

## Wegunabhängigkeit

- ang. V hängt nur von Anfangs- und Endpunkt von C ab

$$\underline{\Phi(x,y)} = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P dx + Q dy$$

- a,b sind Anfangs und Endpunkt
  - $\Phi$  ist Potential zu  $\vec{V}$
- wegunabhängig, wenn  $\text{grad}\Phi = \vec{V}$ 
  - Integrabilitätsbedingung
    - \* Ableitung P nach x = Ableitung Q nach y
    - \*  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
- Integral wegunabhängig  $\iff \oint_C P dx + Q dy = 0$  für jede geschlossene Kurve
- Integrabilitätsbedingung
  - Ableitung P nach x = Ableitung Q nach y
- Beispiel:

Bsp:  $\int (2xy + y^2 + 1) dx + (x^2 + 2xy - 1) dy$  wegunabhängig?

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 2y = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 2y$

$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2xy + y^2 + 1 \rightarrow \Phi(x,y) = x^2y + xy^2 + x + C(y)$

$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x^2 + 2xy + C'(y) \stackrel{!}{=} x^2 + 2xy - 1$   
 $C'(y) = -1 \quad C(y) = -y + D$

$\Phi(x,y) = x^2y + xy^2 + x - y$

\* Integration bzgl. x-Achse, anschließend y-Achse

Wskle als Integrationskurve die Gerade, die einen fixen Punkt  $(x,y)$  auf der Geraden  $(t,y)$  verbindet

$\xi = tx, \quad t \in [0,1]$   
 $\eta = ty$   
 $d\xi = x dt$   
 $d\eta = y dt$

$\int_{(0,0)}^{(x,y)} (2\xi\eta + \eta^2 + 1) d\xi + (\xi^2 + 2\xi\eta - 1) d\eta = \int_0^1 [2(tx)(ty) + (ty)^2 + 1] \cdot x + (tx)^2 + 2(tx)(ty) - 1] y dt$

$= \int_0^1 (2xyt^2 + xyt^2 + x + xyt^2 + 2xyt^2 - y) dt$

$= 3xy \frac{t^3}{3} + 3xy \frac{t^3}{3} + tx - ty \Big|_0^1 = x^2y + xy^2 + x - y$

\* Integration entlang Gerade zwischen Ursprung und (x,y)

$\int_{(0,0)}^{(x,y)} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$

$\int_{x_0=y_0=0}^{x=y} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{-r \sin(t) (-r \cos(t)) + r \cos(t) (r \sin(t))}{r^2} dt = \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt = 0$

$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-(x^2 + y^2) + y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$

$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \checkmark$

\* inklusive Integrabilitätsbedingung

- no clue

$\varphi(x,y)$ , die Nullstelle der Polynomfunktion, ist eine Stammfunktion.

$\varphi(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  für  $x > 0$

Die "Stammfunktion"  $\varphi(x,y)$  ist  
 nur stetig auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{negative } x\text{-Achse}$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$

## Dreidimensional

- $\int Pdx + Qdy + Rdz$  ist wegunabhängig  $\Leftrightarrow \forall C$  geschlossen  $\oint Pdx + Qdy + Rdz = 0$
- $\Leftrightarrow \exists \Phi : \text{grad} \Phi = (P, Q, R)$
- $\Leftrightarrow$  Stammfunktion  $\Phi$  erfüllt folgende Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

- Ableitungen paarweise gleich
- Integrabilitätsbedingungen als Vektor
  - Rotation von  $\vec{V} = \vec{0}$
  - \* dann heißt  $\vec{V}$  wirbelfrei

Rot  $\vec{V} = \text{Rot} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \times \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \times \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \end{pmatrix}$

$\uparrow$  Kräfteplan-Oberfläche bei

- Divergenz von  $\vec{V}$ 
  - $\text{div}(\vec{V}) = \nabla x \vec{V}$
  - \* Quelldichte von  $\vec{V}$
  - $\text{div}(\text{rot} \vec{V}) = \nabla(\nabla x \vec{V})$
  - Laplace Operator
  - \*  $\text{div}(\text{grad} f) = \nabla \nabla f = \Delta f$
- Beispiel: selbe Rechnung auf verschiedene Arten

Beispiel:  $\int (2x^2 + y) dx + (x^2 + y + 1) dy + (x^2 + y + 1) dz$  wegunabhängig?

$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$  ✓,  $\frac{\partial P}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial x}$  ✓,  $\frac{\partial Q}{\partial z} = 1 = \frac{\partial R}{\partial y}$  ✓

$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x + y$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x + z + 1$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = x + y + 1$

$\Phi = x^2 + xy + yz + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2$

\* Schritt für Schritt, Variable für Variable

$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (2x^2 + y) dx + (x^2 + y + 1) dy + (x^2 + y + 1) dz$

$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2x^2 + y) dx + (x^2 + y + 1) dy + (x^2 + y + 1) dz$

$\int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{2}{3}x^3 + xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 \right]_{z=0}^1 dy dx$

$\int_0^1 \left[ \frac{2}{3}x^3 + xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} \right]_{y=0}^1 dx$

$\int_0^1 \left( \frac{2}{3}x^3 + x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx = \left[ \frac{2}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right]_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

- \* möglichst einfacher Integrationsweg
- \* x-Achse, y-Achse, z-Achse

[[Oberflächenintegral]]