

Überblick

- sei eine Kurve $C [a,b] \rightarrow U$ stückweise differenzierbar
 - $t \rightarrow z(t)$
 - f holomorph auf U
- $\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$
 - Substitution mit $z = z(t)$, $dz = z'(t) dt$
 - unabhängig von Parametrisierung
- Zerlegung in Real- und Imaginärteil
 - $\int_C f(z) dz = \int_C (u(x, y) + i(v(x, y))) * (dx + i dy) =$
 - $\int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dy + u(x, y) dy$
- wegunabhängig, wenn
 - Definitionsbereich von f sternförmig
 - $\oint f(z) dz = 0$
 - * wegen Cauchy-Riemann-Gleichungen

*
$$\oint_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{C-R-Gleichungen} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Cauchyscher Integralsatz

- $\oint f(z) dz = 0$, wenn
 - U sternförmig
 - f holomorph
 - C geschlossen in U
- Beispiele:

Bsp $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x/2} e^{itx} dx = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^X e^{-x/2} e^{itx} dx$ (reelles, nicht reelles)

$$\oint_C e^{-z^2/2} dz = 0 = \int_{-X}^X e^{-x/2} dx + \int_0^t \int_{-X}^X e^{-(x+iy)^2/2} i dy - \int_{-X}^X e^{-(x+it)^2/2} dx - \int_0^t \int_{-X}^X e^{-(x+iy)^2/2} i dy$$

$$\int_{-X}^X e^{-(x+it)^2/2} dx = \int_{-X}^X e^{-x^2/2} e^{-ixt} dx = e^{-t^2/2} \int_{-X}^X e^{-x^2/2} dx$$

$$\left| \int_0^t \int_{-X}^X e^{-(x+iy)^2/2} i dy \right| = \int_0^t \int_{-X}^X e^{-(x^2-y^2)/2} dx dy \leq e^{t^2/2} \int_0^t \int_{-X}^X e^{-x^2/2} dx dy = e^{t^2/2} \int_0^t e^{-x^2/2} dx$$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} 0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x/2} dx - e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-ixt} dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x/2} e^{-ixt} dx = \sqrt{2\pi} e^{-t^2/2}$$

- Umläufe zählen

– Satz von Liouville

- * Sei f eine ganze Funktion und beschränkt $\Rightarrow f$ ist konstant

Anm: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$
 $\forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leq M \quad |a_n| \leq \frac{M}{R^n} \quad \text{für jedes } R > 0 \quad R \rightarrow \infty \Rightarrow |a_n| \leq 0 \quad \underline{a_n = 0} \quad \text{für } n \geq 1$

– Fundamentalsatz der Algebra

- * Polynom $p(z)$ mit Grad $n \geq 1$
- * $\exists z_0 : p(z_0) = 0$
- * jedes Polynom hat eine komplexe Nullstelle
- * Beweis

Bew: Angenommen $p(z)$ hat keine Nullstelle. Dann ist $\frac{1}{p(z)}$ eine holomorphe Funktion.
 $\forall R > 0 \quad \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|) \leq M \quad \text{für } |z| \leq R+1$
 $|p(z)| \geq |z|^n - (|a_1||z|^{n-1} + \dots + |a_n|) \geq |z|^n - R(|a_1| + \dots + |a_n|) \geq |z|^n - R \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} = 1$
 $|z| \geq R+1 : \left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq 1$
 $|z| \leq R+1$: $\frac{1}{p(z)}$ ist stetig, daher beschränkt, also $\exists M : \forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \leq R+1 \quad \left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq M$
 $\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \quad \left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq \max(1, M) \Rightarrow \frac{1}{p(z)}$ ist eine beschränkte holomorphe Funktion, also konstant \checkmark

• Nullstellen holomorpher Funktionen

- $N_f = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$ Nullstellenmenge
- N_f entweder ganz U oder kein Häufungspunkt laut [[Satz von Bolzano-Weierstraß]]

Bew: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z-z_0}{r}\right)^n$ für $|z-z_0| < r$ ist stetig auf \mathbb{R} . $N_f = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$. Der Satz hat zwei Häufungspunkte.
 $\frac{1}{f} \in H(U) \quad f \neq 0 \quad z_0 \in U$ eine Nullstelle von f .
 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \quad \{a_n \neq 0\} \geq 1$
 $f(z) = (z-z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k}$ mit $a_k \neq 0$.
 \Rightarrow Die Nullstelle ist isoliert. \checkmark

• Seien f, g holomorph auf U , C eine Kurve aus U

- $\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = g(z) \Rightarrow f(z) = g(z) : \forall z \in U$
- Definitionen der elementaren Funktionen (exp, log, ...) für $z \in \mathbb{C}$ sind die einzig möglichen Fortsetzungen der reellen elementaren Funktionen

[[Komplexe Analysis]]