

# Método de diferencias finitas generalizadas aplicado a la ecuación de Poisson

Nicolás Pinto

Departamento de Informática, Universidad Técnica Federico Santa María  
Av. España 1680, Valparaíso, Chile.

**Abstract**—La ecuación de Poisson es una herramienta fundamental para modelar diversos fenómenos físicos, incluida la distribución de potenciales eléctricos en un dominio determinado. Este análisis tiene múltiples aplicaciones en ingeniería eléctrica, ya que permite comprender la fenomenología en distintos tipos de equipamiento. Un caso particular es el de los árboles eléctricos, estructuras de degradación en forma de túbulos que se generan en materiales aislantes sometidos a altos niveles de tensión. El estudio de este fenómeno requiere simulaciones computacionales, donde la geometría del sistema evoluciona dinámicamente. Esto implica resolver un nuevo problema cada vez que la geometría se modifica, lo que resalta la importancia de la discretización espacial y la resolución eficiente de las ecuaciones del sistema. En este trabajo, se presenta el método de diferencias finitas generalizadas basado en la expansión de Taylor y mínimos cuadrados para transformar la ecuación de Poisson en un sistema de ecuaciones lineales. Este enfoque ha demostrado ser altamente versátil, permitiendo una discretización flexible del espacio y proporcionando mayores grados de libertad a través del uso de la expansión de Taylor. Como resultado, se posiciona como una alternativa eficiente y adaptable para modelar geometrías dinámicas, como las asociadas a los árboles eléctricos.

## I. INTRODUCCIÓN

En el mundo de la física, la ecuación de Poisson permite modelar diversos fenómenos. Uno de los fenómenos de interés en el mundo de la ingeniería eléctrica, corresponde a la distribución de potencial eléctrico en un cierto espacio acotado, puesto que esto permite comprender los niveles de tensión a los que se someten los aislamientos de equipos tales como transformadores, cables, motores, entre otros. Uno de los principales mecanismos de falla a largo plazo en el aislamiento polimérico sólido de alta tensión son los árboles eléctricos. Los árboles eléctricos son túbulos de degradación huecos que crecen bajo un alto estrés eléctrico y la actividad de descargas parciales (DP) [1], [2]. Hasta el día de hoy, sus procesos de iniciación y propagación no se comprenden completamente. Con este propósito, se han desarrollado numerosos modelos, los cuales pueden clasificarse como estocásticos [3], físico-estocásticos [4] y determinísticos [1]. La mayoría de los modelos relacionados con aspectos físicos consideran el papel de las descargas parciales en la propagación de los árboles eléctricos. Un ejemplo de esto es el trabajo realizado por Dissado et al. [5], donde la propagación de los árboles eléctricos se consideró como una consecuencia de la acción de avalanchas de electrones en las proximidades de las ramas del árbol. Otro ejemplo es el modelo desarrollado por Dodd [1] para árboles no conductores, donde las ramas incluso pueden crecer en

diámetro como consecuencia de las descargas parciales. Un desafío en común que poseen todos los modelos corresponden a resolver las ecuaciones electromagnéticas que los gobiernan, en particular, para obtener el potencial eléctrico en el espacio se debe resolver la ecuación de Poisson, por lo que se hace necesario recurrir a técnicas numéricas que tengan la menor complejidad computacional posible, esto puesto que el espacio donde se resuelve la ecuación es dinámico y por ende, se debe resolver la ecuación de Poisson cada vez que el espacio cambia. En este trabajo se presenta el método de diferencias finitas generalizadas aplicado a la ecuación de Poisson, este método permite resolver ecuaciones diferenciales con la flexibilidad de tener mallas de discretización no uniforme, por lo que es posible focalizar la precisión de la solución en ciertos puntos de interés.

