Wahrscheinlichkeitstheorie für Informatikstudien (Kapitel #2)

Siegfried Hörmann

TU Graz

WS 2020/21

Kursaufbau

1. Wahrscheinlichkeitsräume.
2. Laplace-Experimente.
3. Wichtige diskrete Verteilungen.
4. Zufallsvariablen.
5. Zufallsvektoren.
6. Momente.
7. Bedingte Wahrscheinlichkeiten.
8. Unabhängigkeit.
9. Konvergenz von Zufallsvariablen.
10. Der zentrale Grenzwertsatz.

Laplace-Experimente

Laplace-Experimente

Wir betrachten den wichtigen Spezialfall wo $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ mit $1 \leq N < \infty$ und wo jedes Elementarereignis $\omega \in \Omega$ die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzt.

Man spricht dann von einem Laplace-Experiment.

Es gilt dann wegen (N) und (A), dass

$$1 \overset{\text{(N)}}{=} P(\Omega) \overset{\text{(A)}}{=} \sum_{i=1}^{N} \underbrace{P(\omega_i)}_{\text{alle gleich groß}} = N \times P(\omega).$$

Somit gilt für alle $\omega \in \Omega$, dass $P(\omega) = \frac{1}{N}$ und daher (warum?) für jedes Ereignis A in Ω, dass

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \Longleftarrow \text{ das ist ein W-Maß!}$$

Laplace-Experimente

Sehr viele nützliche Fragestellungen und bekannte stochastische Modelle lassen sich auf Laplace-Experimente zurückführen oder durch diese motivieren (Symmetrie).

$\Longrightarrow$ Das ist der Inhalt dieses und des nächsten Kapitels.

Ein wichtiger Punkt ist, dass wir dazu immer den richtigen Wahrscheinlichkeitsraum wählen müssen.

Laplace-Experimente

Beispiel

Wir interessieren uns für die Augenzahl beim Würfeln mit zwei Würfel.

- Wie lautet ein geeignetes Ω?
- Beschreibe $A_k = \{\omega\colon \text{Augenzahl} = k\}$.
- Was ist $P(A_5)$?

Laplace-Experimente

Wir versuchen nun ein paar unterschiedliche Fragestellungen als Laplace-Experimente zu modellieren.

Beispiel

- Wir spielen Lotto. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit 3 richtige Nummern zu haben?
- Wir spielen Bridge und bekommen 5 Karten. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit 2 Asse, 2 Könige und 1 Dame zu haben?
- Wir fischen in einem Teich mit 100 Forellen und 50 Karpfen. Wir fangen 5 Fische. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit nur Forellen gefangen zu haben?

Die Fragen sind an sich recht unterschiedlich. Bevor wir nun jedes Experiment extra modellieren, empfiehlt es sich die Fragen jeweils in einheitliches abstraktes Modell zu übersetzen. Es hat sich bewährt auf sogenannte Urnenmodelle zurückzugreifen.

Versuchen Sie diese Experimente mit dem Ziehen von Kugeln aus einer Urne zu vergleichen.

Urnenmodelle: Ziehen ohne Zurücklegen

All diese Beispiele können auf das folgende Urnenmodell zurückgeführt werden.

Eine Urne enthält Kugeln die mit $L \geq 2$ Farben gefärbt sind. Wir haben N_i Kugeln mit Farbe i und $N = N_1 + \cdots + N_L$ Kugeln insgesamt. Wir ziehen n mal $(1 \leq n \leq N)$ ohne Zurücklegen. Was ist

$$P(|\text{Farbe } i| = k_i, 1 \leq i \leq L) =?$$

Urnenmodelle: Ziehen ohne Zurücklegen

Ansatz für ein Laplace-Experiment:

- Nummeriere die Kugeln $1, \ldots, N$;
- Kugeln $1, \ldots, N_1$ haben Farbe 1, Kugeln $N_1 + 1, \ldots, N_1 + N_2$ haben Farbe 2, etc.
- jedes Elementarereignis besteht aus einer n-Teilmenge von $\{1, \ldots, N\}$;
- $\Longrightarrow$ Laplacemodell auf diesem Stichprobenraum.

Urnenmodelle: Ziehen ohne Zurücklegen

Formaler

- $\Omega = \{\{j_1, \ldots, j_n\} \subset \{1, \ldots, N\}\} \Longrightarrow |\Omega| = \binom{N}{n} \left(= \frac{N!}{n!(N-n)!}\right)$;
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- $P(\{j_1, \ldots, j_n\}) = 1/\binom{N}{n} \Longrightarrow P(A) = |A|/\binom{N}{n}$.

