 $i=0$

$h = \lfloor \log n \rfloor$   
 $n \geq 2^h$

$$T(n) \leq \sum_{i=0}^h i \cdot 2^{h-i} = \sum_{i=0}^h i \cdot \frac{2^h}{2^i} \leq n \cdot \sum_{i=0}^h i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$\leq 2$

\*