

DGL System

$$\begin{aligned} \vec{F}: U &\rightarrow \mathbb{R}^n & U \subseteq \mathbb{R}^n & \text{offen} \\ \vec{x}' &= \vec{F}(\vec{x}) & x_i' &= f_i(x_1, \dots, x_n) \\ & & x_i' &= f_i(x_1, \dots, x_n) \text{ in Koordinaten} \\ & & x_i' &= f_i(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

- Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{F}(\vec{x}) \quad \text{unter der Anfangsbedingung} \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \in U. \\ \left[\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{x}_0 + \int_0^t \vec{F}(\vec{x}(\tau)) d\tau \\ \vec{x}(t) &= \vec{x}_0 + \int_0^t \vec{F}(\vec{x}(\tau)) d\tau \end{aligned} \right. & \text{2 Komponentenweise} & \text{gleiches wie beim Satz von Picard-Lindelöf.} \\ & \text{Die Lösung des AWP existiert und ist eindeutig bestimmt.} \end{aligned}$$

Lineares System

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= A \vec{x} & A & \text{ } n \times n \text{-Matrix} \\ \vec{x}(t) &= e^{tA} \vec{x}_0 \end{aligned}$$

- $e^{tA} =$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

- λ [[Eigenwerte]] von A

$$\begin{aligned} \vec{y}' &= A \vec{y} & \vec{y}(t) &\in \mathbb{R}^n, & A & \text{ } n \times n \text{-Matrix, fest} \\ \vec{y}(t) &= e^{tA} \vec{y}(0). \\ e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t} & \lambda_1, \dots, \lambda_n & \text{Eigenwerte von } A. \end{aligned}$$

- $\vec{y}' = A \vec{y}$ $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ dann genügt es n linear unabhängige Lösungen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ zu finden. An deren Basis lässt sich dann die allgemeine Lösung $\vec{y}(t) = \mu_1 \vec{y}_1(t) + \dots + \mu_n \vec{y}_n(t)$ schreiben zu jedem Eigenwert λ_j dazugehörigen Eigenvektor \vec{v}_j gehört eine Lösung $\vec{y}_j = e^{\lambda_j t} \vec{v}_j$.

- Beispiele:

- reelle Eigenwerte

$\vec{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \vec{y}$. bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren des Vektors.

$\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 3 & -5-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)(-5-\lambda) - 1 \cdot 3 = 15 + 8\lambda + \lambda^2 - 3 = \lambda^2 + 8\lambda + 12$
 $\lambda_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16-12} = -4 \pm 2 = \begin{matrix} -6 \\ -2 \end{matrix}$

* $\lambda_1 = -6$: $3x_1 + x_2 = 0 \quad (-3x_1 + x_2 = -6x_1)$ $A \vec{v} = -6 \vec{v}$
 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
 $\lambda_2 = -2$: $-x_1 + x_2 = 0 \quad (-3x_1 + x_2 = -2x_1)$
 $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{y} = e^{-6t} \vec{v}_1$ $\vec{y}' = -6 e^{-6t} \vec{v}_1$
 $\vec{y} = e^{-2t} \vec{v}_2$ $\vec{y}' = -2 e^{-2t} \vec{v}_2$
 $\vec{y}(t) = \mu_1 e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$

- * jede Anfangsbedingung lösbar durch Wahl von μ_1, μ_2

- komplexe Eigenwerte

- * zweite Eigenwert komplex konjugiert

$\vec{y}' = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}$. $\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = (\lambda+2 \pm i)^2$

* $\lambda_1 = -2+i$: $-2x_1 - x_2 = (-2+i)x_1$
 $-ix_1 - x_2 = 0$ $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -2-i$: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{y}(t) = e^{-2t+i t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-2t-i t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$
 $= \frac{1}{2} e^{-2t} \left((e^{it} + e^{-it}) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + (e^{it} - e^{-it}) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
 $= \frac{1}{2} e^{-2t} \left((2 \cos t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + (2i \sin t) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
 $= e^{-2t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

* $\vec{y}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

- doppelter Eigenwert

$\vec{y}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \vec{y}$ $\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(-3-\lambda) + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+2)^2$

* $\lambda_1 = -2$: $-x_1 - x_2 = -2x_1$ $x_1 - x_2 = 0$ $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{y}_1(t) = e^{-2t} \vec{v}_1$

$\vec{y}_2(t) = t e^{-2t} \vec{v}_1$

$\vec{y}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Inhomogenes lineares System

[[Differentialgleichungen]]