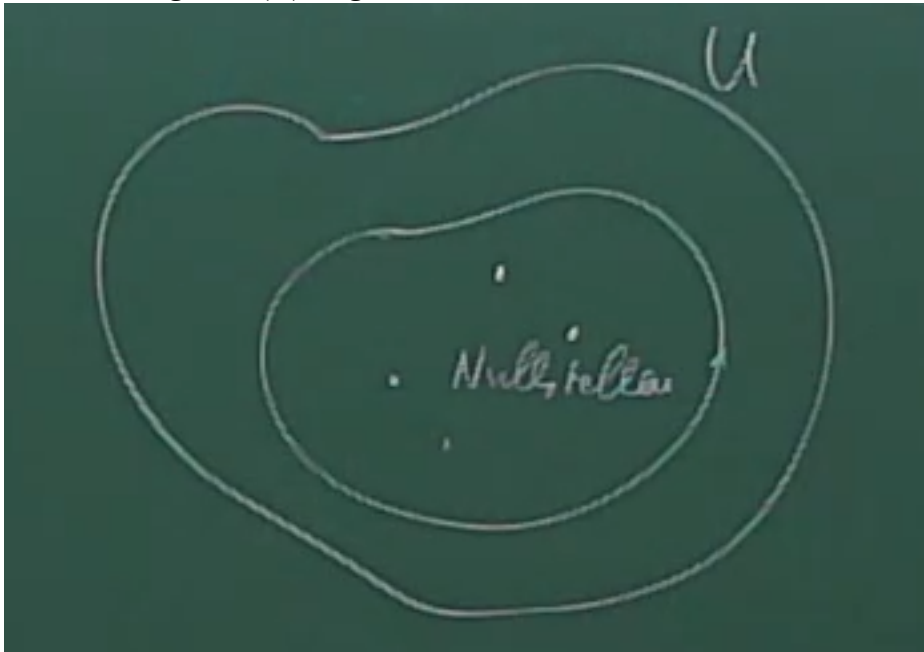
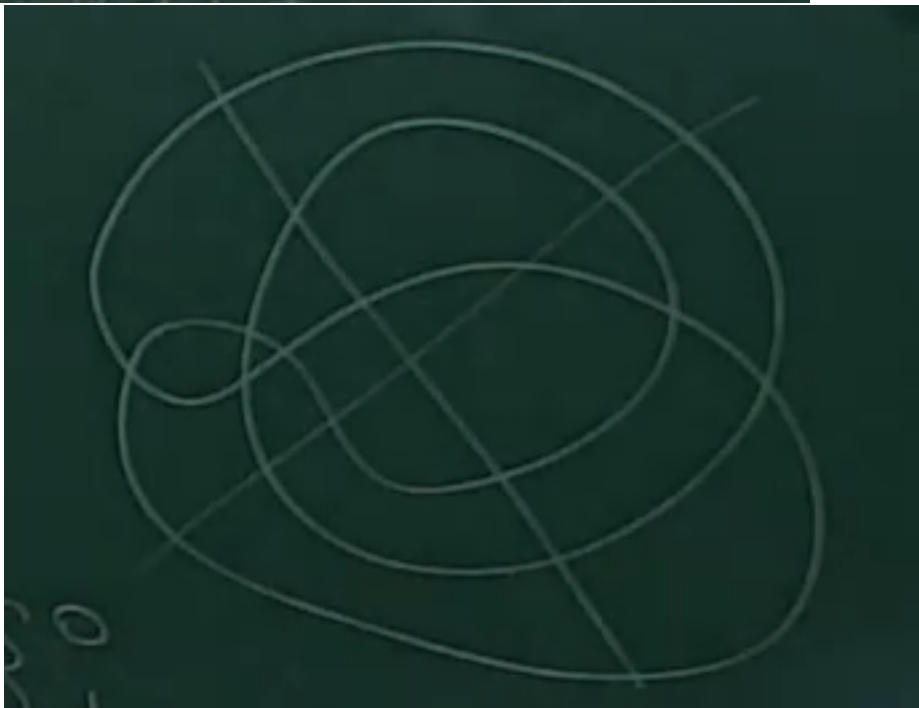


