

- jeder endlich-dimensionale VR V ist gleichwertig zu $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$
- $V \rightarrow W$ lineare Abbildung
 - lineare Transformation
 - Transformationsmatrix
 - * Spaltenvektoren der die lineare Abbildung F darstellenden Matrix M sind die Koordinatenvektoren der Bilder des Basisvektoren
 - ♦ $C_B(F(v_1)), \dots, C_B(F(v_n))$
 - * Beispiel

$B_{P_2}: \{1+t, t+t^2, 1+t^2\}$
 $B_{P_1}: \{1+t, 1-t^2\}$
 $F: P_2 \rightarrow P_1$
 $F(1+t) = 1$
 $F(t+t^2) = 1+t$
 $F(1+t^2) = t$
 $M_{B_1}^{B_2}(F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$
 $p(t) = a+bt+ct^2 \mapsto \frac{p(t)-p(-t)}{t} = a+ct$
 $B_{P_1}: \{1+t, 1-t^2\}$
 $1 = \frac{1}{2}(1+t) + \frac{1}{2}(1-t^2) \mapsto C_{B_1}(F(1+t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
 $1+t = 1 \cdot (1+t) + 0 \cdot (1-t^2) \mapsto C_{B_1}(F(t+t^2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $t = \frac{1}{2}(1+t) - \frac{1}{2}(1-t^2) \mapsto C_{B_1}(F(1+t^2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Komposition von linearen Abbildungen

- Komposition wird durch das Produkt der darstellenden Transformationsmatrizen beschrieben

Inverse eines Isomorphismus

- Transformationsmatrix muss regulär sein bei isomorpher Abbildung
 - Inverse ist Transformationsmatrix für Umkehrabbildung

Rang der Transformationsmatrix

- $V^n \rightarrow W^m$
- $M_B^A(F) \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- F injektiv $\iff \text{Kern}(F) = \{0\} \iff \text{Rang}(M(F)) = n$
- F surjektiv $\iff \text{Bild}(F) = W \iff \text{Rang}(M(F)) = m$
- F bijektiv $\iff \dim(V) = \dim(W) \iff \text{Rang}(M(F)) = n \iff M_B^A(F)$ regulär

Bestimmen von Kern und Bild

- Kern VO#16
- Bild VO#16/17
- Dimensionsformel:
 - $\dim V_n = \dim \text{Kern}(F) + \dim \text{Bild}(F)$

- * $\dim \text{Kern}(F) = \# \text{ freie Variablen}$
- * $\dim \text{Bild}(F) = \# \text{ nicht freie Variablen} = \text{Rang } M_B^A(F)$
- * VO#18 - Fallunterscheidungen
 - ◆ $m=n \iff F \text{ bijektiv}$
 - ◆ $m < n \iff \text{jedes } F \text{ ist nicht injektiv}$
 - ◆ $m > n \iff \text{jedes } F \text{ ist nicht surjektiv}$

Elementare Zeilenumformungen

- Spaltenräume bleiben nicht gleich
- Zeilenräume bleiben gleich
 - $\text{Span}(\{\text{Zeilen von } A\}) = \text{Span}(\{\text{Zeilen von } A'\})$

[[Lineare Abbildungen]]