

Übersicht

- analog zu [[Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten]] jedoch mit Störfunktion
- $y^{(n)} + a_{n-1} * y^{(n-1)} + \dots + a_1 * y' + a_0 * y = s(t)$
 - $s(t)$ Störfunktion
 - * Linearkombination von $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^m e^{\lambda t}, \dots$
- allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung
 - $y(t) = y_P(t) + y_H(t)$
 - * $y_P(t)$ ist eine Lösung der inhomogenen Gleichung
 - * $y_H(t)$ ist allgemeine Lösung der homogenen Gleichung
- innere Resonanz, wenn Nullstelle λ mehrfach auftritt
- äußere Resonanz für $f_i(x)$, wenn
 - $f_i(x)$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

Ansatz für partikuläre Lösung

- abhängig von Resonanz und $s(x)$
- keine äußere
 - Um einen Ansatz in den nun folgenden Formen durchführen zu können, darf **keine** äußere Resonanz vorliegen.
 - $f_i(x) = A \dots (\text{const.})$
Ansatz für $f_i : B \text{ (const.)}$
 - $f_i(x) = x^m$ bzw. $f_i(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_m x^m$
Ansatz für $f_i : B_0 + B_1 x + \dots + B_m x^m$
 - $f_i(x) = Ae^{\mu x}$
Ansatz für $f_i : Be^{\mu x}$
 - $f_i(x) = A \sin(kx)$, $f_i(x) = A \cos(kx)$, $f_i(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$
Ansatz für $f_i : C \sin(kx) + D \cos(kx)$
 - $f_i(x) = Ae^{\mu x} \sin(kx)$, $f_i(x) = Ae^{\mu x} \cos(kx)$, $f_i(x) = e^{\mu x}(A \cos(kx) + B \sin(kx))$
Ansatz für $f_i : e^{\mu x}(C \cos(kx) + D \sin(kx))$
 - $f_i(x) = e^{\mu x} P(x)$ ($P(x) \dots$ Polynom)
Ansatz für $f_i : e^{\mu x} Q(x)$ ($Q(x) \dots$ Polynom vom selben Grad wie
–
 $P(x)$)
 - $f_i(x) = P(x) \sin(kx)$, $f_i(x) = P(x) \cos(kx)$ ($P(x) \dots$ Polynom)
–
Ansatz für $f_i : Q(x) \sin(kx) + R(x) \cos(kx)$ ($Q(x), R(x) \dots$ Polynome)
- äußere und keine innere

- Ansatz x multiplizieren
- äußere und innere
 - Ansatz mit linearem Polynom x^n multiplizieren
 - n ist Ordnung von λ
- keine äußere und keine innere
 - nicht mit Polynom multiplizieren
- Cheat-Sheet

$s(x)$	y_{sp}
$P(x)$	$Q(x)$
$e^{\lambda x} P(x)$	$e^{\lambda x} Q(x)$
$e^{\lambda x} \cos(\omega x)$	$e^{\lambda x} (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$
$e^{\lambda x} \sin(\omega x)$	$e^{\lambda x} (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$
$e^{\lambda x} P(x) \cos(\omega x)$	$e^{\lambda x} (Q_1(x) \cos(\omega x) + Q_2(x) \sin(\omega x))$
$e^{\lambda x} P(x) \sin(\omega x)$	$e^{\lambda x} (Q_1(x) \cos(\omega x) + Q_2(x) \sin(\omega x))$

