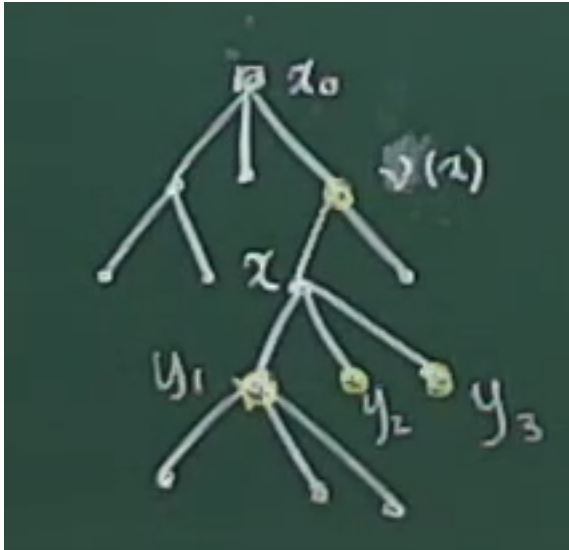


Bäume

- Graph ohne Kreis heißt Wald
- Graph heißt Baum, wenn
 - zusammenhängend
 - ohne Kreis $\iff |E| = |V| - 1$
- für je zwei Knoten, gibt es genau einen Pfad
- Wurzel x_0 ist “Spitze” von Baum



- jeder Knoten (außer x_0) hat genau einen (ersten) Vorgänger $v(x)$
 - * $d(x_0, v(x)) < d(x_0, y)$
 - * $v^k(x)$ = k-te Vorgänger
- Nachfolger sind Nachbarn ohne Vorgänger

$$N_T^+(x) = N_T(x) \setminus \{v(x)\}$$

Nachfolger von x .

*

- * Blätter Nachfolger ohne Nachfolger

- Höhe von x $h(x) = d(x_0, x)$
- Binärbaum
 - jeder Knoten hat maximal 2 Nachfolger
 - $h = \lfloor \log_2(n) \rfloor$

Path Finder

- Input: Baum T , Knoten x, y
- Output: kürzeste Pfad von x nach y
- Algorithmus

- wähle Knoten x_0 aus $V/\{x, y\}$ als Wurzel
- bestimme Pfad P_x von x bis x_0
 - * $P_x = (x, v^1(x), v^2(x), \dots, v^k(x) = x_0)$
 - * automatisch kürzeste Pfad
- bestimme Pfad P_y von y bis x_0
- bestimme kleinsten gemeinsamen Vorgänger j

$$v^{j+r}(x) = v^j(y)$$

- return Pfad von x zu j nach y

$$\text{return: } p = (x, v^1(x), \dots, v^{j+r}(x), v^{j+r}(y), v^{j-1}(y), \dots, y)$$

Spannbäume

- Baum T ist Spannbaum von G , wenn
 - $V(T) = V(G)$
 - $E(T) \subseteq E(G)$



- Laplace-Matrix $L(G)$
 - $n \times n$ Matrix mit bis zu n Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$
 - * $\forall 0 \leq i \leq n-1 : \lambda_i \geq 0$
 - * kleinste $\lambda = 0$

$$L \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

- Matrix-Baum-Satz von Kirchhoff
 - sei G ein zusammenhängender Graph mit n Knoten
 - #Spannbäume von $G = \frac{1}{n} \lambda_1 * \dots * \lambda_{n-1}$

- Cayley-Formel

- #Spannbäume von $K^n = n^{n-2}$

Cayley-Formel: $|\mathcal{T}(K_n)| = n^{n-2}$

Beweis: $L(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$

$L \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = n, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = n, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_{n-1} = n, \vec{v}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_n = 0, \vec{v}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Prüfer-Code: Bijektion $f: \mathcal{T}_n \rightarrow S_{n-2} = \{(s_1, s_2, \dots, s_{n-2}) : 1 \leq s_i \leq n\}$

Menge von Spannbäumen von K_n

Für $1 \leq k \leq n-2$: $\vec{v}^{(k)} = (v_1, \dots, v_{n-1})$ mit $v_k = 1$ & $v_{k+1} = -1$

$\vec{v}^{(n-1)} = (0, \dots, 0, -1, 1)$

$\vec{v}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L \vec{v}^{(k)} = n \cdot \vec{v}^{(k)}$

[[Wege und Kreise]]