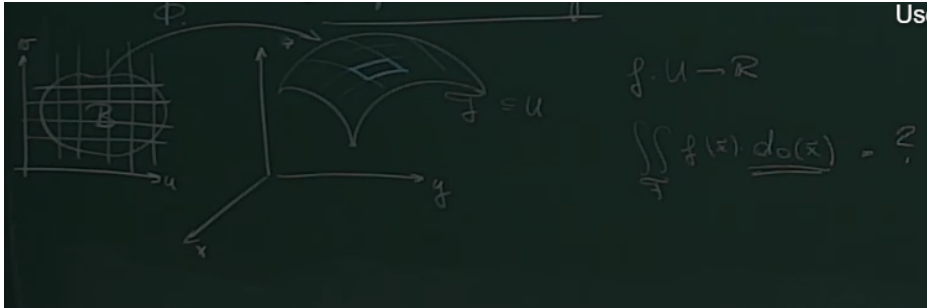
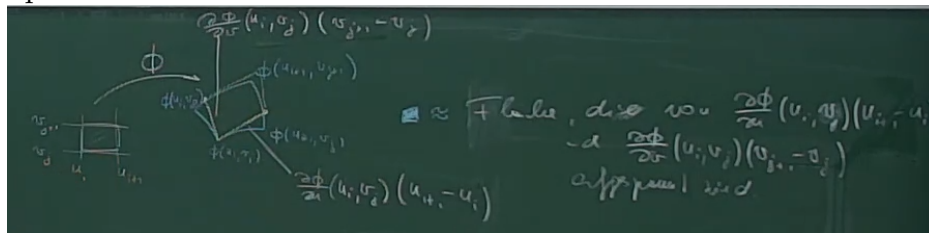


- Oberflächenbestimmung einer Ebene mittels Zerlegung in Riemann-Summen



- gekrümmte Fläche angenähert durch von Vektor aufgespanntes Parallelogramm
- * Kreuzprodukt der Vektoren



$$\approx \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\phi(u_i, v_j)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j) = \frac{(u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j)}{\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u_i, v_j) \|} \cdot \frac{1}{\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u_i, v_j) \|}$$

$$\iint_S f(x) d\sigma(x) := \iint_B f(\phi(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

- skalaras Oberflächenintegral
- skalaras Oberflächenelement
 - $do = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$
- Beispiel: Nordhalbkugel mit Kugelkoordinaten

$$\text{Bsp: } S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0 \} \quad \text{Oberfläche der Nordhalbkugel.}$$

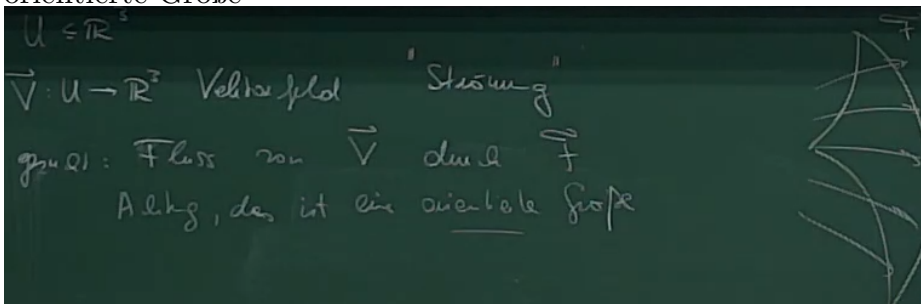
$$\iint_S z d\sigma = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 2 \cos(\varphi) \cdot 4 \sin(\varphi) d\varphi d\theta = 8\pi \int_0^{\pi/2} \sin(2\varphi) d\varphi = 8\pi \left[-\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \right]_0^{\pi/2} = 8\pi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -2 \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ 2 \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -4 \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ -4 \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ -4 \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} 2 \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ 2 \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ -7 \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right\| = 4 \sin(\varphi) \quad d\sigma = 4 \sin(\varphi) d\varphi d\theta$$

Strömung

- gesucht: Fluss von Vektorfeld V durch Fläche F in Richtung n
- orientierte Größe



- Orientierung der Fläche wird durch Wahl des Normalvektors beschrieben

$$\int \langle \vec{V}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}) \rangle = \int f(\vec{x})$$

↑
Normalvektor auf $\vec{\gamma}$ in \vec{x} .
 $\|\vec{n}\|=1$

• $\text{Fluss} = \int \int_F \langle \vec{V}(\vec{x}), \vec{U}(\vec{x}) \rangle d\sigma(\vec{x}) = \int \int_F \vec{V} d\vec{\sigma}$

$$\text{Fluss} = \int \int_F \langle \vec{V}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}) \rangle d\sigma(\vec{x}) = \int \int_F \langle \vec{V}(\vec{x}), \frac{\vec{n} d\sigma(\vec{x})}{d\sigma(\vec{x})} \rangle = \int \int_F \vec{V}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma}(\vec{x})$$

↑
normierter Normalvektor
 $d\sigma(\vec{x})$ - skalare Oberflächenelement

– $d\vec{\sigma} = \vec{n} d\sigma$

* vektorielle Oberflächenelement

– normierter Normalvektor

* Normalvektor ist Kreuzprodukt der abgeleiteten Koordinatenvektoren

* Vorzeichen von Orientierung abhängig

◆ Normalvektor zeigt in Richtung “Vorderseite”

$$\vec{n} = \pm \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|}$$

$$d\sigma = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| du dv$$

*

$$d\vec{\sigma} = \pm \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} du dv$$

*

• geschlossene Fläche

– immer der nach außen gerichtete Normalvektor

$$\oint \vec{V} d\vec{\sigma}$$

• Beispiele:

Bsp: $\vec{V}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, z = xy \}$ also in Richtung der z-Achse

$\vec{\gamma}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ xy \end{pmatrix}$, $\vec{\gamma}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$, $\vec{\gamma}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (wobei $\vec{\gamma}_z$ nicht existiert, da z nicht unabhängig ist)

$\int \int_F \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ x \end{pmatrix} dx dy = 0$ (da $\vec{\gamma}_z$ nicht existiert, zeigt das auch schon auf).

$\mathbb{R}^3 \quad \vec{V}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathcal{A} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - (x^2 + y^2), z \geq 0 \right\}$
 $\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \cos(\varphi) \\ 2 \sin(\varphi) \\ 4 - 2^2 \end{pmatrix} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -2x \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ -2y \end{pmatrix}$
 $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2x^2 \cos(\varphi) \\ 2x^2 \sin(\varphi) \\ 2 \end{pmatrix}$
 positiv + - Vorzeichen, das nicht da guckt ✓
 $\iint_{\mathcal{A}} \vec{V} \, d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(4 - x^2)}{\sqrt{2x^2 + y^2}} \cdot \begin{pmatrix} 2x^2 \cos(\varphi) \\ 2x^2 \sin(\varphi) \\ 2 \end{pmatrix} d\varphi \, dx = 0$

[[Vektoranalysis]] [[Vektor]]