

Getrennte Variablen

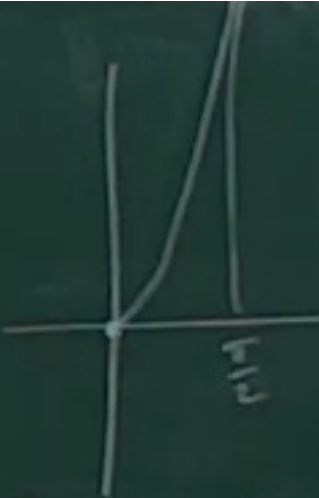
- x und y voneinander trennbar
- Vorgehensweise:
 - gegeben: $y' = \frac{f(x)}{g(y)} = \frac{dy}{dx}$
 - nach Umformung: $g(y)dy = f(x)dx$
 - nach Integration: $G(y) = F(x) + C$

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} = \frac{dy}{dx} \quad g(y)dy = f(x)dx$$
$$G(y) = F(x) + C$$

- Beispiele:

$$y' = \frac{x}{1+y^2}$$
$$(1+y^2)dy = xdx$$
$$y + \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C \quad \text{implizite Form}$$

Ans g.

$$y' = 1+y^2$$
$$\frac{dy}{1+y^2} = dx$$
$$\arctan(y) = x + C$$
$$y = \tan(x + C)$$


* nicht möglich, da Lösung Definitionsbereich verlässt

Lineare DGL

- $y' = a(x)y \Rightarrow \frac{y'}{y} = a(x)$
- wenn $y(x_0) = 0 \Rightarrow$ laut Satz von P-L $y(x) = 0$ für alle x
- $\ln|y(x)| = \int a(x)dx$
 - $y(x) = C * e^{A(x)}$ ist allgemeine Lösung
- Beispiel:

$y' = -xy$
 $a(x) = -x$
 $A(x) = -\frac{x^2}{2}$
 $y(x) = C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

Inhomogene lineare DGL

- $y' = a(x)y + b(x)$
 - $b(x) \Rightarrow$ Inhomogenität durch Störfunktion
- Vorgehensweise:
 - homogene GL lösen
 - * $y'_H = a(x)y_H(x) \Rightarrow y_H(x) = C * e^{A(x)}$
 - inhomogene GL lösen
 - * $y_P(x) = C(x) * e^{A(x)}$
 - ♦ $C(x)$ gesuchte Funktion
 - ♦ Variation der Konstanten
 - * $y_P = C'(x) * e^{A(x)} + C(x) * e^{A(x)} * a(x) = a(x) * C(x) * e^{A(x)} + b(x)$
 - ♦ $\Rightarrow C'(x) = b(x) * e^{-A(x)} \Rightarrow C(x) = \int b(x) * e^{-A(x)} dx$
 - $y(x) = y_P(x) + D * e^{A(x)}$
 - * allgemeine Lösung
 - * homogene + partikuläre Lösung
- Beispiel:

$y' = -xy + x^2$ lösen zuerst die homogene Gleichung $y'_H = -xy_H$
 $\frac{y'_H}{y_H} = -x$ $\ln|y_H(x)| = -\frac{x^2}{2} + C$ $y_H(x) = D \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$
 $y_P(x) = C(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y'_P(x) = C'(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + C(x) \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = -x \cdot C(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2$
 $C'(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = x^2 \Rightarrow C'(x) = x^2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$ $C(x) = \int x^2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx = \int \frac{x}{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx = \int \frac{x}{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx = \int 2x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx = 2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} + C$
 $y_P(x) = (x^2 - 2) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = x^2 - 2$
 $y(x) = x^2 - 2 + C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

Exakte DGL

- $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$
 - Stammfunktion existiert, wenn $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

* wenn nicht exakt ==> Multiplikation mit integrierenden Faktor $\mu(x)$

◆ alternative Formen $\mu(x)$ in Reihenfolge zum Versuchen

◆ desto mehr Versuche desto verzweifelter

$$\mu = \mu(x), \mu = \mu(y), \mu = \mu(x+y), \mu = \mu(xy), \mu = \mu(x^2+y^2),$$

◆

* $\mu(x)$ bestimmen

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y}$$

◆

◆ DGL nach $\mu(x)$ lösen

* siehe 2. Beispiel

– Stammfunktion: $d\phi = 0 \Rightarrow \phi(x, y) = \text{const}$

* Lösungen von $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ sind Niveaulinien von ϕ

• Beispiele:

– ohne $\mu(x)$

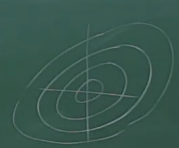
Bsp: $(2x+y)dx + (x+2y)dy = 0$ $y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ ist exakt.

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x+y$ $\phi(x, y) = x^2 + xy + C(y)$ $\frac{\partial \phi}{\partial y} = x + C'(y) = x+2y$ $C'(y) = y$ $C(y) = \frac{1}{2}y^2$

$\phi(x, y) = x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 = C$

$y^2 + xy + x^2 - C = 0$ $y_{1,2} = -\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - x^2 + C} = \frac{-x \pm \sqrt{4C - 3x^2}}{2}$



*

– mit $\mu(x)$

Bsp: $(7x^6 + 5xy^4)dx + 2xy^5 dy = 0$ ist exakt.

