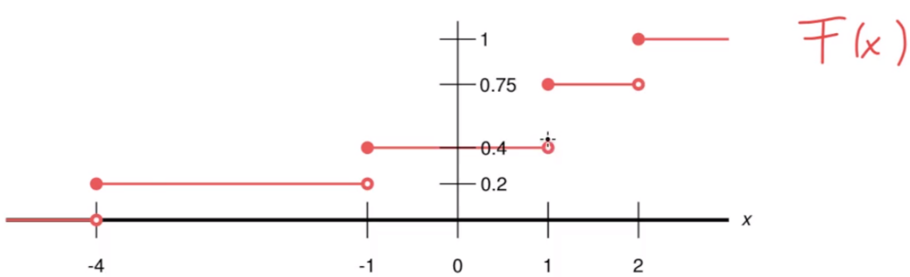
Distribution Function DF

- Funktion F, welche folgende Eigenschaften erfüllt
  - monoton steigend
  - rechtsstetig
  - $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *und* $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$
- Außerdem gilt
  - *Sei F eine DF. Dann existiert ein W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und auf diesem eine ZV X sodass $P(X \leq x) = F(x)$.*

Cumulative Distribution Function CDF

- $F^X(x) = P(X$≤x) mit $x \in \mathbb{R}$
- $P(X \in (a, b]) = F(b) - F(a)$

$$P(X = k) = \begin{cases} 0.2 & \text{falls} \quad k = -4 \\ 0.2 & \text{falls} \quad k = -1 \\ 0.35 & \text{falls} \quad k = 1 \\ 0.25 & \text{falls} \quad k = 2 \end{cases}$$

- 

Zusammenhang [[Wahrscheinlichkeitsfunktion PMF]] und [[Verteilungsfunktion CDF]]

- $F^X(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k$
- Wenn $\forall k : x_{k-1} < k \rightarrow F^X(x_k) - F^X(x_{k-1}) = p_k$
- F^X ist Treppenfunktion
  - konstant auf $[x_{k-1}, x_k)$

Parametrische DF

Fischbeispiel. Im diskreten Fall ist die Wartezeit bis zum ersten Erfolg mit einer geometrischen Verteilung modelliert:

$$P(X = k) = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Die CDF ist

$$F^X(k) = P(X \leq k) = 1 - q^k = 1 - e^{-\lambda k}, \quad \lambda = -\log(q).$$

Eine stetige Version davon könnte so sein

$$F^X(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \text{für ein } \lambda > 0 \text{ und } x \geq 0.$$

- Zeige, dass das für $\lambda > 0$ eine CDF ist. Damit bekommt man eine parametrische (mit Parameter λ) Familie von Verteilungsfunktionen $F_\lambda(x)$.
- naiver Ansatz
  - funktioniert nicht

    Wie sollen wir im letzten Beispiel λ wählen?

    Eine naive Idee wäre es, $P(X = 30)$ in Abhängigkeit von λ zu maximieren.

    Allerdings ist $P(X = x) = 0$ für jedes x und jedes λ!

    Denn: sei $x_n \nearrow x$. Dann ist

    $$P(X = x) = \lim_n P(X \in (x_n, x]) = \lim_n (F_\lambda(x) - F_\lambda(x_n)) = 0.$$
  -
- Alternative

  Wähle jenes λ wo $f_\lambda(30) := \frac{\partial}{\partial x} F_\lambda(x)|_{x=30}$ maximal wird.

  Es gilt

  $$f_\lambda(30) = \lambda e^{-30\lambda}.$$

  - Wähle λ derart, dass $f_\lambda(30)$ maximal ist und zeige dass dann $\lambda = 1/30$.

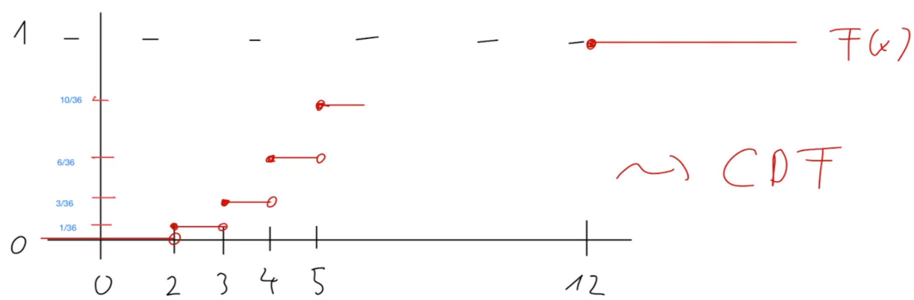
$$\frac{d}{d\lambda}\lambda e^{-30\lambda} = 1 \cdot e^{-30\lambda} - 30 e^{-30\lambda}\lambda$$
$$= e^{-30\lambda}\underbrace{(1-30\lambda)}_{\overset{!}{=}0} \overset{!}{=} 0$$
$$\Longleftrightarrow \lambda = \frac{1}{30}$$

