

**ACHTUNG: Eine Verbreitung
der Unterlagen außerhalb der
Vorlesung bzw. der
dazugehörigen Übungen ist
nicht gestattet !**

**Diese Vorlesung basiert auf: Hering et al., „Physik
für Ingenieure“**

ISSN 0937-7433

ISBN 978-3-642-22568-0

DOI 10.1007/978-3-642-22569-7

Springer Heidelberg Dordrecht London New York

e-ISBN 978-3-642-22569-7

8. Atom- und Kernphysik

ausgewählte Kapitel

Überblick:

- Grundlagen der Quantentheorie
- Schrödinger-Gleichung
- Spezialfälle: freies Teilchen
- Kastenpotential
- harmonischer Oszillator
- Tunneleffekt
- Atomkerne und radioaktiver Zerfall

8.2 Quantentheorie

Grenzen der klassischen Beschreibung schon in Quantenoptik angesprochen !

Hohlraumstrahlung
(schwarze Strahlung)
Lichtelektrischer Effekt
Compton-Streuung

Strahlung = Teilchenstrom aus
Lichtquanten (Photonen)

Elektronenbeugung

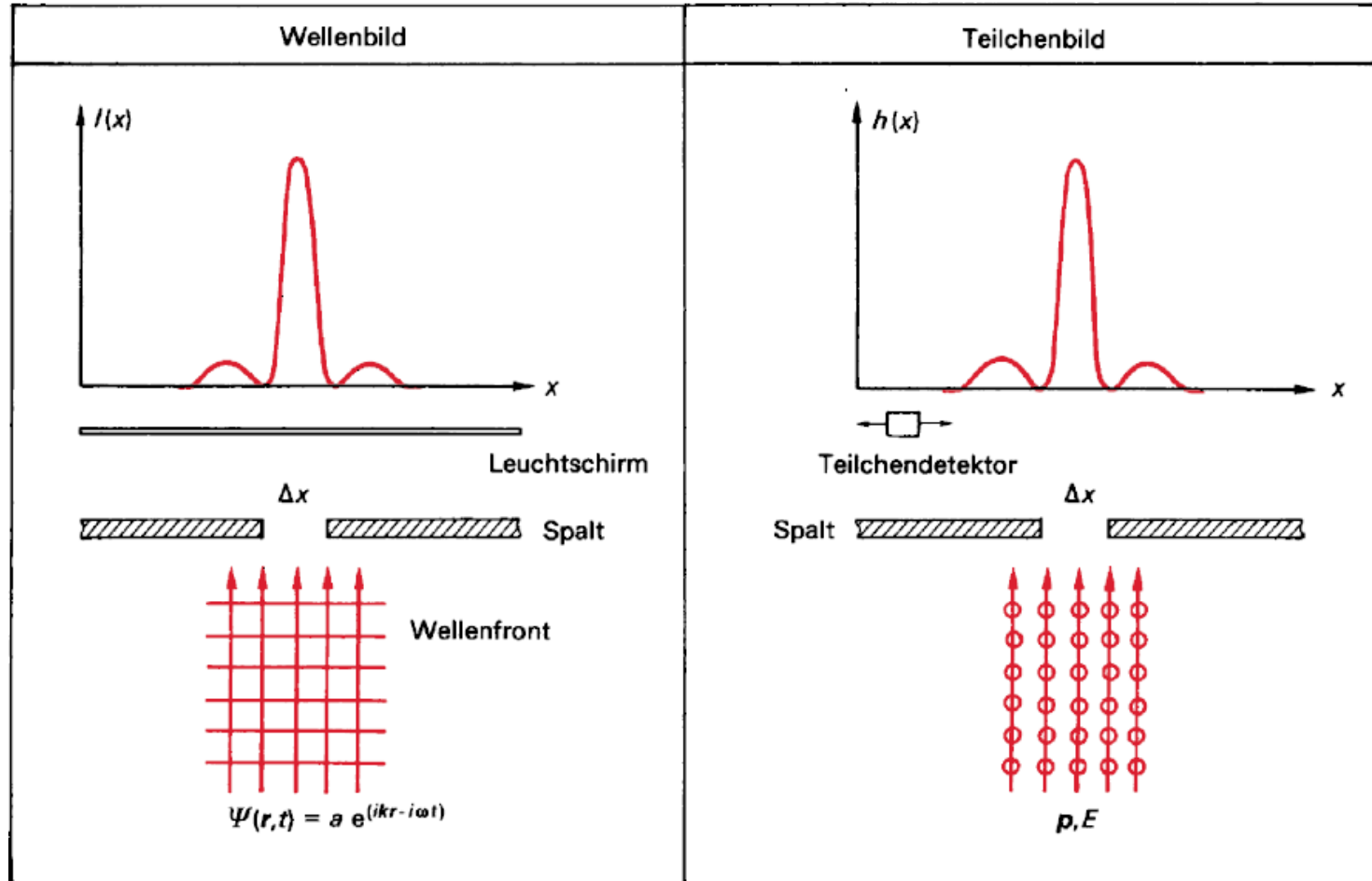
Wellencharakter
von Teilchen

Materie und Strahlung weisen eine „Doppelnatur“ auf !
(Welle-Teilchen Dualismus = Ausdruck der Unzulänglichkeit der Beschreibung)

