

## Satz von Gauß in der Ebene

- Sei  $C$  der Rand eines Bereichs  $B$ , der Normalbereich bezüglich beider Achsen ist

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \underline{f}_1(x) \leq y \leq \underline{f}_2(x) \right\} \cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \underline{g}_1(y) \leq x \leq \underline{g}_2(y) \right\}$$

- Rand von  $B$

$$C = \partial B$$

↑  
Rand

$$\oint_{\partial B} P dx + Q dy = \iint_B \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

- muss vollständig definiert sein
- Bereich darf keine Löcher haben

- Leibnizsche Sektorformel

$$\text{Fläche von } B = \frac{1}{2} \oint_{\partial B} -y dx + x dy$$

- Beispiel:

- Integralsatz von Gauß nicht möglich, da undefiniert im Ursprung

$$\begin{aligned} \text{Bsp } B &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \right\} \\ \oint_{\partial B} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{-R \sin(t) (-R \cos(t)) + R \cos(t) (R \sin(t))}{R^2} dt = 2\pi \\ x &= R \cos(t) \\ y &= R \sin(t) \\ dx &= -R \sin(t) dt \\ dy &= R \cos(t) dt \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{-y}{x^2 + y^2} &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (-x^2 - y^2) = \frac{-x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2 + y^2} &= \frac{-1(x^2 + y^2) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \\ \oint_{\partial B} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} &= 2\pi + \iint_B \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 \\ \text{Mittels der Definition kann} & \\ \text{das Vektorfeld ist } & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \end{aligned}$$

## Integralsatz von STOKES

- Vektorfeld von Fläche mit Rand bestimmen

$$\oint_{\partial B} P dx + Q dy + R dz = ? = \iint_B \left( ? dy dz + ? dz dx + ? dx dy \right)$$

- Herleitung

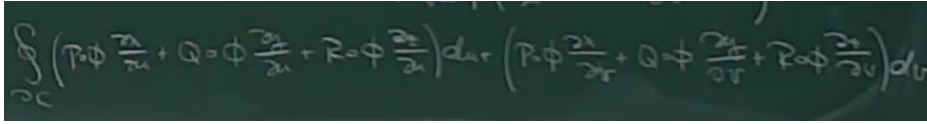
$$\begin{aligned} \phi: \quad & x = x(u, v) \\ & y = y(u, v) \\ & z = z(u, v) \end{aligned}$$

- Variablensubstitution

- \*  $x = x(u, v)$
- \*  $y = y(u, v)$
- \*  $z = z(u, v)$
- \*  $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$

$$* dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

$$* dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$



$$\oint_C \left( P \frac{\partial x}{\partial u} + Q \frac{\partial x}{\partial v} + R \frac{\partial x}{\partial w} \right) du + \left( P \frac{\partial y}{\partial u} + Q \frac{\partial y}{\partial v} + R \frac{\partial y}{\partial w} \right) dv + \left( P \frac{\partial z}{\partial u} + Q \frac{\partial z}{\partial v} + R \frac{\partial z}{\partial w} \right) dw$$

\* 3D Flächenintegral wird zu 2D Kurvenintegral

\* Gaußsche Integralsatz

\* ...

- $\oint_{\partial B} P dx + Q dy + R dz = \int \int_B \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$
- $\oint_{\partial B} P dx + Q dy + R dz = \int \int_B \text{rot}(P, Q, R) d\vec{\sigma}$
- Orientierung des Normalvektors wird aus der Ebene übernommen

### Integralsatz von Gauß im Raum

- $\oint_{\partial B} \vec{V} d\vec{\sigma} = \int \int \int_B \text{div}(\vec{v}) dx dy dz$ 
  - $\text{div}(\vec{V}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$
  - Bereich darf keine Löcher haben

### Vektorfeld Eigenschaften

- wirbelfrei, wenn Rotation Null
- quellenfrei, wenn Divergenz Null

[[Wegunabhängigkeit]]