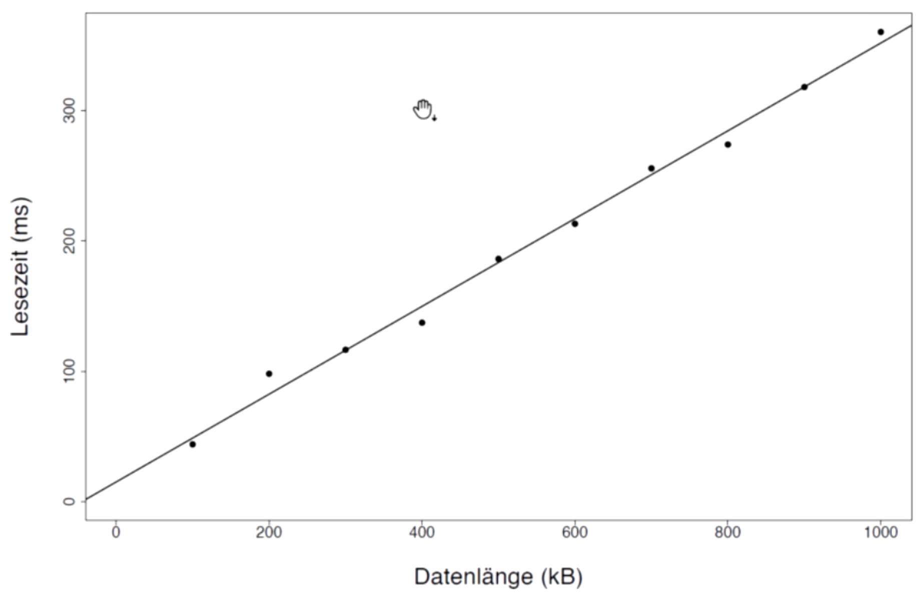
Motivation

Wir betrachten die Zeit, die eine Festplatte zum Auslesen von Daten benötigt. Diese Lesezeit hängt ab von der Bewegung des Schreib–Lese–Kopfes, der Rotation der Platte und der Datenlänge.

- Angenommen, die Lesezeit (ms) wird durch eine Zufallsvariable Y beschrieben. Für bestimmte Datenlängen x (kB) beobachten wir die folgenden Werte:

i	1	2	3	4	5
x_i	100	200	300	400	500
y_i	43.98	98.11	116.53	137.31	186.24

i	6	7	8	9	10
x_i	600	700	800	900	1000
y_i	213.17	255.67	273.97	318.05	360.31

- 

Definition

Für die Daten

$$(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$$

ist das **einfache lineare Regressionsmodell** gegeben durch

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i \qquad (i = 1, \dots, n).$$

- Response Y

- [[Zufallsvariable]]
- Regressionsgerade

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

*
- Prädiktor x
- Annahme
  - Fehler ϵ_i

    $$\text{i.i.d. mit } E(\epsilon_i) = 0 \text{ und } Var(\epsilon_i) = \sigma^2.$$

    *
    * normalverteilt

      $$Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2),$$

      $$\mu_i = E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

  - Parameter $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$
    * unbekannte Konstanten
    * β_0 Intercept,
    * β_1 Slope
- Ziel
  - Parameter anhand der Daten gutmöglichst beschreiben

Schätzer für β_0, β_1

- mittels Methode der kleinsten Quadrate

  Dabei werden die Schätzer so gewählt, dass die Summe der quadrierten vertikalen Abstände zwischen den Y_i und der geschätzten Regressionsgerade minimal ist;

  $$(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \arg\min_{\beta_0, \beta_1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2.$$

  -
- Herleitung

$$\frac{\partial}{\partial \beta_0} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2 = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i),$$
$$\frac{\partial}{\partial \beta_1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2 = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) x_i.$$

-
- Normalgleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) \overset{!}{=} 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) x_i \overset{!}{=} 0.$$

  *
- Minimum

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x},$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{s^2_{xY}}{s^2_{xx}},$$