Vermischung von anschaulichen Bildern (Wellen etc.) und Prozessen, die sich Anschauung entziehen (Atome etc.)

Beugung am Spalt

Abb. aus: Hering et al., "Physik für Ingenieure"



Quantentheorie: von Anschauung gelöste mathematische Beschreibung!

Zuordnung einer Welle Ψ zu jedem Teilchen

$$I(x) \propto |\psi(x, t)|^2 \propto h(x)$$

$x \dots$ Ort
 $t \dots$ Zeit

Wellenbild

Häufigkeit = Teilchenbild

Verallgemeinerung: Jedes Teilchen durch **Wellenfunktion**
 Ψ beschrieben

- Alle Eigenschaften des Teilchens sind in dieser Wellenfunktion $\Psi(x, y, z, t)$ enthalten (codiert)
- Wenn man die (Vielteilchen)wellenfunktion $\Psi(x_i, y_i, z_i, t)$ eines Systems kennt, kann man all seine Eigenschaften relativ einfach ausrechnen/bestimmen

Beschreibung eines Teilchens:

- Klassische Physik – Bahnkurve
- Quantenphysik - Aufenthaltswahrscheinlichkeit

z.B.: Aufenthaltswahrscheinlichkeit w eines durch Ψ beschriebenen Elektrons im Volumenelement dV :

$$w = |\psi(x, y, z, t)|^2 dV$$

Wahrscheinlichkeitsdichte

Normierung der Wellenfunktion:

Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen irgendwo im Raum anzutreffen muss 1 sein !

$$\int \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) dV = 1$$

Fundamentalgleichung der Quantentheorie zur Bestimmung von Ψ :

Schrödinger-Gleichung

vergleichbar mit Newton'scher Bewegungsgleichung, die die Bahnkurve bestimmt !

Zur Beschreibung stationärer (= zeitlich gleichbleibender)
Zustände: zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}, t) = E \Psi(\vec{r}, t)$$

$$\hbar \dots \frac{h}{2\pi}$$

m ... Masse des Teilchens
h ... Planck'sches
Wirkungsquantum

E ... Gesamtenergie des Systems
V ... potentielle Energie

Laplace Operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2$$

Eigenwertgleichung:

$$\hat{A} \psi_n(\vec{r}) = a \psi_n(\vec{r})$$

Operator

(Rechenvorschrift)

Eigenfunktion

Eigenwert

Beispiel: Freies Teilchen

$$V(\vec{r}) = 0 \quad \longrightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) = E \Psi(\vec{r}, t)$$

Lösung: ebene Welle
(ortsabhängiger Teil)

$$\Psi(\vec{r}, t) = A e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

beachte: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ $k \dots$ Wellenzahl ($=2\pi/\lambda$)

Einsetzen in Schrödinger-Gleichung liefert für die *Energieeigenwerte*:

$$E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$$

- Hier: kontinuierliches Eigenwertspektrum
- Quantenzahl k , die einen Eigenzustand eindeutig benennt

Messgrößen werden in der QM durch Operatoren dargestellt:

z.B.: **Impulsoperator**

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

Bestimmung der entsprechenden Messgröße:

Stationäre Zustände = zeitlich konstanter Messwert:
über Eigenwertgleichung des Operators

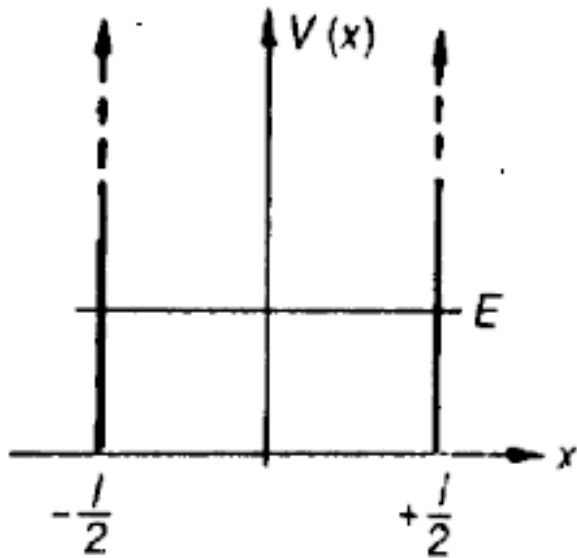
z.B.: Impuls

$$\hat{\vec{p}} \psi(\vec{r}) = \vec{p} \psi(\vec{r})$$

Messwert = Eigenwert

Beispiel: Bestimmen Sie den Impuls eines freien Teilchens und drücken Sie seine Energie als Funktion des Impulses aus