Herleitung

$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = e^{\lambda t}$
 $y(t) = A e^{\lambda t}$
 $A p(\lambda) e^{\lambda t} = e^{\lambda t} \implies A = \frac{1}{p(\lambda)}$ wenn $p(\lambda) \neq 0$
 $p(\lambda) = 0 \implies \frac{p(\lambda)}{p(\lambda)} e^{\lambda t} = p(\lambda) e^{\lambda t} \implies \left(\frac{p(\lambda)}{p(\lambda)} \right)^2 e^{\lambda t} = p(\lambda) e^{\lambda t} + \dots + p(\lambda) e^{\lambda t} = p(\lambda) e^{\lambda t}$
 $p(\lambda) = 0 \implies \frac{p(\lambda)}{p(\lambda)} e^{\lambda t} = p(\lambda) e^{\lambda t} \implies \left(\frac{p(\lambda)}{p(\lambda)} \right)^2 e^{\lambda t} = p(\lambda) e^{\lambda t} + \dots + p(\lambda) e^{\lambda t} = p(\lambda) e^{\lambda t}$

Zusammenfassung

$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = s(t) \implies p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$
 Lösungsgesamtheit $y = s(t) \implies 0$
 $p(\lambda_j) = 0$ (Nullstelle der Ordnung k_j) $e^{\lambda_j t}, t e^{\lambda_j t}, \dots, t^{k_j-1} e^{\lambda_j t}$ bzw. wenn komplex
 $p(\lambda_j \pm i \mu_j) = 0$ $e^{\lambda_j t} \cos(\mu_j t), e^{\lambda_j t} \sin(\mu_j t), t e^{\lambda_j t} \cos(\mu_j t), t e^{\lambda_j t} \sin(\mu_j t), \dots, t^{k_j-1} e^{\lambda_j t} \cos(\mu_j t), t^{k_j-1} e^{\lambda_j t} \sin(\mu_j t)$
 inhomogenes Gleichung $s(t)$ in spezieller Form.

$s(t)$	keine äußeren Resonanzen	äußere Resonanzen	P_n, Q_n, \dots Polynome vom Grad n
$P_n(t) e^{\lambda_j t}$	$Q_n(t) e^{\lambda_j t}$	$t^k Q_n(t) e^{\lambda_j t}$ k ist die Ordnung der Nullstelle λ_j von $p(\lambda)$	
$R_k(t) e^{\lambda_j t} \cos(\mu_j t)$	$R_k(t) e^{\lambda_j t} \cos(\mu_j t)$	$t^k R_k(t) e^{\lambda_j t} \cos(\mu_j t)$	
$Q_k(t) e^{\lambda_j t} \sin(\mu_j t)$	$S_k(t) e^{\lambda_j t} \sin(\mu_j t)$	$S_k(t) e^{\lambda_j t} \sin(\mu_j t)$	

Beispiel

Bsp: $y'' + 3y' + 3y = e^{-t} + 2 \cos(t)$
 zuerst homogenes Gleichung $y'' + 3y' + 3y = 0$
 $\lambda^2 + 3\lambda + 3 = 0 \implies \lambda_{1,2} = -1.5 \pm i$ in Vielfachheit 2
 $y_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$

Ansatz für eine Lösung der inhomogenen DGL:
 $y_p(t) = A t^2 e^{-t} + B \cos(t) + C \sin(t)$
 $y_p'(t) = 2A t e^{-t} - A t^2 e^{-t} + B \sin(t) + C \cos(t)$
 $y_p''(t) = 2A e^{-t} - 2A t e^{-t} - A t^2 e^{-t} + B \cos(t) - C \sin(t)$
 $y_p'''(t) = -2A e^{-t} + 2A t e^{-t} - 2A t^2 e^{-t} - B \sin(t) - C \cos(t)$

