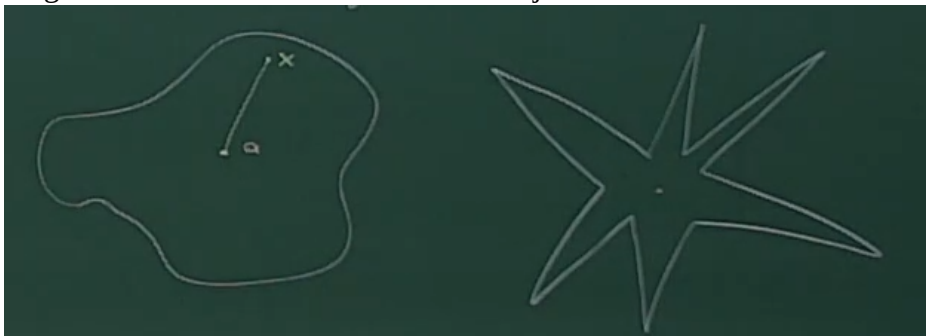


Definition

- Gebiet U ist sternförmig, wenn
 - $\exists a \in U \forall x \in U : \forall t \in [0, 1] a + t(x - a) \in U$
 - Es gibt einen Punkt a mit "Sichtfeld" auf jeden anderen Punkt x im Gebiet



- ist U sternförmig, V ein Vektorfeld auf U und $\text{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$
 - es gibt ein $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $\text{grad}\Phi = \vec{V}$
 - Beweis:

$$\begin{aligned}
 \vec{V} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \Phi(x) &= \int_0^1 \left[P(\vec{r}_0 + t(\vec{x} - \vec{r}_0)) \cdot (\vec{x} - \vec{r}_0) + Q(\vec{r}_0 + t(\vec{x} - \vec{r}_0)) (y - y_0) + R(\vec{r}_0 + t(\vec{x} - \vec{r}_0)) (z - z_0) \right] dt \\
 &\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \int_0^1 \left[\frac{\partial P}{\partial x} (\vec{r}_0 + t(\vec{x} - \vec{r}_0)) t (\vec{x} - \vec{r}_0) + P(\vec{r}_0 + t(\vec{x} - \vec{r}_0)) \cdot 1 + \frac{\partial Q}{\partial x} (\vec{r}_0 + t(\vec{x} - \vec{r}_0)) t + (y - y_0) \frac{\partial Q}{\partial x} (\vec{r}_0 + t(\vec{x} - \vec{r}_0)) t + (z - z_0) \frac{\partial R}{\partial x} (\vec{r}_0 + t(\vec{x} - \vec{r}_0)) t \right] dt \\
 &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} (\vec{x} - \vec{r}_0) + \frac{\partial Q}{\partial x} (y - y_0) + \frac{\partial R}{\partial x} (z - z_0) + \frac{d}{dt} P(\vec{r}_0 + t(\vec{x} - \vec{r}_0)) \right) \Big|_0^1 \\
 &\stackrel{*}{=} \int_0^1 \left(t \frac{d}{dt} P(\vec{r}_0 + t(\vec{x} - \vec{r}_0)) + P(\vec{r}_0 + t(\vec{x} - \vec{r}_0)) \right) dt = \left. t P(\vec{r}_0 + t(\vec{x} - \vec{r}_0)) \right|_0^1 = P(\vec{x}).
 \end{aligned}$$

* Produktregel im letzten Schritt

[[Wegunabhängigkeit]]