Definition

- anstatt einzelne [[Zufallsvariable]] zu betrachten
  - wo jedem Ereignis ein Wert zugewiesen wird
- mehrere Ereignisse mit mehreren Werten
  - Oft haben wir einen Zufallsvektor

    $$\omega \mapsto \boldsymbol{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))'$$

    oder einen Zufallsprozess

    $$\omega \mapsto (X_k(\omega) : k \geq 1)$$

- Mengen von Zufallsvariablen, definiert auf denselben Ω-Raum

Beispiele

- Wir haben N_1 **schwarze** Kugeln, N_2 rote Kugeln und N_3 blaue Kugeln in einer Urne. Wir ziehen 10 Kugeln mit Zurücklegen. Sei
  - X_1 die Anzahl der **schwarzen** Kugeln,
  - X_2 die Anzahl der roten Kugeln und
  - X_3 die Anzahl der blauen Kugeln.

  Dann beschreibt

  $$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)'$$

  wie viele Kugeln jeder Farbe gezogen wurden.

Beispiel

Wir werfen eine Münze 10 mal. Sei $\Omega = \{0,1\}^{10}$. Sei X_i das Resultat des i-ten Wurfs und $X_i(\omega) = \omega_i$. Der Vektor (X_1, X_5) gibt das Resultat des ersten und fünften Wurfs an.

Beispiel

Wir werfen eine Münze ∞ oft. Sei $\Omega = \{0,1\}^{\infty}$. Sei wieder X_i das Resultat des i-ten Wurfs und $X_i(\omega) = \omega_i$. Das ist ein Zufallsprozess.

Beispiel

Wir werfen eine Münze und wetten 1 € auf Kopf oder Zahl. Sei X_i der Gewinn/Verlust des i-ten Wurfs, dann ist $X_i = \pm 1$ und

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n, \quad S_0 = 0,$$

- ist der Gewinn/Verlust nach n Würfen. Der Prozess $(S_n \colon n \geq 1)$ ist ein Random Walk.

Marginale Verteilung

- Für einen gegebenen Zufallsvektor $(X_1, \ldots, X_n)'$ oder Zufallsprozess $(X_k \colon k \geq 1)$ definieren wir die marginale PMF oder CDF:

  $$p_{kj} = P(X_k = x_j) \quad \text{oder} \quad F_k(x) = P(X_k \leq x).$$

- beschreibt nicht das Verhalten von ZV untereinander
  - 

    Seien $X_h = 1$, wenn es heute um h Uhr in Graz regnet. Sonst ist $X_h = 0$. Die Prognose sagt z.B. $P(X_{15} = 1) = 0.9$.

    Kann man aus der Prognose links die Wahrscheinlichkeit errechnen, dass es zwischen 15 und 18 Uhr durchregnet?
  - Versuche folgende zwei Szenarien zu modellieren:
    1. Eine breite Kaltfront zieht durch. Mit 10% Wahrscheinlichkeit zieht sie an Graz vorbei. Allerdings, wenn Sie nicht vorbeizieht, dann regnet es in den nächsten 10 Stunden durchgehend.
    2. Das Wetter ist sehr wechselhaft und schaueranfällig. Ob es zu einer bestimmten Uhrzeit regnet oder nicht hat keinen Einfluss auf das nachfolgende Wetter.

Gemeinsame Verteilung

$$p(x_1,\dots,x_n) = P(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n),$$

