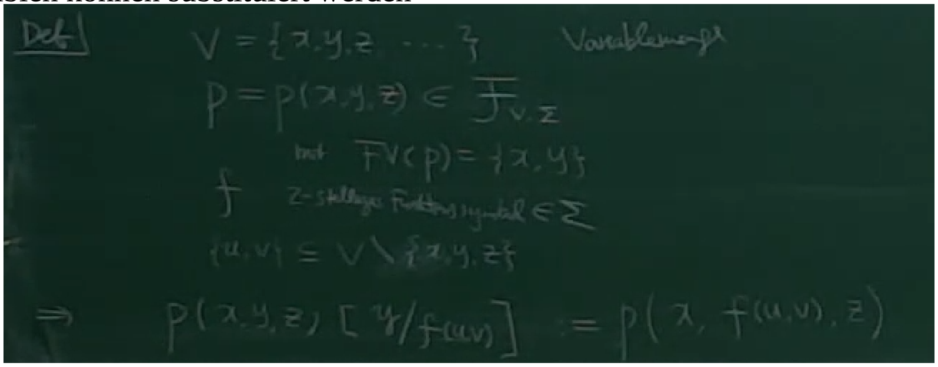
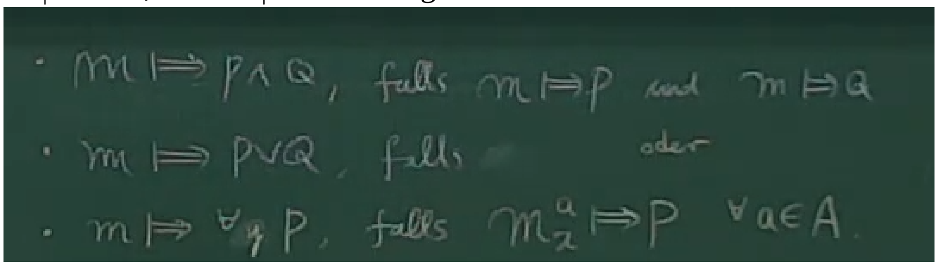
Substitution

- Variablen können substituiert werden
  - 

  - y wird mit f(u,v) substituiert

Semantische Äquivalenz

- gegeben ist Σ-Modell $M = (, \omega) = (A, \Sigma, \omega)$ für $F_{V,\Sigma}$
  - x aus V
  - a aus A
- $M[x/a]$ ist Modell mit Belegung $\omega_x^a(y) := a$, falls y=x ansonsten ω(y)
  - $M_x^a = (, \omega_x^a) = (A, \Sigma, \omega_x^a)$
- Erfüllungsrelation für Formeln in $F_{V,\Sigma}$
  - für Primformeln gilt
    * M|=$(s = t)$, falls $s^M = t^M$
    * M|=$R(t_1, ..., t_n)$, falls $R^M(t_1, ..., t_n)$
  - für P, Q Formeln gilt
    * $M| = \neg P$, falls $M| = P$ nicht gilt
    * 

- P und Q sind semantisch äquivalent, falls
  - M: gilt M|=Q <==> M|=P
  - P<==>Q
- Umformungsregeln:

$$\neg\forall x\, P \iff \exists x\, \neg P \qquad \neg\exists x\, P \iff \forall x\, \neg P$$
$$(\forall x\, P) \wedge (\forall x\, Q) \iff \forall x\, (P \wedge Q) \qquad (\exists x\, P) \vee (\exists x\, Q) \iff \exists x\, (P \vee Q)$$
$$\forall x \forall y\, P \iff \forall y \forall x\, P \qquad \exists x \exists y\, P \iff \exists y \exists x\, P$$

Wenn $x \notin \mathrm{FV}(Q)$, dann gilt außerdem:

$$(\forall x\, P) \wedge Q \iff \forall x\, (P \wedge Q) \qquad (\exists x\, P) \wedge Q \iff \exists x\, (P \wedge Q)$$
$$(\forall x\, P) \vee Q \iff \forall x\, (P \vee Q) \qquad (\exists x\, P) \vee Q \iff \exists x\, (P \vee Q)$$

- P ist in pränexer Normalform, wenn
  - $P = Q_1 x_1 Q_2 x_2 ... Q_k x_k R$
    * Q…Quantoren
    * x…Variablen
    * R…quantorenfreie Formel aus $F_{V,\Sigma}$
  - Jede Formel besitzt äquivalente pränexe NF
    * **(7.15) Beispiel.** Wir bestimmen eine zur Formel

      $$P = (\neg\exists x\, S(x,y) \vee \forall x\, R(f(x))) \wedge (\forall y\, \neg Q(x, g(y)))$$

      äquivalente Formel in pränexer Normalform.

      $$\begin{aligned} P &\iff (\forall x\, \neg S(x,y) \vee \forall x\, R(f(x))) \wedge (\forall y\, \neg Q(x,g(y))) \\ &\iff (\forall w\, \neg S(w,y) \vee \forall v\, R(f(v))) \wedge (\forall z\, \neg Q(x,g(z))) \\ &\iff (\forall w\, (\neg S(w,y) \vee \forall v\, R(f(v)))) \wedge (\forall z\, \neg Q(x,g(z))) \\ &\iff (\forall w \forall v\, (\neg S(w,y) \vee R(f(v)))) \wedge (\forall z\, \neg Q(x,g(z))) \\ &\iff \forall w \forall v\, \big((\neg S(w,y) \vee R(f(v))) \wedge (\forall z\, \neg Q(x,g(z)))\big) \\ &\iff \forall w \forall v \forall z\, \big((\neg S(w,y) \vee R(f(v))) \wedge \neg Q(x,g(z))\big) \end{aligned}$$

[[First Order Logic]]