## II. METODOLOGÍA

### A. Método de diferencias finitas generalizadas en 1 dimensión

En primer lugar, se plantea el método de diferencias finitas generalizadas. Sea la función  $f(x)$  la cual representa a un fenómeno en el espacio (puede ser la distribución de calor en una barra, la distribución de potenciales eléctricos, o cualquier fenómeno físico que pueda ser representado por medio de una función), esta función se puede aproximar por medio de la expansión en serie de Taylor de  $s$  términos alrededor de un punto  $x_i$  perteneciente al dominio de  $f$  según la ecuación 1.

$$f_i^{[s]}(x) = f(x_i) + h_i \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i} + \frac{h_i^2}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_i} = f(x_i) + \sum_{k=1}^{s-1} \frac{h_i^k}{k!} \left. \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right|_{x_i} \quad (1)$$

donde: -  $h_i = x - x_i$ .

Por medio de esta aproximación, se busca ajustar los valores de las derivadas en función de  $x_i$  y  $f_i$ , de modo que la expansión de Taylor se ajuste al valor real de  $f$  en los puntos vecinos del conjunto  $\Gamma_i$ . Para ello se considera el error de la ecuación 3, el cual corresponde al error cuadrático usando una aproximación de Taylor de la función  $f$  de  $s$  términos centrada en el punto  $x_i$  considerando los  $m$  puntos vecinos pertenecientes al conjunto definido en la ecuación 2. De modo que se requiere minimizar esta norma por medio de los coeficientes asociados a las derivadas quedando de esta manera un problema de mínimos cuadrados, gracias a esto, los coeficientes asociados a las derivadas quedaran en términos de  $f_i$ . Además notar que el término  $i$ -ésimo no es

considerado, puesto que al ser el punto asociado a  $x_i$ , el error de aproximación es 0 y no aporta a la suma.

$$\Gamma_i = \{\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{im}\} \subseteq \text{dom}(f) \quad (2)$$

$$(E_i^{[s]})^2 = \sum_{k=1}^m \left( (f(x_i) - f(\gamma_{ik})) + \sum_{g=1}^{s-1} \frac{h_k^g}{g!} \left. \frac{\partial^g f}{\partial x^g} \right|_{x=\gamma_{ik}} \right)^2 = \sum_{k=1}^m r_{ki}^2 \quad (3)$$

Una forma de resolver el problema de mínimos cuadrados, es por medio del planteamiento de un sistema de ecuaciones sobredeterminado, de modo que se cumple la ecuación

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{b}_i - A\bar{\mathbf{x}}_i \quad (4)$$

donde:

- $\mathbf{r} = [r_{1i}, r_{2i}, \dots, r_{mi}]^\top$  es el vector de residuos al realizar la expansión de Taylor de  $f$  centrada en  $x_i$ .
- $\mathbf{b}_i = [f(\gamma_1) - f(x_i), f(\gamma_2) - f(x_i), \dots, f(\gamma_m) - f(x_i)]^\top$  es el vector de diferencias entre los valores de la función.
- $A_i$  es la matriz de términos de Taylor:

$$A_i = \begin{bmatrix} (\gamma_1 - x_i) & \frac{(\gamma_1 - x_i)^2}{2} & \dots & \frac{(\gamma_1 - x_i)^s}{s!} \\ (\gamma_2 - x_i) & \frac{(\gamma_2 - x_i)^2}{2} & \dots & \frac{(\gamma_2 - x_i)^s}{s!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\gamma_m - x_i) & \frac{(\gamma_m - x_i)^2}{2} & \dots & \frac{(\gamma_m - x_i)^s}{s!} \end{bmatrix} \quad (5)$$

- $\bar{\mathbf{x}}_i = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^s f_i}{\partial x^s} \right]^\top$  es el vector de coeficientes de derivadas

