Definition

- Urne enthält N Kugeln mit $L \geq 2$ Farben
- N_i Kugeln mit Farben L_i
- $N = N_1 + ... + N_L$
- n mal Ziehen mit Zurücklegen

Eigenschaften

- $\Omega = \{(j_1, ..., j_n) \in \{1, ..., N\}^n\}$
  - $|\Omega| = N^n$
- $A = P(\Omega)$
- $P(\{(j_1, ..., j_n)\}) = N^{-n}$
  - $P(A) = |A| \times N^{-n}$

Berechnung

- mittels [[Multinomialverteilung]]
  $$P(|Farbe\ i| = k_i, 1 \leq i \leq L) = \underbrace{\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_L}}_{\frac{n!}{k_1!k_2!\cdot\ldots\cdot k_L!}} \times p_1^{k_1} \times \cdots \times p_L^{k_L}.$$
-
  - $p_i = \frac{N_i}{N}$
- Spezialfall:
  - [[Binomialverteilung]] bei L=2
    $$p = N_1/N,$$
    $$q = 1 - p = N_2/N.$$
  - $$P(|Farbe\ 1| = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k}.$$
  -

Beispiele

- Würfel

> Wir würfeln mit 5 Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit genau zwei 4er zu würfeln?

–

5x würfeln $\quad 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$n = 5 \qquad N = 6$

$k = 2 \qquad N_1 = 1, \quad N_2 = 5$

$p = 1/6 \qquad q = 5/6$

$$\binom{5}{2}\left(1/6\right)^2\left(5/6\right)^3$$

–

- Flugbuchung

> Es ist bekannt, dass im Mittel 5% aller Passagiere ihren Flug stornieren oder verpassen. Für einen Flug haben 200 Personen Plätze gebucht. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 180 auftauchen?

–

Flugbuchungen: $\quad 1, 2, 3, \dots, 20$

$\left.\begin{matrix} N = 20 \\ N_1 = 19 \end{matrix}\right\} \Rightarrow p_1 = p = 19/20 \approx 0.05$

$n = 200$

$k = 0, \dots, 179$

$$P(\underset{A}{\text{genau } k \text{ Passagiere}}) = \binom{200}{k}\left(\frac{19}{20}\right)^k\left(\frac{1}{20}\right)^{200-k}$$

$$P(\overbrace{\text{weniger als 180 Passagiere}}) = \sum_{k=0}^{179} P(\underbrace{\text{genau } k \text{ Passagiere}}_{A_k}) \qquad A = \bigcup_{k=0}^{179} A_k$$

–

$$P(\text{weniger als } 180) = 1 - P(\geq 180)$$

$$= 1 - \Big[P(k=180 \text{ Pass}) + P(k=181 \text{ Pass}) + \; \dots \; P(k=200 \text{ Pass})\Big]$$

$A = \{\text{weniger } 180\}$

$A^c = \{\geq 180 \text{ Passagiere}\}$

$P(A^c) = 1 - P(A)$

$A \cup A^c = \Omega$

$P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1$

–

[[Laplace-Experimente]] [[Binomische Lehrsatz]]