Bsp.: Teilchen in einem Rechteckpotential



Näherung: Unendlich hoher Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{l}{2} < x < \frac{l}{2} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

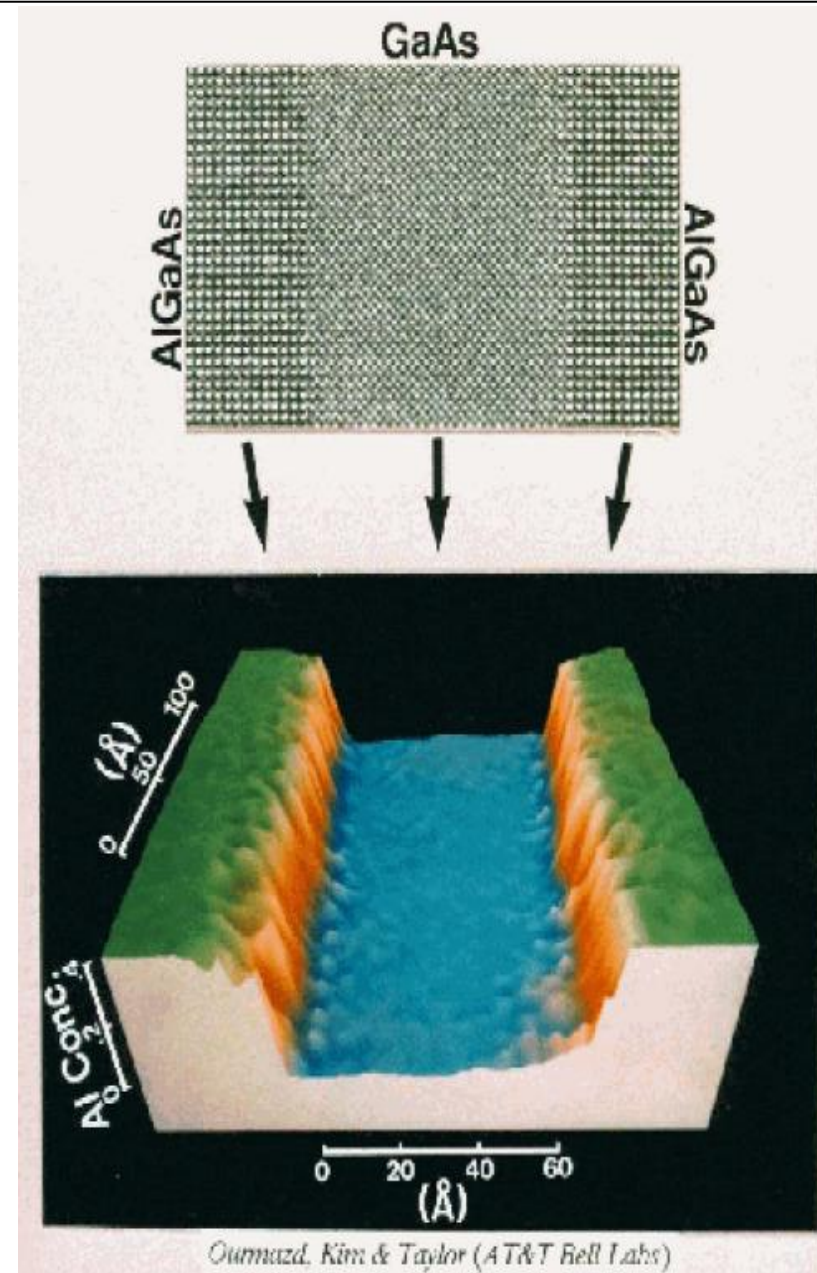
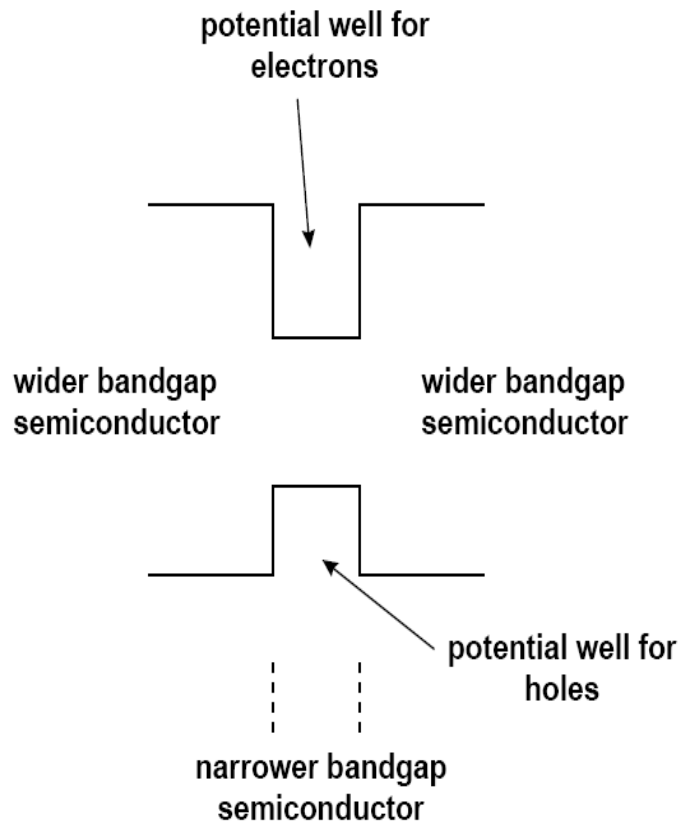
Schrödinger-Gleichung im Innenbereich:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = E \psi(x)$$

