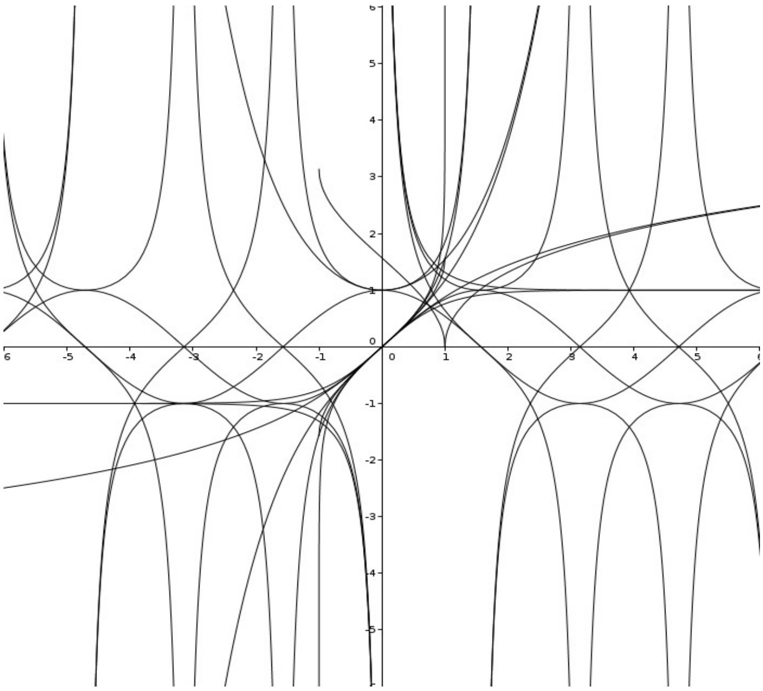
Analysis 1

VORTRAGENDER: UNIV.-PROF. DIPL.-ING. DR.TECHN.
Grabner Peter



Mitschrift von: **Kloner Christoph**

17. Februar 2019

Inhaltsverzeichnis

0 Logik und Mengenlehre

Begriffe

- Aussage: Satz, der wahr oder falsch sein kann
- Logik: beschäftigt sich mit Aussagen und Verknüpfungen von Aussagen

Verknüpfungen

- Konjunktion: A und B ... A $\wedge$ B
- Disjunktion: A oder B ... A $\vee$ B
- Negation: nicht A ... $\neg$A
- Subjunktion: „Wenn A, dann B"... A $\rightarrow$ B
- Bijunktion: „Genau dann A, wenn B gilt"... A $\leftrightarrow$ B

Veranschaulichung durch die Wahrheitstafel

A	B	A $\wedge$ B	A $\vee$ B	A $\rightarrow$ B	A $\leftrightarrow$ B
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Bemerkung 1.

- *Wenn $A \rightarrow B$ als wahr angenommen wird ($A \rightarrow B$ immer wahr), dann schreibt man statt $\rightarrow$, einen $\Rightarrow$.*
  (Doppelpfeil impliziert Wahrheitsgehalt und muss nicht weiter überprüft werden).
- *Wenn A und B immer wahr sind, schreibt man statt $\leftrightarrow$, einen $\Leftrightarrow$.*
- *Es gilt $A \Rightarrow B = (\neg A) \vee B$*

Begriffe

- Tautologie: Aussage, die immer wahr ist $\big($z.B.: A $\vee$ ($\neg$A)$\big)$
- Kontradiktion: Aussage, die immer falsch ist $\big($z.B.: A $\wedge$ ($\neg$A)$\big)$

Rechenregeln der Logik

$$\text{Überprüfung durch Wahrheitstafeln} \begin{cases} A \wedge B & \Longleftrightarrow \quad B \wedge A \\ (A \wedge B) \wedge C & \Longleftrightarrow \quad A \wedge (B \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) & \Longleftrightarrow \quad (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\ A \wedge (B \vee C) & \Longleftrightarrow \quad (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \end{cases}$$

Vorrangregeln

- Und ($\wedge$) ist stärker als Oder ($\vee$)
- Klammer ist stärker als Und
- Negation ($\neg$) ist stärker als Klammer

Bemerkung 2.

$$(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \iff A \wedge B \vee C \wedge D$$
$$(A \vee B) \wedge (C \vee D) \iff A \wedge C \vee A \wedge D \vee B \wedge C \vee B \wedge D$$

Gesetze von De Morgan

$$\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$$
$$\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$$

Schlussregeln

- Ableitungsregel: A ∧ (A → B) ⇒ B [Modus ponens]
- Widerlegungsregel: (¬ B) ∧ (A → B) ⇒ ¬A [Modus tollens]
- Kettenschluss: (A → B) ∧ (B → C) ⇒ A → C
- Fallunterscheidung: (A ∨ B) ∧ (A → C) ∧ (B → C)

Begriff: Aussageform: Aussage, deren Wahrheit von einer Variable abhängt.

Beispiel 1.

$$\begin{aligned} A(x) &\iff x \textit{ ist eine gerade Zahl} \\ A(4) &\iff w \\ A(-10) &\iff f \end{aligned}$$

Quantoren $\forall x$ ... „für alle" $\Big($oder: $\forall x : A(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x A(x)\Big)$
$\exists x$ ... „es existiert ein x" $\Big($oder $\exists x : A(x) \Leftrightarrow \bigvee_x A(x)\Big)$
$\exists! x$ ... „es gibt genau ein x"

Bemerkung 3.

- $\neg\big(\forall x : A(x)\big) \iff \exists x : \neg A(x)$
  ↳ *Um eine Aussage über alle x zu widerlegen, muss eines, oder mehrere Gegenbeispiele gefunden werden.*

- $\neg(\exists x : A(x)) \iff \forall x : \neg A(x)$

Lincoln-Zitat

$$\exists t \in T, \forall x \in P : F(t,x) \wedge \exists x \in P, \forall t \in T : F(t,x) \wedge (\forall t \in T, \forall x \in P : F(t,x))$$

„You can fool all the people some time and some of the people all the time, but you cannot fool all the people all the time."

0.1 Naive Mengenlehre

Definition 0.1. Definition von Cantor
Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten unseres Denkens, oder unserer Anschauung zu einem Ganzen.
$x \in A$ ... Aussageform (welche wiederum wahr oder falsch sein kann)

Mengenoperationen A, B ... Mengen

- $\emptyset$ ... leere Menge, $\neg(x \in \emptyset)$
- A $\cup$ B ... „A vereinigt B": $\forall x \in (A \cup B) \iff x \in A \vee x \in B$
- A $\cap$ B ... „A geschnitten mit B": $\forall x \in (A \cap B) \iff x \in A \wedge x \in B$
- A\B ... „A ohne B": $x \in (A \setminus B) \iff x \in A \wedge x \notin B$
- A $\subseteq$ B ... „A ist Teilmenge von B": $x \in A \Longrightarrow x \in B$
  ↳ A $\subsetneqq$ B ... „echte Teilmenge": A $\subseteq B$ $\wedge$ A $\neq$ B
  ↳ A = B ... $x \in A \iff x \in B$

Bemerkung 4. *Zerlegung von einer Aussage in 2 Aussagen:*
$A{=}B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

De Morgan für Mengen

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus B)$$

Definition 0.2. Potenzmenge
A ... Menge,
$\mathfrak{P}(A)$ ... Menge der Teilmengen von A

$$B \subseteq A \iff B \in \mathfrak{P}(A)$$

Es gilt: $|\mathfrak{P}(A)| = 2^{|M|}$

Beispiel 2.

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$\mathfrak{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\Big\}$$

A ... Menge, X ... Aussageform
$B = \Big\{a \in A \;\Big|\; X(a)\Big\}$ ... $a \in B \iff a \in A \wedge X(a)$

Beispiel 3.

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \Big\{a \in A \;\Big|\; a \textit{ ist gerade } \Big\} = \{2\}$$

Russel'sches Paradoxon $\mathcal{M}$ ... Menge aller Mengen $\Longrightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{M}$
$\mathcal{N} = \Big\{x \in \mathcal{M} \;\Big|\; x \notin x\Big\}$:
$\mathcal{N} \in \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{N} \notin \mathcal{N}$ ↯
$\mathcal{N} \notin \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{N} \in \mathcal{N}$ ↯
$\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ kann keine Menge sein, auch wenn sie Cantors Definition entspricht.

Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge („Indexmenge”)
$i \in I$: M_i ... „Familie von Teilmengen”

$$\left.\begin{aligned} M &= \bigcup_{i \in I} M_i \qquad x \in M \iff \exists i \in I : \quad x \in M_i \\ N &= \bigcap_{i \in I} M_i \qquad x \in N \iff \forall i \in I : \quad x \in M_i \end{aligned}\right\} \text{Operatoren über i Mengen}$$

Definition 0.3. Kartesische Produkte
A, B ... Mengen

$$A \times B = \Big\{(a, b) \;\Big|\; a \in A \wedge b \in B\Big\} \text{ ... geordnete Menge der Paare}$$
$$A^n = A^{n-1} \times A$$
$$A^3 \text{ ... Menge der Tripel}$$
$$A^4 \text{ ... Menge der Quadrupel}$$
$$\vdots$$
$$A^n \text{ ... Menge der n-Tupel}$$

Definition 0.4. Kartesische Produkte über i Mengen
Sei I eine Indexmenge, $i \in I : M_i$

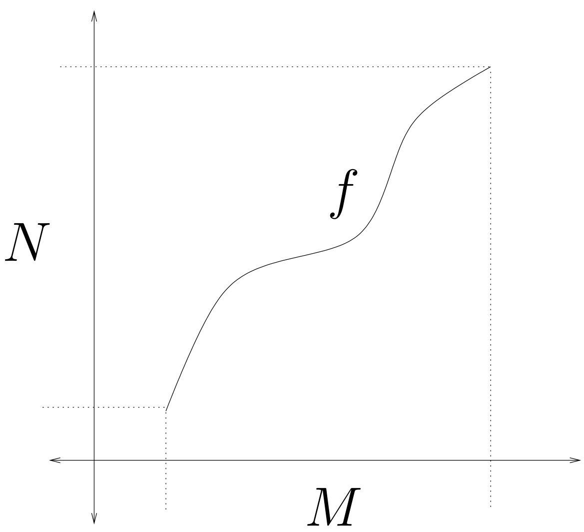
$$\bigtimes_{i \in I} M_i = \left\{ (m_i)_{i \in I} \;\middle|\; \forall i \in I : m_i \in M_i \right\}$$

Abbildungen Seien M und N Mengen.

$$f : \begin{cases} M & \to & N \\ m & \mapsto & f(m) \end{cases}$$

f ordnet jedem $m \in M$ ein Element $f(m)$ zu und zwar nach der Vorschrift.
Andere Schreibweise: $F \subseteq M \times N$ mit folgender Eigenschaft: $\forall m \in M \; \exists! n \in N : (m, n) \in F$
Für jedes Element m aus M gibt es genau ein Element n aus N

$$f : \begin{cases} M & \to & N \\ m & \mapsto & n \end{cases}$$



Eigenschaften von Abbildungen

- f heißt injektiv, wenn $\begin{cases} \forall m_1, m_2 \in M : m_1 \neq m_2 & \Longrightarrow & f(m_1) \neq f(m_2) \\ \forall m_1, m_2 \in M : m_1 = m_2 & \Longrightarrow & f(m_1) = f(m_2) \end{cases}$

  Schreibweise: $f : M \hookrightarrow N$

- f heißt surjektiv, wenn: $\forall n \in N, \; \exists m \in M : \; f(m) = n$

  Schreibweise: $f : M \twoheadrightarrow N$

- f heißt bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

  Jedes $n \in N$ kommt genau einmal als Bild vor.

Satz 0.1. *Sei $f: M \to N$ eine Abbildung, Dann ist:*

1. *f injektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $g_1 : N \to M$ gibt, sodass:*

$$\forall m \in M: \quad m = g_1\big(f(m)\big)$$

2. *f surjektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $g_2 : N \to M$ gibt, sodass:*

$$\forall n \in N: \quad n = f\big(g_2(n)\big)$$

3. *f bijektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $g : N \to M$ gibt, sodass:*

$$\forall m \in M: \quad m = g\big(f(m)\big) \quad \textit{und} \quad \forall n \in N: \quad n = f\big(g(n)\big)$$

Beweis.

1. „⇐" Angenommen es gibt $g_1 : N \to M$ mit der Eigenschaft

$$f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow \underbrace{g_1\big(f(m_1)\big)}_{m_1} = \underbrace{g_1\big(f(m_2)\big)}_{m_2}$$

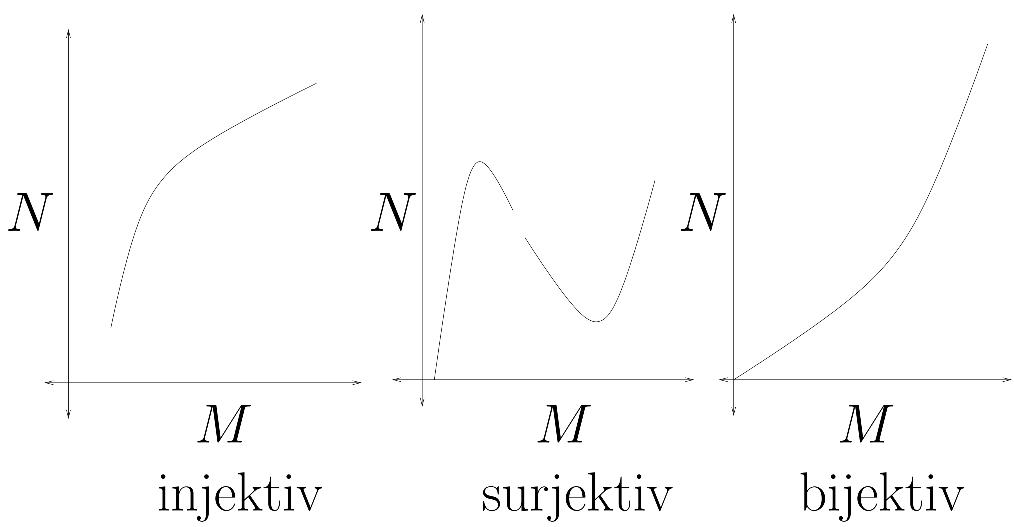
das heißt:

$$f(m_1) = f(m_2) \quad \Rightarrow \quad m_2 = m_1$$

also ist f injektiv

„⇒" Angenommen f sei injektiv, das heißt jeder Punkt $n \in N$ tritt höchstens als Bild von einem Element $m \in M$ auf

$$\begin{cases} \exists! n \in N: & n = f(m) \quad g_1(n) = m \\ \forall n \in N: & n \neq f(m) \quad g_1(n) = m_2 \end{cases} \longrightarrow g_1\big(f(m)\big) = m$$



2. „$\Leftarrow$" Angenommen es gibt ein g_2 mit der obigen Eigenschaft.
zu zeigen: f ist surjektiv: $\forall n \in N, \underset{m=g_2(n)}{\exists m \in M} : \; N = f(m) = f(g_2(n))$

„$\Rightarrow$" Angenommen f sei surjektiv

$$\begin{aligned} n \in N : \Big\{ m \in M \;\Big|\; f(m) = n \Big\} &\neq \emptyset \\ g_2(n) &\in \Big\{ m \in M \;\Big|\; f(m) = n \Big\} \\ f\big(g_2(n)\big) &= n \end{aligned}$$

3. „$\Leftarrow$" Angenommen $\exists g : N \to M$ mit der angegebenen Eigenschaft. Aus 1. und 2. folgt, dass f bijektiv ist

„$\Rightarrow$" Angenommen f ist bijektiv: $\underbrace{f \text{ ist injektiv}}_{\substack{\exists g_1 : N \to M \\ \text{wie oben 1)}}}$ und $\underbrace{\text{surjektiv}}_{\substack{\exists g_1 : N \to M \\ \text{wie oben 2)}}}$

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{aus 1.} & g_1\Big(f\big(g_2(n)\big)\Big) & = & g_2(n) \\ \text{aus 2.} & f\big(g_2(n)\big) & = & n \\ & \Rightarrow \quad g_1(n) & = & g_2(n) \end{array}\right\} g : \begin{cases} N & \to & M \\ n & \mapsto & g_1(n) = g_2(n) \end{cases}$$

$\square$

Definition 0.5. Sei $f : M \to N$ bijektiv, dann heißt die Abbildung $g : N \to M$ aus Punkt 3. die Umkehrabbildung von f : $\quad f^{(-1)} := g$

Bemerkung 5. *Gibt es eine Umkehrabbildung $f^{(-1)} : N \to M$ einer Abbildung $f : M \to N$, dann ist f bijektiv.*

Bemerkung 6. *Zwei Abbildungen $f : A \to B$ und $g : C \to D$ sind genau dann gleich, wenn $A = C, \;\; B = D$ und $\forall a \in A : \;\; f(a) = g(a)$*

Beispiel 4.

$$\underset{\textit{injektiv, nicht surjektiv}}{f = \begin{cases} \{1,2\} & \to & \{1,2,3,4\} \\ x & \mapsto & x+1 \end{cases}} \quad \neq \quad \underset{\textit{bijektiv}}{g = \begin{cases} \{1,2\} & \to & \{2,3\} \\ x & \mapsto & x+1 \end{cases}}$$

Bemerkung 7. ***Identität auf A***

$$id_A : \begin{cases} A & \to & A \\ a & \mapsto & a \end{cases}$$

A wird auf sich selbst abgebildet.

Definition 0.6. Ist $f : \begin{cases} A & \to & B \\ a & \mapsto & f(a) \end{cases}$ und $g : \begin{cases} B & \to & C \\ b & \mapsto & g(b) \end{cases}$, dann ist $g \circ f : \begin{cases} A & \to & C \\ a & \mapsto & g\big(f(a)\big) \end{cases}$
„g nach f" oder „g Ring f".
Hintereinanderausführung von g und f (Verknüpfung, beziehungsweise Verkettung von g und f)

Bemerkung 8.

$$f^{(-1)} \circ f = id_A$$
$$f \circ f^{(-1)} = id_B$$

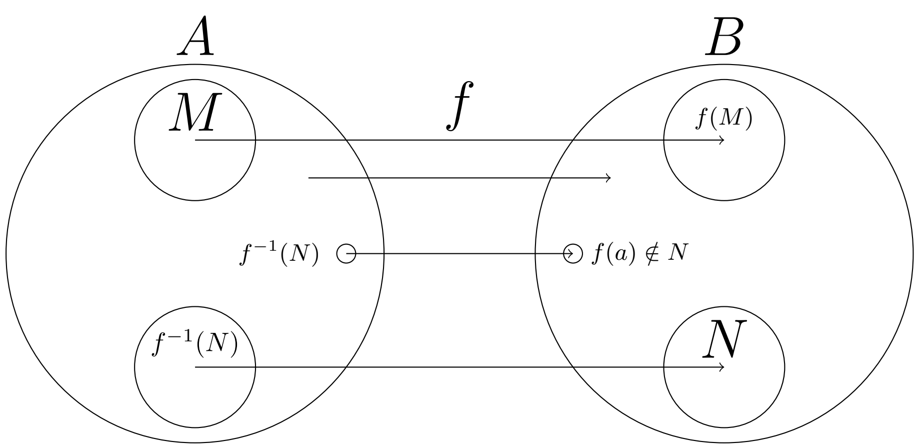
Definition 0.7. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

$$M \subseteq A : f(M) = \left\{ b \in B \;\middle|\; \exists m \in M : f(m) = b \right\} \qquad \text{... Bild unter } f \text{ von } M$$
$$= \left\{ f(m) \;\middle|\; m \in M \right\} \qquad \text{... Kurzschreibweise (salopp)}$$
$$N \subseteq B : f^{(-1)} = \left\{ a \in A \;\middle|\; f(a) \in N \right\} \qquad \text{... Urbild(-menge) von } N \text{ unter } f$$

Die Urbildmenge existiert, unabhängig davon, ob die Abbildung bijektiv ist, oder nicht.

Schreibweise: $f^{\overbrace{-1}^{\text{keine Klammern}}}(\underbrace{N}_{\text{Menge eingesetzt}})$

Achtung! $f^{-1} \neq f^{(-1)}$



Bemerkung 9. *$M \subseteq f^{-1}\big(f(M)\big)$ und $f\big(f^{-1}(N)\big) \subseteq N$*

Definition 0.8. Sei A eine endliche Menge. Dann schreibt man $|A|$ für die Anzahl ihrer Elemente. $\#A$, $\#(A)$ ... „Kardinalität von A”

Definition 0.9. Auswahlaxiom
Sei I eine Menge und $\underbrace{(M_i)_{i\in I}}_{\substack{\text{Familie}\\ \text{von}\\ \text{Mengen}}}$, dann gibt es eine Abbildung

$$f : I \to \bigcup_{i\in I} M_i : \quad \forall i \in I : f(i) \in M_i$$

„f ist eine Auswahl”, für jedes $i \in I$ wird ein Element aus der dazugehörigen Menge M_i ausgewählt.

Bemerkung 10.

$$\bigtimes_{i\in I} M_i \quad \textit{... Das Auswahlaxiom garantiert, dass} \quad \bigtimes_{i\in I} M_i \neq \emptyset$$

Bemerkung 11. *A, B seien Mengen, Dann heißen A und B disjunkt (element-fremd), wenn $A \cap B = \emptyset$.*

0.2 Die natürlichen Zahlen und vollständige Induktion

$\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}, \quad \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}, ...$

Definition 0.10. Die Peano-Axiome der natürlichen Zahlen sind:

1. $0 \in \mathbb{N}_0$
2. $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ n' \in N_0$ ... für jedes Element $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es in $\mathbb{N}_0$ ein weiteres Element n'
3. $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ n' \neq 0$ ... der Nachfolger n' von n ist nicht 0 $\Rightarrow$ 0 ist der Anfang von $\mathbb{N}_0$
4. $\forall m \in \mathbb{N}_0, \forall n \in \mathbb{N}_0 : \ m' = n' \Rightarrow m = n$ ... verschiedene Elemente haben verschiedene Nachfolger.
5. $\forall A \ \big(0 \in A \text{ und } \forall n \in A : \ n' \in A\big) : \mathbb{N}_0 \subseteq A$ ... $\mathbb{N}_0$ ist die kleinste Menge aller Mengen A, die die Eigenschaften 1. - 4. besitzt.

5'. Alte Schreibweise:
$\forall X : \ \big(X(0) \text{ und } \forall n \in \mathbb{N}_0 : X(n')\big) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : X(n)$
Sei A eine Menge wie oben: $B = \Big\{n \in A \ \Big| \ X(n)\Big\} \Rightarrow \mathbb{N}_0 \subseteq B$

Schritt 5'. führt uns zum Prinzip der vollständigen Induktion. Diese ist eine Beweisform für Aussagen über die natürlichen Zahlen.

Beispiel 5.

$$1+2+3+...+n$$

	$\sum$	$2\cdot\sum$	
$n=0$	0	0	$0\cdot 1$
$n=1$	1	2	$1\cdot 2$
$n=2$	3	6	$2\cdot 3$
$n=3$	6	12	$3\cdot 4$
$n=4$	10	20	$4\cdot 5$

$$\Rightarrow 1+2+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

1. *Induktionsbasis:*

$$X(0)=\frac{0\cdot(0+1)}{2}=0$$

2. *Induktionsvoraussetzung:*

$$X(n):1+2+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Korrektheit wird vorausgesetzt

3. *Induktionsbehauptung:*

$$X(n+1)=X(n')$$

Korrektheit will überprüft werden:

$$1+2+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

4. *Induktionsschritt:*

$$X(n)\Rightarrow X(n'),\quad X(n)\Rightarrow X(n+1):$$
$$1+2+...+n+(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

Beispiel 6.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$$

$$\left.\begin{array}{c||c|c|l}
 & \sum & 6 \cdot \sum & \\
\hline\hline
n = 0 & 0 & 0 & 0 \\
n = 1 & 1 & 6 & 1 \cdot 2 \cdot 3 \\
n = 2 & 5 & 30 & 2 \cdot 3 \cdot 5 \\
n = 3 & 14 & 84 & 3 \cdot 4 \cdot 7 \\
n = 4 & 30 & 180 & 4 \cdot 5 \cdot 7 \\
n = 5 & 55 & 380 & 5 \cdot 6 \cdot 11
\end{array}\right\} \textit{Formel erraten}$$

$$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Es scheint, als ob eine Formel gefunden wurde, die aber bis jetzt nur für n ≤ 5 zweifelsfrei stimmt. Beweis für n Elemente durch vollständige Induktion.

Beweis.

1. Basis:

$$n = 0:$$
$$\frac{0 \cdot (0+1) \cdot (2 \cdot 0 + 1)}{6} = 0 \qquad \checkmark$$

2. Voraussetzung:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

3. Behauptung:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2(n+1)+1)}{6}$$

4. Induktion:

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2}_{\substack{\text{ersetzen durch} \\ \text{Induktionsvoraussetzung}}} + (n+1)^2 \left(\overset{!}{=} \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2n+3)}{6} \right)$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$
$$= \frac{n+1}{6} \cdot \big(n \cdot (2n+1) + 6 \cdot (n+1)\big) =$$
$$= \frac{n+1}{6} \cdot \big(2n^2 + n + 6n + 6\big) =$$
$$= \frac{n+1}{6} \cdot \big(2n^2 + 7n + 6\big) =$$
$$= \frac{n+1}{6} \cdot (n+2) \cdot (2n+3)$$

$\square$

Bemerkung 12. *Rechenoperationen auf* $\mathbb{N}_0$

Addition: „m+n" $m, n \in \mathbb{N}_0$
$m + 0 = m, \quad m + (n+1) = m + n' = (m+n)'$

Multiplikation $m \cdot 0 = 0$
$m \cdot 1 = m$
$m \cdot (n+1) = m \cdot n' = m \cdot n + m$

0.3 Ordnung auf $\mathbb{N}_0$

$$\left.\begin{array}{l} m \leq n \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N}_0 : \quad m + k = n \\ \left[\text{besonders } n \leq n' \leq n'' \leq n''' \leq ...\right] \end{array}\right\} \text{„kleiner gleich "}$$

$$\left. m < n \quad \Leftrightarrow \quad m \leq n \text{ und } m \neq n \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \underbrace{\mathbb{N}_0 \setminus \{0\}}_{=\mathbb{N}} : \quad m + k = n \right\} \text{„strikt kleiner "}$$

Definition 0.11.

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$$

Bemerkung 13. *„$\leq$" ist eine Totalordnung, das heißt:*

$$\forall m, n \in \mathbb{N}_0 : \quad m \leq n \textit{ oder } n \leq m$$
$$\left[m \leq n \textit{ und } n \leq m \quad \Leftrightarrow \quad m = n\right]$$

Satz 0.2. *Die natürlichen Zahlen mit „$\leq$" sind wohlgeordnet, das heißt:*
Jede nicht leere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}_0$ besitzt ein kleinstes Element:

$$\forall A \subseteq \mathbb{N}_0, \quad A \neq \emptyset, \quad \exists a \in A : \quad \forall b \in A : \quad b \geq a$$

Beweis. Sei $A \neq \emptyset$ eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$, die kein kleinstes Element besitzt. Zeige darum, dass $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $A \cap \{0, 1, ..., n\} = \emptyset$

1. Basis: n=0 $A \cap \{0\} = \emptyset$
   Wenn 0 ein Element von A wäre, dann ist 0 das kleinste Element von A $\lightning$
2. Voraussetzung: $A \cap \{0, 1, ..., n\} = \emptyset$
3. Behauptung: $A \cap \{0, 1, ..., n, n+1\} = \emptyset$
4. Induktion: $A \cap \{0, 1, ..., n\} = \emptyset$, angenommen $A \cap \{0, 1, ..., n, n+1\} \neq \emptyset$
   $\Rightarrow n + 1 \in A \Rightarrow n + 1$ ist das kleinste Element von A $\lightning$

$\Rightarrow$ damit gilt $\forall n \in \mathbb{N}_0 : A \cap \{0, 1, ..., n\} = \emptyset$ und damit $A = \emptyset$ $\lightning$ $\square$

Satz 0.3. ***Mathematischer Witz***
Es gibt keine uninteressante natürliche Zahl

Beweis. Angenommen es gibt uninteressante natürliche Zahlen:

$$U = \left\{ u \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; u \text{ ist uninteressant} \right\} \neq \emptyset$$

Nach Satz 0.2 hat U ein kleinstes Element u. u ist das kleinste Element der Menge der uninteressante Zahlen, dadurch ist es interessant $\lightning$ $\square$

Beispiel 7.

$$1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$$

kleinste Zahl, die sich als Summe zweier Kuben schreiben lässt.

Definition 0.12. Summenzeichen
$a_1, a_2, ..., a_n$ ... Zahlen
saloppe Definition:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad „:=" \quad a_1 + a_2 + ... + a_n$$

„Summe von k ist 1 bis n über a_k"

$$\text{Saubere induktive Definition:} \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{0} a_k & := \quad 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n+1} a_k & := \quad \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \right) + a_{n+1} \end{cases}$$

k	...	Laufvariable
$k = 1$	...	untere Summationsgrenze
n	...	obere Summationsgrenze

Beispiel 8.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bemerkung 14. *Wenn I eine geordnete Menge ist:* $\sum\limits_{i \in I} a_i$ *i durchläuft die Menge I.*

Definition 0.13. Produktzeichen
Saloppe Definition:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \quad „:=" \quad a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

„Produkt von k ist 1 bis n über a_k".

$$\text{Saubere Definition:} \begin{cases} \prod\limits_{k=1}^{0} a_k & := \quad 1 \\ \prod\limits_{k=1}^{n+1} a_k & := \quad \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1} \end{cases}$$

Manchmal:

$$\prod_{i \in I} a_i$$

Bemerkung 15.

$$\prod_{k=1}^{n} k := n! \quad \ldots \quad \text{„}n \text{ Faktorielle", „Fakultät "}$$

Bemerkung 16.

$$A \subseteq \mathbb{N}_0, \quad A \neq \emptyset \quad \text{besitzt ein kleinstes Element}$$
$$\forall A \subseteq \mathbb{N}_0, \quad A \neq \emptyset, \quad \exists a \in A : \quad \forall b \in A : \quad b \geq a$$

„$\mathbb{N}_0$ ist wohlgeordnet"

Bemerkung 17. *Die Wohlordnung von $\mathbb{N}_0$ ist äquivalent zum Induktionsaxiom 5.*
Zu zeigen: Wohlordnung $\Rightarrow$ Induktion:

$$\forall X : \quad \big(X(0) \text{ und } \forall n \in \mathbb{N}_0 : X(n) \Rightarrow X(n')\big) \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : X(n)$$

Sei X eine Aussageform mit $X(0)$ und $\forall n \in \mathbb{N}_0 : X(n) \Rightarrow X(n')$

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \neg X(n) \right\}$$

Angenommen $A \neq \emptyset$, dann besitzt A wegen der Wohlordnung von $\mathbb{N}_0$ ein kleinstes Element $N \in A$, $N \neq 0$, weil $X(0)$.
Sei $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m' = N \Longrightarrow X(m) \Rightarrow X(m') = X(N)$ ↯

Beispiel 9. *Sei $q \neq 1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad \ldots \quad \text{„geometrische Summenformel"}$$

Beweis. durch Induktion:

1. Basis: $n = 0$:

$$1 = \frac{q-1}{q-1} = 1 \qquad \checkmark$$

2. Voraussetzung:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

3. Behauptung:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}$$

4. Schritt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} &= \frac{q^{n+2}-1}{q-1} \\
\frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} &= \frac{q^{n+2}-1}{q-1} \\
q^{n+1} - \cancel{1} + q^{n+1}(q-1) &= q^{n+1} - \cancel{1} \\
\cancel{q^{n+1}} + q^{n+2} - \cancel{q^{n+1}} &= q^{n+2}
\end{aligned}$$

wahre Aussage

$\square$

0.4 Einige einfache Abzählaufgaben

1) Auf wie viele verschiedene Arten können n paarweise verschiedene Objekte angeordnet werden?

	Möglichkeiten	Anzahl
$n=2$	$1,2$ oder $2,1$	#2
$n=3$	$1,2,3 \vee 2,1,3 \vee 2,3,1 \vee 3,2,1 \vee 3,2,1 \vee 1,3,2$	#6
$n=4$	...	#24

$$P_n = \text{ Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten von n Elementen}$$

$$P_{n+1} = \underbrace{(n+1)}_{\substack{\text{Möglich-}\\\text{keiten das}\\\text{(n+1)-te}\\\text{Element}\\\text{in die n}\\\text{bereits}\\\text{geordneten}\\\text{einzuordnen}}} P_n$$

$$P_n := n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

$$P_{n+1} = (n+1)! = \left(\prod_{k=1}^{n} k\right) \cdot (n+1)$$

Satz 0.4. *Die Anzahl der Anordnungen von n paarweise verschiedenen Elementen is $n!$.*

Beweis. Die Induktionsbasis ist nach 1) für $n=2$ und $n=3$ bewiesen. Induktionsschluss: Die Klasse derjenigen Anordnungen der Elemente $1,...,n+1$, die das Element k auf Platz 1 haben bei beliebiger Anordnung der übrigen n Elemente, enthält nach Induktionsannahme $n!$ Anordnungen. Es gibt $n+1$ derartige Klassen. Die Anzahl aller Anordnungen der Elemente $1,...,n+1$ ist also $(n+1)n! = (n+1)!$ □

Bemerkung 18. *Jeder Anordnung von n Elementen entspricht genau eine Permutation. Das heißt die Anzahl der Permutationen ist gleich $n!$.*

$$S_n = \left\{ f : \{1,2,...,n\} \;\middle|\; \textit{bijektiv} \right\} \quad ... \quad \underbrace{\textit{symmetrische Gruppe}}_{\substack{\textit{Ist die Gruppe, die aus allen}\\ \textit{Permutationen einer n-elementigen}\\ \textit{Menge besteht}}}$$

$$\#S_n = n!$$

2) Auf wie viele Arten kann man k Elemente aus n auswählen?

Fall (a): Reihenfolge der gezogenen Elemente wird berücksichtigt

Ziehung:					
verbleibende Elemente:	n	$n-1$	$n-2$	...	$n-k+1$
Zug-Nummer:	1	2	3	...	k

Anzahl der Möglichkeiten:

$$\begin{aligned}\# &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \frac{(n-k) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \\ \# &= \frac{n!}{(n-k)!}\end{aligned}$$

„Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse"(V_k^n)

Fall (b): ohne Berücksichtigung der Reihenfolge der gezählten Elemente

$$\# = \frac{n!}{k!(n-k)!} := \binom{n}{k} \quad \ldots \quad \text{Binomialkoeffizient}$$

„Variationen ohne Wiederholung von n Elementen zur k-ten Klasse"(C_k^n)

Beispiel 10. *Seien A und B zwei Mengen für die gilt: $A \cap B = \emptyset$. Weiters seien $|A| = m$ und $|B| = n$ dann gilt $|A \cup B| = m + n$.*
Man will aus $A \cup B$ k Elemente ziehen: $\binom{m+n}{k}$

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{m}{l} \cdot \binom{n}{k-l} = \binom{m+n}{k} \quad \ldots \quad \textit{Vandermondesche Indentität}$$

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ für } k > n$$

$$\binom{n}{-1} := 0$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Man will $k+1$ Elemente aus $n+1$ ziehen. Sei diesmal $|A| = n$ und $|B| = 1$ und $A \cap B = \emptyset$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} \cdot 1 + \underbrace{\binom{n}{k} \cdot 1}_{\substack{k \text{ Elemete} \\ \text{aus } A, \\ \text{ein Element} \\ \text{aus } B}} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

keine Berücksichtigung der Reihenfolge, keine Wiederholung.

Satz 0.5. ***Der binomische Lehrsatz***

$$(x+y)^n$$

$$\begin{array}{lcl} n=1: & & x+y \\ n=2: & & x^2+2xy+y^2 \\ n=3: & & x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\ (x+y)^n & = & \underbrace{(x+y)\cdot ... \cdot(x+y)}_{n\text{-}mal} \end{array}$$

Elemente durch ausmultiplizieren:

$$\begin{array}{rcl} x^n & ... & 1\ mal \\ x^{n-1}\cdot y & ... & n\ mal \\ x^{n-1}\cdot y^k & ... & \binom{n}{k}\ mal \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k \ \textit{und}\ (x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \cdot x^{n-k} \cdot y^k$$

Beweis.

1. Basis: $n=0:$

$$1 = \sum_{k=0}^{0} \underbrace{\binom{0}{0}}_{=1} \cdot x^{0-k} \cdot y^k = 1 \qquad \checkmark$$

2. Voraussetzung:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k \quad \text{gelte}$$

3. Behauptung:

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot k^{n+1-k} \cdot y^k$$

4. Schritt:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot (x+y) \overset{IV}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k \right) \cdot (x+y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^{k+1} =$$

$$= \underbrace{\sum_{\cancel{k}_l=0}^{\cancel{n}^{n+1}} \binom{n}{\cancel{k}_l} \cdot x^{n+1-\cancel{k}_l} \cdot y^{\cancel{k}_l} + \sum_{l=\cancel{1}_0}^{n+1} \binom{n}{l-1} \cdot x^{n+1-l} \cdot y^l}_{\substack{\text{Der Wert der Summe ändert sich nicht,} \\ \text{weil die neune Summanden gleich 0 sind}}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n+1} \underbrace{\left(\binom{n}{l} + \binom{n}{l-1} \right)}_{=\binom{n+1}{l}} \cdot x^{n+1-l} \cdot y^l = \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} \cdot x^{n+1-l} \cdot y^l$$

$\square$

1 Aufbau des Zahlensystems

$\mathbb{N}$ ist gegeben durch die Peano-Axiome

$\mathbb{Z}$ ist $\mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$ mit $-\mathbb{N} = \left\{ -n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$

$\mathbb{Q}$ ist $\left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N} \right\}$

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$$
$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$$
$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1 q_2}{q_1 p_2}$$

Bemerkung 19. *Je zwei Elemente* $a, b \in (\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ *sind vergleichbar: es gilt entweder* $a < b$*,* $a = b$*, oder* $a > b$*. Es gilt genau eine der Relationen.*

Bemerkung 20. $\big((\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}), \geq\big)$ *ist eine Totalordnung* ($a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$)*. je zwei Elemente sind miteinander vergleichbar* ($\neq$ *Wohlordnung).*

1.1 Die Reellen Zahlen: $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften:

K1: $0 \in \mathbb{R}, \;\forall x \in \mathbb{R}:$

$$x + 0 = x$$

K2: $1 \in \mathbb{R}, \;\forall x \in \mathbb{R}:$

$$x \cdot 1 = x$$

K3: $\forall x, y \in \mathbb{R}:$ [Kommutativgesetz]

$$x + y = y + x, \qquad x \cdot y = y \cdot x$$

K4: $\forall x, y, z:$ [Assoziativgesetz]

$$(x + y) + z = x + (y + z), \qquad (x \cdot y) \cdot z = x(y \cdot z)$$

K5: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$ [Distributivgesetz]

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

K6: $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in R:$

$$x + y = 0, \qquad [y := -x]$$

K7: $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0, \exists y \in \mathbb{R}:$

$$x \cdot y = 1, \qquad \left[y := x^{-1} = \frac{1}{x}\right]$$

„$\mathbb{R}$ ist ein Körper"

1.2 Axiome der Ordnung auf $\mathbb{R}$

01: $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x > 0$ und $y > 0 \ \Rightarrow\ x + y > 0 < x \cdot y$

02: $\forall x \in \mathbb{R}:\ x < 0\ \dot{\vee}\ x = 0\ \dot{\vee}\ x > 0$ ($\dot{\vee}$...exklusives oder)
$\mathbb{R}$ ist eine Totalordnung

03: $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \exists n \in \mathbb{N}_0:\ n - x > 0$ (Archimedisches Axiom)

$$\begin{array}{ccccc} x < y & \Longleftrightarrow & y - x & > & 0 \\ x > y & \Longleftrightarrow & x - y & > & 0 \\ x \leq y & \Longleftrightarrow & x < y & \vee & x = y \\ x \geq y & \Longleftrightarrow & x > y & \vee & x = y \end{array}$$

Bemerkung 21. *1. $a < b$ und $b < c\ \Rightarrow\ a < c$* *[Transitivität]*
$\left(b - a > 0 \text{ und } c - b > 0 \overset{01}{\Longrightarrow} (c-b) + (b-a) = c - a > 0 \iff c > a\right)$

2. $a > b,\ c \in \mathbb{R} \implies a + c > b + c, \quad (a+c) - (b+c) = a - b > 0$

3. $a > b,\ c \in \mathbb{R} \implies c > 0$: $a \cdot c > b \cdot c$; $c < 0$: $a \cdot c < b \cdot c$

$$\left(\begin{array}{cccccc} a - b > 0 & c > 0 & \overset{01}{\Longrightarrow} & (a-b)\cdot c > 0 & \Longrightarrow & a \cdot c > b \cdot c \\ a - b > 0 & c < 0 & \Longrightarrow & (a-b)\cdot(-c) > 0 & \Longrightarrow & -c > 0 \\ & & & b \cdot c - a \cdot c > 0 & \Longleftrightarrow & bc > ac \end{array}\right)$$

Das heißt: Die Ungleichungsrichtung bleibt bei Multiplikation mit einer positiven Zahl erhalten, bei Multiplikation mit einer negativen Zahl kehrt sie sich um.

