

**ACHTUNG: Eine Verbreitung
der Unterlagen außerhalb der
Vorlesung bzw. der
dazugehörigen Übungen ist
nicht gestattet !**

**Diese Vorlesung basiert auf: Hering et al., „Physik
für Ingenieure“**

ISSN 0937-7433

ISBN 978-3-642-22568-0

DOI 10.1007/978-3-642-22569-7

Springer Heidelberg Dordrecht London New York

e-ISBN 978-3-642-22569-7

4. Elektrizität und Magnetismus

- Grundbegriffe und Grundgesetze
- Ladungstransport in Flüssigkeiten und Gasen
- Elektrisches Feld (**Elektrostatik** ... ruhende Ladungen)
- Magnetisches Feld (**Magnetostatik** ... gleichförmig bewegte Ladungen)
- Zeitlich veränderliche Felder (**Elektrodynamik; Induktionsgesetz** ... beschleunigte Ladungen; elektromagnetische Felder)
- **Maxwell Gleichungen**

4.1 Grundgesetze und Definitionen

4.1.1 Ladung

- E&M **nicht** aus klassischer Mechanik ableitbar
- „neue“ Eigenschaft der Materie relevant → **Ladung**

➤ **Zwei „Sorten“ von Ladung:** **negativ** und **positiv**

Konsequenz: Abstoßung bzw. Anziehung

➤ **Ladung quantisiert:** existiert nur in vielfachen der **Elementarladung**

$$e = 1,60217 \cdot 10^{-19} \text{ C (oder As)}$$

z.B.: Elektron: $q_e = -e$; Proton: $q_p = e$

➤ Ladung ist an Materie gebunden

+e: Proton, Positron, + Myon, + Pion

-e: Elektron, Antiproton, - Myon, -Pion

➤ Ladungserhaltung

In einem abgeschlossenen System bleibt die Nettoladung (Summe aller positiven minus Summe aller negativen Ladungen) erhalten

➤ In einem makroskopischen System:

- negative Ladung: Elektronenüberschuss
- positive Ladung: Elektronenmangel

➤ Ladungstransport:

über **Elektronen** oder **Ionen**

➤ Elektrische Ladungen üben aufeinander Kräfte aus

Coulombsches Gesetz:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

↑

Einheitsvektor von Q_1 nach Q_2

ähnlich zur
Gravitationskraft: $\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$

- Zentralkraft, prop. $1/r^2$,
symmetrisch in Ladungen
- aber: viel größer und
abschirmbar

ϵ_0 ... elektrische Feldkonstante

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N m}^2)$$

Q_1, Q_2 ... elektrische Ladungen

r_{12} ... Abstand zwischen den Ladungen

aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

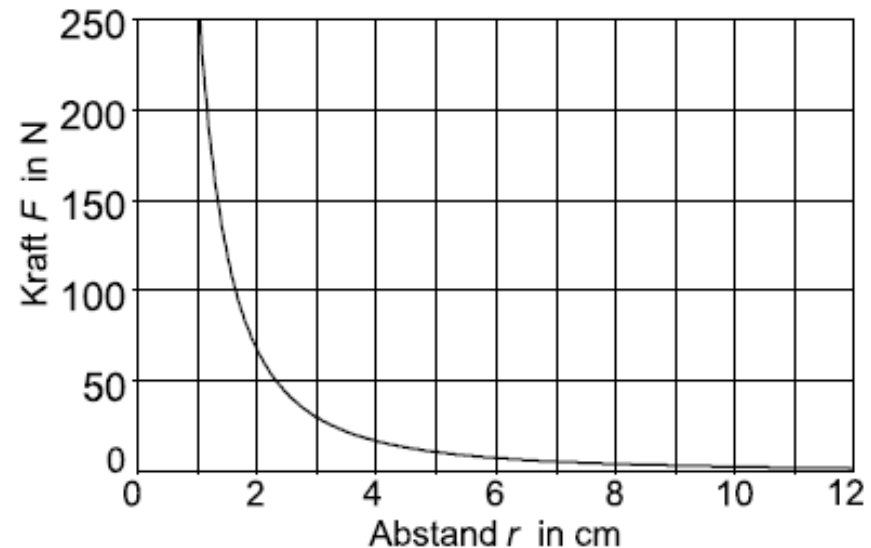


Abb. 4.2 Coulomb'sche Anziehungskraft zwischen zwei Ladungen mit $Q_1 = -10^{-6} \text{ C}$ und $Q_2 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$

Mehrere Ladungen:

- Coulomb'sches Gesetz gilt für jedes Ladungspaar
- Kraft auf Ladung Q_1 : Wechselwirkung mit allen **anderen** Ladungen

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{15} + \dots$$

Beispiel: Wechselwirkung zwischen den drei betragsgleichen Ladungen an den Ecken eines gleichschenkeligen Dreiecks; Wie groß ist die auf Q_3 wirkende Kraft?

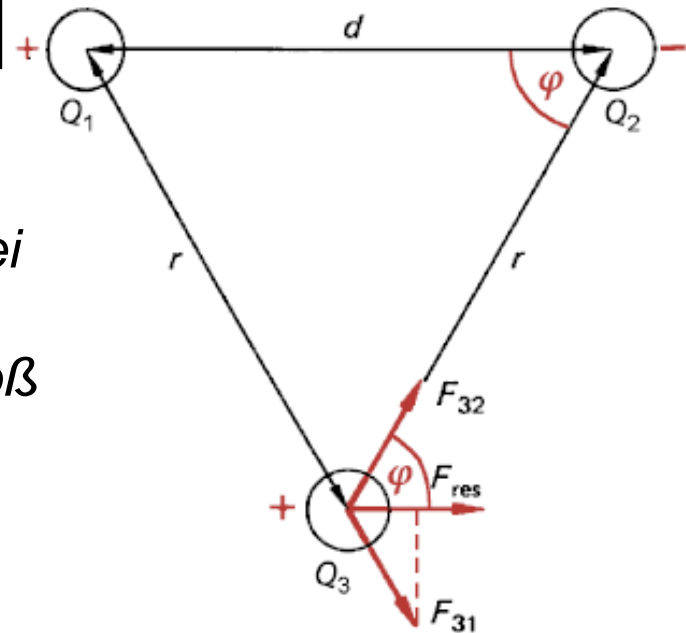


Abb. 4.3 Resultierende Kraft bei drei Ladungen (Kraftwirkung eines Dipols)

aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

4.1.2 Stromstärke, I (Basisgröße von E&M)

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Ladung, dQ , die sich in der Zeit, dt , durch eine Querschnittsfläche bewegt

$$j = \frac{I}{A} = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt}$$

Stromdichte, j :

Strom, I , pro Querschnittsfläche, A

$[I] = 1 \text{ Ampere}$ (Basiseinheit)

Definition: so, dass mechanische und elektrische Energie in gleichen Einheiten gemessen werden können

Bewegte Ladung, Q , ergibt sich aus **Dauer des Stromflusses (Fläche unter der $I(t)$ Kurve)**

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$$

bei konstantem Strom:

$$Q = I t$$

Technische Stromrichtung: Bewegungsrichtung von plus (+) nach minus (-)

... entgegengesetzt zur tatsächlichen Bewegung der Elektronen.

Auswirkung des Stromflusses:

- Ladungstransport
- Wärmewirkung
- Chemische Wirkung (Elektrochemie)
- Magnetische Wirkung (Elektromagnetismus)

4.1.3 Spannung, U

Maß für Ladungstrennungsarbeit, W , pro
Ladung: $U = W/Q$

- Spannung **Triebkraft für Stromfluss**
- Im äußeren Stromkreis fließt der Strom **vom Pluspol der Spannungsquelle zum Minuspol.**
- **Spannungsquelle:** Hält zwischen zwei Punkten eine Spannung aufrecht.
 - **Galvanisches Element** (chemische Energie)
 - **Generator** (mechanische Energie)
 - **Solarzelle** (Lichtenergie)

Spannung zwischen zwei Punkten A und B, U_{AB} = negative Differenz des elektrostatischen Potentials zwischen den Punkten, $-\Delta\varphi$

$$U_{AB} = -\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B$$

$$[U] = 1 \text{ V (1 Volt)} = 1 \text{ Joule/C} = 1 \text{ kgms}^{-2}/(\text{As}) = 1 \text{ kgm}/(\text{As}^3)$$

1 V liegt an, wenn beim Transport von 1 C/s 1 W umgesetzt wird.

4.1.4 Widerstand und Leitwert

Maß für die „Hemmung“ des Ladungstransports

Beziehung zwischen Widerstand, R , und Leitwert, G :

$$G = \frac{1}{R}$$

$[R] = \text{Ohm } (\Omega)$

$[G] = \text{Siemens } (\text{S})$

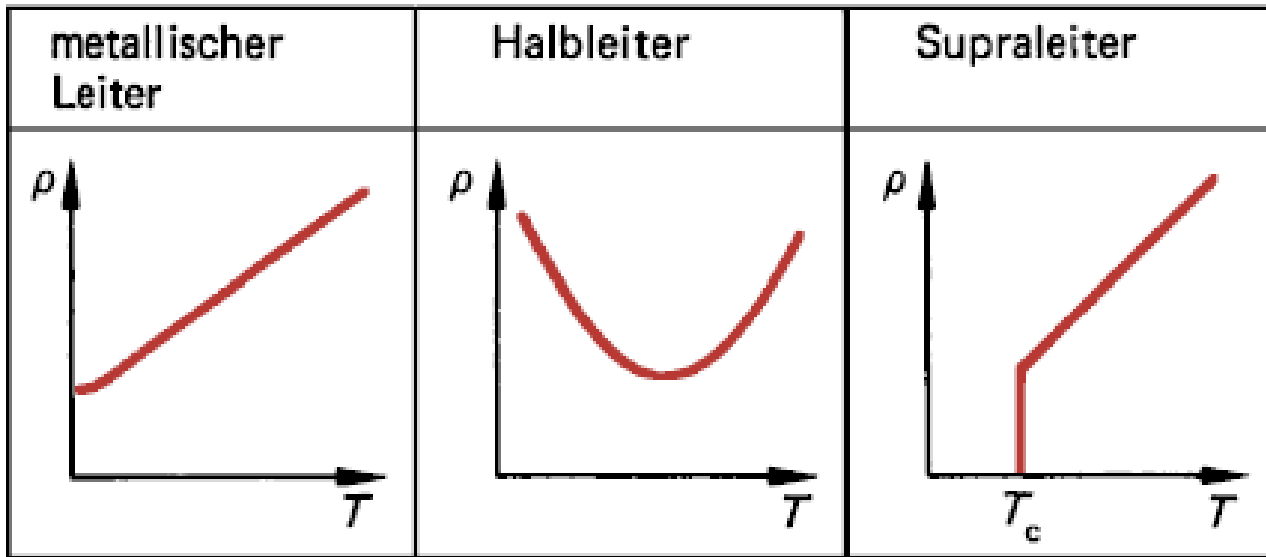
Widerstand eines metallischen Leiters der Länge, l , und des Querschnitts, A :

$$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{l}{\kappa A}$$

ρ ... spezifischer Widerstand

κ ... elektrische Leitfähigkeit

Temperaturabhängigkeit des Widerstandes



aus: Hering et al.,
„Physik für Ingenieure“

Abb. 4.7 Prinzipieller Verlauf des spezifischen elektrischen Widerstandes für einen metallischen Leiter, einen Halbleiter und einen Supraleiter

- **Metall:** Streuung der Elektronen an Gitterschwingungen (Phononen)
- **Halbleiter:** Mit T zunehmende Ladungsträgerkonzentration
- **Supraleiter:** Sprunghaftes Verschwinden des Widerstandes

Für Metalle gilt als lineare Näherung:

$$R(\vartheta) = R_{20} (1 + \alpha (\vartheta - 20^\circ\text{C}))$$

Reine Metalle häufig:
 $\alpha = 1/250 \text{ K}^{-1}$

ϑ ... Temperatur in $^\circ\text{C}$
 R_{20} ... Temperatur bei 20°C

Kaum T-abhängige Speziallegierungen:

Konstantan

(60% Cu, 2% Ni, 12% Mn: $\alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$)

aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Tabelle 4.2 Eigenschaften einiger Leiterwerkstoffe (Bezugswiderstand R_{20})

Werkstoff	spezifischer elektrischer Widerstand ϱ in $\Omega \text{ cm}$	Temperaturkoeffizient α in 10^{-3} K^{-1}
Silber	$1,6 \cdot 10^{-6}$	3,8
Kupfer	$1,7 \cdot 10^{-6}$	3,9
Gold	$2,2 \cdot 10^{-6}$	3,9
Aluminium	$2,7 \cdot 10^{-6}$	4,7
Platin	$1 \cdot 10^{-5}$	3,9
Platin-Iridium	$3,2 \cdot 10^{-5}$	2
Platin-Rhodium	$2 \cdot 10^{-5}$	1,7
Zinn	$1,1 \cdot 10^{-5}$	4,6

4.1.5 Ohmsches Gesetz

Für Leiter häufig (typischerweise) beobachtet:

$$I = \frac{U}{R}; \quad U = IR; \quad R = \frac{U}{I}$$

I ... Stromstärke

U ... Spannung

R ... Widerstand

Ohmscher Leiter: lineare **Strom-Spannungskennlinie**
= linearer Zusammenhang zwischen **Spannung (= Ursache des Ladungstransports)** und **Strom (= Wirkung)**

4.1.6 Kirchhoff'sche Regeln im verzweigten und geschlossenen Stromkreis

Verzweigter Stromkreis (1. Kirchhoff'sches Gesetz; Knotenregel):

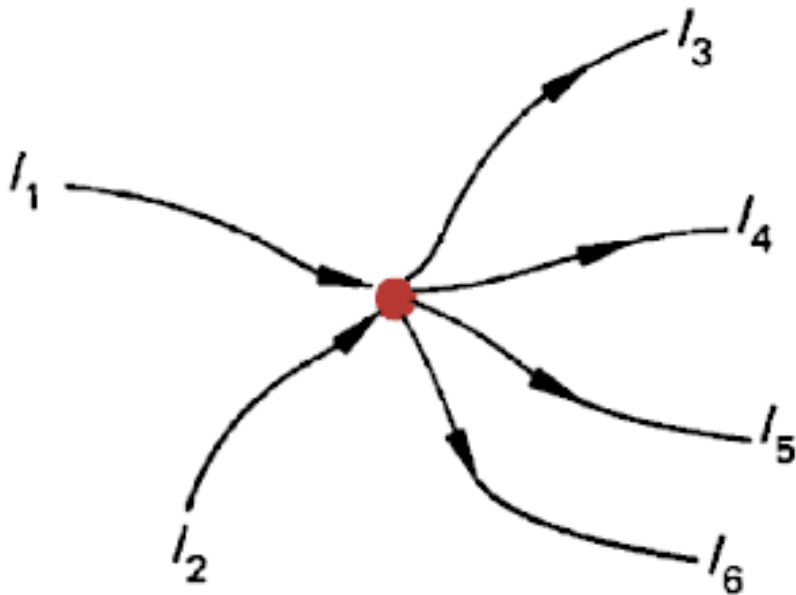


Abb. 4.9 Knotenregel

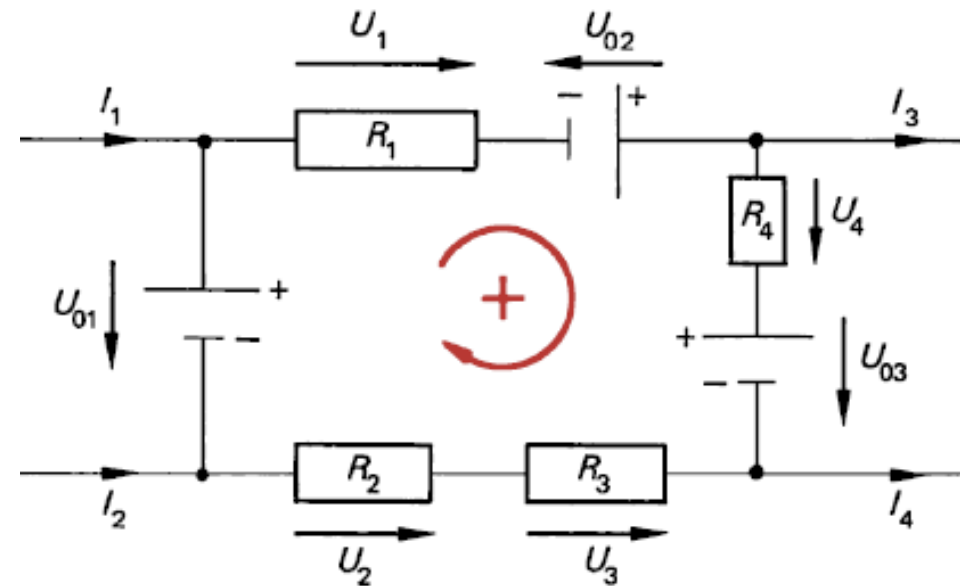
aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Ladungserhaltung →
Summe der zufließenden =
Summe der abfließenden
Ströme

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0$$

2. Kirchhoff'sches Gesetz; Maschenregel

Energieerhaltung: Bewegung einer Ladung in einem geschlossenen Stromkreis: zugeführte und abgegebene elektrische Arbeit gleich groß !



Summe aller treibenden Spannungen = Summe der Spannungsabfälle !