Proposition (Hypergeometrische Verteilung)

Betrachte das obige Urnenmodell. Dann haben wir

$$P(|Farbe\ i| = k_i, 1 \leq i \leq L) = \frac{\binom{N_1}{k_1} \times \cdots \times \binom{N_L}{k_L}}{\binom{N}{n}},$$

mit der Konvention, dass $\binom{a}{b} = 0$ *falls* $b > a$.

Urnenmodelle: Ziehen ohne Zurücklegen

Beispiel (Lotto)

Wir wählen 6 Zahlen aus $\{1, \ldots, 45\}$ ohne Zurücklegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir 4 richtig erraten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Lotto-Sechser?

Beispiel (Fragenkatalog)

Für eine Prüfung hat der Professor einen Fragenkatalog mit 32 Fragen aufgelegt. Zur Prüfung wählt er dabei jeweils 5 Fragen zufällig aus. Peter hat nur 20 Fragen gelernt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens 3 richtig hat?

Urnenmodelle: Ziehen mit Zurücklegen

Betrachte nun die folgenden Beispiele:

Beispiel

- Wir würfeln mit 5 Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit genau zwei 4er zu würfeln?
- Es ist bekannt, dass im Mittel 5% aller Passagiere ihren Flug stornieren oder verpassen. Für einen Flug haben 200 Personen einen Platz gebucht. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 180 den Flug antreten?

Versuchen Sie diese Experimente mit dem Ziehen von Kugeln aus einer Urne zu modellieren.

Urnenmodelle: Ziehen mit Zurücklegen

Wir treffen dieselben Annahmen wie zuvor, werden aber dieses Mal die Kugeln wieder zurücklegen.

Eine Urne enthält Kugeln die mit $L \geq 2$ Farben gefärbt sind. Wir haben N_i Kugeln mit Farbe i und $N = N_1 + \cdots + N_L$ Kugeln insgesamt. Wir ziehen n mal ($n \geq 1$) <u>mit</u> Zurücklegen. Was ist

$$P(|\text{Farbe } i| = k_i, 1 \leq i \leq L) = ?$$

Urnenmodelle: Ziehen mit Zurücklegen

Ansatz für ein Laplace-Experiment:

- Nummeriere die Kugeln $1, \dots, N$;
- Kugeln $1, \dots, N_1$ haben Farbe 1, Kugeln $N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2$ haben Farbe 2, etc.
- jedes Elementarereignis besteht aus einem Vektor $(j_1, \dots, j_n) \in \{1, \dots, N\}^n$;
- $\Longrightarrow$ Laplacemodell auf diesem Stichprobenraum.

Urnenmodelle: Ziehen mit Zurücklegen

Formaler

- $\Omega = \{(j_1, \ldots, j_n) \in \{1, \ldots, N\}^n\} \Longrightarrow |\Omega| = N^n$;
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- $P(\{(j_1, \ldots, j_n)\}) = N^{-n} \Longrightarrow P(A) = |A| \times N^{-n}$.

Proposition (Multinomialverteilung)

Betrachte das obige Urnenmodell. Sei $p_i = N_i/N$. Dann haben wir

$$P(|Farbe\ i| = k_i, 1 \le i \le L) = \underbrace{\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_L}}_{\frac{n!}{k_1!k_2!\cdot\ldots\cdot k_L!}} \times p_1^{k_1} \times \cdots \times p_L^{k_L}.$$

Urnenmodelle: Ziehen mit Zurücklegen

Ein wichtiger Spezialfall ist die Binomialverteilung; hierbei ist $L = 2$.

Korollar (Binomialverteilung)

Betrachte das obige Modell mit $L = 2$. Sei

$$\begin{aligned} p &= N_1/N, \\ q &= 1 - p = N_2/N. \end{aligned}$$

Dann haben wir

$$P(|Farbe\ 1| = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k}.$$

Urnenmodelle: Ziehen mit Zurücklegen

Beispiel (Würfeln)

Wir würfeln mit 5 Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit genau zwei 4er zu würfeln?

Beispiel (Flugbuchung)

Es ist bekannt, dass im Mittel 5% aller Passagiere ihren Flug stornieren oder verpassen. Für einen Flug haben 200 Personen Plätze gebucht. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 180 auftauchen?

Von der hypergeometrischen zur Binomialverteilung

Im Folgenden untersuchen wir die Zusammenhänge zwischen der hypergeometrischen Verteilung und der Binomialverteilung. Zur Vereinfachung sei $L = 2$.

