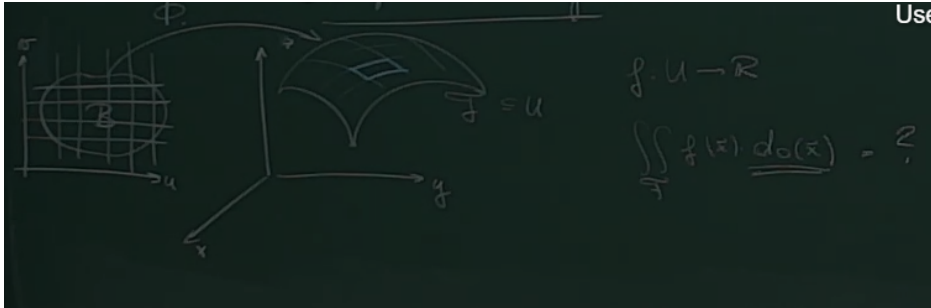
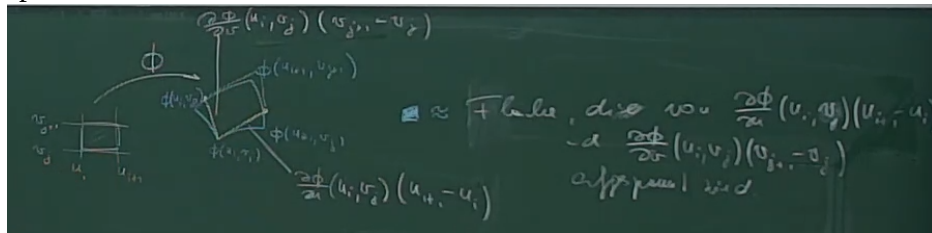


- Oberflächenbestimmung einer Ebene mittels Zerlegung in Riemann-Summen



- gekrümmte Fläche angenähert durch von Vektor aufgespanntes Parallelogramm
- \* Kreuzprodukt der Vektoren



$$\approx \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\phi(u_i, v_j)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j) = \frac{(u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j)}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u_i, v_j) \right\|} \cdot \frac{1}{\Delta u \Delta v}$$

\*

$$\int_S f(x) d\sigma(x) := \int_{\mathbb{R}^2} f(\phi(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

- skalaras Oberflächenintegral
- skalaras Oberflächenelement
  - $do = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$
- Beispiel: Nordhalbkugel mit Kugelkoordinaten

$$\text{Bsp: } \mathcal{F} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0 \} \quad \text{Oberfläche der Nordhalbkugel.}$$

$$\int_{\mathcal{F}} z d\sigma = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 2 \cos(\varphi) \cdot 4 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = 2\pi \cdot 4 \cdot \left[ -\frac{1}{2} \cos(2\vartheta) \right]_0^{\pi/2} = 8\pi$$

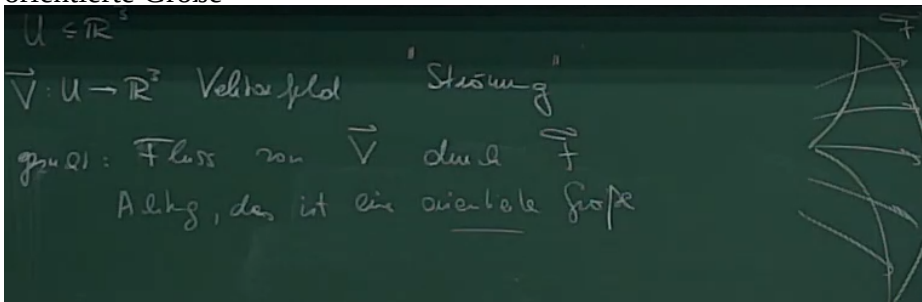
$$\text{Oberflächenelement: } \begin{aligned} x &= 2 \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y &= 2 \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ z &= 2 \cos(\vartheta) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -2 \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ 2 \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} 2 \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ 2 \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ -2 \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right\| = 4 \sin(\vartheta) \quad \text{d.h. } d\sigma = 4 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi$$

## Strömung

- gesucht: Fluss von Vektorfeld V durch Fläche F in Richtung n
- orientierte Größe



- Orientierung der Fläche wird durch Wahl des Normalvektors beschrieben

$$\int \langle \vec{V}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}) \rangle = \int f(\vec{x})$$

↑  
Normalvektor auf  $\Sigma$  in  $\vec{x}$ .  
 $\|\vec{n}\|=1$

•  $Fluss = \int \int_F \langle \vec{V}(\vec{x}), \vec{U}(\vec{x}) \rangle d\sigma(\vec{x}) = \int \int_F \vec{V} d\vec{\sigma}$

$$Fluss = \int \int_F \langle \vec{V}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}) \rangle d\sigma(\vec{x}) = \int \int_F \langle \vec{V}(\vec{x}), \vec{n} d\sigma(\vec{x}) \rangle = \int \int_F \vec{V}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma}(\vec{x})$$

↑  
normierter Normalvektor  
 $d\sigma(\vec{x})$  - vektorielle Oberflächelement

–  $d\vec{\sigma} = \vec{n} d\sigma$

\* vektorielle Oberflächenelement

– normierter Normalvektor

\* Normalvektor ist Kreuzprodukt der abgeleiteten Koordinatenvektoren

\* Vorzeichen von Orientierung abhängig

◆ Normalvektor zeigt in Richtung “Vorderseite”

$$\vec{n} = \pm \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|}$$

$$d\sigma = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| du dv$$

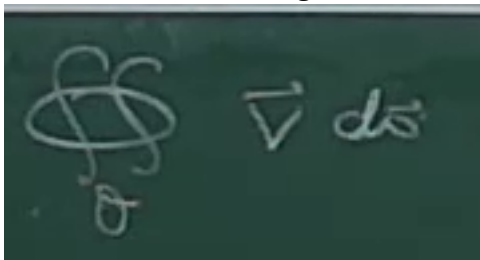
\*

$$d\vec{\sigma} = \pm \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} du dv$$

\*

• geschlossene Fläche

– immer der nach außen gerichtete Normalvektor



–

• Beispiele:

Bsp:  $\nabla(x) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{\sigma} \cdot \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, z = x y \right\}$  also in Richtung der z-Achse

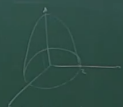
$$\nabla(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit positiv z-Achsenrichtung, zeigt also nach oben ✓.

$$\int \vec{\sigma} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ -xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx dy = 0.$$

–

$\mathbb{R}^3 \quad \vec{V}(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathcal{A} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - (x^2 + y^2), z \geq 0 \right\}$   
 $\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \cos(\varphi) \\ 2 \sin(\varphi) \\ 4 - 2^2 \end{pmatrix} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -2 \sin(\varphi) \\ 2 \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$   
 $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2 \sin(\varphi) \\ 2 \cos(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}$   
 (normale + - Vorzeichen, das macht gar nichts) ✓  
 $\iint_{\mathcal{A}} \vec{V} \cdot d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{4 - 2^2}{2 \sin(\varphi)} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \sin(\varphi) \\ 2 \cos(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} d\varphi d\varphi = 0$



[[Vektoranalysis]] [[Vektor]]