Zählen von Nullstellen

- gesucht # Nullstellen innerhalb von C (Vielfachheit gezählt)
- U sternförmig, $f \in H(U)$, C geschlossen in U



$f \in H(U)$ $2d_C(z) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$



Sei z_0 eine Nullstelle der Ordnung m von f . Dann gilt

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \text{ mit } g(z_0) \neq 0.$$

Daraus ergibt sich

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z)$$

und weiter

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

also

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = m = \operatorname{ord}_{z_0}(f).$$

Es gilt daher

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \operatorname{Ind}_{f(C)}(0) = \sum_n \operatorname{ord}_{z_n}(f) \operatorname{Ind}_C(z_n).$$

•

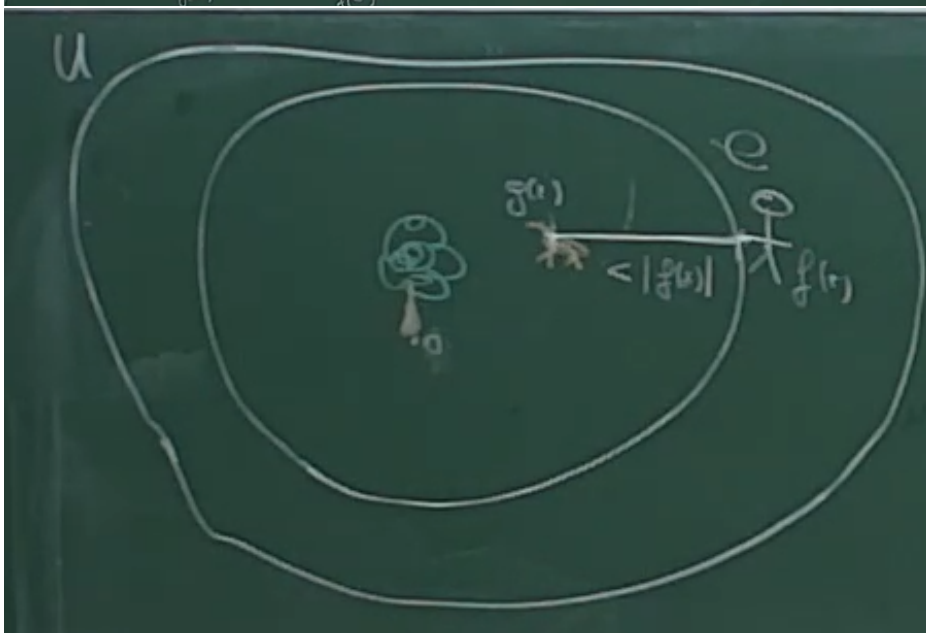
- Satz vom logarithmischen Residuum

$$\# \text{ Nullstellen von } f \text{ innerhalb von } C - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \# \text{ Umkreis von } f(C) \text{ um } 0.$$

- Satz von Rouché

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in C$$

$$\Rightarrow \operatorname{ord}_{f(C)}(0) = \operatorname{ord}_{g(C)}(0), \text{ wenn } \forall z \in C: |f(z) - g(z)| < |f(z)|$$



- Beispiel

Bsp. $p(z) = z^{2022} + 16z^{1492} + 18$

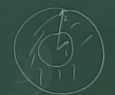
Es gibt keine Nullstelle mit $|z| < 1$

$f(z) = 18$ $g(z) = p(z)$ $|f(z) - g(z)| = |z^{2022} + 16z^{1492}| < |z|^{2022} + 16|z|^{1492} = 17 < 18 = |f(z)|$

*

Alle Nullstellen besitzen $|z| < 2$

$|z| < 2$ hat eine Nullstelle
 $f(z) = z^{2012}$ da 2012 ist $\rightarrow \infty$
 $g(z) = p(z)$