Angenommen wir haben N Kugeln in einer Urne. N_1 sind schwarz und $N - N_1$ sind weiß. Wir interessieren uns für die Anzahl der schwarzen Kugeln, die wir in n Ziehungen erhalten. Die binomialen Wahrscheinlichkeiten hängen nur vom Verhältnis N_1/N ab und nicht von den eigentlichen Zahlen N_1 und N.

Dies ist bei der hypergeometischen Verteilung anders. Falls wir jedoch die Anzahl N der Kugeln in der Urne erhöhen und $p = N_1/N$ und n fixieren, erwarten wir, dass die Wahrscheinlichkeiten $P(|\text{weiß}| = k)$ sich approximativ an die Binomialwahrscheinlichkeiten annähern.

Von der hypergeometrischen zur Binomialverteilung

Formal:

$$P(|\text{Farbe } 1| = k)$$

$$= \frac{\binom{N_1}{k} \times \binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{N_1!}{k!(N_1-k)!} \frac{(N-N_1)!}{(n-k)!(N-N_1-n+k)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}$$

$$= \binom{n}{k} \frac{N_1 \cdots (N_1 - k + 1)(N - N_1) \cdots (N - N_1 - n + k + 1)}{N \cdots (N - k + 1)(N - k) \cdots (N - n + 1)}.$$

Und für jedes fixe k, ℓ haben wir

$$\frac{N_1 - \ell}{N - \ell} \to p \quad \text{and} \quad \frac{N - N_1 - \ell}{N - k - \ell} \to (1 - p).$$

Von der hypergeometrischen zur Binomialverteilung

Proposition

Betrachte eine Urne mit N Kugeln, von welchen N_1 schwarz und $N - N_1$ weiß sind. Angenommen wir ziehen n mal ohne Zurücklegen. Ist n fix, $N \to \infty$, und $N_1/N \to p$, dann folgt

$$P(|\mathit{Farbe}\ 1| = k) \to \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Beispiel (Anzahl der Passagiere)

Eigentlich könnte man hier ein hypergeometrisches Modell ansetzen: die Fluglinie hat insgesamt N Passagiere, von denen insgesamt 5% den Flug stornieren. Wir wählen von N jetzt 200 Passagiere zufällig aus, also ziehen wir ohne Zurücklegen. Weil aber N sehr gross ist, können wir das Binomialmodell verwenden.

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Ein Laplace-Experiment ist ein Spezialfall vom folgenden Konzept.

Endlicher Stichprobenraum

Sei $\Omega \neq \emptyset$ mit $|\Omega| < \infty$. Sei $(p_i \colon 1 \leq i \leq |\Omega|)$ nicht-negativ und $\sum_{k=1}^{|\Omega|} p_k = 1$. Dann definieren wir

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k \quad \text{(insbesondere } P(\omega_k) = p_k\text{)}.$$

Dies ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß und das Tripel $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ definiert einen Wahrscheinlichkeitsraum.

Die Folge (p_k) nennt man Wahrscheinlichkeitsfunktion (PMF).

Beispiel

In einem Laplace-Experiment haben wir $p_k = 1/|\Omega|$. Wir nennen das die diskrete Gleichverteilung auf Ω.

Beispiel

Wir können das Binomialmodell direkt auf $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$ definieren, mit

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Die Folge (p_k) definiert eine PMF für jeden Wert $p \in (0, 1)$. Daher haben wir eine parametrische Familie von PMFs und, als Erweiterung zum Urnenmodell, kann man sogar irrationale p betrachten.

Beispiel (Würfeln)

Wir haben 2 Würfel und interessieren uns für die Summe der Augenzahlen. Wir setzen $\Omega = \{2, \dots, 12\}$. Bestimme die PMF für dieses Experiment.

Beispiel (PMF)

Sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Es sei die PMF gegeben durch $p_k = c/k$, $k \in \Omega$. Bestimme c.

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Abzählbarer Stichprobenraum

Sei $\Omega \neq \emptyset$ mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$. Sei $(p_k : k \geq 1)$ nicht-negativ und so, dass $\sum_{k \geq 1} p_k = 1$. Dann definieren wir

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k.$$

Dies ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß und das Tripel $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ definiert einen Wahrscheinlichkeitsraum.

Beispiel

Wir interessieren uns für die Anzahl von Toren in einem Fußballspiel.

- $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Was ist $p_k = P(|\text{Tor}| = k)$? (Statistiken!)