

Definition

Zwei Zufallsvariablen X und Y heißen unabhängig, falls

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

für alle infrage kommenden Mengen A und B (z.B. Intervalle).

Man kann zeigen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn

$$\begin{aligned} F^{XY}(x, y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= P(X \leq x)P(Y \leq y) = F^X(x)F^Y(y). \end{aligned}$$

-
- [[Zufallsvariable]] sind unabhängig, wenn

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f^{X_i}(x_i),$$

falls eine Dichte existiert.

$$p_{k_1, \dots, k_n} = \prod_{i=1}^n p_{k_i}^{X_i},$$

falls eine PMF existiert.

Sind die Zufallsvariablen X_n unabhängig, so sind auch Funktionen $g_n(X_n)$ unabhängig.

-
- [[Erwartungswert]] von unabhängigen ZV

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Beispiele

- Sendestation

Ein Empfänger bekommt Signale von 3 Sendestationen. Die Signalstärke X_j der j -ten Station folgt einer Verteilung F_j , also $P(X_j \leq x) = F_j(x) = 1 - e^{-\lambda_j x}$, $x \geq 0$. Dabei ist $\lambda_1 = 1.3$, $\lambda_2 = 2.1$ und $\lambda_3 = 0.8$. Man kann annehmen, dass die Signalstärken der Stationen voneinander unabhängig sind. Um das Signal korrekt zu verarbeiten, braucht der Empfänger von mindestens einem Sender eine Signalstärke > 0.5 . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Signal korrekt verarbeitet wird?

Signalstärke

X_j ... Signalstärke Station $j = 1, 2, 3$

$$F_j(x) = P(X_j \leq x) = 1 - e^{-\lambda_j x} \quad x \geq 0$$

$$P(\text{mindestens ein } X_j > 0.5) =$$

$$1 - P(\text{kein } X_j > 0.5) =$$

$$1 - P(X_1 \leq 0.5 \cap X_2 \leq 0.5 \cap X_3 \leq 0.5) =$$

$$1 - P(X_1 \leq 0.5) P(X_2 \leq 0.5) P(X_3 \leq 0.5) =$$

$$1 - (1 - e^{-\lambda_1 \cdot 0.5}) (1 - e^{-\lambda_2 \cdot 0.5}) (1 - e^{-\lambda_3 \cdot 0.5}) = ?$$

- Niederschlagsmenge

An einem Ort ist die maximale 3-stündige Niederschlagsmenge innerhalb eines Jahres Weibull-verteilt, d.h. die CDF ist gleich

$$F(x) = 1 - e^{-(\lambda(x-\mu))^k}, \quad x \geq \mu.$$

Angenommen wir wüßten, dass $\lambda = 1/10$, $k = 2$ und $\mu = 15$. Weiters sind diese extremen Niederschlagsmengen voneinander unabhängig. Wir suchen einen Wert z derart, dass die Wahrscheinlichkeit innerhalb der nächsten 100 Jahren z zu überschreiten, kleiner als 5% ist.

Extremniederschlag

$$X_j \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} F$$

$$F(x) = 1 - e^{-(\lambda(x-\mu))^k}, \quad x \geq \mu$$

$$= 1 - e^{-\left(\frac{1}{10}(x-15)\right)^2}$$

$$P\left(\max_{1 \leq j \leq 100} X_j \geq z\right) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow$$

$$P\left(\max_{1 \leq j \leq 100} X_j < z\right) \geq 0.95$$

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{100} \{X_j < z\}\right) = (F(z))^{100} = \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{10}(z-15)\right)^2}\right)^{100}$$

$$\stackrel{!}{=} 0.95$$

$$\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{10}(z-15)\right)^2}\right)^{100} \stackrel{!}{=} 0.95$$

$$\log\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{10}(z-15)\right)^2}\right) = \frac{\log 0.95}{100}$$

$$= -e^{-\left(\frac{1}{10}(z-15)\right)^2} + 1$$

$$z = 10 \sqrt{-\log\left(1 - e^{\frac{(\log 0.95)/100}{-1}}\right)} + 15$$

Alternative Herleitung für [[Diskrete Verteilungen]]

- [[Binomialverteilung]] hergeleitet

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige ZVen mit $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1 - p$.

Sei $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Was ist dann $P(S_n = k)$?

$$P(S_n = k) = P(\{X_1 = 1, \dots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_n = 0\} \cup$$

$$\dots \cup \{X_1 = 0, \dots, X_{n-k} = 0, X_{n-k+1} = 1, \dots, X_n = 1\})$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- [[Geometrische Verteilung]] hergeleitet

Seien X_1, X_2, \dots iid ZVen, die die Werte 0 und 1 annehmen. Angenommen $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1 - p$. Sei T der erste Zeitpunkt in welchem die Zahl 1 vorkommt. Bestimme $P(T = k)$.

$$\begin{aligned}
 P(T \leq k) &= P(X_1=0, X_2=0, \dots, X_{k-1}=0, X_k=1) \\
 &= \underbrace{P(X_1=0)}_{1-p} \underbrace{P(X_2=0)}_{1-p} \dots \underbrace{P(X_{k-1}=0)}_{1-p} \underbrace{P(X_k=1)}_p \\
 &= (1-p)^{k-1} p = q^{k-1} p \quad (q = 1-p)
 \end{aligned}$$