

- Taylor Polynom  $P(x, \dots, y)$  mit mehreren Variablen
  - nähert  $f(x, \dots, y)$  für die ersten Ableitungen gut an
  - $a_{n_1 n_2} = \frac{1}{n_1! n_2!} \frac{\partial^{n_1+n_2} f}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2}}(0, 0)$

$$a_{n_1 \dots n_p} = \frac{\binom{n}{n_1, \dots, n_p}}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_p^{n_p}}(0, \dots, 0)$$

- Multinomialkoeffizient
  - $\binom{n}{n_1, \dots, n_p} = \frac{n!}{n_1! \dots n_p!}$
  - Parameteranzahl in zweiter Zeile =  $n$
  - Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}$
- Multinomialer Lehrsatz

$$(a_1 + \dots + a_p)^n = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_p \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_p = n}} \binom{n}{n_1, \dots, n_p} a_1^{n_1} \dots a_p^{n_p}$$

$$\left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_p \frac{\partial}{\partial x_p} \right)^n = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_p \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_p = n}} \binom{n}{n_1, \dots, n_p} h_1^{n_1} \dots h_p^{n_p} \frac{\partial^n}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_p^{n_p}}$$

### Satz von Taylor

- $U \subseteq \mathbb{R}^p$  offen
- liegen  $x_0$  und  $x_0 + h$  samt Verbindungsstrecke in  $U$
- $\Rightarrow f(x_0 + h) = \sum_{v=0}^n \frac{1}{v!} (h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_p \frac{\partial}{\partial x_p})^v f|_{x_0} + \frac{1}{(n+1)!} (h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_p \frac{\partial}{\partial x_p})^{n+1} f|_{x_0 + \theta h}$ 
  - 1. Term Taylor-Polynom
  - 2. Term Rest

### Extremwerte für Funktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

- im eindimensionalen
  - Extremstelle, wenn  $f'(x) = 0$
  - Min/Max, wenn  $f''(x) > / < 0$
- mehrdimensionalen
  - Extremstelle, wenn Gradient von  $f(x) = 0$
  - Max, wenn Hessematrix im Punkt negativ definit

- Min, wenn Hessematrix im Punkt positiv definit
- kein Extremum, wenn indefinit
  - \* sondern Sattelpunkt
- semidefinit  $\implies$  keine Aussagekraft
- Definitheit
  - \* quadratische Form  $Q_A(x)$

$$Q_A(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

- \* positiv definit  $\iff Q_A(x) > 0 \forall x \neq 0$
- \* negativ definit  $\iff Q_A(x) < 0 \forall x \neq 0$
- \* positiv semidefinit  $\iff Q_A(x) \geq 0 \forall x \neq 0$
- \* negativ semidefinit  $\iff Q_A(x) \leq 0 \forall x \neq 0$
- \* ansonsten indefinit

• Rechnerische Bestimmung von Extrema im mehrdimensionalen

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \quad A = A^T$$

$$\Delta_j = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{jj} & & a_{jj} \end{pmatrix}$$

- Vorzeichen von Unterdeterminanten
  - \* positiv def.  $\iff$  positives Vorzeichen
  - \* negativ def.  $\iff$  alternierendes Vorzeichen

Satz  $A \text{ pos. def.} \iff \Delta_j > 0 \quad j=1, \dots, n.$   
 $A \text{ neg. def.} \iff (-1)^j \Delta_j > 0 \quad j=1, \dots, n$   
 $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$

- Aussagekraft der  $\Delta_j$ 
  - \* eins der  $\Delta = 0 \implies$  keine Aussagekraft
  - \* alle  $\Delta > 0 \implies$  Min

\* ungerade  $\Delta < 0$ , gerade  $\Delta > 0 \implies \text{Max}$

\* ein gerades  $\Delta < 0 \implies \text{Sattelpunkt}$

[[Mehrdimensionale Differentialrechnung]]