Spannungspfeile:
R ... in Richtung des Stromflusses;
Quelle ... von + nach -

Abb. 4.11 Maschenregel

aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Positiv/negativ, wenn Pfeil in/gegen Zählrichtung.

$$\sum_{i=1}^N U_i = 0$$

4.1.7 Schaltung von Widerständen

Reihenschaltung:

aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

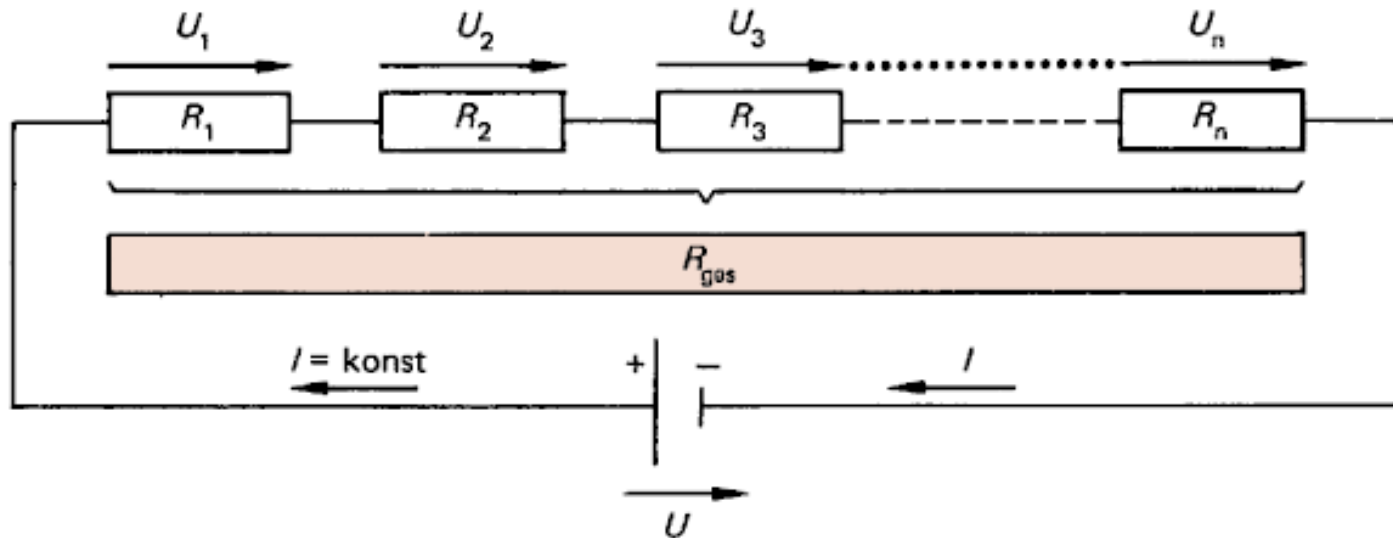


Abb. 4.13 Gesamtwiderstand bei der Reihenschaltung

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

$$R_{\text{ges}} I = R_1 I + R_2 I + R_3 I + \dots + R_n I \quad \Rightarrow \quad R_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N R_i$$

Parallelschaltung:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

$$\frac{U}{R_{ges}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots + \frac{U}{R_n}$$

$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

$$G_{ges} = \sum_{i=1}^N G_i$$

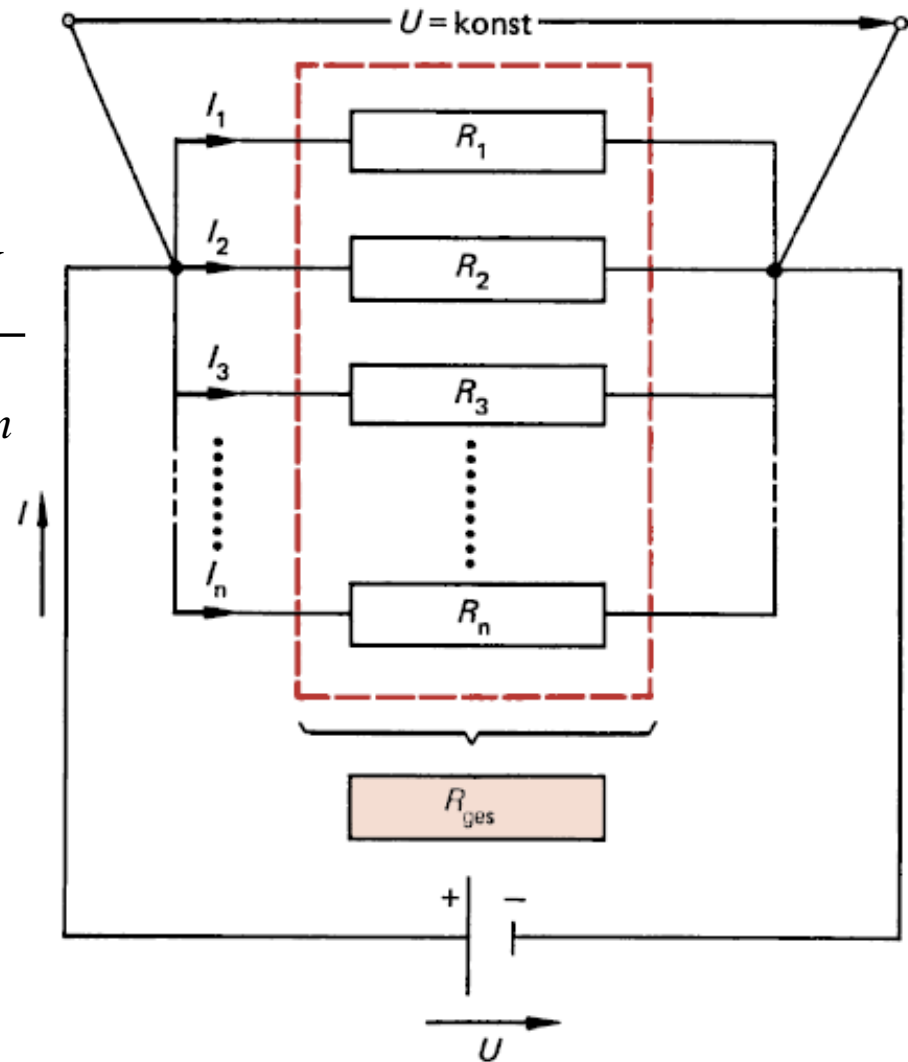


Abb. 4.14 Gesamtwiderstand bei der Parallelschaltung
aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

4.2 Ladungstransport in Flüssigkeiten und Gasen

4.2.1 Ladungstransport in Flüssigkeiten (Elektrochemie)

Ladungsträger:

Ionen (+ oder – geladene Atome und Moleküle)

Entstehung:

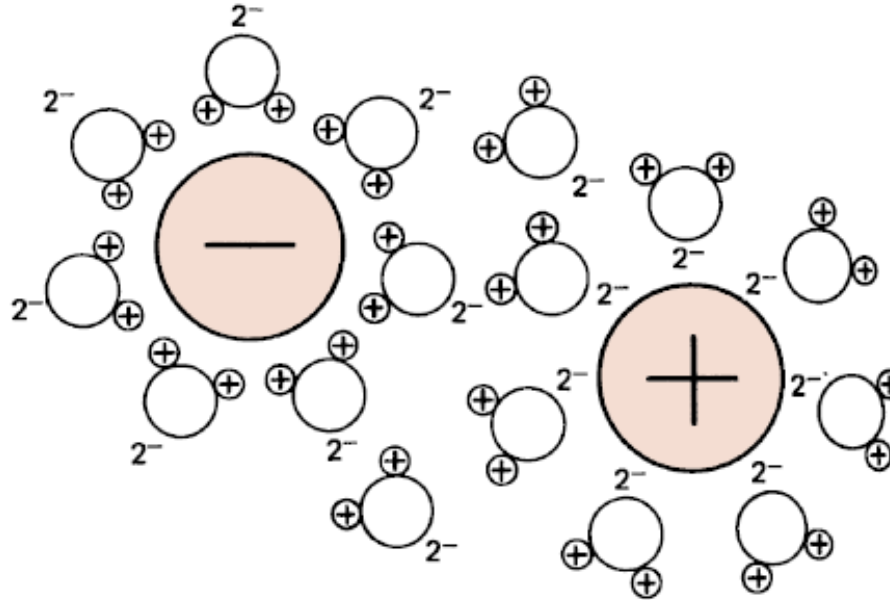
Dissoziation von Salzen,
Säuren und Laugen

aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Tabelle 4.4 Dissoziation (Beispiele)

Stoff	Kation	Anion
CuSO_4	Cu^{2+}	SO_4^{2-}
HCl	H^+	Cl^-
NaOH	Na^+	OH^-

Ionen im Wasser **hydratisiert** (allg. **solvatisiert**) – i.e., von einer Wolke Lösungsmitteldipole umgeben



aus: Hering et al.,
„Physik für Ingenieure“

Abb. 4.27 Hydratisierung von Ionen

- + geladene Ionen: **Kationen** (bewegen sich in Feldrichtung)
- geladene Ionen: **Anionen** (bewegen sich gegen Feldrichtung)

Elektrolyt: elektrisch leitende Lösung, die Kationen und Anionen enthält

Elektrolyse: 2 Elektroden an Spannungsquelle angeschlossen

An Elektroden Redoxreaktionen

Anode (+ Pol; **Oxidation**):



Kathode (- Pol; **Reduktion**):



- Anode löst sich auf
- Metall wird an Kathode abgeschieden (**Galvanisieren**)

- Oder Trennung von H_2O in H_2 und O_2
- Metallgewinnung: Metallsalzlösung als Elektrolyt

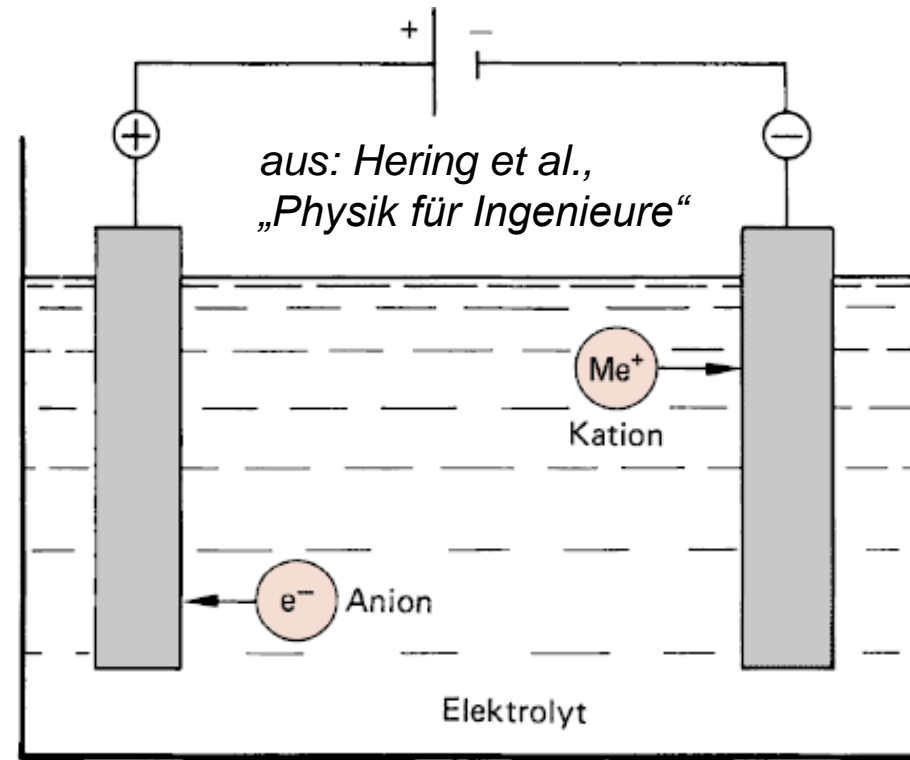
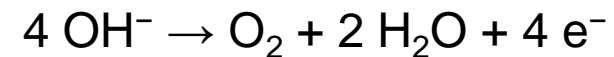
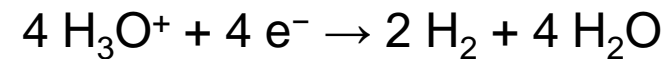


Abb. 4.28 Elektrolyse (schematisch)



Faraday'sches Gesetz:

Abgeschiedene Stoffmenge ausschließlich von transportierter Ladung abhängig !

$$N = \frac{Q}{z e} = \frac{I t}{z e}$$



$$m = \frac{M}{N_A} \frac{I t}{z e}$$

N ... abgeschiedene Zahl an Molekülen

z e ... Ladung je Ion

Q ... geflossene Gesamtladung

I ... Stromstärke

t ... Dauer des Stromflusses

m ... abgeschiedene Masse

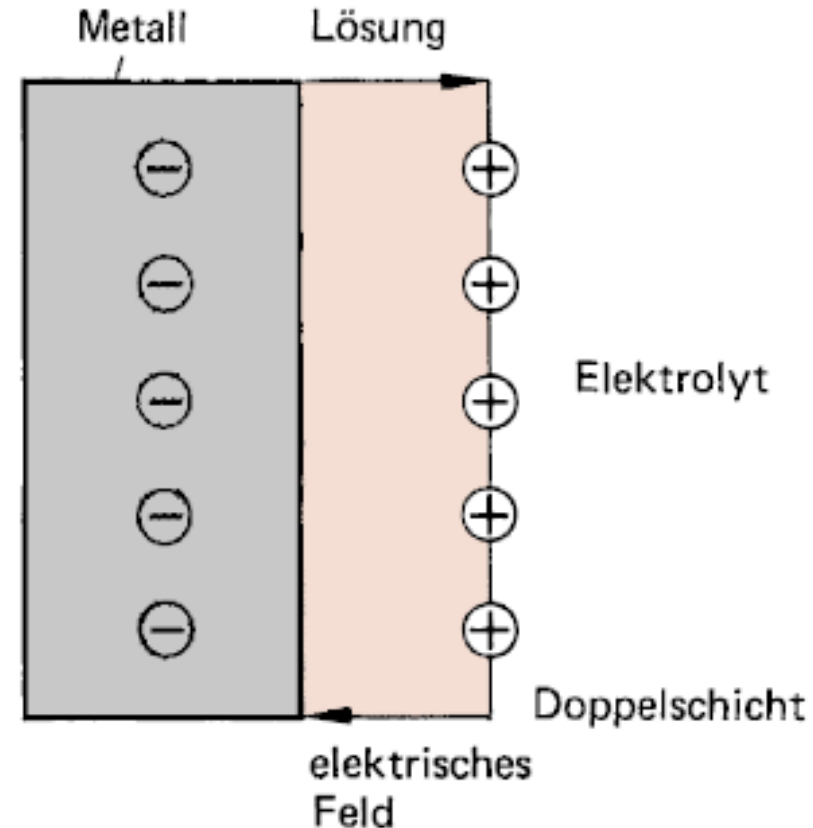
M ... molare Masse (Achtung: oft in g/mol gegeben)

Elektrochemische Spannungsquellen:

**Umkehrung des Prozesses → galvanische Zellen:
Batterien und Akkumulatoren (Umwandlung
chemischer Energie in elektrische Energie)**

Ursprung:

an Elektrode:
geladene Doppelschicht, da
Metallionen bis zur Ausbildung
eines Gleichgewichts in
Lösung gehen.



aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Spannung relativ zu Standardwasserstoffelektrode →
elektrochemische Spannungsreihe der Metalle

Häufig:
Zn oder Li oxidiert
oxidische Mn-, Ag-, Hg-
Verbindungen reduziert

Bezeichnung	Zink/ Braunstein (Leclanché)
positive Elektrode	$\text{MnO}_2 + e^- + \text{NH}_4^+ \longrightarrow \text{MnOOH} + \text{NH}_3$
negative Elektrode	$\text{Zn} \longrightarrow \text{Zn}^{2+} + 2e^-$
Zellen- reaktion	$\text{Zn} + 2\text{MnO}_2 + 2\text{NH}_4\text{Cl} \longrightarrow 2\text{MnOOH} + \text{Zn}(\text{NH}_3)_2\text{Cl}_2$
Energie- dichte in Wh/l	120 bis 190
Energie- dichte in Wh/kg	25 bis 70
Nennspannung in V	1,5
Strombelastung in mA/cm ²	2

aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Brennstoffzelle:

„kalte Verbrennung“ zur direkten Umwandlung chemischer in elektrische Energie

- H_2 und O_2 gasförmig zugeführt
- Elektronisch isolierenden aber ionisch leitender Elektrolyt



U_0 für H_2/O_2 Zelle = 1,23 V

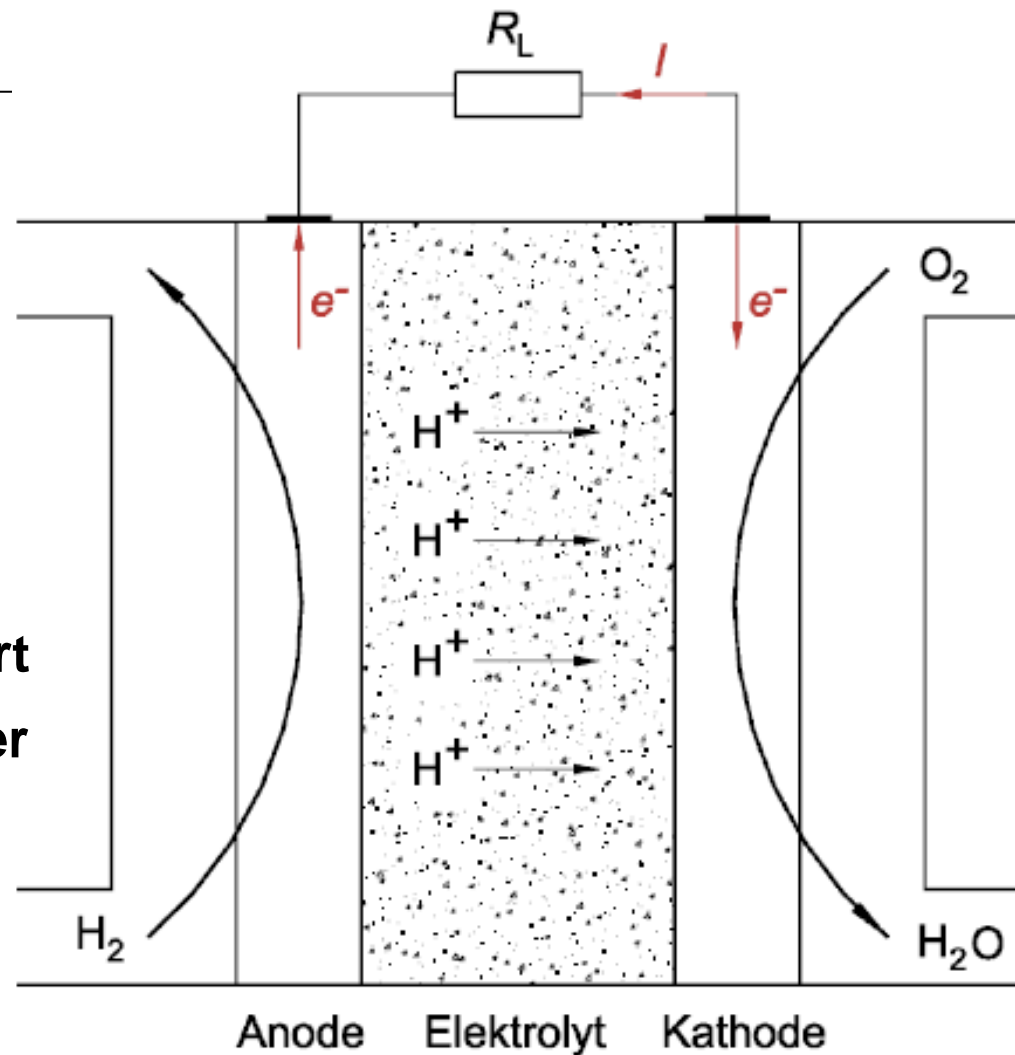


Abb. 4.34 Prinzipieller Aufbau einer H_2/O_2 -Brennstoffzelle mit Protonen leitendem Elektrolyten (PEM FC)

aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

4.2.2 Ladungstransport in Vakuum und Gasen

Vakuum:

- Freie Ladungsträger müssen durch Ladungsträgerinjektionsprozesse erzeugt werden !
- **Austrittsarbeit**, W_A , des Metalls muss überwunden werden ...

