

Kurvenintegral

- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ (bzw. \mathbb{R}^3) offen. Dann ist $\vec{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ (bzw. \mathbb{R}^3) ein Vektorfeld
 - \vec{V} besteht aus Koordinatenfunktionen
 - $\vec{V} : U$ auf U koordinatenweise differenzierbar
 - * \Rightarrow differenzierbares Vektorfeld
- Gesucht: geleistete Arbeit W bei Bewegung entlang Kurve C in \vec{V}
 - $C: \vec{x}(t)$
 - $t \in [a, b]$
 - $W = \int_a^b \langle \vec{V}(\vec{x}(t)), \vec{\dot{x}}(t) \rangle dt$
 - * $\vec{\dot{x}}(t) dt = d\vec{x}$
 - \vec{V} besteht aus $P(t), Q(t), R(t) \Rightarrow W = \int_C Pdx + Qdy + Rdz$
- Kurven/Wegintegral ist unabhängig von orientierter Parametrisierung
 - lediglich von Kurve und Vektorfeld
- Bewegung entlang anderer Kurve in selbem Bereich $\Rightarrow W$ anders

Bsp: $\int_C (x+y)dx - xy^2dy = \int_0^1 (2t+t) \cdot 2dt - 2t \cdot (t^2) \cdot 2t dt = \int_0^1 (6t - 4t^3) dt = \left[3t^2 - \frac{1}{2}t^4 \right]_0^1 = \frac{5}{2}$

in Variablen der Kurve von $(0,0) \rightarrow (2,1)$

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$

$dx = 2dt$
 $dy = dt$

Bsp: $\int_C (x+y)dx - xy^2dy = \int_0^1 (2t+t^2) 2dt - (2t)(t^2) 2t dt = \int_0^1 (4t + 2t^2 - 4t^3) dt = \left[2t^2 + \frac{2}{3}t^3 - \frac{4}{7}t^4 \right]_0^1 = \frac{2}{1} + \frac{2}{3} - \frac{4}{7} = \frac{10}{21}$

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$

$dx = 2dt$
 $dy = 2t dt$

- Weitere Beispiele

Bsp: $\int_C x dx + xz dy + yz dz = \int_0^1 (2t+1) \cdot 2t dt + t^2 \cdot (2t+1) dt + t^3 \cdot (t) \cdot 2t dt = \int_0^1 (4t^2 + 2t + 2t^3 + t^4 + 2t^4) dt = \left[\frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{6}t^6 \right]_0^1 = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{30 \cdot 17 + 15 \cdot 12 + 10 \cdot 2}{30} = \frac{107}{15}$

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 2t+1 \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$

$dx = 2t dt$
 $dy = dt$
 $dz = 2dt$

[[Mehrdimensionale Integralrechnung]] [[Mehrdimensionale Differentialrechnung]]