Definition

- Folge von unabhängiger identisch verteilter [[Zufallsvariable]] (i.i.d)
  - konvergiert gegen [[Erwartungswert]]

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow{L^2} \mu.$$

haben wir

$$E(|\bar{X}_n - \mu|^2) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}(X_1).$$

  -

Beweis 1

Da $E(\overline{X}_n) = \mu$ gilt

$$\begin{aligned} E(|\overline{X}_n - \mu|^2) &= \mathrm{Var}(\overline{X}_n) \\ &= \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) \\ &= \frac{1}{n}\mathrm{Var}(X_1). \end{aligned}$$

-

Beweis 2

- besitzt ein Zufallsexperiment eine gewisse [[Wahrscheinlichkeit]]
  - Mittel der Ergebnisse konvergiert gegen Wahrscheinlichkeit
- Beweis mittels [[Kovarianz und Korrelation]]

Beispiel

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unkorreliert und man nehme an: $X_i \sim B_{1,p}$.

Für den Mittelwert der Stichprobe $\bar{X} = \frac{S_n}{n}$ bekommen wir

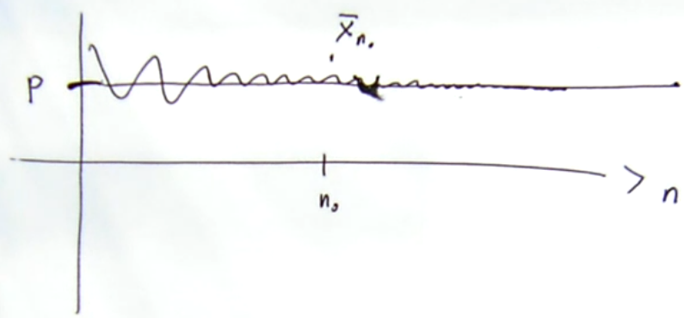
$$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(S_n) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Mit der Markov-Ungleichung bekommen wir

$$P(|\bar{X} - p| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(\bar{X})}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Daher können wir für jedes $\varepsilon > 0$ die Wahrscheinlichkeit $P(|\bar{X} - p| > \varepsilon)$ beliebig klein machen!

Dies ist ein Spezialfall des Gesetzes der großen Zahlen.



$$E\bar{X}_n = p \qquad \forall n$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)\right)$$