Randbedingung: Wellenfunktion muss im Außeneberich verschwinden, damit die Energie nicht unendlich wird !

Praktische Relevanz: Halbleiter-Quantentröge

- Schichtabfolge von Halbleitern mit unterschiedlichen Elektronen/Lochenergien
- Zentrales Element fast aller optoelektronischer Halbleiterbauelemente

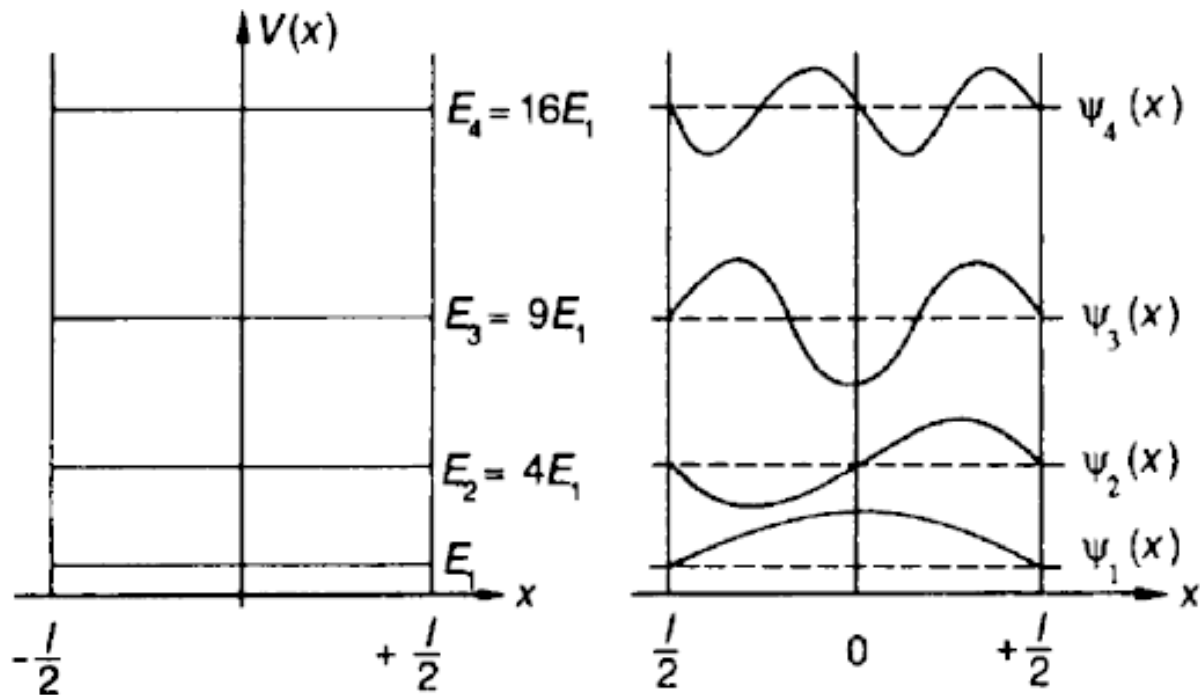


Oumazd, Kim & Taylor (AT&T Bell Labs)

Lösung: Im Innenbereich stehende Wellen, die an $x=-l/2$ und $x=l/2$ verschwinden müssen