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} - \frac{f(z)}{g(z)} \right| = \left| \frac{z^{2012}}{16z^{1492} + 18} \right| = \frac{16 \cdot |z|^{1492}}{16 \cdot 2^{1492} + 18} = \frac{2^{1492}}{2^{1492} + 18} < \frac{2^{1492}}{2^{1492}} = 1$$


*

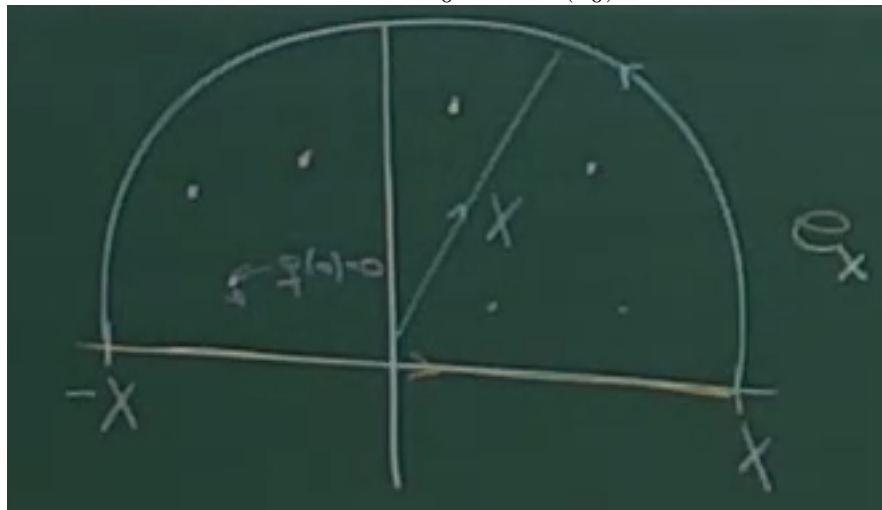
Bestimmung von Integralen

• rationale Funktionen

- $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, für die gilt
 - * p, q Polynome
 - * $\deg(p) \leq \deg(q) - 2$
 - * q hat keine reellen Nullstellen

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{q(z)=0 \\ \operatorname{Im}(z) > 0}} \operatorname{Res} R(z)$$

- * Summe der Residuen von Polen z_0 mit $\operatorname{Im}(z_0) > 0$



*

- Beispiel:

* Pol erster Ordnung

$$\begin{aligned} \text{Bsp: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+2x+2)(x^2+6x+13)} dx \\ x_{1,2} = -1 \pm i, \quad x_{3,4} = -3 \pm \sqrt{5}i \\ \text{Res}_{z=-1+i} \frac{z^2+1}{(z^2+2z+2)(z^2+6z+13)} = \frac{z^2+1}{(z+2)(z^2+6z+13)} \Big|_{z=-1+i} = \frac{-2i+1}{(-1-i)(-6+6i+13)} = \frac{-2i+1}{(7+4i)(-1-i)} = \frac{(-2i+1)(-1-i)}{(49-16)} = \frac{(1-2i)(-1-i)}{33} = \frac{-1-2i+2i+2}{33} = \frac{1}{33} \\ \text{Res}_{z=-3+\sqrt{5}i} \frac{z^2+1}{(z^2+2z+2)(z^2+6z+13)} = \frac{z^2+1}{(z^2+2z+2)(z+6)} \Big|_{z=-3+\sqrt{5}i} = \frac{5-12i+1}{(5-12i+6+4i+2)(-6+4i+6)} = \frac{6-12i}{(1-8i)(4i)} = \frac{(6-12i)(-i)}{65} = \frac{6i-12}{65} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \left(\frac{1}{33} + \frac{6i-12}{65} \right) = 2\pi i \left(\frac{65+198i-726i-1320}{4225} \right) = 2\pi i \left(\frac{-1255-561i}{4225} \right) = \frac{10\pi}{13} \end{aligned}$$