Thermische Emission (Glühemission)

Glühkathode: kinetische Energie einiger Elektronen nimmt so sehr zu, dass sie W_A überwinden können

Richardson-Gleichung:

$$j \propto T^2 e^{-\frac{W_A}{k_B T}}$$

j ... Stromdichte
 T ... Temperatur der Kathode
 W_A ... Austrittsarbeit
 k_B ... Boltzmannkonstante

Photoemission:

**Photoelektrischer Effekt, wenn
Energie der Photonen $> W_A$**

$$E_{kin} = hf - W_A$$

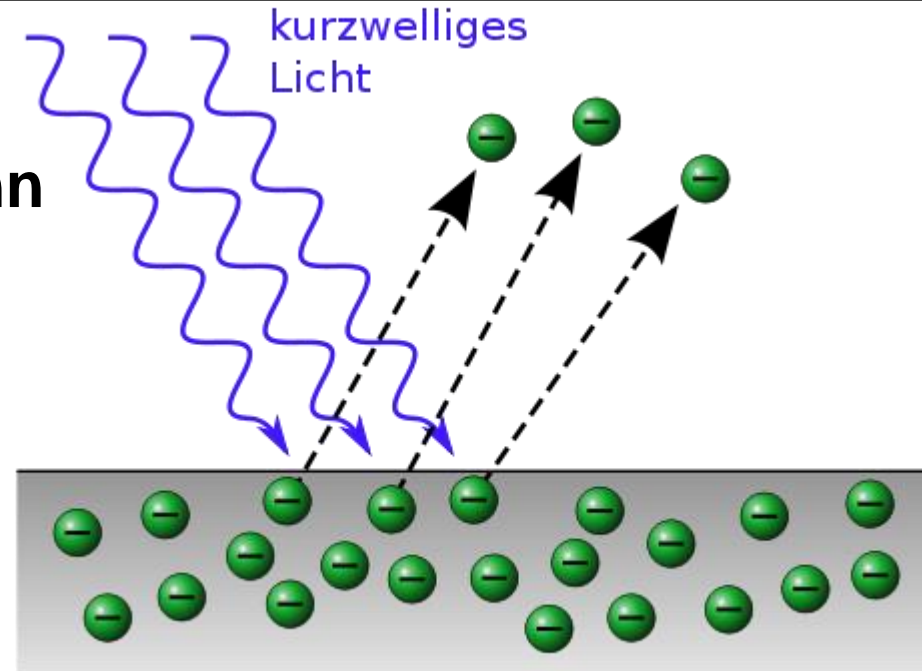
E_{kin} ... kinetische Energie der Photoelektronen

h ... Plank'sches Wirkungsquantum

f ... Frequenz des Lichts

hf ... Energie der Photonen

W_A ... Austrittsarbeit



Feldemission:

- **Feldstärken $\sim 10^9$ V/M: Durchtunneln der Injektionsbarriere**
- **Kathoden als feine Spitzen (Spitzenwirkung)**

Gase:

- **Unselbständige Gasentladung:** Ladungsträger von außen eingebracht
- **Selbständige Gasentladung:** Gasmoleküle durch Bewegung im Feld und Stöße ionisiert

Plasmaströme:

- Positive Ionen und Elektronen hoher Dichte (fast vollständige Ionisation)
- → 4. Aggregatzustand der Materie
- Glimmentladungen, Zustand in Sternen, Plasmen für Kernfusion ...

4.3 Elektrisches Feld

4.3.1 Allgemeiner Feldbegriff

Eine physikalische Größe, Z , ist als Feld zu beschreiben, wenn sie **im ganzen Raum wirksam und damit messbar** ist.

$$Z = Z(x, y, z; t)$$

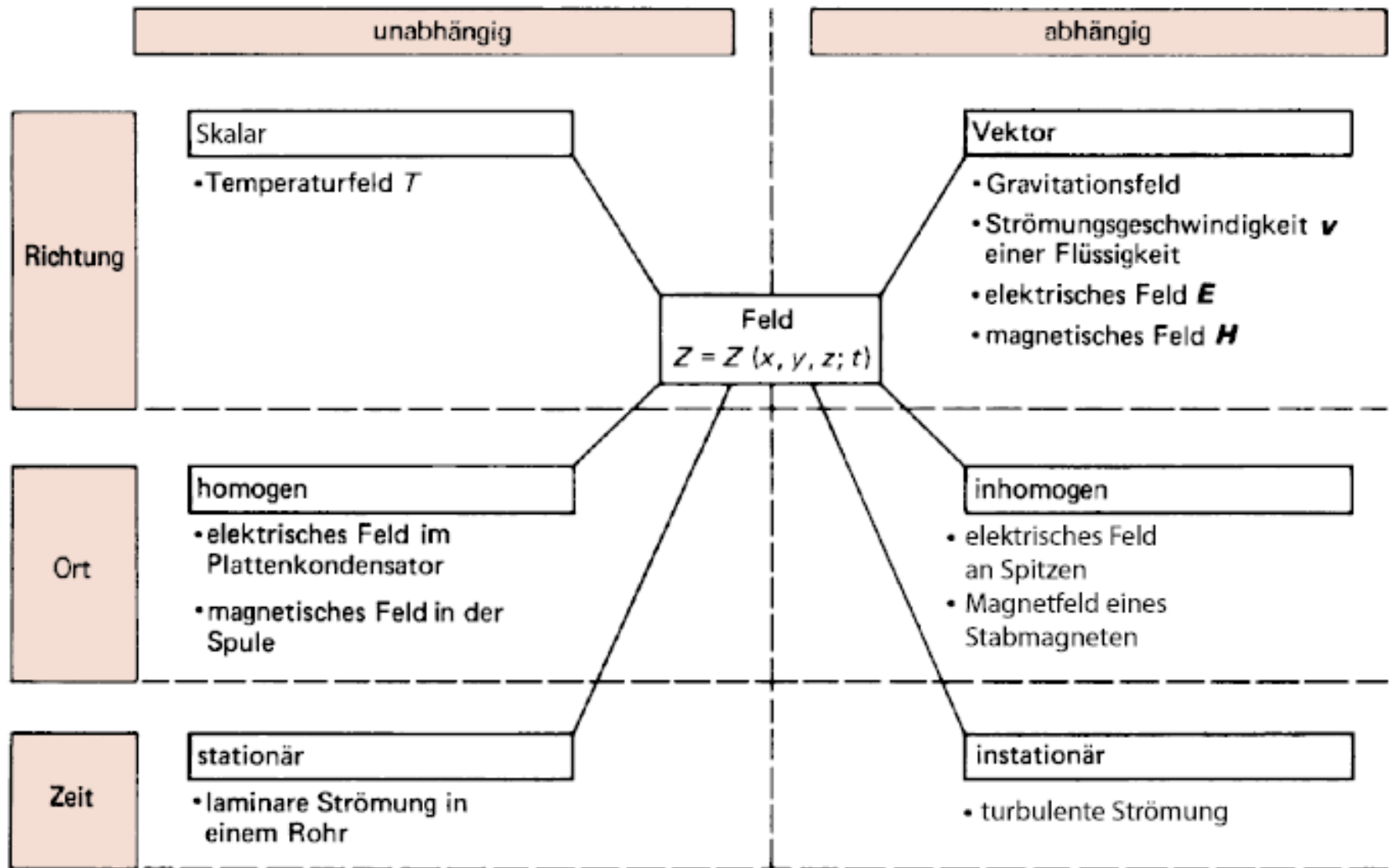


Abb. 4.47 Einteilung der Felder

aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

4.3.3 Elektrische Feldstärke und Kraft

Elektrische Feldstärke:

Kraft, F , die im elektrischen Feld auf eine (punktförmige) Probeladung, Q , wirkt dividiert durch die Ladung.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

positive Ladung: \vec{F} und \vec{E} gleich orientiert
 $[E] = \text{N/C} = \text{V/m}$

Kraft zwischen Punktladungen im Abstand r :

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

→ **Feld einer Punktladung:**
 (im Koordinatenursprung)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Überlagerung von Feldern: **additiv**

Feld mehrerer Punktladungen, Q_i an den Orten \vec{r}_i :

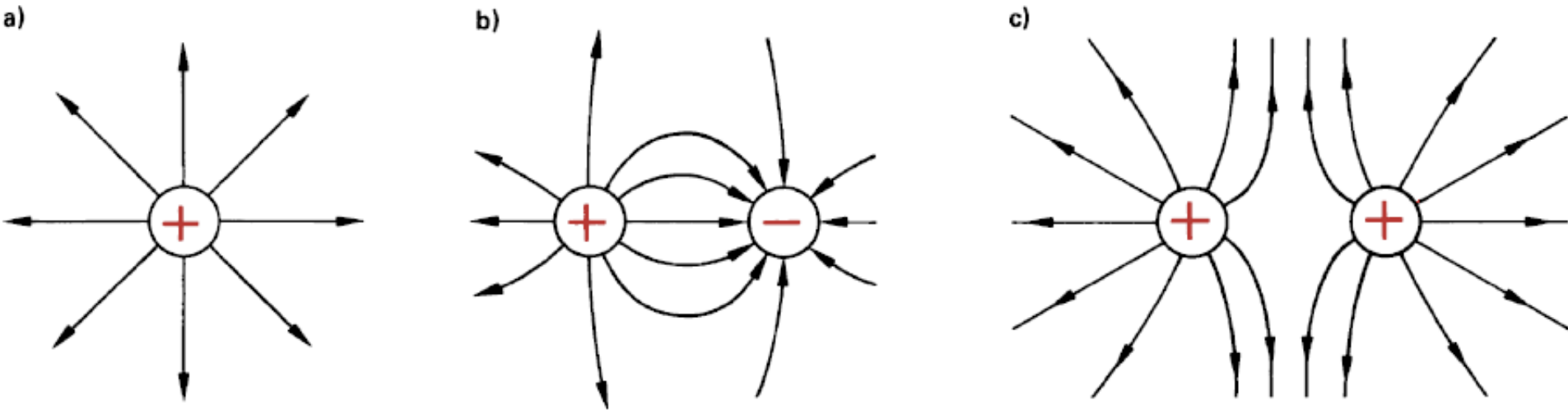
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Beispiel: Zwei Ladungen der Größe Q und $4Q$ sitzen an den Positionen $(0,0,0)$ und $(0,0,a)$. Wie groß ist das elektrische Feld an der Position (x,y,z) ?

4.3.2 Beschreibung des elektrischen Feldes

- Das elektrische Feld ist ein Vektorfeld
- Ursprung: elektrische Ladungen
- Beschreibt Wirkungslinien der elektrischen Kräfte in Betrag und Raumrichtung

Darstellung mittels **elektrischer Feldlinien**



- Tangente auf Feldlinien beschreibt **Kraftrichtung**
- **Dichte der Feldlinien** ist Maß für die Kraftwirkung
- **Positiv geladene Körper werden in Richtung** der Feldlinien beschleunigt, negative entgegen
- Feldlinien schneiden sich nicht
- Elektrische Feldlinien haben einen Anfang (+ Ladung) und ein Ende (- Ladung)
- Es gibt **keine geschlossenen elektrischen Feldlinien**

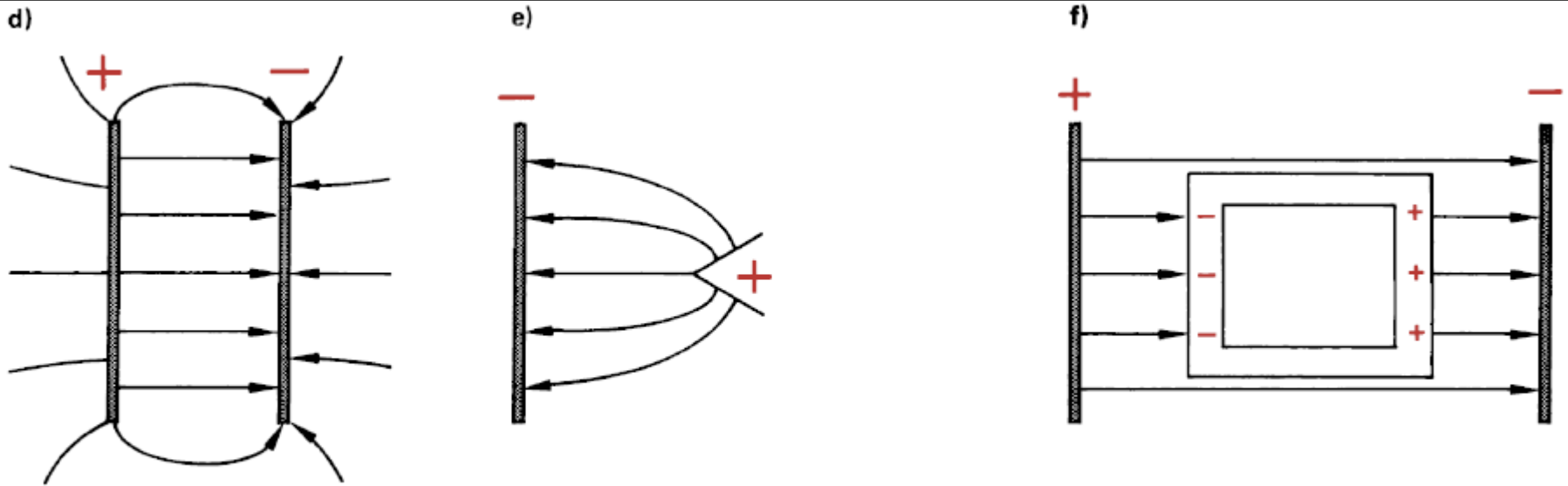


Abb. 4.48 Feldlinienbilder

Metallische Leiter (mit frei verschiebbaren Elektronen):

- Elektrische Feldlinien stehen **senkrecht auf Oberflächen** (Ladungen verschoben, bis keine tangentielle Kraftkomponente)
- Unkompensierte Ladungen in metallischen Körpern sind immer auf deren Oberfläche
- **Das Innere metallischer Körper ist feldfrei.**
- Metallische Umhüllungen können **elektrische Felder abschirmen (Faraday Käfig).**

4.3.4 Elektrostatisches Potential

Arbeit, W_{AB} , zur Verschiebung einer punktförmigen Probeladung, Q , von A nach B gegen die Feldkraft, F :

$$W_{AB} = -\int_A^B \vec{F}(\vec{s}) d\vec{s} = -Q \int_A^B \vec{E}(\vec{s}) d\vec{s}$$

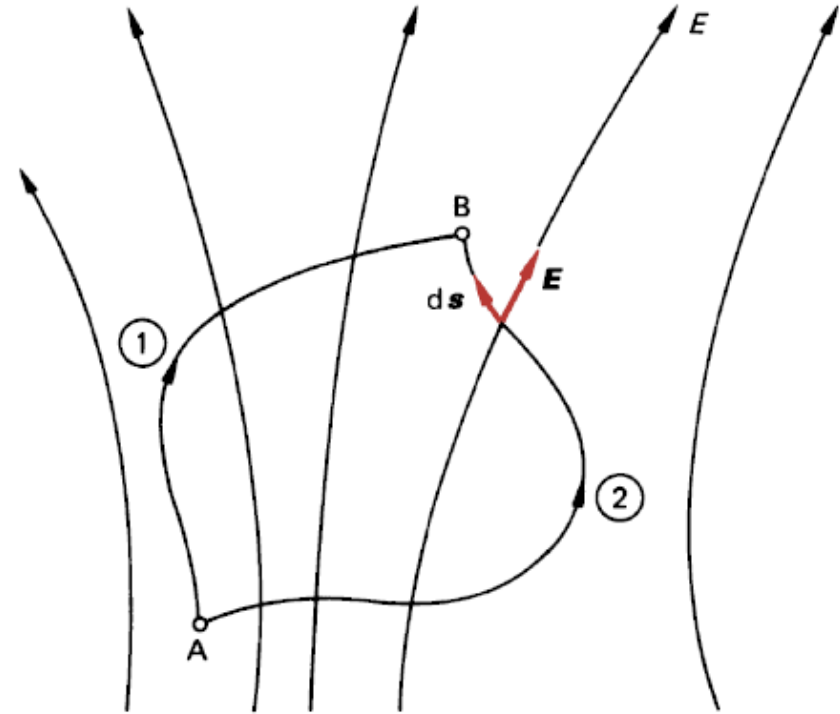


Abb. 4.50 Verschiebung von Ladung im elektrischen Feld

Energierhaltung:

$$\int_A^{B-\text{entlang } 1} \vec{E} d\vec{s} + \int_B^{A-\text{entlang } 2} \vec{E} d\vec{s} = \oint \vec{E} d\vec{s} = 0$$

Verschiebungsarbeit ist unabhängig vom Weg !

Definition des Potentials eines Punktes B:

Verschiebungsarbeit für Verschiebung vom Unendlichen nach B dividiert durch Größe der Probeladung.

$$\varphi(\vec{r}_B) = \frac{W_{\infty B}}{Q} = - \int_{\infty}^{\vec{r}_B} \vec{E}(\vec{s}) d\vec{s}$$

„Nullpunkt“ des Potentials ist im Unendlichen !

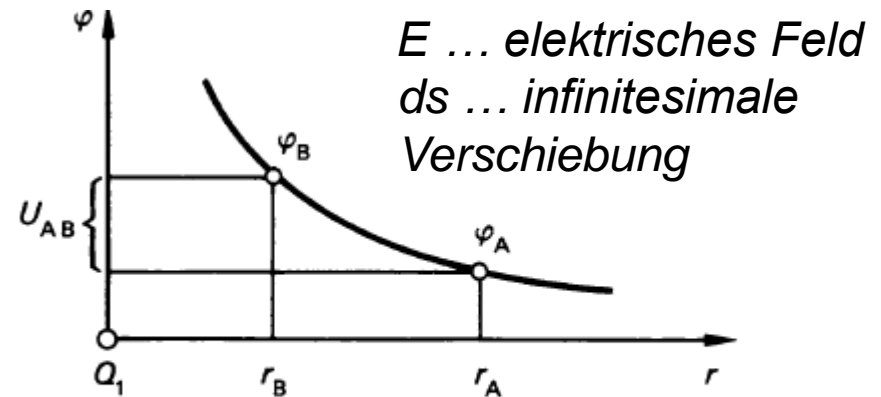


Abb. 4.51 Elektrostatisches Potential und Spannung zwischen zwei Punkten

Spannung zwischen Punkten A und B, U_{AB} :

$$U_{AB} = - \frac{W_{AB}}{Q} = \int_A^B \vec{E}(\vec{s}) d\vec{s}$$



$$-U_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = \Delta\varphi$$

Spannung = (negative) Differenz im elektrostatischen Potential

Berechnung des Feldes, E , aus dem Potential φ :

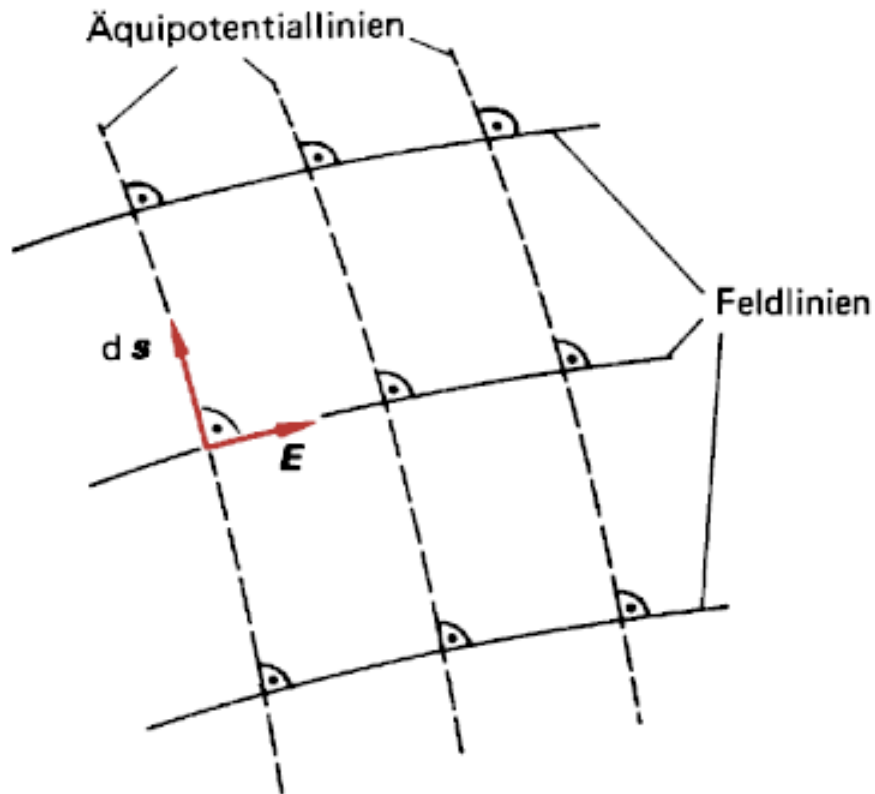
$$\vec{E} = -grad \varphi(\vec{r})$$

- **Vektoroperator Gradient:** Zeigt in Richtung der maximalen Potentialänderung
- **minus:** Feld zeigt in Richtung der Abnahme des Potentials (wie Feldlinien)
- **Feldstärke, E , und Potential, φ , sind „gleichberechtigt“ bei der Beschreibung des Feldes.**

$$-grad \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z \right) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Äquipotentialflächen:

Flächen **konstanten Potentials**; es gilt: $\vec{E} \perp d\vec{s}$



Verschiebung von Ladung entlang von Äquipotentialflächen: **KEINE Verschiebungsarbeit** ($W_{AB}=0$)

Elektrisches Feld von Punktladungen mathematisch analog zu Gravitationsfeld !

