

## Adjazenzmatrix

- Adjazenzmatrix ist  $n \times n$  Matrix mit
  - $a_{ij} = 1$ , wenn  $V_i$  und  $V_j$  benachbart
  - sonst 0
- immer symmetrisch entlang der Diagonale
- $(A^k)_{ij} = \# \text{ Wege mit Länge } k \text{ von } v_i \text{ nach } v_j$

Beweis (durch Induktion über  $k \in \mathbb{N}$ )

Induktionsanfang: Für  $k=1$   
 $\# \text{ Wege von } v_i \text{ nach } v_j = a_{ij} = (A^1)_{ij}$

Induktionsschritt: Wir nehmen an (Induktionsannahme), dass für ein bestimmtes  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $P(k)$ .  
 Um  $P(k+1)$  zu zeigen, betrachten wir

Aufgabe

$\# \text{ Wege der Länge } k \text{ von } v_i \text{ nach } v_j$   
 $\stackrel{\uparrow \text{ Induktionsannahme}}{=} \# \text{ Wege der Länge } k+1 \text{ von } v_i \text{ nach } v_j$   
 $\stackrel{\uparrow \text{ Induktionsannahme}}{=} \sum_{v_r \in V} a_{ir} (A^k)_{rj} = (A^{k+1})_{ij} = P(k+1)$

Weg der Länge  $k$   
 Weg der Länge  $k+1$

- Beispiel:

Diagramm eines Graphen mit 5 Knoten ( $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ ) und 6 Kanten.

Adjazenzmatrix  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Sanity Check - Probe

$$\begin{aligned}
 d(v_1) &= 2 \\
 d(v_2) &= 3 \\
 d(v_3) &= 1 \\
 d(v_4) &= 0 \\
 d(v_5) &= 2 \\
 \delta(G) &= 0 \\
 \Delta(G) &= 3 \\
 d(G) &= \frac{8}{5}
 \end{aligned}$$

\*

## Inzidenzmatrix

- analog zur Adjazenzmatrix
  - 1 wenn inzident
  - sonst 0
- Beispiel:

$v_1 = 1$	$e_1 = \{1, 2\}$
$v_2 = 2$	$e_2 = \{1, 5\}$
$v_3 = 3$	$e_3 = \{2, 3\}$
$v_4 = 4$	$e_4 = \{2, 5\}$
$v_5 = 5$	

•  $n \times m$  Matrix  $B = (b_{ij})$  mit

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt Inzidenzmatrix von  $G$

$B = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$

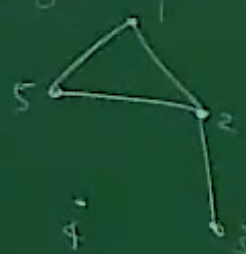
### Diagonalmatrix/Gradmatrix

- auf der Diagonale befindet sich Grad des jeweiligen Knoten

•  $n \times n$  Matrix  $D = (d_{ij})$  mit

$$d_{ij} = \begin{cases} d(v_i) & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt Diagonalmatrix



$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

### Laplace Matrix

- auf der Diagonale befindet sich Grad des jeweiligen Knoten
- ansonsten -1 falls verbunden, sonst 0

$n \times n$  Matrix  $L = (l_{ij})$  mit

$$l_{ij} = \begin{cases} d(v_i) & \text{falls } i=j \\ -1 & \text{falls } i \neq j, \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- auch über Adjazenz- und Diagonalmatrix bestimmbar

–  $L = D - A$

$L = D - A \quad \& \quad D + A = B B^T$

$$D + A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

[[Graphentheorie]] [[Matrix]]