

- Varianz σ^2 unbekannt
- Test von

$$\mathcal{H}_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad \mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0$$

- Unter H_0 ist

$$E(\bar{X}) \leq \mu_0.$$

- wesentlich größerer Wert deutet auf Verletzung der Nullhypothese hin
Da wir die echte Standardabweichung nicht kennen, verwenden wir den Schätzer S und betrachten die Statistik

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}.$$

- Es gilt
In diesem Fall folgt T einer t -Verteilung mit $n - 1$ Freiheitsgraden.
- t-Test mit kritischem Bereich
Sei $t_{n-1,1-\alpha}$ das $(1 - \alpha)$ -Quantil dieser Verteilung.

$$K = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : t(x) > t_{n-1,1-\alpha} \right\}$$

Verwerfungsbereiche

Sei $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ mit **unbekanntem** σ^2 und α ein gegebenes Signifikanzniveau. Definiere $t = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}$.

Hypothese	Verwerfe \mathcal{H}_0
$\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0$	$ t > t_{n-1,1-\alpha/2}$
$\mathcal{H}_1 : \mu \neq \mu_0$	
$\mathcal{H}_0 : \mu \leq \mu_0$	$t > t_{n-1,1-\alpha}$
$\mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0$	
$\mathcal{H}_0 : \mu \geq \mu_0$	$t < t_{n-1,\alpha}$
$\mathcal{H}_1 : \mu < \mu_0$	

Anwendung

Sei $X_1, \dots, X_8 \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ mit unbekanntem σ^2 . Wir beobachten

0.63, 1.56, 1.26, -0.31, 3.87, 0.03, 4.92, 0.90

und möchten die Hypothese

$$\mathcal{H}_0: \mu \geq 3 \quad \text{vs} \quad \mathcal{H}_1: \mu < 3.$$

- zum Niveau $\alpha = 0.05$ testen.
Aus der Stichprobe berechnen wir $\bar{x} = 1.61, s = 1.85$ (gerundet).

Die Statistik für den t -Test ergibt

$$t = \sqrt{8} \frac{1.61 - 3}{1.85} = -2.13.$$

Aus der Tabelle lesen wir ab $t_{n-1, 1-\alpha} = t_{7, 0.95} = 1.89$. Da

$$t = -2.13 < -1.89,$$

- ist $x \in K$ und wir verwerfen \mathcal{H}_0 zum Niveau $\alpha = 0.05$.
- R

```
> x <- c(0.63, 1.56, 1.26, -0.31, 3.87, 0.03, 4.92, 0.90)
> alpha <- 0.05
> n <- length(x)
> t <- sqrt(n) * (mean(x) - 3)/sd(x)
> t < qt(alpha, df = n - 1)
[1] TRUE
> pt(t, df = n - 1)
[1] 0.03510698
> t.test(x, alternative = "less", mu = 3)
```

One Sample t-test



```
data: x
t = -2.1344, df = 7, p-value = 0.03511
alternative hypothesis: true mean is less than 3
95 percent confidence interval:
 -Inf 2.843547
sample estimates:
mean of x
1.6075
```