Notar que tanto el vector  $\mathbf{b}_i$ , como el vector  $\mathbf{x}_i$  son desconocidos, por lo que en esta oportunidad, se resuelve el problema de mínimos cuadrados de forma simbólica, la ventaja que tiene resolver este problema, es que se tienen las derivadas parciales de  $f$  en  $x_i$  como una combinación de los valores de  $f$  evaluados en los vecinos de  $x_i$ , logrando de esta manera que el comportamiento de  $f$  en el punto  $x_i$  pueda ser representado por una ecuación que no depende de sus derivadas. Si se realiza el procedimiento antes descrito en cada uno de los puntos del dominio, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales con  $N$  incógnitas. Por otro lado, se puede apreciar que el problema de mínimos cuadrados se transforma en un sistema de ecuaciones lineales con  $s$  incógnitas y  $m$  ecuaciones, notar que para que se pueda resolver este sistema, se debe cumplir que  $m \geq s$  por lo que si se realiza una expansión de Taylor de orden superior, se debe considerar como vecinos a una cantidad mayor de puntos. Además el vector  $\mathbf{b}_i$  se puede escribir según la ecuación 6, la ventaja que tiene el poder escribir la ecuación de esta forma, es que permite posteriormente escribir el vector  $\mathbf{x}_i$  como la multiplicación entre dos vectores.

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\gamma_1) \\ f(\gamma_2) \\ \vdots \\ f(x_i) \\ \vdots \\ f(\gamma_m) \end{bmatrix} = P_i \mathbf{c}_i \quad (6)$$

**B. Método de diferencias finitas generalizadas en 2 dimensiones**

Sea la función  $f(x, y)$  que representa a un fenómeno en un espacio bidimensional, la expansión de Taylor asociada a la función en torno al punto  $(x_i, y_i)$  se puede definir según la ecuación 7.

$$f(x, y) = f(x_i, y_i) + h_i \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_i, y_i)} + k_i \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_i, y_i)} + \frac{h_i^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x_i, y_i)} + \frac{k_i^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{(x_i, y_i)} + h_i k_i \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(x_i, y_i)} + \sum_{m+n \geq 3} \frac{h_i^m k_i^n}{m!n!} \left. \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} \right|_{(x_i, y_i)} \quad (7)$$

$$h_i = x - x_i \quad (8)$$

$$k_i = y - y_i \quad (9)$$

El procedimiento que se usa para resolver el problema bidimensional es igual al caso unidimensional. Sin embargo es necesario redefinir algunas variables que tienen una estructura diferente al caso unidimensional:

$$\Gamma_i = \{\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{im}\} = \{(\gamma_{i1x}, \gamma_{i1y}), (\gamma_{i2x}, \gamma_{i2y}), \dots, (\gamma_{imx}, \gamma_{imy})\} \subseteq \text{dom}(f) \quad (10)$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{b}_i - A\bar{\mathbf{x}}_i \quad (11)$$

donde:

- $\mathbf{r}_i = [r_{1i}, r_{2i}, \dots, r_{mi}]^\top$  es el vector de residuos al realizar la expansión de Taylor de  $f$  centrada en  $(x_i, y_i)$ .
- $\mathbf{b}_i = [f(\gamma_1) - f(x_i, y_i), f(\gamma_2) - f(x_i, y_i), \dots, f(\gamma_m) - f(x_i, y_i)]^\top$  es el vector de diferencias entre los valores de la función.
- $A_i$  es la matriz de términos de Taylor en 2D:

$$A_i = \begin{bmatrix} h_1 & k_1 & \frac{h_1^2}{2} & \frac{k_1^2}{2} & h_1 k_1 & \dots & \frac{h_1^m k_1^n}{m!n!} \\ h_2 & k_2 & \frac{h_2^2}{2} & \frac{k_2^2}{2} & h_2 k_2 & \dots & \frac{h_2^m k_2^n}{m!n!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_m & k_m & \frac{h_m^2}{2} & \frac{k_m^2}{2} & h_m k_m & \dots & \frac{h_m^m k_m^n}{m!n!} \end{bmatrix} \quad (12)$$

donde  $h_j = \gamma_{jx} - x_i$  y  $k_j = \gamma_{jy} - y_i$ .

