

Definition

Sei $(X_n: n \geq 1)$ eine Folge von ZVen mit Verteilungen F_n . Sei X eine ZV mit Verteilung F . Wir nehmen an, dass F stetig ist. Wir sagen, dass X_n zu X in Verteilung konvergiert falls

$$F_n(x) \rightarrow F(x) \quad \forall x.$$

Kurz: $X_n \xrightarrow{d} X$.

Beispiele

- Gumbel Verteilung

- zur Modellierung von Extremereignissen

Seien X_i i.i.d. ZVen mit $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ und man definiere $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ das Maximums einer Zufallsstichprobe. Zeige

$$Z_n := M_n - \frac{\log n}{\lambda} \xrightarrow{d} Z,$$

wobei Z Verteilung $G(x) := e^{-e^{-\lambda x}}$ besitzt. Man G Gumbel Verteilung und sie wird zur Modellierung von Extremereignissen verwendet.

– $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ und $Z_n = M_n - \frac{\log n}{\lambda}$

$$P(Z_n \leq x) \xrightarrow{d} G(x)$$

$$\begin{aligned} P(M_n \leq x + \frac{\log n}{\lambda}) &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x + \frac{\log n}{\lambda}) \\ &= \left(1 - e^{-\lambda(x + \frac{\log n}{\lambda})}\right)^n = \left(1 + \frac{e^{-\lambda x}}{n}\right)^n \rightarrow e^{-e^{-\lambda x}} \end{aligned}$$

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$