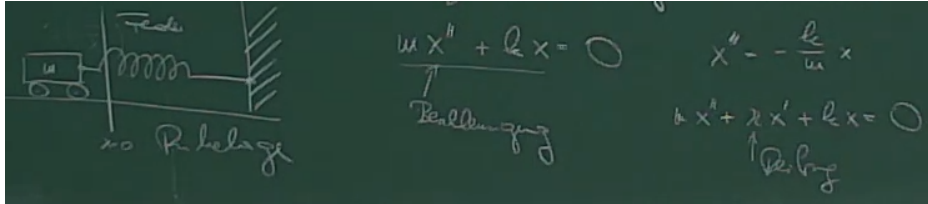


## Übersicht

- $y^{(n)} + a_{n-1} * y^{(n-1)} + \dots + a_1 * y' + a_0 * y = 0$ 
  - a ... gegebene Konstanten
  - DGL n-ter Ordnung
  - Anwendungsfall: Masse-Feder abhängig von
    - \* Masse mal Beschleunigung
    - \* Reibung mal Geschwindigkeit
    - \* Federzug mal Strecke



- zweidimensionales GLS lösbar, wenn zwei linear unabhängige Lösungen gegeben
  - z.B.
    - \*  $x(0)$  Anfangsauslenkung gegeben
    - \*  $x'(0)$  Anfangsgeschwindigkeit gegeben

## Ansatz

Ansatz  $x(t) = e^{\lambda t}$  in  $m x'' + r x' + k x = 0$  führt zu  $m \lambda^2 + r \lambda + k = 0$ .  
 Diskriminante  $\Delta = r^2 - 4mk$ .  
 Für  $\Delta < 0$  (unterdämpft):  $\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm i \sqrt{\frac{4mk - r^2}{4m^2}}$ .  
 Die allgemeine Lösung ist  $x(t) = e^{-\frac{r}{2m}t} \left( C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{4mk - r^2}{4m^2}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{4mk - r^2}{4m^2}}t\right) \right)$ .

- Nullstellen des charakteristischen Polynoms entsprechen Lösungen
- alle Nullstellen verschieden  $\implies$  alle Lösungen gefunden

Sei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ .  
 Dann ist  $y_i(t) = e^{\lambda_i t}$  eine Lösung für jedes  $i$ .  
 Wenn alle  $\lambda_i$  verschieden sind, sind  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  linear unabhängig.  
 Die allgemeine Lösung ist  $y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$ .

## Vorgehensweise

- Gleichung in charakteristische Polynom umwandeln
- Polynom in Linearfaktoren zerlegen
  - mehrere Nullstellen ==> innere Resonanz
- umformen nach  $\lambda$ 
  - quadratische Gleichung
- Fallunterscheidung der Diskriminante D
  - $D < 0$ 
    - \* zwei komplexe Lösungen ( $x+iy$ )
      - ◆ kongugiert ebenfalls Lösungen
    - \* umwandeln in reelle Lösungen
      - ◆ Nullstellen ergeben zusammen reelle Lösung
      - ◆  $\lambda_{1/2} = e^x e^{\pm iy} = e^x * \sin(y)/\cos(y)$

- $D = 0$ 
  - \* Doppellösung ==> allgemeine Lösung

- $D > 0$ 
  - \* zwei verschiedene reelle Lösungen

- Zusammenfassung

## Beispiele

$$Bsp: \quad x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n}}{(3n)!} \quad x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{3n-1}}{(3n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n}}{(3n-1)!}$$

$$x''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{3n-2}}{(3n-2)!} \quad x'''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{3n-3}}{(3n-3)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n}}{(3n)!} = x(t)$$

$$\frac{d^3}{dt^3} x(t) = 0 \text{ f\"ur alle } t \text{ die Dgl } x''' = x$$

$$\text{Allg. L\"osung: } \vec{\lambda} = 1 \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad x(t) = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left( C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right)$$

$$\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

$$x(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$x'(t) = C_1 e^t + \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \left( C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) + e^{-\frac{t}{2}} \left( -C_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right)$$

$$x'(0) = C_1 - \frac{1}{2} C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} C_3$$

$$x''(t) = C_1 e^t + \frac{1}{4} e^{-\frac{t}{2}} \left( C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) + \frac{3}{2} e^{-\frac{t}{2}} \left( C_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) + e^{-\frac{t}{2}} \left( -C_2 \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - C_3 \frac{3}{4} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right)$$

$$x''(0) = C_1 + \frac{3}{4} C_2 - \frac{\sqrt{3}}{4} C_3$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - \frac{1}{2} C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} C_3 = 0 \\ C_1 + \frac{3}{4} C_2 - \frac{\sqrt{3}}{4} C_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 - C_2 = 0 \\ 3C_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = \frac{1}{3} \\ C_2 = \frac{2}{3} \\ C_3 = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{3} e^t + \frac{2}{3} e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n}}{(3n)!}$$

[[Differentialgleichungen]]