Motivation

- [[Erwartungswert]] zeigt durchschnittliche Resultat
- Wie weit weicht die ZV durchschnittlich vom Erwartungswert ab?
- Varrianz $Var(X) = E((x-\mu)^2)$
  - sei $E(X) = \mu$
  - Abstand $E(|x-\mu|)$
- Standardabweichung $sd(X) = \sqrt{Var(X)}$
- Varianz ist 2. zentrale [[Moment]]

Eigenschaften

- Lemma
  Sei $X \in L^2$. Dann gilt

  (a) $\mathrm{Var}(X) \geq 0$. $\mathrm{Var}(X) = 0$ *impliziert* $X = \mu$.

  (b) $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

  Daraus folgt mit (a), dass $E(X^2) \geq (E(X))^2$.

  Beweis. Da $(X-\mu)^2 \geq 0$, folgt $\mathrm{Var}(X) \geq 0$ wegen der Monotonie. Mit der Markov-Ungleichung folgt für alle $\varepsilon > 0$

  $$P(|X-\mu| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

  Damit ist (a) gezeigt.

  Dann, $E(X-\mu)^2 = E(X^2 + \mu^2 - 2\mu X)$. Der Beweis folgt dann mit der Linearität des Erwartungswerts.
- Mit $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ folgt für
  - $X \sim \mathrm{Unif}(a, b)$:

    $$\mathrm{Var}(X) = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

  - $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$:

    $$\mathrm{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

  - $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$:

    $$\mathrm{Var}(X) = 1^2 - 0^2 = 1.$$
-

Beispiel

- Binomialverteilung
  - Sei $X \sim B_{1,p}$. Bestimme die Varianz von X.
  - $X \sim B_{1,p}$ $\qquad$ $Var(X) = ?$

    $$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
    $$= EX^2 - p^2$$
    $$EX^2 = EX = p$$
    $$= p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q$$