Kovarianz

- beschreibt Abhängigkeit zwischen zwei [[Zufallsvariable]]
- Berechnung über [[Erwartungswert]]
  - Sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit Erwartungswert (μ, ν) und die Marginalen seien in L^2. Dann nennen wir

    $$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X-\mu)(Y-\nu))$$

    die Kovarianz zwischen X und Y. Ist $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ so sagen wir, dass X und Y unkorreliert sind.

    Wir schreiben dann: $X \perp Y$.
  - ▶ Es gilt im Allgemeinen

    $$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

    ▶ Sind X und Y diskret, dann gilt

    $$E(XY) = \sum_k \sum_\ell x_k y_\ell P(X = x_k, Y = y_\ell).$$

    ▶ Haben (X, Y) eine Dichte $f(x, y)$, dann gilt

    $$E(XY) = \int\int xyf(x, y)dxdy.$$
- $Var(X) = Cov(X, X)$

Korrelation

- Maß der Abhängigkeit zwischen Zufallsvariablen X und Y
- Korrelation zwischen X und Y
  - $$\mathrm{Corr}(X, Y) := \frac{\mathrm{Cov(X, Y)}}{\sqrt{\mathrm{Var(X)}}\sqrt{\mathrm{Var(Y)}}} \leq 1.$$
- Beispiel

- Betrachte den Zufallsvektor (X, Y). Sowohl X als auch Y nimmt die Werte $0, 1, 2$ an. Hier ist die PMF:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.2	0.1
1	0.2	0.1	0.1
2	0	0	0.2

Berechne $\mathrm{Corr}(X, Y)$.

- Korrelation von Zufallsvektor

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	0.1	0.2	0.1	0.4
1	0.2	0.1	0.1	0.4
2	0	0	0.2	0.2
	0.3	0.3	0.4	1

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$$

$\rightsquigarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - EX \cdot EY$

$EX = 0.8$

$EY = 1.1$

$EXY = 1 \times 1 \times 0.1 + 1 \times 2 \times 0.1 + 2 \times 1 \times 0 + 2 \times 2 \times 0.2$

$= 0.1 + 0.2 + 0 + 0.8 = 1.1$

$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = 1.1 - 0.8 \times 1.1 = 0.22$

$\rightsquigarrow \mathrm{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = EX^2 - 0.64 = 1.2 - 0.64 = 0.56$

$EX^2 = 1 \times 0.4 + 4 \times 0.2 = 1.2$

Kovarianzmatrix

- Betrachte einen Zufallsvektor mit Komponenten $X = (X_1, \dots, X_n)$ und sei

$$\mathrm{Var}(X) = \Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(X_1, X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Cov}(X_2, X_2) & \dots & \mathrm{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_n, X_1) & \mathrm{Cov}(X_n, X_2) & \dots & \mathrm{Cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}.$$

Man nennt Σ die Kovarianzmatrix von X.

- Eigenschaften
  - Σ ist nicht-negativ definit [$a'\Sigma a \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}^n$];

    Σ ist symmetrisch.
- Herleitungen

Sei X ein Zufallsvektor in $\mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Sei $\Sigma = \mathrm{Var}(X)$. Dann gilt

$$\mathrm{Var}(AX + b) = A\Sigma A'.$$

Seien $X, Y, X_i \in L^2$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(a) $aX + b$ und $cY + d$ sind in L^2 und

$$\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X, Y).$$

Im Besonderen gilt $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$.

(b) $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. Sind die X_i unkorreliert, dann

$$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i).$$