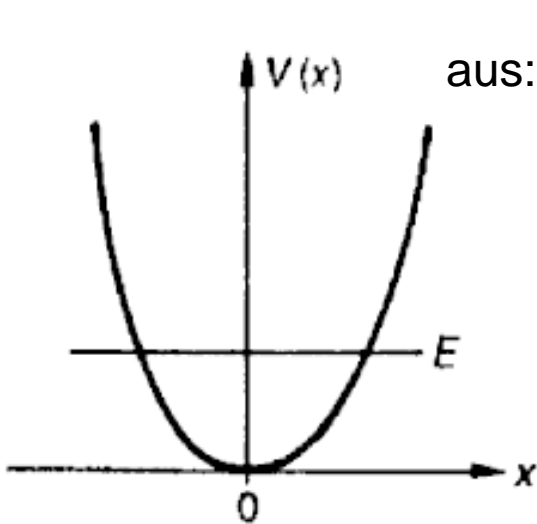
$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \text{ mit } k_n = \frac{\pi}{l} n$$

- **Diskrete Energiewerte**
– im krassen
Gegensatz zur
klassischen Mechanik !
- **Praktisch relevant aber
erst ab $l \sim 10 \text{ nm}$!**



Bsp.: Harmonischer Oszillator

D ... Federkonstante
x ... Auslenkung



aus: $V(x) = \frac{D x^2}{2}$

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \rightarrow$$

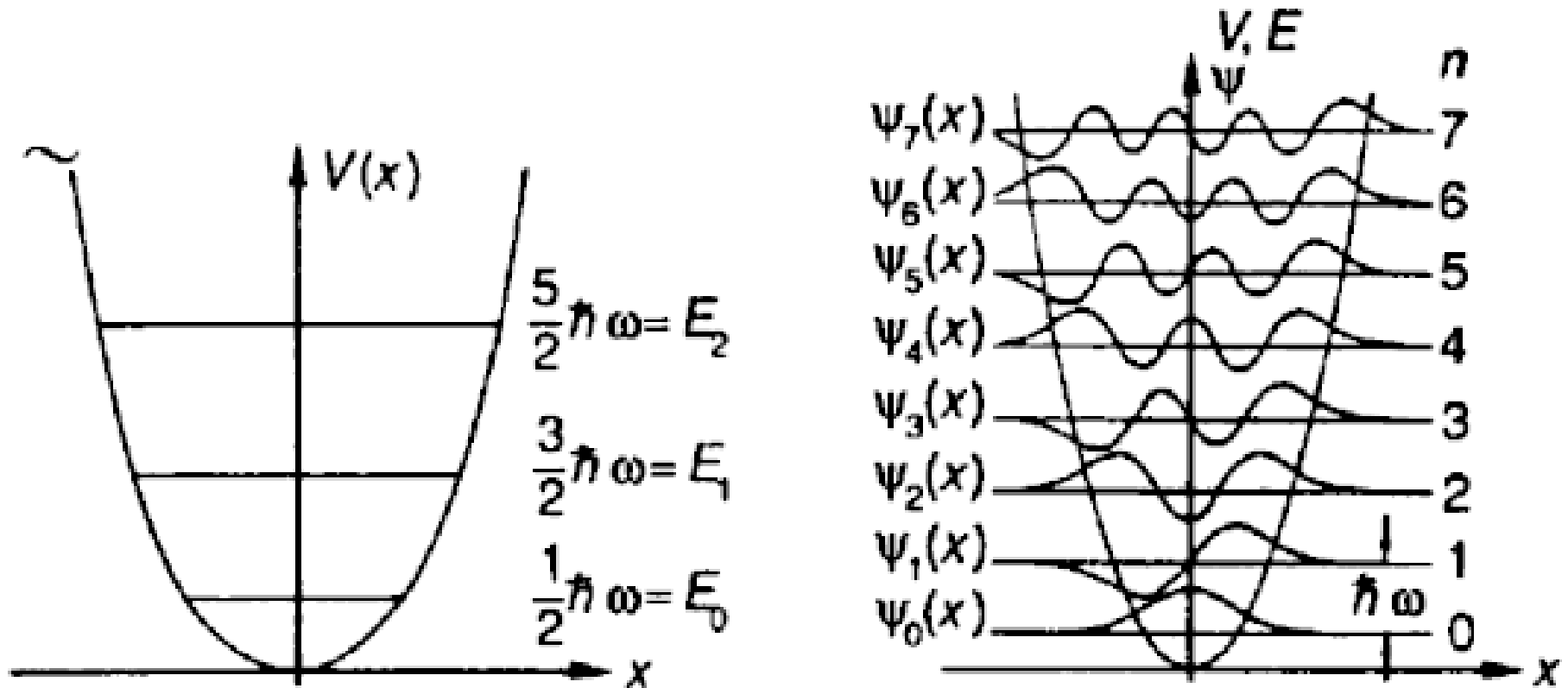
Schrödingergleichung des harmonischen Oszillators:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \psi(x) = E \psi(x)$$