Abb. 4.52 Äquipotentiallinien und elektrische Feldlinien

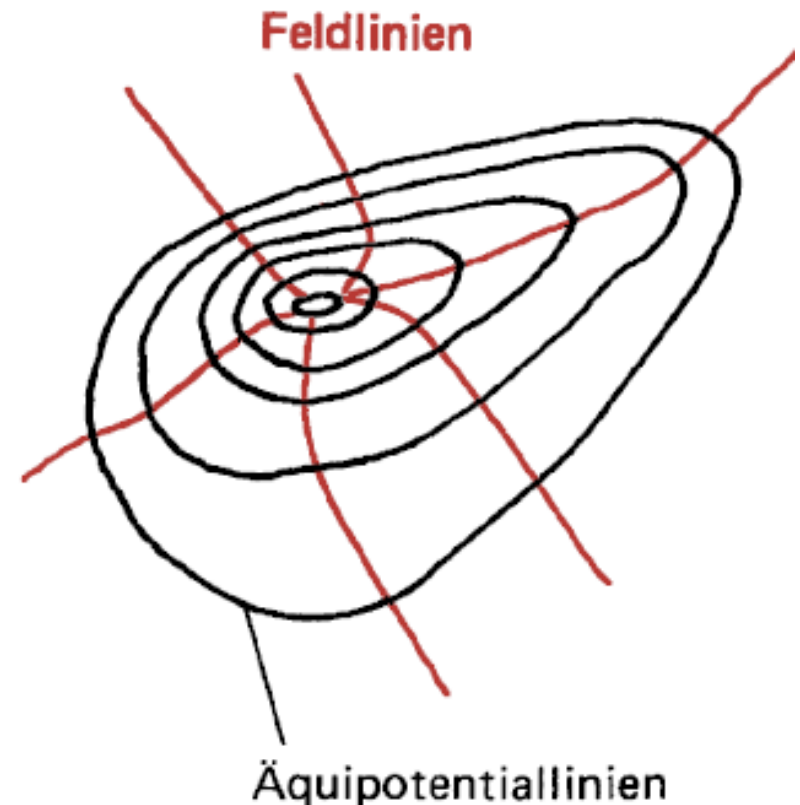
aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Situation einer Ladung im elektrischen Feld analog zur Situation eines „reibungsfreien Wassertropfens“ in bergiger Landschaft.

Gravitationsfeld



elektrisches Feld



aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Beispiel: Spitzenwirkung (metallische ebene Platte + Spitze)

Feldüberhöhung um Spitze:

- Umso größer, je kleiner Spitzenradius
- Von Gegenelektrode weitgehend unabhängig

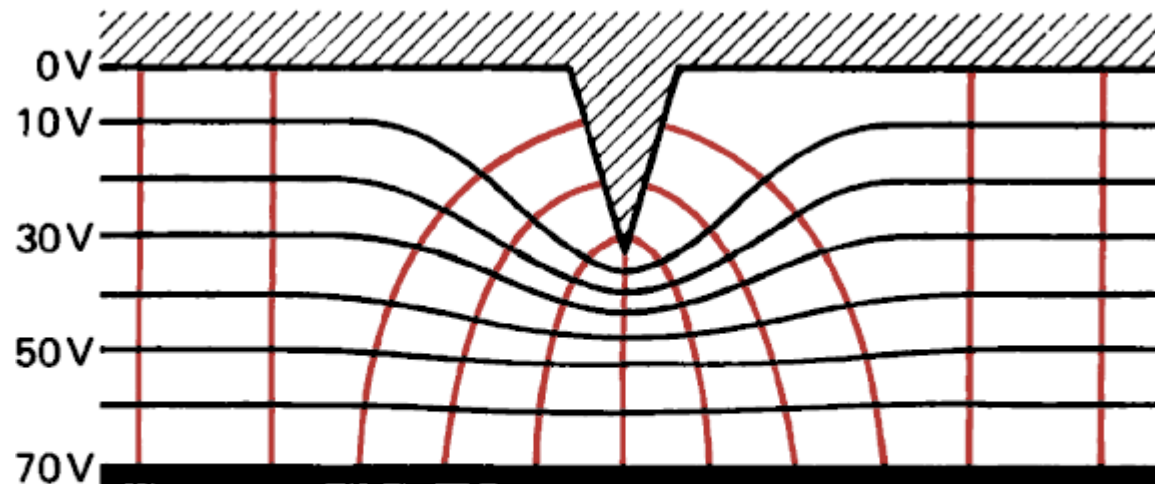
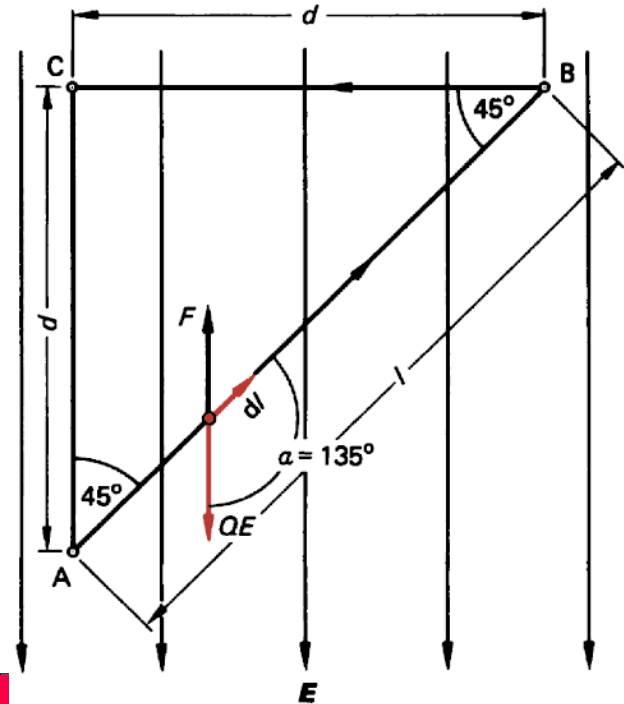


Abb. 4.55 Äquipotentiallinien und elektrische Feldlinien an einer metallischen Spitze

*Beispiel: Ladung entlang A-B-C bewegt:
Was ist die Potentialdifferenz U_{CA}*

Abb. 4.56 Zu Beispiel 4.3-2. Eine äußere Kraft F bewegt eine Ladung Q auf dem Weg ABC

aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“



4.3.5 Bewegung geladener Teilchen im elektrischen Feld

Beschleunigung im elektrischen Feld:

$$\vec{a} = \frac{Q}{m} \vec{E}$$

Änderung der kinetischen Energie:

$$\Delta E_{kin} = -\Delta E_{pot}$$

a ... Beschleunigung E_{kin} ... kinetische Energie
Q ... Ladung E_{pot} ... potentielle Energie
m ... Masse (Lageenergie)
E ... elektr. Feld v ... Geschwindigkeit
U ... Potentialdifferenz

$$\frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = QU$$

Energiezunahme eines Teilchens mit Ladung e beim durchlaufen der Potentialdifferenz 1V:

$$1 \text{ Elektronenvolt (1 eV)} = 1,60219 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

In Atom-, Kern-, Teilchen-, Quantenphysik ... verwendete Energieeinheit

Für sehr hohe Beschleunigungsspannungen nähert sich v der **Lichtgeschwindigkeit, c** :

Relativistischer Massenzuwachs:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

mit:

$$E_{kin} = mc^2 - m_0c^2$$

ergibt sich:

$$QU = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right)$$

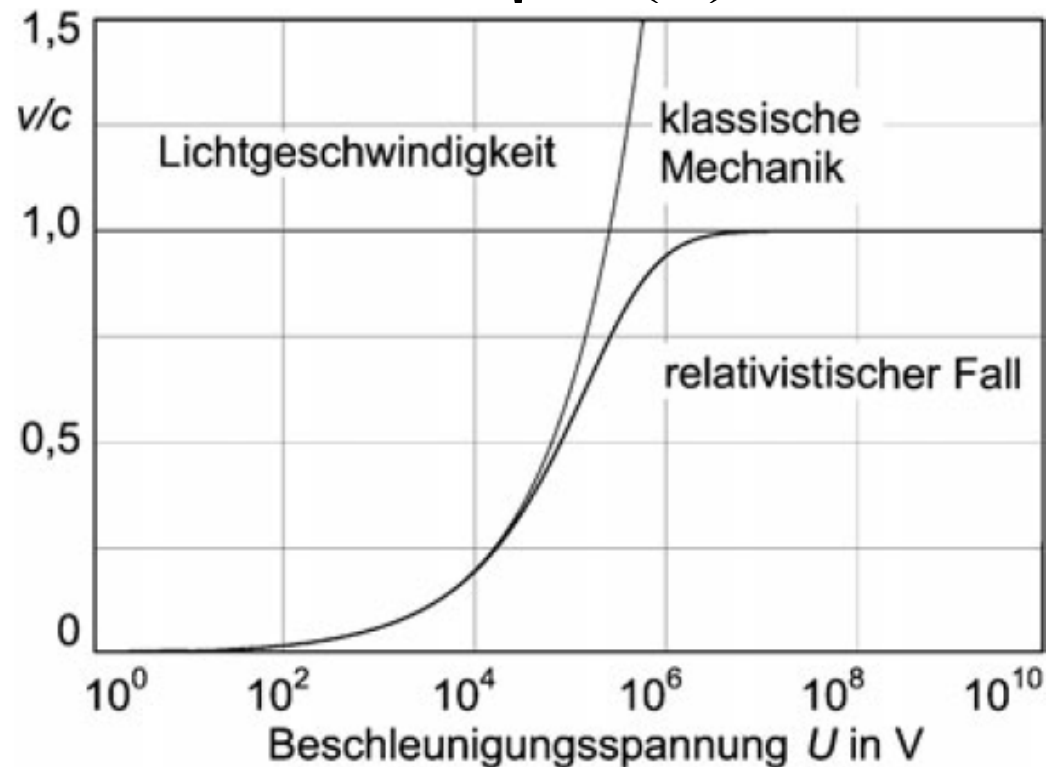
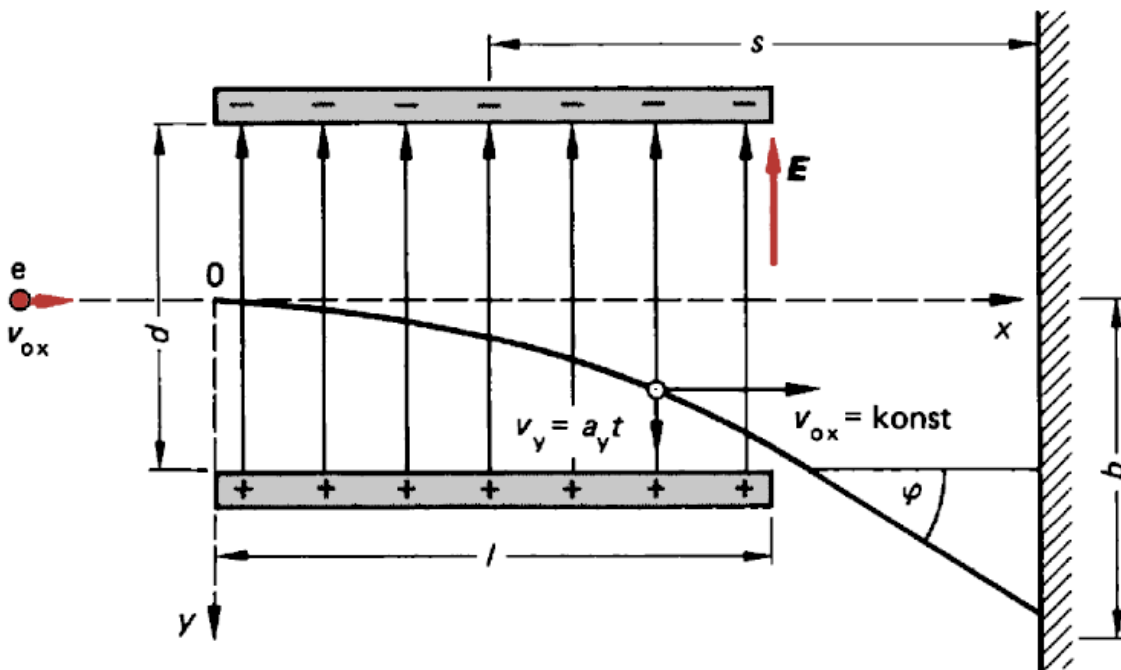


Abb. 4.57 Elektronengeschwindigkeit v normiert auf die Lichtgeschwindigkeit c in Abhängigkeit von der

Bewegung eines geladenen Teilchens quer zum elektrischen Feld:

für homogenes Feld (z.B.: in einem Plattenkondensator)

Analog zum horizontalen Wurf im Schwerfeld:



Horizontal: gleichförmige Bewegung mit $v_x = \text{const}$

Vertikal: gleichförmig beschleunigte Bewegung mit $a_y = \text{const}$

Beispiel: Unter welchem Winkel verlässt das Elektron den Kondensator?

Abb. 4.58 Flugbahn eines Elektrons im homogenen elektrischen Querfeld (v_{0x} , d , l und U gegeben)

aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Bewegung eines geladenen Teilchens parallel zum homogenen elektrischen Feld:

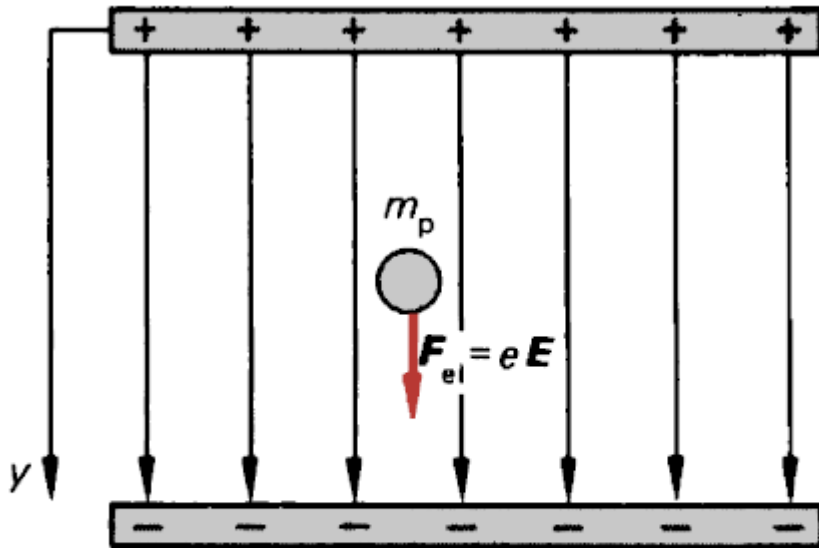


Abb. 4.59 Bewegung eines geladenen Teilchens parallel zum elektrischen Feld

aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

analog zum freien Fall mit:

$$a = \frac{Q}{m} E$$

a ... Beschleunigung

Q ... Ladung

m ... Masse

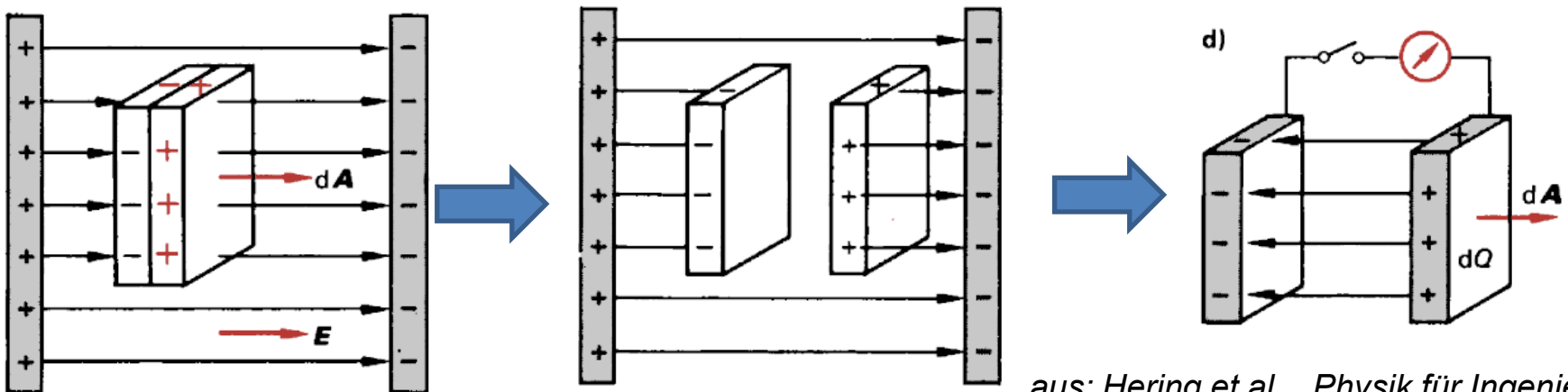
E ... elektrische Feldstärke

4.3.6 Elektrischer Leiter im elektrischen Feld

Influenz: Frei bewegliche Elektronen werden im elektrischen Leiter als Folge des elektrischen Feldes verschoben.

- ➔
- Das Leiterinnere ist feldfrei.
 - Zusätzlich aufgebrachte Ladungen sitzen an der Oberfläche.
 - Diese haben alle das gleiche Potential.

