

Definition

- Menge von Funktionen für die gilt

$$(f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+)$$

$$O(g(n)) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(n) \mid \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}: f(n) \leq c \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0\}$$

- * ab n_0 gibt es für alle $n \geq n_0$ eine reelle Zahl c , sodass $f(n) \leq c \cdot g(n)$
- * Funktion hat höchstens diese Komplexität

- Notation

$$f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow „f(n) = O(g(n))“$$

- $g(n)$ ist asymptotische ober Schranke für $f(n)$

Beweisführung

Um zu zeigen, dass $f(n) \in O(g(n))$ ist, muss man eine **Schranke** $n_0 \in \mathbb{N}$ und einen **Faktor** $c > 0$ angeben und dann argumentieren, dass $f(n) \leq c \cdot g(n)$ für alle $n \geq n_0$ erfüllt ist.

- 1. Durch Inspektion \rightarrow wähle n_0 und c , zeige dass Definition erfüllt ist.

- 2. Limes-Kriterium $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \Rightarrow f(n) = O(g(n))$

•

- Beispiele

$$\begin{aligned} 3n^2 + 2n &\in O(n^2) \\ \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N}: 3n^2 + 2n &\leq c \cdot n^2 \quad \forall n \geq n_0 \\ \text{wir wählen } c &= 4 \\ 3n^2 + 2n &\leq 4n^2 \quad / : n \\ 3n + 2 &\leq 4n \quad / - 3n \\ 2 &\leq n \end{aligned}$$

d.h. für $n_0 = 2$ ist die Bedingung erfüllt

$$6n^3 \in \mathcal{O}(n^2) \quad ?$$

Annahme $6n^3 \in \mathcal{O}(n^2)$

$$\exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} : 6n^3 \leq c n^2 \quad \forall n \geq n_0$$

$$6n \leq c$$

$$n \leq \frac{c}{6} \quad \forall n \geq n_0 \quad \downarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \Rightarrow f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$$

$$n^3 \in \mathcal{O}(2^n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^n} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{2 \ln 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{2 (\ln 2)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{2 (\ln 2)^3} = \frac{6}{2 (\ln 2)^3} < \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = K < \infty \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \left| \frac{f(n)}{g(n)} - K \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\exists \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \left| \frac{f(n)}{g(n)} - K \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\exists \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{f(n)}{g(n)} < K + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0, n_0 \in \mathbb{N} : f(n) \leq \underbrace{(K + \varepsilon)}_c \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} : f(n) \leq c g(n) \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \quad \square$$

Rechenregeln

$$\mathcal{O}(f(n)) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(\max\{f(n), g(n)\})$$

$$\mathcal{O}(f(n)) \cdot \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) \cdot g(n))$$

$$\mathcal{O}(f(n)) - \mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(f(n))$$

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \text{ und } g(n) = \mathcal{O}(h(n))$$

Ω -Notation

- asymptotische untere Schranke
 („asymptotisch untere Schranke“)

Definition: $(f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+)$

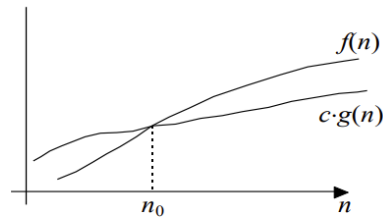
$$\Omega(g(n)) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(n) \mid \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}: f(n) \geq c \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0\}$$

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow „f(n) = \Omega(g(n))“$$

„ $g(n)$ ist eine asymptotisch untere Schranke für $f(n)$ “

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0 \Rightarrow f(n) \in \Omega(g(n))$$

$\Omega(g(n))$:



$$f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n))$$

•