  *

$$s^2_{xY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{x}),$$

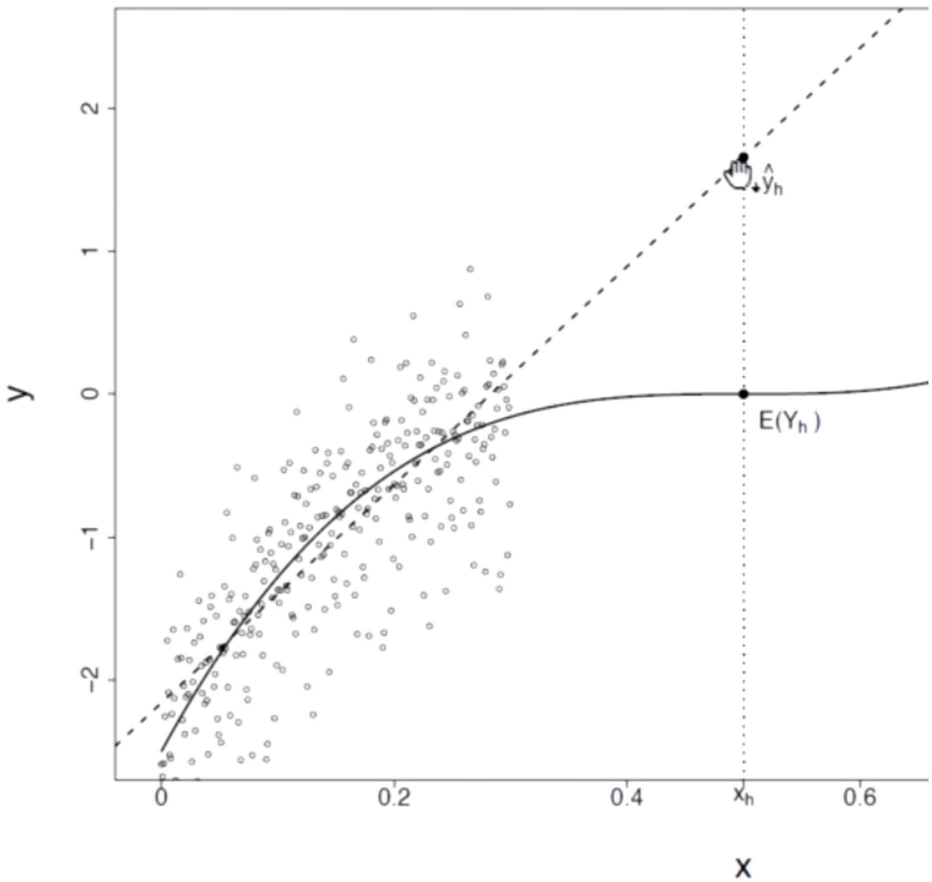
$$s^2_{xx} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

  *

- geschätzte Regressionsgerade

$$\widehat{E(Y)} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x.$$

  -
  - sollte nicht für x außerhalb des beobachteten Bereichs benutzt werden
    * Extrapolation führt womöglich zu fehlerhaften Ergebnissen



    *

Beispiele

- Festplatte
  - siehe oben

	time	length
1	43.98	100
2	98.11	200
3	116.53	300
4	137.31	400
5	186.24	500
6	213.17	600
7	255.67	700
8	273.97	800
9	318.05	900
10	360.31	1000

–

– Berechnung

$$\bar{x} = 550 \qquad \text{und} \qquad \bar{Y} = 200.33,$$

*

$$(n-1)s_{xx}^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{10}(x_i - 550)^2 = 825\,000,$$

$$(n-1)s_{xY}^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$= \sum_{i=1}^{10}(x_i - 550)(y_i - 200.33) = 277\,788.$$

*

$$\hat{\beta}_1 = \frac{s^2_{xY}}{s^2_{xx}} = \frac{(n-1)s^2_{xY}}{(n-1)s^2_{xx}} = \frac{277788}{825\,000} = 0.34,$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 200.33 - 0.34 \cdot 550 = 15.14.$$

*

$$\widehat{E(Y)} = 15.14 + 0.34 \cdot x.$$

*