Lineare Rekursion

• a_n mit n

$$\begin{split} -\ a_n &= c_1 * a_{n-1} + c_2 * a_{n-2} + \ldots + c_l * a_{n-l} \\ &* \ == > a_n - c_1 * a_{n-1} - c_2 * a_{n-2} - \ldots - c_l * a_{n-l} = 0 \end{split}$$

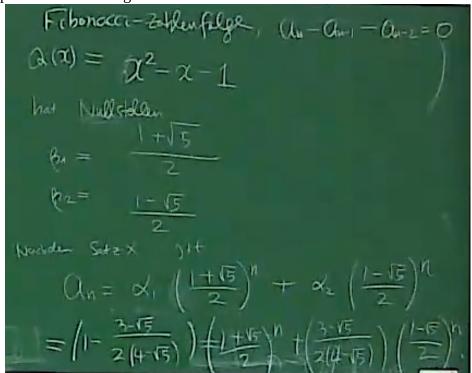
- c_i Konstante
- Anfangsbedingung/startwert fix gegeben
- Charakteristische Polynom

$$-Q(x) = x_l - c_1 * x_{l-1} - c_2 * x_{l-2} - \dots - c_l$$

- hat Q(x) l verschiedene Nullstellen 1, 2, ..., L

*
$$a_n = \alpha_1 *_1^n + \alpha_2 *_2^n + ... + \alpha_l *_l^n$$

- * Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l$, sodass Anfangsbedingungen erfüllt
- Beispiel: Fibonacci-Folge



Anforgebodings.

$$1 = Q_0 = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0$$
 $= \alpha_1 + \alpha_2$
 $1 = Q_1 = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4$
 $\Rightarrow 1-\sqrt{5} = -\alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^4$
 $\Rightarrow 1-\sqrt{5} = -\alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^4$

Erzeugende Funktionen

· formale Potenzreihe

-
$$A(z) := a_0 + a_1 * z + a_2 * z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n * z^n$$

- z formale Variable
- A(z) heißt erzeugende Funktion/Potenzreihe der Folge a_n
- $[z^n]A(z) := a_n$
 - Reskalierung

$$* [z^n]A(z) = {}^n[z^n]A(z)$$

- Rechenregeln

*
$$A(z)+B(z)=\sum_{n>0}(a_n+b_n)z^n$$

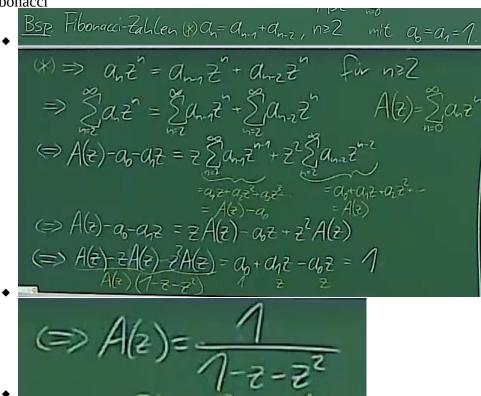
*
$$A(z) * B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k * b_{n-k}) z^n$$

$$\begin{array}{l} * \ A(z) + B(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n \\ * \ A(z) * B(z) = \sum_{n \geq 0}^{\infty} (\sum_{k = 0}^{n} a_k * b_{n-k}) z^n \\ * \ \frac{\partial}{\partial z} (\sum_{n \geq 0} a_n * z^n) = \sum_{n \geq 1} n * a_n * z^{n-1} \end{array}$$

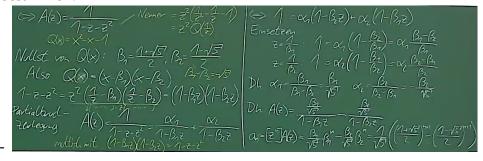
- B(z) ist Reziprokes von A(z), wenn $\bar{A}(z)*B(z)=B(z)*A(z)=1$
 - $-A(z) = \frac{1}{B(z)}$
 - Beispiele:
 - * geometrische Reihe

2. $A(z) = \tilde{Z}_{1}^{3} z^{n}$ (geometriscle Reihe). 1-z ist das Rezipude von A(z) $A(z)(1-z) = (1+z+z^{2}+z^{3}+1)(1-z) = (1-z)+(z-z^{3})+(z^{2}-z^{3})+z^{2}-+1=1$ $A(so) A(z) = \frac{1}{1-z}$. Für $B \in C(8)$, $\frac{1}{1-Bz} = \tilde{Z}_{0}^{3}B^{3}z^{n}$

* Fibonacci



• a_n bestimmen?



[[Kombinatorik]]