Formulierung

- Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Zufallsstichprobe aus der Population F_θ mit Parameter $\theta \in \Theta$. Wir nehmen an, dass
  - die Verteilungsfamilie bekannt ist aber
  - der Parameter θ unbekannt ist.
- statistische Hypothese
  - Annahme über Parameter θ
  - $$\mathcal{H}_0 : \quad \theta \in \Theta_0,$$
  - Ziel
    - anhand von beobachteter [[Stichprobe]]
    - entscheiden ob H_0 wahr ist
- falsche Hypothese
  - $$\mathcal{H}_1 : \quad \theta \in \Theta_1,$$
  - $$\text{mit } \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0.$$
  - $\mathcal{H}_0 \ldots$ **Nullhypothese**,

    $\mathcal{H}_1 \ldots$ **Alternativhypothese**.

Beispiel

- Münzwurf
  - Wir betrachten n-unabhängige Münzwürfe und es sei θ die Wahrscheinlichkeit für Kopf. Das Experiment wird beschrieben durch die Zufallsstichprobe

    $$X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(\theta),$$

(Kopf = 1, Zahl = 0). Dann ist $\Theta = (0, 1)$ und

$$\mathcal{H}_0: \quad \theta = 0.5 \qquad \text{vs} \qquad \mathcal{H}_1: \quad \theta \neq 0.5$$

ein mögliches Hypothesenpaar. Ein anderes wäre

– $$\mathcal{H}_0: \quad \theta \leq 0.5 \qquad \text{vs} \qquad \mathcal{H}_1: \quad \theta > 0.5.$$

- Medikament
  Es bezeichne D_i die Differenz im Blutdruck einer Person i vor und nach Behandlung mit einem Medikament. Wir nehmen an, dass

  – $$D_1, \ldots, D_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2).$$

  Die Hypothese „das Medikament hat keine Wirkung" kann beschrieben werden durch

  – $$\mathcal{H}_0: \quad \mu = 0 \qquad \text{vs} \qquad \mathcal{H}_1: \quad \mu \neq 0.$$

Arten von Hypothesen

- zweiseitig
  - Verletzung in zwei Richtungen möglich
  - $$\mathcal{H}_0: \quad \mu = \mu_0 \qquad \text{vs} \qquad \mathcal{H}_1: \quad \mu \neq \mu_0.$$
    - deutlich größer/kleiner
- einseitig
  - Verletzung nur in eine Richtung möglich
  - $$\mathcal{H}_0: \quad \mu \leq \mu_0 \qquad \text{vs} \qquad \mathcal{H}_1: \quad \mu > \mu_0.$$
    - deutlich größer
  - $$\mathcal{H}_0: \quad \mu \geq \mu_0 \qquad \text{vs} \qquad \mathcal{H}_1: \quad \mu < \mu_0.$$
    - deutlich kleiner

Simple and Composite Hypothesis

- A *statistical hypothesis* H is a conjecture about the distribution of one or more random variables. If the statistical hypothesis completely specifies the distribution, then it is called *simple*; otherwise it is called *composite*.
- example

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a random sample of size n with $X_1 \sim N(\theta, 25)$, where θ is an unknown population mean. The hypothesis $H : \theta = 17$ is simple because it completely specifies the distribution. On the other hand the hypothesis $H : \theta \leq 17$ is composite because it does not completely specify the distribution.