4. $\forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$: $a^2 > 0$

$$\left(\left\{\begin{array}{ccc} a & > & 0 \\ a & < & 0 \end{array}\right\} \overset{3.}{\Longrightarrow} a^2 > 0\right)$$

5. $1 > 0:\ \left(1 = 1^2 > 0\right)$

6. $a > b > 0 \implies \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$

Satz 1.1. ***Die Bernoullische Ungleichung***
Sei $x \geq -1$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

Beweis. Durch Vollständige Induktion:

1. Basis: $n = 0$

$$(1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x \quad \checkmark$$

2. Voraussetzung:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

3. Behauptung:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot x$$

4. Schritt:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &\geq 1 + (n+1) \cdot x \\ \underbrace{(1+nx)}_{IV} \cdot (1+x) &\geq 1 + nx + x \\ \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{nx} + nx^2 &\geq \cancel{1} + \cancel{nx} + \cancel{x} \\ nx^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

□

Satz 1.2. *i) Sei $q > 1$, dann gibt es zu jedem $k > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$: $q^n > k$*

ii) Sei $0 < q < 1$, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$: $q^n < \varepsilon$.

Beweis.

i) $q > 1$, $q = 1 + q'$ mit $q' > 0$

$$q^n = (1+q')^n > 1 + n \cdot q' \overset{!}{\geq} k \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq \frac{k-1}{q'} \in \mathbb{R}$$

Aus Axiom 03 folgt, dass es ein solches $n \in \mathbb{N}$ gibt, das diese Gleichung erfüllt.

ii) $0 < q < 1$, $\varepsilon > 0$ ... dann gibt es nach i) ein $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{q}^n &> \frac{1}{\varepsilon} = k \\ \Rightarrow q^n &= \frac{1}{\widetilde{q}^n} < \varepsilon \\ \widetilde{q} &:= \frac{1}{q} > 1 \end{aligned}$$

□

Definition 1.1. Sei $x \in \mathbb{R}$: $|x| := \begin{cases} x & \text{für} \quad X \geq 0 \\ -x & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$

$|x|$ heißt der Absolutbetrag von x

Bemerkung 22. *Eigenschaften von* $|x|$

A1: $\forall x \in \mathbb{R}$: *[Definitheit]*

$$|x| \geq 0 \quad \textit{und} \quad |x| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$$

A2: $\forall x, y \in \mathbb{R}:$ *[Multiplikativität]*

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

A3: $\forall x, y \in \mathbb{R}:$ *[Dreiecksungleichung]*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Beweis.

$A1$: folgt direkt aus der Definition

$A2$: $|x \cdot y| = \big(\pm x\big) \cdot (\pm y) = |x| \cdot |y|$ ... Vorzeichen passend gewählt.

$A3$:

$$\left.\begin{array}{lcl} |x| \geq x & \text{und} & |x| \geq -x \\ |y| \geq y & \text{und} & |y| \geq -y \end{array}\right\} \text{ Aus der Definition}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} |x| + |y| & \geq & (x + y) \\ |x| + |y| & \geq & -(x + y) \end{array}\right\} \; |x| + |y| \geq |x + y|$$

□

Bemerkung 23. ***Umgekehrte Dreiecksungleichung***

$$\forall x, \in \mathbb{R}: \quad \Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$$

Beweis.

$$|x| = |y - (y - x)| \overset{\substack{\text{Drei-}\\\text{ecks-}\\\text{Unglei-}\\\text{chung}}}{\leq} |y| + |y - x|$$

$$\Rightarrow |x| - |y| \leq |y - x| = |x - y|$$

$$|y| - |x| \leq |x - y|$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \big(|x| - |y|\big) & \leq & |x - y| \\ -\big(|x| - |y|\big) & \leq & |x - y| \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$$

$\square$

Bemerkung 24. *Eine Abbildung* $|\cdot| : K \to \mathbb{R}$ *(K Körper, K1-K7) mit den Eigenschaften A1-A3 heißt eine Bewertung. Auf* $\mathbb{Q}$ *gibt es unendlich viele Bewertungen. Eine davon ist* $|\cdot|$ *wie oben.*

Eine Bewertung heißt archimedisch, wenn $\forall x \in K,\ \ x \neq 0\ \ \exists n \in \mathbb{N}$*:* $|n \cdot x| \geq 1$*.*
$|\cdot|$ *wie oben archimedisch, alle anderen sind nicht archimedisch.*

Bemerkung 25. $|x|$ *ist der Abstand von* $x \in \mathbb{R}$ *zu 0.* $|x-y|$ *ist der Abstand zweier Zahlen* $x, y \in \mathbb{R}$ *zueinander.*

Bemerkung 26.

$$x \in \mathbb{R}$$
$$\overset{03:}{\Rightarrow} \quad \exists n \in \mathbb{N}_0 : n > x$$
$$\textit{Sei } x > 0$$
$$\left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; n > x \right\} \neq \emptyset$$
$$m \textit{ sei das kleinste Element dieser Menge}$$
$$\underbrace{m-1}_{\substack{\textit{größte}\\ \textit{natürliche}\\ \textit{Zahl}\\ \leq x}} \leq x < x$$
$$\lfloor x \rfloor := m - 1$$
$$x \leq 0 \textit{ dann gibt es ein } n \in \mathbb{N}: \quad n + x > 0$$
$$\lfloor x \rfloor = \lfloor n + x \rfloor - n \in \mathbb{Z} \textit{ größte ganze Zahl } \leq x$$
$$\lfloor x \rfloor := \max \left\{ k \in \mathbb{Z} \;\middle|\; k \leq x \right\}$$

1.3 Intervalle

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$$
$$\begin{aligned} (a,b) &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x < b \right\} && \text{offenes Intervall} \\ [a,b] &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x \leq b \right\} && \text{abgeschlossenes intervall} \\ (a,b] &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x \leq b \right\} && \text{links offen, rechts geschlossen (halboffen)} \end{aligned}$$

Definition 1.2. Eine Menge von Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ heißt Intervallschachtelung, wenn:

1. $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ...$

2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}:\ |I_n| := b_n - a_n < \varepsilon$

Intervallschachtelungsaxiom
Für jede Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es eine reelle Zahl x, die in allen Intervallen I_n enthalten ist.

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Bemerkung 27. *x ist eindeutig bestimmt. Angenommen $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.*
oBdA: $x < y$: $\varepsilon = \frac{y-x}{2} > 0$, $\exists n : |I_n| < \varepsilon$, $x, y \in I$: $y - x = 2\varepsilon$ $\lightning$ zur Intervalllänge
Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ sodass:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$$

Satz 1.3. *Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ und $k \in \mathbb{N}$, dann gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ sodass $y^k = x$ beziehungsweise $y = \sqrt[k]{x}$*

Beweis. Zuerst sei $x > 1$. Definiere eine Intervallschachtelung für y:

$$I_1 = [1, x], \quad 1^k = 1 < x < x^2 \quad \Longrightarrow \quad y \in I_1$$

Angenommen $I_1, I_2, ..., I_n$ wären bereits definiert

$$I_n = [a_n, b_n], \quad m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$I_{n+1} = \begin{cases} [m_n, b_n] & \text{wenn} \quad m_n^k \leq x \\ [a_n, m_n] & \text{wenn} \quad m_n^k > x \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{c} \subseteq I_n \\ \\ x \in I_{n+1} \end{array}\right\} \text{Eigenschaften von } I_{n+1}$$

Für $x < 1$ definiert man $x' = \frac{1}{x}$ und setzt x' in den bereits geführten Beweis. □

Bemerkung 28.

$$a_n^k \leq x \leq b_n^k$$
$$|I_{n+1}| = \frac{1}{2} \cdot |I_n|$$
$$|I_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot |I_1|$$

Nach dem Satz 1.2 gibt es $\forall \varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$: $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot |I_1| < \varepsilon$. Damit ist $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine

Intervallschachtelung.

$$\overset{\substack{\text{Intervall-}\\ \text{schachtelungs-}\\ \text{axiom}}}{\Longrightarrow} \qquad \exists! y: \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad y \in I_n$$

Beweis. Es ist zu zeigen: $y^k = x$
betrachte dazu: $I_n^{(k)} = [a_n^k, b_n^k], \quad I_{n+1}^k \subseteq I_n^k$

$$b_n^k - a_n^k = (b_n - a_n) \cdot \underbrace{(b_n^{k-1} + b_n^{k-1} a_n + ... + b_n a_n^{k-2} + a_n^{k-1})}_{k \text{ Summanden}} \leq (b_n - a_n) \cdot k \cdot b_1^{k-1}$$

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists n: \quad b_n - a_n < \frac{\varepsilon}{k \cdot b_1^{k-1}} := \varepsilon' \Rightarrow b_n^k - a_n^k \leq (n_n - a_n) \cdot k \cdot b_1^{k-1} <$$
$$< \frac{\varepsilon}{\cancel{k \cdot b_1^{k-1}}} \cdot \cancel{k \cdot b_1^{k-1}} = \varepsilon$$

I_n^k ist eine Intervallschachtelung für x. $\forall n: \ x \in I_n^k$, damit gilt für y. $y^k = x$,
$y^k \in I_n^k, \ a_n \leq y \leq b_n, \ a_n^k \leq y^k \leq b_n^k$
Sei $\eta \neq y$ mit $\eta^k = x$
$\eta > y \quad \Rightarrow \quad y^k = x$ ↯
$\eta < y \quad \Rightarrow \quad y^k = x$ ↯
Sei nun $0 < x < 1$, dann $\frac{1}{x} > 1, \ \frac{1}{y} := \sqrt[k]{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad y^k = x, \ x = 1 \Rightarrow y = 1$ □

1.4 Supremum und Infimum

Definition 1.3. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, wenn:

$$\exists K \in \mathbb{R}: \quad \forall x \in M: \quad x \leq K$$

[K heißt obere Schranke von M]

M heißt nach unten beschränkt wenn:

$$\exists k \in \mathbb{R}: \quad \forall x \in M: \quad x \geq k$$

[k heißt untere Schranke von M]

M heißt beschränkt, wenn M nach oben und unten beschränkt ist:

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad \exists k \in \mathbb{R}: \quad \forall x \in M: \quad k \leq x \leq K$$

Satz 1.4. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, dann gibt es eine reelle Zahl $s = \sup(M)$ (Supremum von M) mit folgender Eigenschaft:*

$$\begin{aligned} \forall x \in M: \quad & x \leq s \quad \leftrightarrow \quad \textit{s ist obere Schranke} \\ \forall s' < s: \quad \exists x \in M: \quad & x > s' \quad \leftrightarrow \quad \textit{s ist die kleinste obere Schranke} \end{aligned}$$

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, dann gibt es eine reelle Zahl $i = \inf(M)$ (Infimum von M) *mit folgenden Eigenschaften:*

$$\begin{aligned} \forall x \in M: \quad & x \geq i \quad \leftrightarrow \quad \textit{i ist untere Schranke} \\ \forall i' > i: \quad \exists x \in M: \quad & x < i' \quad \leftrightarrow \quad \textit{i ist größte untere Schranke} \end{aligned}$$

Eine beschränkte Menge besitzt Infimum und Supremum.

Beweis. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt: ($M \neq \emptyset$)

$$\exists K: \quad \forall x \in M: \quad x \leq K$$

Definiere eine Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]$.
$\forall n:$ a_n ist keine obere Schranke von M
$\forall n:$ b_n ist keine obere Schranke von M

$$b_1 = K, \quad x \in M, \quad a_1 = x - 1$$

Angenommen die Intervalle bis zum Index n wären bereits definiert.

$$I_n = [a_n, b_n]$$
$$m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, m_n] & \text{wenn } m_n \text{ eine obere Schranke von M ist} \\ [m_n, b_n] & \text{wenn } m_n \text{ keine obere Schranke von M ist} \end{cases}$$

$(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Intervallschachtelung:

$$I_{n+1} \subseteq I_n, \quad |I_{n+1}| = \frac{1}{2} \cdot |I_n| \quad \Longrightarrow \quad |I_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} I_1$$
$$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad |I_n| < \varepsilon$$

Intervallschachtelungsaxiom $\Rightarrow \quad \exists s \in \mathbb{R}: \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad s \in I_n$
zu zeigen: $s = \sup(M)$

1. Zeige: s ist obere Schranke:
   Angenommen $\exists x \in M: \quad x > s$, wähle ε in der zweiten Eigenschaft der Intervallschachtelung als $\varepsilon = x - s$, dann gibt es n mit $(b_n - a_n) < \varepsilon$

$$\begin{aligned} a_n \leq s \leq b_n \quad & \Longrightarrow \quad 0 \leq b_1 - s < \varepsilon \\ b_n - s < x - s \quad & \Longrightarrow \quad b_n < x \qquad ↯ \end{aligned}$$

2. Zeige: i ist die kleinste obere Schranke:
   Angenommen $s' < s$ ist auch obere Schranke von M. Wähle $\varepsilon = s - s'$, dann gibt es ein n, sodass:

$$\begin{aligned} b_n - a_n < \varepsilon \qquad a_n \leq s \leq b_n \quad & \Longrightarrow \quad 0 \leq s - a_n < \varepsilon \\ s - a_n < s - s' \quad & \Longrightarrow \quad s' < a_n \qquad ↯ \end{aligned}$$

Existenz des Infimums Sei M nach unten beschränkt: $\exists k \in \mathbb{R}$: $\forall x \in M$: $x > k$, $U = \left\{k \in \mathbb{R} \;\middle|\; k \text{ ist untere Schranke von } M\right\} \neq \emptyset$. U ist nach oben beschränkt durch jedes $x \in M$, $i = \sup(U)$ ist die größte untere Schranke von M. □

Bemerkung 29. *$M \subseteq \mathbb{R}$, dann muss nicht* $\sup(M) \in M$, $\inf(M) \in M$ *gelten.*

- *Wenn* $\sup(M) \in M$ *gilt, dann schreibt man* $\max(M) = \sup(M)$
- *Wenn* $\inf(M) \in M$ *gilt, dann schreibt man* $\min(M) = \inf(M)$

Bemerkung 30. *Wenn $M \subseteq \mathbb{R}$ nicht nach ober beschränkt ist, dann schreibt an:*

$$\sup(M) = \infty \quad \iff \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in M : \quad x > k$$

Wenn M nicht nach unten beschränkt ist, schreibt man:

$$\inf(M) = -\infty \quad \iff \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in M : \quad x < k$$

Bemerkung 31.

$$\begin{aligned} \sup(\emptyset) &= -\infty \\ \inf(\emptyset) &= \infty \end{aligned}$$

Bemerkung 32. *Die Existenz von* $\inf(M)$ *beziehungsweise* $\sup(M)$ *(für jeweils nach unten beziehungsweise nach oben beschränkte Mengen M) ist äquivalent zum Intervallschachtelungsaxiom.*

Beweis. Intervallschachtelungsaxiom $\Rightarrow \ \exists \inf, \sup$ ✓
Angenommen jede beschränkte Menge M besitze $\inf(M)$ und $\sup(M)$. Sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung. $A = \left\{ a_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ $\forall m, n: \ a_n \leq b_m$
$\forall n: \ a_n \leq b_1$, das heißt: A ist nach oben beschränkt $x = \sup(A) := \sup\limits_{n \in \mathbb{N}}(a_n)$
zu zeigen:

$$\left.\begin{array}{rll} \forall n: & x \in [a_n, b_n] & \forall n: \quad a_n \leq x \text{ nach Definition} \\ \forall m, n: & a_n \leq b_m & \forall m: \quad x = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}}(a_n) \leq b_m \end{array}\right\} \forall n: \ x \in [a_n, b_n] \qquad \square$$

Bemerkung 33. *Sei* $[a_n, b_n]$ *eine Intervallschachtelung.*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}}(a_n) \leq b_m \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}}(a_n) \leq \inf_{m \in \mathbb{N}}(b_m) \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}}(a_n) = \inf_{m \in \mathbb{N}}(b_m)$$

Beweis.

$$x = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n)$$
$$y = \inf_{m\in\mathbb{N}}(b_m)$$
$$y \geq x$$
$$\text{Angenommen: } y > x: \quad \varepsilon = y - x, \quad \exists n: \quad b_n - a_n < \varepsilon$$
$$a_n \leq x \qquad y \leq b_n$$
$$\varepsilon = y - x \leq b_n - a_n < \varepsilon \quad ↯$$

Annahme der strikten Ungleichung führt zum Widerspruch $\Longrightarrow$ Gleichheit von $\sup(a_n)$ und $\inf(b_m)$ ist bewiesen. □

Satz 1.5. $\mathbb{Q}$ ***liegt dicht in*** $\mathbb{R}$
Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, *dann gibt es ein* $q \in \mathbb{Q}$ *mit* $x < q < y$.

Beweis. Nach dem archimedischen Axiom gibt es eine natürliche Zahl n mit $n(y-x) > 1 \Leftrightarrow y > \frac{1}{n} + x$.

$$\frac{m}{n} \leq x < \frac{m+1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < y$$
$$\Rightarrow \quad x < \frac{m+1}{n} < y$$
$$\Rightarrow \quad q = \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Q}$$

□

Definition 1.4. Eine Menge M heißt abzählbar, wenn es eine bijektive Abbildung $f: \mathbb{N} \to M$ gibt und heißt höchstens abzählbar, wenn $\exists g: \mathbb{N} \to M$ das surjektiv ist.

Bemerkung 34. $\mathbb{N}$ *und* $\mathbb{Z}$ *sind abzählbar*

$$f(1) = 0$$
$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{für } n \text{ gerade} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

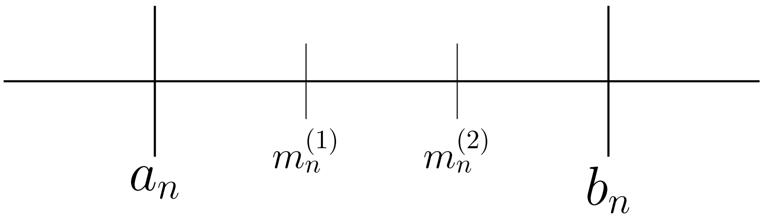
$\mathbb{Q}$ *ist abzählbar*

$$\begin{array}{llllllllll} q=1: & ..., & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & ... \\ q=2: & ..., & -\frac{3}{2}, & /, & -\frac{1}{2}, & /, & \frac{1}{2}, & /, & \frac{3}{2}, & ... \\ q=3: & ..., & /, & -\frac{2}{3}, & -\frac{1}{3}, & /, & \frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & /, & ... \end{array}$$

Satz 1.6. $\mathbb{R}$ *ist nicht abzählbar, sondern überabzählbar.*

Beweis. Angenommen $\mathbb{R} \overset{*}{=} \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ wäre abzählbar, definiere eine Intervallschachtelung I_n mit $x_n \notin I_n$:

$$\begin{aligned} I_1 = [x_1 + 1, x_1 + 2] &\text{ mit } x_1 \notin I_1 \\ \text{Angenommen } I_n &\text{ sei bereits definiert} \\ m_n^{(1)} &= \frac{2a_n + b_n}{3} \\ m_n^{(2)} &= \frac{a_n + 2b_n}{3} \\ \text{entweder gilt:} \quad & x_{n+1} \notin [a_n, m_n^{(1)}] \\ \text{oder} \quad & x_{n+1} \notin [m_n^{(2)}, b_n] \end{aligned}$$



Wähle I_{n+1} als Intervall, in dem x_{n+1} nicht liegt. I_n ist dann eine Intervallschachtelung:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}: \quad & x_n \notin I_n \\ \Rightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R}: \quad & x \in I_n \\ \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad & x_n \neq n \quad ↯ \end{aligned}$$

□

Bemerkung 35. *Wäre* $\mathbb{R}$ *abzählbar, gäbe es eine Nummerierung* n*, die alle* $x \in \mathbb{R}$ *durchläuft, dann müsste es ein* n *geben, mit dem man* $x \in I_n$ *erreicht. Die Intervallschachtelung ist so konstruiert, dass das nicht geht.*

Bemerkung 36. *Wenn* M *abzählbar ist, dann schreibt man*

$$|M| = \aleph_0$$

„Aleph Null"

$$|N| = \aleph_0$$

$$|\mathbb{R}| > \aleph_0$$

Lösen von Gleichungen

$$ax = b$$
$$\begin{pmatrix} a, b \in \mathbb{R} \\ \text{mit } a \neq 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x = \frac{b}{a} \in \mathbb{R}$$

$$x^2 + px + q = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = 0$$
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

1.5 Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Definition 1.5. $i^2 = -1$ ... heißt die imaginäre Einheit ($i \notin \mathbb{R}$)

$$\mathbb{C} = \left\{ x + iy \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\} \text{ ... Menge der komplexen Zahlen}$$

Bemerkung 37. ***Rechenregeln***

$$\begin{aligned}
(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\
(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + iy_1x_2 + iy_2x_1 + \cancel{i^2}^{-1} y_1y_2 \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + y_2x_1)
\end{aligned}$$

$$x \in \mathbb{R}: \quad x + \cancel{i \cdot 0} \in \mathbb{C} \Rightarrow R \subsetneqq \mathbb{C}$$

$$\underset{(x,y)\neq(0,0)}{\frac{1}{x + iy}} = \frac{(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 - i^2y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Das heißt: $\mathbb{C}$ erfüllt die Eigenschaften K1 bis K7: $\mathbb{C}$ ist also ein Körper.
$\mathbb{C}$ kann nicht geordnet werden: $i^2 = -1 < 0$ widerspricht 01 und 02.

Definition 1.6.

x	...	„Realteil von z”	$x = \Re(z)$
y	...	„Imaginärteil von z”	$y = \Im(z)$
$\overline{z} = x - iy$	...	„konjugiert komplexe Zahl”	

Bemerkung 38.

$$\begin{aligned} 2\Re(z) &= z + \overline{z} \\ \Re(z) &= \tfrac{1}{2}(z + \overline{z}) \\ \Im(z) &= \tfrac{1}{2}(z - \overline{z}) \\ \textit{Bei } z = \overline{z}: &\quad \Im(z) = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Darstellung von $z = iy \in \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \ldots \quad \textit{komplexer Absolutbetrag (Abstand von 0)}$$

$$|\cdot| \textit{ erfüllt A1 bis A3}$$

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$$

Bemerkung 39.

$$\overline{(z + w)} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

$$\frac{1}{\overline{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad (z \neq 0)$$

$$\overline{z \cdot \overline{z}} = \overline{z} \cdot z \in \mathbb{R}$$

Bemerkung 40. ***Absolutbetrag erfüllt A1 bis A3***

A1: $|z| \geq 0$

A2: $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

A3: $|z + w| \leq |z| + |w|$

Bemerkung 41.

$$|\Re(z)| \leq z$$
$$|\Im(z)| \leq z$$
$$|zw| = \sqrt{zw - \overline{zw}} = \sqrt{z\overline{z} \cdot w\overline{w}} = |z| \cdot |w|$$
$$|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = |z|^2 + \underbrace{z\overline{w} + \overline{z}w}_{2\Re(z\overline{w})} + |w|^2 \leq$$
$$\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z| \cdot |w| + |w|^2 = \big(|z| + |w|\big)^2$$

Bemerkung 42. ***Wurzel ziehen in*** $\mathbb{C}$
Gegeben: $w = u + iv$
Gesucht: $z = x + iy$ *mit* $z^2 = w$

$$x^2 + 2ixy - y^2 = u + iv$$
$$x^2 - y^2 = u$$
$$2xy = v$$
$$|z|^2 = |w|$$
$$\big(x^2 + y^2\big)^2 = u^2 + v^2$$
$$x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2} = |w|$$
$$\sqrt{x^2 + y^2}^2 = \sqrt{u^2 + v^2}$$
Gleichungssystem:
$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & u \\ x^2 + y^2 & = & |w| \end{array}\right\} \begin{array}{rclcl} x^2 & = & \frac{1}{2}(u + |w|) & \geq & 0 \\ y^2 & = & \frac{1}{2}(|w| - u) & \geq & 0 \end{array}$$
$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|w| + u)} \\ y & = & \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|w| + u)} \end{array}$$

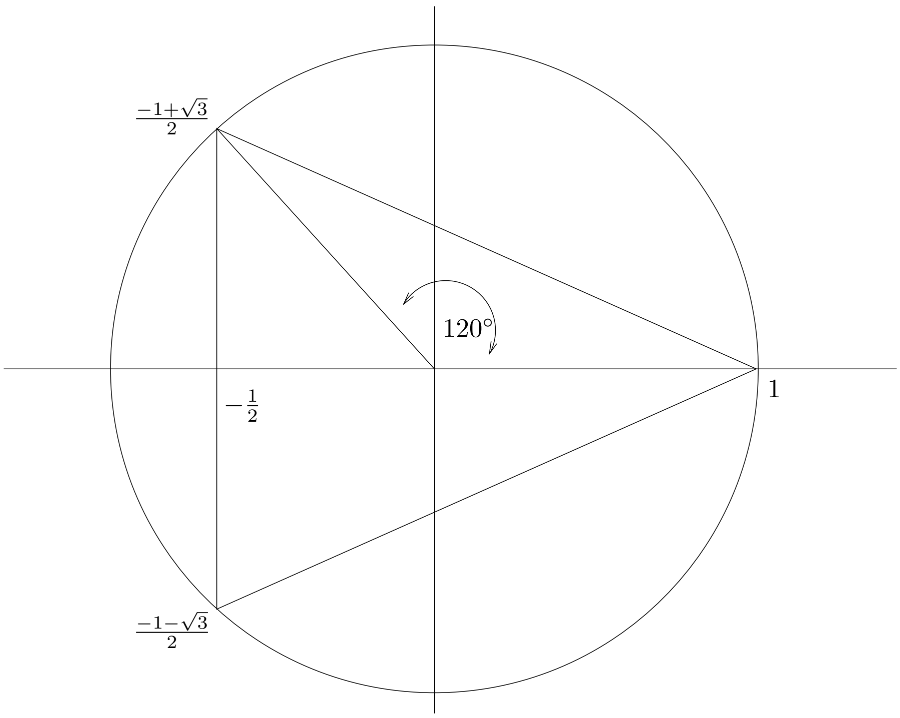
Beispiel 11.

1.

$$z^2 = 3 - 4i \quad \Longrightarrow \quad z = x + iy$$
$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi \quad \Longrightarrow \quad x^2 - y^2 = 3$$
$$2xy = -4 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = |3 - 4i| = 5$$
$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & 3 \\ x^2 + y^2 & = & 5 \end{array}\right\} \begin{array}{rcl} x^2 & = & 4 \\ y^2 & = & 1 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} \begin{array}{rcl} x & = & \pm 2 \\ y & = & \pm 1 \end{array}$$
$$x + iy = \pm(2 - i)$$
$$\sqrt{3 - 4i} = \pm(2 - i)$$

2.

$$z^3 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad z_1 = 1 \textit{ ist eine Lösung}$$
$$(z - 1) \cdot (z^2 + z + 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad z^2 + z + 1 = 0$$
$$z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad \textit{heißt „dritte Einheitswurzeln”}$$
$$\xi = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \xi^2 = \frac{1}{\xi} = \frac{\overline{\xi}}{\xi \cdot \overline{\xi}} = \overline{\xi}$$
$$\xi^4 = \xi \quad \Longrightarrow \quad \xi^5 = \overline{\xi}$$



Gleichseitiges Dreieck

3.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$
$$x = y - \frac{a}{3} \to x^3 = y^3 - ay^2 + \frac{a^2}{3}y - \frac{a^3}{27}$$
$$x^2 = y^2 - \frac{2a}{3}y + \frac{a^2}{9}$$
$$0 = y^3 + \cancel{0 \cdot y^2} + py + q$$
$$y = u + v$$
$$y^3 = u^3 + 3u^2 + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(\underbrace{u+v}_{=y})$$
$$u^3 + v^3 + (\underbrace{3uv + p}_{3uv:=-p}) \cdot (u+v) + q = 0$$
$$\Rightarrow u^3 + v^3 = -q$$
$$uv = -\frac{p}{3} \to u^3v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3$$

u^3 und v^3 sind die Lösungen der Gleichung: $z^2 + qz + \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = 0$

$$z^2 + qz + \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = (z - z_1) \cdot (z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2) + z_1 z_2$$
$$u^3, v^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$
$$u, v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$
$$\underbrace{y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}_{\text{Cardanosche Formel}}$$
$$\text{Meist für } \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0$$

Satz 1.7. *Fundamentalsatz der Algebra*
Sei $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ mit $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$, dann gbt es ein $\alpha \in \mathbb{C}$, sodass $p(\alpha) = 0$

1.6 Reelle und komplexe Funktionen

Definition 1.7. Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ (beziehungsweise $\mathbb{C}$), dann heißt eine Abbildung $f : \underbrace{U}_{\text{Definitions-bereich}} \to \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Werte-bereich}}$ (beziehungsweise $\mathbb{C}$) eine reelle (beziehungsweise komplexe) Funktion.

Bemerkung 43. ***Rechenoperationen mit Funktionen***
$f, g : U \to \mathbb{R}$ (beziehungsweise $\mathbb{C}$)

$$f \pm g : \begin{cases} U & \to & \mathbb{R} \textit{ (oder } \mathbb{C}) \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{cases}$$
$$f \cdot g : \begin{cases} U & \to & \mathbb{R} \textit{ (oder } \mathbb{C}) \\ x & \mapsto & f(x) \cdot g(x) \end{cases}$$
$$\textit{Wenn } g(x) \neq 0 \quad \forall x \in U :$$
$$\frac{f}{g} : \begin{cases} U & \to & \mathbb{R} \textit{ (oder } \mathbb{C}) \\ x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$$

Definition 1.8. Sei $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$, $r = \frac{p}{q}$

$$x^{\frac{p}{q}} = x^r := \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$
$$x^{\frac{p_1}{q}} \cdot x^{\frac{p_2}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^{p_1+p_2} = x^{\frac{p_1+p_2}{q}}$$
$$x^{r_1} \cdot ^{r_2} = x^{r_1+r_2} \quad (r_1, r_2 \in \mathbb{Q})$$
$$(xy)^r = x^r \cdot y^r$$

$x \mapsto x^r$ heißt Potenzfunktion mit dem rationalen Exponenten r

1.7 Polynome (Polynomfunktionen)

Definition 1.9. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ mit $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt ein Polynom. ($a_n \neq 0$) n heißt der Grad von p, Grad(p):=n.
$a_0, ..., a_n$ heißen die Koeffizienten
$a_n \neq 0$ Leitkoeffizient
a_0 das konstante Glied.
Wenn $a_n = 1$, dann heißt p normiert, $q(x) = 0$ heißt Nullpolynom.

Satz 1.8. ***Satz von der Division mit Rest***
Seien p und q Polynome, $q \neq 0$, dann gibt es Polynome r, s, sodass $p = q \cdot s + r$ gilt. daher ist Grad(r) $<$ Grad(q).

Bemerkung 44. *Analogie zur Division mit Rest auf $\mathbb{Z}$ $\big($Grad($\cdot$) $\cong 1\big)$.*

Beweis.

$$p(x) = p_n x^n + ... + p_1 x + p_0$$
$$q(x) = q_m x^m + ... + q_1 x + q_0$$
$$m \geq 0, \quad (q_m \neq 0)$$

Induktion nach n: $p(x) = p_0$

$$m = 0: \quad s = \tfrac{p_0}{q_0} \quad r = 0 \quad q(x) = q_0 \neq 0 \qquad p_0 = \tfrac{p_0}{q_0} \cdot q_0 \neq 0$$
$$m > 0: \quad s = 0 \quad r = q_0 \qquad p_0 = p(x) = 0 \cdot q(x) + p_0$$

Sei $p(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ ein Polynom vom Grad $n+1$

$$p(x) = \frac{a_{n+1}}{q_m m} q(x) \cdot x^{m+1} + p_1(x)$$

Es gilt $n + 1 \geq m$, definiere $p_1(x)$

$$p_1(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + ... + a_0 - \frac{a_{n+1}}{q_m}(q_m x^m + ... + q_0)x^{n+1-m} =$$
$$= (a_{n+1} - \frac{a_{n+1}q_{m-1}}{q_m})x^n + ...$$
$$\text{Grad}(p_1) \leq n$$

Induktionsvorraussetzung:

$$p_n(x) = s_1(x) \cdot q(x) + r_1(x) \text{ mit Grad}(r_1) < \text{Grad}(q)$$
$$p(x) = \frac{a_{n+1}}{q_m} \cdot x^{n+1-m} \cdot q(x) + s_1(x) \cdot q(x) + r_1(x) =$$
$$= \underbrace{\left(\frac{a_{n+1}}{q_m} \cdot x^{n+1-m} + s_1(x) \right)}_{x(s)} \cdot q(x) + \underbrace{r_1(x)}_{r(x)}$$
$$\text{Grad}(p) < \text{Grad}(q): \quad p(x) = \underbrace{0 \cdot q(x)}_{s} + \underbrace{p(x)}_{r}$$

Behauptung s und r sind eindeutig bestimmt.
Angenommen:

$$p(x) = s_1(x) \cdot q(x) + r_1(x) = s_2(x) \cdot q(x) + r_2(x)$$
$$\big(s_1(x) - s_2(x)\big)q(x) = r_2(x) - r_1(x)$$
$$\text{Grad}\Big(\big(s_1(x) - s_2(x)\big)q(x)\Big) \geq \text{Grad}(q) \quad \lightning$$

□

1.8 Polynomdivision

Beispiel 12.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x^4 & + & 3x^2 & + & 0x^2 & - & 5x & + & 2 & : & (x^2-2x+3) = \overbrace{x^2+5x+7}^{\substack{\textit{Quotient der}\\ \textit{Polynomdivision}}}\\
-(x^4 & - & 2x^3 & + & 3x^2) & & & & & & \\
 & & 5x^3 & - & 3x^2 & - & 5x & + & 2 & & \\
 & - & (5x^3 & - & 10x^2 & + & 15x) & & & & \\
 & & & & 7x^2 & - & 20x & + & 2 & & \\
 & & & - & (7x^2 & - & 14x & + & 21) & & \\
 & & & & & - & 6x & - & 19 & \rightarrow & \substack{\textit{Rest der}\\ \textit{Polynomdivision}}
\end{array}
$$

Bemerkung 45.

$$x^2+5x+7-\frac{6x+19}{x^2-2x+3}=(x^2-2x+3)\cdot(x^2+5x+7)-6x-19$$

1.9 Nullstellen von Polynomen

Definition 1.10. Sei $p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + ... + p_1 x + p_0$ ein Polynom, dann heißt $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, wenn $p(\alpha) = 0$. („Wurzel von p")

Bemerkung 46. *Sei p ein Polynom und α eine Nullstelle von p.*

$$
\begin{gathered}
p(x) = p_1(x)\cdot(x-\alpha) + \underbrace{r(x)}_{\substack{\textit{konstant}\\ \mathrm{Grad}(r)<1}} = \\
= p_1(x)\cdot(x-\alpha) + C \\
x = \alpha : \\
p(\alpha) = 0 = p_1(\alpha)\cdot 0 + C \\
\Rightarrow C = 0 \\
\Rightarrow p(x) = p_1(x)\cdot(-\alpha) \\
\textit{Division ohne Rest möglich!} \\
\mathrm{Grad}(p_1) = \mathrm{Grad}(p) - 1
\end{gathered}
$$

Wenn $\mathrm{Grad}(p_1) \geq 1$ *ist, hat* p_1 *eine Nullstelle. Zu dieser Nullstelle kann der zugehörige Faktor ab dividiert werden.*
Damit kann man das Polynom $p(x) = p_n x^n + ... + p_1 x + p_0$ *in Faktoren zerlegen:*

$$
\begin{gathered}
p(x) = p_n \cdot (x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot ... \cdot(x-\alpha_n) \\
\textit{„Zerlegung von } p(x) \textit{ in Linearfaktoren"}
\end{gathered}
$$

Durch Ordnen der Faktoren kann diese Zerlegung in die folgende Form gebracht werden, *weil Nullstellen mehrfach auftreten können:*

$$p(x) = p_1(x-\beta_1)^{k_1} \cdot (x-\beta_2)^{k_2} \cdot ... \cdot (x-\beta_l)^{k_l}$$

Dabei sind die β_i paarweise verschieden und es gilt $k_1 + k_2 + ... + k_l = n$. Man nennt k_i die Vielfachheit von β_i.

Folgerungen

1. *Aus dem Fundamentalsatz der Algebra (Satz 1.7) folgt, dass ein Polynom vom Grad n genau n Nullstellen hat, wenn man diese mit Vielfachheit zählt.*
2. *Weil das Produkt $p(x) = p_n(x-\beta_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (x-\beta_l)^{k_l}$ genau dann 0 ist, wenn einer der Faktoren verschwindet, sind $\beta_1, ..., \beta_l$ alle Nullstellen von p.*
3. *Sei p ein Polynom vom Grad $\leq n$ und seien $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1} \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. Wenn $p(\alpha_1) \cdot p(\alpha_2) \cdot ... \cdot p(\alpha_{n+1}) = 0$, dann ist p das Nullpolynom. ($p = 0$)*
4. *Folgerung aus 3.: Seien p und q zwei Polynome vom Grad n und $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1} \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. Wenn $p(\alpha_j) = q(\alpha_j)$ für $j = 1, ..., n+1$, dann ist $p(x) = q(x)$.*

Satz 1.9. *Punkt 4. der Folgerung ↑*

Bemerkung 47.

$$d(x) = p(x) - q(x) \quad \text{hat Grad} \leq n \text{ und } n+1 \text{ Nullstellen}$$
$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1} \quad \xRightarrow{3.} \quad d(x) := 0$$

1.10 Erweiterung der Definition des Binomialkoeffizienten

Definition 1.11.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!}$$
$$\binom{x}{k} := \frac{x \cdot (x-1) \cdot ... \cdot (x-k+1)}{k!}$$

Polynom in $x \in \mathbb{C}$

(Es gilt $k \in \mathbb{N}_0$)

Beispiel 13.

