## Lineare Rekursion

•  $a_n$  mit  $n \in \mathbb{N}$ 

$$\begin{array}{lll} -\ a_n = c_1*a_{n-1} + c_2*a_{n-2} + \ldots + c_l*a_{n-l} \\ *\ ==>> a_n - c_1*a_{n-1} - c_2*a_{n-2} - \ldots - c_l*a_{n-l} = 0 \end{array}$$

- $-c_i$  Konstante
- Anfangsbedingung/startwert fix gegeben
- Charakteristische Polynom

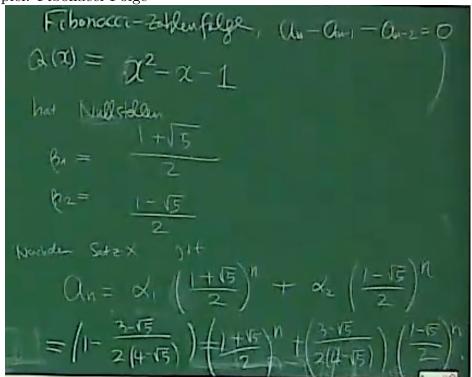
$$-Q(x) = x_l - c_1 * x_{l-1} - c_2 * x_{l-2} - \dots - c_l$$

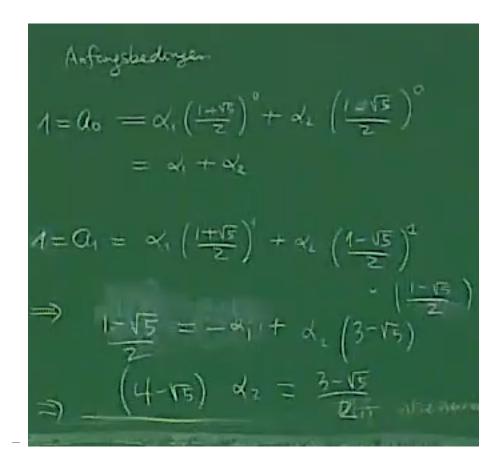
– hat Q(x) l<br/> verschiedene Nullstellen  $_1,_2,...,_l$ 

$$* a_n = \alpha_1 *_1^n + \alpha_2 *_2^n + \dots + \alpha_l *_l^n$$

\* Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l$ , sodass Anfangsbedingungen erfüllt

• Beispiel: Fibonacci-Folge





## Erzeugende Funktionen

• formale Potenzreihe

- 
$$A(z) := a_0 + a_1 * z + a_2 * z^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n * z^n$$

- z formale Variable
- $\bullet$  A(z) heißt erzeugende Funktion/Potenzreihe der Folge $a_n$
- $\bullet$   $[z^n]A(z) := a_n$ 
  - Reskalierung

$$* \ [z^n]A(z) = {}^n[z^n]A(z)$$

- Rechenregeln

\* 
$$A(z) + B(z) = \sum_{n \ge 0} (a_n + b_n) z^n$$

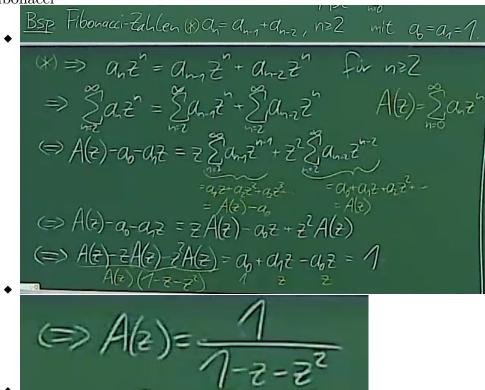
\* 
$$A(z) * B(z) = \sum_{n>0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k * b_{n-k}) z^n$$

$$\begin{array}{l} * \ A(z) + B(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n \\ * \ A(z) * B(z) = \sum_{n \geq 0}^{\infty} (\sum_{k=0}^n a_k * b_{n-k}) z^n \\ * \ \frac{\partial}{\partial z} (\sum_{n \geq 0} a_n * z^n) = \sum_{n \geq 1} n * a_n * z^{n-1} \end{array}$$

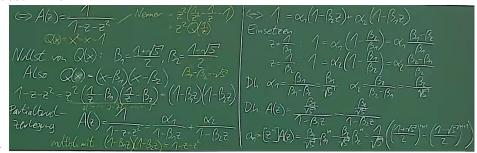
- B(z) ist Reziprokes von A(z), wenn A(z) \* B(z) = B(z) \* A(z) = 1
  - $-A(z)=\frac{1}{B(z)}$
  - Beispiele:
    - \* geometrische Reihe

2. 
$$A(z) = \tilde{Z}_{1}^{3} z^{n}$$
 (geometriscle Reihe). 1-z ist das Rezipude von  $A(z)$   
 $A(z)(1-z) = (1+z+z^{2}+z^{3}+1)(1-z) = (1-z)+(z-z^{3})+(z^{2}-z^{3})+z^{2}-+1=1$   
 $A(so) A(z) = \frac{1}{1-z}$ . Für  $B \in C(8)$ ,  $\frac{1}{1-Bz} = \tilde{Z}_{0}^{3}B^{3}z^{n}$ 

\* Fibo<u>nacci</u>



•  $a_n$  bestimmen?



[[Kombinatorik]]