

- Lineare Abbildungen respektieren Linearkombinationen
- $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \vec{x} \mapsto \vec{y} = A \cdot \vec{x}$ 
  - F ist linear, wenn
    - \*  $\vec{x} + \vec{x'} \mapsto F(\vec{x}) + F(\vec{x'})$
    - \*  $\lambda \vec{x} \mapsto \lambda F(\vec{x})$
    - \*  $\lambda \vec{x} + \mu \vec{x'} \mapsto \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{x'})$

Rieszsche Darstellungssatz d. lin. Alg.

- $F: V^n \rightarrow \mathbb{R}, \vec{v} \mapsto y = F(\vec{v})$ 
  - $\Rightarrow F(\vec{v}) = \langle \vec{b}, \vec{v} \rangle$  - eindeutig bestimmt

Eigenschaften von linearen Abbildungen

- $\vec{0} \mapsto \vec{0}$
- $\vec{a} - \vec{b} \mapsto F(\vec{a}) - F(\vec{b})$

Kern und Bild

- $\text{Kern}(F) := \{ \vec{v} \in V : \vec{v} \mapsto \vec{0} \}$ 
  - Kern von F = Menge aller Elemente, welche Null abbilden
- $\text{Bild}(F) := \{ F(\vec{v}) : \vec{v} \in V \}$ 
  - Bild von F = Menge aller Elemente in V erreichbar durch Abbildung F

Menge linearer Abbildungen von V und W

- $L(V, W) := \{ F : V \rightarrow W : F \text{ linear} \}$

Spezielle Abbildungen

- Nullabbildung:
  - jeder Vektor bildet den Nullvektor ab
- identische Abbildung
  - $V \rightarrow V$
  - jeder Vektor bildet sich selber ab
- Gerade
  - $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$
  - $\lambda \mapsto \lambda \vec{v}$
  - Fallunterscheidung:
    - \*  $\vec{v} = \vec{0}$ 
      - ◆  $\text{Kern}(F) = \mathbb{R}$
      - ◆  $\text{Bild}(F) = \{ \vec{0} \}$

$$* \vec{v} \neq \vec{0}$$

$$\blacklozenge \text{Kern}(F) = \{\vec{0}\}$$

$$\blacklozenge \text{Bild}(F) = \text{Span}(\{\vec{v}\})$$

- Ebene

- $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

- $\lambda \mapsto \lambda \vec{v}$

- Fallunterscheidungen

- Matrix

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

- $\vec{v} \mapsto y = A\vec{v}$

- \*  $\text{Kern}(F) = \text{Kern}(A) = \text{Lösungsmenge des homogenen linearen xGLS}$

## Isomorphismus

- isomorph, wenn F bijektiv und linear

## Konstruktion

- Für  $F: V \rightarrow W$  linear mit n Dimensionen benötigen wir

- $b_1 \mapsto w_1 = F(b_1)$

- ...

- $b_n \mapsto w_n = F(b_n)$

- b-Vektoren bilden Basis in V

- lineare Fortsetzung

- $v = \alpha_1 b_1, \dots, \alpha_n b_n \mapsto \alpha_1 F(b_1), \dots, \alpha_n F(b_n)$

- $\text{Bild}(F) = \text{Span}(\{F(b_1), \dots, F(b_n)\})$

- Bild von F wird von Bildern der Basis-Vektoren aufgespannt

## Projektion

- Abbildung von höherer auf niedrigere Dimension

- nie injektiv

- $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x, y)$

- $\text{Kern}(F) = \text{span}(\{0, 0, t\}) \neq \text{Nullvektor}$

- t - freie Variable

- nicht injektiv

- $\text{Bild}(F) = \text{span}(\{(0, 1), (1, 0), (0, 0)\})$

- Erzeugendensystem

- Basis ohne letzten Vektor

## Verknüpfungen linearer Abbildungen

- $U \rightarrow V \rightarrow W$ 
  - $U \rightarrow W$

## Koordinatenabbildung

- Koordinaten  $c$  brauchen Basis  $B$
- Koordinaten-Vektor, von  $V$  bezüglich  $B = cB$

[[Allgemeine Vektorräume]]