Definition

- $$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} =: p_k.$$
- [[Binomialverteilung]] konvergiert gegen Poisson Verteilung für seltene Ereignisse
  - n sehr groß
  - p sehr klein

Herleitung

- **Die Poisson-Verteilung** $\quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

  Unter obigen Annahmen, haben wir für jedes fixe ℓ, dass $(n-\ell)p \to \lambda$. Für jedes fixe k gilt $(1-p)^{-k} \to 1$. Daher folgt, dass

  $$p \cdot p \cdots p$$

  $$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n \cdots (n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

  $$= \underbrace{\frac{np \times (n-1)p \times \cdots \times (n-k+1)p}{k!}}_{\to \frac{\lambda^k}{k!}} \underbrace{\left(1 - \frac{pn}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{(1-p)^{-k}}_{\to 1}$$

  $$\to \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} =: p_k.$$

  $$(1-p)^{n-k} = (1-p)^n (1-p)^{-k}$$

  $$\lambda$$

  $$= \left(1 - \frac{pn}{n}\right)^n \underbrace{(1-p)^{-k}}_{\approx 1}$$

  $$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x \quad (n \to \infty)$$

Beispiele

- Lotto
  - Angenommen 20 Mio. Lottoscheine wurden verkauft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens 2 Gewinner zu haben? Wir verwenden die Poisson Approximation und erhalten $np \approx 2.46$.

$$P(\text{mindestens 2 Lotto 6er}) = 1 - P(0 \text{ oder } 1 \text{ 6er})$$

$$\left.\begin{array}{l} n = 20 \text{ Mio.} \\ p = \frac{1}{\binom{45}{6}} \end{array}\right\} \quad n \cdot p \approx 2{,}46 = \lambda$$

$$P(0 \text{ 6er}) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n \approx e^{-\lambda}$$

$$P(1 \text{ 6er}) = \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} \approx e^{-\lambda}\lambda$$

$$1 - e^{-\lambda} - e^{-\lambda}\lambda$$

–

- Fußball

  – Angenommen die Anzahl der Tore pro Spiel eines Clubs folgt einer Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = 2$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft in mindestens einem Spiel (in einer Saison mit 50 Spielen) mehr als 4 Tore schießt?

  –

$$P(>4 \text{ Tore in einem einzigen Spiel}) =$$

$$1 - P(\leq 4 \text{ Tore}) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \underbrace{P(k \text{ Tore})}_{\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-2}2^k}{k!}} = p$$

$$P(\text{mindestens in einem von 50 Spielen} > 4 \text{ Tore}) =$$

$$1 - P(\text{nie mehr als 4 Tore}) =$$

$$1 - \binom{50}{0} p^0 (1-p)^{50} = \underline{1 - (1-p)^{50}}$$

–