

## Übersicht

- [[Sortiervverfahren]]
- gegeben Array von unterschiedlichen Elementen
- Divide and Conquer
  - in zwei Subarrays aufteilen
  - Teilarrays rekursiv sortieren
  - sortierte Arrays zusammenfügen
- Input
  - Array a
  - linke/kleinste Index l
  - rechte/größte Index r
- zwischen l und r wird sortiert

## Algorithmus

- l=1 und r=n beim ersten Aufruf
- p:=a[r] ist Pivot-Element
- vergleiche a[l] bis a[r-1] mit p
- sortiere um, sodass
  - a[k]=p
  - a[i]<p für i<k
  - a[i]>p für i>k
- ruf Quicksort rekursiv für linke und rechte Seite auf
  - links mit den Parametern
    - \* l=l, r=k-1
  - rechts mit den Parametern
    - \* l=k+1, r=r
- angenommen alle Eingabepermutationen sind gleich wahrscheinlich
- $C_n$  ist Anzahl der Vergleiche für Array mit n Elementen
  - $C_n = 2(n+1)(H_{n+1} - 2 + \frac{1}{n+1})$
  - $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ 
    - \* n-te harmonische Zahl
- $H_n - \ln(n) - \gamma$  konvergiert gegen 0 für  $n \rightarrow \infty$ 
  - $\gamma$ :=Euler-Mascheroni-Konstante
  - $\sim 0.577$
- $\frac{C_n}{2n \ln(n)}$  konvergiert gegen 1 asymptotisch

- Beweis

Beweis  $C_0 = C_1 = 0$

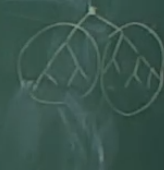
$\forall n \geq 2$

$$C_n = n-1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (C_{j-1} + C_{n-j})$$

(# Vergleiche mit Pivot)

$$= n-1 + \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} C_j$$

*j-te kleinste Element*



Rekursion

$$n C_n - (n-1) C_{n-1} = n(n-1) + 2 \sum_{j=0}^{n-1} C_j - \left( (n-1)(n-2) + 2 \sum_{j=0}^{n-2} C_j \right)$$

$$= n^2 - n - (n^2 - 3n + 2)$$

$$= 2 \left( \sum_{j=0}^{n-1} C_j - \sum_{j=0}^{n-2} C_j \right)$$

$$n C_n - (n-1) C_{n-1} = 2(n-1) + 2 C_{n-1} \Rightarrow n C_n = 2(n-1) + (n+1) C_{n-1}$$

vs  $n a_n = 2(n-1) + (n-1) a_{n-1}$

\*) Setze  $b_n := n a_n$  &  $b_0 = b_1 = 0$

\*)  $\Leftrightarrow b_n = 2(n-1) + b_{n-1}$

$b_n - b_{n-1} = 2(n-1)$

$b_{n-1} - b_{n-2} = 2(n-2)$

$b_{n-2} - b_{n-3} = 2(n-3)$

$b_1 - b_0 = 0$

$\Rightarrow b_n - b_1 = 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = 2 \left( \sum_{k=1}^n n - \sum_{k=1}^n k \right)$

$b_n = 2$

$$n C_n = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} + \frac{(n+1) C_{n-1}}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{C_n}{n+1} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} + \frac{C_{n-1}}{n}$$

Setze  $d_n = \frac{C_n}{n+1}$  Dann erhalten wir

$$d_n = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} + d_{n-1}$$

$C_n = (n+1) d_n$

$d_n - d_{n-1} = 2 \cdot \frac{(n-1)}{n(n+1)}$

$\Rightarrow d_n = 2 \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{k(k+1)}$

$d_1 = d_0 = 0$

$\frac{k-1}{k(k+1)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)k}$

$= \frac{1}{k+1} - \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$

$\Rightarrow d_n = 2 \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = 2 \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right)$

$d_n = \frac{2}{n(n+1)}$

$C_n = (n+1) d_n = \frac{2(n+1)}{n(n+1)} = \frac{2}{n}$

[[Nicht Lineare Rekursion]]