Empirische Quantile

Definition. Sei $p \in (0, 1)$ und

$$Q_p = X_{(\lfloor np \rfloor + 1)}.$$

- Dann bezeichnet Q_p das **empirische *p*-Quantil** der Stichprobe.
- Anteil von $p * 100\%$ ist $\leq Q_p$
- Median
  - 0.5-Quantil
- Quartile
  - $$Q_{0.25}, Q_{0.5}, Q_{0.75}$$
- Perzentile
  - $$Q_{0.1}, Q_{0.2}, \ldots, Q_{0.9}$$
- Beispiel

  Wir betrachten die Zeit (s), die eine CPU für die Ausführung eines Befehls benötigt und notieren $n = 15$ Werte:

1.86	3.49	2.63	3.49	1.69
1.83	0.81	4.70	0.85	4.24
3.49	2.75	1.65	0.92	0.62.

  - Gesucht sind die empirischen Quartile $q_{0.25}, q_{0.5}$ und $q_{0.75}$.
  - $n = 15$

    $q_{0.25} = x_{(\lfloor n \cdot 0.25 \rfloor + 1)}$

    $= x_{(3+1)} = x_{(4)} = 0.92$

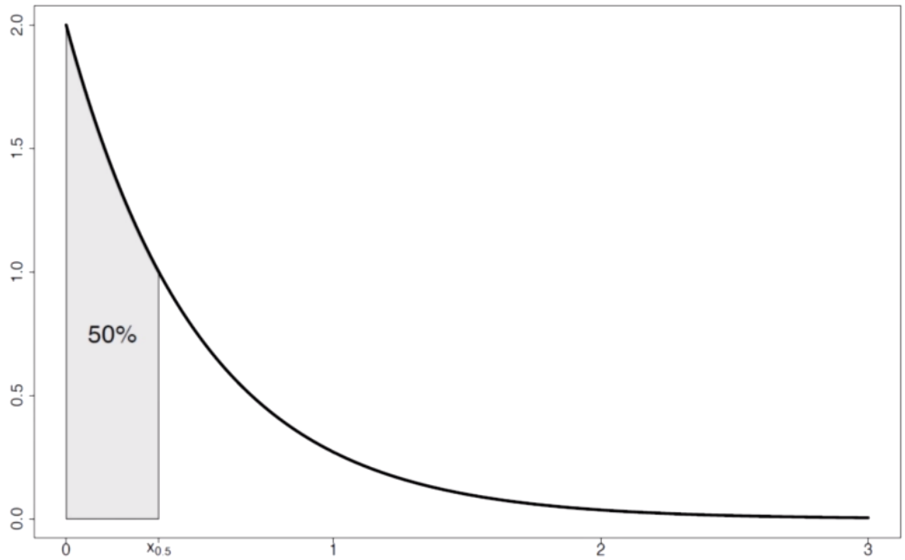
    $q_{0.5} = x_{(\lfloor n \cdot 0.5 \rfloor + 1)} = x_{(8)} = 1.86$

    $q_{0.75} = x_{(\lfloor n \cdot 0.75 \rfloor + 1)} = x_{(12)} = 3.49$

Theoretische Quantile

Definition. Sei $p \in (0, 1)$ und X eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion F. Gilt für $x_p \in \mathbb{R}$, dass

$$F(x_p) = p,$$

- dann heißt x_p **theoretisches *p*-Quantil** der Verteilung F.
- Wahrscheinlichkeitsmasse von 50% links von x_{50}
  - 

- Empirische Quantile
  - Schätzer von theoretischen Quantilen
- Beispiel
  - Gegeben sei eine exponentialverteilte Zufallsvariable $X \sim \text{Exp}(2)$. Die entsprechende Verteilungsfunktion ist gegeben durch

    $$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

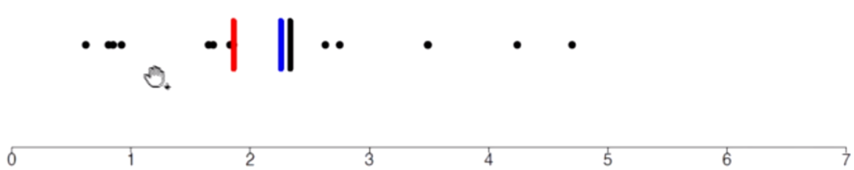
    Bestimmten sie den Median $x_{0.5}$.