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\overbrace{\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}^{\overset{-\left(k-\frac{1}{2}\right)}{=}}}{k!} =$$

$$= \underbrace{(-1)^k \cdot 2^{-k}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^k} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-3)\cdot(2k-1)}{k!} =$$

$$= (-1)^k \cdot 2^{-k} \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-3)\cdot(2k-2)\cdot(2k-1)\cdot 2k}{k!\,\underbrace{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k-2)\cdot 2k}_{2\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2\cdot(k-1)\cdot 2\cdot k=2^k\cdot k!}} =$$

$$= (-1)^k \cdot 2^{-k} \cdot \frac{(2k)!}{k!\cdot 2^k\cdot k!} = (-1)^k \cdot 4^{-k}\cdot\binom{2k}{k}$$

Beispiel 14.

$$\binom{-k}{k} = \frac{(-x)\cdot(-x-1)\cdot\ldots\cdot(-x-k+1)}{k!} =$$

$$= (-1)^k \cdot \frac{x\cdot(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+k-1)}{k!} =$$

$$= (-1)^k \cdot \binom{x+k-1}{k}$$

Bemerkung 48. *Der Binomialkoeffizient* $\binom{x}{k}$ *mit* $x \in \mathbb{C}$ *und* $x \notin \mathbb{N}_0$ *hat keine kombinatorische Bedeutung.*

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{m}{l}\cdot\binom{n}{k-l} = \binom{m+n}{k}$$

$$m, n \in \mathbb{N}_0, \quad k \in \mathbb{N},\ \textit{fest}$$

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ *fest, dann ist:*

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{m}{l}\cdot\binom{n}{k-l} = \binom{m+n}{k}$$

eine Gleichung in Polynomen in der Variablen $m \in \mathbb{N}_0$ *(Polynome vom Grad* k*). Die Gleichung gilt jedenfalls für* $m = 0, 1, \ldots, k$ *(*$k+1$ *Werte). Nach Satz 1.9 stimmen daher* *die Polynome überein. Damit gilt:*

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{x}{l} \cdot \binom{n}{k-l} = \binom{x+n}{k} \qquad \text{für } x \in \mathbb{C} \tag{1.1}$$

Sei nun x fest: Damit is der Term (1.1) eine Gleichung in Polynomen in der Variablen $n \in \mathbb{N}_0$. Die Gleichung gilt für $n = 0, 1, ..., k$ ($k+1$ Werte). Nach Satz 1.9 stimmen daher die Polynome überein. Damit gilt:

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{x}{l} \cdot \binom{y}{k-l} = \binom{x+y}{k} \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{C}$$

Bemerkung 49.

$$x = y = -\frac{1}{2}$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{l} = (-1)^l \cdot 4^{-l} \cdot \binom{2l}{l}$$

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1) \cdot (-2) \cdot ... \cdot \overbrace{(-k)}^{\overset{(-1-k+1)}{=}}}{k!} = (-1) \cdot \frac{\cancel{k!}}{\cancel{k!}}$$

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{-\frac{1}{2}}{l} \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{k-l} = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \cdot 4^{-l} \cdot \binom{2l}{l} \cdot (-1)^{k-l} \cdot 4^{-(k-l)} \cdot \binom{2(k-l)}{k-l} =$$

$$= (-1)^k \cdot 4^{-k} \cdot \underbrace{\sum_{l=0}^{k} \binom{2l}{l} \cdot \binom{2(k-l)}{k-l}}_{\underset{4^k}{=}} = (-1)^k = \binom{\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)}{k}$$

Bemerkung 50. *Sei $p(x) = p_n x^n + ... + p_1 x + p_0$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Dann treten die komplexen Nullstellen paarweise auf. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p: $o(\alpha) = p_n \alpha^n + ... + p_1 \alpha + p_0 = 0$*
Wende komplexe Konjugation an: $\overline{p(\alpha)} = \overline{p_n} \overline{\alpha^n} + ... + \overline{p_1 \alpha} + \overline{p_0} = 0 = p(\overline{\alpha})$

Bemerkung 51.

$$p(x) = p_n(x-\alpha)^{k_1} \cdot (x-\overline{\alpha})^{k_2} \cdot ... \quad \Rightarrow k_1 = k_2$$

$$(x-\alpha)\cdot(x-\overline{\alpha}) = \underbrace{x^2 - \underbrace{(\alpha+\overline{\alpha})}_{-p\in\mathbb{R}}x + \underbrace{\alpha\overline{\alpha}}_{q\in\mathbb{R}}}_{reelles\ Polynom}$$

$$\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, \quad \alpha, \overline{\alpha} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad mit \quad \frac{p^2}{4} - q < q$$

Satz 1.10. *Sei* $p(x) = p_nx^n + ... + p_1x + p_0$ *ein Polynom mit komplexen Koeffizienten, dann zerfällt* p *über* $\mathbb{C}$ *in Linearfaktoren, das heißt:* $p(x) = p_n \cdot (x-\beta_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (x-\beta_l)^{k_l}$ *mit* $\beta_1, ..., \beta_l \in \mathbb{C}$, $k_1, ..., k_l \in \mathbb{N}$ *und* $k_1 + ... + k_l = n$.

Satz 1.11. *Sei* $p(x) = p_nx^n + ... + p_0$ *ein Polynom mit reellen Koeffizienten, dann zerfällt* p *über* $\mathbb{R}$ *in lineare Faktoren* $\left(x^2 + px + q \text{ mit } \frac{p^2}{4} < q\right)$. *Das heißt:*

$$p(x) = p_n \cdot (x-\beta_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (x-\beta_l)^{k_l} \cdot (x^+\gamma_1 x + \delta_1)^{m_1} \cdot ... \cdot (x^2 + \gamma_s x + \delta_s)^{m_s}$$
$$mit\ \beta_1, ..., \beta_l \in \mathbb{R}, \quad \gamma_1, ..., \gamma_s, \delta_1, ..., \delta_s \in \mathbb{R}$$
$$mit\ \frac{\gamma_j^2}{4} < \delta_j\ für\ j = 1, ..., s$$
$$und\ k_1 + k_2 + ... + k_l + 2\cdot(m_1 + ... + m_s) = n$$

1.11 Rationale Funktionen

Definition 1.12. Seien p und q Polynome, $q \neq 0$, dann heißt $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine rationale Funktion $r(x)$ und ist definiert für alle $x \in \mathbb{C}$ für die $q(x) \neq 0$ ist.

$$D_r = \left\{ x \in \mathbb{C} \;\middle|\; q(x) \neq 0 \right\}$$

Bemerkung 52. *Wenn* $\frac{p(x)}{q(x)}$ *im gemeinsame Faktoren von* $p(x)$ *und* $q(x)$ *bereinigt wird, entsteht die gekürzte Darstellung von* $r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. *Das heißt:* $P(x)$ *und* $Q(x)$ *haben keine gemeinsamen Nullstellen. Der vollständige Definitionsbereich von r:*

$$\overline{D}_r = \left\{ x \in \mathbb{C} \;\middle|\; Q(x) \neq 0 \right\}$$

Beispiel 15.

$$r(x) = \frac{x" - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (x+1) \cdot (x^2+1)}{\cancel{(x-1)} \cdot (x-2)} = \frac{(x+1) \cdot (x^2+1)}{x-2}$$

1.12 Partialbruchzerlegung

Satz 1.12. *Seien p und q rationale Funktionen,* $\mathrm{Grad}(p) < \mathrm{Grad}(q)$ *und $q \neq 0$. Zerfalle q in Linearfaktoren $q(x) = q_n(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (x-\alpha_l)^{k_l}$ mit $\alpha_1, ..., \alpha_l \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden, dann gibt es ein $A_{ij} \in \mathbb{C}$, und $i = 1, ..., l$, beziehungsweise $j = 1, ..., k$ sodass:*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k_j} \frac{A_{ij}}{(x-\alpha_i)^j}$$

Beweis. Durch Indukion nach $m = \mathrm{Grad}(q)$.

IA: $m = 1$: $\mathrm{Grad}(p) < 1 \Rightarrow \mathrm{Grad}(q) = 0$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_o}{q_1 x + q_0} = \frac{\frac{p_0}{q_1}}{x - \left(-\frac{q_0}{q_1}\right)} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow A_{11} = \frac{p_0}{q_1}$$

$$\alpha_1 = \frac{p_0}{q_1} \quad \checkmark$$

IS: Angenommen die Aussage ist richtig für $\mathrm{Grad}(q) < m$

$$\mathrm{Grad}(q) = m$$

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot q_1(x) \quad \text{mit } q_1(\alpha_1) \neq 0$$

$$\mathrm{Grad}(q_1) < m$$

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \text{Rest} & & / \cdot (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot ... \\ \Rightarrow \quad \frac{p(x)}{q(x)} = A_{1k_1} + \underbrace{(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \text{Rest}}_{\text{hat keinen Nenner}} & & /x = \alpha_1 \\ \Rightarrow \quad \frac{p(\alpha_1)}{q_1(\alpha_1)} = A_{1k_1} + \cancel{(\alpha_1 - \alpha_1)^{k_1} \cdot \text{Rest}} & & \\ \Rightarrow \quad \text{das heißt: wähle } A_{1k_1} = \frac{p(\alpha_1)}{q_1(\alpha_1)} & & \end{array}\right\} \text{Ansatz unter der Annahme, dass der Beweis klappen wird}$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{q_1(x) \cdot (x-\alpha_1)^{k_1}} - \frac{p(\alpha_1)}{q_1(\alpha_1) \cdot (x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} =$$

$$= \frac{p(x) - \frac{p(\alpha_1)}{q_1(\alpha_1)} \cdot q_1(x)}{q_1(x) \cdot (x-\alpha_1)^{k_1}} - \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}$$

$$\overbrace{p(x) - \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \cdot q_1(x)}^{\mathrm{Grad} < m}$$

$$p(\alpha_1) - \frac{p(\alpha_1)}{q_1(\alpha_1)} \cdot q_1(\alpha_1) = 0$$

$$\left(p(x) - \frac{p(\alpha_1)}{q_1(\alpha_1)} \cdot q_1(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \underbrace{p_1(x)}_{\mathrm{Grad}(p_1)<m-1}\right)$$

$$= \frac{(x-\alpha_1)\cdot p_1(x)}{(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot q_1(x)} + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k_1-1} \frac{A_{1j}}{(x-\alpha_1)^j} + \sum_{i=2}^{l}\sum_{j=1}^{k} \frac{A_{ij}}{(x-\alpha_1)^j} + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}$$

$\square$

Beispiel 16.

$$\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2\cdot(x^2+2x+2)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+1+i} + \frac{D}{x+1-i}$$

$$\left[\ \mathrm{Grad}(\textit{Zähler}) \quad < \quad \mathrm{Grad}(\textit{Nenner})\ \textit{Nullstellen:}\ \begin{array}{ccc} x_{1,2} & = & -1 \\ x_{3,4} & = & -1 \pm i \end{array}\ \right]$$

A:

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+2x+2} = A + B(x+1) + (x+1)^2$$
$$\textit{Definiert bei } x=-1$$
$$\frac{1-1-2}{1-2+2} = A + B\cdot 0 + 0$$
$$\Rightarrow \quad A = -2$$

B:

$$\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2(x^2+2x+2)} + \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+x-2+2x^2+4x+4}{(x+1)^2\cdot(x^2+2x+2)} =$$
$$= \frac{3x^2+5x+2}{(x+1)^2\cdot(x^2+2x+2)} = \frac{(3x+2)\cdot(x+1)}{(x+1)^2\cdot(x^2+2x+2)} =$$
$$= \frac{3x+2}{(x+1)\cdot(x^2+2x+2)} = \frac{B}{x+1} + \%$$
$$\Rightarrow \frac{3x+2}{x^2+2x+2} = B + (x+1) \quad \%$$
$$\Rightarrow \quad B = -1$$

C:

$$\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2\cdot(x+1-i)} = C + (x+1+i)$$

Definiert bei $x = -1-i$

$$\frac{(-1-i)^2-1-i-2}{(-i)^2\cdot(-1-i+1-i)} = \frac{2i-1-i-2}{(-1)\cdot(-2i)} = \frac{3+i}{2i} = \frac{1+3i}{2} = C$$

D:

$$D = \overline{C} = \frac{1-3i}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2\cdot(x^2+2x+2)} = \frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1+3i}{2(x+1+i)} + \frac{1-3i}{2(x+1-i)}$$

Bemerkung 53. *Sei* $\frac{p(x)}{q(x)}$ *eine beliebige rationale Funktion:*

1. Fall: $\mathrm{Grad}(p) < \mathrm{Grad}(q) \;\; \Rightarrow \quad PBZ$

2. Fall: $\mathrm{Grad}(p) \geq \mathrm{Grad}(q)$ *... PBZ nicht zulässig*

$$p(x) = s(x)\cdot q(x) + r(x)$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{s(x)}_{Polynom} + \underbrace{\frac{r(x)}{q(x)}}_{PBZ}$$

Das heißt: Jede rationale Funktion kann in der Form $\frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{s(x)}_{Polynom} + PBZ$ *geschrieben werden. Diese Darstellung ist eindeutig.*

Beweis. $s(x)$ entsteht durch Polynomdivision $\Rightarrow$ eindeutig bestimmt.

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_j} \frac{A_{ij}}{(x-\alpha_i)^j} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_j} \frac{B_{ij}}{(x-\alpha_i)^j} \qquad \text{mit } B_{ij} \neq A_{ij}$$

$$0 = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_j} \frac{A_{ij}-B_{ij}}{(x-\alpha_i)^j} \qquad \begin{array}{c}\text{Wähle } i = I\text{, sodass ein } j \text{ entsteht}\\ \text{mit } B_{ij} \neq A_{ij}\text{. Wähle } j = J \text{ maximal}\end{array}$$

$$0 = \sum_{j=1}^{J} \frac{A_{Ij}-B_{Ij}}{(x-\alpha_I)^j} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq I}}^{l}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}-B_{ij}}{(x-\alpha_i)^j} \qquad / \cdot (x-\alpha_I)^J$$

$$= (A_{IJ}-B_{IJ}) + (-\alpha_I)\cdot\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq I}}^{l}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}-B_{ij}}{(x-\alpha_i)^j}\right)$$

$$= A_{IJ} - B_{IJ} + 0$$

$$\Rightarrow \quad A_{ij} = B_{IJ} \quad \lightning$$

$\Rightarrow$ Es gibt nur eine Partialbruhzerlegung

$\Rightarrow$ Die Partialbruchzerlegung ist eindeutig bestimmt

$\square$

2 Folgen, Reihen, Grenzwerte

Definition 2.1. Eine Abbildung $f : \mathbb{N}_{(0)} \to \mathbb{R}$ (beziehungsweise $\mathbb{C}$) heißt eine Folge reeller (beziehungsweise komplexer) Zahlen.
Schreibweise: $a_1 = f(1)$
Folge: $\to (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beziehungsweise $(a_N)_{n\in\mathbb{N}_0}$

Definition 2.2. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller beziehungsweise komplexer Zahlen konvergiert, gegen $a \in \mathbb{R}$ (beziehungsweise $\mathbb{C}$), wenn

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N : |a - a_n| < \varepsilon$$

Das heißt: Für jede vorgegebene Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ wird $|a - a_n| < \varepsilon$ wenn n „groß genug" wird.
Sprechweise dazu: $|a - a_n| < \varepsilon$ für „fast alle" n.
„fast alle " $\Leftrightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq N$ ... für alle mit Ausnahme von <u>endlich</u> vielen

Schreibweise

$$a = \lim_{n\to\infty}(a_n) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N : |a - a_n| < \varepsilon$$

a heißt der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Definition 2.3. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert besitzt

$$\Leftrightarrow \quad \exists a \in \mathbb{R} \text{ (beziehungsweise } \mathbb{C}), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N : |a - a_n| < \varepsilon$$

Satz 2.1. *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann höchstens einen Grenzwert haben.*

Beweis. Angenommen $(a_n)n \in \mathbb{N}$ hat zwei Grenzwerte a und b mit $a \neq b$.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N_1 : \quad |a_n - a| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_2 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N_2 : \quad |a_n - b| < \varepsilon$$
$$\varepsilon = \frac{|b-a|}{2} > 0$$
$$n \geq \max\{N_1, N_2\}$$
$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{|b-a|}{2} + \frac{|b-a|}{2} = |b - a| \ \lightning$$

$\square$

Definition 2.4. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Nullfolge, wenn:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N : \quad |a_n| < \varepsilon$$

Beispiel 17. $s \in \mathbb{Q}$ *und* $s > 0$*:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^s}\right) = 0$$
$$\varepsilon > 0 : \left|\frac{1}{n^s}\right| < \varepsilon$$
$$\frac{1}{n} < \varepsilon^{\frac{1}{s}}$$
$$n > \varepsilon^{-\frac{1}{s}}$$
$$N = \underbrace{\left\lceil \varepsilon^{-\frac{1}{s}} \right\rceil}_{\in\mathbb{R}^+} +1 \text{ ... \textit{die nächstgrößere ganze Zahl von} } \varepsilon^{-\frac{1}{s}} \text{ \textit{plus} } 1$$
$$\textit{Dann gilt: } \frac{1}{n^s} < \varepsilon \textit{ für } n \geq N$$

$a > 0:$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}) = 1$$

Beweis. Zweiteilung:

$a > 1$:

$$x_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$$
$$\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$$
$$a = (1 + x_n)^n \geq 1 + n \cdot x_n$$
$$\Rightarrow \quad 0 < x_n \leq \frac{a-1}{n}$$
$$\varepsilon > 0 : \quad x_n < \varepsilon \text{ gilt sicher, wenn } \frac{a-1}{n} < \varepsilon \text{ gilt.}$$
$$\text{Das heißt: } n > \frac{a-1}{\varepsilon} \text{ und } N = \left\lceil \frac{a-1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

$a < 1$:

$$y_n = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$$
$$\frac{1}{a} > 1, \text{ daher gilt } \lim_{n\to\infty}(y_n) = 1$$
$$\frac{1}{y_n} = \sqrt[n]{a}$$
$$\left|\frac{1}{y_n} - 1\right| = \frac{|y_n - 1|}{y_n} \leq |y_n - 1| < \varepsilon \text{ (wenn } n \geq N\text{)}$$

□

Bemerkung 54.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)=1$$

Beweis.

$$x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$$
$$\sqrt[n]{n} = 1 + x_0 \Leftrightarrow n = (1 - x_n)^n$$
$$n = 1 + nx_n + \binom{n}{2}x_n^2 + ... \geq 1 + \binom{n}{2}x_n^2$$
$$n - 1 \geq \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}_{\binom{n}{2}} x_n^2 \Rightarrow x_n^2 = \frac{2}{n}$$
$$x_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$
$$0 \leq x_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$
$$x_n < \varepsilon \text{ gilt, wenn } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$
$$n > \frac{2}{\varepsilon^2}$$
$$N = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1$$

□

Bemerkung 55.

$$|q| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(q^n) = 0$$

Beweis.

$$Q = \frac{1}{|q|} > 1$$
$$Q^n = (1 + (q-1))^n \geq 1 + (Q-1)\cdot n$$
$$|q^n| = \frac{1}{Q^n} \leq \frac{1}{1 + (Q-1)\cdot n} < \varepsilon$$
$$n > \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \cdot \frac{1}{Q-1}$$
$$N = \left\lceil \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \cdot \frac{1}{Q-1} \right\rceil + 1$$

□

Bemerkung 56.

$$|z| > 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^k}{z^n}\right) = 0 \ \ \textit{für} \ \ k \in \mathbb{N}$$

Beweis.

$$1 + x = |z| : \quad (1+x)^{n+k+1} = \sum_{l=0}^{n+k+1}\binom{n+k+1}{l} \underset{l=k+1}{\geq} \binom{n+k+1}{k+1}x^{k+1} =$$

$$= \frac{(n+k+1)(n+k)(n+1)}{(k+1)!}x^{k+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n+k+1)(n+k)(n+1)}{(k+1)!}x^{k+1} \geq \frac{n^{k+1}}{(k+1)!}x^{k+1}$$

$$|z|n+k+1 = (1+x)^{n+k+1} \geq \frac{n^{k+1}}{(k+1)!}x^{k+1}$$

$$|z|^n \geq \frac{n^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)^{k+1}$$

$$\left|\frac{n^k}{z^n}\right| \leq \frac{n^k(n+1)!}{n^{k+1}\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)^{k+1}} = \frac{1}{n}\cdot(k+1)!\cdot\left(\frac{1+x}{x}\right)^{k+1}$$

$$\varepsilon > 0 : \quad \text{Wenn } \frac{1}{n}\cdot(k+1)!\cdot\left(\frac{1+x}{x}\right)^{k+1} < \varepsilon \text{ gilt, dann gilt auch: } \left|\frac{n^k}{z^n}\right| < \varepsilon$$

$$n > \frac{(k+1)!\cdot\left(\frac{1+x}{x}\right)^{k+1}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad N = \left\lceil \frac{(k+1)!\cdot\left(\frac{1+x}{x}\right)^{k+1}}{2} \right\rceil + 1$$

□

2.1 Rechenregeln für Grenzwerte

Satz 2.2. *Seien $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller (beziehungsweise komplexer) Zahlen:*

$$a = \lim_{n\to\infty}(a_n) \quad \textit{und} \quad b = \lim_{n\to\infty}(b_n)$$

Dann gilt:

1. *$(a_n \pm b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt:*

$$a \pm b = \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)$$

2. *$(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und es gilt:*

$$a \cdot b = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$$

3. *Wenn* $\forall n \in \mathbb{N}: \; b_n \neq 0$ *und* $b \neq 0$, *dann konvergiert* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *und es gilt:*

$$\frac{a}{b} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

4. $(\overline{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent und es gilt:*

$$\overline{a} = \lim_{n\to\infty}(\overline{a}_n)$$

5. $(|a_n|)$ *ist konvergent und es gilt:*

$$|a| = \lim_{n\to\infty}(|a_n|)$$

Beweis.

1.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_1 \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_2 \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N2 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow \quad |(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \end{aligned}$$

2. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N_0 : |b_n - b| < 1 \\ |b_n| = |b + (b_n - b)| < |b| + |b_n - b| \leq |b| + 1 \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N_1: \quad |a_n - a| \quad \leq \quad \tfrac{\varepsilon}{2(|b|+1)} \\ \exists N_2 \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N_2: \quad |b_n - b| \quad \leq \quad \tfrac{\varepsilon}{2(|a|+1)} \end{aligned}$$

$$n \geq \max\{N_1, N_2\}: \quad |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq$$

$$\leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| \leq \cancel{(|b| + 1)} \cdot \frac{\varepsilon}{2\cancel{(|b| + 1)}} + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\frac{|a|}{|a| + 1}}_{<1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

3. Es genügt zu zeigen, dass unter den obigen Bedingungen $\frac{1}{b} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right)$

gilt und wende dann 2. auf $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N : |b_n - b| < \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{|b|}{2} \text{ Dann gibt es ein } N_0 : \forall n \geq N_0 : |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

$$|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq \big||b_n| - |b - b_n|\big| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0$$

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N_1 : |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \cdot \varepsilon$$

$$\text{Für } n \geq \max\{N_1, N_0\} \text{ gilt dann } \left|\frac{1}{b_n}\right| - \left|\frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|} < \frac{\cancel{|b|^2}\varepsilon}{\cancel{2}\frac{\cancel{|b|}}{\cancel{2}}\cancel{|b|}} = \varepsilon$$

4. $|a_n - a| = |\overline{a}_n - \overline{a}|$ ...
5. $\big||a_n| - |a|\big|$ ...

□

Satz 2.3. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller zahlen mit $a = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$. Wenn es ein $N_0 \in \mathbb{N}$ gib, sodass $\forall n \geq N_0 : \; a_n \geq b_n$ gilt, dann gilt $a \geq b$.*

Beweis.

$$\left.\begin{array}{llll} \forall\varepsilon > 0 & \exists N_1 \in \mathbb{N} : & \forall n \geq N_1 : & |a_n - a| < \varepsilon \\ \forall\varepsilon > 0 & \exists N_2 \in \mathbb{N} : & \forall n \geq N_1 : & |b_n - b| < \varepsilon \end{array}\right\} n \geq N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} a - \varepsilon & < & a_n & < & a + \varepsilon \\ b - \varepsilon & < & b_n & < & b + \varepsilon \end{array}\right\} \to \quad \begin{array}{c} 0 \leq a_n - b_n < (a + \varepsilon) - (b - \varepsilon) = a - b + 2\varepsilon \\ 0 < a - b + 2\varepsilon \end{array}$$

$$\forall\varepsilon > 0 : \quad b - a < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \text{für beliebige } \varepsilon > 0 \text{ nur möglich, wenn: } \begin{array}{ccc} b - a & \leq & 0 \\ b & \leq & a \end{array}$$

□

Satz 2.4. *Entschließungssatz*
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller zahlen und gelte für $N_0 \in \mathbb{N} : \; \forall n \geq N_0 :$ $a_n \leq b_n \leq c_n$.
Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und $a = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n)$ gilt, dann kovergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt: $a = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$

Beweis.

$$\left.\begin{array}{llll} \forall\varepsilon > 0 & \exists N_1 \in \mathbb{N} : & \forall n \geq N_1 : & |a_n - a| < \varepsilon \\ \forall\varepsilon > 0 & \exists N_2 \in \mathbb{N} : & \forall n \geq N_2 : & |c_n - c| < \varepsilon \end{array}\right\} N = \max\big(N_0, N_1, N_2\big) : n \geq N$$

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |b_n - a| < \varepsilon$$

□

Definition 2.5. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen, dann schreibt man $a_n \sim b_n$ $\big[$„asymptotisch gleich"$\big]$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 1$.

Definition 2.6. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller, oder komplexer Zahlen heißt beschränkt, wenn es ein $m \in \mathbb{R}^+$ gibt, sodass $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$

Satz 2.5. *Eine konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \forall > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N : \quad |a_n - a| < \varepsilon$$
$$\varepsilon = 1 : \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N : \quad |a_n| = |a + a_n - a| \leq |a| + 1$$
$$M = \max\big(|a_1|, |a_2|, ..., |a_{N-1}|, |a| + 1\big)$$
$$\Rightarrow \forall n : \quad |a_n| \leq M$$

□

Definition 2.7. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, dann heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- monoton wachsend, wenn $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$a_{n+1} \geq a_n$$
- streng monoton wachsend, wenn $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$a_{n+1} > a_n$$
- monoton fallend, wenn $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$a_{n+1} \leq a_n$$
- streng monoton, wenn $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$a_{n+1} < a_n$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton, wenn es entweder monoton wachsend oder fallend ist.

Satz 2.6. *Eine monotone und beschränkte Folge ist konvergent, wenn*

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton wachsend ist, dann gilt*
$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (a_n)$$

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton fallend ist, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(a_n)$$

Beweis.

- Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.
  Weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert $a = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(a_n)$ lauf Satz 1.4

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}: &\quad a_n \le a\\
\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: &\quad a_N > a-\varepsilon\\
\Rightarrow \quad \forall n \ge N: &\quad a_n \ge a_N > a - \varepsilon\\
\text{das heißt:} \quad \forall n \ge N: &\quad a-\varepsilon < a_n \le a < a+\varepsilon\\
\Rightarrow &\quad |a_n - a| < \varepsilon
\end{aligned}$$

- Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallen.
  Weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert $a = \inf\limits_{n\to\infty}(a_n)$ laut Satz 1.4

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}: &\quad a_n \ge a\\
\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: &\quad a_N < a+\varepsilon\\
\Rightarrow \quad \forall n \ge N: &\quad a_n \le a_N < a + \varepsilon\\
\text{das heißt:} \quad \forall n \ge N: &\quad a-\varepsilon < a \le a_n < a+\varepsilon\\
\Rightarrow &\quad |a_n - a| < \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Beispiel 18.

$$p_n = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot(2n-1)}$$

$$a_n = \frac{p_n}{\sqrt{n}} \text{ und } b_n = \frac{p_n}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{Es soll gezeigt werden: } b_{n+1} \ge b_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b_{n+1}^2}{b_n^2} \ge 1$$

$$\frac{b_{n+1}^2}{b_n^2} = \frac{p_{n+1}}{\sqrt{n+2}^2}\cdot\frac{\sqrt{n+1}^2}{p_n^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2^2}\cdot\cancel{4^2}\cdot\cancel{6^2}\cdot\ldots\cdot\cancel{(2n)^2}\cdot\big(2(n+1)\big)^2}{\cancel{1^2}\cdot\cancel{3^2}\cdot\cancel{5^2}\cdot\ldots\cdot\cancel{(2n-1)^2}\cdot(2n+1)^2\cdot(n+2)}\cdot\frac{\cancel{1^2}\cdot\cancel{3^2}\cdot\cancel{5^2}\cdot\ldots\cdot\cancel{(2n-1)^2}\cdot(n+1)}{\cancel{2^2}\cdot\cancel{4^2}\cancel{6^2}\cdot\ldots\cdot\cancel{(2n)^2}} =$$

$$= \frac{(2n+2)^2\cdot(n+1)}{(2n+1)^2\cdot(n+2)} = \frac{4\big(n^3+3n^2+3n+1\big)}{4n^3+12n^2+9n+2} = \frac{4n^3+12n^2+12n+4}{4n^3+12n^2+9n+2} > 1$$

$$a_{n+1} \le a_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_n^2}{a_{n+1}^2} \ge 1$$

$$\frac{\cancel{2^2}\cdot\cancel{4^2}\cdot\cancel{6^2}\cdot\ldots\cdot\cancel{(2n)^2}}{\cancel{1^2}\cdot\cancel{3^2}\cdot\cancel{5^2}\cdot\ldots\cdot\cancel{(2n-1)^2}\cdot n}\cdot\frac{\cancel{1^2}\cdot\cancel{3^2}\cdot\cancel{5^2}\cdot\ldots\cdot\cancel{(2n-1)^2}\cdot(2n+1)^2\cdot(n+1)}{\cancel{2^2}\cdot\cancel{4^2}\cancel{6^2}\cdot\ldots\cdot\cancel{(2n)^2}\cdot(2n+2)^2}=$$

$$=\frac{(2n+1)^2}{2n(n+1)}=\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+4n}>1$$

$$\Rightarrow\quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\quad\downarrow\ \textit{(monoton fallend)}$$

$$\Rightarrow\quad (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\quad\uparrow\ \textit{(monoton wachsned)}$$

$$b_1\le b_2\le\ldots\le a_2\le a_1$$

$$\Rightarrow\quad b_1\le b_n\le a_n\le a_1$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sind beschränkt und monoton, daher konvergent.*

$$p=\lim_{n\to\infty}(a_n)=\lim_{n\to\infty}(b_n)\ \textit{da}\ \frac{a_n}{b_n}=\frac{\frac{p_n}{\sqrt{n}}}{\frac{p_n}{\sqrt{n+1}}}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=\sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=1$$

$\underline{p=\sqrt{\pi}:}$

$$\left(\begin{matrix}\sqrt{2}=\frac{2}{1\cdot\sqrt{2}}=b_1\le p\le a_1=\frac{2}{1\cdot\sqrt{1}}=2\\ \sqrt{2}\le p\le 2\end{matrix}\right)$$

$$p_n=\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}=\frac{\big(2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)\big)^2}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n)}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n)^1}=\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\sim p\sqrt{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{\sqrt{n}}\right)=p\qquad\longleftrightarrow\qquad\binom{2n}{n}\sim\frac{4^n}{p\sqrt{n}}$$

$$\binom{\frac12}{n}=\frac{\frac12\left(\frac12-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac12-n+1\right)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot\left(\frac12\right)^2\cdot1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{n!}\cdot\underbrace{\frac{2n-1}{2n-1}}_{=1}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}\cdot1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot\frac{1}{p_n}$$

$$\left|\binom{\frac12}{n}\right|=\frac{1}{p_n(\cdot(2n-1)}\sim\frac{1}{p\sqrt{n}\cdot(2n-1)}=\frac{1}{2pn\sqrt{n}\cdot\left(1-\frac{1}{2n}\right)}\sim\frac{1}{2pn\sqrt{n}}=\frac{1}{2pn^{\frac32}}$$

Beispiel 19. ***„Babylonisches Wurzelziehen"***
$\underline{a>0:}\qquad\sqrt{a}$
$\underline{x_0}$ ... *gegeben* $\big[$*beliebig gewählter Startwert*$\big]$
$\underline{x_0}$ *ist ein grob geschätztes Ergebnis von* $\sqrt{a}$
Angenommen $x_0=\sqrt{a}$, *dann muss* $\sqrt{a}=\frac{a}{x_0}$ *gelten, wenn* $x_0\neq\sqrt{a}$, *dann sind beide Ausdrücke nur Näherungen. Im Folgenden werden beide diese Näherungen gemittelt und*

so eine rekursive Folge definiert.

$$x_0, \frac{a}{x_0} \text{ ... \textit{Näherungen für} } \sqrt{a} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) \\ x_{n+1} & = & \frac{1}{2} \cdot \left(x_n \frac{a}{x_n}\right) \end{array}$$

Beschränktheit:

$$x_n \geq \sqrt{a} \text{ \textit{für} } n \geq 1$$

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n} \cdot \left(x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a\right) = \frac{1}{2x_n} \cdot \left(x_n - \sqrt{a}\right)^2 \geq 0$$

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2x_n} \cdot \left(x_n^2 + a\right) = \frac{1}{2x_n} \cdot \left(2x_n^2 - x_n^2 - a\right) = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \geq 0$$

$$\sqrt{a} \leq x_n \leq x_{n+1} \leq ... \leq x_1 \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ \textit{ist beschränkt}}$$

$$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ \textit{konvergiert}}$$

$$\Rightarrow \quad x = \lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}(x_n) + \frac{a}{x_n}\right) > 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + a = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{a}$$

2.2 Häufungspunkte (Häufungsweite) von Folgen

$$\text{Konvergenz: } a = \lim_{n\to\infty}(x_n)$$

Definition 2.8. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Dann heißt h $\big[$in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}\big]$ ein Häufungspunkt (Häufungsweite), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ für unendlich viele n erfüllt ist $\Longleftrightarrow$ wenn für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder die Umgebung $|x_n - h| < \varepsilon$ erfüllen

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N: \quad |x_n - h| < \varepsilon$$

Definition 2.9. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen und sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz 2.7. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weine Folge reeller oder komplexer Zahlen, dann ist h ein Häufungspunkt der Folge genau dann, wenn es eine gegen h konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt.*

Beweis.

„$\Rightarrow$" Sei h ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\varepsilon = \frac{1}{k} \text{ mit } k = 1, 2, ...$$

$k = 1:$

$$N = 1, \quad \exists n_1 \geq 1: \quad |a_{n_1} - h| < 1$$

$k = 2:$

$$N = n_1 + 1, \quad \exists n_2 \geq n_1: \quad |a_{n_2} - h| < \frac{1}{2}$$

$\vdots$

$k:$

$$N = n_{k-1} + 1, \quad \exists n_k \geq n_{k-1}: \quad |a_{n_k} - h| < \frac{1}{k}$$

$(a_{k_n})_{k\in\mathbb{N}}$ ist dann eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt:

$$h = \lim_{k\to\infty} \left(a_{n_k}\right)$$

„$\Leftarrow$" Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen h konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists K \in N: \quad \forall k \geq K: \quad |a_{n_k} - h| < \varepsilon$$

Das heißt: für jedes $\varepsilon > 0$ unterscheiden sich die Folgenglieder $\underbrace{a_{n_k}, a_{n_{k+1}}, \ldots}_{\infty-\text{viele}}$ um weniger als ε von h.

$\square$

Beispiel 20.

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} a_{2n} & = & 1 + \frac{1}{2n} & \longleftrightarrow & 1 & = & \lim\limits_{n\to\infty} (a_{2n}) \\ a_{2n+1} & = & -1 + \frac{1}{2n+1} & \longleftrightarrow & -1 & = & \lim\limits_{n\to\infty} (a_{2n+1}) \end{array}$$

Satz 2.8. ***Bolzano-Weierstraß***

(i) Jede beschränkte Folge besitzt einen Häufungspunkt

(ii) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge

Bemerkung 57. *Nach Satz 2.7 sind diese beiden Aussagen äquivalent.*

Beweis. (i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen

$$\exists a, b \in \mathbb{R}: \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad a \leq a_n \leq b \qquad \Big[a_n \in [a,b]\Big]$$

$$I_0 = [a,b]$$

$$\text{Wähle } I_1 = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \text{ beziehungsweise } \left[\frac{a+b}{2}\right] \text{ je nachdem,}$$

welches der beiden Intervalle ∞-viele Folgenglieder enthält

$$I_n = [\alpha_n, \beta_n], \quad I_{n+1} = \left[\alpha_n, \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}\right] \text{ beziehungsweise } I_{n+1} = \left[\frac{\alpha_n + \beta_2}{2}\right]$$

Dann bildet $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ...$ eine Intervallschachtellung

Nach Intervallschatelungsprinzip (V) gibt es genau ein $h \in \mathbb{R}$ sodass:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad h \in I_n$$

Behauptung: h ist ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Sei $\varepsilon > 0$, wähle n so groß, dass $|I| < \varepsilon$

$$h \in I_n, \quad |I_n| < \varepsilon \Rightarrow I_n \subseteq (h-\varepsilon, h+\varepsilon)$$

Nach Konstruktion liegen in I_n unendlich viele Folgenglieder,
also auch in $(h-\varepsilon, h+\varepsilon)$

(ii) Sei $a_n = x_n + iy_n$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen.

$$\exists M \in \mathbb{N}: \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad |a_n| \leq M \Rightarrow |x_n| \leq M, \quad |y_n| \leq M$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine beschränkte Folge reeller Zahlen.

Diese besitzt nach (i) einen Häufungspunkt und nach (ii) eine konvergente Teilfolge

$$x = \lim_{k\to\infty} \left(x_{n_k}\right)$$

$\left(y_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine beschränkte Folge reeller Zahlen.

Diese besitzt eine konvergente Teilfolge $\left(y_{n_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}}$

$$\Rightarrow \left(a_{n_{k_l}}\right) \text{ konvergiert}$$

□

Bemerkung 58. *Eine Teilfolge einer Teilfolge ist immer noch eine Teilfolge der ursprünglichen Folge.*

Definition 2.10. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann heißt:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup\left\{a_n \,\middle|\, n \geq k\right\}\right) \text{ der limes superior}$$

$$\Big[\text{„obere Häufungsgrenze"}\Big]$$

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\inf\left\{a_n \,\middle|\, n \geq k\right\}\right) \text{ der limes inferior}$$

$$\Big[\text{„untere Häufungsgrenze"}\Big]$$

Bemerkung 59.

$$b_k = \sup\left\{a_n \,\middle|\, n \geq k\right\}$$

Die Mengen $\left\{a_n \,\middle|\, n \geq k\right\}$ *nehmen mit wachsendem* k *ab.*

$$\left\{a_n \,\middle|\, n \geq k+1\right\} \subseteq \left\{a_n \,\middle|\, n \geq k\right\}$$

Damit ist $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *monoton fallend und beschränkt, daher konvergent*

Ebeneso für $\liminf$

$$\textit{Sei } h^* = \limsup_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup\left\{a_n \,\middle|\, n \geq k\right\}\right)$$

$$\underline{\varepsilon > 0:} \quad \exists K \in \mathbb{N}: \quad \forall k \geq K: \quad \left|h^* - \sup\left\{a_n \,\middle|\, n \geq k\right\}\right| < \varepsilon$$

$$\underline{\textit{genauer:}} \quad h^* \leq \sup\left\{a_n \,\middle|\, n \geq k\right\} < h^* + \varepsilon$$

$$\textit{also gilt } \forall n \geq k: \quad a_n < h^* + \varepsilon$$

$$\forall k: \quad h^* - \varepsilon < \sup\left\{a_n \,\middle|\, n \geq k\right\} \Longrightarrow \forall k, \quad \exists n \geq k: \quad a_n > h^* - \varepsilon$$

das heißt.: für unendlich viele n *gilt:* $a_n > h^* - \varepsilon$

$\Longrightarrow h^*$ *ist ein Häufungspunkt von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\underbrace{h^* - \varepsilon <}_{\substack{\text{gilt für}\\ \infty\text{-viele } n}} a_n \underbrace{< h^* + \varepsilon}_{\substack{\text{gilt ab}\\ \text{einem Index}}}$$

$\Rightarrow$ *gilt für unendlich viele* n

h^* *ist der größte Häufungsunkt von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

angenommen: $h' > h^*$ *wäre ein Häufungspunkt von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\varepsilon = \frac{h' - h^*}{2} > 0$$

$$\underbrace{h^* + \varepsilon = h' - \varepsilon < a_n}_{\substack{\text{ist nach der Überlegung}\\ \text{oben nur für höchstens}\\ \text{endlich viele } n \text{ erfüllt}}} < h' + \varepsilon \qquad \lightning$$

Ebenso für $\liminf_{n\to\infty}(a_n)$

Satz 2.9. ***Charakterisierung von „$\liminf$" und „$\limsup$"***
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen, $h_* = \liminf\limits_{n\to\infty}(a_n)$ und $h^* = \limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)$, dann gilt:

$$\begin{array}{rlccll} i) & \forall\varepsilon>0 & a_n & < & h^*-\varepsilon & \textit{für fast alle } n \\ ii) & \forall\varepsilon>0 & a_n & > & h-\varepsilon & \textit{für } \infty-\textit{viele } n \\ iii) & \forall\varepsilon>0 & a_n & > & h_*-\varepsilon & \textit{für fast alle } n \\ iv) & \forall\varepsilon>0 & a_n & < & h_*+\varepsilon & \textit{für } \infty\textit{-viele } n \end{array}$$

Bemerkung 60.

$$\underset{\textit{kleinster}}{\liminf_{n\to\infty}(a_n)} \ \underset{\textit{und}}{\le} \ \underset{\textit{größter}}{\limsup_{n\to\infty}(a_n)}$$
$$\textit{Häufungspunkt}$$

$$\textit{Wenn: } \liminf_{n\to\infty}(a_n) = \limsup_{n\to\infty}(a_n) = a, \textit{ dann konvergiert } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ gegen } a$$

$$h^* = h_* = a:$$
$$\left.\begin{array}{llllll} \forall\varepsilon>0 & \exists N_1\in\mathbb{N}: & \forall n\ge N_1: & a_n & < & a+\varepsilon \\ \forall\varepsilon>0 & \exists N_2\in\mathbb{N}: & \forall n\ge N_2 & a_n & > & a-\varepsilon \end{array}\right\} n \ge N = \max(N_1,N_2)$$
$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$$
$$\Rightarrow |a-a_n| < \varepsilon$$

Bemerkung 61.