- $\bar{\mathbf{x}}_i$  es el vector de coeficientes de derivadas:

$$\bar{\mathbf{x}}_i = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}, \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^{m+n} f_i}{\partial x^m \partial y^n} \right]^\top \quad (13)$$

### C. Resolución del problema por medio de las ecuaciones normales y factorización QR

Una forma de resolver el sistema de ecuaciones asociado al problema de mínimos cuadrados, es por medio de las ecuaciones normales de la ecuación 14 sin embargo, resolver el sistema de ecuaciones asociado a las ecuaciones normales eleva cuadráticamente el número de condición de la matriz A

$$A_i^* A_i \bar{x}_i = A_i^* \mathbf{b}_i \quad (14)$$

Para solucionar este problema, se recurre a la factorización QR de la matriz  $A_i$  la cual se expresa según la ecuación 15, la matriz  $Q_i$  corresponde a una matriz unitaria, mientras que  $R_i$  es una matriz triangular superior, como  $A_i$  puede no ser cuadrada, se recurre a la versión reducida de esta factorización, la cual se expresa como  $\hat{Q}_i \hat{R}_i$ .

$$A_i = Q_i R_i = \hat{Q}_i \hat{R}_i \quad (15)$$

Por medio de esta factorización, el sistema de ecuaciones se puede resolver usando la ecuación 20. Se puede apreciar que para obtener  $\bar{x}_i$ , es necesario tener el producto de  $\hat{R}_i^{-1} \hat{Q}_i^* P_i$  el cual al incluir la inversa de  $R_i$  posee un alto costo computacional. Para ello, se ha definido el producto  $\hat{R}_i^{-1} \hat{Q}_i^* P_i$  como una matriz  $V_i$  según la ecuación 21 la cual almacena los coeficientes que acompañan al vector  $c_i$

$$(\hat{Q}_i \hat{R}_i)^* (\hat{Q}_i \hat{R}_i) \bar{x}_i = (\hat{Q}_i \hat{R}_i)^* \mathbf{b}_i \quad (16)$$

$$\hat{R}_i^* \hat{Q}_i^* \hat{Q}_i \hat{R}_i \bar{x}_i = \hat{R}_i^* \hat{Q}_i^* \mathbf{b}_i \quad (17)$$

$$\hat{R}_i \bar{x}_i = \hat{Q}_i^* \mathbf{b}_i \quad (18)$$

$$\hat{R}_i \bar{x}_i = \hat{Q}_i^* P_i \mathbf{c} \quad (19)$$

$$\bar{x}_i = \hat{R}_i^{-1} \hat{Q}_i^* P_i \mathbf{c} \quad (20)$$

$$V_i = \hat{R}_i^{-1} \hat{Q}_i^* P_i \quad (21)$$

Notar que a partir de tal arreglo, se puede encontrar la incógnita  $V_i$  gracias a que se forma el sistema de ecuaciones lineales de la ecuación 22, este sistema tiene la particularidad, en primer lugar de que sus incógnitas corresponden a vectores y en segundo lugar, de poder resolverse por medio de Backward Substitution gracias a que  $\hat{R}_i$  es triangular superior.

$$\hat{R}_i V_i = \hat{Q}_i^* P_i \quad (22)$$

Una vez encontrado el valor de la matriz  $V_i$ , el vector  $\bar{x}_i$  puede ser escrito según la ecuación 23, este resultado evidencia que las derivadas pueden ser escritas como una combinación lineal de los valores de la función  $f$  evaluado en los  $m$  puntos considerados en el problema de mínimos cuadrados.

$$\bar{x}_i = V_i \mathbf{c}_i \quad (23)$$

### D. Resolución del sistema de ecuaciones

Al transformar las derivadas de  $f(x_i)$  en función de una combinación lineal de la función  $f$  evaluada en los vecinos, tenemos una ecuación de a lo mas  $N$  incógnitas, por lo que si se realiza el mismo procedimiento por cada uno de los puntos, se obtiene un sistema de ecuaciones de  $N \times N$ , lo cual permite resolver ecuaciones diferenciales de manera discreta por medio de sistemas de ecuaciones lineales.