$$\begin{aligned}
 & 6Ae^{-t} - 12At e^{-t} + 12A^2 t^2 e^{-t} - At^3 e^{-t} + B \cos(t) - C \sin(t) + 18A t e^{-t} - 12A^2 t^2 e^{-t} + 3A^3 t^3 e^{-t} - 3B \cos(t) - 3C \sin(t) \\
 & + 9A t^2 e^{-t} - 3A^2 t e^{-t} - 3B \cos(t) + 3C \sin(t) + A t^2 e^{-t} + B \cos(t) + C \sin(t) = e^{-t} + 2 \cos(t) \\
 & e^{-t} \quad \frac{6A-1}{e^{-t}} \quad A = \frac{1}{6} \\
 & \cos(t) \quad -C - 3B + 3C + B = 2 \quad -2B + 2C = 2 \quad -B + C = 1 \quad \textcircled{1} \quad 2C = 1 \quad B = \frac{1}{2} \\
 & \sin(t) \quad B - 3C - 3B + C = 0 \quad -2B - 2C = 0 \quad B + C = 0 \quad \textcircled{2} \quad 2B = -1 \quad C = \frac{1}{2} \\
 & y(t) = \frac{1}{6} t^3 e^{-t} - \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \sin(t) + C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + C_3 t^2 e^{-t} \\
 & y'' + 3y' + y = 2e^{-t} \cos(t) \quad -1 \pm i \\
 & y_p(t) = e^{-t} (A \cos(t) + B \sin(t)) \\
 & y_p'(t) = -e^{-t} (A \cos(t) + B \sin(t)) + e^{-t} (-A \sin(t) + B \cos(t)) = e^{-t} ((B-A) \cos(t) - (A+B) \sin(t)) \\
 & y_p''(t) = -e^{-t} ((B-A) \cos(t) - (A+B) \sin(t)) + e^{-t} (-(B-A) \sin(t) - (A+B) \cos(t)) = e^{-t} (-2B \cos(t) + 2A \sin(t)) \\
 & y_p'''(t) = -e^{-t} (-2B \cos(t) + 2A \sin(t)) + e^{-t} (2B \sin(t) + 2A \cos(t)) = e^{-t} (2(A+B) \cos(t) + 2(B-A) \sin(t)) \\
 & \rightarrow e^{-t} \left[\cos(t) \left(\frac{2A+2B-6B}{-B} + 3B-3A+A \right) + \sin(t) \left(\frac{2B-2A+6A-3A-3B+2}{A} \right) \right] = 2e^{-t} \cos(t) \quad \begin{matrix} -2=2 \\ A=0 \end{matrix} \\
 & y''' + 3y'' + 3y' + y = 2e^{-t} \cos(t) \quad y(t) = -2e^{-t} \sin(t) + C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + C_3 t^2 e^{-t} \\
 & y_p(t) = -2e^{-t} \sin(t) \\
 & y'' + 3y' + 3y' + y = t e^{-t} \quad y_p(t) = t^2 e^{-t} (A t + B) = e^{-t} (A t^3 + B t^3) \\
 & y_p'(t) = -e^{-t} (A t^3 + B t^3) + e^{-t} (4A t^2 + 3B t^2) = e^{-t} (-A t^3 + (4A-B) t^2 + 3B t^2) \\
 & y_p''(t) = -e^{-t} (-A t^3 + (4A-B) t^2 + 3B t^2) + e^{-t} (-3A t^2 - (12A-3B) t^2 + 6B t) \\
 & = e^{-t} (A t^3 + (-8A+B) t^2 + (2A-6B) t) \\
 & y_p'''(t) = -e^{-t} (A t^3 + (-8A+B) t^2 + (2A-6B) t) + e^{-t} (3A t^2 - (24A+3B) t^2 + (24A-12B) t + 6B) \\
 & y_p''(t) = e^{-t} (-A t^3 + (12A-B) t^2 + (-36A+9B) t^2 + (24A-12B) t + 6B) \\
 & \rightarrow e^{-t} \left[t^3 (-A+3A-3A+A) + t^2 (12A-B-24A+3B+12A-3B+B) + t (-36A+9B+36A-12B+9B) + (24A-12B+12B) \right] \\
 & \quad (6B) = e^{-t} \left(\frac{24A-1}{6B=0} \quad A = \frac{1}{24} \quad B=0 \right) \quad \frac{y_p(t)}{t^2 e^{-t}} \quad y(t) = \frac{1}{24} t^3 e^{-t} + C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + C_3 t^2 e^{-t}
 \end{aligned}$$