

Adjazenzmatrix

- Adjazenzmatrix ist $n \times n$ Matrix mit
 - $a_{ij} = 1$, wenn V_i und V_j benachbart
 - sonst 0
- immer symmetrisch entlang der Diagonale
- $(A^k)_{ij} = \#$ Wege mit Länge k von v_i nach v_j

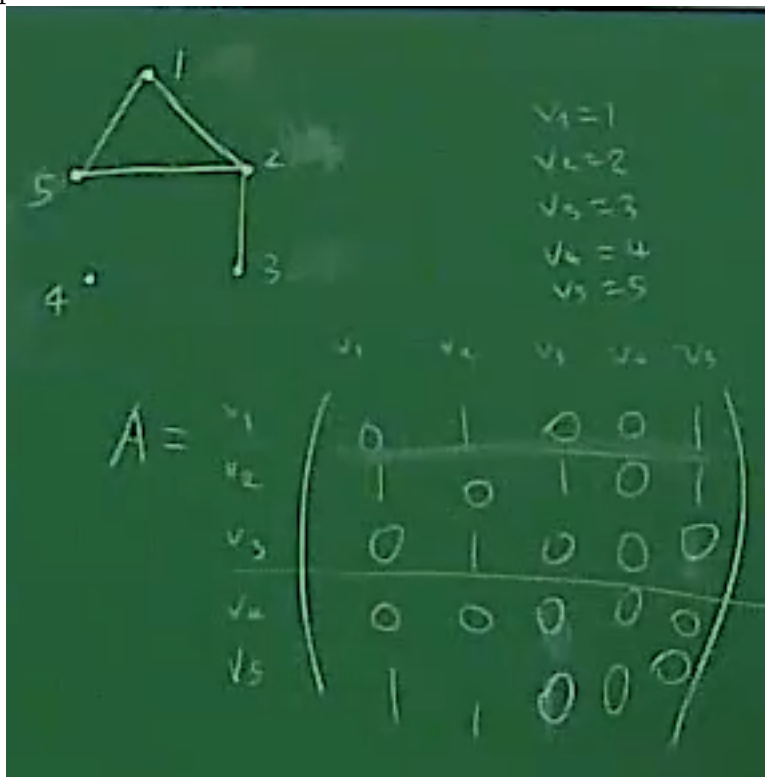
Beweis (durch Induktion über $k \in \mathbb{N}$)

Induktionsanfang: Für $k=1$
 $\#$ Wege von v_i nach $v_j = a_{ij} = (A^1)_{ij}$

Induktionsschritt: Wir nehmen an (Induktionsannahme), dass für ein bestimmtes $k \in \mathbb{N}$ gilt $P(k)$.
 (um $P(k+1)$ zu zeigen betrachten wir)

Aufgabenstellung: $\#$ Wege der Länge k von v_i nach v_j
 $\Rightarrow (A^k)_{ij}$
 Induktionsschritt: $\#$ Wege der Länge $k+1$ von v_i nach v_j
 $\Rightarrow \sum_{v \in V} a_{iv} (A^k)_{vj} = (A^{k+1})_{ij} = P(k+1)$

- Beispiel:



- Sanity Check - Probe

$$\begin{aligned}
 d(v_1) &= 2 \\
 d(v_2) &= 3 \\
 d(v_3) &= 1 \\
 d(v_4) &= 0 \\
 d(v_5) &= 2 \\
 \\
 \delta(G) &= 0 \\
 \Delta(G) &= 3 \\
 d(G) &= \frac{8}{5}
 \end{aligned}$$

*

Inzidenzmatrix

- analog zur Adjazenzmatrix
 - 1 wenn inzident
 - sonst 0
- Beispiel:

$v_1 = 1$	$e_1 = \{1, 2\}$
$v_2 = 2$	$e_2 = \{1, 5\}$
$v_3 = 3$	$e_3 = \{2, 3\}$
$v_4 = 4$	$e_4 = \{2, 5\}$
$v_5 = 5$	

• $n \times m$ Matrix $B = (b_{ij})$ mit

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt Inzidenzmatrix von G

$B =$

	e_1	e_2	e_3	e_4
v_1	1	1	0	0
v_2	1	0	1	1
v_3	0	0	1	0
v_4	0	0	0	0
v_5	0	1	0	1

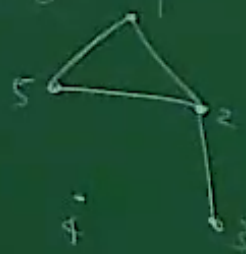
Diagonalmatrix/Gradmatrix

- auf der Diagonale befindet sich Grad des jeweiligen Knoten

• $n \times n$ Matrix $D = (d_{ij})$ mit

$$d_{ij} = \begin{cases} d(v_i) & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt Diagonalmatrix



$D =$

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
2	0	0	0	0
0	3	0	0	0
0	0	2	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	2

Laplace Matrix

- auf der Diagonale befindet sich Grad des jeweiligen Knoten
- ansonsten -1 falls verbunden, sonst 0

$n \times n$ Matrix $L = (l_{ij})$ mit

$$l_{ij} = \begin{cases} d(v_i) & \text{falls } i=j \\ -1 & \text{falls } i \neq j, \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- auch über Adjazenz- und Diagonalmatrix bestimmbar

– $L = D - A$

$L = D - A \quad \& \quad D + A = B B^T$

$$D + A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

[[Graphentheorie]] [[Matrix]]