### E. Medición de error

Para medir el error de la solución numérica, se comparará esta con la solución analítica  $f$  del problema, de modo que el error entre la solución al aproximar  $f$  por medio de una serie de Taylor de  $s$  términos esta definido según la ecuación 24, el cual representa al máximo error absoluto entre el valor de  $f^{[s]}(x_i, y_i, \dots)$  y el valor de la solución analítica de  $f(x_i)$

$$E^{[s]} = \max(|f^{[s]}(x_i, y_i, \dots) - f(x_i, y_i, \dots)|) \quad (24)$$

## III. RESULTADOS

### A. Caso 1-Dimensión

Para estudiar el método de diferencias finitas generalizadas en 1 dimensión, se utilizará el problema de la ecuación (25) con las condiciones de borde de Dirichlet de la ecuación (26) usando una discretización del espacio de tamaño  $h$ .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x) \quad (25)$$

$$f(0) = f(2\pi) = 0 \quad (26)$$

En primer lugar se hará una aproximación de Taylor de segundo orden de la función  $f$  con  $s = 3$ . En segundo lugar se usara para  $f$  un valor de  $s = 5$ , para en tercer lugar estudiar el efecto de quitar el cuarto termino a la aproximación de Taylor con  $s = 5$  (LLamaremos a este caso, asignando un valor de  $s = 4.5$ ) Para el caso numero 1, correspondiente a usar un valor de  $s = 3$ , se han considerado como vecinos a los puntos  $x_{i-1}$  y  $x_{i+1}$ . En la figura 1, mientras que para los casos 2 y 3, en se han considerado como vecinos a los puntos  $x_{i-2}$ ,  $x_{i-1}$ ,  $x_{i+1}$  y  $x_{i+2}$ . Además en caso de que la cantidad de vecinos sea insuficiente (por ejemplo que el punto  $x_{i-2}$  o  $x_{i+2}$  no exista), se aumentara la distancia admisible de los vecinos hasta lograr una cantidad de vecinos igual a mayor a 4, esto debido a que de lo contrario, la matriz resultante de la factorización QR es singular y por ende, el sistema no puede ser resuelto. Al comparar las figuras 1 y 2, se puede apreciar que al aumentar la cantidad de terminos de  $s = 3$  a  $s = 5$  tiene un impacto en el orden en el que decae el error en terminos del valor de la grilla  $h$ , de modo que este pasa de tener un orden  $O(h^2)$  a  $O(h^4)$ .

Por otro lado, en la figura 3 se puede evidenciar que al ignorar el termino cúbico, el error pasa de disminuir cuadráticamente a disminuir de manera cúbica, lo cual acusa que el orden depende del número de términos que se ocupa en la expansión de Taylor.

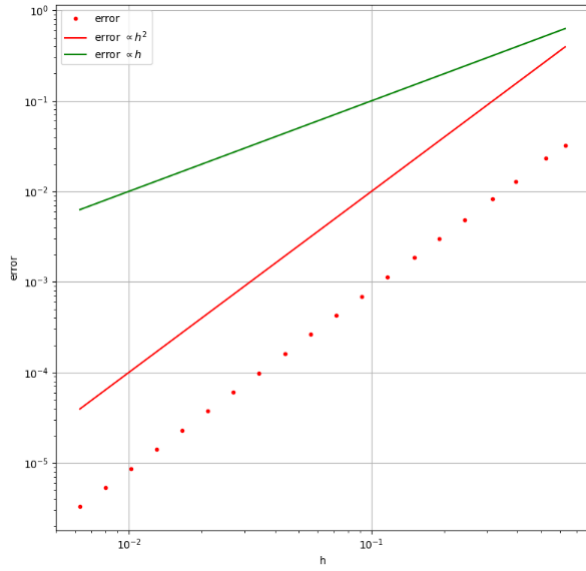


Figure 1: Error usando 3 términos de la serie de Taylor.