**Energieeigenwerte
(ohne Ableitung):**

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

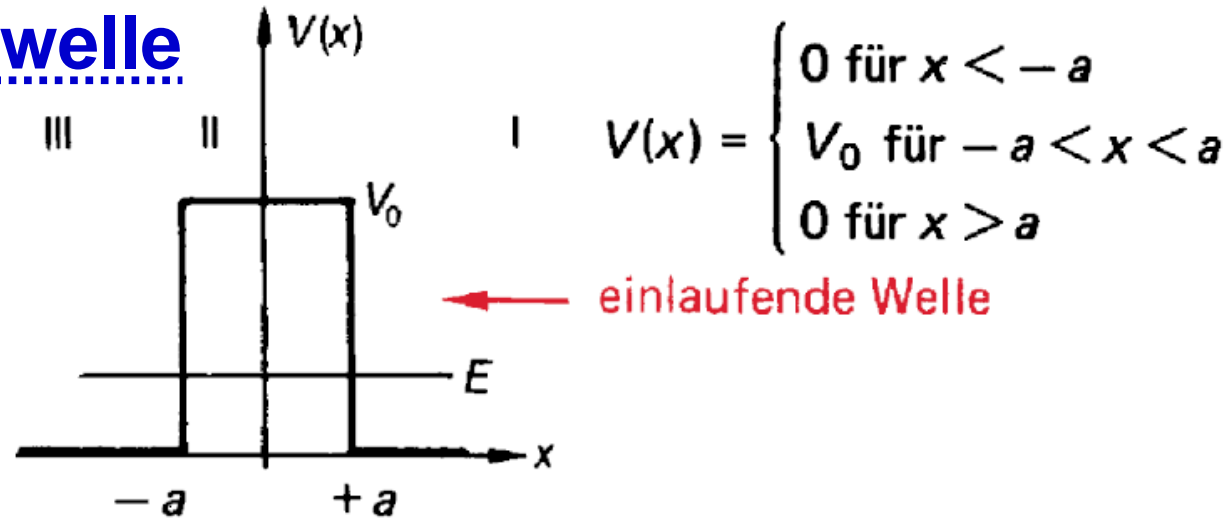
- Energie nur in (fixen) „Portionen“ zuführbar
- Nullpunktenergie („Ruhe“ gibt es nicht)



Anwendung z.B. **Infrarotspektroskopie:**

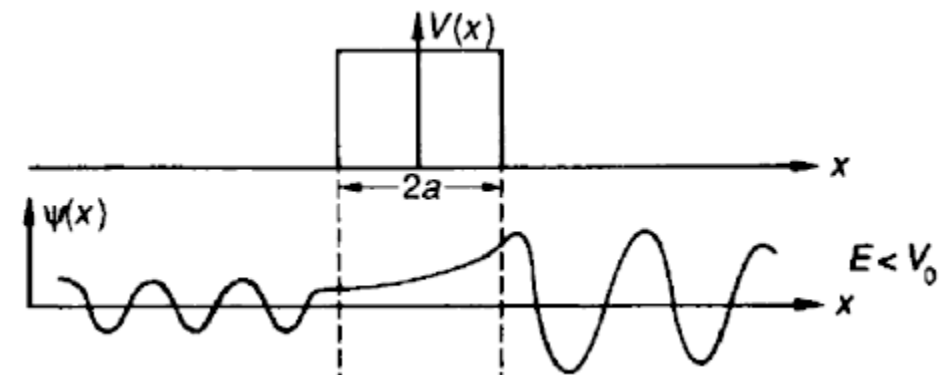
verschiedene chemische Verbindungen absorbieren Infrarot-Photonen nur bei ganz bestimmten Energien (ω von Bindungsstärke abhängig) → chemische Analyse.