Gedankenexperiment: metallisches Doppelplättchen im homogenen Feld



aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Flächenladungsdichte, σ :

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$$

Ladung pro Fläche

σ auf Influenzplättchen genauso groß wie auf Kondensatorplatten
Dabei gilt: $\sigma = \varepsilon_0 E$

Elektrische Verschiebungsdichte oder **Flussdichte** (im Vakuum):

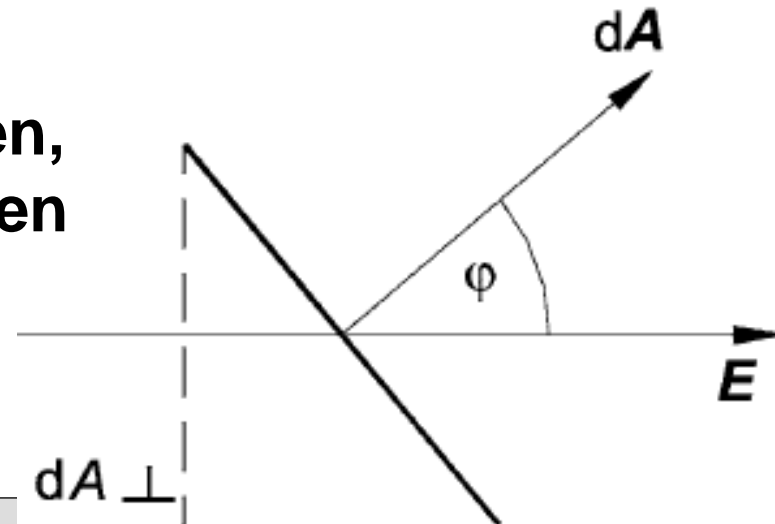
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad [D] = 1 \text{ C/m}^2$$

Zahlenwert gleich influenzierten
Flächenladungsdichte

Elektrischer Fluss, Ψ :

Maß für die Gesamtzahl der Feldlinien,
die eine Fläche senkrecht durchsetzen

$$D = \frac{d\Psi}{dA_{\perp}}$$

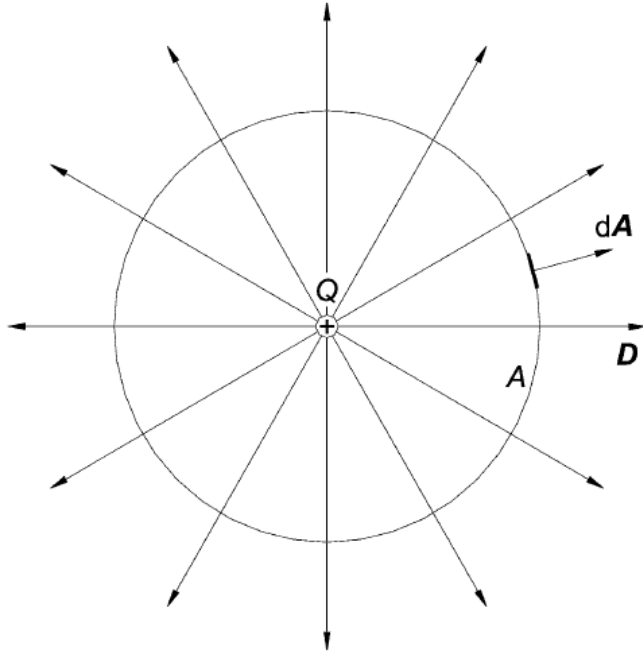


$$\Psi = \int_A \vec{D} d\vec{A} = \varepsilon_0 \int_A \vec{E} d\vec{A}$$

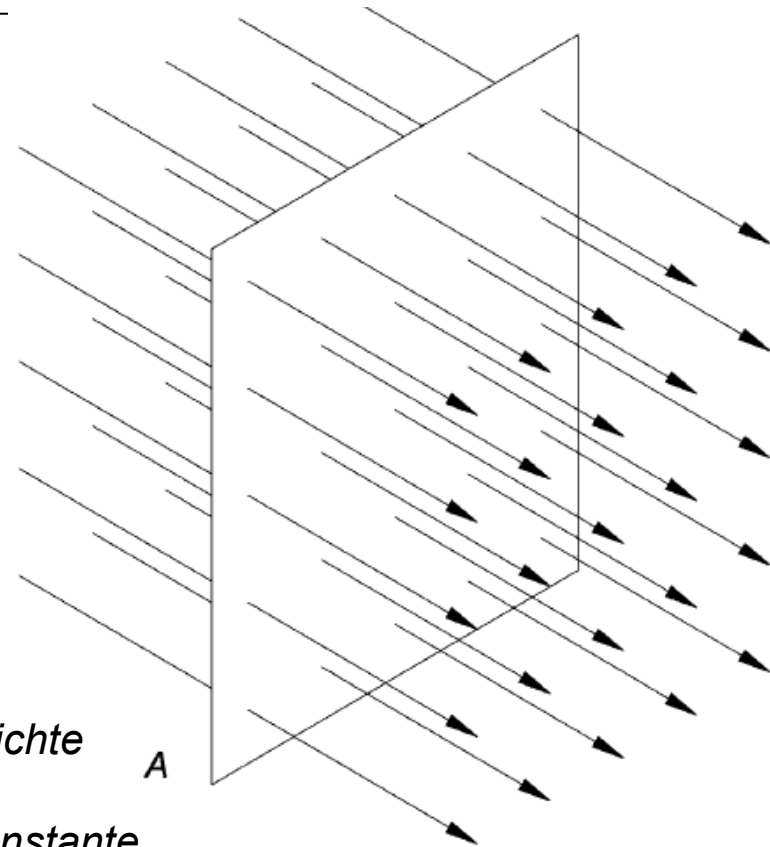
$d\vec{A}$ steht senkrecht auf die Fläche.

Homogenes Feld:

$$\Psi = DA$$



Ψ ... elektrischer Fluss
 D ... elektrische Flussdichte
 A ... Fläche
 ε_0 ... elektrische Feldkonstante
 E ... elektrische Feldstärke



Beispiel: Berechne den Fluss durch eine Kugeloberfläche mit dem Radius R in deren Zentrum eine Ladung Q sitzt.

$\Psi = Q$ gilt auch für jede andere geschlossene Fläche !

Allgemein gilt für n Ladungen Q_i der **Gauß'sche Satz**:

$$\Psi = \oint \vec{D} d\vec{A} = \sum_{i=1}^n Q_i$$

Der durch eine (beliebig geformte) geschlossene Fläche tretende elektrische Fluss entspricht der Summe der eingeschlossenen Ladungen.

Beispiel: Berechne für den Idealfall des Plattenkondensators mit großen Platten und kleinem Plattenabstand die Feldstärke des im Inneren vorliegenden homogenen Feldes.

Kondensator und Kapazität:

= zwei gegeneinander isolierte entgegengesetzt geladene Leiteroberflächen zwischen denen eine Potentialdifferenz $\Delta\phi$ bzw. eine Spannung U herrscht.

- Speicher elektrische Ladung, Q
- Zahlreiche weitere Anwendungen in der Elektrotechnik

Kapazität eines Kondensators, C :

Maß für pro Spannung gespeicherte Ladung

$$C = \frac{Q}{U}$$

$[C] = 1 \text{ As/V} = 1 \text{ Farad (1F)}$

Typische Kapazitäten: μF , nF , pF

Kapazität eines Plattenkondensators

- Zwei parallele Platten der Fläche A im Abstand d .
- Homogenes Feld: E zwischen den Platten konstant

Es gilt:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \text{ und } U = Ed$$



$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

E ... elektrische Feldstärke
 Q ... Ladung
 A ... Fläche
 U ... Spannung
 d ... Plattenabstand

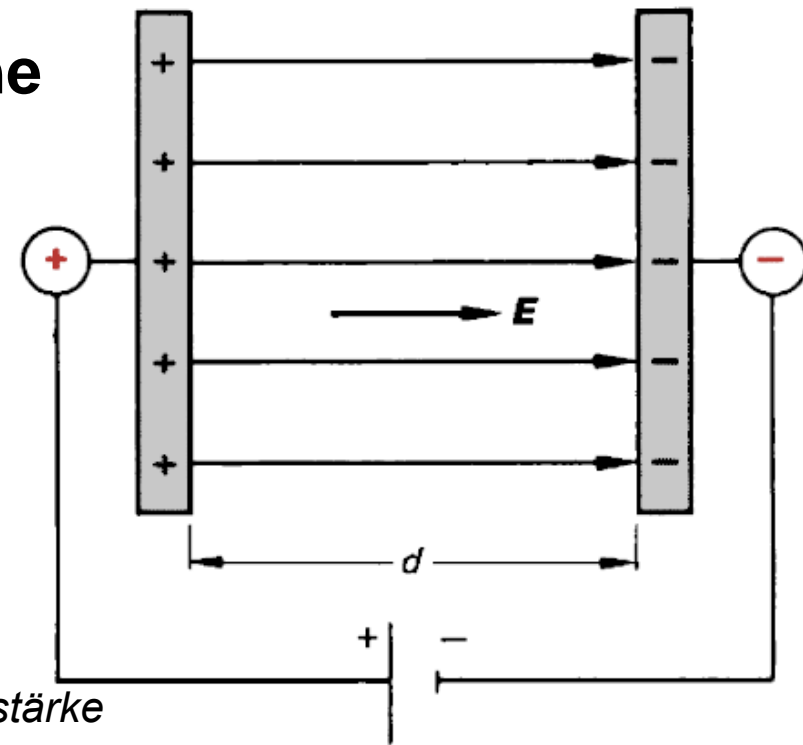
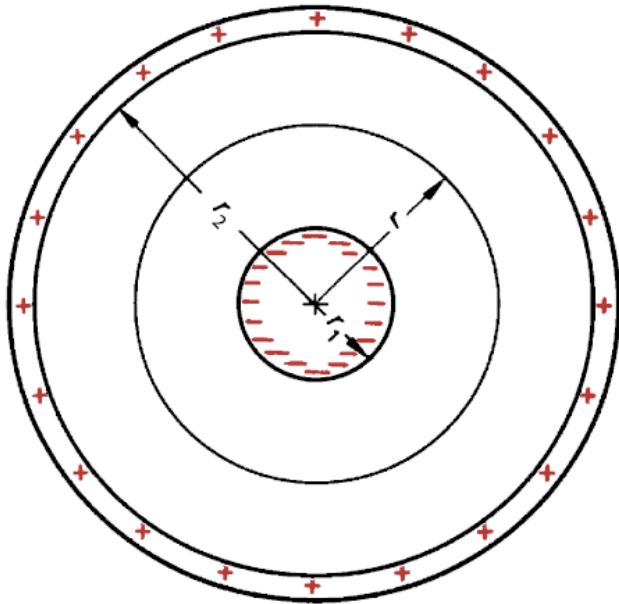


Abb. 4.72 Plattenkondensator

- Vergrößerung von A : Aufwickeln von Metallfolie, Aufrauen der Oberfläche in Elektrolytkondensatoren
- Verkleinerung von d : dünne Kunststoffe, Oxidschichten

Für Medium zwischen Platten: $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$



Beispiel: Berechnen Sie die Kapazität eines Zylinderkondensators

aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

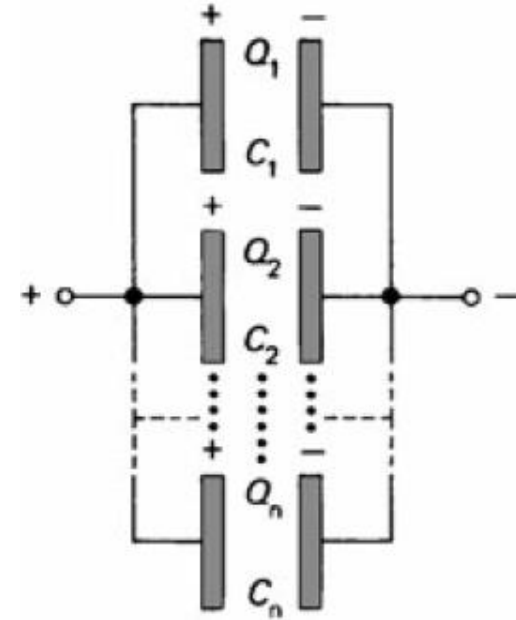
Abb. 4.75 Querschnitt eines Zylinderkondensators

Schaltung von Kondensatoren:

Parallelschaltung:

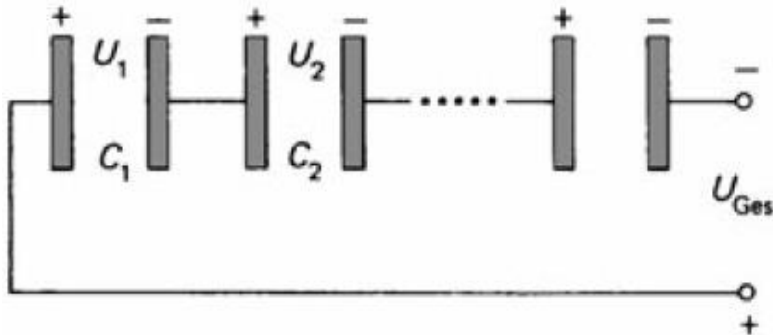
$$U = \text{konst.}; Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$$

$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n$$



Serienschaltung:

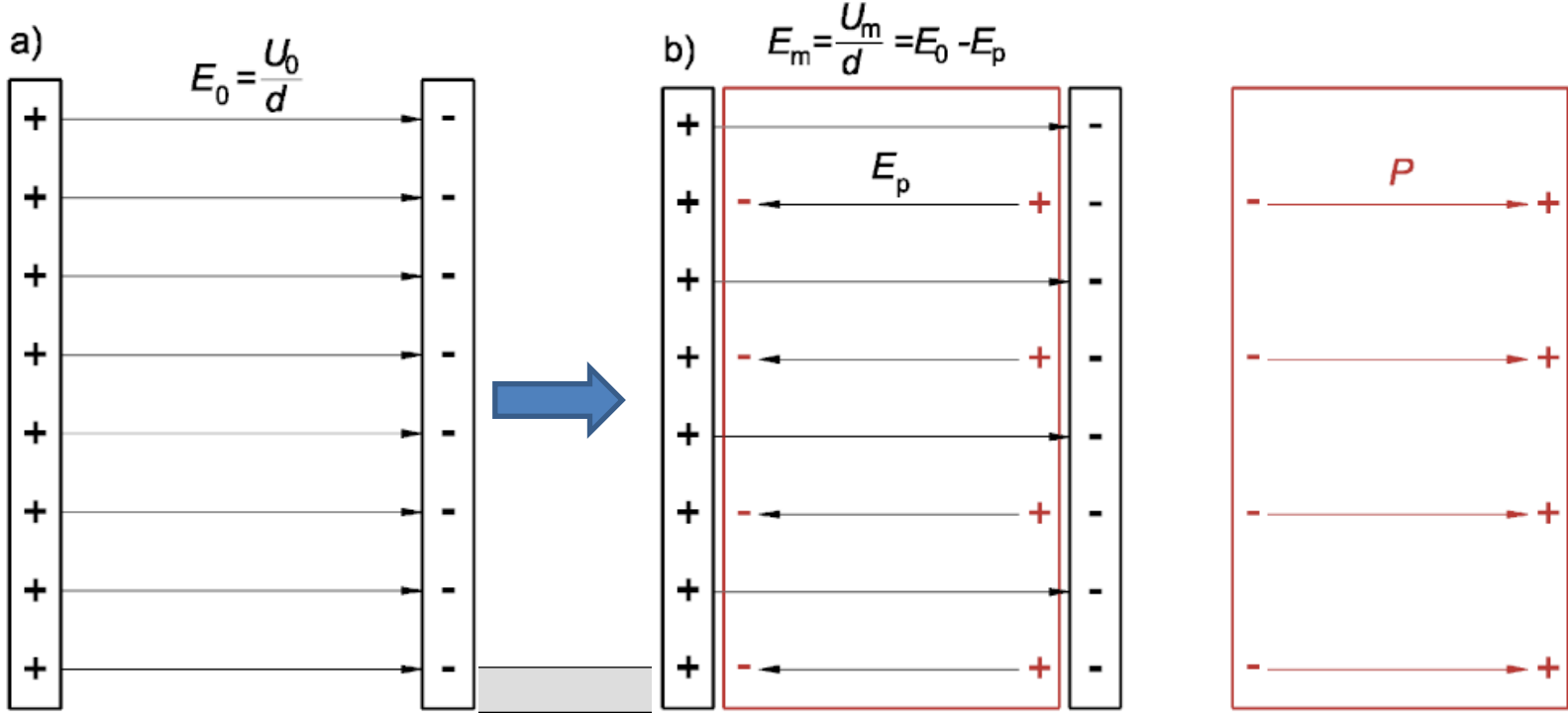
$$U_{\text{ges}} = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n; Q = \text{konst.}$$



$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

4.3.7 Nichtleiter im elektrischen Feld (Dielektrika), elektrische Polarisierung

- Das Innere eines Dielektrikums ist nicht feldfrei !
- Ladungen im Isolator verschieben sich geringfügig, sodass im Dielektrikum ein Gegenfeld entsteht.
- → Feld im Medium, E_m , kleiner als im Vakuum.



➤ **Feld und Spannung sinken (bei gleichem Q);**

➤ **die Kapazität steigt.**

$$\boxed{\frac{E_0}{E_m} = \frac{U_0}{U_m} = \frac{C_m}{C_0} = \varepsilon_r}$$

$E_{0(m)}$... Feld mit (ohne) Dielektrikum

$U_{0(m)}$... Spannung mit (ohne) Dielektrikum

$C_{0(m)}$... Kapazität mit (ohne) Dielektrikum

$D_{0(m)}$... Verschiebungsdichte mit (ohne) Dielektrikum

ε_r ... **relative Dielektrizitätszahl**

Das elektrische Feld wird um das Polarisationsfeld, E_p , geschwächt !

$$\vec{E}_m = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r} = \vec{E}_0 - \vec{E}_p$$

Bei gleichbleibender Spannung fließen so viele Ladungen auf die Kondensatorplatten nach, dass das Polarisationsfeld kompensiert wird → **D steigt um die elektrische Polarisation, P!**

$$\vec{D}_{m'} = \vec{D}_0 + \vec{P} = \varepsilon_r \vec{D}_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_{m'}$$

Allgemein für konstante Ladung (i.e. gleichbleibende „Quellen des Feldes“):

Vakuum \rightarrow Dielektrikum

In allen Gleichungen für elektrische Felder: $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$

Elektrische Suszeptibilität, χ_e :

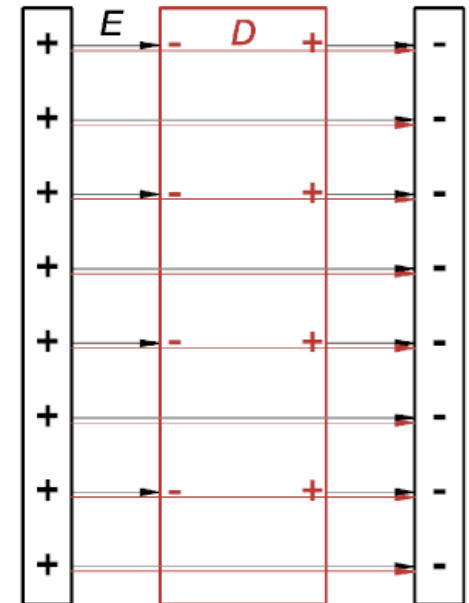
$$\chi_e = \epsilon_r - 1$$

Und somit: $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_m$

Feldlinien senkrecht zur Oberfläche eines Dielektrikums:

- E verändert sich sprunghaft.
- D bleibt unverändert.

Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“



Elektrische Feldstärke und elektrische Verschiebungsdichte an Grenzflächen

elektrische Feldstärke \mathbf{E}	Verschiebungsdichte \mathbf{D}
Stetigkeit der Tangentialkomponente <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; display: inline-block;"> $E_1^t = E_2^t$ oder $\frac{D_1^t}{\epsilon_1} = \frac{D_2^t}{\epsilon_2}$ </div> (4.160) (da $\mathbf{E} \, d\mathbf{s} = 0$)	Stetigkeit der Normalkomponente <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; display: inline-block;"> $D_1^n = D_2^n$ $\epsilon_1 E_1^n = \epsilon_2 E_2^n$ </div> (4.161)
Sprung in der Normalkomponente	Sprung in der Tangentialkomponente

Für $\epsilon_{r2} > \epsilon_{r1}$:

Brechung der Feldlinien vom Lot weg

4.3.8 Energieinhalt des elektrischen Feldes

W_{el} ... elektrische Arbeit, die nötig ist, um einen Kondensator der Kapazität C auf die Spannung U zu laden

– Unabhängig von Form des Kondensators und Feldverteilung !

