Definition mit emprischem Mittel

- Mittelwert ist normal verteilt
  - konvergiert gegen [[Normalverteilung]]

Sei (X_n) *eine Folge von i.i.d. ZVen mit* $E(X_n) = \mu$ *und* $\mathrm{Var}(X_n^2) = \sigma^2$. *Dann gilt für das empirische Mittel* $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$, *dass*

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

- In anderen Worten: für $\forall a < b \in \mathbb{R}$ gilt

$$P\left(\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \in (a,b]\right) \to \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt. = \Phi(b) - \Phi(a)$$

-

Beispiele

- [[Konfidenzintervall]] 95%
  - Seien X_i iid mit $E(X_i) = \mu$ und $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$. Bestimme mit dem CLT approximativ t derart, dass

$$P\Big(|\overline{X}_n - \mu| \le t\Big) = 0.95.$$

$$P\left(|\overline{X} - \mu| \le t\right) \overset{!}{=} 0.95$$

$$P\left(-t \le \overline{X} - \mu \le t\right) \overset{CLT}{=}$$

$$P\left(-t\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \le \underbrace{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}}_{Z} \le t\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{t\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \underbrace{\Phi\left(\frac{-t\sqrt{n}}{\sigma}\right)}_{1-\Phi\left(\frac{t\sqrt{n}}{\sigma}\right)}$$

$$= \Phi\underbrace{\left(\frac{t\sqrt{n}}{\sigma}\right)}_{1.96} \overset{!}{=} \frac{0.95 + 1}{2} = 0.975$$

$$\frac{t\sqrt{n}}{\sigma} = 1.96 \Rightarrow t = \frac{1.96\,\sigma}{\sqrt{n}}$$

  -
- Anteil schwarzer Kugeln schätzen

Wir ziehen 100 mal mit Zurücklegen aus einer Urne mit schwarzen und weißen Kugeln. Wir kennen allerdings nicht den Anteil θ der schwarzen Kugeln. Um diesen zu schätzen nehmen wir die relative Häufigkeit $\overline{X}_n$, wobei $X_i = 1$ ist, falls die i-te Kugel schwarz war und $X_i = 0$ falls nicht. Bestimme

$$P\Big(|\overline{X}_n - \theta| \le t\Big).$$

–

Schätzen des Anteils

$X_i \overset{iid}{\sim} B_{1,\theta}$ $\quad Var(X_i) = \theta(1-\theta)$

$$P(|\overline{X} - \theta| \le t) =$$

$$P\left(\frac{-t\sqrt{n}}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \le \underbrace{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}}_{Z} \le \frac{\sqrt{n}t}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}t}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}\right) - 1$$

$$\ge 2\Phi(2\sqrt{n}t) - 1$$

–

Definition mit Partialsumme

- $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, dann gilt

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}.$$

- $$\begin{aligned} P(S_n \le k) &= P(S_n - n\mu \le k - n\mu) \\ &= P\Big(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\Big) \\ &\approx \Phi\left(\frac{k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Theorem 4 (CLT with sample variance)

Let $X_1, X_2, \dots, X_n$ be a random sample of size n from the density $f(\cdot)$ and let $E(X_1) = \mu$ and $Var(X_1) = \sigma^2$ be finite. Then:

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} \approx N(0,1).$$

Beispiele mit Partialsumme

- Hellseherin
  - Eine Dame behauptet Hellseherin zu sein. Wir wollen diese Aussage testen. Dazu werfen wir 100 mal eine Münze und bitten die "Hellseherin" vorherzusagen, ob wir Kopf oder Zahl werfen. Von den 100 Würfen hat sie 65 richtig vorhergesagt. Sei nun S_n die Anzahl der korrekten Vorhersagen in n Versuchen. Bestimmen $P(S_{100} \geq 65)$, falls sie nur geraten hat.
  - Hellseherin

    $X_i \sim B_{1,1/2}$ $\quad$ $Var(X_i) = \frac{1}{4}$

    $S_n = X_1 + \dots + X_n$

    $$P(S_{100} \geq 65) = P\Big(\underbrace{\frac{S_{100} - 50}{10 \cdot \frac{1}{2}}}_{Z} \geq \underbrace{\frac{15}{5}}_{3}\Big)$$

    $$\approx 1 - \Phi(3)$$

- Roulette
  - Wir gehen ins Casino und spielen Roulette. Wir setzen jedes Mal 1 € auf rot und spielen n mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir am Ende Geld gewonnen haben?
  - Casino

    X_i ... Gewinn beim i-ten Spiel

    $$X_i = \begin{cases} 1 & 18/37 \\ -1 & 19/37 \end{cases}$$

    $E(X_i) = -\frac{1}{37}$ $\quad$ $Var(X_i) = \underbrace{E(X_i^2)}_{1} - \underbrace{(E(X_i))^2}_{1/37^2} \approx 1$

    $S_n = X_1 + \dots + X_n$

    $$P(S_n \geq 1) = P\Big(\underbrace{\frac{S_n + \frac{n}{37}}{\sqrt{n(1-1/37^2)}}}_{Z} \leq \frac{1 + \frac{n}{37}}{\sqrt{n(1-1/37^2)}}\Big)$$

    $$\approx \Phi\Big(\frac{1 + n/37}{\sqrt{n}}\Big)$$