

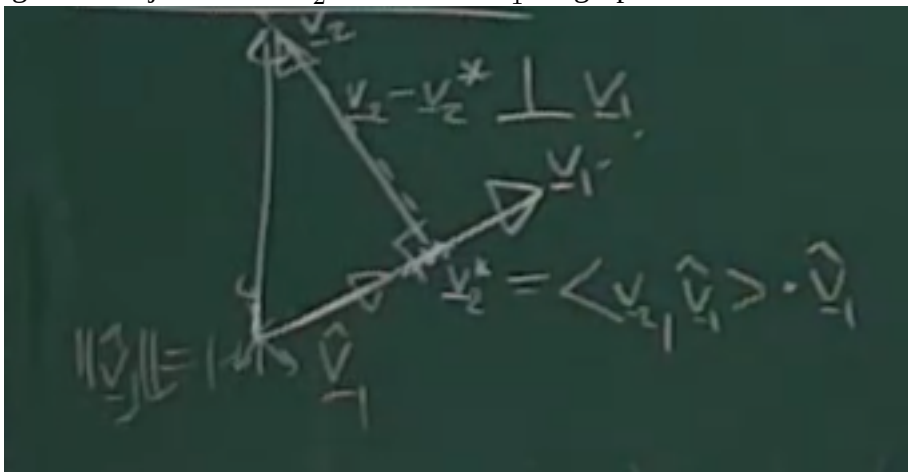
- im reellen unitären VR $\varphi := \angle (v, w) = \arccos\left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}\right)$
 - $-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1$
 - * wegen Schwarzsche Ungleichung
 - * $0 \leq \varphi \leq \pi$
 - kein Winkel für $v = 0$ oder $w = 0$
- Eigenschaften
 - $\angle (v, w) = \angle (w, v)$
 - $v, w \neq 0$ und $\angle (v, w) = 0 \implies \angle (v, w) = \frac{\pi}{2} \implies v$ orthogonal zu w
 - $\angle (v, -v) = \pi$
- Winkelmessung hängt von der Definition des Skalarprodukt ab
- im $V = \mathbb{R}^n$
 - Winkel bzgl. kanonischem Skalarprodukt ist der “geometrische” Winkel

Orthogonalität und orthonormiert

- im unitären VR sind v und w orthogonal, wenn
 - $\langle v, w \rangle = 0$ bzgl. gewähltem Skalarprodukt
- $\{v_i\} \subset V$ ist orthonormiert, wenn
 - alle $v_i \in V$ normiert
 - alle $v_i \in V$ die Länge 1 haben $\iff \|v_i\| = 1$
 - paarweise orthogonal sind
- Jede endlich orthonormierte Teilmenge eines unitären VR mit \langle, \rangle ist linear
 - Beweis VO#18 1:43

Orthonormierungsverfahren von GRAM-SCHMIDT

- Orthogonale Projektion des v_2 auf den von v_1 aufgespannten Unterraum



- $v_2^* = \langle v_2, v_1' \rangle v_1'$
 - * v_1' normierter Vektor von v_1
- Verfahren um Orthonormalbasis zu bilden

- unitärer VR V mit \langle, \rangle und induzierter Norm $\| \cdot \| = \sqrt{\langle, \rangle}$
- linear unabhängige Menge des Raumes v_1, \dots, v_n
- Unterraum $W = w_1, \dots, w_n$ mit
 - * $w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$
 - * $w_i = \frac{1}{\|u_i\|} u_i$
 - ♦ $i = 2, \dots, n$
 - ♦ $u_i = v_i - v_i^*$
 - $v_i^* = \sum_{k=1}^{i-1} \langle v_i, w_k \rangle w_k$

• Beispiel

Bsp: $V = \mathbb{R}^3$ mit \langle, \rangle

1. Schritt: $u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|u_1\| = \sqrt{2}$
 $w_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Schritt: $u_2 = v_2 - v_2^* = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$
 $\|u_2\| = \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
 $w_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Schritt: $u_3 = v_3 - v_3^* = v_3 - (\langle v_3, w_1 \rangle w_1 + \langle v_3, w_2 \rangle w_2)$
 $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 $\|u_3\| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$
 $w_3 = \frac{1}{\|u_3\|} u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Somit: $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 bilden ONB des \mathbb{R}^3

[[Unitäre Räume]] [[Schwarzsche Ungleichung]]