

- $F: V \rightarrow V$
 - lineare Selbstabbildung
 - $Av = \lambda v$
 - * v - Eigenvektor
 - * λ - Eigenwert
 - * A quadratisch
 - $\dim(V)$ endlich \implies EW/EV Problem für Matrizen

Eigenwert/Eigenvektor-Problem

- $Av = \lambda v = \lambda Iv \implies (A - \lambda I)v = 0$
 - homogenes lineares Gleichungssystem
 - nichttriviale Lösung $v \neq 0$, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$
 - * $\det(A - \lambda I) = 0$ charakteristische Gleichung
 - * $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ charakteristisches Polynom
 - * $P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0$
 - * Polynomgleichung mit reellen Koeffizienten \implies genau $A^{n \times n}$ hat n Eigenwerte
 - ♦ mit Vielfachheit gezählt
- $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$
 - $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_r$
 - λ_n hat algebraische Vielfachheit k_n
 - * algebraische Vielfachheit
 - ♦ wie oft λ_1 Lösung $P(\lambda) = 0$ ist
 - ♦ wie oft ein λ_1 vorkommt bzw. Exponent von $(\lambda - \lambda_1)^k$
- $Av = \lambda v \implies$ Eigenvektoren spannen zum Eigenwert einen Unterraum von \mathbb{C}^n
 - $Eigen(\lambda, A) := v \in \mathbb{C}^n : Av = \lambda v = \text{Kern}(A - \lambda I)$
 - geometrische Vielfachheit - Dimension des Eigenraum

Vorgehensweise

- Eigenwerte bestimmen
 - Lösen der charakteristischen Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$
 - Polynom als Lösung
 - dessen Nullstellen/Eigenwerte und Vielfachheiten bestimmen
- Eigenvektoren bestimmen
 - Gleichung $(A - \lambda I)v = 0$ für alle Eigenwerte lösen
 - * ∞ Lösungen
 - Eigenraum/span/Dimensionen bestimmen
 - * $Eigen(\lambda_*, A) = \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$
 - * geometrische Vielfachheit = $\dim Eigen(\lambda_*, A)$

Sonstiges

- $1 \leq \text{geom } V(\lambda) \leq \text{alg } V(\lambda)$
 - $\text{alg } V(\lambda) = 1 \iff \text{geom } V = 1$
 - $\text{geom } V(\lambda) = \text{alg } V(\lambda)$ für alle EW von $A \implies A^{n \times n}$ besitzt n l. u. EV
 - * n l. u. EV, wenn alle EW verschieden
- $\text{Det}(A) = \prod_{j=1}^n \lambda_j$
- $\text{Spur}(A) = \sum_{j=1}^n \lambda_j = \text{Summe der Hauptdiagonalelemente}$