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}(a_n) \le \liminf_{n\to\infty}(a_n) \le \limsup_{n\to\infty}(a_n) \le \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n)$$

Beispiel 21.

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$
$$\limsup_{n\to\infty}(a_n) = 1 \ \textit{und} \ \liminf_{n\to\infty}(a_n) = -1$$

zu zeigen nach i)

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N: \quad a_n < 1 + \varepsilon$$

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \overset{?}{<} 1 + \varepsilon$$

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \varepsilon$$

$$\textit{gilt für } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

ii)

$$\forall \varepsilon > 0, \quad a_n > 1 - \varepsilon \textit{ für } \infty - \textit{viele } n$$

$$a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} > 1 > 1 - \varepsilon$$

iii)

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N: \quad a_n > -1 - \varepsilon$$

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n} > -1 > -1 - \varepsilon$$

$$\Rightarrow N = 1$$

iv)

$$\forall \varepsilon > 0: \quad a_n < -1 + \varepsilon \textit{ für } \infty - \textit{viele } n$$

$$a_{2n+1} = -1\frac{1}{2n+1} < -1 + \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}$$

$$N = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil$$

2.3 Uneigentliche Grenzwerte, beziehungsweise Häufungspunkte

Definition 2.11. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, dann gilt:

$$\begin{array}{rclcllll}
\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) & = & +\infty & \Longleftrightarrow & \forall M > 0 & \exists N \in \mathbb{N} & \forall n \geq N: & a_n > M \\
\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) & = & -\infty & \Longleftrightarrow & \forall M > 0 & \exists N \in \mathbb{N} & \forall n \geq N: & a_n < -M \\
\hline
\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n) & = & +\infty & \Longleftrightarrow & \forall M > 0 & \forall N \in \mathbb{N} & \exists n \geq N: & a_n > M \\
\liminf\limits_{n\to\infty} (a_n) & = & -\infty & \Longleftrightarrow & \forall M > 0 & \forall N \in \mathbb{N} & \exists n \geq N: & a_n < -M \\
\hline
\end{array}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = \pm\infty \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \big(|a|\big) = +\infty$$

Satz 2.10. ***Konvergenzkriterium von Cauchy***
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller oder komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall m,n \geq N: \quad |a_m - a_n| < \varepsilon \qquad \text{[„Cauchy-Eigenschaft"]}$$

Wenn eine Folge diese Eigenschaft hat, nennt man sie Cauchy-Folge.

Beweis.

„$\Rightarrow$" Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent:

$$\exists a: \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \begin{array}{lll} \forall n \geq N: & |a_n - a| & < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall m \geq N: & |a_m - a| & < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$$

$$\text{Seien } m,n \geq N: \quad |a_m - a_n| = \big|(a_m - a) - (a_n - a)\big| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\text{das heißt: } \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall m,n \geq N: \quad |a_m - a_n| \ \varepsilon$$

„$\Leftarrow$" Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall m,n \geq N: \quad |a_m - a_n| < \varepsilon$$

$$\underline{\varepsilon = 1:} \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall m,n \geq N: 0: \quad |a_m - a_n| < 1 \Rightarrow |a_{n_0} - a_n| < 1$$

$$\underline{n \geq N_0:} \quad |a_n| = |a_{N_0} + (a_n - a_{n_0})| = |a_{n_0}| + |a_n - a_{n_0}| \leq |a_{n_0}| + 1$$

$$M = \max\big(|a_1|, |a_2|, ..., |a_{N_0 - 1}|, |a_{N_0}| + 1\big): \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad |a_n| \leq M$$

das heißt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt

Nach Satz 2.7 besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge

$$\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

$$a = \lim_{k\to\infty} \left(a_{n_k}\right)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists K \in \mathbb{N}: \quad \forall k \geq K: \quad \left|a - a_{n_k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\underline{\text{Cauchy-Eigenschaft:}} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_1 \in \mathbb{N}: \quad \forall m,n \geq N_1: \quad |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\underline{\text{Sei } \varepsilon > 0:} \quad N = \max\left(N, n_k\right)$$

$$n \geq N: \quad |a_n - a| = \left|a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a\right| \leq \underbrace{\left|a_n - a_{n_k}\right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left|a_{n_k} - a\right|}_{\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

□

Beispiel 22.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \tfrac{1}{2}, \quad a_2 = \tfrac{1}{3}, \quad a_3 = \tfrac{3}{5}, \quad ...$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n + 1}$$
$$\forall n: \quad \frac{1}{2} \leq a_n \leq 1 \quad \textit{... Behauptung}$$
$$\frac{3}{2} \leq a_n + 1 \leq 2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \underbrace{\frac{1}{a_n + 1}}_{a_{n+1}} \leq \frac{2}{3} \leq 1$$

Bemerkung 62.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N: \quad \forall k \in \mathbb{N}: \quad |a_{\underbrace{n+k}_{=:m}} - a_n| < \varepsilon$$

Beispiel 23. ***Fortsetzung des Beispiels 22***

$$|a_{n+k} - a_n| = \left| \frac{1}{a_{n+k-1} + 1} - \frac{1}{a_{n-1} + 1} \right| = \frac{|a_{n+k-1} - a_{n-1}|}{\underbrace{(a_{n-1} + 1)}_{\geq \frac{3}{2}} \cdot \underbrace{(a_{n+k-1} + 1)}_{\geq \frac{3}{2}}} \leq$$
$$\leq \frac{4}{9} |a_{n+k-1} - a_{n-1}|$$
$$\textit{Induktion iterieren: immer Index um 1 absenken:}$$
$$\vdots$$
$$\Rightarrow \quad \leq \cdots \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot |a_k - a_0| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot \frac{1}{2}$$
$$\textit{Sei } \varepsilon > 0, \textit{ dann } \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N: \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n < \varepsilon$$
$$\textit{daraus folgt: } \forall n \geq N: \quad \exists k \in \mathbb{N}: \quad |a_{n+k} - a_n| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9}\right)^n < \varepsilon$$
$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \textit{ ist eine Cauchy-Folge, daher konvergent}$$
$$\Rightarrow \quad a = \lim_{n \to \infty} (a_n) = \lim_{n \to \infty} (a_{n+1}) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{a_n + 1} \right) = \frac{1}{a + 1}$$
$$\Rightarrow \quad a^2 + a - 1 = 0 \longrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1 \Rightarrow a \textit{ ist positiv } \forall n \in \mathbb{N}$$

2.4 Bemerkungen zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ (beziehungsweise $\mathbb{C}$)

Intervallschtelungsprinzip (V) $\rightleftarrows$ $\substack{\text{inf} \\ \text{sup}}$ $\Longrightarrow$ $\substack{\liminf \\ \limsup}$ $\overset{a)}{\Longrightarrow}$ Bolzano-Weierstraß

Bolzano-Weierstraß $\Longrightarrow$ Cauchy-Kriterium $\overset{b)}{\Longrightarrow}$ Intervallschatelungsprinzip (V)

a) $\substack{\liminf \\ \limsup}$ $\Longrightarrow$ Bolzano-Weierstraß:
lim inf und lim sup existieren für beschränkte Folgen, beide sind Häufungspunkte, daher besitzen beschränkte Folgen Häufungspunkte.

b) Cauchy-Kriterium $\Longrightarrow$ Intervallschachtelungsprinzip (V):
Zu zeigen: Die Aussage „Jede Cauchy-Folge besitzt einen Grenzwert" impliziert (V)

Beweis. Sei $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ... \supseteq I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung
Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq b_m \leq b_{m-1} \leq ... \leq b_2 \leq b_1$$
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad b_n - a_n < \varepsilon$$
$$\text{Sei } n \text{ mit } b_n - a_n < \varepsilon$$
$$m \geq n: \quad 0 \leq a_m - a_n \leq b_m - a_n \leq b_n - a_n < \varepsilon$$
$$\text{das heißt: } \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall m, n \geq N: \quad |a_m - a_n| < \varepsilon$$
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchy-Folge } \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ besitzt einen Grenzwert}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n \leq a \text{ , da } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ monoton wachsend ist}$$
$$\text{analog ist } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ auch eine Cauchy-Folge mit Grenzwert } b$$
$$\text{Aus der Intervallschachtelungseigenschaft (V) folgt:}$$
$$\forall \varepsilon > 0: \quad 0 \leq b - a < \varepsilon \Rightarrow a = b$$
$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n \leq a \leq b_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \quad a \in I_n$$
$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \qquad \checkmark$$

□

2.5 Reihen

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ... Reihe mit reellen, oder komplexen Gliedern $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$ konvergiert. In diesem Fall setzt man:

$$s = \lim_{n\to\infty}(s_n) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Beispiel 24. ***Teleskop-Reihe***

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \textit{mit } n \geq 1$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \dots \ \textit{Vermutung}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} (s_n) = 1$$

$$\textit{das heißt: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Beispiel 25. ***Geometrische Reihe***

$$|q| < 1$$

$$a_n = q^n \ \textit{für } n \geq 0$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (s_n) = \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Satz 2.11. ***Kriterium für Reihen mit nicht-negativen Gliedern***
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit: $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \geq 0$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.

Beweis.

„$\Leftarrow$" Sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.
$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$
$\Rightarrow$ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt
$\Rightarrow$ konvergent

„$\Rightarrow$" Sie $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch beschränkt.

$\square$

Beispiel 26. ***Harmonische Reihe***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

zeige, dass die Reihe divergiert

zeige dafür, dass die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{l=0}^{n-1} \underbrace{\sum_{k=2^l+1}^{2^{l+1}}}_{2^l \, Glieder} \frac{1}{k} = 1 + \left(\sum_{l=2}^{2} \frac{1}{k} \right) + \left(\sum_{l=3}^{4} \frac{1}{k} \right) + \left(\sum_{l=5}^{8} \frac{1}{k} \right) + ... \geq$$

$$\geq 1 + \sum_{l=0}^{n-1} 2^l \cdot \frac{1}{2^{l+1}} = 1 + \frac{n}{2} \Rightarrow \textit{ ist nicht beschränkt}$$

Satz 2.12. ***Verdichtungssatz***

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Folge nicht-negativer Zahlen, dann konvergiert* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *genau dann, wenn* $\underbrace{\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}}_{\substack{verdichtete \\ Summe}}$ *konvergiert.*

Beweis.

„$\Leftarrow$" Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$ konvergent. Da $a_n \geq 0$ verwende Satz 2.11:

$$\exists M \in \mathbb{R}: \quad \forall K \in \mathbb{N}: \quad \sum_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k} \leq M$$

Wähle K so groß, dass $2^K - 1 \geq N$

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{l=0}^{K-1} \sum_{n=2^l}^{2^{l+1}-1} a_n \leq \sum_{l=0}^{K-1} 2^l a_{2^l} \leq M$$

$$\text{Also gilt } \forall N \in \mathbb{N}: \quad \sum_{n=1}^{N} a_n \leq M \quad \overset{\text{Satz}}{\underset{2.11}{\Longrightarrow}} \quad \text{die Reihe konvergiert}$$

„$\Rightarrow$" Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent:

$$\exists M \in \mathbb{R}: \quad \forall N \in \mathbb{N}: \quad \sum_{n=1}^{N} a_n \leq M \text{ nach Satz 2.10}$$

$$\sum_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k} \leq a_1 + \sum_{l=0}^{K-1} \underbrace{\left(2 \sum_{n=2^l+1}^{2^{l+1}} a_n \right)}_{\geq 2^l a_{2^{l+1}}} = a_1 + 2 \cdot \sum_{n=2}^{2^k} a_n \leq a_n + 2 \cdot M$$

$$\forall K \in \mathbb{N}: \quad \sum_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k} \leq a_1 + 2 \cdot M \overset{\text{Satz}}{\underset{2.10}{\Longrightarrow}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konvergiert}$$

$\square$

Beispiel 27. ***Riemann-Zeta-Funktion***

$$s \in \mathbb{Q} \qquad s > 0$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Bemerkung $\left(\frac{1}{n^s}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *ist monoton fallend*
$\frac{1}{(n+1)^s} \leq \frac{1}{n^s} \implies (n+1)^s \geq n^s$ ✓

Verdichtungssatz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \textit{ konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{1-s}\right)^k$$

$$\textit{Wenn } 2^{1-s} < 1 \textit{ gilt, dann konvergiert die Reihe} \quad \Longleftrightarrow \quad s > 1$$

$$\textit{Wenn } s \leq 1, \textit{ dann gilt } 2^{1-s} \geq 1$$

$$\sum_{k=0}^{K} \left(2^{1-s}\right)^k \geq \sum_{k=0}^{K} 1 = K + 1$$

$$\textit{unbeschränkt} \implies \textit{divergente Reihe}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \textit{konvergiert} & \textit{für} \quad s > 1 \\ \textit{divergiert} & \textit{für} \quad s \leq 1 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

2.6 Alternierende Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}: \quad a_n \geq 0$$

Satz 2.13. *Leibniz-Kriterium*
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Nullfolge* $\left[\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=0\right]$, *dann konvergiert* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n$

Beweis. Bedingung: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$

gerade Partialsummenglieder:

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\cdot a_k = \overbrace{(\underbrace{a_1-a_2}_{\geq 0}) + (\underbrace{a_3-a_4}_{\geq 0}) + \ldots + (\underbrace{a_{2n-1}-a_{2n}}_{\geq 0})}^{s_{2n-1}=s_{2(n-1)}} \geq s_{2n-2}$$

$$\Rightarrow (s_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist daher monoton wachsend}$$

ungerade Partialsummenglieder:

$$s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}\cdot a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} =$$

$$= \underbrace{a_1 - (\underbrace{a_2-a_3}_{\geq 0}) - (\underbrace{a_4-a_5}_{\geq 0}) - \ldots}_{s_{2n-1}=s_{2(n-1)+1}} - (\underbrace{a_{2n}-a_{2n+1}}_{\geq 0}) \leq s_{2n-1}$$

$$\Rightarrow (s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist monoton fallend}$$

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geq 0$$

$$a_1 - a_2 = s_2 \leq s_4 \leq \ldots \leq s_{2n-2} \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq s_{2n-1} \leq \ldots \leq s_1 = a_1$$

$$\text{das heißt: } I_n = \left[s_{2n}, s_{2n+1}\right] \text{ bildet eine Intervallschachtelung}$$

$$I_n \subseteq I_{n+1}$$

$$|I_n| = a_{2n+1} \text{ mit } \lim_{n\to\infty}(a_{2n+1}) = 0$$

$$\Rightarrow \exists! s : \quad \forall n\in\mathbb{N} : \quad s \in I_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad s_{2n} \leq s \leq s_{2n+1} \Rightarrow 0 \leq s - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$$

$$\text{das heißt:} \left\{\begin{matrix} \lim\limits_{n\to\infty}\left(s-s_{2n}\right)=0 \\ s = \lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n}) \\ 0 \leq s_{2n+1} - s \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \\ \longrightarrow s = \lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n+1}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow s = \lim_{n\to\infty}(s_n)$$

□

Bemerkung 63.

$$\left.\begin{array}{lcl}\underbrace{s_{2n} \leq s \leq s_{2n+1}}_{\textit{Länge: } a_{n+1}} & \Rightarrow & s - s_{2n} \leq a_{2n+1} \\ \\ \underbrace{s_{2n+2} \leq s \leq s_{2n+1}}_{\textit{Länge: } a_{2n-2}} & \Rightarrow & s_{2n+1} - s \leq a_{2n+2}\end{array}\right\} |s_n - s| \leq a_{n+1}$$

Beispiel 28. ***Alternierende harmonische Reihe***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad \longrightarrow \quad \textit{konvergent?}$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}}_{s \in \mathbb{R}}$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ ist eine monoton fallende Nullfolge}$$

$$\Rightarrow \textit{ konvergent}$$

Bemerkung 64.

$$|s_{1000} - s| \leq a_{1001} = \frac{1}{1001}$$

2.7 Reihen mit beliebigen Gliedern

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N, \quad \forall m \in \mathbb{N}: \quad |s_{n+m} - s_n| < \varepsilon$$

$$s_{n+m} - s_n = \sum_{k=1}^{n+m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+m} a_k$$

Satz 2.14. ***Cauchy-Kriterium für Reihen***

$$\text{Eine Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} an \text{ konvergiert genau dann, wenn:}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N: \quad \forall m \in \mathbb{N}: \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| < \varepsilon$$

Beweis. Ist eine Übersetzung des Cauchy-Kriteriums für Folgen. □

Korollar 2.14.1. *Wenn die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert, dann gilt* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$

Beweis.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N: \quad \forall m \in \mathbb{N}: \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| < \varepsilon$$

$$m = 1: \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N: |a_{n+1}| < \varepsilon \quad \iff \quad \lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$$

□

Bemerkung 65. *die Umkehrung des Korollars ist falsch!*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{konvergiert nicht, bildet aber eine Nullfolge}$$

2.8 Absolute Konvergenz

Definition 2.12. Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Bemerkung 66. ***Schreibweise***

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \iff \text{die Reihe konvergiert (die Partialsumme bleit beschränkt).}$$

Satz 2.15. *Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Bemerkung 67. *Die Umkehrung ist falsch:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ konvergiert, aber } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| \text{ divergiert}$$

Beweis.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konvergiere}$$

$$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N : \quad \forall m \in \mathbb{N} : \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |a_k| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N : \quad \forall m \in \mathbb{N} : \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergiert}$$

□

Bemerkung 68. *Eine Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *heißt bedingt konvergent, wenn sie konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.*

Beispiel 29.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Satz 2.16. ***Majorantenkriterium***

$$\textit{Seien } \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \textit{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ Reihen und gelte } \forall n \in \mathbb{N} : \quad |a_n| \leq |b_n|$$

Dann gilt:

1. *Wenn* $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ *konvergiert, dann konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut.*
2. *Wenn* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergiert, dann divergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$

Bemerkung 69. *Das Majorantenkriterium ist nicht geeignet um bedingte Konvergenz von Reihen zu zeigen.*

Beweis.

1.

$$\exists M \in \mathbb{R}: \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad \sum_{k=1}^{n} |b_n| \leq M \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |a_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |b_n| < M$$

$$\text{das heißt die Partialsummen von } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ sind beschränkt}$$

$$\overset{\text{Satz}}{\underset{2.11}{\Longrightarrow}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ ist konvergent}$$

$$\overset{\text{Satz}}{\underset{2.14}{\Longrightarrow}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

2. Negation von 1.

□

Bemerkung 70. *1.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \textit{ heißt } \underline{\textit{Majorante}} \textit{ von } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ heißt } \underline{\textit{Minorante}} \textit{ von } \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

2. Es genügt die Relation $|a_n| \leq |b_n|$ in Satz 2.15 für $n \geq N$ zu haben für ein festes N.

Beispiel 30.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4n + 7}{n^4 + 5}$$

$$\frac{n^2 + 4n + 7}{n^4 + 5} \leq \frac{n^2 + 4n^2 + 7n^2}{n^4} = \frac{12n^2}{n^4} = \frac{12}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n^2} \quad \textit{konvergiert}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4n + 7}{n^4 + 5} \quad \textit{konvergiert}$$

Beispiel 31.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+6n+7}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+6n+7}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+6n^2+7n^2}} = \frac{1}{n\sqrt{14}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \quad \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\substack{\text{harmonische}\\ \text{Reihe}}} \quad \textit{divergiert}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+6n+7}} \quad \textit{divergiert}$$

Satz 2.17. ***Quotientenkriterium***
Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine Reihe:*

1. *Dann konvergiert diese, wenn* $\limsup\limits_{n\to\infty} \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) < 1$
2. *Dann divergiert diese, wenn* $\liminf\limits_{n\to\infty} \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) > 1$
3. *Wenn* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = q$ *existiert, dann konvergiert* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, wenn* $q < 1$ *und divergiert, wenn* $q > 1$ *ist. Bei* $q = 1$*: keine Aussage.*

Beweis.

1.

$$q = \limsup_{n\to\infty} \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) < 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N: \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{1+q}{2}$$

$$q < \frac{1+q}{2} < 1$$

$$n \geq N:$$

$$|a_{n+1}| \leq \frac{1+q}{2} \cdot |a_n| \leq \left(\frac{1+q}{2}\right)^2 \cdot |a_{n-1}| \leq \ldots \leq \left(\frac{1+q}{2}\right)^{n+1-N} \cdot |a_N|$$

$$|a_n| \leq \left(\frac{1+q}{2}\right)^n \cdot \underbrace{\frac{|a_N|}{\left(\frac{1+q}{2}\right)^N}}_{=:c}$$

$$\text{Die Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot \underbrace{\left(\frac{1+q}{2}\right)^n}_{<1} \text{ konvergiert}$$

$$\overset{\text{Satz}}{\underset{2.14}{\Longrightarrow}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konvergiert}$$

$$\overset{\text{Satz}}{\underset{2.18}{\Longrightarrow}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

2.

$$q = \liminf_{n\to\infty} \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) > 1$$

$$1 < \frac{1+q}{2} < q$$

$$\exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N: \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq \frac{1+q}{2} > 1$$

$$|a_{n+1}| \geq \frac{1+q}{2} \cdot |a_n| \geq \left(\frac{1+q}{2}\right)^2 \cdot |a_{n-1}| ... \leq \left(\frac{1+q}{2}\right)^{n+1-N} \cdot |a_N|$$

$$\Rightarrow |a_n| \geq \left(\frac{1+q}{2}\right) n - N |a_N| \geq |a_N| \geq 0$$

$$\text{das heißt: } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist keine Nullfolge } \overset{\substack{\text{Korollar}\\ \text{zu}}}{\underset{\substack{\text{Satz}\\ 2.13}}{\Longrightarrow}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

3.

$$\text{Wenn } \lim_{n\to\infty} \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) \text{ existiert, dann gilt:}$$

$$q = \liminf_{n\to\infty} \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) = \limsup_{n\to\infty} \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)$$

$\square$

Beispiel 32.

$$z \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{C}$$

$$B_z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{z}{n} x^n}_{a_n} \textit{ konvergiert ?}$$

$$\left| \frac{\frac{z\cdot(z-1)\cdot\ldots\cdot(z-n+1-1)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}}{\frac{z\cdot(z-1)\cdot\ldots\cdot(z-n+1)}{n!} \cdot x^n} \right| = \left| \frac{z-n}{n+1} \cdot x \right|$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) = |x|$$

$$\Rightarrow \quad B(x) \begin{cases} \textit{konvergiert absolut} & \textit{für} \quad |x| < 1 \\ \textit{divergiert} & \textit{für} \quad |x| > 1 \\ \textit{keine Aussage} & \textit{für} \quad |x| = 1 \end{cases}$$

$$B_{\frac{1}{2}}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n}$$

$$a_n = \binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} =$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(n - \frac{3}{2} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}{(n-1)! \cdot n} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \binom{n - \frac{1}{2}}{n-1}$$

$$\binom{n - \frac{3}{2}}{n-1} = \binom{n - 1 - \frac{1}{2}}{n-1} \leq \frac{1}{p\sqrt{n-1}}$$

$$\frac{1}{n} \binom{n - \frac{3}{2}}{n-1} \leq \frac{1}{p\sqrt{n-1} \cdot n} \leq \frac{2}{p \cdot n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\textit{Da } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \textit{ konvergiert, konvergiert auch } B_{\frac{1}{2}}(1)$$

Beispiel 33.

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \dots \quad n \text{ gerade} \\ 3^{-n} & \dots \quad n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} + \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-(2n+1)}}_{\text{konvergente geometrische Reihen}} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n}:$$

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{3^{-(2n+2)}}{2^{-2n}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} = \frac{2^{-(2n+2)}}{3^{-(2n+1)}} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \liminf\limits_{n\to\infty} \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) & = & 0 \\ \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) & = & \infty \end{array} \right\} \begin{array}{c} \textit{Quotientenkriterium liefert keine Aussage} \\ \textit{über die Konvergenz,} \\ \textit{obwohl diese Reihe offensichtlich konvergiert} \end{array}$$

Satz 2.18. ***Wurzelkriterium***
Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine Reihe:*

1. *Dann konvergiert diese, wenn* $q = \limsup\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right) < 1$
2. *Dann divergiert diese, wenn* $q > 1$

Beweis. 1.

$$q = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right) < 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N:$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1+q}{2} < 1$$

$$\text{das heißt für } n \geq N: \quad |a_n| \leq \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$$

Weil $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$ konvergiert, konvergiert nach Satz 2.16 auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

2.

$$q = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right) > 1$$

$$\Rightarrow \quad \text{es gibt } \infty - \text{viele } n: \quad \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine konvergente Nullfolge}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergent, nach dem Korollar zu Satz 2.14}$$

□

Beispiel 34.

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \ldots \quad n \text{ gerade} \\ 3^{-n} & \ldots \quad n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \ldots \quad n \text{ gerade} \\ \frac{1}{3} & \ldots \quad n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right) = \frac{1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \text{ konvergent}$$

Beispiel 35.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \right) =?$$

$$\overset{QK}{\Longrightarrow} \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1} \right| = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) = 0 < 1$$

$$\Rightarrow \quad \text{konvergent}$$

Bemerkung 71.

1. *Quotientenkriterium: Einfach, versagt gelegentlich*
2. *Wurzelkriterium: Schwierig*
3. *Majorantenkriterium/Minorantenkriterium: Braucht Erfahrung und Geschick*
4. *Leibnizkriterium: Nur bei alternierenden Reihen*
5. *Verdichtungssatz: Gelegentlich brauchbar*

Bemerkung 72.

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right) \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right) \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)$$

$$\text{Wenn } \lim_{n\to\infty} \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) \text{ existiert, dann eistiert } \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right)$$

2.9 Summierbare Familien

Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

Verwendet die Ordnung von $\mathbb{N}$ als Indexmenge

Möchten einen Konvergenzbregiff für Reihen,

der ohne Anordnung der Indexmenge auskommt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{i\in I} a_i$$

I ... (Unendliche) Indexmenge

Definition 2.13. Sei I eine Menge, dann heißt eine Abbildung $f : I \to \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ eine Familie reeller, oder komplexer Zahlen.
Schreibweise: $a_i := f(i)$, $(a_i)_{i\in I}$

Definition 2.14. Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ heißt summierbar zum Wert s, wenn:

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists J \subseteq I, \quad J \text{ endlich}: \quad \forall K \subseteq I, \quad K \text{ endlich}: \quad J \subseteq K: \quad \left|\sum_{i\in K} a_i - s\right| < \varepsilon$$

Es gibt eine endliche Menge $J \subseteq I$, sodass $\left|\sum_{i\in J} a_i - s\right| < \varepsilon$ und durch hinzunehmen weiterer Glieder der Familie die Summe nicht schlechter wird.

$$s = \sum_{i\in I} a_i \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \quad \exists J_\varepsilon \subseteq I, \quad J_\varepsilon \text{ endlich: } \forall J \subseteq I, J \text{ endlich, mit } J \supseteq J_\varepsilon : \left|\sum_{i\in J} a_i - s\right| < \varepsilon$$

Bemerkung 73. *Die Summe s einer summierbaren Familie ist ?*
Angenommen: es gibt s und s' mit der obigen Eigenschaft und $s \neq s'$

$$\varepsilon = \frac{|s-s'|}{3}$$

$$\exists J_\varepsilon \subseteq I \quad J_\varepsilon \textit{ endlich} \quad \forall J \supseteq J_\varepsilon \quad J \textit{ endlich}: \quad \left|\sum_{i\in J} a_i - s\right| \quad < \quad \varepsilon$$

$$\exists J'_\varepsilon \subseteq I \quad J'_\varepsilon \textit{ endlich} \quad \forall J' \supseteq J'_\varepsilon \quad J' \textit{ endlich} \quad \left|\sum_{i\in J'} a_i - s'\right| \quad < \quad \varepsilon$$

$$\textit{Wähle: } J = J' = \underbrace{J_\varepsilon \cup J'_\varepsilon}_{\textit{endlich}}$$

$$|s-s'|:$$

$$\left|\left(s-\sum_{i\in J}a_i\right)-\left(s'-\sum_{i\in J'}a_i\right)\right|\le\left|s-\sum_{i\in J}a_i\right|+\left|s'-\sum_{i\in J'}a_i\right|<2\varepsilon=\frac{2}{\varepsilon}|s-s'|<|s-s'|$$

Satz 2.19. ***Hauptkriterium für summierbare Familien***
Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ reeller oder komplexer Zahlen ist genau dann summierbar, wenn $\left\{\sum_{i\in J}|a_i|\;\middle|\;J\subseteq I,\ J\text{ endlich}\right\}$ beschränkt ist.
Das heißt: Wenn die Menge der Partialsummen der Familie $(|a_i|)_{i\in I}$ beschränkt ist.

Bemerkung 74. *Für Familien sind Summierbarkeit und absolute Konvergenz äquivalent.*

Bemerkung 75. *Das „unendlich Kommutativgesetz" gilt genau dann, wenn die Familie absolut summierbar ist.*

Beweis.

„⇒"

$$\mathcal{E}(I)=\left\{J\subseteq I\;\middle|\;J\text{ endlich}\right\}$$

Sei $(a_i)_{i\in I}$ summierbar und

$a_i\in\mathbb{R}$:

$$\exists s\in\mathbb{R}:\quad\forall\varepsilon>0,\quad\exists J_\varepsilon\in\mathcal{E}(I):\quad\left|s-\sum_{i\in J}a_i\right|<\varepsilon$$

das heißt: für $\varepsilon=1$:

$$\exists J_i\in\mathcal{E}(I):\quad\left|s-\sum_{i\in J_i}a_i\right|<1$$

$$\left|\sum_{i\in J}a_i\right|=\left|\sum_{i\in J}ai-s+s\right|\le\left|\sum_{i\in J}a_i-s\right|+|s|\le|s|+1\text{ für }J\supseteq J_i$$

$$\text{Sei } K \in \mathcal{E}(I):$$

$$\left|\sum_{i\in K} a_i\right| = \left|\sum_{i\in K\cup J} a_i - \sum_{i\in J\setminus K} a_i\right| \leq \underbrace{\left|\sum_{i\in K\cup J} a_i\right|}_{\leq |s|+1} + \left|\sum_{i\in \underbrace{J\setminus K}_{\subseteq J}} a_i\right| \leq \underbrace{|s|+1+\sum_{i\in J}|a_i|}_{=:A}$$

$$\forall K \in \mathcal{E}(I): \quad \left|\sum_{i\in K} a_i\right| = A$$

$$K: \quad K^+ = \left\{i \in K \;\middle|\; a_i \geq 0\right\} \text{ und } K^- = \left\{i \in K \;\middle|\; a_i < 0\right\}$$

$$K = K^+ \dot\cup K^- \quad ... \quad \text{disjunkte Vereinigung}$$

$$\sum_{i\in K}|a_i| = \underbrace{\sum_{i\in K^+} a_i}_{\leq A} + \underbrace{\sum_{i\in K^-}(-a_i)}_{\leq A} \leq 2\cdot A$$

$a_i \in \mathbb{C}$:

$$|a_i| \leq |\Re(a_i)| + |\Im(a_i)|$$

„$\Leftarrow$" Sei $\left\{\sum\limits_{i\in J}|a_i| \;\middle|\; J\in\varepsilon(I)\right\}$ beschränkt

Lemma 1. *Sei* $\left\{\sum\limits_{i\in J}|a_i| \;\middle|\; J\in\varepsilon(I)\right\}$ *beschränkt, dann gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists J_\varepsilon \in \mathcal{E}(I): \quad \forall K \in \mathcal{E}(I): \quad K \cap J_\varepsilon = \emptyset: \quad \sum_{i\in K}|a_i| < \varepsilon$$

Beweis.

$$S = \sup_{J\in\mathcal{E}(I)}\left(\sum_{i\in J}|a_i|\right)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists J_\varepsilon \in \mathcal{E}(I): \quad \sum_{i\in J_\varepsilon}|a_i| > S - \varepsilon$$

$$K \subseteq \mathcal{E}(I), \quad K \cap J_\varepsilon = \emptyset$$

$$\sum_{i\in K\cup J_\varepsilon}|a_i| = \underbrace{\sum_{i\in J}|a_i|}_{>s-\varepsilon} + \sum_{i\in K}|a_i| \leq S$$

$$\sum_{i\in K\cup J_\varepsilon}|a_i| = \sum_{i\in J_\varepsilon} + \sum_{i\in K}|a_i| \leq S$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i\in K}|a_i| \leq S - \sum_{i\in J}|a_i| < S - (S-\varepsilon) = \varepsilon$$

$\square$

$\underline{\varepsilon = 2^{-n}:}$ Dann gibt es $J_n \in \mathcal{E}(I): \quad \forall N \in \mathcal{E}(I): \quad K \cap J_n = \emptyset$

$$\sum_{i \in K} |a_i| < 2^{-n}$$

$$s_n = \sum_{i \in J_n} a_i$$

Zeige, dass $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Die J_n können wachsend gewählt werden:

$$J_0 \subseteq J_1 \subseteq J_2 \subseteq ...$$

$J_0', J_1', ...$ nach dem Lemma

$$J_0 = J_0', \quad J_1 = J_0' \cup J_1', \quad J_2 = J_0' \cup J_1' \cup J_2'$$

$\underline{m < n:}$ $\quad s_n - s_m = \sum_{i \in J_n} a_i - \sum_{i \in J_m} a_i = \sum_{i \in J_n \setminus J_m} a_i$

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{i \in J_n \setminus J_m} |a_i| < 2^{-m}$$

das heißt: $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n, m \geq N: \quad |s_n - s_m| < 2^{-m} < \varepsilon$

$(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist damit eine Cauchy-Folge, daher konvergent.

$$s = \lim_{n \to \infty} (s_n)$$

zu zeigen: $\quad s = \sum_{i \in I} a_i$

Sie $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein n sodass: $|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$

Wähle $\quad J_\varepsilon = J_n: \quad J \supseteq J_\varepsilon$

$$\left|\sum_{i \in J} s_i - s\right| = \left|\sum_{i \in J_\varepsilon} a_i - s + \sum_{i \in J \setminus J_\varepsilon} a_i\right| \leq \underbrace{\left|\underbrace{\sum_{i \in J_n} a_i}_{s_n} - s\right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \sum_{i \in J \setminus J_n} |a_i| < \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-n} = \varepsilon$$

$\square$

Bemerkung 76.

$$s = \sum_{i \in I} a_i \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \sum_{i \in I} |a_i| \;\middle|\; J \in \mathcal{E}(I) \right\} \text{ \textit{beschränkt}}$$

$$\sum_{i \in I} |a_i| = \sup_{J \in \mathcal{E}(I)} \left(\sum_{i \in J} |a_i| \right)$$

$$\left|\sum_{i \in J} a_i\right| \leq \sum_{i \in J} |a_i| \quad \Rightarrow \quad |s| \leq \sum_{i \in J} |a_i|$$

Bemerkung 77.

$$I_1, I_2 \textit{ mit } I_2 \cap I_1 = \emptyset$$

$$(a_i)_{i\in I} \textit{ summierbar}$$

$$I := I_1 \cup I_2$$

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i$$

$$s_1 = \sum_{i\in I_1} a_i \textit{ und } s_2 = \sum_{i\in I_2} a_i$$

$$\left\{ \sum_{i\in I} |a_i| \;\middle|\; J \subseteq I_1 \right\} = \sup \left\{ \sum_{i\in J} |a_i| \;\middle|\; J \in \mathcal{E}(I) \right\} < \infty$$

$$(a_i)_{i\in I_1} \textit{ und } (a_i)_{i\in I_2} \textit{ sind beide summierbar}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists J_{1,\varepsilon}, J_{2,\varepsilon} :$$

$$J_{1,\varepsilon} \subseteq \mathcal{E}(I_1) \textit{ und } J_{2,\varepsilon} \subseteq \mathcal{E}(I_2) :$$

$$\forall J_1 \in \mathcal{E}(I_1), \quad J_2 \in \mathcal{E}(I_2): \quad J_1 \supseteq J_{1,\varepsilon} \textit{ und } J_2 \supseteq J_{2,\varepsilon} :$$

$$\left| s_1 - \sum_{i\in J_1} a_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \textit{ und } \quad \left| s_1 - \sum_{i\in J_2} a_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\varepsilon > 0, \quad J_\varepsilon = \big(J_{1,\varepsilon} \cup J_{2,\varepsilon}\big) \in \mathcal{E}(I)$$

$$J \supseteq J_\varepsilon, \quad J \in \mathcal{E}(I)$$

$$\left| s_1 + s_2 - \sum_{i\in J} a_i \right| = \left| s_1 - \sum_{i\in J\cap J_1} a_i + s_2 - \sum_{i\in J\cap J_2} a_i \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left| s_1 - \underbrace{\sum_{i\in J\cap J_1} a_i}_{\in\mathcal{E}(I)\subseteq J_{1,\varepsilon}} \right|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left| s_2 - \underbrace{\sum_{i\in J\cap J_2} a_i}_{\in\mathcal{E}(I)\subseteq J_{2,\varepsilon}} \right|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\left| s_1 + s_2 - \sum_{i\in J} a_i \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad s_1 + s_2 = \sum_{i\in I} a_i$$

Bemerkung 78. $(a_i)_{i \in I}$ *summierbar*

$$\sum i \in I|a_i| = s$$
$$I_n = \left\{ i \in I \;\middle|\; |a_i| > \frac{1}{n} \right\}$$
$$\frac{1}{n} \cdot |I : n| \leq \sum_{i \in I_n} |a_i| \leq s$$
$$\Rightarrow \quad |I_n| \leq s \cdot n$$
$$I' = \left\{ i \in I \;\middle|\; a_i \neq 0 \right\}$$
$$I' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \text{ ist höchstens azählbar}$$

Beweis. Eine summierbare Familie kann höchstens abzählbar viele, von 0 verschiedene, Summanden haben □

Bemerkung 79.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} an \text{ existiert, wenn die Summe der Beträge endlich ist}$$
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty$$
$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent}$$

Die Familie ist genau dann summierbar, wenn die Reihe absolut konvergiert.

Beispiel 36.

