

## Binomial Lehrsatz für nicht lineare Rekursionen

4.33 Nicht lineare Rekursionen

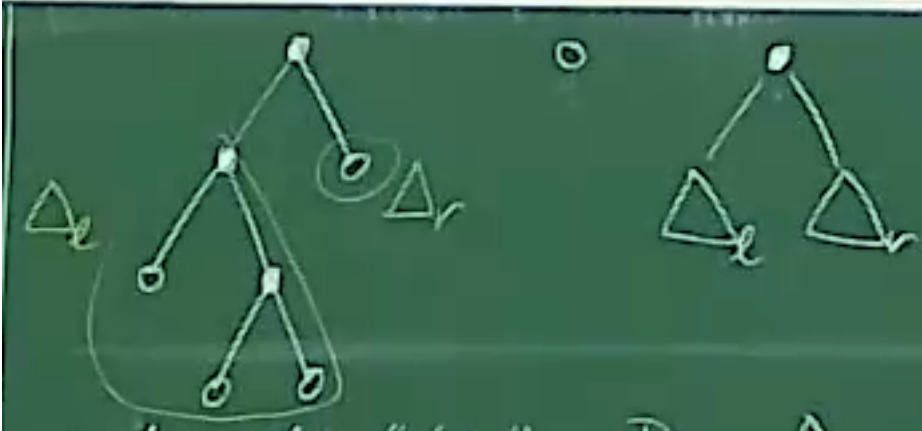
Binomischer Lehrsatz  $(1+z)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} z^n$  für  $m \in \mathbb{N}_0$

Verallgemeinerte Binomialkoeff.  $\binom{x}{n} := \begin{cases} 1 & \text{für } n=0, \\ \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!} & \text{sonst} \end{cases}$  für  $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$

Verallg. binomischer Lehrsatz  $(1+z)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} z^n$  für  $x \in \mathbb{R}$

## Binärbaum

- Binärbaum rekursiv definiert, wenn
  - einzelner externer Knoten oder
  - interner Knoten zusammen mit Binärbaum links und rechts
    - \* links  $\Delta_l$
    - \* rechts  $\Delta_r$
- interne Knoten heißen Wurzel
- externe Knoten heißen Blätter



- Beispiele:
  - Anzahl der Menge von Binärbaume mit n Blättern

BSP  $\mathcal{B}_n$  = Menge binärer Bäume mit n Blättern

$b_n := |\mathcal{B}_n|$   $b_0 = 0, b_1 = 1$

Für  $n \geq 2$ :  $b_n = b_1 b_{n-1} + b_2 b_{n-2} + \dots + b_{n-1} b_1$

$= \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}$

\*

- Catalansche Zahl

\*  $\frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$

\*

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n &= B(z) - b_0 z = B(z) - z \\
 \sum_{n=1}^{\infty} (b_n b_{n-1}) z^n &= B(z)^2 \\
 &= b_0 b_1 + b_1 b_2 z + b_2 b_3 z^2 + \dots \\
 &+ b_{n-1} b_n z^{n-1} + \dots + b_n b_{n+1} z^n + \dots \\
 B(z) \cdot B(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n b_k b_{n-k} \right) z^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Also } B(z) - z &= B(z)^2 \Leftrightarrow B(z)^2 - B(z) + z = 0 \\
 \Leftrightarrow B(z) &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2} \quad \text{Wahl } B(0) = b_0 = 0 \\
 n \geq 1: \quad B(z) &= \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2} \\
 (z) B(z) &= -\frac{1}{2} [z] \sqrt{1-4z} \quad \text{Rekurl.} \quad -\frac{1}{2} (-1)^n \binom{2n-1}{n-1} (1+z)^{\frac{n-1}{2}} \\
 &= -\frac{1}{2} (-1)^n \frac{(2n-1)!}{2^n n!} = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \\
 &= \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \quad \text{Catalanische Zahlen}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [z^n] (1+z)^{-\frac{1}{2}} &= \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n n!} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \\
 &= \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n n!} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n n!} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \\
 &= \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n n!} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n n!} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \\
 &= \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n n!} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n n!} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}
 \end{aligned}$$

[[Lineare Rekursion]]