Definition

- Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum. Wir bezeichnen zwei Ereignisse A und B in $\mathcal{A}$ als unabhängig, falls $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

  Kurz: $A \perp\!\!\!\perp B$.
- $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A).$$
- verallgemeinert auf mehr als 2 [[Ereignisse]]
  - Unabhängigkeit: Wir nennen $A_1, \dots, A_n$ unabhängig, falls

    $$(*) \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i) \quad \text{für alle } \emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}.$$
- Lemma: Ist A von B unabhängig, dann ist auch A von B^C unabhängig.
- Beispiel
  - Wir spielen Roulette. Wir setzen in 3 Runden jeweils 5 €. Im ersten Spiel setzen wir auf rot, im zweiten setzen wir auf $1 - 12$ und im letzten Spiel setzen wir auf die Zahl 23. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir mindestens 10 € gewinnen?
  - Roulette

    3 Spiele → Rot 5 €; → 1-12 10 € jeweils 5 €; → 23 175 € ↓ Gewinn

    P (mindestens 10 € Gewinn) = ?

    A_1 … Gewinn in 1. Spiel

    A_2 .. — " — 2. .. — " —

    A_3 … — " — 3. — " —

    $$P\big((A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3)\big)$$

$$= P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)$$

$$+ P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$+ P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3)$$

$$= P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) P(A_3) + P(A_1) P(A_2) P(A_3^c) + \ldots$$

$$= (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) P(A_3) + P(A_1) P(A_2)(1 - P(A_3))$$

$$P(A_1) = \frac{18}{37} \qquad P(A_2) = \frac{12}{37} \qquad P(A_3) = \frac{1}{37}$$

–