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \textit{ konvergiert, aber konvergiert nicht absolut}$$

$$\frac{1}{2} < s < 1$$

$$\textit{versuche } \frac{3}{2} \textit{ als Grenzwert zu erhalten}$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{3}{2}$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + .. > \frac{3}{2}$$

$$\vdots$$

Summanden können derart umsortiert werden, dass man den Grenzwert $\frac{3}{2}$ *erhält, obwohl dieser zwischen* $\frac{1}{2}$ *und 1 liegt.*
$\Rightarrow$ *Reihen, die nicht absolut konvergieren, sind nicht als Familie summierbar.*

Satz 2.20. ***Großer Umordnungssatz***
Sei $(a_i)_{i\in I}$ *eine summierbare Familie reeller oder komplexer Zahlen. Sei* $(I_k)_{k\in K}$ *eine Familie von paarweise disjunkten Familien von* I*, also* $k_1, k_2 \in K,\ \ k_1 \neq k_2 \Rightarrow I_{k_1} \cap I_{k_2} = \emptyset$ *mit* $I = \bigcup\limits_{k\in K} I_k$.
Dann ist $s_k = \sum\limits_{i\in I_k} a_i$ *summierbar, weiters ist die Familie* $(s_k)_{k\in K}$ *summierbar und es gilt:*

$$\sum_{k\in K} s_k = \sum_{i\in I} a_i \textit{ beziehungsweise } \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} a_i\right) = \sum_{i\in I} a_i$$

$$\left[\textit{Unendliches Assoziativgesetz}\right]$$

Beweis. $(a_i)_{i\in I_k}$ ist summierbar als Teilfamilie von $(a_i)_{i\in I}$, also ist $s_k = \sum\limits_{i\in I_k} a_i$

definiert.

$$|s_k| \leq \sum_{i\in I_k} |a_k|$$

$$\sum_{k\in K} |s_k| \leq \sum_{k\in L}\sum_{i\in I_k} |a_i| = \sum_{i\in \bigcup\limits_{k\in L} I_k} |a_i| \leq \sum_{i\in I} |a_i| \leq \sum_{i\in I} |a_i| < \infty$$

$$\text{mit } L \in \mathcal{E}(K) \quad \Rightarrow \quad \sup\left\{\sum_{k\in L} |s_k| \;\middle|\; \in \mathcal{E}(K)\right\} < \infty \quad \overset{\text{Satz}}{\underset{2.19}{\Longrightarrow}} \quad (s_k)_{k\in K} \text{ ist summierbar}$$

$$\text{zu zeigen: } s_i = \sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K} s_k$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists L_\varepsilon \in \mathcal{E}(K): \quad \forall L \in \mathcal{E}(K): \quad L \supseteq L_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|s - \sum_{k\in L} s_k\right| < \varepsilon$$

$$\underline{\varepsilon > 0:} \quad \exists J_\varepsilon \in \mathcal{E}(I): \quad \forall J \in \mathcal{E}(I), \quad J \supseteq J_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|s \sum_{i\in J} a_i\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$L_\varepsilon := \left\{k \in K \;\middle|\; I_k \cap J_\varepsilon \neq \emptyset\right\}$$

J_ε ist endlich, schneidet daher nur endlich viele I_k. Diese k kommen in L_ε

$$\text{zu zeigen: } \forall M \in \mathcal{E}(K): \quad M \supseteq L_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|s - \sum_{k\in M} s_k\right| < \varepsilon$$

$$\text{Sei } M \supseteq L_\varepsilon, \qquad m = |M|$$

$$k \in M: \quad s_k = \sum_{k\in M} a_i$$

$$\text{das heißt: } \exists I_{k,\varepsilon} \in \mathcal{E}(I_k): \quad \left|s_k - \sum_{i\in I_{k,\varepsilon}} a_i\right| < \frac{\varepsilon}{2m}$$

$$\text{und } I_{k,\varepsilon} \supseteq J_\varepsilon \cap I_k$$

$$\left|s - \sum k \in M s_k\right| = \left|s - \sum_{k\in M}\sum_{i\in I_{k,\varepsilon}} a_i + \sum_{k\in M}\sum_{i\in I_{k,\varepsilon}} - \sum_{k\in M} s_k\right| \leq$$

$$\leq \left|s - \sum_{k\in M}\sum_{i\in I_{k,\varepsilon}} a_i\right| + \underbrace{\sum_{k\in M} \underbrace{\left|s_k - \sum_{i\in I_{k,\varepsilon}} a_i\right|}_{< \frac{\varepsilon}{2m}}}_{\frac{\varepsilon}{2}} < \left|s - \sum_{i\in \bigcup\limits_{k\in M} I_{k,\varepsilon}} a_i\right| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\bigcup_{k\in M} I_{k,\varepsilon} \supseteq \bigcup_{k\in M} I_k \cap J_\varepsilon = J_\varepsilon \cap \underbrace{\bigcup_{k\in M} I_k}_{\supseteq J\varepsilon} = J_\varepsilon$$

$$\text{das heißt: } s = \sum_{k\in K} s_k$$

□

Satz 2.21. *Doppelreihensatz*
Seien I und J nicht-leere Mengen und $(a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ eine summierbare Familie reeller oder komplexer Zahlen, dann gilt:

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ji}$$

$$\Big[\textit{Satz von Fubini}\Big]$$

Beweis.

$$J_i = \{i\}\times J = \Big\{(i,j) \;\Big|\; j\in J,\ i \text{ fest}\Big\}$$

$$I\times J = \dot{\bigcup_{i\in I}} J_i \quad \text{disjunkte Vereinigung}$$

Nach Satz 2.19 gilt: $$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{(k,j)\in J_i} a_{kj} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij}$$

analog für die zweite Gleichung:

$$I_j = I\times\{j\} = \Big\{(i,j) \;\Big|\; i\in I,\ j \text{ fest}\Big\}$$

□

Beispiel 37.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^s}$$

$$1 < s\in\mathbb{Q}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\big(\zeta(k)-1\big) = \sum_{k=2}\sum_{n=2}\frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}\underbrace{\sum_{k=2}\frac{1}{n^k}}_{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{k}} = \frac{1}{n(n-1)}} = \sum_{n=2}\frac{1}{n(n-1)} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{(n,k)\in M}\frac{1}{n^k} \le 1$$

$$M\in\mathcal{E}\big((\mathbb{N}\setminus\{1\})^2\big)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{n^k}\right)_{(n,k)\in(\mathbb{N}\setminus\{1\})^2} \quad \ldots \quad \textit{ist summierbar}$$

Bemerkung 80.

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{ und } \sum_{m=0}^{\infty} b_m \text{ absolut konvergente Reihen}$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right) \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit geeignetem } c_k$$
$$c_k := \sum_{m=0}^{k} a_{k-m} b_m$$

Satz 2.22. ***Cauchy-Produkt***
Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum\limits_{l=0}^{\infty} b_l$ *absolut konvergente Reihen und sei* $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$. *Dann konvergiert eine Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *absolut und es gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_k\right)$$

Beweis.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{l=0}^{\infty} b_l \text{ konvergieren absolut}$$
$$\text{das heißt: } (a_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \text{ und } (b_l)_{l \in \mathbb{N}_0} \text{ sind summierbar}$$
$$(a_k, b_l)_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2}, \quad J \in \mathcal{E}(\mathbb{N}_0^2), \quad \exists K, L \in \mathcal{E}(\mathbb{N}_0^2): \quad J \subseteq K \times L$$
$$\sum_{(k,l) \in J} |a_k b_l| \leq \sum_{(k,l) \in K \times L} |a_k b_l| = \sum_{k \in K} |a_k| \cdot \sum_{l \in L} |b_l| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \sum_{l=0}^{\infty} |b_l| < \infty$$
$$\overset{\text{Satz}}{\underset{2.19}{\Longrightarrow}} \quad (a_k, b_l)_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} \text{ ist summierbar:}$$
$$\sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2} a_k b_l = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(k,l) \in J_n} a_k b_l = \sum_{k=0}^{\infty} c_n$$
$$J_n = \left\{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2 \;\middle|\; k + l = n\right\}$$

□

Beispiel 38.

$$B_z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z}{n} x^n$$
$$z \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1$$
$$B_z(x) \cdot B_w(x) = ?$$
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{z}{k} x^k \cdot \binom{w}{n-k} x^{n-k} = x^n \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{z}{k} \cdot \binom{w}{n-k}}_{\binom{z+w}{n}}$$
$$\Rightarrow B_z(x) \cdot B_w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z+w}{n} x^n = B_{z+w}(x)$$

Bemerkung 81. $\left[p \in \mathbb{N}_0\right]$

$$B_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} x^n = (1+x)^p$$

Bemerkung 82. $\left[z \in \mathbb{Q}, \quad z = \frac{p}{q}\right]$

$$\underbrace{B_{\frac{p}{q}}(x) \cdot B_{\frac{p}{q}}(x) \cdot \ldots \cdot B_{\frac{p}{q}}(x)}_{q-mal} = B_{q \cdot \frac{p}{q}}(x) = B_p(x) = (1+x)^p$$
$$B_{\frac{p}{q}}(x) = (1+x)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(1+x)^p}$$
$$B_{q \cdot \frac{p}{q}}(x) \cdot B_{\frac{p}{q}}(x) = 1 = B_0(x)$$

$$B_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$$
$$\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right| \approx \frac{1}{2pn\sqrt{n}} \quad \Longrightarrow \quad \exists c > 0 : \quad \left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right| \leq \frac{c}{n\sqrt{n}}$$

$$B_{\frac{1}{2}}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n}$$
$$\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right| \leq \frac{c}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \textit{ konvergiert, daher konvergiert auch } \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \textit{ absolut}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n}\right)^2 = B_1(1) = 2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} = \sqrt{2}$$

$$B_{-m}(x) = (1+x)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} x^n$$

$$\binom{-m}{n} = \frac{(-m)\cdot(-m-1)\cdot\ldots\cdot(-m-n+1)}{n!} =$$

$$= (-1)^n \frac{(m+n-1)\cdot(m+n-2)\cdot\ldots\cdot m}{n!} = (-1)^n \binom{m+n-1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad B_{-m}(x) = (_1)^n \binom{m+n-1}{n}$$

$$(1-x)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} x^n$$

$$\underline{m=2:} \qquad (1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

Beispiel 39.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 =?$$

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}} = (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

Abschätzung:

$$k(n-k) \leq \frac{n^2}{4} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{n^2}{4} - kn + k^2 = \left(\frac{n}{2} - k\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geq (n-1) \cdot \frac{2}{n} \geq 1$$

$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist keine Nullfolge*

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \textit{ konvergiert nicht}$$

$\Rightarrow$ *Satz von Cauchy nur auf absolut konvergente Reihen anwenden.*

2.10 Potenzreihen

Definition 2.15. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen, dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potenzreihe mit Koeffizienten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

Bemerkung 83. *Für welche Werte von x konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?*

Lemma 2. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe und konvergiere diese Reihe für $x = z_0 \in \mathbb{C}$, dann konvergiert die Reihe absolut für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$.*

Beweis.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n z_0^n \text{ konvergiert } \Rightarrow (a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Nullfolge}$$

$$\Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad \left|a_n z_0^n\right| \leq C$$

$$\left[(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ ist beschränkt }\right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : \quad |a_n z^n| = \left|a_n z_0^n \cdot \left(\frac{z}{z_0}\right)^n\right| \leq C \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \text{ mit } \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$$

das heißt: die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} C \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ ist eine konvergente Majorante

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert}$$

□

Bemerkung 84. ***Geometrische Interpretation***
In der komplexen Ebene konvergiert jede Reihe mit z innerhalb des Abstandes $|z_0|$ vom Ursprung.

Definition 2.16.

$$R = \sup\left\{ \ |z| \ \middle| \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert } \right\} \in [0, \infty] \text{ heißt Konvergenzradius der Potenzreihe}$$

Bemerkung 85. $R = \infty \iff$ *Reihe konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.*

Satz 2.23. *Sei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R, dann konvergiert die Reihe absolut für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < R$ *und divergiert für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| > R$.

Beweis.

$$|z| < R$$

$$\text{zu zeigen:} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\text{Nach der Definition von } R \text{ gibt es ein } z_0 \in \mathcal{B} \text{ mit:}$$

$$|z| < |z_0| < R, \text{ sodass } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_o^n \text{ konvergiert}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert}$$

$$|z| > R:$$

$$\text{angenommen: } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert } \lightning \text{ zur Definition von } R$$

□

Bemerkung 86. *Kreis mit Radius R in komplexer Ebene:*

innerhalb der Kreislinie:	*Konvergenz*
auf der Kreislinie:	*keine Aussage*
außerhalb der Kreislinie:	*Divergenz*

Satz 2.24. *Sei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *eine Potenzreihe, dann gilt:*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right)}$$

$$\left[\textit{Cauchy-Hadamar} \right]$$

$$\textit{Wenn } \lim_{n\to\infty} \left(\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \right) \textit{ existiert, dann ist er gleich } R$$

Beweis.

1. Wende das Wurzelkriterium auf die Reihe an:

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \quad \begin{cases} > & 1 \quad \ldots \quad \text{divergiert} \\ < & 1 \quad \ldots \quad \text{konvergiert} \end{cases}$$

$$= |z| \cdot \limsup_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a_n})$$

$$|z| \underset{\text{divergiert}}{\overset{\text{konvergiert}}{\lessgtr}} \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)} = R$$

2. Wende das Quotientenkriterium auf die Reihe an:

$$\left|\frac{a_{n+1}\cdot z^{n+1}}{a_n \cdot z^n}\right| = |z| \cdot \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \text{ nach Voraussetzung existiert } \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$$

$$\frac{|z|}{\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)} \quad \begin{cases} < & 1 \quad \ldots \quad \text{konvergiert} \\ > & 1 \quad \ldots \quad \text{divergiert} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad R = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)$$

□

Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradius $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ und $R = \min(R_1, R_2)$, dann konvergieren beide Reihen absolut für $|z| < R$

$$\overset{\text{Satz}}{\underset{2.21}{\Longrightarrow}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_k z^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

$$c_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_n z^k \cdot b_{n-k} z^{n-k} \quad \text{mit} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

Bemerkung 87.

$$R = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{Die Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \textit{ konvergiert nirgends}$$

$$R = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{Die Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \textit{ konvergiert überall/beständig}$$

Beispiel 40.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = n+1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

$$\Rightarrow \quad \textit{beständig, konvergente Reihe, konvergiert für alle } z \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{z^n}{n!}\right) = 0$$

Lemma 3. ***Restabschätzung***
Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$. *Sei* $n = 0$, *dann gibt es für jedes* $r < R$ *ein* $c > 0$, *sodass:*

$$\forall z \in \mathbb{C}: \quad |z| \leq r \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k\right|}_{\textit{Reihenrest}} \leq c \cdot |z|^n$$

Beweis.

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k\right| 0 \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k r^k \cdot \left(\frac{z}{r}\right)^k\right| = |z^n| \cdot \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot r^k \cdot \frac{z^{k-n}}{r^k} \leq$$

$$\leq |z|^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left|a_k \cdot r^k\right| \cdot \frac{|z|\, k-n}{r^k}$$

$$\frac{|z|\, k-n}{r^k} \leq \frac{r^{k-n}}{r^k} = r^{-n}$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k\right| \leq |z|^n \cdot \underbrace{\frac{1}{r^n} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \cdot r^k}_{\text{konvergiert}} = c \cdot |z|^n$$

$\square$

Bemerkung 88. *Zur Untersuchung von* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *„nahe bei 0" betrachtet man oft nur einen Anfangsabschnitt. Die Approximationsgüte beurteilt man durch den Reihenrest.*

Achtung

$$\forall r < R, \quad \exists C \in \mathbb{R}: \quad \forall z \in \mathbb{C}: \quad |z| \leq r$$

$$\not\Uparrow \Downarrow$$

$$\exists C \in \mathbb{R}: \quad \forall z \in \mathbb{C}: \quad |z| < R$$

Satz 2.25. ***Identitätssatz für Potenzreihen***
Seien $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *und* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *zwei Potenzreihen mit dem Konvergenzradius* $R > 0$. *Sei* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine Folge komplexer Zahlen mit* $0 < |z_n| < R$ *und* $\lim_{n\to\infty}(z_n) = 0$. *Wenn* $\forall n \in \mathbb{N}_0 :$ $f(z_n) = g(z_n)$, *dann gilt* $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ a_n = b_n$.

„Die Potenzreihendarstellung einer Funktion um einen Entwicklungspunkt ist eindeutig bestimmt"

Beweis. Angenommen $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ f(z_n) = g(z_n)$ und $\exists n \in \mathbb{N}_0 : \ a_n \neq b_n$

$$n = \min\left\{ n \,\middle|\, a_n \neq b_n \right\}$$

$$f(z) - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) z^n = \sum_{n=N}^{\infty} \underbrace{(a_n - b_n)}_{c_n} z^n$$

$$[c_n \neq 0]$$

$$\frac{f(z) - g(z)}{z^N} = \sum_{n=N}^{\infty} c_n \cdot z^{n-N} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{N+m} z^m$$

$$\left| \frac{f(z) - g(z)}{z^N} - c_N \right| = \left| \sum_{m=1}^{\infty} c_{N+m} \cdot z^m \right| \overset{\text{Lemma}}{\leq} c \cdot |z|^1$$

$$\left| \frac{\overbrace{f(z_n) - g(z_n)}^{=0}}{\underbrace{z_n^N}_{\neq 0}} - c_N \right| = |0 - c_N| = |c_N| \leq c \cdot |z_n|$$

$$\xRightarrow{\lim_{n\to\infty}(z_n)=0} \quad |c_N| \leq c \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow C_n = 0 \qquad \lightning$$

□

Bemerkung 89.

$$f(x) = g(x) \quad \textit{für} \quad -R < x < R$$
$$\Rightarrow f(z) = g(z) \quad \textit{für} \quad |z| < R$$

Bemerkung 90. ***Cauchy-Produkt von Potenzreihen***
Konvergieren $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ *und* $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *im Punkt z absolut, so gilt:*

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} \right) z^n$$

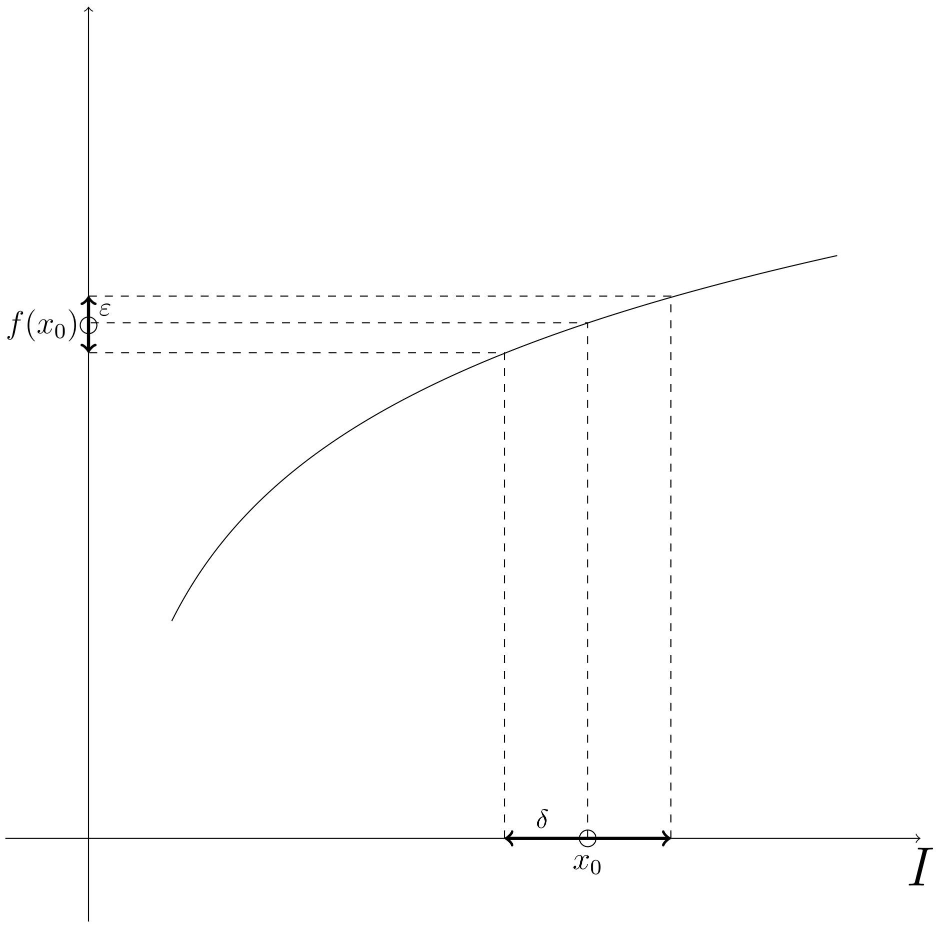
3 Stetige Funktionen

Definition Sei $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ eine Abbildung, dann heißt f stetig in x_o, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in I : \quad |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f heißt stetig auf I, wenn f in allen $x_0 \in I$ stetig ist:

$$\forall x_0 \in I : \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in I : \quad |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$



Beispiel 41.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases} \iff f(x) = x^2$$

$$x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\textit{Sei } \varepsilon > 0 : \quad \left|x^2 - x_0^2\right| = |x - x_0| \cdot |x + x_0|$$

$$\textit{Wähle } \delta < 1 : \quad |x - x_0| < 1$$

$$|x + x_0| = |x - x_0 + 2x_0| \leq |x - x_0| + 2\,|x_0| \leq 2\,|x_0| + 1$$

$$\Rightarrow \quad \left|x^2 - x_0^2\right| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leq \big(2\,|x_0| + 1\big) \cdot |x - x_0| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2\,|x_0| + 1}$$

$$\delta := \min\left(\frac{\varepsilon}{2\,|x_0| + 1}, 1\right)$$

Beispiel 42.

$$f(x) = \sqrt[k]{x}$$

$$k \in \mathbb{N}, \quad x \geq 0$$

$x_0 = 0$:

$$\left|\sqrt[k]{x} - 0\right| < \varepsilon \iff |x| < \varepsilon^k \iff |x - 0| < \underbrace{\varepsilon^k}_{\delta}$$

- $x_0 > 0$:

$$\left|\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0}\right| =$$

$$= \frac{\left|\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0}\right| \cdot \Big((\sqrt[k]{x})^{k-1} + (\sqrt[k]{x})^{k-2} \cdot \sqrt[k]{x_0} + ... + \sqrt[k]{x}\,\big(\sqrt[k]{x_0}\big)^{k-2} + \big(\sqrt[k]{x_0}\big)^{k-1}\Big)}{(\sqrt[k]{x})^{k-1} + (\sqrt[k]{x})^{k-2} \cdot \sqrt[k]{x_0} + ... + \sqrt[k]{x}\,\big(\sqrt[k]{x_0}\big)^{k-2} + \big(\sqrt[k]{x_0}\big)^{k-1}} =$$

$$= \frac{|x - x_0|}{(\sqrt[k]{x})^{k-1} + (\sqrt[k]{x})^{k-2} \cdot \sqrt[k]{x_0} + ... + \sqrt[k]{x}\,\big(\sqrt[k]{x_0}\big)^{k-2} + \big(\sqrt[k]{x_0}\big)^{k-1}} \leq \frac{|x - x_0|}{\big(\sqrt[k]{x_0}\big)^{k-1}} < \varepsilon$$

$$\iff |x - x_0| < \varepsilon \cdot (\sqrt[k]{x_0})^{k-1} = \underbrace{x_0^{\frac{k-1}{k}} \cdot \varepsilon}_{\delta}$$

Definition 3.1. $f : I \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt Lipschitz-stetig, wenn es ein $c > 0$ gibt, sodass:

$$\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$$

Bemerkung 91. *Aus Lipschitz-Stetigkeit folgt Stetigkeit auf I*

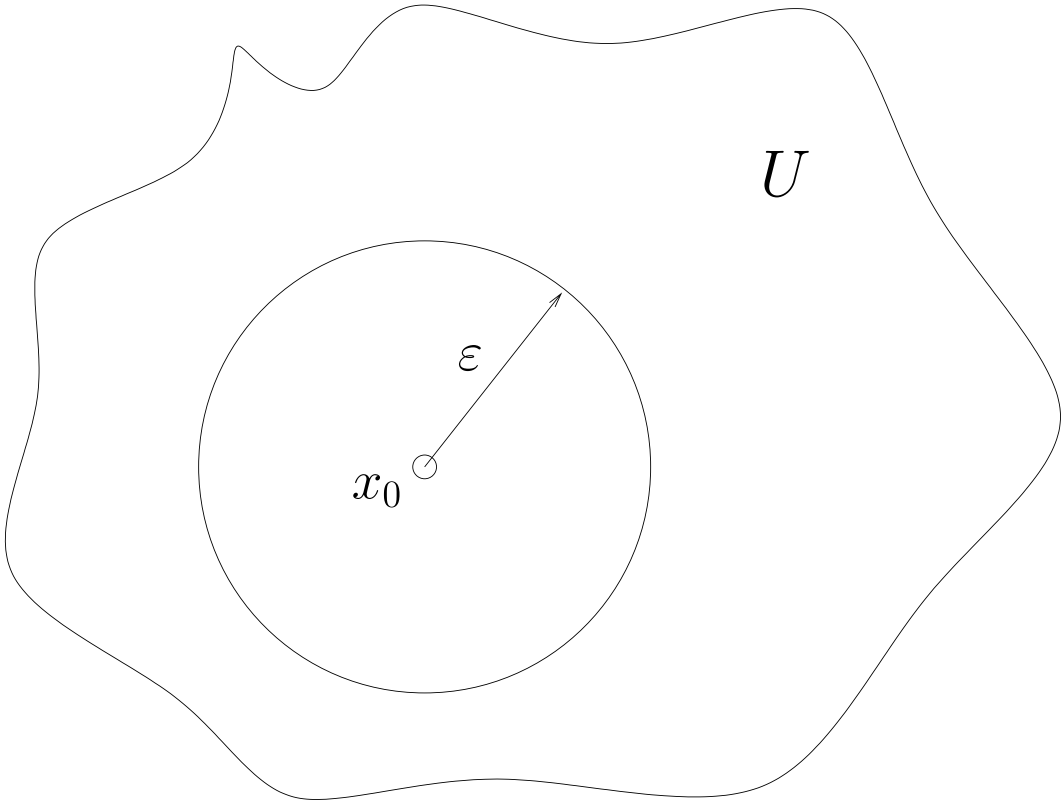
$$x_0 \in I: \quad |f(x) - f(x_0)| \leq c \cdot |x - x_0| < \varepsilon \quad \Longleftarrow \quad |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{c} := \delta$$

Definition 3.2. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$, dann heißt $U \subseteq \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ eine $\varepsilon-$Umgebung von x_0, wenn

$$\left\{ x \;\middle|\; |x - x_0| < \varepsilon \right\} \subseteq U$$

U heißt Umgebung von x_0, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass U eine $\varepsilon-$Umgebung von x_0 ist.

$$\exists \varepsilon > 0: \quad \left\{ x \;\middle|\; |x - x_0| < \varepsilon \right\} \subseteq U$$

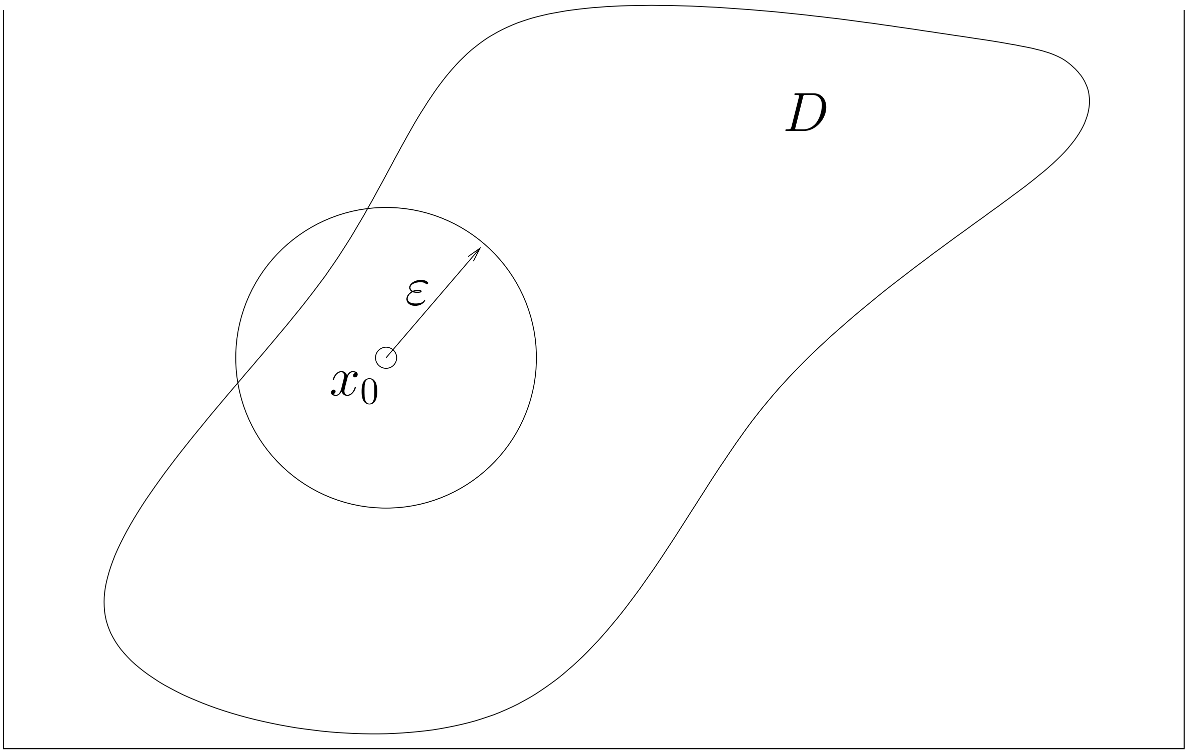


$U \subseteq D$ heißt $\varepsilon-$Umgebung von x_0 bezüglich D, wenn:

$$\left\{ x \;\middle|\; |x - x_0| < \varepsilon \right\} = \left\{ x \;\middle|\; |x - x_0| < \varepsilon \right\} \cap D \subseteq U$$

$U \subseteq D$ heißt Umgebung von x_0 bezüglich D, wenn:

$$\exists \varepsilon > 0: \quad \left\{ x \;\middle|\; |x - x_0| < \varepsilon \right\} \cap D \subseteq U$$



Bemerkung 92. *$f : D \to \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ ist stetig in$x_0 \in D$, wenn für alle Umgebungen V von $f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 bezüglich D existiert, sodass: $\forall x \in U : f(x) \in V$*

$$V = \left\{ \ y \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C} \ \middle| \ |y - f(x_0)| < \varepsilon \ \right\}$$

$$\exists U : \ \text{Umgebung bezüglich } D, \quad \exists \delta > 0 : \quad \underbrace{\left\{ \ x \in D \ \middle| \ |x - x_0| < \delta \ \right\}}_{U_0} \subseteq U$$

$$\underbrace{|x - x_0| < \delta}_{x \in U_0} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}_{f(x) \in V}$$

f ist stetig in x_0, wenn für jede Umgebung V von $f(x_0)$ gilt, dass $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x_0 bezüglich D ist.

Satz 3.1. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ eine Funktion, dann ist f stetig in $x_0 \in D$ genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten in D mit $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n)$, auch $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty}\big(f(x_n)\big)$ gilt.*

Beweis.

„$\Rightarrow$" Sei f stetig in $x_0 \in D$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in D: \quad |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$
$$\text{Sei } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ eine Folge mit } x_0 = \lim_{n\to\infty}(x_n)$$
$$\forall \delta > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N: \quad |x_0 - x_n| < \delta$$
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N: |f(x_0) - f(x_n)| < \varepsilon$$

Wegen $x_0 = \lim_{n\to\infty}(x_n)$ liegen fast alle x_n in der $\delta-$Umgebung von x_0.

„$\Leftarrow$" Indirekte Annahme: Sei f nicht stetig in x_0.

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0: \forall x \in D: \quad |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Wähle $\delta := \frac{1}{n}$, dann gibt es $x_n \in D$ mit $|x - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

Dann gilt $x_0 = \lim_{n\to\infty}(x_n)$, aber $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(x_0)$ $\lightning$

$\square$

Bemerkung 93. *Eine Funktion ist also genau dann stetig, wenn sie sich mit der Folgenkonvergenz verträgt.*

$$f\left(\lim_{n\to\infty}(x_n)\right) = \lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)\big)$$

Beispiel 43.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \dots \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \dots \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

- $x_0 \in \mathbb{Q}$:

$$x_n = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}$$
$$x_0 = \lim_{n\to\infty}(x_n)$$
$$f(x_n) = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)\big) = 0 \neq f(x_0)$$

- $x_0 \notin \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\lfloor n \cdot x_0 \rfloor}{n} \in \mathbb{Q} \\ n \cdot x_0 - 1 &< \lfloor n \cdot x_0 \rfloor < n \cdot x_0 \\ x_0 - \frac{1}{n} &< x_n < x_0 \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n) = x_0 \\ f(x_n) = 1 \text{ daher } &\lim_{n\to\infty} \big(f(x_n)\big) = 1 \neq f(x_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *f ist in keinem Punkt stetig.*

Lemma 4. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ stetig in $x_0 \in D$ und gelte $f(x_0) \neq 0$, dann gibt es eine Umgebung U von x_0 bezüglich D, sodass:*

$$\forall x \in U: \quad |f(x)| \geq \frac{|f(x_0)|}{2}$$

oder:

$$\text{Dann gibt es ein } \delta > 0: \quad \forall x \in D: \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \geq \frac{|f(x_0)|}{2}$$

Bemerkung 94. *Also gilt auch:* $\forall x \in U: \;\; f(x) \neq 0$

Beweis. f sei stetig in x_0:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in D: \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ \varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x_0)|}{2} \\ |f(x)| = |f(x_0) - f(x) - f(x_0)| \geq |f(x_0)| - |f(x) - f(x_0)| > \\ > |f(x_0)| - \frac{|f(x_0)|}{2} = \frac{|f(x_0)|}{2} \end{gathered}$$

$\square$

Definition 3.3. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ Funktionen.

$$f+g : \begin{cases} D & \to & \mathbb{R}\text{, oder } \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{cases}$$

$$f-g : \begin{cases} D & \to & \mathbb{R}\text{, oder } \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x)-g(x) \end{cases}$$

$$f \cdot g : \begin{cases} D & \to & \mathbb{R}\text{, oder } \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x)\cdot g(x) \end{cases}$$

$$\frac{f}{g} : \begin{cases} D & \to & \mathbb{R}\text{, oder } \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & \text{wenn} \quad g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{wenn} \quad g(x) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Satz 3.2. *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ stetig in $x_0 \in D$, dann sind $f+g$, $f-g$ und $f \cdot g$ stetig in x_0. Wenn $g(x_0) \neq 0$ gilt, dann ist auch $\frac{f}{g}$ in x_0 stetig.*

Beweis. Folgenkriterium: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $x_0 = \lim_{n\to\infty}(x_n)$

$$\lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)\big) = f(x_0) \text{ und } \lim_{n\to\infty}\big(g(x_n)\big) = g(x_0)$$

$$\overset{\text{Satz}}{\underset{2.1}{\Longrightarrow}} \lim_{n\to\infty}\Big(f(x_n) \,\dot{\pm}\, g(x_n)\Big) = f(x_0) \,\dot{\pm}\, g(x_0)$$

Für $\frac{f}{g}$ genügt es zu zeigen, dass $\frac{1}{g}$ in x_0 stetig ist.

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| = \frac{|g(x_0)-g(x)|}{|g(x)|\cdot|g(x_0)|} \leq 2 \cdot \frac{|g(x_0)-g(x)|}{|g(x_0)|^2} < \varepsilon$$

$$\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} \exists \delta_0 : \quad \forall x \in D : \quad |x - x_0| < \delta_0$$

$$\delta \leq \delta_0 : \quad |g(x) - g(x_0)| < \frac{|g(x_0)|^2}{2} \cdot \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta' > 0 : \quad \forall x \in D : \quad |x - x_0| < \delta' \quad \Longrightarrow \quad |g(x) - g(x_0)| < \frac{|g(x_0)|^2}{2} \cdot \varepsilon$$

□

Satz 3.3. *Seien $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to I$ Funktionen mit $I, J \subseteq \mathbb{R}$, sei g in $x_0 \in J$ und f in $y_0 = g(x_0)$ stetig, dann ist $f \circ g : J \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus f mit $x_0 = \lim_{n\to\infty}(x_n)$, dann konvergiert nach Satz 3.1 $(y_n)_{\in\mathbb{N}} = \big(g(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y_0. Wieder nach Satz 3.1 konvergiert dann $\big(f(y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(f\big(g(x_n)\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(y_0) = f\big(g(x_0)\big)$. □

Beispiel 44.

$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2} \quad \ldots \quad \textit{stetig, wenn } x^2+x+1>0$$

Satz 3.4. *Sei $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ injektiv und stetig auf $[a,b]$, dann ist $\underbrace{f^{(-1)}[a,b]}_{B}\to[a,b]$ stetig auf B.*

Beweis. Sei $\eta\in B$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus B mit $\eta=\lim\limits_{n\to\infty}(y_n)$.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine beschränkte Folge und hat daher nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ und $\xi=\lim\limits_{k\to\infty}\left(x_{n_k}\right)$

$$f\left(x_{n_k}\right)=f\Big(f^{(-1)}\left(y_{n_k}\right)\Big)=y_{n_k}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\Big(f\left(x_{n_k}\right)\Big)=\eta$$

$$\text{Nach Satz 3.1: } f(\xi)=\lim_{k\to\infty}\Big(f\left(x_{n_k}\right)\Big)=\eta$$

$$\text{Da } f \text{ injektiv ist, gilt: } \xi=f^{(-1)}(\eta)$$

$\Rightarrow$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann nur einen Häufungspunkt haben, nämlich: $\xi=f^{(-1)}(\eta)$

Daher konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ξ, das heißt: $\xi=f^{(-1)}(\eta)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(f^{(-1)}(y_n)\right)$.
Also ist $f^{(-1)}$ nach Satz 3.1 stetig in y. □

Lemma 5. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, die genau einen Häufungspunkt ξ hat, dann gilt:*

$$\xi=\lim_{n\to\infty}(x_n)$$

Beweis. Angenommen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere <u>nicht</u> gegen ξ.

$$\exists\varepsilon>0,\quad \forall N\in\mathbb{N}:\quad \exists n>N:\quad |x_n-\xi|\geq\varepsilon$$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge derjenigen Folgenglieder, für die $|x-\xi|\geq\varepsilon$ gilt.
$\Rightarrow$ Die Folge $\left(x_{n_k}\right)$ besitzt einen Häufungspunkt $\xi'\neq\xi$ ↯ □

3.1 Normale Konvergenz

Definition 3.4. Sei $f:D\to\mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ eine Funktion.

$$\|f\|_D := \sup\left\{|f(x)| \;\middle|\; x\in D\right\} \text{ heißt Norm von } f$$

Bemerkung 95. $\|\cdot\|$ *hat folgende Eigenschaften:*

N1: $\forall f:\ \|f\|_D\geq 0$ *und* $\|f\|_D=0\Leftrightarrow f\equiv 0$ *[Definitheit]*

N2: $\lambda\in\mathbb{R}$, *oder* $\mathbb{C}$: $\|\lambda\cdot f\|_D=|\lambda|\cdot\|f\|_D$ *[Absolute Homogenität]*

N3: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$, dann gilt: *[Dreiecksungleichung]*

$$\|f+g\|_D \leq \|f\|_D + \|g\|_D$$

Bemerkung 96. *$\equiv$: „ist identisch“* $\left[\forall x \in D : f(x) = 0\right]$

Beweis.

N1: Da $0 \leq |f(x)|$ für alle Funktionen f und alle $x \in D$, gilt auch $0 \leq \sup\left\{|f(x)| \;\middle|\; x \in D\right\}$ und somit $\|f\|_D \geq 0$.
Noch zu zeigen: $\|f\|_D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \equiv 0$

$$\begin{aligned} & \|f\|_D = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \sup\left\{|f(x)| \;\middle|\; x \in D\right\} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & |f(x)| = 0 \qquad \forall x \in D \\ \Leftrightarrow \quad & f \equiv 0 \end{aligned}$$

N2: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$:

$$\|\lambda \cdot f\|_D = \sup\left\{|\lambda \cdot f(x)| \;\middle|\; x \in D\right\} = |\lambda| \cdot \sup\left\{|f(x)| \;\middle|\; x \in D\right\} = |\lambda| \cdot \|f\|_D$$

N3: $\forall x \in D : \; |f(x)| \leq \|f\|_D$ und $|g(x)| \leq \|g\|_D$

$$\begin{aligned} \forall x \in D : \quad & |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_D + \|g\|_D \\ \Rightarrow \quad & \|f+g\|_D = \sup\left\{|f(x)+g(x)| \;\middle|\; x \in D\right\} \leq \|f\|_D + \|g\|_D \end{aligned}$$

□

Definition 3.5. Seien $f_n : D \to \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ Funktionen, dann heißt die Reihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ normal konvergent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_D$ konvergiert ($< \infty$).

Bemerkung 97. *Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert für jedes $x \in D$ absolut, denn $\sum_{n=0}^{\infty} \|f\|_D$ ist eine konvergente Majorante: $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_D$.*

Satz 3.5. *Sei $f_n : D \to \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ normal konvergent und seien f_n stetig in $x_0 \in D$, dann ist auch $f(x)$ stetig in x_0.*

Beweis. Zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D : \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\text{Da } \sum_{n=0}^{\infty} \|f\|_D \text{ konvergiert, gibt es ein } N \in \mathbb{N}, \text{ sodass: } \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f\|_D < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{Dann ist die Funktion } g_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \text{ stetig in } x_0$$

$$\exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D : \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g_N(x) - g_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{Sei } |x - x_0| < \delta :$$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| g_N(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) - g_N(x_0) - \sum_{n=N*1}^{\infty} f_n(x_0) \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{|g_N(x) - g_N(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)|}_{\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_D} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x_0)|}_{\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_D}}_{<2\cdot\frac{\varepsilon}{3}} < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

Beispiel 45.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \ldots \quad \textit{Potenzreihe}$$

<u>*Wurzelkriterium:*</u>

$$a_N = \frac{1}{n}: \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) = 1 \Rightarrow \textit{ Konvergenzradius } R = 1$$

$$\textit{Sei } r < 1, \quad D_r = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| \leq r\right\}$$

$$f_n(z) = \frac{z^n}{n}$$

$$\Rightarrow \|f_n\|_D = \frac{r^n}{n}$$

$$\textit{Da } \frac{|z|^n}{n} \leq \frac{r^n}{n}$$

Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}$ *konvergiert, daher konvergiert die Reihe* $f(z)$ *normal auf* D_r

und ist dort eine stetige Funktion.

$$\Rightarrow f(z) \textit{ ist stetig auf } \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < 1\right\} = \bigcup_{r<1} D_r$$

Satz 3.6. *Sei* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$*, dann ist* f *eine af* $D = \left\{x \in \mathbb{C} \;\middle|\; |x| < R\right\}$ *stetige Funktion.*

Beweis. Sei $r < R$, dann gilt mit $f_n(x) = a_n \cdot x^n$ und $D_r = \left\{x \in \mathbb{C} \;\middle|\; |x| \leq r\right\}$:

$$\|f\|_{D_r} = |a_n| \cdot r^n$$

Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{D_r} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n$ konvergiert nach Definition von R.