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y^5$ $\frac{\partial P}{\partial y} = 10xy^4$ ist nicht exakt.

Also multiplizieren mit einem geeigneten Faktor, sodass die Gleichung exakt wird. 'integrierender Faktor'

Voraus: $\mu = \mu(x)$ $\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y}$ $\frac{\partial(\mu(7x^6 + 5xy^4))}{\partial x} = \mu'(x)2xy + 2y\mu(x)$ $\frac{\partial(\mu(2xy^5))}{\partial y} = 10y\mu(x)$

$\mu'(x)2xy + 2y\mu(x) = 10y\mu(x)$ $\mu'(x) = \frac{4}{x}\mu(x)$ $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{4}{x}$ $\ln|\mu| = 4\ln|x|$ $\mu(x) = x^4$

$(7x^{10} + 5x^5y^4)dx + 2x^5y^5 dy = 0$ ist exakt.

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 7x^{10} + 5x^5y^4$ $\phi(x, y) = x^7 + x^5y^4 + C(y)$ $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2x^5y + C'(y)$ $C'(y) = 0$ $C = 0$

$\phi(x, y) = x^7 + x^5y^4 = C$

$y^4 = \frac{C}{x^5} - x^2$ $y = \pm \sqrt[4]{\frac{C}{x^5} - x^2}$

*

– mit $\mu(x * y)$

Bsp: $(xy+1)dx + x^2e^{xy}dy = 0$ ist exakt.

$\mu = \mu(xy)$ $\frac{\partial(\mu(xy) \cdot x^2)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu(xy)(xy+1))}{\partial y}$ $\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} = (xy+1)e^{xy}$

$y\mu'(xy)x^2 + \mu'(xy)2x = x\mu'(xy)(xy+1) + \mu(xy)$ $\phi(x, y) = \int (xy+1)e^{xy} dx = (xy+1) \frac{e^{xy}}{y} - \int y \frac{e^{xy}}{y} dy$

$\mu'(xy)(x^2y - x^2y - x) = -x\mu'(xy) \quad | : (-x)$ $\mu'(xy) = \mu'(xy)$ $\mu(xy) = e^{xy}$

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2e^{xy} + C'(y) = x^2e^{xy} = x^2e^{xy} + C'(y)$ $C'(y) = 0$ $C = 0$

*

$$\begin{aligned}
 x e^{xy} &= C \\
 e^{xy} &= \frac{C}{x} \\
 xy &= \ln\left(\frac{C}{x}\right) \\
 y &= \frac{1}{x} \ln\left(\frac{C}{x}\right)
 \end{aligned}$$

*

– Lotka-Volterra Räuber-Beute-Modell

Bsp: $x(t)$: Beute-Population zu Zeit t
 $y(t)$: Räuber-Population zu Zeit t

LOTKA-VOLTERRA Räuber-Beute-Modell

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= x(t)(1 - y(t)) \\
 y'(t) &= y(t)(-1 + x(t))
 \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} = x(1-y) \quad \frac{dy}{dt} = y(-1+x)$$

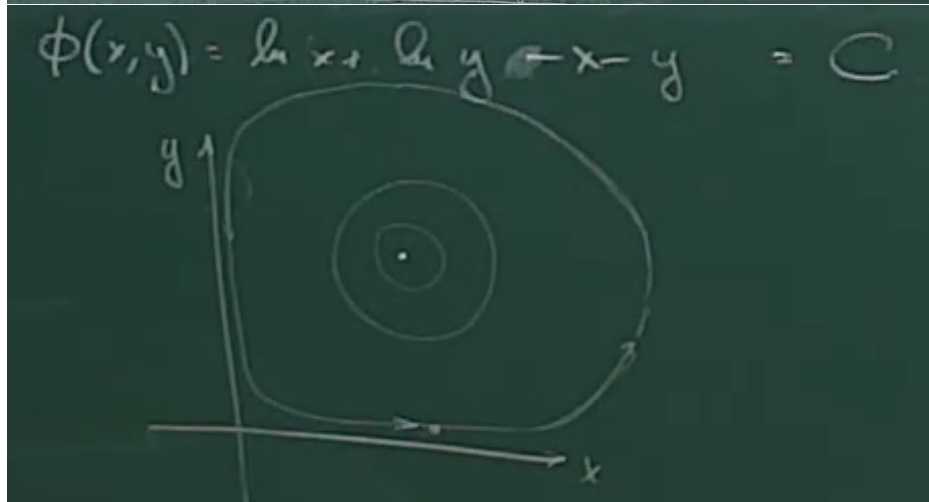
$$\frac{1-y}{y} dy = -\frac{1-x}{x} dx$$

$$\int \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = -\int \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$$

$$\ln y - y = -\ln x + x + C$$

$$\ln y - y = x - \ln x + C$$

*



*

– logistisches Wachstum

$x = x(t)$

$x' = x(1-x)$ logistisches Wachstum

$$\frac{dx}{x(1-x)} = dt$$

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \ln x - \ln(1-x) = \int dt = t + C$$

$$\ln \frac{x}{1-x} = t + C$$

$$\frac{x}{1-x} = e^{t+C} = e^t \cdot e^C$$

$$x = \frac{De^t}{1+De^t}$$

$$x = \frac{De^t}{1+De^t}$$

*

[[Differentialgleichungen]]