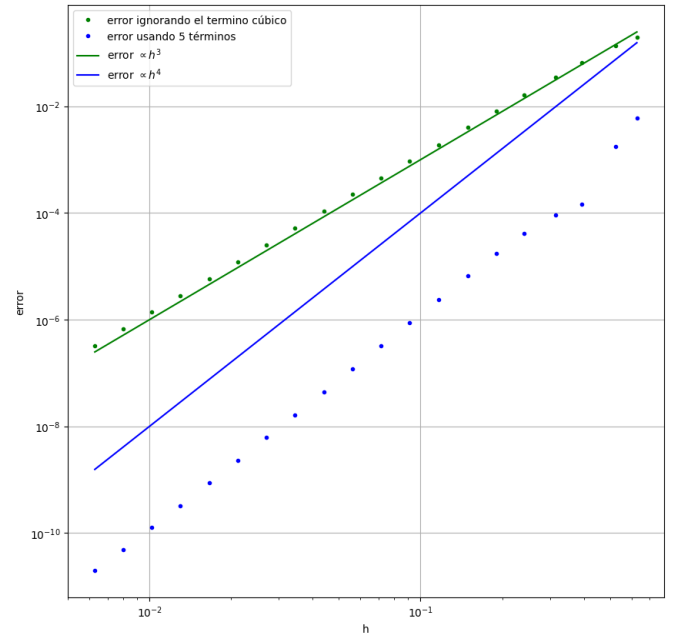


Figure 3: Error usando 5 términos de la serie de Taylor e ignorando el término cúbico.

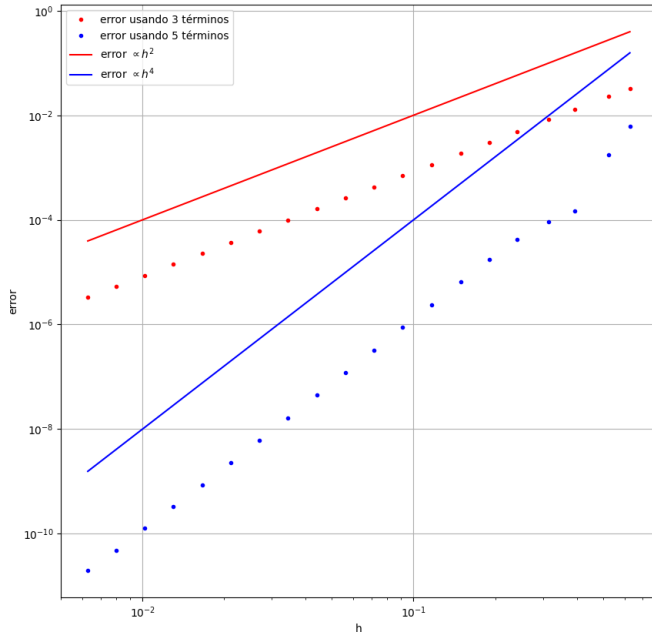


Figure 2: Error usando 5 términos de la serie de Taylor.

### B. Comparación con el método de diferencias finitas clásico

En la figura 4, se puede observar que el error disminuye cuadráticamente con respecto al tamaño del intervalo  $h$ , de modo que se puede comprobar que usar diferencias finitas clásicas en el problema, equivale a realizar una expansión de Taylor de segundo orden de la función  $f$ .

Caso	Orden
$s=3$	$O(h^2)$
$s=5$	$O(h^4)$
$s=4.5$	$O(h^3)$

Table I: Comparación del orden entre los métodos utilizados

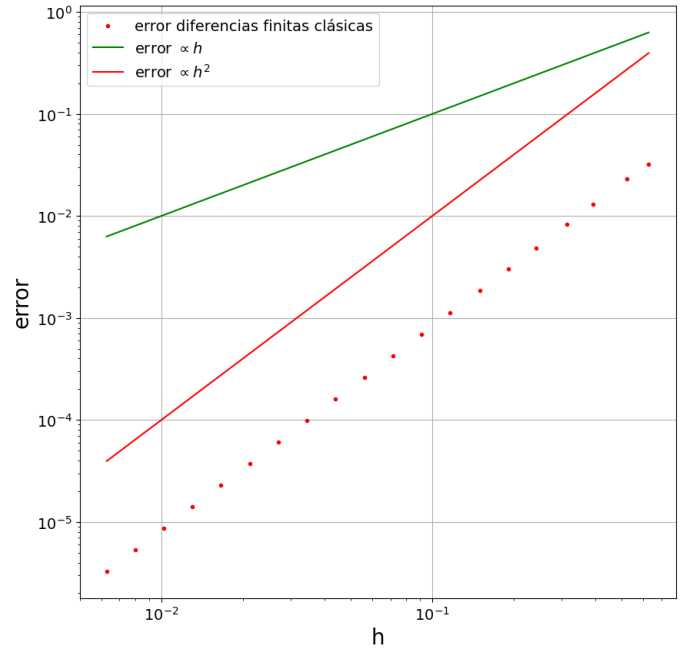


Figure 4: Error usando diferencias finitas clásicas.