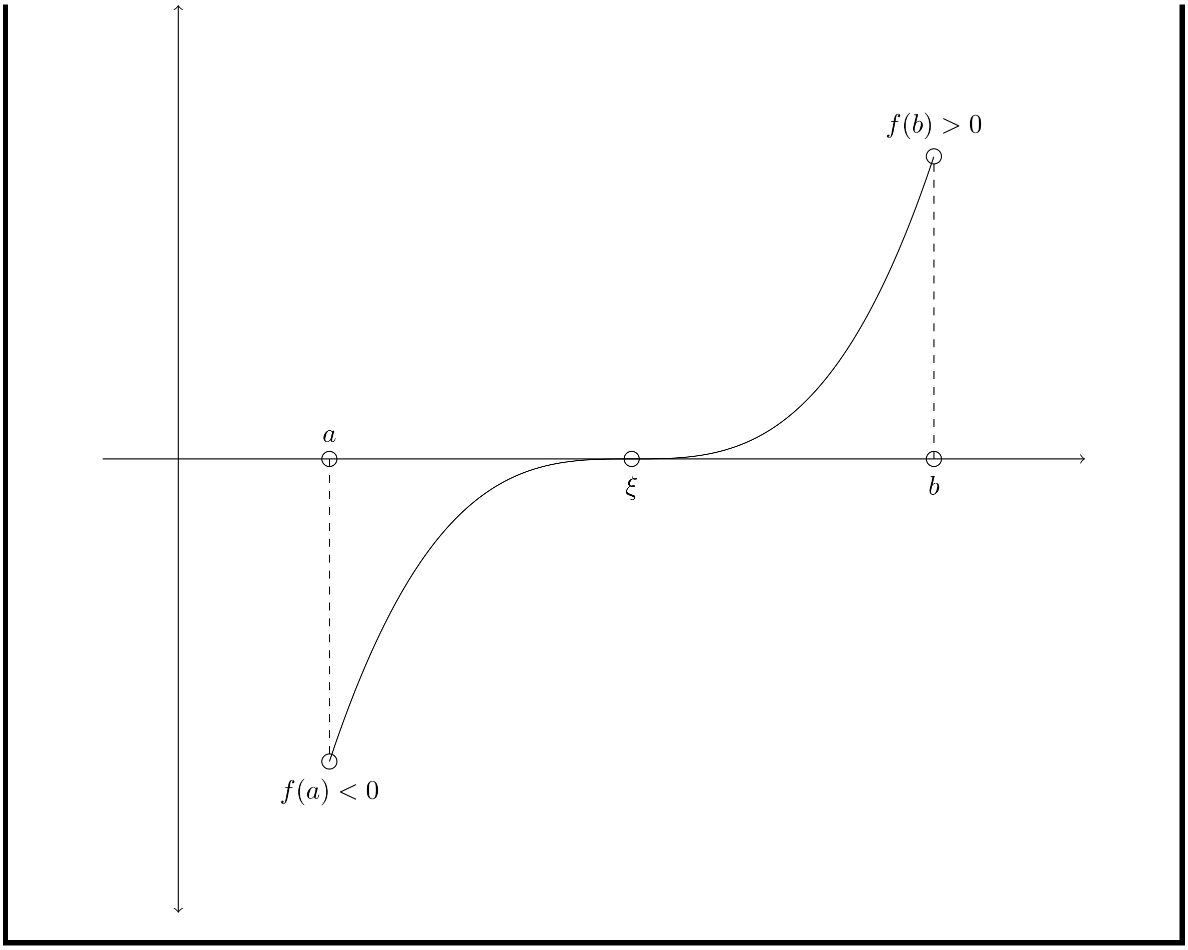
Daher konvergiert $f(x)$ normal auf D_r und stellt dort eine stetige Funktion dar.

Dann ist f eine stetige Funktion auf $\displaystyle\bigcup_{r<R} D_r = \left\{x \in \mathbb{C} \;\middle|\; |x| < R\right\}$

□

3.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 3.7. ***Nullstellensatz***
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a, b]$ *und gelte* $f(a) \cdot f(b) < 0$*, dann gibt es (mindestens) ein* $\xi \in (a, b)$ *mit* $f(\xi) = 0$*.*


$f(b) > 0$
a
ξ
b
$f(a) < 0$

Beweis. o.B.d.A.: $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$

$$a_0 = a, \quad b_0 = b \quad \rightarrow \quad I_0 = [a_0, b_0]$$

$$m_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} \begin{array}{l} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{llll} f(m_1) = 0 & \rightarrow & m_1 = \xi & \\ f(m_1) < 0 & \rightarrow & a_1 = m & b_1 = b_0 \\ f(m_1) > 0 & \rightarrow & a_1 = a_0 & b_1 = m_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow I_1 = [a_1, b_1] \subseteq I_0$$

$$\vdots$$

$$I_n = [a_n, b_n]$$

$$m_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \begin{array}{l} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{llll} f(m_{n+1}) = 0 & \rightarrow & m_{n+1} = \xi & \\ f(m_{n+1}) < 0 & \rightarrow & a_{n+1} = m_{n+1} & b_{n+1} = b_n \\ f(m_{n+1}) > 0 & \rightarrow & a_{n+1} = a_n & b_{n+1} = m_{n+1} \end{array}$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq I_n$$

$$(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Intervallschachtelung: } \exists \xi \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad \xi \in I_n$$

<u>Behauptung:</u> $f(\xi) = 0$

Angenommen: $f(\xi) \neq 0$

1. $f(\xi) > 0$

$$\exists \delta > 0 : \quad \forall x \in [a, b] : \quad |x - \xi| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) > \frac{f(\xi)}{2} > 0$$

$$\text{Wähle } n \text{ so groß, dass } \underbrace{\frac{1}{2^n} \cdot (b - a)}_{|I_n|} < \frac{\delta}{2}$$

$$I_n \subseteq \big(\xi - \delta, \xi + \delta\big)$$

f nimmt auf $\big(\xi - \delta, \xi + \delta\big)$ nur positive Werte an, daher auch auf I_n

$$a_n \in \big(\xi - \delta, \xi + \delta\big) \text{ und } f(a_n) < 0 \quad ↯$$

2. $f(\xi) < 0$

$$\exists \delta > 0 : \quad \forall x \in [a, b] : \quad |x - \xi| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) < \frac{f(\xi)}{2} < 0$$

$$\text{Wähle } n \text{ so groß, dass } \underbrace{\frac{1}{2^n} \cdot (b - a)}_{|I_n|} < \frac{\delta}{2}$$

$$I_n \subseteq \big(\xi - \delta, \xi + \delta\big)$$

f nimmt auf $\big(\xi - \delta, \xi + \delta\big)$ nur negative Werte an, daher auch auf I_n

$$b_n \in \big(\xi - \delta, \xi + \delta\big) \text{ und } f(b_n) > 0 \quad ↯$$

$\Rightarrow \quad f(\xi) = 0$ $\square$

Satz 3.8. ***Zwischenwertsatz***
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig.*
Sei $\gamma \in \Big(\min\big(f(a), f(b)\big), \max\big(f(a), f(b)\big)\Big)$*, dann gibt es ein* $\xi \in [a, b]$ *mit* $f(\xi) = \gamma$.

Beweis. $h(x) = f(x) - \gamma$, dann haben $\underbrace{f(a) - \gamma}_{h(a)}$ und $\underbrace{f(b) - \gamma}_{h(b)}$ unterschiedliche Vorzeichen $\overset{\text{Satz}}{\underset{3.7}{\Longrightarrow}}$ $\exists \xi : \; h(\xi) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(\xi) = \gamma$. □

Satz 3.9. ***Fixpunktsatz***
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig mit*
$\Big(\min\big(f(a), f(b)\big), \max\big(f(a), f(b)\big)\Big) \subseteq [a, b]$*, dann gibt es ein* $\xi \in [a, b]$:
$f(\xi) = \xi$ *ein Fixpunkt.*

Beweis. o.B.d.A.: $f(a) \geq a$ und $f(b) \leq b$

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - a \geq 0 \\ h(b) &= f(b) - b \leq 0 \\ h(x) &= f(x) - x \\ \text{Satz 3.7}: \quad \exists \xi \in (a, b) &: h(\xi) = 0 \quad \Longleftrightarrow f(\xi) = \xi \end{aligned}$$

□

Bemerkung 98. *Ein reelles Intervall auf sich selbst abgebildet hat einen Fixpunkt. Eine komplexe Kreislinie hat nicht notwendigerweise einen Fixpunkt, da das Bild der gedrehte Definitionsbereich ist.*

3.3 Kompaktheit

Definition 3.6. Folgen-Definition der Abgeschlossenheit
Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, wenn jede konvergente Folge von Punkten aus A auch ihren Grenzwert in A hat.

Beispiel 46.

$$\begin{gathered} A = [a, b] \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \textit{ konvergiert} \\ a \leq x_n \leq b \\ \Rightarrow a \leq \underbrace{\lim_{n \to \infty} (x_n)}_{\in A} \leq b \end{gathered}$$

Beispiel 47.

$$\mathcal{O} = (a,b)$$
$$x_n = a + \frac{1}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = a \notin \mathcal{O}$$
$$\Rightarrow \textit{ nicht abgeschlossen}$$

Bemerkung 99. *Seien $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossene Mengen. Damit ist $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ abgeschlossen. Wenn I endlich ist, dann ist auch $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ abgeschlossen.*

Beweis.

$$A = \bigcap_{i\in I} A_i$$
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergente Folge aus } A$$
$$\forall i \in I: \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergente Folge von Punkten aus } A_i$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(x_n) \in A_i$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(x_n) \in \bigcap_{i\in I} A_i = A$$
$$B = \bigcup_{i\in I} A_i$$
$$\text{Sei } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ eine konvergente Folge von Punkten aus } B$$
$$\text{das heißt: für jedes } n \text{ gilt: } x_n \in A_1, \text{ oder } x_n \in A_2, \text{ oder } \ldots, \text{ oder } x_n \in A_n$$
$$\Rightarrow \quad \exists i_0 \in \{1,2,...,m\}: \quad x_n \in A_{i_0} \text{ für unendlich viele } n$$
$$\left(x_{n_k}\right) \text{ mit } x_{n_k} \in A_{i_0}$$
$$\left(x_{n_k}\right) \text{ Teilfolge einer konvergenten Folge, daher konvergeiert: } x = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(x_{n_k}\right)}_{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)} \in A_{i_0}$$
$$x \in B$$

□

Bemerkung 100.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n}, 3-\frac{1}{n}\right] = (1,3)$$

$\Rightarrow$ *Diese abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ergibt eine nicht abgeschlossene Menge.*

Definition 3.7. Eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ heißt <u>beschränkt</u>, wenn es ein $M > 0$ gibt, sodass $B \subseteq [-M, M]$

Definition 3.8. Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ heißt <u>kompakt</u>, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Satz 3.10. ***Bolzano-Weierstraß-Charakterisierung der Kompaktheit***
Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge von Punkten aus K eine in K kompakte Teilfolge besitzt. ($\Leftrightarrow$ einen Häufungspunkt in K besitzt).

Beweis.

„$\Rightarrow$" Sei K kompakt und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus K

$$\xRightarrow[K \text{ beschränkt}]{\substack{\text{Satz von}\\ \text{Bolzano-}\\ \text{Weierstraß}}} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ besitzt eine konvergente Teilfolge } \left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

$$\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist eine konvergente Folge von Punkten aus } K$$

$$\xRightarrow[\substack{\text{abge-}\\ \text{schlossen}}]{\text{K}} \lim_{k\to\infty} \left((x_k)_{n_k}\right) \in K$$

„$\Leftarrow$" Habe K die Eigenschaft, dass jede Folge aus K einen Häufungspunkt in K besitzt [Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft]
Zu zeigen: K ist beschränkt und abgeschlossen:

beschränkt: Angenommen K wäre nicht beschränkt:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \exists x_n \in K: \quad |x_n| \geq n$$

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ besitzt keine konvergente Teilfolge } ↯$$

abgeschlossen ei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von Punkten aus K. Nach der Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft von K besitzt $x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt in K. Dieser Häufungspunkt ist $x = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n)$
$\Rightarrow\ x \in K$
$\Rightarrow\ K$ ist abgeschlossen.

$\square$

Beispiel 48. ***Das Cantorsche Diskontinuum***

$$A_0 = [0,1]$$

$$A_1 = \underbrace{\left[0, \frac{1}{3}\right]}_{\varepsilon_1=0} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{3}, 1\right]}_{\varepsilon_1=2}$$

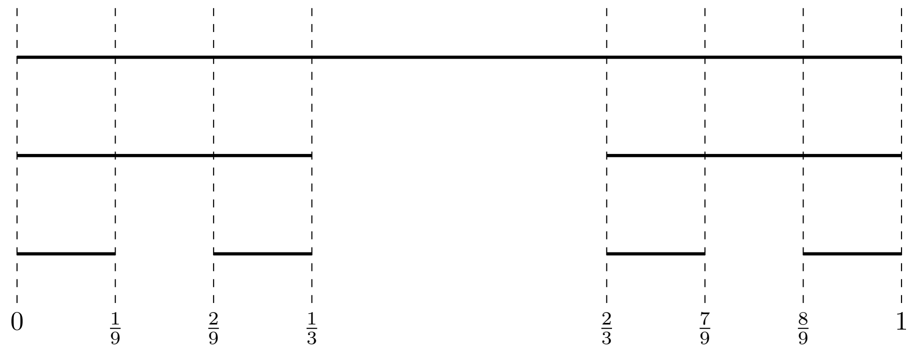
$$A_2 = \underbrace{\left[0, \frac{1}{9}\right]}_{\varepsilon_2=0} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]}_{\varepsilon_2=2} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]}_{\varepsilon_2=0} \cup \underbrace{\left[\frac{8}{9}, 1\right]}_{\varepsilon_2=2}$$

$$\vdots$$

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k \neq 0$$

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_j}{3^j} \ \mathit{mit}\ \varepsilon_j \in \{0,2\}$$

C ist kompakt und überabzählbar



Satz 3.11. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $f(K)$ kompakt.*

Bemerkung 101. *Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt.*

Beweis. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus $f(K)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad x_n \in K: \quad f(x_n) = y_n$$

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Folge von Punkten aus } K$$

$$\underset{\text{kompakt}}{\overset{K}{\Longrightarrow}} \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ besitzt eine konvergente Teifolge } \left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

$$x = \lim_{k\to\infty} \left(x_{n_k}\right) \in K$$

$$y_{n_k} = f\left(x_{n_k}\right) \quad \underset{\substack{\text{von } f \\ \text{in } x}}{\overset{\substack{\text{Stetig-} \\ \text{keit}}}{\Longrightarrow}} \quad f(x) = \lim_{k\to\infty} \left(x_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} \left(y_{n_k}\right)$$

das heißt: (y_n) hat eine konvergente Teilfolge mit Granzwert $f(x) \in f(K)$

□

Satz 3.12. ***Satz von Minimum und Maximum***
Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $x_{\min}$ und $x_{\max} \in K$:

$$\forall x \in K: \quad f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$$

Beweis. Nach Satz 3.11 ist $f(K)$ kompakt, also beschränkt.

$$\exists M \in \mathbb{R}: \quad \forall x \in K: \quad |f(x)| \leq M \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s &= \inf\left\{f(x) \;\middle|\; x \in K\right\} \\ S &= \sup\left\{f(x) \;\middle|\; x \in K\right\} \end{cases}$$

- $$S = \sup\left\{f(x) \;\middle|\; x \in K\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad \exists x_n \in K: \quad f(x_n) > S - \frac{1}{n}$$

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ besitzt eine in } K \text{ konvergente Teilfolge } \left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

$$x = \lim_{k\to\infty} \left(x_{n_k}\right) \overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} f(x) = \lim_{k\to\infty} \left(f\left(x_{n_k}\right)\right) = S$$

$$S - \frac{1}{n} \leq f\left(x_{n_k}\right) \leq S + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad x_{\max} := x$$

- $$s = \inf\left\{f(x) \;\middle|\; x \in K\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad \exists x'_n \in K: \quad f(x'_n) < s + \frac{1}{n}$$

$$(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ besitzt eine in } K \text{ konvergente Teilfolge } \left(x'_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

$$x' = \lim_{k\to\infty} \left(x'_{n_k}\right) \overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \lim_{k\to\infty} \left(f\left(x'_{n_k}\right)\right) = s$$

$$s + \frac{1}{n} \geq f\left(x'_{n_k}\right) \geq s - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad x_{\min} := x'$$

□

Bemerkung 102.

$$f : \begin{cases} (0,1) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{cases}$$

besitzt weder Maximum, noch Minimum; ist somit unbeschränkt.

Definition 3.9. $f : D \to \mathbb{R}$ heißt <u>gleichmäßig stetig</u> auf D, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x, x_0 \in D : \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Bemerkung 103. *Hier hängt δ nicht mehr von x_0 ab.*

Satz 3.13. *Sei K kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$, dann ist f gleichmäßig stetig auf K.*

Beweis. Angenommen $f : K \to \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

$$\Rightarrow \quad \exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0 : \quad \exists x, x_0 \in K : \quad |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

$$\delta = \frac{1}{n} : \quad \exists x_n, y_n \in K : \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ und } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

Weil K kompakt ist, besitzen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $\left(y_{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ in K konvergente Teilfolgen

$$\left(x_{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ und } \left(y_{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$$

$$x = \lim_{k \to \infty} \left(x_{n_k}\right) \in K$$

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \quad \Rightarrow \quad x = \lim_{k \to \infty} \left(y_{n_k}\right)$$

$$f \text{ stetig auf } K : \quad f(x) = \lim_{k \to \infty} \left(f\left(x_{n_k}\right)\right) = \lim_{k \to \infty} \left(f\left(y_{n_k}\right)\right) =$$

$$= f\left(\lim_{k \to \infty} \left(x_{n_k}\right)\right) = f\left(\lim_{k \to \infty} \left(y_{n_k}\right)\right)$$

$$\left|f\left(x_{n_k}\right) - f\left(y_{n_k}\right)\right| \geq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 0 = |f(x) - f(x)| \geq \varepsilon \quad ↯$$

□

Satz 3.14. *Fundamentalsatz der Algebra*
Sei $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ ein Polynom mit $n \geq 1$ und komplexen Koeffizienten $a_0, ..., a_{n-1}$, dann gibt es ein $\alpha \in \mathbb{C}$, sodass: $p(\alpha) = 0$.

Beweis. Plan:

- Zeige, dass $|p(z)|$ ein Minimum hat
- Wenn $|p(z_0)|$ ein Minimum hat, dann gilt $|p(z_0)| = 0$.

1. Sei $A = |a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}|$

$$|p(z)| = |z|^n \cdot \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n}\right| \geq |z^n| \left(1 - \frac{A}{|z|}\right)$$

$$\text{Da} \quad \left|\frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n}\right| \geq |z^n| \leq \frac{|a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}|}{|z|} = \frac{A}{|z|}$$

Für $|z| \geq \max\big(1, 2A\big)$ gilt dann: $|p(z)| \geq |z|^n \cdot \frac{1}{2} = \underbrace{|z|^{n-1}}_{\geq 1} \cdot \underbrace{\frac{|z|}{2}}_{\geq \frac{1}{2} \cdot 2A} \geq A \geq |a_0| = |p(0)|$

das heißt: $|p(z)|$ nimmt in $\Big\{z \in \mathbb{C} \;\Big|\; |z| \leq \max\big(1, 2A\big)\Big\}$ ein Minimum an

$$\Rightarrow \text{ kompakt}$$

2. Sei $|p(z_0)|$ ein Minimum von $|p(z)|$ und gelte $|p(z_0)| > 0$

$$\left|\frac{p(z)}{p(z_0)}\right| = \left|1 + b \cdot w^d + ... + \frac{1}{p(z_0)} w^n\right|$$

d ist die erste Potenz von w, die vorkommt mit $d \geq 1$ und $b \neq 0$

Verwende, dass jede komplexe Zahl eine $d-$te Wurzel besitzt

$$\beta^d = -\frac{1}{b} \text{ mit } \beta \in \mathbb{C}$$

Setze $w = \beta \cdot t$ mit $t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad z = z_0 + \beta \cdot t$$

$$\left|\frac{p(z)}{p(z_0)}\right| = \left|1 - t^d \cdot \big(1 + \underbrace{q(t)}_{q(0)=0}\big)\right|$$

Wähle $\delta > 0$ so, dass für $|t| < \delta$: $\quad |q(t)| \leq \frac{1}{4}$

$$1 - t^d\big(1 + q(t)\big) = 1 - t^d \left| \underbrace{\Big(1 + \underbrace{\Re\big(q(t)\big)}_{\leq \frac{1}{4}}\Big)}_{\geq \frac{3}{4}} + i \cdot \underbrace{\Im\big(q(t)\big)}_{\leq \frac{1}{4}} \right| \leq 1 - \frac{3}{4} \cdot t^d + \frac{1}{4} \cdot t^d = 1 - \frac{1}{2} \cdot t^d$$

$$1 - \frac{1}{2} \cdot t^d < 1 \text{ für } 0 < t < \delta \qquad ⚡$$

$\square$

3.4 Grenzwerte von Funktionen und stetige Fortsetzung

$$f : D \to \mathbb{R}$$

$$x_0 \in D$$

Wollen $f(x_0)$ konsistent erklären, das heißt:

$$\hat{f} : \begin{cases} D \cup \{x_0\} & \to \quad \mathbb{R} \\ \quad x & \mapsto \quad \begin{cases} f(x) & \dots \quad x \in D \\ A & \dots \quad x = x_0 \end{cases} \end{cases}$$

Definition 3.10. Sei D eine nichtleere Menge, dann heißt x_0 ein Häufungspunkt von D, wenn in jeder Umgebung von x_0 unendlich viele Punkte von D liegen.

Bemerkung 104. *x_0 ist Häufungspunkt von D* $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists x \in D :$
$0 < |x - x_0| < \varepsilon$

Definition 3.11. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann heißt

$$F : \begin{cases} D \cup \{x_0\} & \to \quad \mathbb{R} \\ \quad x & \mapsto \quad \begin{cases} f(x) & \dots \quad x \in D \\ A & \dots \quad x = x_0 \end{cases} \end{cases}$$

stetige Fortsetzung von f auf $D \cup \{x_0\}$, wenn F stetig auf $D \cup \{x_0\}$ ist.

Bemerkung 105. *Wenn x_0 ein Häufungspunkt von D ist, dann ergibt jeder Wert von A eine stetige Fortsetzung.*

Beweis.

$$\exists\delta_0 > 0 : \quad \forall x \in D : \quad |x - x_0| \geq \delta_0$$

F ist stetig in x_0:

$$\forall\varepsilon > 0 : \quad \exists\delta > 0 : \quad \forall x \in D : \quad \underbrace{|x - x_o| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}_{\text{Wähe } 0<\delta<\delta_0}$$

Wenn x_0 ein Häufungspunkt von D ist, dann gibt es höchstens einen Wert für A, sodass F stetige Fortsetzung von f ist.
Angenommen: Wähle $F(x_0) = A$ beziehungsweise $\widetilde{F}(x_0) = B$ für $A \neq B$, sodass F und $\widetilde{F}$ beide stetige Funktionen von f sind.

$$\begin{array}{lllll} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in D : & |x - x_0| < \delta & \Longrightarrow & |f(x) - A| & < \varepsilon \\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in D : & |x - x_0| < \delta & \Longrightarrow & |f(x) - B| & < \varepsilon \end{array}$$

$$\text{Setze } \varepsilon = \frac{|B - A|}{2}$$

$$\Rightarrow \quad |B - A| = |B - f(x) + f(x) - a| \leq |B - f(x)| + |f(x) - A| <$$

$$< \frac{|B - A|}{2} + \frac{|B - A|}{2} = |B - A|$$

$$\Rightarrow \quad |B - A| < |B - A| \qquad \lightning$$

$\square$

Definition 3.12. Sei D eine nicht leere Menge, $f : D \to \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$. Sei $x_0 \notin D$ ein Häufungspunkt von D, dann schreibt man:

$$A = \lim_{x\to x_0} \big(f(x)\big), \text{ wenn } F : \begin{cases} D \cup \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \dots & x \in D \\ A & \dots & x = x_0 \end{cases} \end{cases}$$

stetig in x_0 ist. Das heißt:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D : \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

Beispiel 49.

$$B_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n \textit{ für } |x| < 1$$

$$\textit{für } s \in \mathbb{Q} \textit{ gilt: } B_s(x) = (1+x)^s$$

$$\frac{B_s(x) - 1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \binom{s}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{s}{n} n^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{s}{m+1} x^m$$

$$\frac{B_s(x) - 1}{x} : \quad (-1, 1) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{s}{m+1} x^m \textit{ ist die stetige Fortsetzung von } \frac{B_s(x) - 1}{x} \textit{ auf } (-1, 1)$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{B_s(x) - 1}{x} \right) = \binom{s}{1} = s$$

$$\textit{Für } s \in \mathbb{Q} : \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{(1+x)^s - 1}{x} \right) = s$$

3.4.1 Rechenregeln für Grenzwerte

Sei $f, g : D \to \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$, x_0 ein Häufungspunkt von D

$$A = \lim_{x\to x_0} \big(f(x)\big) \quad \text{ und } \quad B = \lim_{x \to x_0} \big(g(x)\big)$$

Dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \Big(f(x) \pm g(x) \Big) = A \pm B$$

$$\lim_{x\to x_0} \Big(f(x) \cdot g(x) \Big) = \lim_{x\to x_0} \Big(\big(f \cdot g\big)(x) \Big) = A \cdot B$$

$$\text{Wenn } B \neq 0 : \quad \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{A}{B}$$

Beweis.

$$\begin{array}{llllllll} \forall\varepsilon>0 & \exists\delta_1>0 & \forall x\in D: & |x-x_0| & < & \delta_1 & \Longrightarrow & |f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall\varepsilon>0 & \exists\delta_2>0 & \forall x\in D: & |x-x_0| & < & \delta_2 & \Longrightarrow & |g(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$$

$$\text{Sei } \delta = \min(\delta_1,\delta_2)$$

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in D: \quad |x-x_0|<\delta$$

$$\Longrightarrow \quad \big|\big(f(x)-g(x)\big)-(A+B)\big| \le \underbrace{|f(x)-A|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|g(x)-B|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

□

Satz 3.15. ***Folgenkriterium***
Sei D eine nichtleere Menge, x_0 ein Häufungspunkt von D und $f: D\to\mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$, dann gilt $A=\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\big)$ genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus D mit $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)$ auch $A=\lim\limits_{n\to\infty}\big(f(x_n)\big)$ gilt.

Beweis. $A=\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\big)$ ist äquivalent zur Stetigkeit der Funktion

$$F:\left\{\begin{array}{ccc} D\cup\{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{lll} f(x) & \dots & x\in D \\ A & \dots & x=x_0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Die Aussage des Satzes ist dann genau das Folgenkriterium für die Stetigkeit von F in x_0. □

Satz 3.16. ***Cauchy-Kriterium***
Sei D eine nicht leere Menge, x_0 ein Häufungspunkt von D und $f: D\to\mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$, dann existiert $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\big)$ genau dann, wenn:

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon>0, \quad \exists\delta>0: \quad \forall x,x'\in D: \quad |x-x_0|<\delta \text{ und } |x'-x_0|<\delta \\ \Rightarrow \quad |f(x)-f(x')|<\varepsilon\end{gathered} \tag{3.2}$$

Beweis.

„⇒" Es gelte $A=\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\big)$:

$$\forall\varepsilon>0, \quad \exists\delta>0: \quad \forall x\in D: \quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon>0: \quad \exists\delta>0: \quad \forall x,x'\in D: \quad |x-x_0|<\delta \text{ und } |x'-x_0|<\delta$$

$$\Rightarrow |f(x)-f(x')| \le |f(x)-A|+|f(x')-A|<\varepsilon$$

„$\Leftarrow$" Es gelte (3.2):

$$\text{Sei } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ eine Folge von Punkten in } D \text{ mit } x_0 = \lim_{n\to\infty}(x_n)$$
$$\forall \delta > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N: |x_n - x_0| < \delta$$
$$\text{Sei } \varepsilon > 0, \text{ dann gibt es nach (3.2) ein } \delta > 0.$$
$$\text{Dann gibt es wegen der Konvergenz von } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ein } N \in \mathbb{N}:$$
$$n, m \geq N: \begin{array}{lcl} |x_n - x_0| & < & \delta \\ |x_m - x_0| & < & \delta \end{array} \quad \Longrightarrow \quad |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n, m \geq \mathbb{N}: \quad |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \quad \big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine konvergente Cauchy-Folge}$$
$$\text{Sei } A := \lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)\big)$$
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N: \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\overset{(3.2)}{\Longrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x, x' \in D: \quad |x - x_0| < \delta \text{ und } |x' - x_0| < \delta$$
$$\Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein δ aus (3.2) und ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N: |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\left.\begin{array}{rcl} |x_n - x_0| & < & \delta \\ |x - x_0| & < & \delta \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| \leq \underbrace{|f(x) - f(x_n)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(x_n) - A|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Das heißt: $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in D: \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon$

□

3.5 Einseitige und uneigentliche Grenzwerte

Definition 3.13. Sei $f: (a, b) \to \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$, dann schreibt man:

$$A = \lim_{x\to a^+}\big(f(x)\big) = \lim_{x\to a^+0}\big(f(x)\big) = \lim_{x\searrow a}\big(f(x)\big)$$
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in (a, b): \quad a < x < a + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$
$$B = \lim_{x\to b^-}\big(f(x)\big) = \lim_{x\to b^-0}\big(f(x)\big) = \lim_{x\nearrow b}\big(f(x)\big)$$
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in (a, b): \quad b - \delta < x < b \quad \Rightarrow \quad |f(x) - B| < \varepsilon$$

Diese Grenzwerte heißen einseitige Grenzwerte, beziehungsweise links-/rechtsseitige Grenzwerte

Satz 3.17. *Sei $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ beschränkt und monoton, dann existieren die Grenzwerte:*

$$\lim_{x\to a^+}\big(f(x)\big) \text{ und } \lim_{x\to b^-}\big(f(x)\big)$$

Beweis. Sei f o.B.d.A.: monoton wachsend:

$$b > x > x' > a \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(x')$$

$$B = \sup\left\{ f(x) \;\middle|\; x \in (a,b) \right\} \in \mathbb{R}, \text{ da } f \text{ beschränkt ist}$$

$$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x' \in (a,b): \quad f(x') > B - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad x > x' \quad \Rightarrow \quad B \geq f(x) \geq f(x') > B - \varepsilon$$

$$\delta = b - x'$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in (a,b): \quad b - \delta < x < b \quad \Rightarrow \quad |f(x) - B| < \varepsilon$$

□

Definition 3.14. $D \neq \emptyset$ und x_0 ein Häufungspunkt:

- $f : D \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x)\big) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in D: \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq M$$

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x)\big) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in D: \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq -M$$

- $f : D \to \mathbb{C}$

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x)\big) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in D: \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \geq M$$

Definition 3.15.

- $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x)\big) = A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall x > M \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x)\big) = +\infty \quad \forall M > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall x > K \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x)\big) = -\infty \quad \forall M > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall x > K \quad f(x) < -M$$

- $f : (a, \infty) \to \mathbb{C}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x)\big) = \infty \quad \forall M > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall x > K \quad |f(x)| \geq M$$

- $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to -\infty} \big(f(x)\big) = A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall x < -M \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to -\infty} \big(f(x)\big) = +\infty \quad \forall M > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall x < -K \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x \to -\infty} \big(f(x)\big) = -\infty \quad \forall M > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall x < -K \quad f(x) < -M$$

- $f : (-\infty, b) \to \mathbb{C}$:

$$\lim_{x \to -\infty} \big(f(x)\big) = \infty \quad \forall M > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall x < -K \quad |f(x)| \geq M$$

4 Elementare Funktionen

4.1 Die Exponentialfunktion

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit:

1. $\forall s, t \in \mathbb{C}$: $f(s+t) = f(s) \cdot f(t)$
2. $\lim\limits_{s \to 0} \left(\frac{f(s)-1}{s} \right) = c$ mit $c \in \mathbb{C}$

Bemerkung 106.

$$\begin{gathered} f(0+0) = f(0) \cdot f(0) \\ f(0)^2 = f(0) \\ f(0) = 0, \textit{ oder } f(0) = 1 \end{gathered}$$

Wobei $f(0) = 0$ uninteressant ist.

Ad 1. Gesucht ist also eine Funktion mit der Eigenschaft, dass der Funktionswert der Summe zweier Argumente dasselbe ergibt, wie die Multiplikation derer Funktionswerte.

Ad 2. Weiters soll der Grenzüberschritt $s \to 0$ kontrolliert erfolgen.

1. Durch Induktion folgt:

$$f\left(\sum_{j=1}^{J} s_j\right) = \prod_{j=1}^{J} f(s_j)$$

$$f(n \cdot t) = f(t)^n \quad \Rightarrow \quad f(t) = f\left(\frac{t}{n}\right)^n$$

2.

$$\begin{gathered} \lim_{x \to \infty} \left(\frac{f\left(\frac{t}{n}\right) - 1}{\frac{t}{n}} \right) = c \\ f\left(\frac{t}{n}\right) = 1 + \frac{t_n}{n} \\ \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \left(\frac{t_n \cdot x_n}{t \cdot x_n} \right) = c \\ \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} (t_n) = c \cdot t \\ f(t) = \left(1 + \frac{t_n}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{t_n}{n}\right)^n \end{gathered}$$

Lemma 6. *Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim\limits_{n \to \infty} (z_n) = z$, dann konvergiert die Folge $\left(\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ und es gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Beweis. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞.
Das heißt, dass diese Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.
$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist daher beschränkt:

$$\exists M \in \mathbb{R}: \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad |z_n| \leq M$$

$$\text{Sei } \varepsilon > 0, \text{ dann gibt es ein } K \in \mathbb{N}: \quad \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{M^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{Sei } n > K: \qquad \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n \cdot (n-k) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{z_n^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{K} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{z_n^k}{k!} + \sum_{k=K+1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{z_n^k}{k!}$$

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{K} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{z_n^k}{k!} \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=K+1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{z_n^k}{k!} \right| + \left| \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) z_n^k - z^k \right| + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{M^k}{k!} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

Wegen $z = \lim\limits_{n\to\infty} (z_n)$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{K} \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot z_n^k \right) = \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{k!} \cdot z^n$$

Es gibt dann ein ein $N \in \mathbb{N}$, sodass fpr $n \geq N$ gilt:

$$\left| \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) z_n^k - z^k \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \text{für } n \geq N \text{ gilt dann: } \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right) . - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) z_n^k - z^k \right|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{M^k}{k!}}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{M^k}{k!}}_{<\frac{\varepsilon}{3}} <$$

$$\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$\square$

Korollar 4.0.1. *Eine Funktion f, die die Eigenschaften 1. und 2. hat, kann als*

$f(t) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{t_n}{n}\right)^n\right)$ *mit* $\lim_{n\to\infty}(t_n) = c\cdot t$ *geschrieben werden. Nach dem Lemma gilt dazu:*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c\cdot t)^k}{k!}$$

Definition 4.1. Die Abbildung $\exp : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} \end{cases}$ heißt die Exponentialfunktion.

Bemerkung 107. *Es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right) = \exp(z)$$

1.

$$\exp(s+t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(s+t)^k}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\cancel{k!}}\cdot\sum_{l=0}^{k}\frac{\cancel{k!}}{l!(k-l)!}\cdot s^l\cdot t^{k-l}}_{\textit{Cauchy-Produkt}} =$$

$$= \left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{s^l}{l!}\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\right) = \exp(s)\cdot\exp(t)$$

2.

$$\frac{\exp(s)-1}{s} = \frac{1}{s}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{s^{k-1}}{k!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^m}{(m+1)!}$$

Potenzreihe mit Konvergenzradius $R = \infty$

$$\lim_{s\to 0}\left(\frac{\exp(s)-1}{s}\right) = 1$$

Das heißt, dass exp *2. erfüllt mit* $c = 1$

Bemerkung 108. *Die Funktion* $\exp(c\cdot s)$ *ist durch die beiden Eigenschaften 1. und 2. charakterisiert.*
Das heißt dass es die einzige Funktion mit diesen beiden Eigenschaften ist.

Bemerkung 109. exp *ist stetig auf* $\mathbb{C}$, *da es eine Potenzreihe ist.*

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) := e$$
$$\left[\textit{Eulersche Zahl}\right]$$

Satz 4.1.

$$e \notin \mathbb{Q}$$

Beweis. Angenommen $e \in \mathbb{Q}$:

$$\Rightarrow e = \frac{p}{q} \quad \text{mit} \quad p, q \in \mathbb{N}$$

$$\underbrace{q!\left(e - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!}\right)}_{\in\mathbb{N}} = q! \cdot \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=q+1} \frac{1}{(q+1)(q+2)\cdot \ldots \cdot n} <$$
$$< \sum_{n=q+1} \frac{1}{(q+1)n-q} = \frac{1}{(q+1)\cdot\left(1 - \frac{1}{q+1}\right)} = \frac{1}{q} < 1$$

□

$n \in \mathbb{N}$

$$\exp(n) = e^n$$
$$\exp(-n) = e^{-n}$$
$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^p} \quad \text{mit} \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}$$
$$\exp\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = \exp(p) = e^p = \exp\left(\frac{p}{q}\right)^q$$

Definition 4.2. Für $z \in \mathbb{C}$ schreibt man:

$$e^z = \exp(z)$$
$$e^z \cdot e^{-z} = 1$$
$$\Rightarrow \quad e^z \neq 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

exp **für reelles Argument**

$$x \in \mathbb{R}: \quad \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right) = e^x$$

4.1.1 Eigenschaften von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Satz 4.2.

1. $\forall x \in \mathbb{R}: \; e^x > 0$
2. $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend und daher injektiv*
3. $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *ist surjektiv und insgesamt bijektiv.*

Beweis.

1.
$$e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0$$

2. $h > 0$:
$$\begin{aligned} e^h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} > 1 + h > 1 \\ x + h > x: \\ e^x \cdot e^h > e^x \end{aligned}$$

3. $y > 1$: $[0, y]$
$$\begin{aligned} e^0 = 1 < e^y \\ e^y > 1 + y > y \\ \overset{\substack{\text{Zwischen-}\\\text{wert-}\\\text{satz}}}{\Longrightarrow} \quad \exists \xi \in (0, y): \quad e^\xi = y \end{aligned}$$

   $y < 1$:
$$\begin{aligned} \eta = \frac{1}{y} > 1 \\ \Rightarrow \quad \exists \xi \in \mathbb{R}: \quad e^\xi = \eta \\ e^{-\xi} = y \end{aligned}$$

□

Satz 4.3. *Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*
$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{e^x}{x^n}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} (x^n e^x) = 0$$

Beweis.

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$\Rightarrow \frac{e^x}{x^n} > \frac{x^{n+1}}{x^n(n+1)!} = \frac{x}{(n+1)!} > M$$
$$\forall M > 0 : \quad \exists K > 0 : \quad \forall x > K : \quad \frac{e^x}{x^n} > M$$
$$x^n e^x = (-t)^n e^{-t} = (-1)^n \cdot \frac{t^n}{e^t}$$
$$\overset{1.}{\Longrightarrow} \quad \lim_{t\to-\infty} \left(\frac{t^n}{e^t}\right) = 0 = \lim_{x\to-\infty} (x^n e^x)$$

□

4.2 Der natürlich Logarithmus

Definition 4.3. Die Abbildung $\ln : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp^{(-1)}(x) \end{cases}$ heißt der natürlich Logarithmus.

