

## Singularität

- $z_0 \in U$  ist Singularität, wenn  $f \in H(U \setminus \{z_0\})$
- punktierte Kreisscheibe

$$B'(z_0, \epsilon) = B(z_0, 1) \setminus \{z_0\}$$

- Singularitätsfälle
  - hebbare Singularität
  - Pol der Ordnung  $m$
  - wesentliche Singularität
- Übersicht

$U \subseteq \mathbb{R} \quad z_0 \in U \quad f \in H(U \setminus \{z_0\})$   
 1.  $f \in H(U)$  um  $z_0$  holomorph  $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) =: f(z_0) =: f \in H(U)$  holome Singulärpunkt  
 2.  $\exists n \in \mathbb{N} \quad (z - z_0)^n f(z)$  um  $z_0$  holomorph  $\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}, \quad g \in H(U)$  Pol der Ordnung  $n$   
 3.  $\forall n \geq 0$  ist  $f(B'(z_0, r))$  dicht in  $\mathbb{C} \quad (\text{fast alle } z \text{ gilt } f(B'(z_0, r)) \subset \mathbb{C} \setminus \{z\})$  wesentliche Singulärpunkt

## Hebbare Singularität

- sei  $f$  holomorph und beschränkt auf der punktierten Kreisscheibe  $B'(z_0, r)$
- $f$  holomorph auf  $B(z_0, r)$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \quad \text{if } f \text{ is differentiable at } z_0$$

- Beispiel

Bsp:  $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$   $z \neq 0$   
 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$   $\Rightarrow f(z)$  ist in  $z=0$  beliebig, weil  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$   
 $\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$   $\frac{\sin(z)}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}$

Pol der Ordnung  $m$

- $f \in H(U \setminus \{z_0\})$  , wenn  $\exists m \in \mathbb{N} : (z - z_0)^m f(z)$  holomorph auf  $U$
- Ordnung des Pols = kleinste mögliche Wert von  $m$
- $\exists a_0, \dots, a_{m-1} : f(z) - (\frac{a_0}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z-z_0})$  holomorph in  $U$
- Beispiel

$f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$   $z \neq 0, 1 \quad z \in \mathbb{C}$   
 $z=0$   $z f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$   $z f(z)$  bleibt ein Grenzwert für  $z \rightarrow 0$  - d. ist daher keine Polstelle in  $z=0$   
 $\frac{d}{dz} f(z)$  hat in  $z=0$  eine Polstelle 2. Ordnung  
 $\frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \left( \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{1-\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots} \right) = \dots$

## Wesentliche Singularität

- $\forall r > 0$  gilt  $f(B'(z_0, r))$  dicht in  $\mathbb{C}$

$$\left( \frac{1}{2} + i\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \in \mathbb{C} \quad f(B'(z_0, r)) = \mathbb{C} \quad \text{oder} \quad \mathbb{C} \setminus \{ \infty \}$$

- Beispiel

$$\frac{f(z) - \frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{z}}} \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad f\left(\frac{1}{z_0 + i2\pi n}\right) = e^{\frac{1}{z_0 + i2\pi n}} = \frac{e^{\frac{1}{z_0}}}{e^{-\frac{2\pi n}{z_0}}} \quad \text{denn für alle } n \in \mathbb{Z} \quad e^{-\frac{2\pi n}{z_0}} \neq 0 \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{e^{-2}} \rightarrow 0$$

- Beweis

$$\begin{aligned} & \text{zu zeigen: } f(B'(z_0, r)) \text{ ist dicht in } \mathbb{C} \text{ für ein } r > 0 \\ & \text{d.h. } \exists \delta > 0 \quad \forall \epsilon \in B'(z_0, r) \quad |f(z) - w| \leq \delta \\ & \quad g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0} \in H(B'(z_0, r)) \\ & \quad |g(z)| = \frac{1}{\delta} \quad \text{für } z \in B'(z_0, r) \Rightarrow g(z) \in H(B'(z_0, r)) \\ & \quad 1) \quad g(z) \neq 0 \quad f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)} \in H(U) \quad \text{keine wesentliche Sing. hat.} \\ & \quad 2) \quad g(z_0) = 0 \quad \tilde{g}(z) = (z - z_0)^n \tilde{h}(z) \quad \text{mit } \tilde{h}(z_0) \neq 0 \quad f(z) = w_0 + \frac{1}{(z - z_0)^n} \cdot \frac{1}{\tilde{h}(z)} \\ & \quad \quad \quad \text{Pol der Ordnung } n \end{aligned}$$

- sei  $A \subseteq U$ , sodass  $A$  in  $U$  keinen Häufungspunkt hat

- $f \in H(U/A)$  meromorph, wenn in  $A$  nur Pole hat

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \in H(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \quad \text{d.h. in } z \in \mathbb{Z} \quad \text{Pole erster Ordnung} \rightarrow \text{meromorph auf } \mathbb{C}$$

- harmonische Funktion

- $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  differenzierbar

- \* wenn CR Gleichungen gelten

- ♦  $\Rightarrow$  beliebig oft

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

\*

- ♦  $\Rightarrow$   $u$  und  $v$  harmonisch

[[Komplexe Kurvenintegrale]]