

- jeder endlich-dimensionale VR V ist gleichwertig zu $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$
- $V \rightarrow W$ lineare Abbildung
 - lineare Transformation
 - Transformationsmatrix
 - * Spaltenvektoren der die lineare Abbildung F darstellenden Matrix M sind die Koordinatenvektoren der Bilder des Basisvektoren
 - ♦ $C_B(F(v_1)), \dots, C_B(F(v_n))$
 - * Beispiel

$$Bsp: \quad P_2 \xrightarrow{F} P_1$$

$$\left\{ \frac{1+t}{p_1}, \frac{t+t^2}{p_2}, \frac{1+t^2}{p_3} \right\} \xrightarrow{F} \left\{ \frac{1+t}{q_1}, \frac{1-t^2}{q_2} \right\}$$

$$P_2 \xrightarrow{F} P_1 \quad \text{Bsp: } a+bt+ct^2 \xrightarrow{F} b+ct$$

$$Bilder \text{ von } p_1, p_2, p_3$$

$$p_1 = 1+t \xrightarrow{F} 1 = \frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{2}q_2 \Rightarrow C_B(F(p_1)) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = t+t^2 \xrightarrow{F} 1+t = 1q_1 + 0q_2 \Rightarrow C_B(F(p_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_3 = 1+t^2 \xrightarrow{F} t = \frac{1}{2}q_1 - \frac{1}{2}q_2 \Rightarrow C_B(F(p_3)) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$M_B^A(F) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

Komposition von linearen Abbildungen

- Komposition wird durch das Produkt der darstellenden Transformationsmatrizen beschrieben

Inverse eines Isomorphismus

- Transformationsmatrix muss regulär sein bei isomorpher Abbildung
 - Inverse ist Transformationsmatrix für Umkehrabbildung

Rang der Transformationsmatrix

- $V^n \rightarrow W^m$
- $M_B^A(F) \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- F injektiv $\iff \text{Kern}(F) = \{0\} \iff \text{Rang}(M(F)) = n$
- F surjektiv $\iff \text{Bild}(F) = W \iff \text{Rang}(M(F)) = m$
- F bijektiv $\iff \dim(V) = \dim(W) \iff \text{Rang}(M(F)) = n \iff M_B^A(F)$ regulär

Bestimmen von Kern und Bild

- Kern VO#16
- Bild VO#16/17
- Dimensionsformel:

- $\dim V_n = \dim \text{Kern}(F) + \dim \text{Bild}(F)$
 - * $\dim \text{Kern}(F) = \# \text{ freie Variablen}$
 - * $\dim \text{Bild}(F) = \# \text{ nicht freie Variablen} = \text{Rang } M_B^A(F)$
 - * VO#18 - Fallunterscheidungen
 - ◆ $m=n \iff F \text{ bijektiv}$
 - ◆ $m < n \iff \text{jedes } F \text{ ist nicht injektiv}$
 - ◆ $m > n \iff \text{jedes } F \text{ ist nicht surjektiv}$

Elementare Zeilenumformungen

- Spaltenräume bleiben nicht gleich
- Zeilenräume bleiben gleich
 - $\text{Span}(\{\text{Zeilen von } A\}) = \text{Span}(\{\text{Zeilen von } A'\})$

[[Lineare Abbildungen]]