Definition

- Art von a-b-Baum
  - Spezialfall von [[Balancierte Bäume]]
  - ähnlich wie [[Binary Search and BTree]]
- Eigenschaften
  - leicht zuhalten bei blattorientierter Speicherung
    - anstatt knotenorientiert
  - worst case optimal
  - (1) Alle Äste sind gleich lang.
    (2) Die max. Anzahl der Kinder eines Knotens ist 4.
    (3) Innere Knoten haben ≥ 2 Kinder.
    (4) Die Blätter enthalten v.l.n.r. die Werte aufsteigend sortiert.
    (5) Jeder innere Knoten k mit $\alpha(k)$ Kinder ($2 \leq \alpha(k) \leq 4$) speichert $\alpha(k)-1$ Hilfsinformationen $x_1, \ldots, x_{\alpha(k)-1}$, wobei x_i = größter Wert im Teilbaum des i-ten Kindes von links.
  - **Höhe h=Θ(log n)**

    n...Anzahl der Blätter (= Anzahl gespeicherte Keys)
    h...Höhe des Baumes

    - Anzahl der Blätter wird mit jeder weiteren Schicht
      - Zumindest verdoppelt
      - Maximal vervierfacht
    - Bei n Blättern bekommen wir

$$2^h \leq n \leq 4^h = 2^{2h}$$

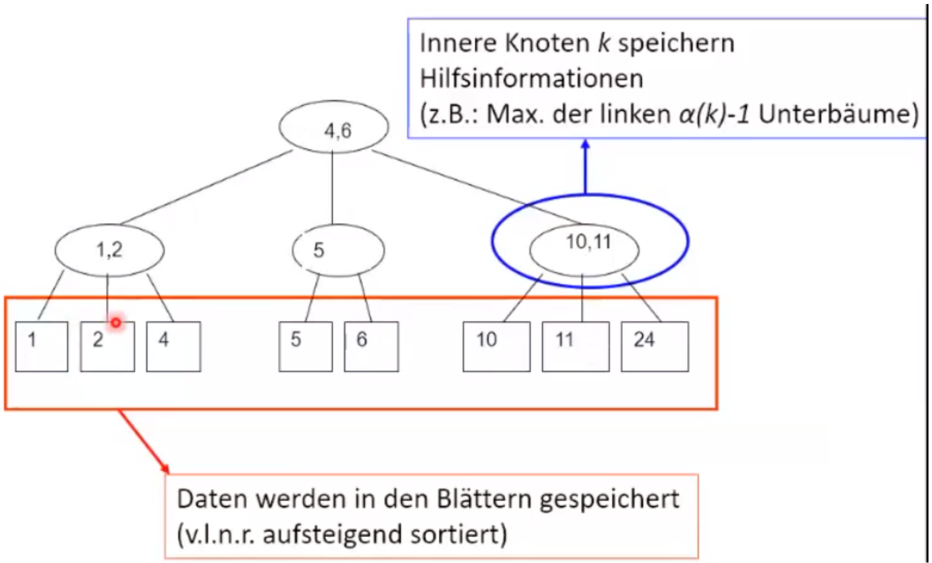
$$h \leq \operatorname{ld} n \leq 2h$$

$$\frac{\operatorname{ld} n}{2} \leq h \leq \operatorname{ld} n$$

    Anzahl der Knoten bei n Blättern:

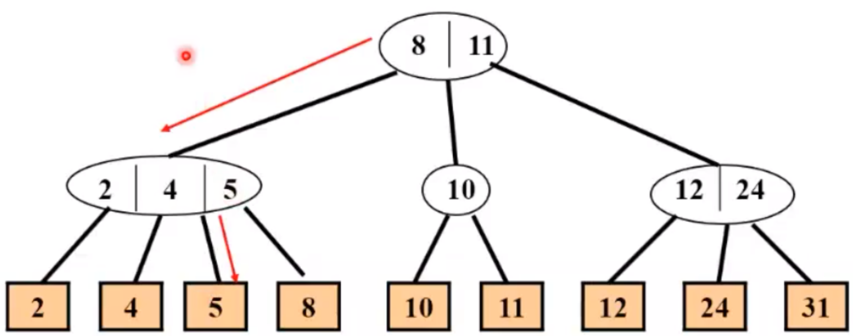
$$\#Knoten \leq n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \cdots + 1 < 2n = \Theta(n)$$