Bsp.: Potentialschwelle



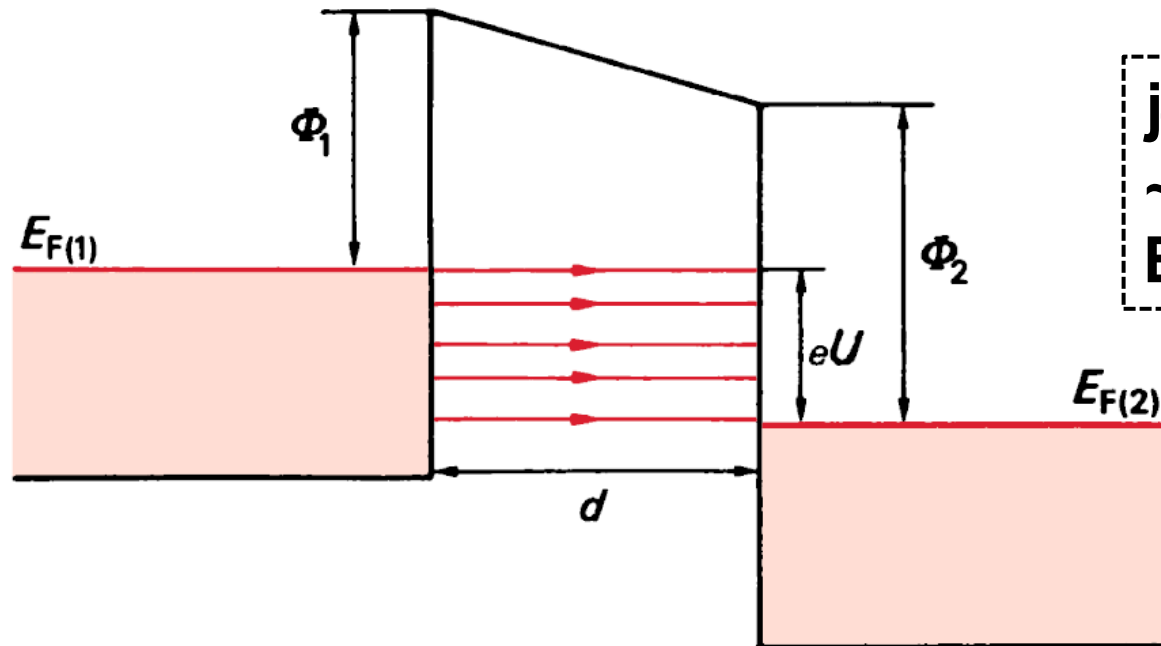
Annahme: Einlaufendes Teilchen mit $E < V_0$

- klassisches Bild: Teilchen wird reflektiert.
- Lösung der Schrödinger-Gleichung: Es gibt eine **endliche Transmissionswahrscheinlichkeit**.



Tunneleffekt:

- Potentialdifferenz zwischen zwei Metallen oder Halbleitern, die nicht direkt miteinander gekoppelt sind (Potentialbarriere, z.B., Vakuum)
- → besetzte Zustände links bei gleicher Energie wie unbesetzte Zustände rechts der Barriere
- → **Elektronen können durch die Barriere tunneln !**



j_{Tunnel} nimmt
~exponentiell mit d und
Barrierrhöhe Φ_1 ab

relevant z.B. für Halbleiter-
Metallkontakte in
Bauelementen

8.7 Aufbau der Atomkerne

- Der Kern besteht aus Z (positiv geladenen) **Protonen** und N (ungeladen) **Neutronen**; Z ... **Ordnungszahl**; $A = Z + N$... **Massenzahl**.
- **Isotope**: Kerne mit gleicher Ordnungszahl aber unterschiedlicher Massezahl
- Protonen und Neutronen werden von der **starken Wechselwirkung (Kernkraft)** zusammengehalten
- Kern beinhaltet fast die gesamte Masse eines Atoms, ist aber im Vergleich zur Elektronenhülle verschwindend klein ($R = 1,2 \cdot 10^{-15} A^{1/3}$)
- Kern hat positive Ladung der Größe $Ze \rightarrow$ erzeugt ein entsprechendes Coulombfeld.

Energieerzeugung aus Kernumwandlungsprozessen:

- Kernspaltung schwerer Kerne (typischerweise Spaltung von U-235 in zwei ~ gleich große Bruchstücke)
- Kernfusion leichter Kerne

