Definition

- Das Hauptziel der Wahrscheinlichkeitstheorie ist es, Ereignissen eine "Wahrscheinlichkeit" zuzuordnen.

  Das bedeutet, dass wir eine Funktion P suchen mit

  $$A \mapsto P(A) \in [0, 1].$$

  Ist zum Beispiel

  $$P(A) = 0.3$$

  dann sagen wir entweder, "A hat Wahrscheinlichkeit 0.3" oder "A hat 30% Wahrscheinlichkeit".

Logische und Technische Anforderungen

- $$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B).$$
- σ-Algebra
  - Klasse von Ereignissen A'
  - abgeschlosses Mengensystem bezüglich Mengenoperationen

Wahrscheinlichkeitsmaß

- Abbildung P: $A' -> [0, 1]$
  - erfüllt folgende Voraussetzungen
    - Normierung N
      - P(Ω)=1
    - Additivität A
      - Sind $(A_i : i \geq 1)$ paarweise disjunkt, so gilt

        $$P\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} P(A_i).$$
      - Summe aller Wahrscheinlichkeiten = Wahrscheinlichkeit, dass eines der Ereignisse eintritt
- Tripel (Ω, A', P) - Wahrscheinlichkeitsraum
- Frequentistische Interpretation
  - Experiment wird unendlich oft wiederhold

$$\frac{\text{Häufigkeit mit der } A \text{ eintritt}}{\text{Anzahl der Wiederholungen}} \to P(A).$$

Axiome von Kolmogorov

Satz

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B, A_1, A_2, \ldots$ Ereignisse in $\mathcal{A}$. Dann gelten unter anderem:

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$;
3. $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$;
4. $P(\bigcup_{i \geq 1} A_i) \leq \sum_{i \geq 1} P(A_i)$;
5. $A_n \nearrow A \Longrightarrow P(A_n) \to P(A)$;
6. $A_n \searrow A \Longrightarrow P(A_n) \to P(A)$.

- 3. ist die Monotonie;
- 4. ist die σ-Subadditivität;
- 5. ist die Stetigkeit von unten;
- 6. ist die Stetigkeit von oben.