Eigenschaften des Logarithmus $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und bijektiv

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = 1$$
$$x = e^s \text{ und } y = e^t : \qquad xy = e^{s+t}$$
$$\ln(xy) = s + t = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{t}{e^t - 1}$$
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{t}{e^t-1}\right) = 1$$

$n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{\sqrt[n]{x}}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = e^{nt} : \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{nt}{e^t}\right) = 0$$
$$\lim_{x\to 0+} \left(\sqrt[n]{x} \cdot \ln(x)\right) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = e^{-nt} : \quad \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-t} \cdot (-nt)\right) = 0$$

4.3 Exponentialfunktion und Logarithmus mit beliebiger Basis

Definition 4.4. $a > 0$:

$$\begin{array}{rccl} z \in \mathbb{C}: & a^z & := & \exp\big(z \cdot \ln(a)\big) \\ x \in \mathbb{R}: & a^x & := & \exp\big(x \cdot \ln(a)\big) \end{array}$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x - 1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\exp\big(x \cdot \ln(a)\big) - 1}{x \cdot \ln(a)}\right) \cdot \ln(a) = \ln(a)$$

Für $a > 1$ ist $x \mapsto a^x$ streng monoton wachsend und

$$\lim_{x \to +\infty} (a^x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (a^x) = 0$$

Für $0 < a < 1$ ist $x \mapsto a^x$ streng monoton fallend und

$$\lim_{x \to +\infty} (a^x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} (a^x) = +\infty$$

$$^a\log : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{cases} \qquad \text{Logarithmus zur Bases } a$$

$$^a\log = \log_a$$

$$a^x = y$$

$$\exp\big(x \cdot \ln(a)\big) = y$$

$$x \cdot \ln(a) = \ln(y)$$

$$\to x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = {}^a\log(y)$$

Wichtige Logarithmen

$$\begin{array}{rcll} \text{ld} & = & ^2\log & \ldots \text{ Logarithmus dualis} \\ \log & = & ^{10}\log & \ldots \text{ Logarithmus zur Basis 10} \end{array}$$

Bemerkung 110.

$$x \cdot y = \exp\big(\ln(x) + \ln(y)\big)$$

Bemerkung 111.

$$\begin{array}{rcll} x & \mapsto & a^x & \textit{stetig} \\ x & \mapsto & \ln(x) & \textit{stetig} \end{array}$$

Definition 4.5. Potenzfunktion
$x \mapsto x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$

$$x^\alpha = \exp\big(\alpha \cdot \ln(x)\big)$$
$$x > 0$$

$x^\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen.

Bemerkung 112.

$\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0+}(x^\alpha) = 0$$
$$\lim_{x\to \infty+}(x^\alpha) = +\infty$$

$\alpha < 0$:

$$\lim_{x\to 0+}(x^\alpha) = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty}(x^\alpha) = 0$$
$$(x \cdot y)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$$
$$x^\alpha = \exp\big(\alpha \cdot \ln(x)\big)$$
$$\lim_{x\to 0+}\big(\ln(x)\big) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0+}(x^\alpha) = \lim_{t\to -\infty}(e^t) = 0$$
$$t = \alpha \cdot \ln(x)$$
$$\lim_{x\to \infty+}(x^\alpha) = \lim_{t\to +\infty}(e^t) = +\infty$$

Bemerkung 113.

$\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0+}\big(x^\alpha \cdot \ln(x)\big) = 0$$

$x < 1$:

$$x^\alpha \le x^{\frac{1}{n}} \text{ für } \frac{1}{n} < \alpha$$
$$|x^\alpha \cdot \underbrace{\ln(x)}_{0}| \le |x^{\frac{1}{n}} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{0}|$$

$x > 1$:

$$x^\alpha \geq x^{\frac{1}{n}}$$
$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{\ln(x)}{x^\alpha}}_{\to 0} \leq \underbrace{\frac{\ln(x)}{x^{1n}}}_{\to 0}$$

Bemerkung 114. *Die einzige stetige Lösung der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = f(1)^x$*

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{f(1)^p}$$

Dann gibt es höchstens eine stetige Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}$. Diese kennt man, aufgrund der Überlegungen.

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$
$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f(1)^{\frac{p}{q}}$$

$x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \lim_{\frac{p}{q} \to x} \left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)$$

4.4 Die Binomische und Logarithmische Reihe

$$B_s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x$$
$$|x| < 1$$
$$B_{s+t}(x) = B_s(x) \cdot B_t(x)$$

Das heißt:
Für Indizes x mit $|x| 1$ ist $f : s \mapsto B_s(x)$ eine Lösung der obigen Aufgabe. Wenn man die Existenz von $\lim_{s \to 0} \left(\frac{B_s(x)-1}{s}\right)$ zeigen kann, dann kann man $B_s(x)$ bestimmen aufgrund der Charakterisierung der Exponentialfunktion.

$$\frac{B_s(x) - 1}{s} = \frac{1}{s} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{s}{n} x^n$$

$n \geq 1$:

$$\frac{1}{s}\binom{s}{n} = \frac{1}{\cancel{s}} \cdot \frac{\cancel{s} \cdot (s-1) \cdot \ldots \cdot (s-n+1)}{n!}$$

$$\text{Sei } |s| \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad |s-k| \leq k+1: \qquad \left|\frac{1}{s}\binom{n}{n}\right| \leq \frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{n!} = 1$$

$$\text{daher ist } \left|\binom{s}{n} x^n\right| \leq |x|^n$$

$$\Rightarrow \text{ die Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s}\binom{s}{n} x^n \text{ konvergiert normal für festes } x$$

mit $|x| < 1$ und $|s| < 1$, stellt also eine stetige Funkton dar.

$$\lim_{s \to 0}\left(\frac{B_s(x) - 1}{s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s-1) \cdot (s-2) \cdot \ldots \cdot (s-n+1)}{n!} \cdot x^n \quad \Bigg|_{s=0}$$

Bemerkung 115. *Die rechte Seite ist die stetige Fortsetzung.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s-1) \cdot (s-2) \cdot \ldots \cdot (s-n+1)}{n!} \cdot x^n \quad \Bigg|_{s=0} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1) \cdot (-2) \cdot \ldots \cdot (-n+1)}{n!} x^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n := L(x)$$

Wegen der Charakterisierung der Exponentialfunktion hat man daher:

$$B_s(x) = \exp\big(s \cdot L(x)\big)$$

s=1:

$$B_1(x) = 1 + x = \exp\big(L(x)\big)$$

$$\Rightarrow L(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n \quad \text{für } |x| < 1$$

Also gilt:

$$B_s(x) = \exp\big(s \cdot \ln(1+x)\big) = (1+x)^s$$

für $|x| < 1$ und $s \in \mathbb{C}$.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n \quad \text{für } |x| < 1$$

$\underline{0 < x < 1:}$

$$\begin{gathered} x^n > 0 \\ \frac{x^{n+1}}{n+1} < \frac{x^{n+1}}{n} < \frac{x^n}{n} \end{gathered}$$

das heißt: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n$ ist eine alternierende, monoton fallende Reihe.

$$\overset{\text{Leibniz}}{\Longrightarrow} \quad \left| \ln(1+x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+1}$$

Fehlerabschätzung nach Leibnizkriterium für $0 \leq x < 1$

$$\underset{\substack{\text{Stetig-}\\\text{keit}}}{\overset{\lim\limits_{x \to 1^-}}{\Longrightarrow}} \quad \left| \ln(2) - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| \leq \frac{1}{N+1}$$

$$\text{also gilt:} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

4.4.1 Bestimmung von Logarithmen

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n \\ \ln(1-x) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

Wenn $\ln(y)$ bestimmt werden soll, wählt man $y = \frac{1+x}{1-x}$

$$\begin{gathered} \Rightarrow y + xy = 1 + x \\ \left| \frac{y-1}{y+1} \right| < 1 \quad \text{für } y > 0 \\ y - 1 = x(y+1) \\ x = \frac{y-1}{y+1} \end{gathered}$$

Beispiel 50.

$$
\begin{aligned}
y &= 2 \\
\Rightarrow x &= \frac{1}{3} \\
\Rightarrow \quad \ln(2) &= 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}}
\end{aligned}
$$

4.5 Trigonometrische Funktionen

$$
\begin{aligned}
\exp(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{mit } z \in \mathbb{C} \\
\exp(i \cdot t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

Definition 4.6.

$$
\begin{aligned}
\cos(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \Re(e^{it}) \\
\sin(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \Im(e^{it}) \\
e^{it} &= \cos(t) + i \cdot \sin(t) \\
e^{it} &= \cos(t) - i \cdot \sin(t) \\
\Rightarrow \cos(t) &= \frac{1}{2}\big(e^{it} + e^{-it}\big) \\
\sin(t) &= \frac{1}{2i}\big(e^{it} - e^{-it}\big)
\end{aligned}
$$

Eigenschaften von cos **und** sin

$$
\begin{aligned}
\exp\big(i \cdot (s+t)\big) &= \exp(is) \cdot \exp(it) \\
\cos(s+t) + i \cdot \sin(s+t) &= \big(\cos(s) + i \cdot \sin(s)\big) \cdot \big(\cos(t) + i \cdot \sin(t)\big) = \\
&= \cos(s) \cdot \cos(t) - \sin(s) \cdot \sin(t) + i \cdot \big(\sin(s) \cdot \cos(t) + \cos(s) \cdot \sin(t)\big)
\end{aligned}
$$

Bemerkung 116. *Die Additionstheoreme für* cos *und* sin *und* $s, t \in \mathbb{R}$ *sind:*

$$\cos(s \pm t) = \cos(s) \cdot \cos(t) \pm \sin(s) \cdot \sin(t)$$
$$\sin(s \pm t) = \sin(s) \cdot \cos(t) - \cos(s) \cdot \sin(t)$$

$$\cos(s+t) + \cos(s-t) = 2\cos(s) \cdot \cos(t)$$
$$\cos(s+t) - \cos(s-t) = -2 \cdot \sin(s) \cdot \sin(t)$$
$$\sin(s+t) + \sin(s-t) = 2\sin(s) \cdot \cos(t)$$
$$\sin(s+t) - \sin(s-t) = 2\cos(s) \cdot \sin(t)$$
$$\cos(s) \cdot \cos(t) = \frac{1}{2}\big(\cos(s+t) + \cos(s-t)\big)$$
$$\sin(s) \cdot \sin(t) = -\frac{1}{2}\big(\cos(s+t) - \cos(s-t)\big)$$
$$\sin(s) \cdot \cos(t) = \frac{1}{2}\big(\sin(s+t) + \sin(s-t)\big)$$
$$\cos(s) \cdot \sin(t) = \frac{1}{2}\big(\sin(s+t) - \sin(s-t)\big)$$

$$s = \frac{x+y}{2} \text{ und } t = \frac{x-y}{2} \quad \Leftrightarrow \quad s+t = x \text{ und } s-t = y$$
$$\Rightarrow \cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(2x) = \sin(x) \cdot \cos(x) + \cos(x) \cdot \sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\left.\begin{array}{rcl} \cos(2x) & = & \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \cos(0) = 1 & = & \cos^2(x) + \sin^2(x) \end{array}\right\} \quad \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

Lemma 7. *Für* $0 < x < \sqrt{6}$ *gilt:*

$$-\frac{x^3}{6} < \sin(x) < y$$

Für $|x| < \sqrt{2}$ *gilt:*

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos(s) \leq 1$$

Beweis.

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{wenn } 0 < x < \sqrt{6}:$$

$$x > \frac{x^3}{6} > \frac{x^5}{5!} > ...$$

Leibniz:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} < x$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{wenn } 0 < x < \sqrt{2}:$$

$$1 - \frac{x^2}{2} > \frac{x^4}{24} > ...$$

Leibniz:

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} < 1$$

□

Für $0 < x < \sqrt{6}$ gilt:

$$\sin(x) > \underbrace{x}_{>0} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)}_{\to 0} > 0$$

Für $0 < x < y < \sqrt{6}$ gilt:

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) > 0$$

Also ist $\cos : [0, \sqrt{6}] \to \mathbb{R}$ streng monoton fallen ↓

$$\cos(\sqrt{2}) > 0$$

$$\cos(0) = 1 > 0$$

$$\cos(2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{(2n)!} = 1 - \frac{4}{2} + \frac{4^2}{24} \mp ... \leq 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} < 0$$

$\overset{\text{Zwischen-wert-satz}}{\Longrightarrow}$ Es gibt genau eine Nullstelle von $\cos(x)$ im Intervall $[\sqrt{2}, 2]$

Definition 4.7. Die einzige Nullstelle von $\cos(x)$ im Intervall $[0, 2]$ heißt:

$$\frac{\pi}{2} := \inf\left\{x \in \mathbb{R}^+ \;\middle|\; \cos(x) = 0\right\}$$

$$2\sqrt{2} < \pi < 4$$

Bemerkung 117.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$$

$$\cos(\pi) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = -1$$
$$\sin(\pi) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$\cos(2\pi) = 2\cos^2(\pi) - 1 = 1$$
$$\sin(2\pi) = 2\sin(\pi) \cdot \cos(\pi) = 0$$
$$\left.\begin{array}{rcccl} \cos(x+2\pi) & = & \cos(x)\cdot\cos(2\pi) - \sin(x)\cdot\sin(2\pi) & = & \cos(x) \\ \sin(x+2\pi) & = & \sin(x)\cdot\cos(2\pi) + \cos(x)\cdot\sin(2\pi) & = & \sin(x) \end{array}\right\} \textit{Periodizität}$$
$$\Rightarrow \quad k \in \mathbb{Z}: \quad \left\{\begin{array}{rcl} \cos(x+2k\pi) & = & \cos(x) \\ \sin(x+2k\pi) & = & \sin(x) \end{array}\right\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\sin$ *und* $\cos$ *haben die Periode* 2π*.*

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$
$$\ell i\pi = -1$$
$$e^{2\pi i} = 1$$
$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

Exponentialfunktion hat Periode $2\pi i$*.*

Bemerkung 118. $\cos(x)$ *ist streng monoton fallend auf* $[0, \pi]$

Beweis.

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\text{Zeige:}\qquad \sin(x) > 0 \text{ für } 0 < x < \pi$$

$$\text{Wissen: } \sin(x) > 0 \text{ für } 0 < x < \sqrt{6}$$

$$\text{Angenommen: } \exists\xi \text{ mit } \sqrt{6} < x < \xi \text{ mit } \sin(\xi) < 0$$

$$\Rightarrow\quad \exists x_0 \in [\sqrt{6}, \xi] \text{ mit } \sin(x_0) = 0$$

$$\sin(x_0) = 2\underbrace{\sin\left(\frac{x_0}{2}\right)}_{=0}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{x_0}{2}\right)}_{\neq 0}$$

$$0 < \frac{x_0}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\quad \sin\left(\frac{x_0}{2}\right) > 0 \quad \lightning$$

$$\text{Sei } 0 \leq x < y \leq \pi$$

$$\cos(x) - \cos(y) = 2\underbrace{\sin\overbrace{\left(\frac{x+y}{2}\right)}^{\in(0,\pi)}}_{>0}\cdot\underbrace{\sin\overbrace{\left(\frac{x-y}{2}\right)}^{\in(0,\pi)}}_{>0}$$

□

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$$

$$\Rightarrow\quad \sin \text{ ist } \uparrow \text{ auf } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

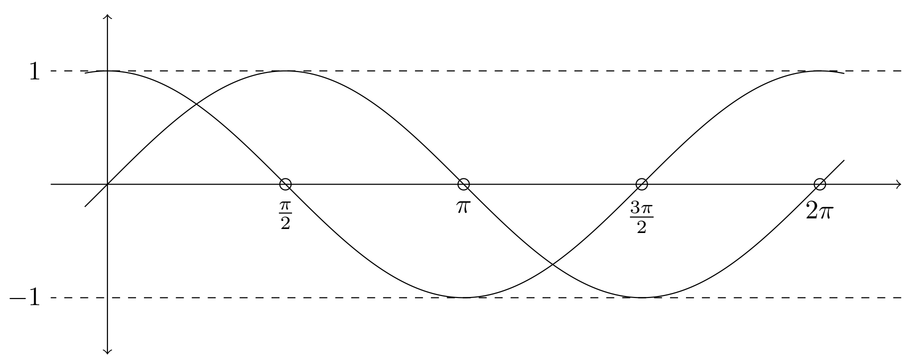
$$\sin(\pi - x) = \sin(\pi)\cdot\cos(x) - \cos(\pi)\cdot\sin(x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi - x) = \cos(\pi)\cdot\cos(x) + \sin(\pi)\cdot\sin(x) = -\cos(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

Die gewonnen Informationen erlauben eine rudimentäre Skizze der Funktionsgraphen



Bemerkung 119.

$$\Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; \cos(x) = 0\Big\} = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z} = \Big\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;\Big|\; k \in \mathbb{Z}\Big\}$$
$$\Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; \sin(x) = 0\Big\} = \pi \cdot \mathbb{Z} = \Big\{k\pi \;\Big|\; k \in \mathbb{Z}\Big\}$$

Angenommen: $\exists \xi$*:* $\cos(\xi) = 0$ *und* $\xi \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$
oBdA.: $0 < \xi < 2\pi$
Wegen $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ *kann man sogar* $0 < \xi < \pi$ *ausrechnen.* ξ *wäre dann eine Nullstelle in* $[0, \pi]$ *mit* $\xi + \frac{\pi}{2}$*. Das widerspricht der strengen Monotonie von* cos *auf diesem Intervall.*

Bemerkung 120.

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2\pi i \cdot \mathbb{Z}$$
$$\exists k \in \mathbb{Z} : \quad z = 2k\pi i$$
$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot \big(\cos(y) + i\sin(y)\big) = 1$$
$$\sin(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y \in \pi \cdot \mathbb{Z}$$
$$\cos(k\mathcal{Z}) = 1$$
$$\cos(k\pi) = (-1)^k$$

$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ *ist bijektiv* $\Big[$*injektiv wegen* $\lightning$ *und surjektiv wegen* $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$ *und der Anwendung der Zwischenwertsatzes*$\Big]$
$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ *ist bijektiv aus denselben Gründen, wie der* cos

ArkusKosinus

$$\arccos : \begin{cases} [-1, 1] & \to & [0, \pi] \\ y & \mapsto & \cos^{(-1)}(y) \end{cases}$$

Arkussinus

$$\arcsin : \begin{cases} [-1, 1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y & \mapsto & \sin^{(-1)}(y) \end{cases}$$

Bemerkung 121. $y \in [-1,1]$

$$\begin{aligned}\Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; \cos(x) = y\Big\} &= \Big\{\arccos(y), 2\pi - \arccos(y)\Big\} + 2\pi\mathbb{Z} = \\ &= \Big\{\arccos(y) + 2k\pi \;\Big|\; k \in \mathbb{Z}\Big\} \cup \Big\{-\arccos(y) + 2k\pi \;\Big|\; k \in \mathbb{Z}\Big\} \\ \Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; \sin(x) = y\Big\} &= \Big\{\arcsin(y), \pi - \arcsin(y)\Big\} + 2\pi\mathbb{Z} = \\ &= \Big\{\arcsin(y) + 2k\pi \;\Big|\; k \in \mathbb{Z}\Big\} \cup \Big\{\pi - \arcsin(y) + 2k\pi \;\Big|\; k \in \mathbb{Z}\Big\}\end{aligned}$$

Tangens

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$
$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$
$$x \notin \pi\mathbb{Z}$$
$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

$\underline{x > 0 :}$ sin ist $\upharpoonleft$ und cos ist $\downharpoonright$
$\underline{0 < x < y < \frac{\pi}{2} :}$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} < \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \tan(y)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \text{ ist streng monoton wachsend} \\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \big(\tan(x)\big) = +\infty \text{ und } \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \big(\tan(x)\big) = -\infty \\ \Rightarrow \tan \text{ ist surjektiv} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ bijektiv}$$

Kosekans

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

Sekans

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Arcustangens

$$\arctan : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ y & \mapsto \quad \tan^{(-1)}(y) \end{cases}$$

$$\tan(x+\pi) = \tan(x)\text{... Tangens hat die periode } \pi$$
$$\Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; \tan(x) = y\Big\} = \arctan(y) + \pi\mathbb{Z}$$

Kotangens

$$\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R} \text{ ist } \twoheaddownarrow$$
$$\lim_{x \to 0^+} \big(\cot(x)\big) = +\infty \text{ und } \lim_{x \to 0^-} \big(\cot(x)\big) = -\infty$$
$$\Rightarrow \text{ bijektiv}$$
$$\cot(x + \pi) = \cot(x)$$

Arcuskotangens

$$\text{arcCot} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & (0, \pi) \\ y & \mapsto & \cot^{(-1)}(y) \end{cases}$$
$$\Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; \cot(x) = y\Big\} = \text{arcCot}(y) + \pi\mathbb{Z}$$

$$\tan(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)}{\cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)} =$$
$$= \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin(y)}{\cos(y)}} = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}$$

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$
$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - 1 = \cos(\pi) = 0$$
$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$\arctan : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$
$$\Rightarrow x, y \in (-1, 1)$$
$$\Rightarrow \arctan(x) + \arctan(y) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$$
$$|x|, |y| < 1$$

4.6 Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$

$$(x,y) \in \mathbb{R} \setminus \big\{(0,0)\big\}$$
$$(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$
$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 = 1$$

Suche: $\varphi : \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos(\varphi)$ und $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin(\varphi)$.

<u>$y \geq 0$:</u>

$$\varphi = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+^2}} = \cos(\varphi)$$
$$\varphi \in [0,\pi] \quad \Rightarrow \quad \sin(\varphi) \geq 0$$

Da $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$, $\sin(\varphi) \geq 0$ und $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \geq 0$ muss $\sin(\varphi) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ gelten.

<u>$y < 0:$</u>

$$\varphi = -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$
$$\varphi \in (-\pi, 0)$$
$$\cos(\varphi) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\sin(\varphi) < 0 \quad \underset{\text{oben}}{\overset{\text{wie}}{\Longrightarrow}} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin(\varphi)$$

Das heißt:

$$(x,y) = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=:r} \big(\cos(\varphi), \sin(\varphi)\big) \text{ mit } \varphi \in (-\pi, \pi]$$
$$(x,y) \mapsto (r,\varphi)$$
$$x = r\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\varphi)$$

Die Abbildung $(x,y) \mapsto (r,\varphi)$ ist stetig für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \underbrace{\Big\{(x,0) \;\Big|\; x \leq 0\Big\}}_{\substack{\text{negative } x\text{-Achse} \\ \text{führt zu Ein-} \\ \text{seitigkeit und} \\ \text{ist daher aus dem} \\ \text{Definitionsbereich} \\ \text{ausgenommen, da} \\ \pi \neq -\pi}}$

$$z = x + iy \neq 0$$

$$= |z| \cdot \left(\frac{x}{|z|} + i \cdot \frac{y}{|z|} \right) = |z| \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot \big(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) \big)$$

$$\varphi := \operatorname{Arg}(z) \quad \ldots \quad \text{Argument von } z$$

$$\varphi \in (-\pi, \pi]$$

$$\Rightarrow \quad z = |z| \cdot e^{i \cdot \operatorname{Arg}(z)}$$

$$S : \begin{cases} (-\pi, \pi] & \rightarrow \quad \mathbb{S} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\} \\ \varphi & \mapsto \quad \big(\cos(\varphi), \sin(\varphi) \big) \end{cases} \qquad \text{ist stetig und bijektiv}$$

$$\varphi = S^{(-1)} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right)$$

4.7 Wurzelziehen in $\mathbb{C}$

$$x^n = c$$

$$c \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad c \neq 0$$

$$w = |w| \cdot e^{i\varphi}$$

$$c = |c| \cdot e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad w^n = |w|^n \cdot e^{in\varphi}$$

$$|w|^n = |c| \quad \Rightarrow \quad |w| = \sqrt[n]{|c|}$$

$$n\varphi = \psi + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

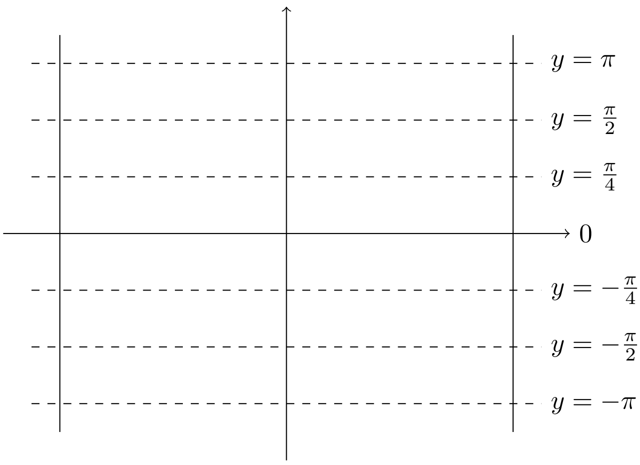
k ist so zu wählen, dass $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Das ergibt genau n Werte für k.

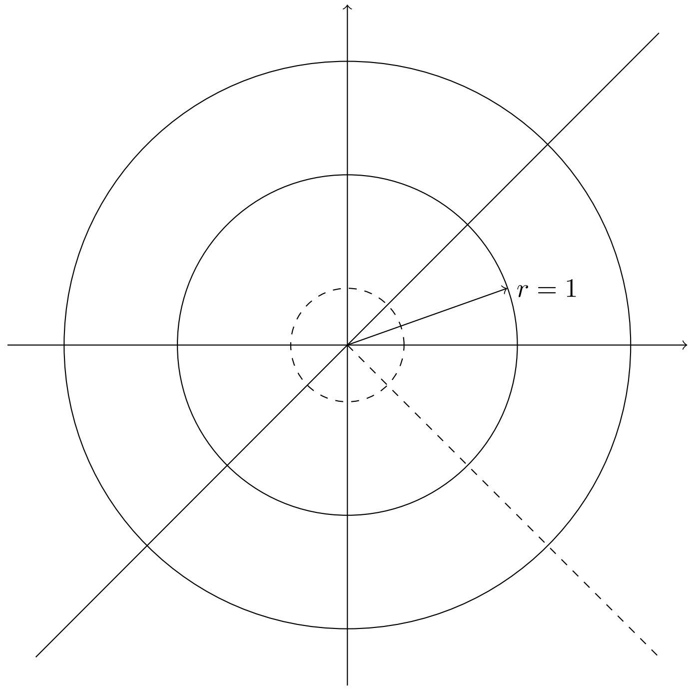
Beispiel 51.

$$w^3 = 1 - i$$
$$|1 - i| = \sqrt{2}$$
$$\psi = \operatorname{Arg}(1 - i) = -\frac{\pi}{4} = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\varphi = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \qquad mit\ k = -1, 0, 1$$
$$\Rightarrow w_k = \sqrt[6]{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right)$$
$$w_0 = \sqrt[6]{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 1,08... - i \cdot 0,29...$$
$$w_1 = \sqrt[6]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) = 1,0899... + i \cdot 0,031979...$$
$$w_2 = \sqrt[6]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

4.8 Exponentialfunktion und Logarithmus in $\mathbb{C}$

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \end{cases}$$
$$\exp(x + iy) = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot \big(\cos(y) + i \cdot \sin(y)\big)$$
$$|e^z| = e^{\Re(z)}$$
$$\operatorname{Arg}(e^z) = \Im(z) + 2k\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z} \text{ rightig gewählt}$$





$$\exp : \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\Im(z)| < \pi \right\} \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \text{ ist bijektiv}$$
$$w = e^z = |w| \cdot e^{i \cdot \operatorname{Arg}(w)} \quad \Rightarrow \quad z = \Im(|w|) + i \cdot \operatorname{Arg}(w)$$
$$e^{\Re(z)} = |w| \quad \longleftrightarrow \quad e^{\Im(z)} = e^{i \cdot \operatorname{Arg}(w)}$$

$$\log : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- & \to \quad \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \Im(z) < \pi \right\} \\ w & \mapsto \quad \ln(w) + i \cdot \operatorname{Arg}(w) \end{cases} \qquad \text{„Hauptzweig des komplexen Logarithmus"}$$

Bemerkung 122. *„log" bezeichnet ab jetzt den komplexen Logarithmus zur Basis e. Der reelle natürliche Logarithmus wird weiterhin mit* ln *bezeichnet.*

Beispiel 52.

$$\log(2i) = \ln(2) + i \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$\log(1 - i) = \frac{1}{2}\ln(2) - i \cdot \frac{\pi}{4}$$
$$i^i = e^{i \cdot \log(i)} = e^{i \cdot i \cdot \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}$$

Wissen:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$B_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} \cdot z^n$$

$$|z| < 1, \quad z \in \mathbb{C} \textit{ fest}$$

$$s \mapsto B_s(x)$$

$$B_{s+t}(z) = B_s(z) \cdot B_t(z)$$

$$\lim_{s \to 0} \left(\frac{B_s(z) - 1}{s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

$$\Rightarrow L(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = \lim_{s \to 0} \left(\frac{B_s(z) - 1}{s} \right)$$

$$B_s(z) = e^{s \cdot L(z)} \quad \stackrel{s=1}{\Longrightarrow} \quad B_n(z) = 1 + z = e^{L(z)}$$

Es muss daher gelten:

$$L(z) = \log(1+z) + i \cdot 2k(z) \cdot \pi \quad \textit{mit } k(z) \in \mathbb{Z}$$

$$z \in (-1, 1) \quad \Longrightarrow \quad k(0) = 0$$

$z \mapsto k(z)$ ist stetig und kann nur ganzzahlige Werte annehmen.
Betrachte:

$$t \mapsto k\left(\frac{1}{2} + t \cdot \left(z - \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$t \in [0, 1]$$

Diese nimmt bei $t = 0$ den Wert 0 an und in $t = 1$ den Wert $k(z)$. Wäre $k(z) \neq 0$, dann wäre nach dem Zwischenwertsatz $k \notin \mathbb{Z}$ $\lightning$
Damit gilt:

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{z^n}{n} \quad \textit{für } |z| < 1$$

$$\tan(x) = \frac{\frac{1}{2i}\cdot(e^{ix}-e^{-ix})}{\frac{1}{2}\cdot(e^{ix}+e^{-ix})} = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1} = y$$

$$e^{2ix}-1 = iy(e^{2ix}+1)$$

$$e^{2ix}(1-iy) = 1+iy$$

$$e^{2ix} = \frac{1+iy}{1-iy}$$

$$\arctan(y) = x = \frac{1}{2i}\cdot\log\left(\frac{1+iy}{1-iy}\right) + \cancel{k(y)}\cdot\pi$$

$$k(y)\in\mathbb{Z}, \qquad \textit{mit } k(0)=0 \quad \Rightarrow \quad k(y)=0 \quad \forall y$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{1+ix}{1-iy}\right) = 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^{2n+1}}{2n+1} = 2i\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{y^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \arctan(y) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{y^{2n+1}}{2n+1} \quad \textit{für } |y|<1$$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{y^{2n+1}}{2n+1}$ *für* $0<y<1$ *ist eine alternierende Reihe mit monoton fallenden Gliedern*

$$\Rightarrow \quad \left|\arctan(y) - \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\cdot\frac{y^{2n+1}}{2n+1}\right| < \frac{y^{2N+3}}{2N+3}$$

Wegen der Stetigkeit bleibt die Ungleichung richtig für $y\to 1^-$

$$\left|\frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}\right| \le \frac{1}{2N+3}$$

$$\textit{das heißt:} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

$$2\cdot\arctan\left(\frac{1}{5}\right)=\arctan\left(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}}\right)=\arctan\left(\frac{5}{12}\right)$$
$$2\cdot\arctan\left(\frac{5}{12}\right)=\arctan\left(\frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}}\right)=\arctan\left(\frac{\frac{5}{6}}{\frac{119}{144}}\right)=\arctan\left(\frac{120}{119}\right)$$
$$\arctan(1)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)=\arctan\left(\frac{1-\frac{1}{239}}{1+1\cdot\frac{1}{239}}\right)=\arctan\left(\frac{\frac{238}{239}}{\frac{240}{239}}\right)=$$
$$=\arctan\left(\frac{119}{120}\right)=\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{120}{119}\right)$$
$$\Rightarrow\frac{\pi}{4}=4\cdot\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$
$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{4}{5^{2n+1}}-\frac{1}{239^{2n+1}}\right)$$
$$\Rightarrow\pi=3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494 4...$$

Sei $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ *Dann gilt:*

$$\sum_{l=0}^{n-1}\zeta^{kl}=\begin{cases} n & \dots \text{ wenn } n \mid k \\ 0 & \dots \text{ sonst}\end{cases}$$

$$\zeta^k=1$$
$$da:\ k=n\cdot l$$
$$\zeta^{nl}=\left(\zeta^n\right)^l=1$$

$n\nmid k:$

$$\zeta^k\neq 1$$
$$\sum_{l=0}^{n-1}\zeta kl=\frac{\zeta nk-1}{\zeta-1}=0$$

Beispiel 53.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{l=0}^{2}\zeta nl$$
$$\zeta=e^{\frac{2\pi i}{3}}=-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{3}\cdot\left(e^x+e^{\zeta\cdot x}+e^{\zeta^2\cdot x}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(e^x+e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x}+e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x}\right)\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(e^x+2e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

4.9 Hyperbelfunktionen

Mit Sinus und Kosinus konnte die Einheitskreislinie parametrisiert werden.

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{beschreibt eine (gleichseitige) Hyperbel}$$
$$\Rightarrow \underbrace{(x-y)}_{e^{-t}} \cdot \underbrace{(x+y)}_{e^{t}} = 1$$
$$x = \frac{1}{2} \cdot \left(e^t + e^{-t}\right)$$
$$y = \frac{1}{2} \cdot \left(e^t - e^{-t}\right)$$

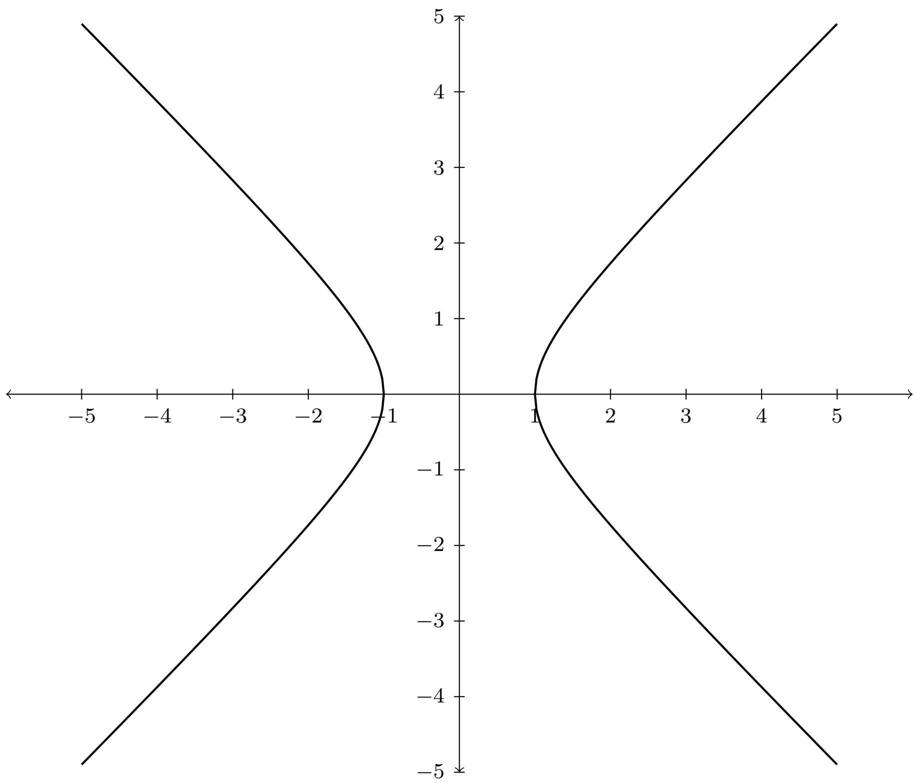
Definition 4.8.

$$\sinh(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^t - e^{-t}\right)$$
$$\cosh(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^t + e^{-t}\right)$$

„Sinus Hyperbolicus " und „Kosinus Hyperbolicus" erlauben eine Parametrisierung von Hyperbeln

$$\cosh(t) \geq 1$$

daher parametrisiert $t \mapsto \big(\cosh(t), \sinh(t)\big)$ nur den rechten Ast der Hyperbel.