* Pol höherer Ordnung

$$\text{Bsp: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = 2\pi i \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$x_{1,2} = \pm i$$

$$\text{Res}_{z=i} \frac{z^2}{(z^2+1)^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2(z-i)}{(z^2+1)^2} \right) \bigg|_{z=i} = \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{(z+i)^2} \right) \bigg|_{z=i} = \frac{2z(z+i) - z^2 \cdot 2(z+i)}{(z+i)^3} \bigg|_{z=i} = \frac{2i(2i) - (-1) \cdot 2}{(2i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i}$$

- rationale Funktionen in Winkelfunktionen

- $R(\cos(x), \sin(x))$

- * Winkelfunktionen durch komplexe Äquivalent ersetzen

- ♦ $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

- ♦ $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

- * e^{ix} substituieren mit z

$$z = e^{ix}$$

$$dz = ie^{ix} dx$$

$$dx = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\cos(x), \sin(x)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} R\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) dx = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{dz}{iz} = 2\pi i \sum_{\substack{|z|<1 \\ z \neq a}} \text{Res}_{z=a} Q(z)$$

$Q(z) = R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{1}{iz}$

- Beispiel:

$$\text{Bsp: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{5+4\cos(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{5+2(e^{ix} + e^{-ix})} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{5+2(z + \frac{1}{z})} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2 + 5z + 2}$$

$$2z^2 + 5z + 2 = 0 \quad z_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 3}{4} \quad \begin{matrix} z_1 = -\frac{1}{2} \\ z_2 = -2 \end{matrix}$$

$$\text{Res}_{z=-\frac{1}{2}} \frac{1}{2z^2 + 5z + 2} = \frac{1}{4 + 5} = \frac{1}{9}$$

- *

- rationale Funktionen mal e^{itx}

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} R(x) dx$$

- $R(x)$ mit $\deg(p) < \deg(q) - 2$

- $t = 0$

- * $e^{itx} = e^0 = 1 \implies$ rationale Funktion ohne e^{itx}

- $t > 0$

- * obere Halbkreis wird integriert

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \mathcal{R}(x) dx = 2\pi \sum_{\substack{\text{Pol} \\ \mathcal{R}(z) \neq 0}} \underset{\mathcal{R}(z) \neq 0}{\text{Res}} e^{itz} \mathcal{R}(z)$$

*

– $t < 0$

* untere Halbkreis wird integriert

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \mathcal{R}(x) dx = -2\pi \sum_{\substack{\text{Pol} \\ \mathcal{R}(z) \neq 0}} \underset{\mathcal{R}(z) \neq 0}{\text{Res}} e^{itz} \mathcal{R}(z)$$

*

– \mathcal{R} reell \Rightarrow Konjugation von Integral für $t > 0 =$ Integral für $t < 0$

– Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{Bsp: } \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) \mathcal{R}(x) dx &= \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \mathcal{R}(x) dx \right) \\ \text{für } t > 0: \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+1} dx &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{e^{itz}}{z^2+1} = 2\pi i \frac{e^{it \cdot i}}{2i} = \pi e^{-t} \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned} \text{für } t < 0: \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+1} dx &= -2\pi i \operatorname{Res}_{z=-i} \frac{e^{itz}}{z^2+1} = -2\pi i \frac{e^{it \cdot (-i)}}{-2i} = \pi e^{-t} \\ \text{für } t < 0: \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{itx}}{(x^2+1)^2} dx &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{x e^{itz}}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \frac{d}{dz} \left(\frac{z e^{itz}}{(z^2+1)^2} \right) \Big|_{z=i} = 2\pi i \frac{(e^{it \cdot i} + i e^{it \cdot i} \cdot i) \cdot i - z e^{it \cdot i} \cdot 2(z^2+1)}{(z^2+1)^3} \Big|_{z=i} \\ &= 2\pi i \frac{(e^{-t} + i e^{-t} \cdot i) \cdot i - i e^{-t} \cdot 2(i^2+1)}{(i^2+1)^3} = 2\pi i \frac{(e^{-t} - e^{-t}) \cdot i - i e^{-t} \cdot 2(-1+1)}{0} = 2\pi i \frac{0}{0} \end{aligned}$$

*

[[Laplace Transformation]]

[[Residuensatz]]