**Von außen in Gang
gesetzte
Kernreaktionen !**

$$E = m c^2$$

E ... Energie

m ... Masse

c ... Vakuumlichtgeschwindigkeit

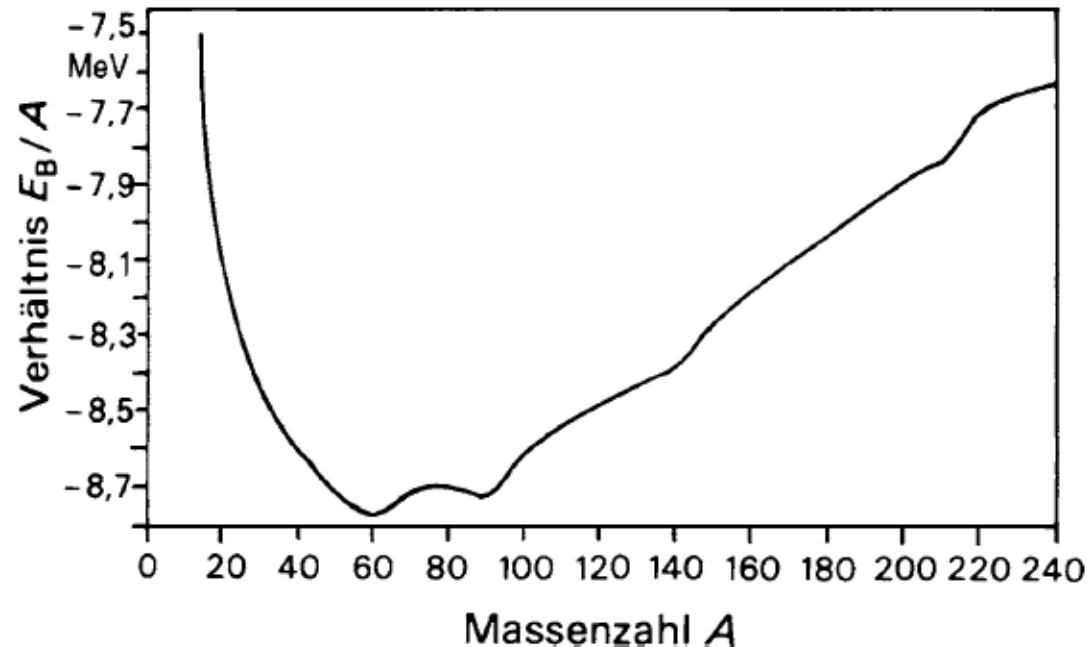


Abb. 8.53 Bindungsenergie je Nukleon in
Abhängigkeit von der Massenzahl

8.8 Radioaktiver Zerfall

spontaner Zerfall instabiler Atomkerne

Natürliche Radioaktivität:

α -Strahlung: Emission von He-Kernen (bestehend aus 2 Protonen und 2 – Ladung: 2+)

Sehr starke Wechselwirkung mit Materie → z.B.: durch Blatt Papier abschirmbar

β -Strahlung: Emission von hochenergetischen Elektronen mit ~99% der Lichtgeschwindigkeit; gleichzeitige Emission eines schwer nachweisbaren Antineutrinos

- Elektron entsteht durch Zerfall eines Neutrons in ein Proton, ein Elektron und ein Antineutrino → Abbau eines Neutronenüberschusses im Kern.
- Kann nicht durch ein Blatt Papier abgeschirmt werden!

γ -Strahlung: Hochenergetische (> 100 keV) elektromagnetische Strahlung; zeigt primär Teilchencharakter $\rightarrow \gamma$ -Quanten

- Nach α - oder β -Zerfall befindet sich der Kern häufig in einem angeregten Zustand \rightarrow Energie beim Übergang zum Grundzustand wird als γ -Quant abgegeben
- Kann „überhaupt nicht“ durch ein Blatt Papier abgeschirmt werden.

Künstliche Radioaktivität:

β^+ -Strahlung: Emission von hochenergetischen Positronen aus bei Kernreaktionen entstandenen Protonenreichen Kernen; gleichzeitige Emission eines Neutrinos.

Positron entsteht durch Zerfall eines Protons in ein Neutron, ein Positron und ein Neutrino \rightarrow Abbau eines Protonenüberschusses im Kern.

Radioaktives Zerfallsgesetz:

Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit (= **Aktivität**, A) proportional zur Zahl der noch vorhandenen Kerne, N:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

λ ... **Zerfallswahrscheinlichkeit**

[A] = 1 **Becquerel** (1 Bq) = 1 Zerfall pro s

Große Zerfallswahrscheinlichkeit: hohe Strahlenbelastung aber schnelles Abklingen der Strahlung.

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Halbwertszeit, T: t für $N = N_0/2$

Zeit nach der die Hälfte der zerfallsfähigen Kerne zerfallen ist.

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Abschwächung radioaktiver Strahlung:

$$dA = -\kappa A dx$$

κ ... Absorptionskoeffizient /
Dämpfungskoeffizient

**Daraus ergibt sich ein exponentieller
Abfall der Aktivität mit der Dicke, D:**

$$A(D) = A_0 e^{-\kappa D}$$

**Analoge Gesetzmäßigkeiten gelten für Schall-
oder Lichtabsorption (bei Licht spricht man
vom **Beer-Lambertschen Gesetz**).**

[https://de.wikipedia.org/wiki/Abschirmung_\(Strahlung\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Abschirmung_(Strahlung))

α



β



γ