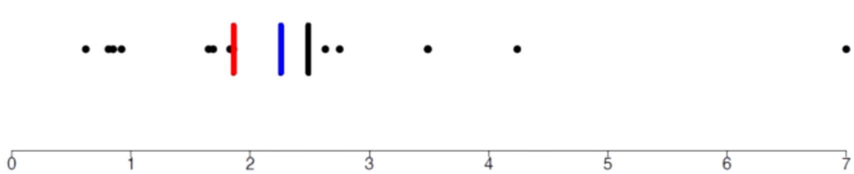
-
$$F(x_{0.5}) \overset{!}{=} 0.5$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 - e^{-2x_{0.5}} = 0.5$$
$$\Leftrightarrow \quad -e^{-2x_{0.5}} = -0.5$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{-2x_{0.5}} = 0.5$$
$$\Leftrightarrow \quad -2x_{0.5} = \log(0.5)$$
$$\Leftrightarrow \quad x_{0.5} = -\frac{\log(0.5)}{2} \approx 0.35$$

Lokationsmaße

Mittelwert $\bar{X}$
$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$
Median med $= Q_{0.5}$,

α-getrimmtes Mittel $\bar{X}_\alpha$ für $\alpha \in (0, 0.5)$
$$\bar{X}_\alpha = \frac{1}{n - 2\lfloor n\alpha \rfloor} \sum_{i=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{n - \lfloor n\alpha \rfloor} X_{(i)},$$
Modalwert mode: Der am häufigsten vorkommende Wert in der Stichprobe (i.A. nicht eindeutig).

- 



- Abbildung: Grafische Veranschaulichung des CPU–Datensatzes mit Mittelwert (schwarz), 0.25-getrimmtem Mittel (blau) und Median (rot).
- In der zweiten Abbildung wurde der Wert `4.70` durch `7.00` ersetzt.

Standardabweichung S

$$S = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \right)^{1/2},$$

Likelihood Standardabweichung S_L

$$S_L = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \right)^{1/2},$$

iqr–Standardabweichung S_q

$$S_q = \frac{\mathrm{iqr}}{1.349} = \frac{Q_{0.75} - Q_{0.25}}{1.349},$$

iqr ... Interquartilsabstand (interquartile range).

- **mad–Standardabweichung S_{mad}**

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{mad}} &= \frac{1}{0.674}\,\mathrm{mad} \\ &= \frac{1}{0.674}\,\mathrm{med}\{|X_i - Q_{0.5}| : i = 1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

mad ... median absolute deviation.

-

Schiefe

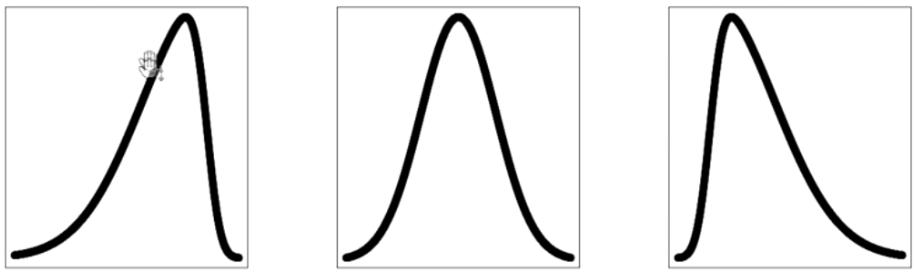
Das skalierte dritte zentrale Moment γ_3 einer Zufallsvariablen X nennt man **Schiefe**,

$$\gamma_3 = \mathsf{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right].$$

Die empirische Schiefe ist gegeben durch

$$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{S_L}\right)^3.$$

-
- beschreibt (A)Symmetrie



linksschief symmetrisch rechtsschief

  -
- Normalverteilung
  - Schiefe null, somit symmetrisch
  - weicht die empirische Schiefe von null ab
  - Annahme der Normalverteilung womöglich falsch

Wölbung

Das skalierte vierte zentrale Moment γ_4 einer Zufallsvariablen X heißt **Wölbung** oder **Kurtosis**,

$$\gamma_4 = \mathsf{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right].$$

Die empirische Wölbung ist

$$W = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{S_L}\right)^4.$$

-
- misst Ausprägung der Extrema
  - große Wölbung $\rightarrow$ heavy tails
- Normalverteilung

Die Wölbung einer Normalverteilung ist gleich 3. Man nennt daher

$$\gamma_4 - 3 = \mathrm{E}\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^4\right] - 3$$

den **Exzess**. Der empirische Exzess $W - 3$ misst also die Abweichung der Stichprobe zur Normalverteilung.

–

Konsistenz

- unter Annahme des [[Gesetz der großen Zahlen]]

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu,$$

$$S_n \xrightarrow{P} \sigma,$$

$$V_n \xrightarrow{P} \gamma_3,$$

$$W_n \xrightarrow{P} \gamma_4,$$

–

- $\bar{X}_n$, S_n, V_n und W_n **konsistente Schätzer** sind.