

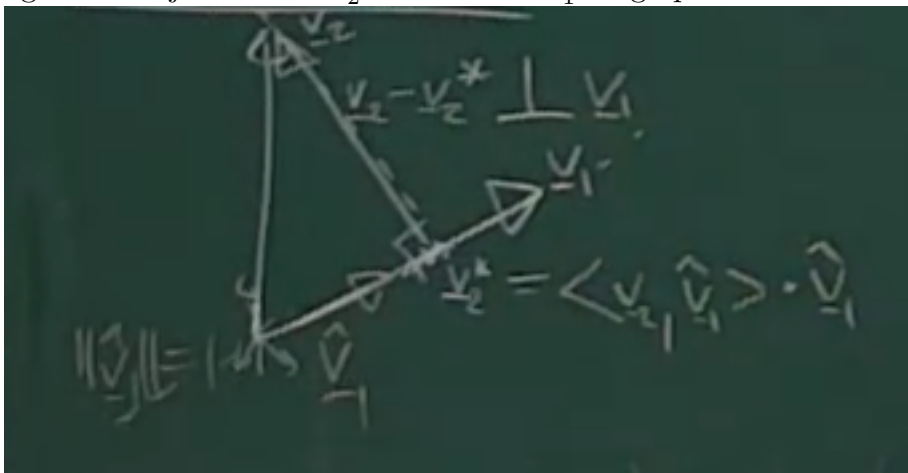
- im reellen unitären VR  $\varphi := \angle(v, w) = \arccos\left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}\right)$ 
  - $-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1$ 
    - \* wegen Schwarzsche Ungleichung
    - \*  $0 \leq \varphi \leq \pi$
  - kein Winkel für  $v = 0$  oder  $w = 0$
- Eigenschaften
  - $\angle(v, w) = \angle(w, v)$
  - $v, w \neq 0$  und  $\angle(v, w) = 0 \implies \angle(v, w) = \frac{\pi}{2} \implies v$  orthogonal zu  $w$
  - $\angle(v, -v) = \pi$
- Winkelmessung hängt von der Definition des Skalarprodukt ab
- im  $V = \mathbb{R}^n$ 
  - Winkel bzgl. kanonischem Skalarprodukt ist der “geometrische” Winkel

### Orthogonalität und orthonormiert

- im unitären VR sind  $v$  und  $w$  orthogonal, wenn
  - $\langle v, w \rangle = 0$  bzgl. gewähltem Skalarprodukt
- $\{v\} \neq A \subseteq V$  ist orthonormiert, wenn
  - alle  $v \in A$  normiert
  - alle  $v \in A$  die Länge 1 haben  $\iff \|v\| = 1$
  - paarweise orthogonal sind
- Jede endlich orthonormierte Teilmenge eines unitären VR mit  $\langle, \rangle$  ist linear
  - Beweis VO#18 1:43

### Orthonormierungsverfahren von GRAM-SCHMIDT

- Orthogonale Projektion des  $v_2$  auf den von  $v_1$  aufgespannten Unterraum



- $v_2^* = \langle v_2, v_1' \rangle v_1'$ 
  - \*  $v_1'$  normierter Vektor von  $v_1$
- Verfahren um Orthonormalbasis zu bilden

- unitärer VR  $V$  mit  $\langle, \rangle$  und induzierter Norm  $\| \cdot \| = \sqrt{\langle, \rangle}$
- linear unabhängige Menge des Raumes  $v_1, \dots, v_n$
- Unterraum  $W = w_1, \dots, w_n$  mit
  - \*  $w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$
  - \*  $w_i = \frac{1}{\|u_i\|} u_i$ 
    - ◆  $i = 2, \dots, n$
    - ◆  $u_i = v_i - v_i^*$
    - $v_i^* = \sum_{k=1}^{i-1} \langle v_i, w_k \rangle w_k$

• Beispiel

Bsp:  $V = \mathbb{R}^3$  mit  $\langle, \rangle$

1. Schritt  
 $u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \|u_1\| = \sqrt{2}$   
 $w_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Schritt  
 $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 Wollen ONB konstr.  
 mit Gram-SCHMIDT  
 $u_2 = v_2 - v_2^* = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$   
 $\langle v_2, w_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1-1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$   
 $\|u_2\| = \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{2}$   
 $w_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1-1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

3. Schritt  
 $u_3 = v_3 - v_3^* = v_3 - (\langle v_3, w_1 \rangle w_1 + \langle v_3, w_2 \rangle w_2)$   
 $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1-1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/2 \\ 1/\sqrt{2} - 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1-1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$   
 $\|u_3\| = \frac{2}{3} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{3} \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$   
 $w_3 = \frac{1}{\|u_3\|} u_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Somit:  
 $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1-1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, w_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 bilden ONB des  $\mathbb{R}^3$

[[Unitäre Räume]] [[Schwarzsche Ungleichung]]