➤ W_{el} = Energieinhalt des elektrischen Feldes

$$W_{el} = \int_0^Q U(Q') dQ'$$

Integrand: Arbeit die nötig ist, um die Ladung dQ von einer der Kondensatorplatten zur anderen zu Verschieben

Integral: Arbeit zum „sukzessiven“ Aufbau des Feldes

mit $U(Q) = \frac{Q}{C}$



$$W_{el} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2$$

Spezialfall - Plattenkondensator:

$$W_{el} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r A d E^2$$

Energiedichte:

$$w_{el} = \frac{W_{el}}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}$$

- **w_{el} ist nur von der lokalen Feldstärke abhängig**
- **→ obiger Zusammenhang für die Energiedichte gilt unabhängig von der Form des Feldes (i.e., nicht nur für den Plattenkondensator)**

4.4 Magnetisches Feld

4.4.1 Beschreibung des magnetischen Feldes

Empirischer Befund:

- **Stromdurchflossene Leiter** und **magnetische Materialien** üben aufeinander Kräfte aus
- Diese Kräfte wirken im gesamten Raum
- Vermessung dieses **Vektorfeldes** mit „kleinem“ Probemagneten oder „kleinem“ stromdurchflossenen Leiter

Das magnetische Feld beschreibt die Wirkungslinien der magnetischen Kräfte in Betrag, Richtung und Orientierung

Magnete:

- Ein Magnet hat einen **Nord-** und einen **Südpol**.
- **Gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an.**
- Außerhalb des Magneten verlaufen die Feldlinien **vom Nord- zum Südpol**

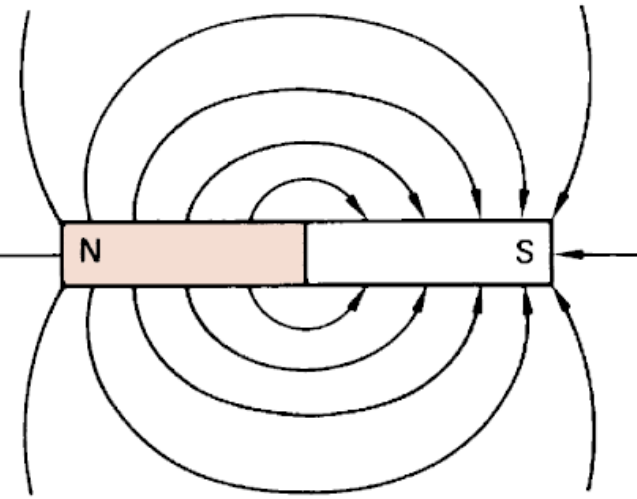


Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Magnetische Feldlinien:

- Tangente auf Feldlinien beschreibt **Kraftrichtung**
- **Dichte der Feldlinien** ist Maß für die Kraftwirkung
- Feldlinien schneiden sich nicht
- ❖ Es gibt **keine magnetischen Monopole**
- ❖ Magnetische Feldlinien sind **in sich geschlossen** (keinen Anfang und kein Ende)

Magnetfeld der Erde

Magnetischer Südpol (74° nördliche Breite, 100° westliche Länge) in der Nähe des geographischen Nordpols und umgekehrt

Deklination: Abweichung des Erdmagnetfeldes von geographischer N-S Richtung (bei uns $\sim 2^\circ$)

Inklination: Neigung des Erdmagnetfeldes relativ zur Oberfläche (Äquator: 0° ; Pol: 90°)

Magnetfeld der Erde wandert geringfügig !

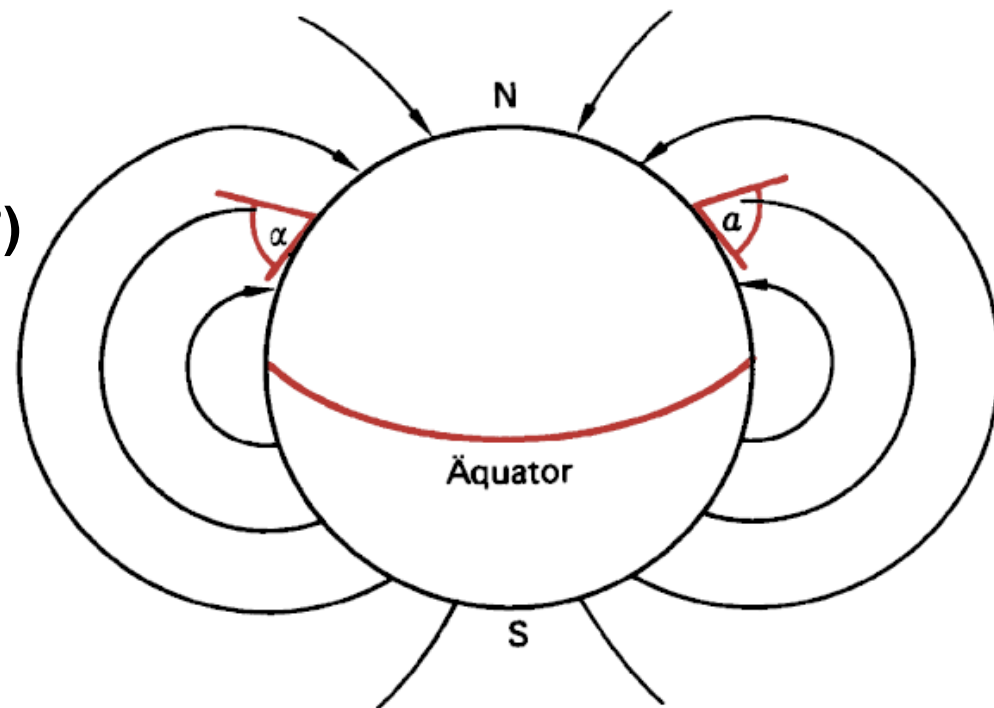
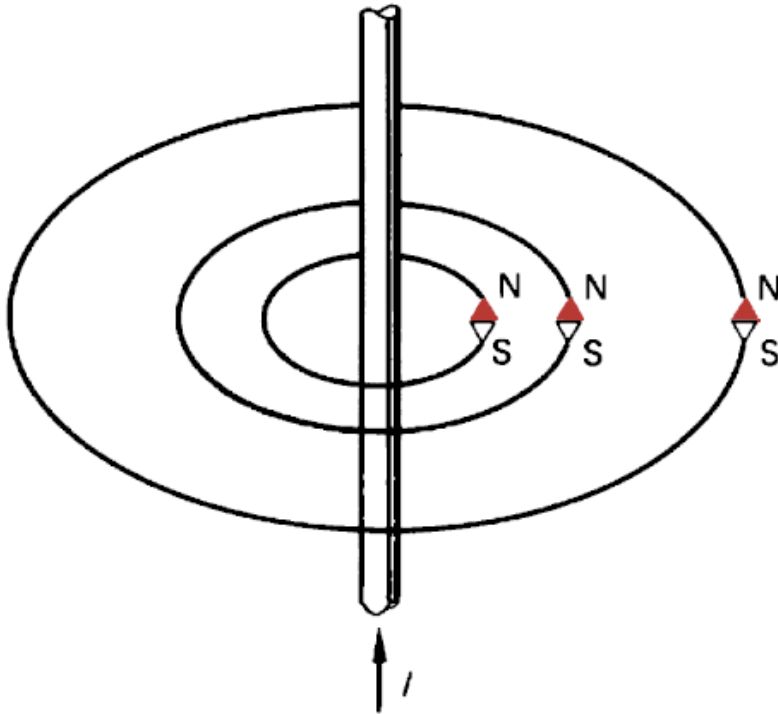


Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

4.4.2 Magnetische Feldstärke und Durchflutungsgesetz

Stromdurchflossener gerader Leiter:



- **Feldlinien:** Geschlossene konzentrische Kreise in Ebene senkrecht auf Stromrichtung;
- **Orientierung:** Daumen in Richtung des Stromflusses → gekrümmte Finger der rechten Hand weisen in Feldrichtung

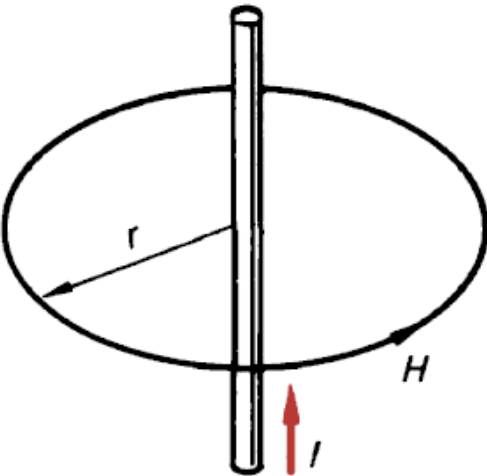
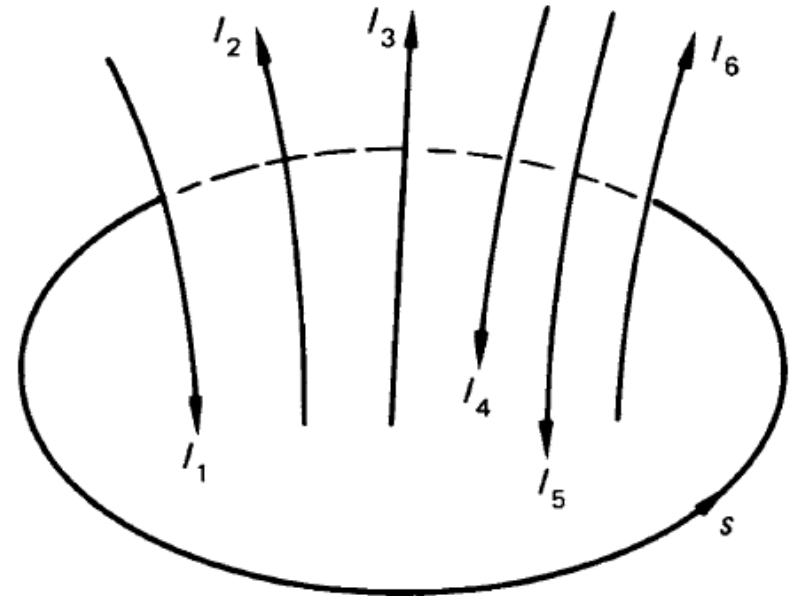
*Abb. aus: Hering et al.,
„Physik für Ingenieure“*

Magnetische Feldstärke, H [A/m]

Amper'sches Gesetz (Durchflutungsgesetz):

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \int_A \vec{j} d\vec{A} = \sum_{i=1}^n I_i$$

Integral der magnetischen Feldstärke
H längs einer geschlossenen
Umlauflinie = gesamter durch Fläche
fließender Strom, I



H für geraden, stromdurchflossenen
Leiter:

$$H 2\pi r = I \quad \longrightarrow$$

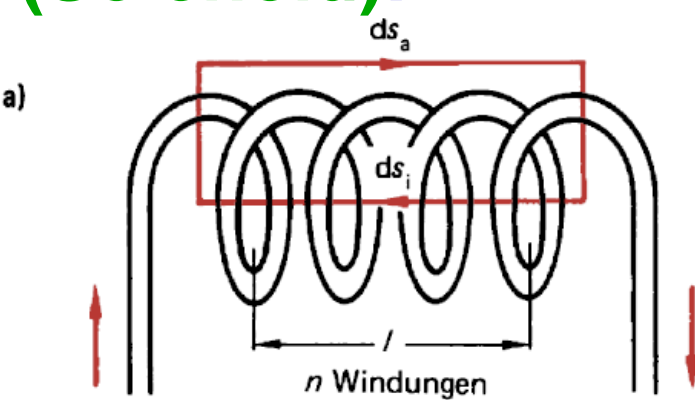
$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

H ... magnetische Feldstärke
I ... Stromstärke
r ... Abstand

H nimmt mit 1/r ab.

Abb. 4.90 Magnetische Feldstärke H um einen
einzelnen geradlinigen stromdurchflossenen Leiter

Magnetische Feldstärke einer langen Zylinderspule (Solenoid):

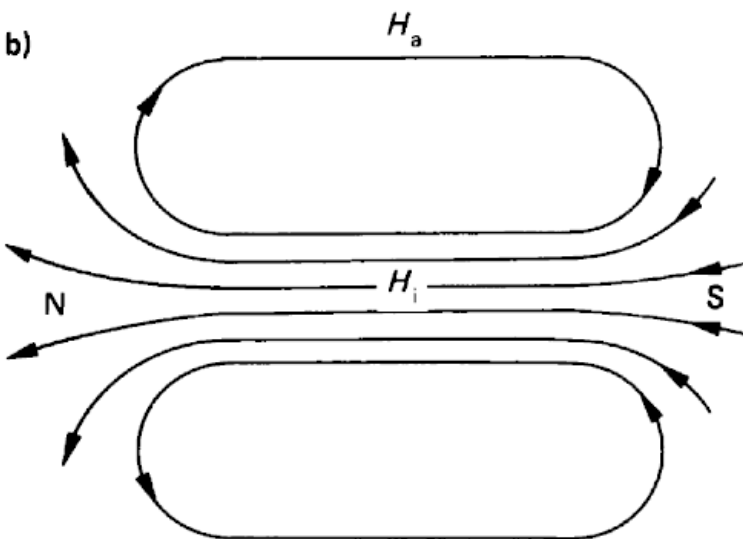


$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \int \vec{H}_i d\vec{s}_i + \int \vec{H}_a d\vec{s}_a = N I$$

mit $H_i = \text{konst.} = H$

und $H_a \ll H_i$

$$\oint \vec{H} d\vec{s} \approx \vec{H} \int d\vec{s}_i = N I$$



$$H = \frac{N I}{l}$$

H ... magn. Feldstärke
 N ... Wicklungszahl
 I ... Stromstärke (Zähler)
 l ... Länge (Nenner)

Zeigen die Finger der rechten Hand in die Stromrichtung, dann zeigt der Daumen zum Nordpol.

Abb. 4.91 Magnetische Feldlinien in einer Zylinderspule (Solenoid)

Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Verallgemeinerung: Magnetische Feldstärke stromdurchflossener Leiter beliebiger Geometrie

Biot-Savart'sches Gesetz

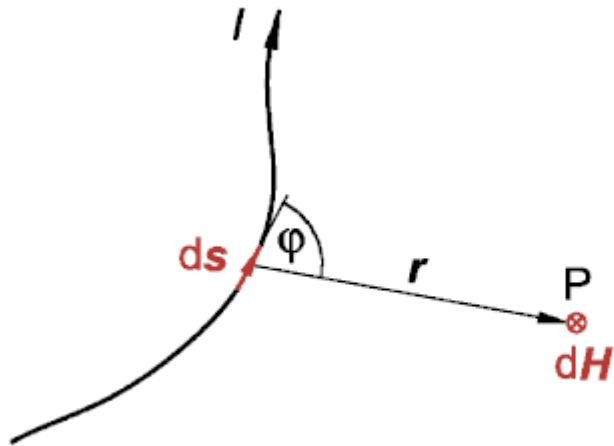
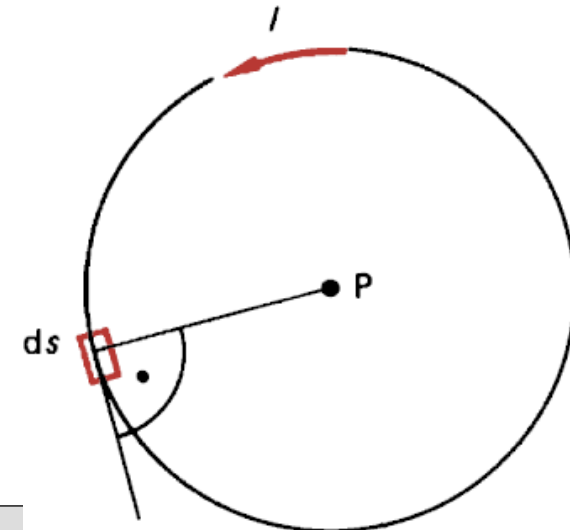


Abb. 4.93 Zum Biot-Savart'schen Gesetz

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$dH = \frac{I ds}{4\pi r^2} \sin \varphi$$

*Beispiel: Berechne die magnetische Feldstärke H
im Mittelpunkt eines kreisförmig fließenden
Stroms ($I = 10 \text{ A}$, $r = 10 \text{ cm}$)*



4.4.3 Magnetische Flussdichte und Kraftwirkungen im Magnetfeld

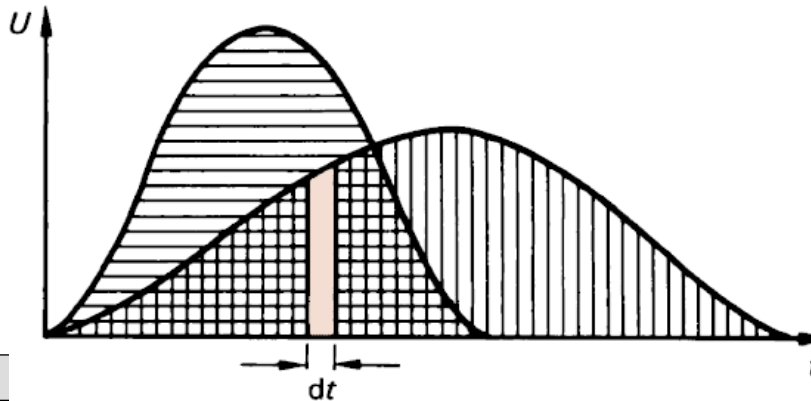
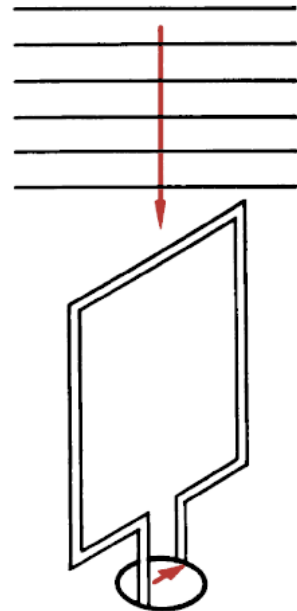
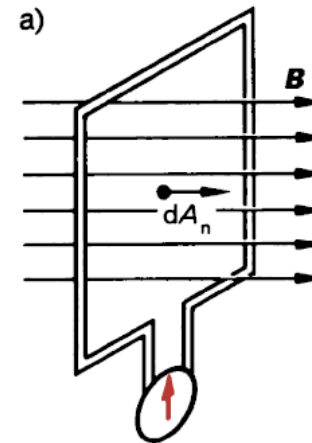
Magnetischer Fluss, Φ : $[\Phi] = \text{Vs} = \text{Wb (Weber)}$

Ergibt sich aus Anzahl der Feldlinien.

Spannungsstoß:

- Tritt auf, wenn man eine Leiterschleife aus einem Magnetfeld zieht.
- Größe des Spannungsstoßes durch Änderung von Φ durch die Leiterschleife gegeben.

$$\int U dt = \Delta\Phi$$



Sinnvoll, eine weitere - das Magnetfeld beschreibende – Größe zu definieren:

Magnetische Flussdichte, magnetische Induktion, B :

= magnetischer Fluss, Φ , pro Flächeneinheit senkrecht zu den Feldlinien, A_{\perp}

$$B = \frac{d\Phi}{dA_{\perp}}$$

bzw.