  -

- 

Operationen

- **Suchen**: pro Knoten wird der relevante Teilbaum in O(1) Zeit pro Knoten selektiert ⇒ **Θ(h) = Θ(log n)** Zeit

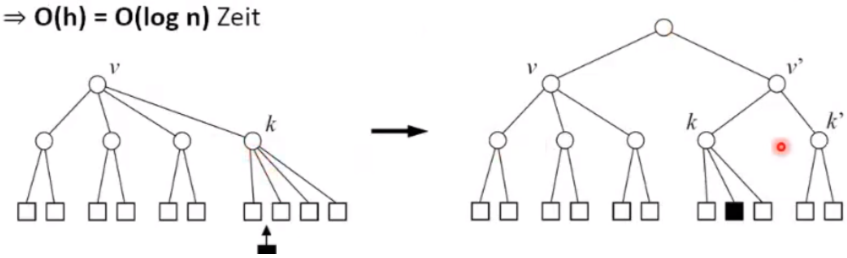
  

- **Einfügen**: Suchen, Blatt an Knoten *k* anhängen
  - **α(k) ≤ 4**: Resultierender Baum ist wieder ein (2-4)-Baum
  - **α(k) = 5**: Resultierender Baum ist **kein** (2-4)-Baum

  SPALTEN von k: Gib k einen Bruder k' rechts von k. Hänge die 2 rechtesten Kinder von k auf k' um ⇒ α(k) = 3, α(k') = 2

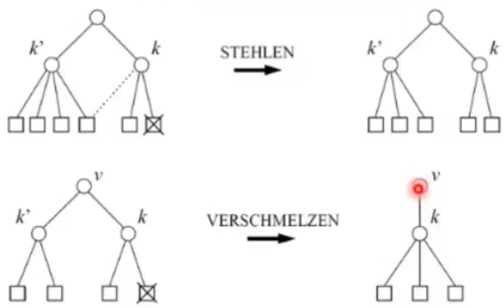
  SPALTEN muss evtl. für übergeordnete Knoten wiederholt werden (evt. bis zur Wurzel. Diese wird dann Kind einer neuen Wurzel mit α(w)=2)

  ⇒ **O(h) = O(log n)** Zeit

- **Entfernen**: Suchen, Blatt von Knoten *k* entfernen
  - **$\alpha(k) \geq 2$**: Resultierender Baum ist wieder ein (2-4)-Baum
  - **$\alpha(k) = 1$**: Resultierender Baum ist **kein** (2-4)-Baum

    Sei k' ein direkter Bruder von k:
    - **$\alpha(k') \geq 3$: *STEHLEN*** eines Kindes von k' $\Rightarrow \alpha(k) = 2, \alpha(k') \geq 2$
    - **$\alpha(k') = 2$: *VERSCHMELZEN*** von k mit k' $\Rightarrow \alpha(k) = 3$

- 

  Verschmelzen evt. für übergeordnete Knoten wiederholen (Wurzel wird durch einziges Kind ersetzt) $\Rightarrow$ **O(h) = O(log n)** Zeit

Zusammenfassung

- Der **(2-4)-Baum** ist eine Datenstruktur, die das **Wörterbuchproblem** (Suchen, Einfügen, Entfernen) auf einer Menge von *n* Elementen in **O(log n) Zeit** pro Operation löst, und **O(n) Speicher** belegt.

  Dies ist worst-case optimal (auch bzgl. statischer Suche!).

  Einfügen und Entfernen erfordert **Umstrukturierungen** (Spalten, Stehlen, Verschmelzen)

  Bereits vorgenommene Umstrukturierungen **amortisieren** sich jedoch später.