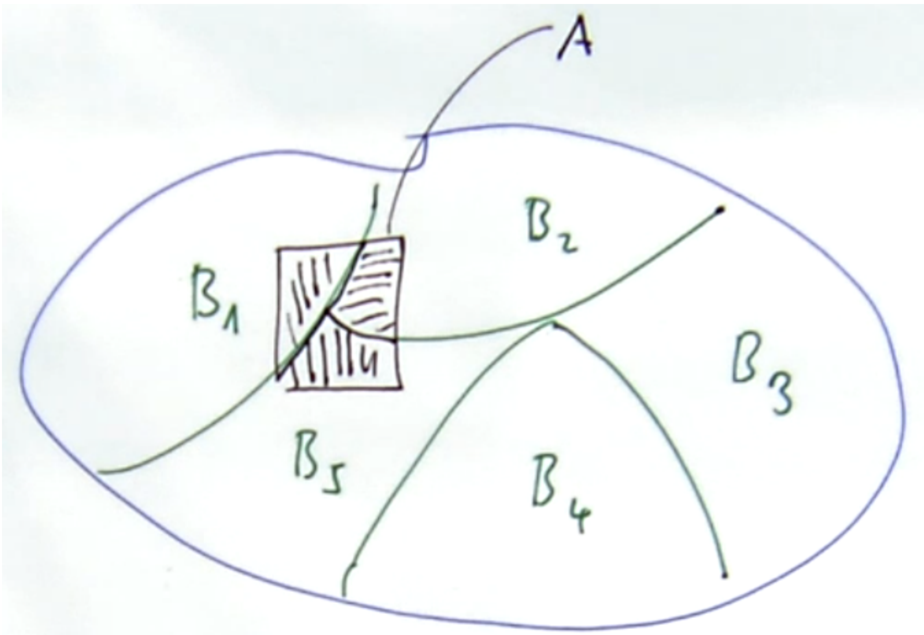
Definition

> *Sei $\Omega = \bigcup_{i \geq 1} B_i$ und $B_i \cap B_j = \emptyset$ falls $i \neq j$, mit $B_i \in \mathcal{A}$. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{A}$*
> $$P(A) = \sum_{i \geq 1} P(B_i) P(A|B_i).$$

- 

- $$P(A) = \sum_{i \geq 1} P(A \cap B_i)$$
-

Beispiele

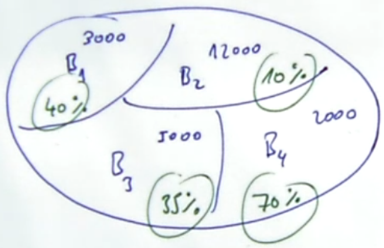
- Pendler
  - Wir betrachten 4 benachbarte Gemeinden die eine Region bilden. Die Gemeinden haben 3000, 12000, 5000 bzw. 2000 Einwohner. Der Anteil der Einwohner die mit dem Auto pendeln beträgt 40%, 10%, 35% bzw. 70%. Wie gross ist der Anteil der Autopendler in der Region insgesamt?

  - Gemeinde

    A… Jemand pendelt mit Auto

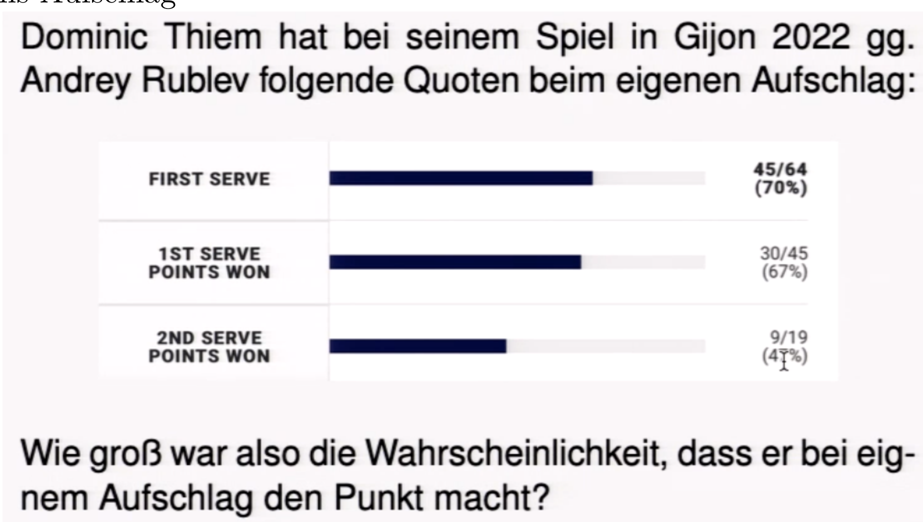
    B_i … Jemand kommt aus Gemeinde i

    $1 \le i \le 4$

    $$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_4)P(A|B_4)$$

    $$= \frac{3}{22} \times 0.4 + \frac{12}{22} \times 0.1 + \frac{5}{22} \times 0.35 + \frac{2}{22} \times 0.7$$

- Tennis-Aufschlag
  - 

Tennis A ... Punkt bei Aufschlag

$P(A) = ?$

B_1 ... ~~Punkt bei~~ ersten Aufschlag kommt

$\rightsquigarrow P(B_1) = \cancel{0.67}\ 0.7$

B_2 ... ~~Punkt bei~~ zweiten Aufschlag kommt

$\rightsquigarrow P(B_2) = \cancel{0.47}\ 0.3$

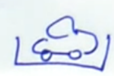
$$P(A) = \underbrace{P(B_1)}_{0.7}\underbrace{P(A|B_1)}_{0.67} + \underbrace{P(B_2)}_{0.3}\underbrace{P(A|B_2)}_{0.47}$$

–

- Ziegenproblem

  Bei einer Gewinnshow können Kandidaten sich für eine von 3 Türen entscheiden. Hinter einer Tür ist ein Auto, hinter den beiden anderen sind Ziegen. Nachdem die Kandidatin eine Tür gewählt hat, öffnet der Moderator eine der beiden anderen Türen in der sich ein Ziege befindet und bietet der Kandidatin an, dass sie sich nochmals umentscheiden darf. Soll sie das tun?

  –

  Ziegenproblem Z Z 

  A ... Gewinne Auto

  B_1 ... Versuch 1 korrekt

  $B_2 = B_1^c$

  $$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

  Strategie 1 nicht wechseln

  $$\frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{1}{3}$$

  Strategie 2 wechseln

  $$\frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

  –