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{A} = \int B \cos \varphi dA$$

φ ... Winkel zwischen B und Flächennormalen

$$[B] = \text{Vs/m}^2 \\ = \text{T (Tesla)}$$

Im Vakuum gilt:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

μ_0 ... magnetische Feldkonstante

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$$

Kraft auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld:

Experimentell ergibt sich für den Kraftbeitrag des Leiterelements ds :

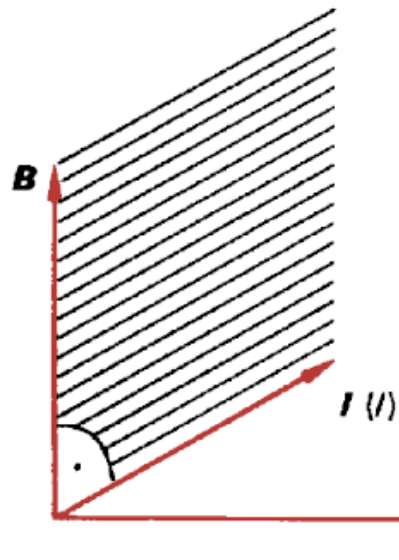
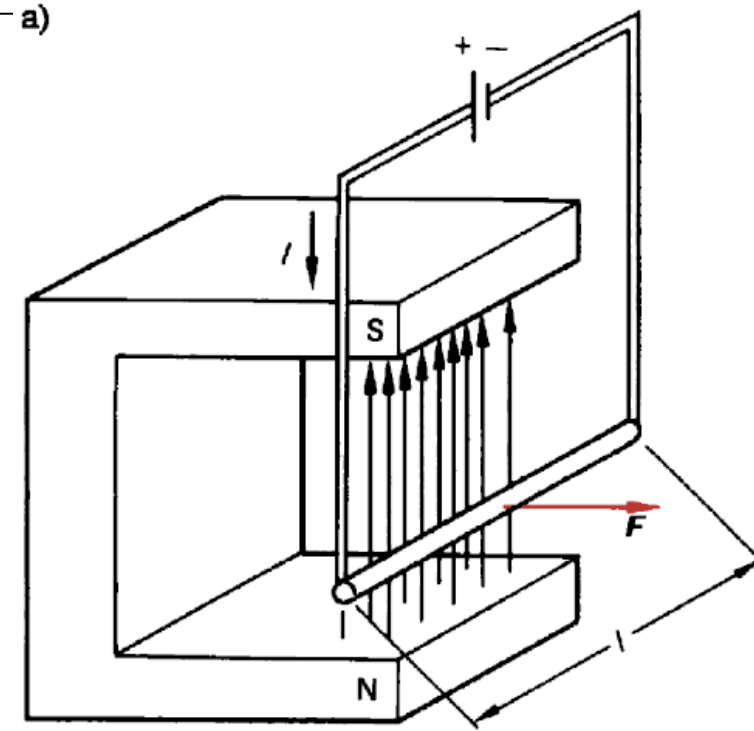
$$d\vec{F} = I(d\vec{s} \times \vec{B})$$

Für ein homogenes Magnetfeld gilt:

$$\underline{\vec{F}} = I \int_0^l (d\vec{s} \times \vec{B}) = -I \int_0^l (\vec{B} \times d\vec{s}) = -I \vec{B} \times \int_0^l d\vec{s} = \underline{I \vec{l} \times \vec{B}}$$

$$F = I l B \sin \varphi$$

senkrecht auf von I und B aufgespannte Ebene



F ... Kraft auf Leiter

I ... Stromstärke

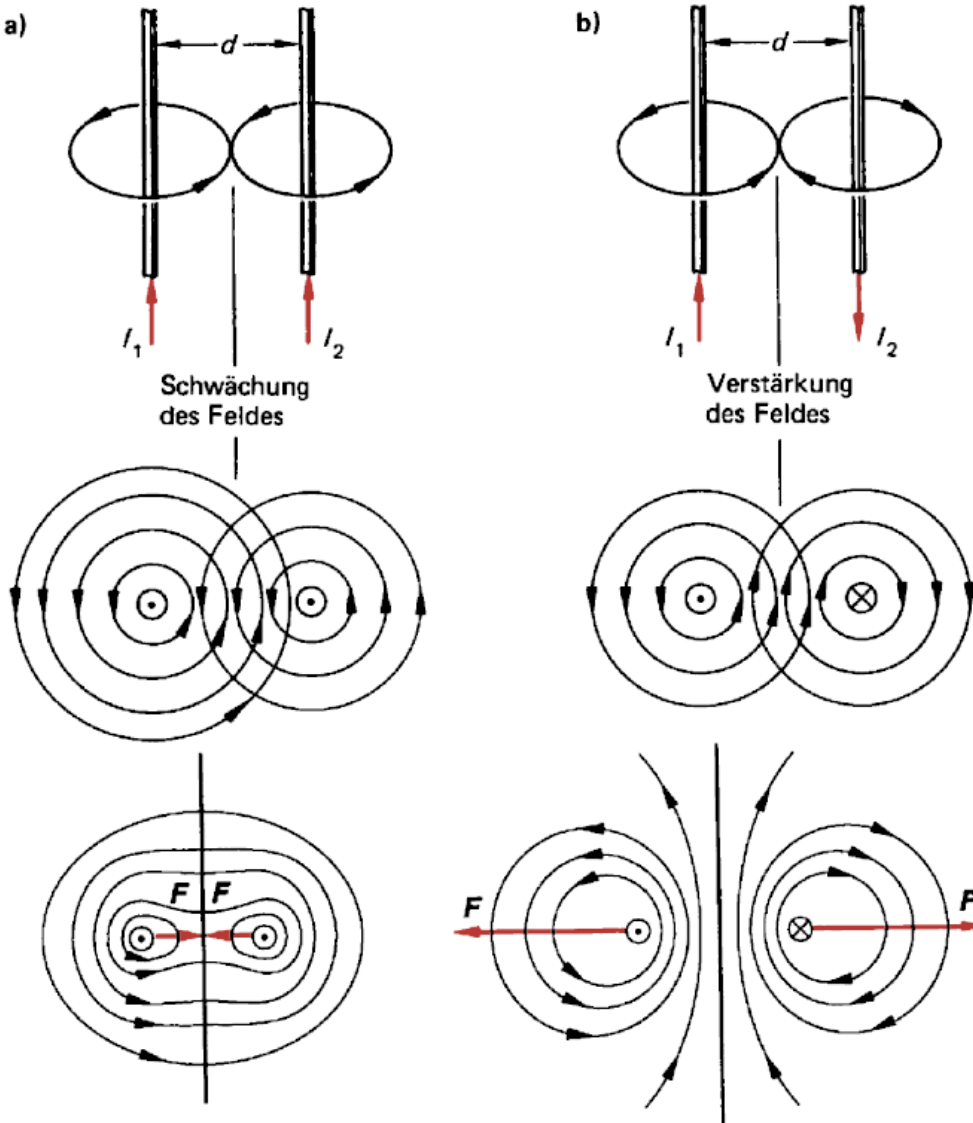
ds ... infinitesimales Wegstück

B ... magnetische Flussdichte

l ... Länge des Leiters

φ ... Winkel zwischen Stromrichtung und Flussdichte

Kraft zwischen parallelen stromdurchflossenen Leitern



Induktion durch I_2 am Ort des ersten Leiters

$$B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi d}$$

Kraft aufgrund von B_2 auf den ersten Leiter

$$F_{12} = I_1 l B_2$$

Kraft zwischen Leitern, F_{12} :

$$F_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 I_2 l$$

μ_0 ... magnet. Feldkonstante

I_1, I_2 ... Ströme

l ... Länge der Leiter

d ... Abstand zwischen den Leitern

Abb. 4.102 Kraft zwischen zwei parallelen stromdurchflossenen Leitern

Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Kraft auf bewegten Ladungsträger im Magnetfeld (Lorentz Kraft)

$$d\vec{F} = I(d\vec{s} \times \vec{B}) = I dt(\vec{v} \times \vec{B}) = dQ(\vec{v} \times \vec{B})$$

Für einzelnen Ladungsträger ($dQ \sim Q$): $\boxed{\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B})}$

Kraft auf ein Elektron ($Q = -e$)

$$\boxed{\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B})}$$

F ... Kraft auf bewegte Ladung
 Q ... Ladung
 v ... Geschwindigkeit der Ladung
 B ... magnet. Flussdichte

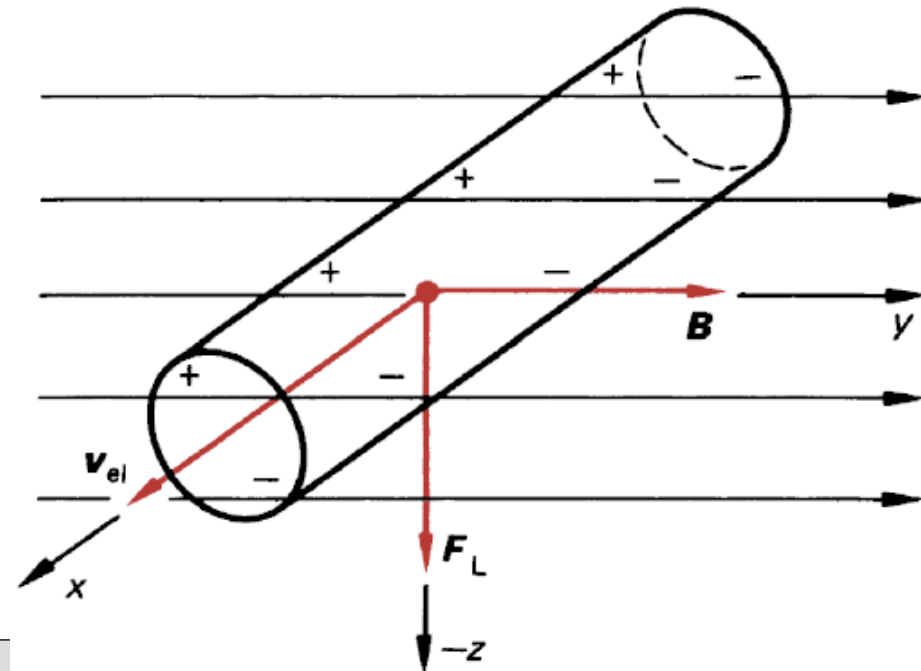


Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Stromdurchflossenes Plättchen im Magnetfeld:

Hall Effekt Ladungsträger durch Lorenzkraft abgelenkt → einseitige Ladungsträgerakkumulation → elektrisches Feld → elektrische Kraft → Kräftegleichgewicht

für Elektronen: $-eE_y = -\frac{eU_y}{b} = -ev_x B_z$

Stromdichte: $j_x = -nev_x$

Hallspannung $U_H (=U_y)$:

$$U_H = \pm \frac{1}{ne} j_x B_z b$$

$\begin{matrix} - : \text{Elektronen} \\ + : \text{Löcher} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} U_H \text{ geeignet zur} \\ \text{Bestimmung der} \\ \text{„Ladungsträgerart“} \end{array} \right.$

Hallsonden zur Messung von B

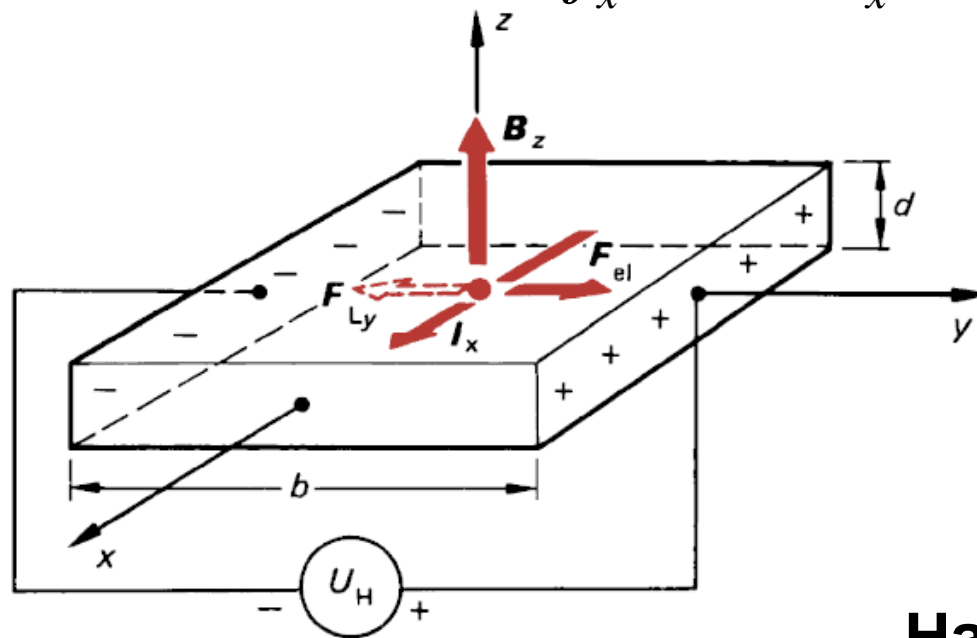


Abb. 4.104 Hall-Effekt (negative Ladungsträger)

Bewegung freier Elektronen im Magnetfeld:

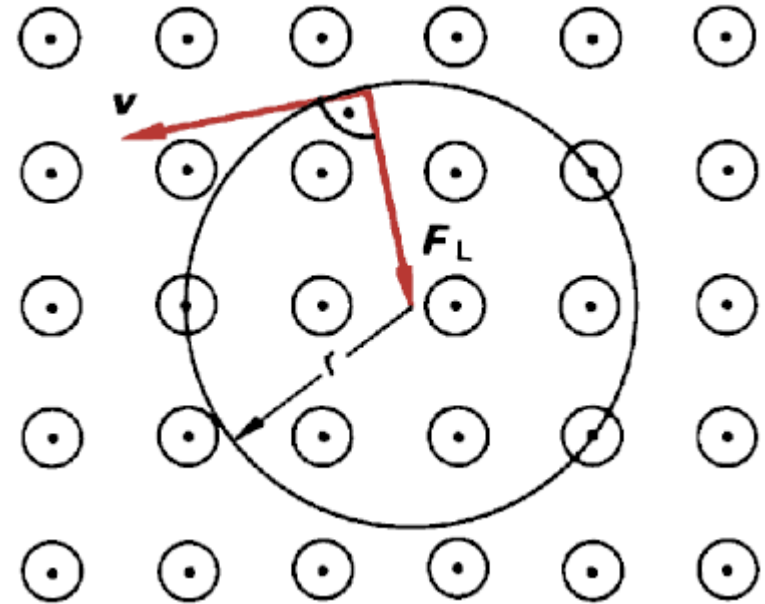
Bewegung senkrecht zu B :

Kreisbahn: Fliehkraft durch Lorentzkraft kompensiert

$$m \frac{v^2}{r} = Q v B$$

m ... Masse
 v ... geschwindigkeit
 r ... Bahnradius
 Q ... Ladung
 B ... magnet. Flussdichte
 E ... elektr. Feldstärke

Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“



Bewegung schräg zu B : Schraubenbahn

Kraftwirkung im elektrischen und magnetischen Feld:

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Korrespondenz zwischen elektrischem und magnetischen Feld:

$$\vec{E} \Leftrightarrow \vec{B}; \quad \vec{D} \Leftrightarrow \vec{H}$$

4.4.4 Materie im Magnetfeld

Materie im Magnetfeld ändert die magnetische Flussdichte, B

$$\vec{B}_m = \mu_r \vec{B}_0 = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

μ_r ... **Permeabilitätszahl**

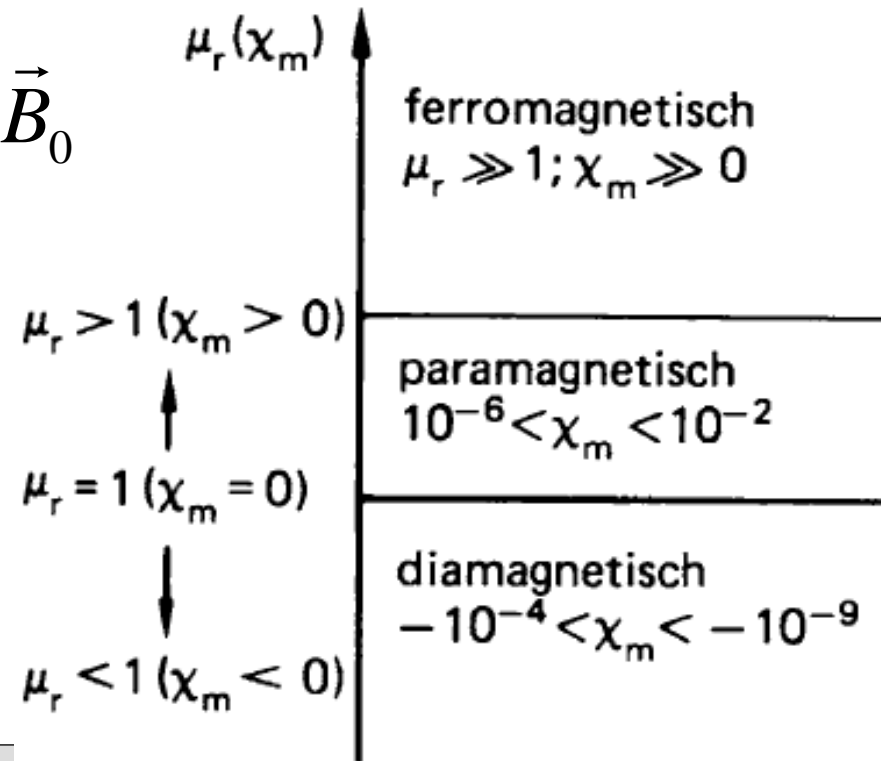
Magnetische Polarisation, J :

$$\vec{J} = \vec{B}_M - \vec{B}_0 = (\mu_r - 1) \vec{B}_0 = \chi_m \vec{B}_0$$

χ_m ... **magnetische Suszeptibilität**

Magnetisierung, M :

$$\vec{M} = \frac{\vec{J}}{\mu_0} = \chi_m \vec{H}$$

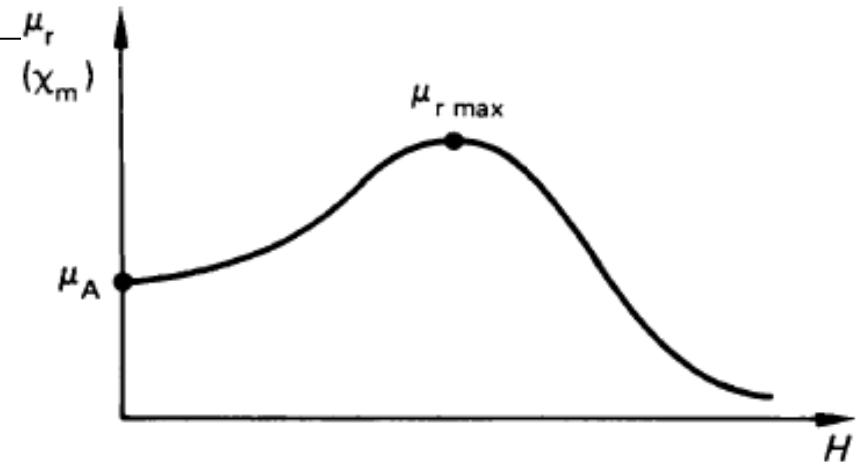


Ferromagnetismus:

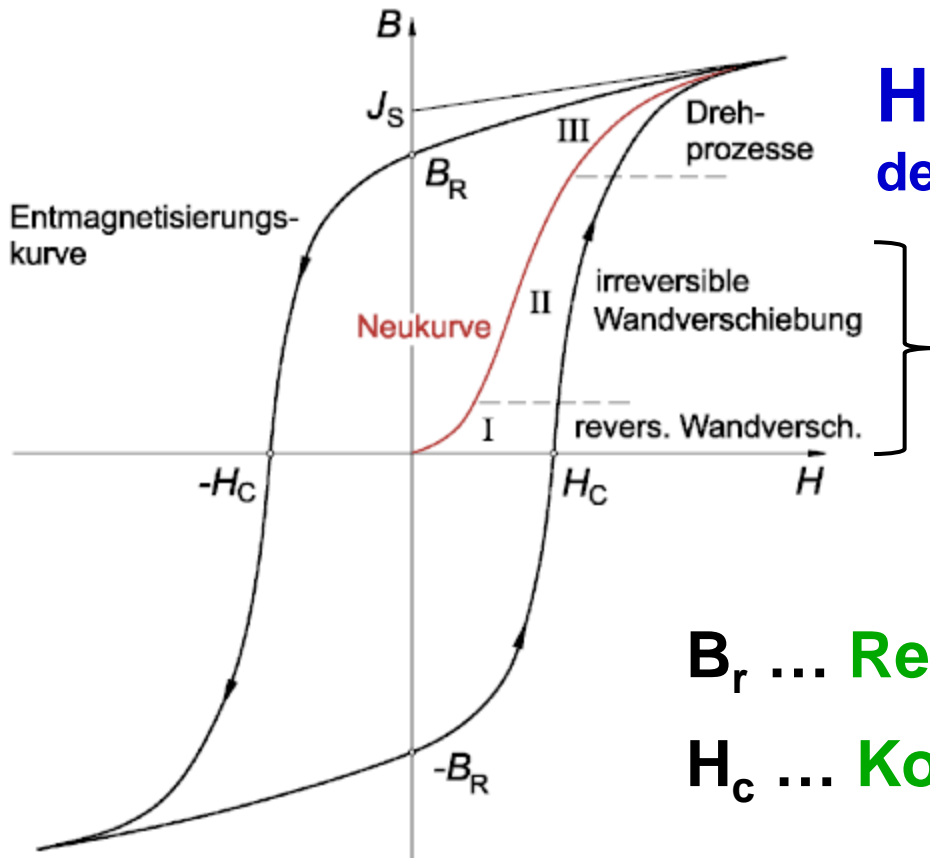
kollektiver Effekt

- **Magnetische Momente von Übergangsmetallatomen** (aufgrund unkompensierter Spins und Bahndrehimpulse) **koppeln** (über Austauschwechselwirkung)
- → Kristallbereiche gleicher Magnetisierung ($10\text{ }\mu\text{m}$ bis 1mm) = **Weiss'sche Bezirke**
- Ohne Feld: Magnetisierung der Weiss'schen Bezirke statistisch verteilt.
- Im Magnetfeld: zunehmend **Ausrichtung der Magnetisierung der Weiss'schen Bezirke**
- Oberhalb der **Curie Temperatur** verschwindet das ferromagnetische Verhalten

- **Nichtlineare Abhängigkeit von μ_r von H**
- **Von Vorbehandlung des Werkstoffes abhängig**



Hysteresekurve (für Abhängigkeit der Flussdichte von der Feldstärke):



Weiss'sche Bezirke mit „passender“ Ausrichtung der Momente wachsen auf Kosten der anderen

B_r ... Remanenzflussdichte (Remanenz)

H_c ... Koerzitivfeldstärke

Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

4.5 Instationäre Felder

4.5.1 Elektromagnetische Induktion

Schon diskutiert: Spannungsstoß beim Entfernen einer Leiterschleife aus dem magnetischen Feld.

$$\int U dt = \Delta \Phi$$

Allgemein gilt das **Induktionsgesetz**:

$$u_{ind}(t) = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

u_{ind} ... in Leiterschleife induzierte Spannung
 N ... Windungszahl
 $d\Phi/dt$... zeitliche Änderung des magnetischen Flusses

Lenz'sche Regel: In einem geschlossenen Stromkreis fließt dann ein Strom, der der Ursache der Flussänderung entgegenwirkt

mit: $\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A} = BA_n$ $A_n \dots$ Fläche normal auf Fluss
 $B \dots$ Flussdichte

für homogenes Feld

$$u_{ind}(t) = -N \left(\frac{dB}{dt} A_n + \frac{dA_n}{dt} B \right)$$

A_n konstant: **Transformatorprinzip**

B konstant: **Generatorprinzip**

Induktionsgesetz: Zusammenhang zwischen elektrischem Feld und zeitlich sich änderndem Magnetfeld

Induktionsvorgänge

Änderung des Erregerstroms in Feldspule (Induktion durch Änderung von B)

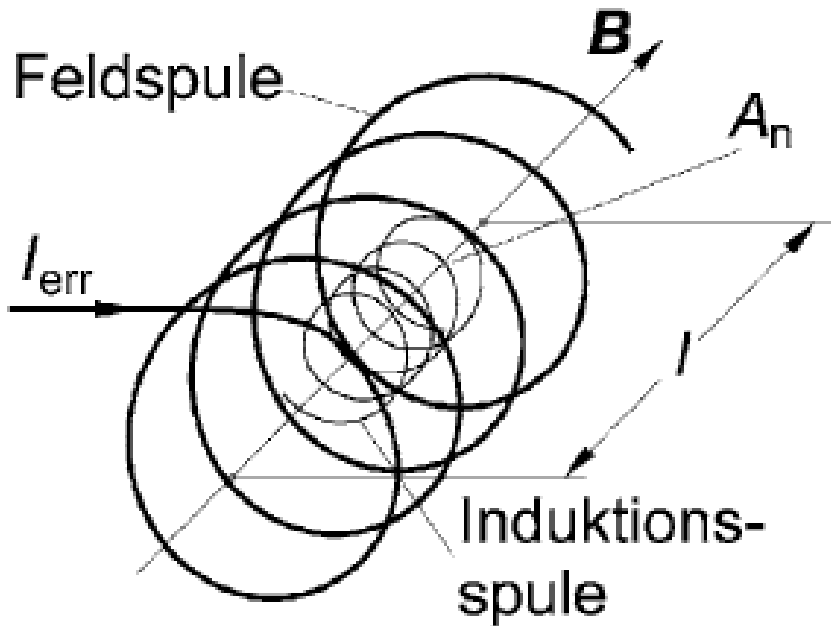


Abb. aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

u_{ind} ... in Induktionsspule induzierte Spannung
 N_{ind} , N_{feld} ... Windungszahlen von Induktions- und Feldspule
 A_n ... Querschnittsfläche der Induktionsspule
 μ_0 ... magnet. Feldkonstante
 l ... Länge der Feldspule
 di_{err}/dt ... zeitliche Änderung des Erregerstroms durch Feldspule

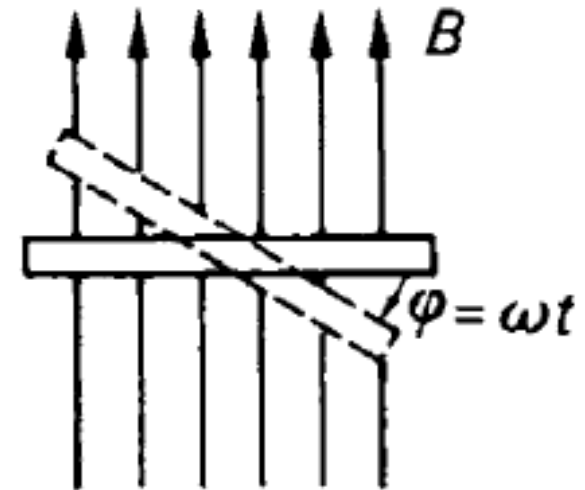
Beispiel: Zeige, dass hier gilt:

$$u_{ind} = -N_{ind} N_{Feld} A_n \frac{\mu_0}{l} \frac{di_{err}}{dt}$$

Flächenrotation mit konstanter Drehzahl (Wechselstromgenerator):

Beispiel: Zeige, dass für eine Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω gilt:

$$u_{ind} = NBA \omega \sin(\omega t)$$



Wirbelströme

- **Ausgedehnte Leiter in sich zeitlich ändernden Magnetfeldern; oder: bewegte Leiter in konstanten Feldern → Induktionsstromlinien, die wie Wirbel in sich geschlossen sind.**
- **Wirbelströme hemmen Bewegung (Lenz'sche Regel) – ähnlich wie Reibung fester Körper in Flüssigkeiten**

Selbstinduktion:

- **Annahme: Strom durch eine Spule ändert sich**
- **→ magnetischer Fluss durch Spule ändert sich**
- **→ Induziert Spannung, die Strom bewirkt, der Ursache der Änderung des Flusses entgegenwirkt**
- **Selbstinduktion**

Für den Gesamtfluss gilt: $\Phi_{ges} = N\Phi = LI$

Definition der **Induktivität, L**, des Stromkreises (von Geometrie abhängig)

$[L] = \text{Wb/A} = \text{Vs/A} = \text{H (Henry)}$

$$-u_{ind} = N \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt} = u_L$$

Spannungsabfall analog zu ohmschem Verbraucher (Zählrichtung ~ Stromrichtung)

Spule „wehrt sich“ gegen Änderung des Stromes – ähnlich träger Masse in Mechanik

Induktivität, L , einer langen Zylinderspule:

L ... Induktivität

μ_0 ... magnet. Feldkonstante

N ... Windungszahl

A ... Querschnittsfläche

μ_r ... Permeabilitätszahl

l ... Länge

$$L = \frac{N^2 \mu_r \mu_0 A}{l}$$

Spule mit Eisenkern: L von I abhängig, da μ_r nicht konstant !

Reihenschaltung von Induktivitäten:

$$L_{ges} = \sum_{i=1}^N L_i$$

Parallelschaltung von Induktivitäten:

$$\frac{1}{L_{ges}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{L_i}$$

Energie des homogenen magnetischen Feldes,

W_{magn} :

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H} V$$

B ... magnetische Flussdichte
 H ... magnetische Feldstärke

Energiedichte des magnetischen Feldes, w_{magn} :

$$w_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H}$$

Energie eines beliebigen magnetischen Feldes:

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \vec{H} dV$$

V ... Volumen

4.5.2 Periodische Felder (Wechselstromkreis)

Wechselfelder, die durch sin- bzw. cos-Funktionen beschrieben werden können. Z.B. Spannung, die durch Generator erzeugt wird.

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) \\ i(t) &= \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) \end{aligned}$$

Amplituden **Nullphasenwinkel**

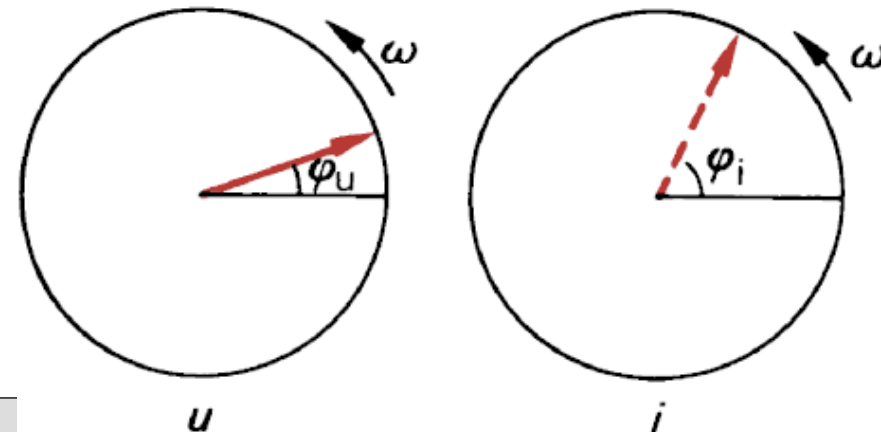
u ... Momentanwert der Spannung
 i ... Momentanwert des Stroms

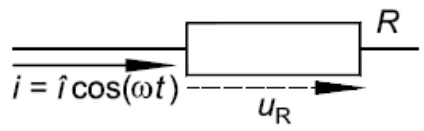
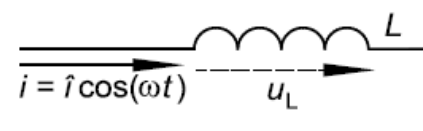
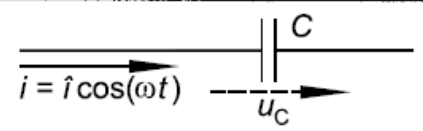
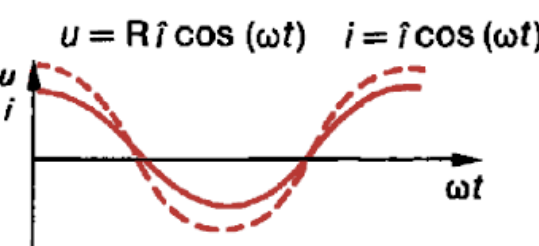
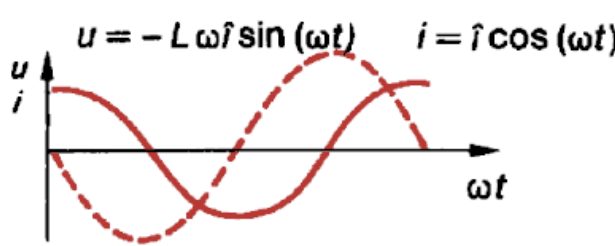
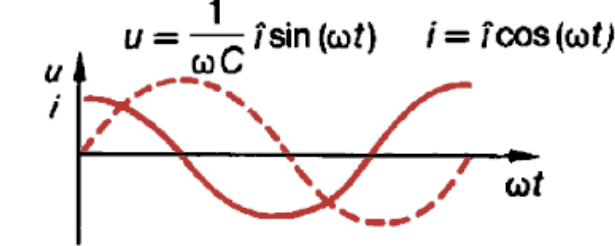
$$\omega = 2\pi f$$

Frequenz (50 Hz)

Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom, φ :

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$



Ohm'scher Widerstand (Wirkwiderstand)	Spule (induktiver Blindwiderstand)	Kondensator (kapazitiver Blindwiderstand)
		
<p>Ohm'sches Gesetz:</p> $u(t) = R i(t)$ $u(t) = R \hat{i} \cos(\omega t)$ <p style="text-align: right;">(4.289)</p>	<p>Induktionsgesetz:</p> $u(t) = L \frac{di}{dt}$ $i(t) = \hat{i} \cos(\omega t)$ $\frac{di}{dt} = -\omega \hat{i} \sin(\omega t)$ $u(t) = -L \omega \hat{i} \sin(\omega t)$ <p style="text-align: right;">(4.290)</p>	$Q = Cu$ $\int i dt = Cu$ $u(t) = \frac{1}{C} \int i dt$ $\int i dt = \int \hat{i} \cos(\omega t) dt = \frac{1}{\omega} \hat{i} \sin(\omega t)$ $u(t) = \frac{1}{\omega C} \hat{i} \sin(\omega t)$ <p style="text-align: right;">(4.291)</p>
 <p>nicht phasenverschoben: $\varphi(u, i) = 0$</p>	 <p>phasenverschoben um $\varphi(u, i) = \pi/2$; u eilt i um $\pi/2$ voraus</p>	 <p>phasenverschoben um $\varphi(u, i) = -\pi/2$; u eilt i um $\pi/2$ nach</p>

aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Effektivwerte von Strom und Spannung

Zeitliche
quadratische
Mittelwerte

$$u_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

$$i_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$$

Leistung im Wechselstromkreis

p ... Momentanwert der Leistung
P ... mittlere Leistung

$$p(t) = u(t)i(t) \Rightarrow P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt = u_{eff} i_{eff} \cos \varphi$$

Die Maxwell'schen Gleichungen

Allgemeinen Grundgleichungen elektrischer und magnetischer Felder, aus denen sich im Prinzip alle anderen Zusammenhänge ableiten lassen.

1. Quellen – elektrisches Feld

Gaußscher Satz: (Integralform)

$$\oint \vec{D} d\vec{A} = Q = \int_V \rho dV$$

D ... elektrische Verschiebungsdichte
(Flussdichte)
dA ... Flächenelement
Q ... Ladung
 ρ ... Ladungsdichte

Mathematisches Gesetz (Gaußscher Integralsatz) für beliebiges Feld, F

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \oint \vec{F} d\vec{A}$$

Umrechnung eines Volumsintegrals in Flächenintegral
über Oberfläche

Differentialform:

$$\text{div } \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

Mit dem Nabla-Operator:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

2. Quellen – magnetisches Feld

Es gibt keine magnetischen Monopole; bzw. das magnetische Feld ist ein **Wirbelfeld**, kein **Quellenfeld**

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

bzw.

$$\text{div } \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

B ... magnetische Induktion (Flussdichte)
dA ... Flächenelement

3. Durchflutungsgesetz

Bisher hatten wir: $\oint \vec{H} d\vec{s} = \int_A \vec{j} d\vec{A} = \sum_{i=1}^n I_i$

H ... magnetische Feldstärke
ds ... Wegelement
j ... Stromdichte
dA ... Flächenelement
I ... Strom
D ... elektr. Verschiebungsdichte
F ... beliebiges Feld

Verallgemeinerung:

Schon die Änderung des elektrischen Flusses (i.e., ein Verschiebungsstrom) reicht aus, um ein magnetisches Feld zu erzeugen !

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \int_A \left(\vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) d\vec{A}$$

bzw.

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

Stoke'scher Integralsatz:

$$\int_A \text{rot } \vec{F} d\vec{A} = \oint \vec{F} d\vec{s}$$

4. Induktionsgesetz

Bisher hatten wir (ohne sich explizit auf die Wicklungszahl zu beziehen):

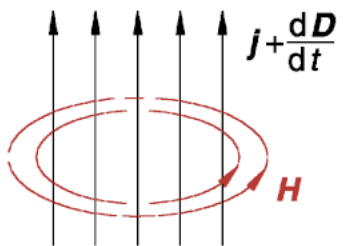
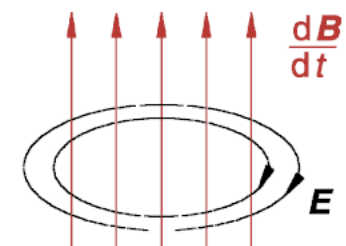
$$u_{ind}(t) = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Verallgemeinerung durch Umschreiben der Spannung auf ein Linienintegral über die Feldstärke:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A} \quad \text{bzw.}$$

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

Jede Änderung des magnetischen Flusses durch eine Fläche A erzeugt in der Randkurve eine elektrische Spannung.

Maxwell'sche Gleichungen in integraler Form	<p>1. Maxwell'sche Gleichung (Durchflutungsgesetz)</p> $\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{s} = \int_A \left(\mathbf{j} + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) d\mathbf{A} \quad (4.344)$ <p>Im Vakuum ist $\mathbf{j} = 0$ und</p> $\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{s} = \int_A \frac{d\mathbf{D}}{dt} d\mathbf{A} \quad (4.345)$  <p>Jedes zeitlich sich ändernde elektrische Feld erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld.</p>	<p>2. Maxwell'sche Gleichung (Induktionsgesetz)</p> $\oint_C \mathbf{E} d\mathbf{s} = - \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A} \quad (4.346)$  <p>Jedes zeitlich sich ändernde magnetische Feld erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld.</p>
in differentieller Form	$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}} \quad (4.347)$	$\text{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (4.348)$
Quellen	$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{A} = Q \quad (4.133)$	$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0 \quad (4.349)$
Materialgleichungen	$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.153)$ $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (4.156)$ $\mathbf{j} = \kappa \mathbf{E} \quad (4.207)$	$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J} \quad (4.225)$ $\mathbf{J} = \mu_0 \chi_m \mathbf{H} \quad (4.221)$
Kräfte	$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.216)$	

aus: Hering et al., „Physik für Ingenieure“

Elektromagnetische Wellen

Maxwellsche Gleichungen als Grundlage für elektromagnetische Wellen interpretierbar (mit $j=0$)

- Zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt zeitlich veränderliches elektrisches Feld, das wiederum ein zeitlich veränderliches magnetisches Feld bewirkt usw.
- → Verkettung von elektrischen und magnetischen Feldern = **elektromagnetische Welle, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet.**
- → **Licht !**
- → **enge Verknüpfung zwischen Elektrodynamik und Wellenoptik.**