Motivation

- Sei X_n der Mittelwert von n (unabhängigen) Würfelresultaten ξ_k:

  $$X_n := \frac{1}{n}(\xi_1 + \cdots + \xi_n).$$

  Konvergiert X_n? Und wie sollten wir Konvergenz überhaupt definieren?
- $$\lim X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = (1, 1, 1, \ldots); \\ 1.5 & \omega = (1, 2, 1, 2, \ldots); \\ 6 & \omega = (6, 6, 6, \ldots); \\ \text{existiert nicht} & \omega = (1, 6, \ldots, 6, \underbrace{1, 1, \ldots, 1, 1}_{2^{k^2}}, \ldots); \\ \ldots & \end{cases}$$

Definition

- auch Konvergenz in L^2 genannt
- erwartete quadratische Abweichung vom vermeintlichen Grenzwert
- Sei $(X_n\colon n \geq 1)$ eine Folge von ZVen in L^2 (also $E(X_n^2) < \infty$). Wir sagen X_n konvergiert zu X im quadratischen Mittel falls

  $$E(|X_n - X|^2) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

  Kurz: $X_n \xrightarrow{L^2} X$.

Beispiel

- Es bezeichne X_i voneinander unabhängige Augenzahlen beim Würfeln.

  Bestimmen Sie den Grenzwert (im quadratischen Mittel) von $W_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X_k}$.

  Wie lautet dieser Grenzwert?
- Lösungsweg:
  Linearität des Erwartungswertes, identische Verteilung der X_k's, Definition des diskreten Verteilungswertes

  $$E(W_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{1}{X_k}\right) = E\left(\frac{1}{X_i}\right) = \ldots$$

  $$\ldots = \frac{1}{X_1} \cdot p_1 + \ldots + \frac{1}{X_6} \cdot p_6 = \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{49}{20} = 0.4083$$