Motivation

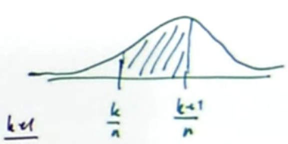
- Erwartungswert für stetige ZV bestimmen
- Approximation von Folge diskreter ZV $X_{(n)}$
- $X_{(n)} = \frac{\lfloor n*X \rfloor}{n}$
  - $$X_{(n)}(\omega) = \frac{k}{n} \text{ falls } \frac{k}{n} \le X(\omega) < \frac{k+1}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

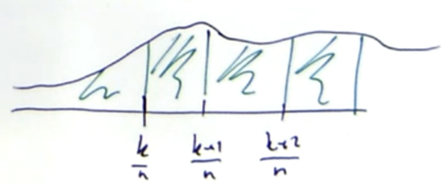
Definition

- Sei X eine ZV. Wir sagen, dass X einen Erwartungswert hat, falls $X_{(n)} \in L^1$. Wir schreiben $X \in L^1$ und definieren
  $$E(X) = \lim_{n\to\infty} E(X_{(n)}).$$
- *Sei X eine ZV mit Dichte $f^X(x)$.*

  (a) $X \in L^1$ dann und nur dann, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f^X(x)dx < \infty$.

  (b) In diesem Fall ist $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f^X(x)dx$.

  (c) Wenn $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g(X) \in L^1$, dann ist
  $$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f^X(x)dx.$$
- $$X_{(n)} = \frac{k}{n} \iff X \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$$
  $$E(X_{(n)}) = \sum_k \frac{k}{n} \underbrace{P\left(X_{(n)} = \frac{k}{n}\right)}_{P\left(X \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right)}$$
  

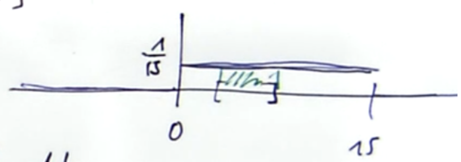
  $$= \sum_k \frac{k}{n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx \approx \sum_k \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} x f(x)\,dx$$
  $$= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$
  

Beispiele

- Bus
  - Eine Buslinie fährt in 15 minütigen Intervallen. Wir gehen zufällig zur Bushaltestelle. Sei X die Wartezeit bis der Bus kommt. Bestimme EX und EX^2.
  - Bus beispiel   Intervall 15 min

    X... Wartezeit $X \sim \text{Unif}[0,15]$

    $f(t) = \frac{1}{15} \qquad t \in [0,15]$

    $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f(t)\, dt = \int_0^{15} t \cdot \frac{1}{15}\, dt$$

    $$= \frac{1}{15} \frac{t^2}{2}\Big|_0^{15} = \frac{1}{15}\frac{15^2}{2} = \frac{15}{2}.$$
- Glühbirne
  - Die Lebensdauer einer Glühbirne X sei verteilt gemäß $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Zeige, dass

    $$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{und} \quad E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}.$$
  - $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ $\rightsquigarrow$ $E(X)$ und $E(X^2)$?

    $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f(t)\, dt \qquad \text{hier } f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

    $$= \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t}\, dt \overset{\lambda t = z}{\underset{t = \frac{z}{\lambda}}{=}} \int_0^{\infty} z e^{-z} \underbrace{\frac{dt}{dz}}_{\frac{1}{\lambda}} dz$$

    $$= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} z e^{-z} dz = \frac{1}{\lambda} \Big[\underbrace{-e^{-z} z \Big|_0^{\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-z} dz}_{=1} \Big]$$

    $$\int f \cdot g = F \cdot g \Big| - \int F g'$$

    $$= \frac{1}{\lambda}$$

- Seilriss
  - Ein 10 Meter langes Seil reißt an einer zufälligen Stelle. Das längere Stück verwenden wir weiter, das kürzere werfen wir weg. Wie lange ist das längere der verbleibenden Seilenden im Mittel?
  - Seilbeispiel Seil 10 m Länge und reißt zufällig.

    X .. Länge des längeren Stückes

    $E(X) = ?$

    $P\ \cancel{X} = 10 \cdot U$ wobei $U \sim U[0,1]$

    $X = \max(P, 10-P) = 10 \cdot \max(U, 1-U)$

    $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} 10 \cdot \max(t, 1-t) \cdot f^{U}(t)\, dt$$

    $$= \int_0^1 10 \cdot \max(t, 1-t)\, dt = 10 \int_0^1 \max(t, 1-t)\, dt$$
  - $$10 \left(\int_0^{1/2} 1-t\, dt + \int_{1/2}^{1} t\, dt \right) =$$

    $$10 \left(\left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^{1/2} + \frac{t^2}{2}\Big|_{1/2}^{1} \right) =$$

    $$10 \left((1/2 - 1/8) + (1/2 - 1/8) \right) = 10 \cdot \frac{6}{8} =$$
  -
- Normalverteilung

Beispiel

Sei $X \sim N(0,1)$. Dann kann man zeigen, dass

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right] dx = 0.$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right] dx = 1.$$

Beispiel

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt

$$E(X) = \mu \quad \text{und} \quad E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2.$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$E(X)$ und $E(X^2)$?

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$Z := \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \boxed{X = \sigma Z + \mu}$ mit $Z \sim N(0,1)$

$$E(X) = E(\sigma Z + \mu) = E(\sigma Z) + E(\mu)$$
$$= \sigma \underbrace{E(Z)}_{=0} + \mu = \mu$$

$$E(X^2) = E((\sigma Z + \mu)^2) = E(\sigma^2 Z^2 + \mu^2 + 2\sigma Z \mu)$$
$$= E(\sigma^2 Z^2) + E(\mu^2) + E(2\sigma\mu Z)$$
$$= \sigma^2 \underbrace{E(Z^2)}_{=1} + \mu^2 + 2\sigma\mu \underbrace{E(Z)}_{=0} = \sigma^2 + \mu^2.$$