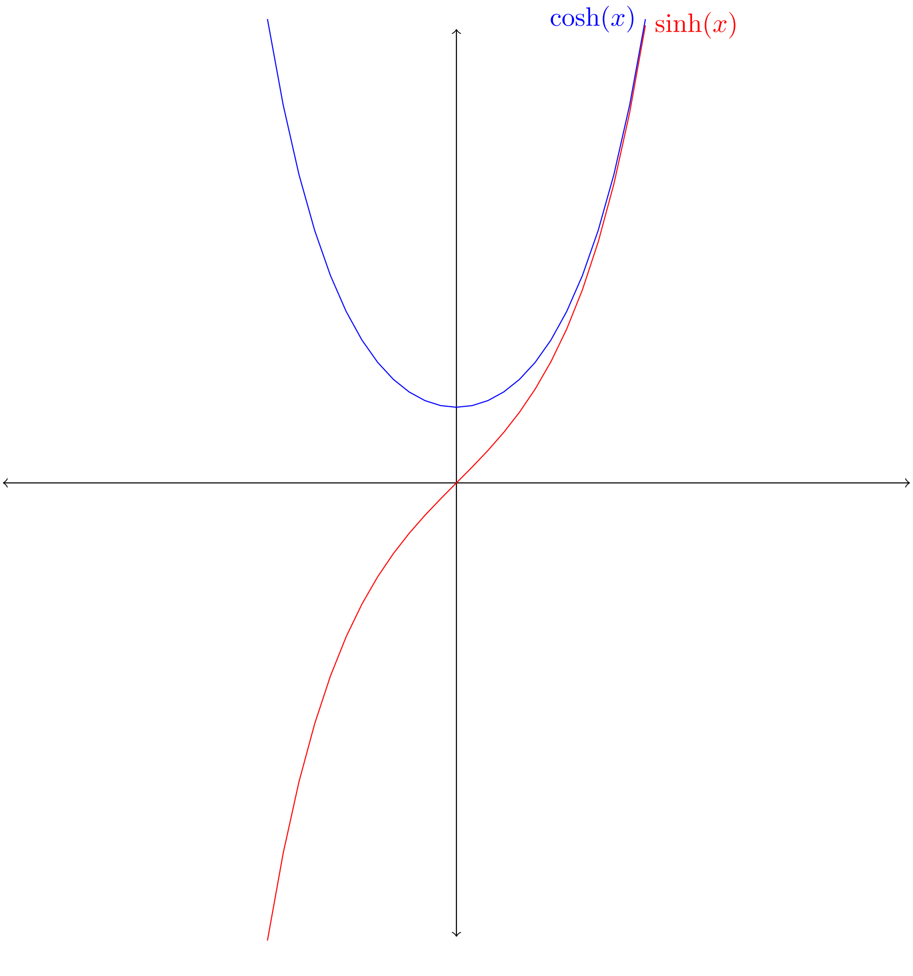


Area Kosinus Hyperbolicus

$$\cosh(t) = x$$
$$x \geq 1$$
$$\frac{1}{2} \cdot \left(e^t + e^{-t}\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad e^{2t} + 1 = 2xe^t \quad \Leftrightarrow \quad e^{2t} - 2xe^t + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \left(e^t\right)_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$
$$\Rightarrow \quad t = \operatorname{Arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \geq 0$$

Area Sinus Hyperbolicus

$$\sinh(t) = y$$
$$\frac{1}{2} \cdot \left(e^t - e^{-t}\right) = y \quad \Leftrightarrow \quad e^{2t} - 2ye^t - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(e^t\right)_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$
$$\Rightarrow \quad t = \operatorname{Arsinh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$



$$x \mapsto \cosh(x) \quad \ldots \quad \text{Kettenlinie}$$

Tangens Hyperbolicus

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Kotangens Hyperbolicus

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$
$$x \neq 0$$

Area Tangens Hyperbolicus

$$y = \tanh(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$
$$ye^{2x} + y = e^{2x} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} \cdot (y - 1) = -1 - y$$
$$e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y}$$
$$x = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) \quad \text{für } |y| < 1$$
$$\Rightarrow \quad \operatorname{Artanh}(y) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) \quad \text{für } |y| < 1$$

Area Kotangens Hperbolicus

$$y = \coth(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$
$$ye^{2x} - y = e^{2x} + 1$$
$$e^{2x}(y - 1) = y + 1$$
$$x = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{y + 1}{y - 1}\right) \quad \text{für } |y| > 1$$
$$\Rightarrow \quad \operatorname{Arcoth}(y) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{y + 1}{y - 1}\right) \quad \text{für } |y| > 1$$

4.10 Potenzreihen

$$\cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\left(1 + (-1)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\left(1 - (-1)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\Rightarrow \quad \operatorname{Artanh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\cosh(ix) = \cos(x)$$
$$\sinh(ix) = i \cdot \sin(x)$$
$$\tanh(ix) = i \cdot \tan(x)$$

$\underline{z \in \mathbb{C}:}$

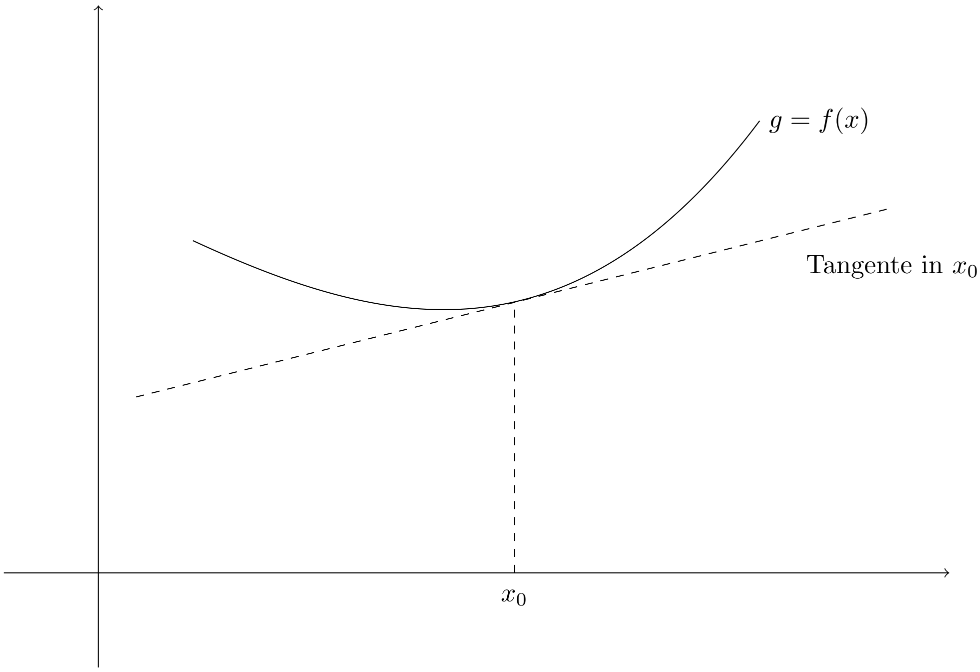
$$
\begin{aligned}
\cos(z) = \cos(x+iy) &= \cos(x)\cdot\cos(iy) - \sin(x)\cdot\sin(iy) = \\
&= \cos(x)\cdot\cosh(x) - i\cdot\sin(x)\cdot\sinh(y) \\
\sin(z) = \sin(x+iy) &= \sin(x)\cdot\cos(iy) + \cos(x)\cdot\sin(iy) = \\
&= \sin(x)\cdot\cosh(y) + i\cdot\cos(x)\cdot\sinh(y)
\end{aligned}
$$

5 Differentialrechnung von Funktionen einer Variablen

$$y = f(x)$$

$$G = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x \in D, \quad y = f(x)\Big\} \quad \ldots \quad \text{Funktionsgraph}$$

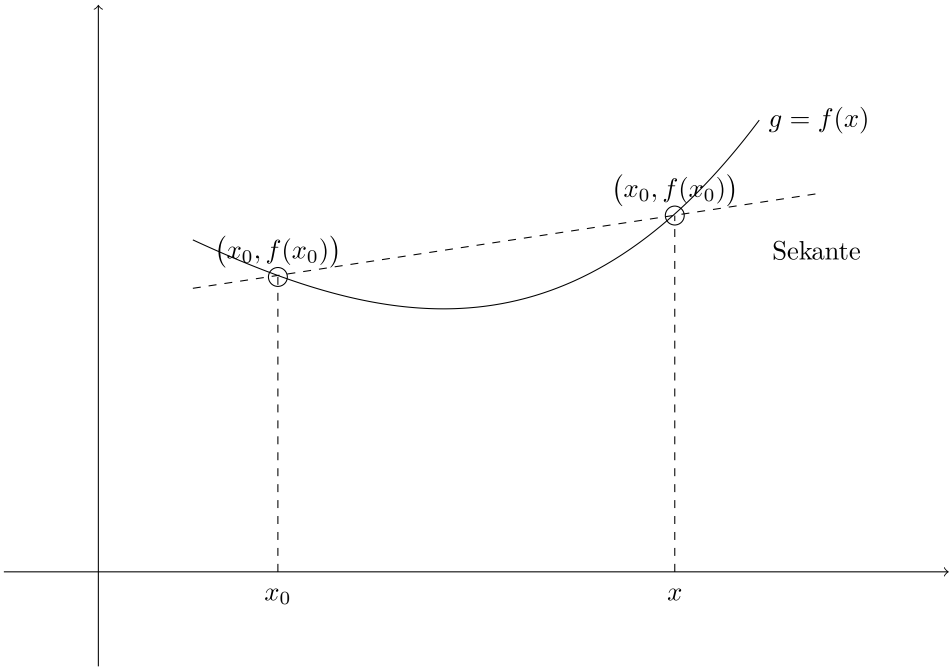
<ins>Gesucht</ins> ist die Tangente $y = k(x - x_0) + f(x_0)$ am Funktionsgraphen im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Dazu genügt es die Steigung k zu bestimmen.



Idee Bestimme k als Grenzwert der Steigung von Sekanten:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$k = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$



Erste Näherung Für $x \approx x_0 \;\Rightarrow\; f(x) \approx f(x_0) + k(x - x_0)$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D : \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \, |x - x_0| \tag{5.3}$$

Das heißt: der Fehler $f(x) - f(x_0) - k(x - x_0)$ soll kleinere Größenordnungen haben als $x - x_0$

$$\overset{(5.3)}{\Longrightarrow} \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - k \right| < \varepsilon \quad \leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = k$$

Die Tangente ist dadurch ausgezeichnet, dass der Abstand der Funktionsgraphen zur Tangente stärker gegen 0 geht als $|x - x_0|$.

Definition 5.1. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ und $x_0 \in (a, b)$, dann heißt f differenzierbar in x_0, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$ existiert.
f heißt differenzierbar auf (a, b), wenn f in jedem Punkt (a, b) differenzierbar ist.
Wenn f in x_0 differenzierbar ist, schreibt man: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$
Wenn f auf (a, b) differenzierbar ist, heißt $f' : \begin{cases} (a, b) & \to \quad \mathbb{R}, \text{ oder } \mathbb{C} \\ \quad x & \mapsto \quad f'(x) \end{cases}$ die erste Ableitung.

Schreibweise

$$f'(x_0) = Df(x_0) = \frac{df}{dx} f(x_0)$$

Beispiel 54. $s : t \to s(t)$, *Weg-Zeit-Funktion*
<u>*Gesucht:*</u> *Momentangeschwindigkeit*

$$\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} \quad \rightsquigarrow \quad \lim_{t \to t_0}\left(\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}\right) = v(t_0)$$

Bemerkung 123. *Einige Ableitungen:*

1. $f(x) = x^n$ *mit* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + ... + xx_0^{n-1} + x_0^{n-1}$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}\right) = n \cdot x_0^{n-1}$$

2. $f(x) = e^{cx}$ *mit* $x = x_0 + h$

$$\frac{e^{c(x_0+h)} - e^{cx_0}}{\underbrace{x - x_0}_{x_0+h-x_0=h}} = e^{cx_0} \cdot \underbrace{\frac{e^{ch}-1}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} c}$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = c \cdot e^{cx}$$

3. $f(x) = \ln(x)$ *mit* $x = x_0(1+h)$

$$\frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0} = \frac{\cancel{\ln(x_0)} + \ln(1+h) - \cancel{\ln(x_0)}}{x_0 \cdot h}$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{1}{x} \cdot \underbrace{\frac{\ln(1+h)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 1}\right) = \frac{1}{x}$$

4. $f(x) = \cos(x)$

$$\cos(x) - \cos(x_0) = -2\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$$\frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{x - x_0} = -\sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}$$

$$t =: \frac{x - x_0}{2}$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2it}\right) = \frac{1}{2i}\lim_{t\to 0}\left(\frac{e^{it} - 1}{t} - \frac{e^{-it} - 1}{t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\big(i - (-i)\big) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(t)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{x - x_0}\right) = -\lim_{x\to x_0}\left(\sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}\right) = -\sin(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

5. $f(x) = \sin(x)$

$$\sin(x) - \sin(x_0) = 2\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)$$

$$\frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0}\right) = \cos(x)$$

6. $f(x) = \cosh(x)$

$$\cosh(x) - \cosh(x_0) = 2\sinh\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{x - x_0}{2}\right)$$

$$\frac{\cosh(x) - \cosh(x_0)}{x - x_0} = \sinh\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \frac{\sinh\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sinh(t)}{t}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\cosh(x) - \cosh(x_0)}{x - x_0}\right) = \sinh(x)$$

7. $f(x) = \sinh(x)$

$$\sinh(x) - \sinh(x_0) = 2\cosh\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{x-x_0}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\sinh(x)-\sinh(x_0)}{x-x_0}\right) = \cosh(x)$$

Bemerkung 124. *Potenzreihendarstellung:*

$$\frac{\sinh(t)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\sinh(t)}{t}\right) = 1$$

Bemerkung 125. *Die Differenzierbarkeit von f in x_0 ist äquivalent zur Existenz einer Funktion $\varphi(x)$, die in x_0 stetig ist, sodass:*

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)\cdot(x-x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Die Existenz des Grenzwertes ist äquivalent zur Stetigkeit von φ in x_0.

Satz 5.1. *Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ differenzierbar in $x_0\in(a,b)$, dann ist f in x_0 stetig.*

Beweis. $f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\substack{\text{stetig}\\ \text{in } x_0}} + \underbrace{\varphi(x)}_{\substack{\text{stetig}\\ \text{in } x_0}} \cdot \underbrace{(x-x_0)}_{\substack{\text{stetig}\\ \text{in } x_0}}$ ist stetig in x_0 als Produkt zweier stetigen Funktionen plus einer konstanten Funktion. □

Bemerkung 126. *Die Umkehrung ist falsch. Aus Stetigkeit folgt nicht zwingenderweise Differenzierbarkeit. Die meisten stetigen Funktionen sind nicht differenzierbar.*

Satz 5.2. ***Rechenregeln für Ableitungen***
Seien $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ differenzierbar in $x_0\in(a,b)$, dann gilt:

a) Summenregel: $f\pm g$ ist differenzierbar in x_0 und:

$$\big(f\pm g\big)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

b) *Konstantenregel:* $c \in \mathbb{R}$, *oder* $\mathbb{C}$ *fest,* $c \cdot f$ *ist differenzierbar in* x_0 *und:*

$$\big(c \cdot f\big)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$$

c) *Produktregel:* $f \cdot g$ *ist differenzierbar in* x_0 *und:*

$$\big(f \cdot g\big)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

d) *Quotientenregel:* *Wenn* $g(x_0) \neq 0$, *dann ist* $\frac{f}{g}$ *differenzierbar in* x_0 *und:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}$$

Beweis.

a)

$$\frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \quad \text{existiert nach Voraussetzung}$$

b)

$$\frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

c)

$$\begin{aligned} &\frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_0) + f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f(x) \cdot \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \Rightarrow \quad &\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \right) = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0) \end{aligned}$$

d)

$$\frac{1}{g(x)}$$

$$g(x_0) \neq 0, \quad g \text{ stetig in } x_0 \quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in (a,b) : \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

$$\Rightarrow g(x) \neq 0$$

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x) \cdot g(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} \right) = -\frac{g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(f \cdot \frac{1}{g} \right)' (x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g'(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(-\frac{g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2} \right) =$$

$$= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}$$

□

Bemerkung 127. *Fortsetzung der Ableitung elementarer Funktionen:*

8. $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ *mit* $n \in \mathbb{N}$

$$f'(x) = -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{-n-1}$$

9. *(a)* $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *mit* $x \notin \left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}\right)$

$$f'(x) = \tan'(x) = \frac{\cos^2(x) - \big(-\sin^2(x)\big)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

(b) $g(x) = \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$$g'(x) = \cot'(x) = \frac{\big(-\sin^2(x)\big) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -\big(1 + \cot^2(x)\big)$$

10. *(a)* $f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

$$f'(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

(b) $g(x) = \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$

$$g'(x) = \frac{-\sinh^2(x) - \cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = -\frac{1}{\sinh(x)} = 1 - \coth^2(x)$$

Satz 5.3. *Sei $g : (a,b) \to (c,d)$ differenzierbar in $x_0 \in (a,b)$, $y_0 = g(x_0)$ und sei $f : (c,d) \to \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ differenzierbar in y_0, dann ist $f \circ g$ differenzierbar in x_0 und es gilt:*

$$\big(f \circ g\big)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad f\big(g(x)\big)' = \underbrace{f'\big(g(x)\big)}_{\substack{\text{äußere}\\ \text{Ableitung}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{innere}\\ \text{Ableitung}}} = Df\big(g(x)\big) \cdot Dg(x) = D\Big(f\big(g(x)\big)\Big) = D\big(f \circ g\big)(x)$$

Beweis.

$$f \circ g(x) - f \circ g(x_0) = \underbrace{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x)\big)}_{\substack{f(y)-f(y_0)=\varphi(x)\cdot(y-y_0)\\ \varphi \text{ stetig in } y_0}} = \varphi\big(g(x)\big) \cdot \big(g(x) - g(x_0)\big)$$

$$\text{mit } g(x) - g(x_0) = \psi(x) \cdot (x - x_0) \quad \ldots \quad \psi \text{ stetig in } x_0$$

$$\Rightarrow \quad f \circ g(x) - f \circ g(x_0) = \underbrace{\varphi\big(g(x)\big) \cdot \psi(x)}_{\text{stetig in } x_0} \cdot (x - x_0)$$

Das heißt: $f \circ g$ ist differenzierbar in x_0 und

$$\big(f \circ g\big)'(x_0) = \varphi(y_0) \cdot \psi(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0)$$

□

Bemerkung 128. *Fortsetzung der Ableitung elementarer Funktionen:*

11. $x^\alpha = \exp\big(\alpha \cdot \ln(x)\big)$ *mit* $\alpha \in \mathbb{C}$ *und* $x > 0$

$$\big(x^\alpha\big)' = \exp\big(\alpha \cdot \ln(x)\big) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

Satz 5.4. ***Umkehrregel***
Sei $f : (a,b) \to (c,d)$ bijektiv, f differenzierbar in $x_0 \in (a,b)$ und $f'(x_0) \neq 0$, dann ist $f^{(-1)} : (c,d) \to (a,b)$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ und es gilt:

$$\Big(f^{(-1)}\Big)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beweis. f sei differenzierbar in x_0:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \varphi(x) \cdot (x - x_0) \\ x &= f^{(-1)}(y) \\ x_0 &= f^{(-1)}(y_0) \\ y - y_0 &= \varphi\left(f^{(-1)}(y)\right) \cdot \left(f^{(-1)}(y) - f^{(-1)}(y_0)\right) \\ \Rightarrow \quad f^{(-1)}(y) - f^{(-1)}(y_0) &= \underbrace{\frac{1}{\varphi\left(f^{(-1)}(y)\right)}}_{\text{stetig in } y_0} \cdot (y - y_0) \\ \Rightarrow \quad \left(f^{(-1)}\right)'(y_0) &= \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 129. *Falscher Beweis für die Umkehrregel*

$$\begin{aligned} f^{(-1)}\big(f(x)\big) &= x \\ \left(f^{(-1)}\right)'\left(f^{(-1)}\right) \cdot f'(x) &= 1 \\ x &= x_0 \\ \left(f^{(-1)}\right)'(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

Bemerkung 130. *Fortsetzung der Ableitung elementarer Funktionen:*

12. $f(x) = \arctan(x)$

$$y = \arctan(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \tan(y)$$
$$f'(x) = \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(y)} = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

13. *(a)* $f(x) = \arcsin(x)$ *mit* $x \in [-1, 1]$ *und* $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$y = \arcsin(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sin(y)$$
$$f'(x) = \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(y)} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(b) $g(x) = \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

14. $f(x) = \operatorname{Arsinh}(x)$ *mit* $x = \sinh(y)$ *und* $\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$

(a) $f'(x) = \text{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(y)} = \frac{1}{\cosh(y)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ✓

(b) $f(x) = \text{Arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$$f'(x) = \text{Arsinh}(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{1+x^2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{1+x^2}+x}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \checkmark$$

15. (a) $f(x) = \text{Arcosh}(x)$ *mit* $y > 0$ *und* $x > 1$

$$y = \text{Arcosh}(x) \iff x = \cosh(y)$$

$$f'(x) = \text{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\cosh'(y)} = \frac{1}{\sinh(y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(b) $f(x) = \text{Arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

$$f'(x) = \text{Arcosh}(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2-1}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x^2-1}+x}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \checkmark$$

16. $f(x) = \text{Artanh}(x)$

$$y = \text{Artanh}(x) \iff x = \tanh(y)$$

$$f'(x) = \text{Artanh}'(x) = \frac{1}{\tanh'(y)} = \frac{1}{1-\tanh^2(y)} = \frac{1}{1-x^2}$$

Satz 5.5. *Logarithmische Ableitung*
Sei $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ stetig auf (a,b) und differenzierbar in $x_0 \in (a,b)$. Weiters sei $f(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Sei g eine stetige Funktion auf (a,b) mit $e^{g(x)} = f(x)$ für $x \in (a,b)$, dann ist g differenzierbar in x_0 und es gilt:

$$g'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

Beweis.

$$e^{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)}{f(x_0)} = \widetilde{f}(x)$$

$$\widetilde{f}(x_0) = 1$$

$$g(x) = g(x) - g(x_0) \quad \Rightarrow \quad g(x_0) = 0$$

Wegen der Stetigkeit von $\widetilde{f}$ in x_0 gibt es ein $\delta > 0$, sodass:

$$\forall x \in \big(x_0 - \delta, x_0 + \delta\big): \quad \Re\left(\widetilde{f}(x)\right) > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad g(x) - g(x_0) = \log\big(\widetilde{f}(x)\big)$$

$$\widetilde{f}(x) = u(x) + v(x)$$

$$u, v \text{ differenzierbar in } x_0 \quad \Rightarrow \quad g \text{ ist differenzierbar in } x_0$$

$$g(x) - g(x_0) = \frac{1}{2} \cdot \ln\big(u(x)^2 + v(x)^2\big) + i \cdot \arctan\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)$$

$$\frac{v}{u} = \tan(\varphi)$$

$$\varphi = \operatorname{Arg}(u + iv) = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$$

$$\overset{\text{Ketten-}\atop\text{regel}}{\Longrightarrow} \quad g'(x_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u(x_0)^2 + v(x_0)^2} \cdot \big(2u(x_0) \cdot u'(x_0) + 2v(x_0) \cdot v'(x_0)\big) +$$

$$+ i \cdot \frac{1}{1 + \frac{v(x_0)^2}{u(x_0)^2}} \cdot \frac{v'(x_0)u(x_0) - v(x_0)u(x_0)}{u(x_0)^2} =$$

$$= \frac{u(x_0)u'(x_0) + v(x_0)v'(x_0) + i \cdot \big(u(x_0)v'(x_0) - v(x_0)u'(x_0)\big)}{u(x_0)^2 + v(x_0)^2} =$$

$$= \frac{\big(u'(x_0) + iv'(x_0)\big) \cdot \cancel{\big(u(x_0) - iv(x_0)\big)}}{\big(u(x_0) + iv(x_0)\big) \cdot \cancel{\big(u(x_0) - iv(x_0)\big)}} = \frac{\widetilde{f}'(x_0)}{\widetilde{f}(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

□

Bemerkung 131. *Für reellwertige f ist der Satz offensichtlich*

$$\Big[g(x) = \ln\big(f(x)\big) \quad \ldots \quad \textit{Kettenregel}\Big]$$

Bemerkung 132. $L(f) := \frac{f'(x)}{f(x)}$ *... Logarithmische Ableitung*

$$L(f \cdot g) = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{f(x) \cdot g(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = L(f) + L(g)$$

$$f'(x) = L(f)(x) \cdot f(x)$$

5.1 Entwicklung der Differentialrechnung

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine funktion, dann heißt $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Maximum (beziehungsweise Minimum) von f, wenn:

$$\exists \delta > 0: \quad \forall x \in (a, b): \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lll} f(x) & \leq & f(x_0) \quad \text{Maximum} \\ f(x) & \geq & f(x_0) \quad \text{Minimum} \end{array}$$

x_0 heißt lokales Extremum.

Satz 5.6. *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b) und sei $x_0 \in (a,b)$ eine Extremstelle, dann gilt:*

$$f'(x_0) = 0$$

Beweis. o.B.d.A.: x_0 sei ein lokales Maximum.

$$\exists \delta > 0 : \quad \forall x \in (a,b) : \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Weil (a,b) offen ist, kann man $\delta > 0$ so wählen, dass $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a,b)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \underbrace{\lim_{x \to x_0^-} \left(\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} \right)}_{\geq 0} = \underbrace{\lim_{x \to x_0^+} \left(\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{>0}} \right)}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq f'(x_0) \leq 0$$
$$\Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$$

□

Bemerkung 133. *Auf abgeschlossenen Intervallen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$:*
Es können lokale Extrema in den Randpunkten auftreten und Satz 5.6 ist nicht anwendbar.
a sei lokales Maximum:

$$\exists \delta > 0 : \quad \forall x \in [a, a + \delta] : \quad f(a) \geq f(x)$$

rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \to a^+} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \leq 0$$

	lokales Maximum	*lokales Minimum*
a	$f'(a) \leq 0$	$f'(a) \geq 0$
b	$f'(b) \geq 0$	$f'(b) \leq 0$
$x_0 \in (a,b)$	$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$

Satz 5.7. *Satz von Rolle*
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gelte $f(a) = f(b)$, dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$, sodass:

$$f'(\xi) = 0$$

Beweis.

1. f ist konstant:

$$f(x) = f(a) = f(b) \quad \forall x \in [a,b]$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = 0, \quad \forall x \in [a,b] \quad \ldots \quad \text{jedes } \xi \in (a,b) \text{ ist geeignet}$$

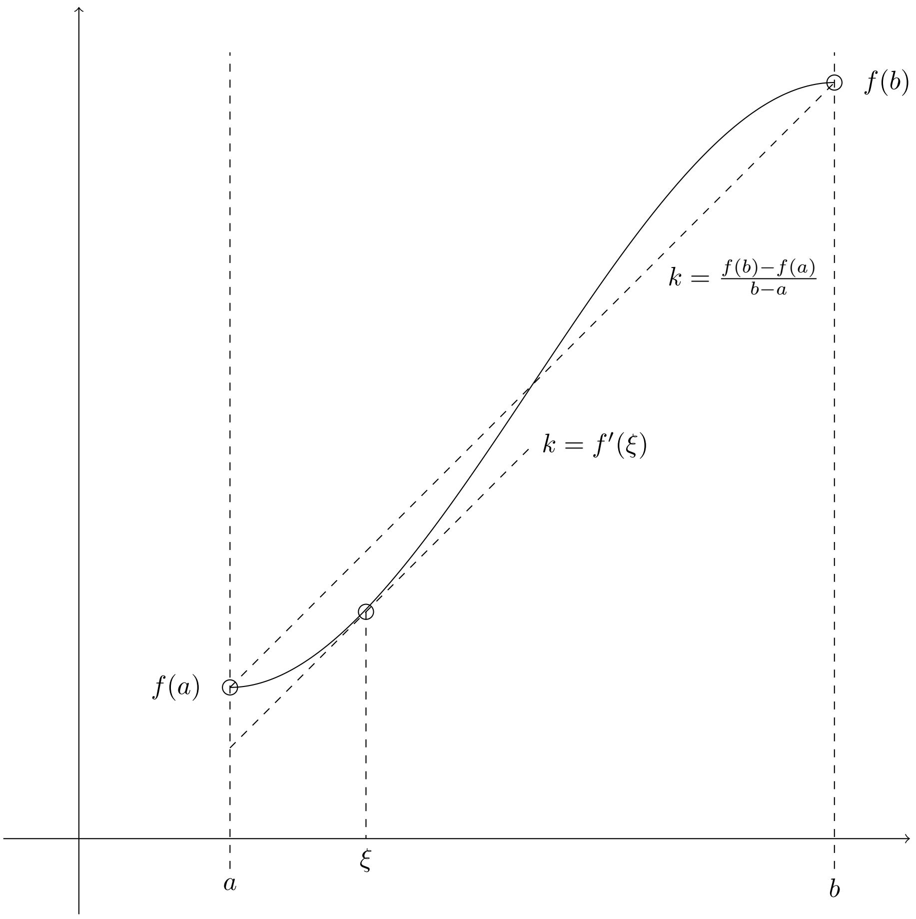
2. f ist nicht konstant:
   Dann nimmt f einen Wert größer oder kleiner als $f(a)$ an.
   Das heißt: Entweder gilt $f(x_{\max}) > f(a)$ oder $f(x_{\min}) < f(a)$
   Damit gilt: $x_{\max} \in (a, b)$ oder $x_{\min} \in (a, b)$ und nach Satz 5.6:

$$f'(x_{\max}) \text{ oder } f'(x_{\min}) = 0$$
$$\text{Wähle} \quad \xi = x_{\max} \quad \text{oder} \quad \xi = x_{\min}$$

□

Satz 5.8. ***Mittelwertsatz der Differentialrechnung***
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, sodass:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Beweis. Definiere die Hilfsfunktion $h(x) = f(x) - \frac{x-a}{b-a} \cdot \big(f(b) - f(a)\big)$
$h(a) = f(a)$ und $h(b) = f(b) - \frac{b-a}{b-a} \cdot \big(f(b) - f(a)\big) = f(a)$.

Also erfüllt $h(x)$ die Voraussetzungen des Satzes 5.7 und daher gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $h'(\xi) = 0 = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ und daher gilt:

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

□

Beispiel 55.

$$\textit{zu zeigen:} \quad \ln(1+x) < \operatorname{Arsinh}(x) \quad \textit{für } x > 0$$

$$f(x) = -\ln(1+x) + \operatorname{Arsinh}(x)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \underbrace{\frac{-\sqrt{1+x^2}+1+x}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}}_{} > 0 \qquad \textit{für } x > 0$$

$$\begin{aligned} 1+x &> \sqrt{1+x^2} \\ 1+2x+x^2 &> 1+x^2 \\ 2x &> 0 \end{aligned}$$

$$f(x) - \underbrace{f(0)}_{>0} = f(x) = \underbrace{(x-0)}_{>0} \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{>0} \quad \textit{für ein } \xi \in (0,x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) > 0$$

$$\textit{Das heißt:} \quad \ln(1+x) < \operatorname{Arsinh}(x)$$

Satz 5.9. *Monotonie von Funktionen*
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt:

1. *Wenn $\forall x \in (a,b)$: $f'(x) > 0$, dann ist f auf $[a,b]$ streng monoton wachsend.*
2. *Wenn $\forall x \in (a,b)$: $f'(x) < 0$, dann ist f auf $[a,b]$ streng monoton fallend.*
3. *Wenn $\forall x \in (a,b)$: $f'(x) \geq 0$, dann ist f auf $[a,b]$ monoton wachsend.*
4. *Wenn $\forall x \in (a,b)$: $f'(x) \leq 0$, dann ist f auf $[a,b]$ monoton fallend.*

Beweis.

1. $a \leq x_1 < x_2 \leq b \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{>0} > 0$ mit $\xi \in (x_1, x_2)$.
2. $a \leq x_1 < x_2 \leq b \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{<0} < 0$ mit $\xi \in (x_1, x_2)$.
3. $a \leq x_1 < x_2 \leq b \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} > 0$

Umkehrung: $x > x_0$

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{\geq 0}} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0^+} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{x \to x_0^-} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = f'(x_0) \geq 0$$

4. $a \leq x_1 < x_2 \leq b \;\Rightarrow\; f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{\leq 0} > 0$

   Umkehrung: $x > x_0$

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{\geq 0}} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0^+} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{x \to x_0^-} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = f'(x_0) \leq 0$$

□

Satz 5.10. ***Kriterium für Extremstellen***
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gelte $f'(x_0) = 0$, dann ist:

1. *x_0 ist ein Maximum, wenn für* $\begin{cases} x \in [a, x_0]: & f'(x) \geq 0 \\ x \in [x_0, b]: & f'(x) \leq 0 \end{cases}$

2. *x_0 ein Minimum, wenn für* $\begin{cases} x \in [a, x_0]: & f'(x) \leq 0 \\ x \in [x_0, b]: & f'(x) \geq 0 \end{cases}$

Beweis. 1. Aus $f'(x_0) \geq 0$ auf $[a, x_0]$ folgt nach Satz 5.9, dass f auf $[a, x_0]$ monoton wächst, also für $x \in [a, x_0]: \; f(x) \leq f(x_0)$.
Aus $f'(x) \leq 0$ auf $[x_0, b]$ folgt ebenso für $x \in [x_0, b]: \; f(x) \leq f(x_0)$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in [a, b]: \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \ldots \quad \text{Maximum in } x_0$$

2. Aus $f'(x_0) \leq 0$ auf $[a, x_0]$ folgt nach Satz 5.9, dass f auf $[a, x_0]$ monoton fällt, also für $x \in [a, x_0]: \; f(x) \geq f(x_0)$.
Aus $f'(x) \geq 0$ auf $[x_0, b]$ folgt ebenso für $x \in [x_0, b]: \; f(x) \geq f(x_0)$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in [a, b]: \quad f(x) \geq f(x_0) \quad \ldots \quad \text{Minimum in } x_0$$

□

Satz 5.11. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. f ist genau dann konstant, wenn $\forall x \in (a,b)$: $f'(x) = 0$.*

Beweis. „$\Rightarrow$"

$$\begin{aligned} f(x) &= c \\ \Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \\ f'(x) &= 0 \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$"

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) : \quad f(x) - f(a) &\overset{\substack{\text{Mittel-}\\\text{wert-}\\\text{satz}}}{=} (x-a) \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{=0} = 0 \quad \text{für } \xi \in (a,x) \\ \Rightarrow \quad f(x) &= f(a) \qquad \forall x \in [a,b] \end{aligned}$$

□

Satz 5.12. ***Charakterisierung der Exponentialfunktion durch eine Differentialgleichung***
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und gelte $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(0) = 1$, dann gilt:

$$f(x) = \exp(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} h(x) &= e^{-x} \cdot f(x) \quad \text{ ist differenzierbar auf } \mathbb{R} \\ h'(x) &= -e^{-x} \cdot f(x) + e^{-x} \cdot f'(x) = e^{-x} \cdot \underbrace{\big(f'(x) - f(x)\big)}_{=0} = 0 \\ &\overset{\text{Satz}}{\underset{5.11}{\Longrightarrow}} \quad h(x) = h(0) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ h(x) &= h(0) = 1 = e^{-x} \cdot f(x) \\ &\Rightarrow \quad f(x) = e^x \end{aligned}$$

□

Bemerkung 134.

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \\ f(x) &= c \\ \Rightarrow \quad f(0) &= c \cdot e^x \end{aligned}$$

Satz 5.13. ***Schrankensatz***
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ differenzierbar und gelte $\forall x \in [a,b] : \quad |f'(x)| \leq L$, dann ist f auf $[a,b]$ Lipschitz-stetig, genauer:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$$

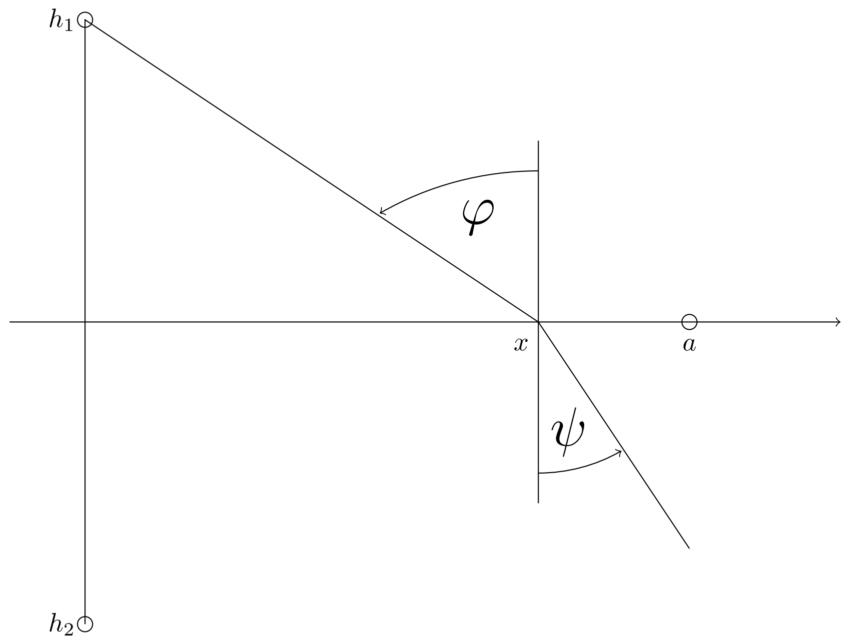
Beweis.

$$x_1, x_2 \in [a,b]$$
$$x_1 \neq x_2$$
$$|f(x_1) - f(x_2)| = c \cdot \big(f(x_1) - f(x_2)\big)$$
$$\text{für ein } c \in \mathbb{C} \text{ mit } |c| = 1$$
$$g(x) = \Re\big(c \cdot f(x)\big)$$
$$\text{Relle Funktion} \longrightarrow \text{Mittelwertsatz anwendbar}$$

$$\Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| = \Re\big(c \cdot f(x_1)\big) - \Re\big(c \cdot f(x_2)\big) = g(x_1) - g(x_2) \overset{\substack{\text{Mittel-}\\\text{wert-}\\\text{satz}}}{=}$$
$$\overset{\substack{\text{Mittel-}\\\text{wert-}\\\text{satz}}}{=} (x_1 - x_2) \cdot g'(\xi) = |x_1 - x_2| \cdot |g'(\xi)| = |x_1 - x - 2| \cdot \Re\,|c \cdot f'(\xi)| \leq$$
$$\leq |x_1 - x_2| \cdot |f'(\xi)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$$
$$\text{mit } g'(\xi) = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$$

□

Beispiel 56. ***Berechnungsgesetz von Snellius***
Licht sucht den schnellsten Weg von einem Punkt zum nächsten. Unterschiedliche Lichtgeschwindgikeiten v_1 und v_2 in den verschiedenen Medien.


h_1
φ
x
a
ψ
h_2

$$f(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \sqrt{h_1^2 + x^2} + \frac{1}{v_2} \cdot \sqrt{(a-x)^2 + h_2^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{h_1^2 + x^2}} \cdot 2x + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{(a-x)^2 + h_2^2}} \cdot \big(-2(a-x) \big) =$$

$$= \frac{1}{v_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + h_2^2}}$$

$$f'(0) = -\frac{a}{v_2\sqrt{a^2 + h_2^2}} < 0$$

$$f'(a) = \frac{a}{v_1 \cdot \sqrt{a^2 + h_1^2}} > 0$$

Zwei lokale Maxima am Rand $\rightarrow$ dazwischen muss es ein Minimum geben

f' ist eine stetige Funktion, daher muss es nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle x_0 geben

$$\frac{1}{v_1} \cdot \underbrace{\frac{x_0}{\sqrt{h_1^2 + x_0^2}}}_{\sin(\varphi)} = \frac{1}{v_2} \cdot \underbrace{\frac{a - x_0}{\sqrt{(a-x_0)^2 + h_2^2}}}_{\sin(\psi)} \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\psi)}$$

$$f''(x) =$$

$$= \frac{1}{v_1} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{h_1^2 + x^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}}}{h_1^2 + x^2} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{(-1) \cdot \sqrt{h_2^2 + (a-x)^2} - (a-x) \cdot \frac{-(a-x)}{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}}}{h_2^2 + (a-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{v_1} \cdot \frac{h_1^2}{(h_1^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{h_2^2}{\big(h_2^2 + (a-x)^2\big)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

$$\Rightarrow \quad f' \textit{ ist } \uparrow$$

$$\Rightarrow \quad \exists! \textit{ Nullstelle}$$

Satz 5.14. ***Verallgemeinerter Mittelwertsatz***
Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$
differenzierbar und gelte: $\forall x \in (a,b) : \;\; g'(x) \neq 0$, dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Beweis.

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot \big(g(x) - g(a)\big)$$

$$\text{aus } g'(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad g(b) \neq g(a)$$

$$g(b) - g(a) = (b-a) \cdot g'(\xi) \neq 0$$

$$h(a) = f(a)$$

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot \big(g(b) - g(a)\big) = f(a)$$

$$\overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \quad \exists \xi \in (a,b) : \quad h'(\xi) = 0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot g'(\xi)$$

$\square$

Satz 5.15. ***Regel von de l'Hospital***
Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gelte $\forall x \in (a,b): \; g'(x) \neq 0$

1. *Wenn $\lim_{x\to a^+} \big(f(x)\big) = \lim_{x\to a^+} \big(g(x)\big) = 0$ und $\lim_{x\to a^+} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right) = A$,*
   dann existiert auch $\lim_{x\to a^+} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ und ist gleich A.

2. *Wenn $\lim_{x\to a^+} \big(f(x)\big) = \lim_{x\to a^+} \big(g(x)\big) = \infty$ und $\lim_{x\to a^+} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right) = A$,*
   dann existiert auch $\lim_{x\to a^+} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ und ist gleich A.

Beweis.

1.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{für ein } \xi \in (a,x)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in (a, a+\delta): \quad \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \varepsilon$$

$$\text{Wähle } x \in (a, a+\delta) \quad \Rightarrow \quad \xi \in (a.a+\delta)$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to a^+} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = A$$

2.

$$\lim_{x\to a^+}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)=A \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0: \quad \forall x\in(a,a+\delta): \quad \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$x,y\in(a,a+\delta)$$

$$x\neq y: \qquad \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

für ein ξ zwischen x und y $\quad\Rightarrow\quad \xi\in(a,a+\delta)$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\cdot\frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{f(x)}}$$

halte y fest $\quad\Rightarrow\quad f(y),g(y)$ auch fest, dann gilt:

$$\lim_{x\to a^+}\left(\frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{f(x)}}\right)=1$$

Es gibt also ein $\delta^*>0,$ sodass $\forall x\in(a,a+\delta^*):$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Wähle $\delta=\delta^* \quad\Rightarrow\quad x\in(a,a+\delta^*):$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|\leq\underbrace{\left|\underbrace{\frac{f(x)-f(y)}{g(x)+g(y)}}_{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}-A\right|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}+\underbrace{\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\Rightarrow\quad\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\quad\lim_{x\to a^+}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=A$$

$\square$

Bemerkung 135. ***Falscher Beweis zu Satz 5.15, Punkt 2***

$$\widetilde{f} = \frac{1}{f(x)}$$
$$\widetilde{g} = \frac{1}{g(x)}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\widetilde{g}(x)}{\widetilde{f}(x)}$$
$$\lim_{x \to a^+} \left(\widetilde{f}(x)\right) = 0 = \lim_{x \to a^+} \left(\widetilde{g}(x)\right)$$
$$\Rightarrow \quad \textit{Situation wie in Punkt 1:} \quad \frac{0}{0}$$
$$\textit{Wenn} \quad \lim_{x \to a^+} \left(\frac{\widetilde{g}'(x)}{\widetilde{f}'(x)}\right) = A$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to a^+} \left(\frac{\widetilde{g}(x)}{\widetilde{f}(x)}\right) = A = \lim_{x \to a^+} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$$
$$\widetilde{g}'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$
$$\widetilde{f}'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x^2)}$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to a^+} \left(\frac{\widetilde{g}'(x)}{\widetilde{f}'(x)}\right) = A = \underbrace{\lim_{x \to a^+} \left(\frac{g'(x)}{f'(x)}\right)}_{\frac{1}{A}} \cdot \underbrace{\cancel{\lim_{x \to a^+} \left(\frac{f(x)^2}{g(x)^2}\right)}}_{\substack{A^2 \\ \textit{undefinierter Ausdruck}}} = A$$

Die Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben.
(Galileo Galilei)