- Varianz σ^2 unbekannt
- Test von
  - $$\mathcal{H}_0 : \quad \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs} \qquad \mathcal{H}_1 : \quad \mu > \mu_0$$
- Unter H_0 ist
  - $$\mathrm{E}(\bar{X}) \leq \mu_0.$$
- wesentlich größerer Wert deutet auf Verletzung der Nullhypothese hin
- Da wir die echte Standardabweichung nicht kennen, verwenden wir den Schätzer S und betrachten die Statistik
  $$T = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu_0}{S}.$$
- Es gilt
  - In diesem Fall folgt T einer t–Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden.
- t-Test mit kritischem Bereich
  - Sei $t_{n-1,1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Quantil dieser Verteilung.
  - $$K = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : t(x) > t_{n-1,1-\alpha} \right\}$$

Verwerfungsbereiche

- Sei $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ mit **unbekanntem** σ^2 und α ein gegebenes Signifikanzniveau. Definiere $t = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu_0}{s}$.
Hypothese	Verwerfe $\mathcal{H}_0$
$\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0$ $\mathcal{H}_1 : \mu \neq \mu_0$	$\lvert t \rvert > t_{n-1,1-\alpha/2}$
$\mathcal{H}_0 : \mu \leq \mu_0$ $\mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0$	$t > t_{n-1,1-\alpha}$
$\mathcal{H}_0 : \mu \geq \mu_0$ $\mathcal{H}_1 : \mu < \mu_0$	$t < t_{n-1,\alpha}$

Anwendung

Sei $X_1, \ldots, X_8 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ mit unbekanntem σ^2. Wir beobachten

0.63, 1.56, 1.26, -0.31, 3.87, 0.03, 4.92, 0.90

und möchten die Hypothese

$$\mathcal{H}_0: \quad \mu \geq 3 \qquad \text{vs} \qquad \mathcal{H}_1: \quad \mu < 3.$$

- zum Niveau $\alpha = 0.05$ testen.

  Aus der Stichprobe berechnen wir $\bar{x} = 1.61, s = 1.85$ (gerundet).

  Die Statistik für den t–Test ergibt

  $$t = \sqrt{8}\,\frac{1.61 - 3}{1.85} = -2.13.$$

  Aus der Tabelle lesen wir ab $t_{n-1,1-\alpha} = t_{7,0.95} = 1.89$. Da

  $$t = -2.13 < -1.89,$$

- ist $x \in K$ und wir verwerfen $\mathcal{H}_0$ zum Niveau $\alpha = 0.05$.
- R

```
> x <- c(0.63,  1.56,  1.26, -0.31,  3.87,  0.03,  4.92,  0.90)
> alpha <- 0.05
> n <- length(x)
> t <- sqrt(n) * (mean(x) - 3)/sd(x)
> t < qt(alpha, df = n - 1)
[1] TRUE
> pt(t, df = n - 1)
[1] 0.03510698
> t.test(x, alternative = "less", mu = 3)

        One Sample t-test

data:  x
t = -2.1344, df = 7, p-value = 0.03511
alternative hypothesis: true mean is less than 3
95 percent confidence interval:
     -Inf 2.843547
sample estimates:
mean of x
   1.6075
```

–