Beispiele

- Würfeln
  - Angenommen wir würfeln und X ist die Augenzahl. Was ist die PMF und wie sieht die CDF von X aus?
  -

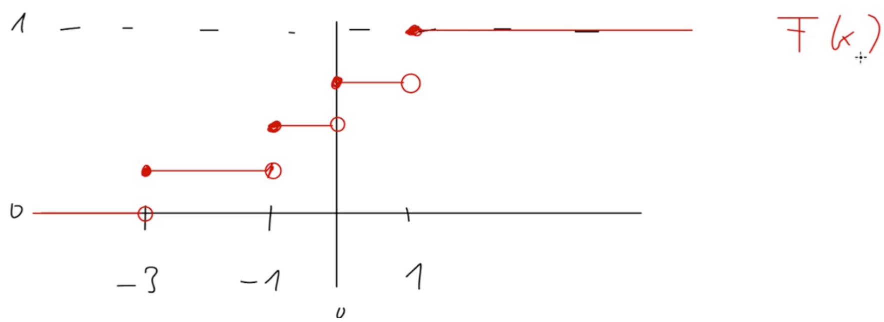
k	2	3	4	5	$\dots$	12
p_k	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$\dots$	$1/36$

$\rightarrow$ PMF $= p_k$



- Gleichverteilung
  - Skizziere die CDF von X, wenn X auf $\{-3, -1, 0, 1\}$ gleichverteilt ist.

k	-3	-1	0	1
p_k	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

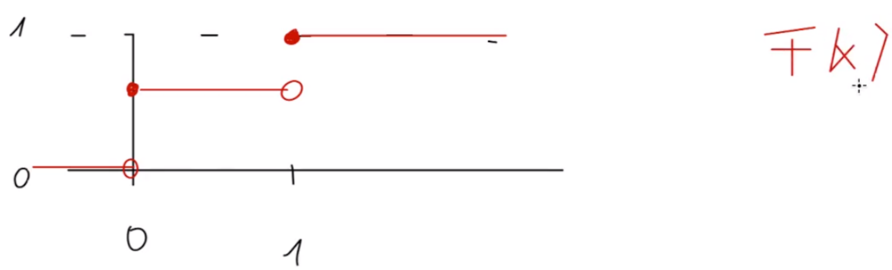


–

- Binomialverteilung

  – Skizziere die CDF von X, wenn $X \sim B_{1,1/3}$.

k	0	1
p_k	$2/3$	$1/3$



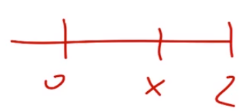
–

- Ampel

  Ampelbeispiel. Wenn wir zufällig an der Ampel ankommen, so scheint jede Wartezeit zwischen 0 und 2 Minuten gleich wahrscheinlich. Das klingt nach einem Laplace-Experiment, aber jetzt ist $\Omega = [0,2]$ und daher $|\Omega| = \infty$ (nicht zählbar)!

  Analog zum Laplace-Experiment setzen wir:

$$P(X \in A) = \frac{\text{Länge}(A)}{\text{Länge}(\Omega)}.$$



  Dann ist die CDF

$P(X \in (1, 1.5]) = F(1.5) - F(1)$

$$F^X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < 0; \\ x/2 & \text{wenn } 0 \leq x \leq 2; \\ 1 & \text{wenn } x > 2. \end{cases}$$

–

– Bergwerk, stetige Gleichverteilung

> In einem Bergwerk verwendet man schwere 10m lange Ketten zum Heben von Schlacke. Im Prinzip würde auch schon eine Länge von 8m reichen. Wenn eine Kette reißt (an einer komplett zufälligen Stelle), wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man Sie weiter verwenden kann?

* X ... Bruchpunkt

  $X \sim$ stetig gleichverteilt auf $[0,10]$

  $$F^X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{10} & x \in [0,10] \\ 1 & x \geq 10 \end{cases}$$

  $$P(\{X \leq 2\} \cup \{X \geq 8\}) = P(X \leq 2) + P(X \geq 8)$$

  $$= F^X(2) + 1 - \underbrace{P(X \leq 8)}_{F^X(8)} = \frac{2}{10} + 1 - \frac{8}{10} = \frac{2}{5}$$

*