- $$F(x_1,\dots,x_n) = P(X_1 \le x_1,\dots,X_n \le x_n).$$
  Wenn der Vektor X eine Dichte hat, dann ist
  $$F(x_1,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(t_1,\dots,t_n)dt_n\dots dt_1.$$
-
- Randverteilung für Zufallsvektor (X,Y)
  - Die Verteilung von Y ist gegeben durch
    $$F^Y(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y) = \lim_{x\to\infty} P(X \le x, Y \le y).$$
    Die PMF von Y ist gegeben durch
    $$p(y) := P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = k) = \sum_x p(x,y).$$
    Die Dichte von Y ist gegeben durch
    $$f^Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$
  -
- Beispiele
  - **Beispiel (Rand-PMF)**
    Wir haben eine Urne mit einer schwarzen, einer roten und einer blauen Kugeln. Wir ziehen 5 mal mit Zurücklegen. Sei (X_1, X_2, X_3) die Anzahl der gezogenen Kugeln der einzelnen Farben. Dann haben wir
    $$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3) = \binom{5}{k_1,k_2,k_3}\frac{1}{3^5}.$$
    Es folgt, dass
    $$P(X_1 = 2) = \frac{1}{3^5}\sum_{0\le k_2,k_3\le 5}\binom{5}{2,k_2,k_3},$$
    wobei $\binom{n}{k_1,k_2,k_3} = 0$ falls $k_1+k_2+k_3 \ne n$.
  -

Beispiel (Randdichte/Randverteilung)

Angenommen (X, Y) ist ein Zufallsvektor mit Dichtefunktion

$$f(x, y) = (1 + x + y)/2, \quad 0 \leq x, y \leq 1.$$

Beachte Konvention: $f(x, y) = 0$ wenn $0 \leq x, y \leq 1$ nicht gilt.
Wir müssen immer nur über den Bereich $f(x, y) \neq 0$ integrieren.

Die Dichtefunktion von X ist dann

$$f^X(x) = \int_0^1 f(x, y) dy = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}.$$

Die Verteilungsfunktion von X ist dann

$$F^X(x) = \int_0^x f^X(t) dt = \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4}.$$

Sei $X_0 = 1$ wenn es heute regnet und 0 sonst. Sei $X_1 = 1$ wenn es morgen regnet und 0 sonst. Der Vektor $X = (X_0, X_1)$ hat PMF

$$p_{00} = 1/3, \quad p_{01} = 1/2, \quad p_{10} = 1/12, \quad p_{11} = 1/12.$$

wobei $p_{ij} = P(X_0 = i, X_1 = j)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen regnet?

$p_{ij} = P(X_0 = i, X_1 = j)$

$j \backslash i$	0	1
0	1/3	1/12
1	1/2	1/12

$p_{01} + p_{11}$

$1/2 + 1/12$

Sei X_0 die heutige Regenmenge (l/m^2) in Graz und Sei X_1 morgige Regenmenge in Graz. Der Vektor $X = (X_0, X_1)$ habe die Dichtefunktion

$$f(x,y) = \frac{1}{6}e^{-1/2x-1/3y}, \quad x,y \geq 0.$$

Weise nach, dass es sich hier um eine Dichtefunktion handelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass es entweder heute, oder morgen mehr als $5l/m^2$ regnet?

$$f(x,y) = \frac{1}{6} e^{-\frac{x}{2} - y/3} \qquad x,y \geq 0 \quad (0 \text{ sonst})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{2}\frac{1}{3} e^{-\frac{x}{2}} e^{-y/3}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}}_{f_{1/2}(x)} dx \cdot \int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{3} e^{-\frac{y}{3}}}_{f_{1/3}(x)} dy$$

$f_\lambda(x)$ Dichte von $Exp(\lambda)$

$$P(\{X_0 \geq 5\} \cup \{X_1 \geq 5\}) = P(X_0 \geq 5) + P(X_1 \geq 5) - P(X_0 \leq 5 \wedge X_1 \leq 5)$$

$$P(X_0 \geq 5) = 1 - \underbrace{P(X_0 \leq 5)}_{1-e^{-\lambda 5}} \qquad \lambda = 1/2$$

$$= e^{-5/2}$$

$$P(X_1 \geq 5) = e^{-5/3}$$

$$P(X_0 \leq 5, X_1 \leq 5) = \int_0^5\int_0^5 \frac{1}{6} e^{-\frac{x}{2} - \frac{y}{3}}\,dx\,dy$$

$$= P(X_0 \leq 5) \cdot P(X_1 \leq 5)$$