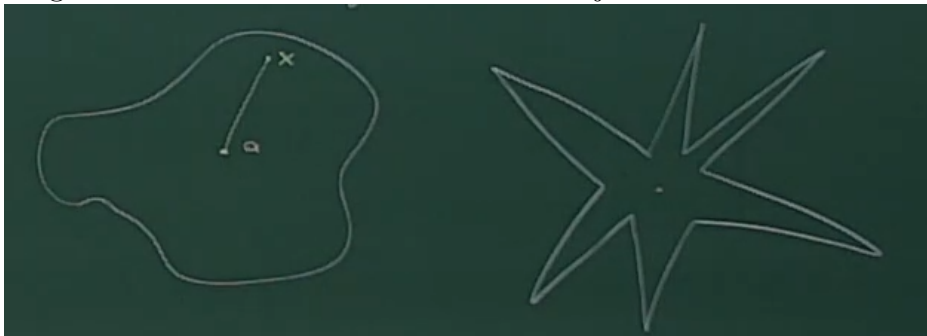


## Definition

- Gebiet  $U$  ist sternförmig, wenn
  - $\exists a \in U \forall x \in U : \forall t \in [0, 1] a + t(x - a) \in U$
  - Es gibt einen Punkt  $a$  mit “Sichtfeld” auf jeden anderen Punkt  $x$  im Gebiet



- ist  $U$  sternförmig,  $V$  ein Vektorfeld auf  $U$  und  $\text{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$ 
  - es gibt ein  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\text{grad}\Phi = \vec{V}$
  - Beweis:

$$\begin{aligned}
 \vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} & \quad \Phi(x) = \int_0^1 \left[ P(\bar{x} + t(x - \bar{x})) \cdot (x - \bar{x}) + Q(\bar{x} + t(x - \bar{x})) \cdot (y - y_0) + R(\bar{x} + t(x - \bar{x})) \cdot (z - z_0) \right] dt \\
 & \quad \in \mathbb{R} \quad \bar{x} = (x_0, y_0, z_0) \quad \text{Punkt im Inneren } U \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \int_0^1 \left[ \frac{\partial P}{\partial x}(\bar{x} + t(x - \bar{x})) \cdot t \cdot (x - x_0) + P(\bar{x} + t(x - \bar{x})) \cdot 1 + \frac{\partial Q}{\partial x}(\bar{x} + t(x - \bar{x})) \cdot t \cdot (y - y_0) + \frac{\partial R}{\partial x}(\bar{x} + t(x - \bar{x})) \cdot t \cdot (z - z_0) \right] dt \\
 &= \left( \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) \right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) \right) \cdot (y - y_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z) \right) \cdot (z - z_0) \\
 &= \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) \right) \cdot (y - y_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z) \right) \cdot (z - z_0) \right) = P(x)
 \end{aligned}$$

\* Produktregel im letzten Schritt

[[Wegunabhängigkeit]]