

Satz von Gauß in der Ebene

- Sei C der Rand eines Bereichs B , der Normalbereich bezüglich beider Achsen ist

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \underline{f}_1(x) \leq y \leq \underline{f}_2(x) \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid C = y = d, \underline{f}_1(x) \leq x \leq \underline{f}_2(x) \right\}$$

- Rand von B

$$C = \partial B$$

↑
Rand

- $\oint_{\partial B} P dx + Q dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$
 - muss vollständig definiert sein
 - Bereich darf keine Löcher haben
- Leibnizsche Sektorformel
 - Fläche von $B = \frac{1}{2} \oint_{\partial B} -y dx + x dy$
- Beispiel:
 - Integralsatz von Gauß nicht möglich, da undefiniert im Ursprung

$$\begin{aligned} \text{Bsp. } B &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2 \right\} \\ \oint_{\partial B} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{-R \cos(t) (-R \sin(t)) + R \sin(t) (R \cos(t))}{R^2} dt = 2\pi \\ x &= R \cos(t) \\ y &= R \sin(t) \\ dx &= -R \sin(t) dt \\ dy &= R \cos(t) dt \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{-y}{x^2 + y^2} &= \frac{-1 \cdot (x^2 + y^2) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2 + y^2} &= \frac{-1 \cdot (x^2 + y^2) + y^2 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \\ \oint_{\partial B} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} &= 2\pi + \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 \\ \text{Mittig des Definitionsbereiches} \\ \text{des Vektorfeldes ist } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \end{aligned}$$

Integralsatz von STOKES

- Vektorfeld von Fläche mit Rand bestimmen

$$\oint_{\partial B} P dx + Q dy + R dz = ? = \iint_B \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

- Herleitung

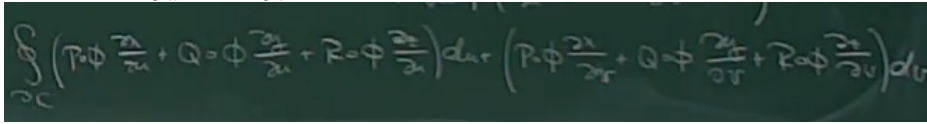
$\phi: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$

- Variablensubstitution

- * $x = x(u, v)$
- * $y = y(u, v)$
- * $z = z(u, v)$
- * $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$

$$* \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

$$* \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$



$$\oint_{\partial C} \left(P \phi \frac{\partial x}{\partial u} + Q \phi \frac{\partial x}{\partial v} + R \phi \frac{\partial x}{\partial w} \right) du + \left(P \phi \frac{\partial y}{\partial u} + Q \phi \frac{\partial y}{\partial v} + R \phi \frac{\partial y}{\partial w} \right) dv + \left(P \phi \frac{\partial z}{\partial u} + Q \phi \frac{\partial z}{\partial v} + R \phi \frac{\partial z}{\partial w} \right) dw$$

* 3D Flächenintegral wird zu 2D Kurvenintegral

* Gaußsche Integralsatz

* ...

- $\oint_{\partial B} P dx + Q dy + R dz = \int \int_B \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$
- $\oint_{\partial B} P dx + Q dy + R dz = \int \int_B \text{rot}(P, Q, R) d\vec{o}$
- Orientierung des Normalvektors wird aus der Ebene übernommen

Integralsatz von Gauß im Raum

- $\oint_{\partial B} \vec{V} d\vec{o} = \int \int \int_B \text{div}(\vec{v}) dx dy dz$
 - $\text{div}(\vec{V}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$
 - Bereich darf keine Löcher haben

Vektorfeld Eigenschaften

- wirbelfrei, wenn Rotation Null
- quellenfrei, wenn Divergenz Null

[[Wegunabhängigkeit]]