Al observar los tres casos de estudio, se puede concluir que en el caso de las diferencias finitas generalizadas en 1 dimensión, el orden con el que disminuye el error es mayor a medida que se usa una aproximación de Taylor con una mayor cantidad de términos.

### C. Caso 2-Dimensiones

Para estudiar el método de diferencias finitas generalizadas en 2 dimensiones, se utilizará el problema de la ecuación (27) con las condiciones de borde de Dirichlet de la ecuación (28), las cuales son equivalentes a que  $f = 0$  cuando  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$ .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g(x, y) \quad (27)$$

$$g(x, y) = 2x^3(x - 1) + 6xy(2x - 1)(y - 1) \quad (28)$$

Para la aproximación de Taylor, se ha utilizado un valor de  $s = 5$ , de modo que de esta manera se han podido incluir las derivadas de hasta segundo orden tanto en  $x$  como en  $y$ . Al igual que para el caso en 1 dimensión, en este caso de estudio se ha utilizado una grilla equiespaciada de tamaño  $h$ . En la figura 5 se puede evidenciar que el error decae con orden  $O(h^2)$ .

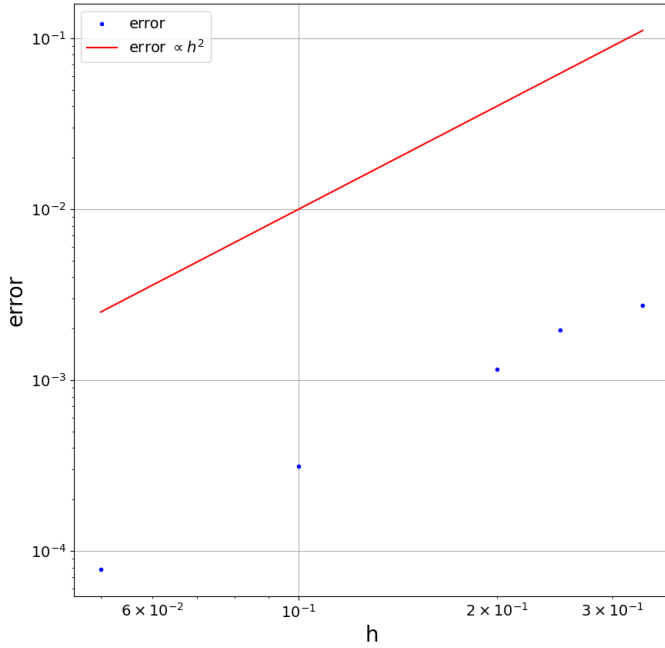


Figure 5: Error en diferencias finitas generalizadas bidimensional con  $s = 5$ .

### D. Aplicación al crecimiento de árboles eléctricos

Se ha diseñado un algoritmo mediante una simulación computacional, el cual permite generar el crecimiento de árboles eléctricos utilizando un modelo estocástico junto con la técnica de autómatas celulares. Usando esta técnica, la geometría se discretiza en celdas, y el crecimiento del árbol se determina en función de una función estocástica que cuantifica el daño, el campo eléctrico y los vecinos de cada celda. Es necesario primero definir la geometría sobre la cual se ha trabajado, junto con las ecuaciones matemáticas que rigen el modelo.

1) *Geometría:* La geometría en estudio, mostrada en la Figura 6, corresponde a una configuración aguja-placa con dimensiones de  $1mm$  de largo y  $2mm$  de ancho. Se generó una malla de 200 por 100 celdas, cada una de  $10\mu m$  por  $10\mu m$ . La distancia de separación entre los electrodos fue de  $0.94mm$  y el radio de la punta de la aguja fue de  $3\mu m$ . La rigidez dieléctrica del material aislante fue de  $250kV/cm$ .

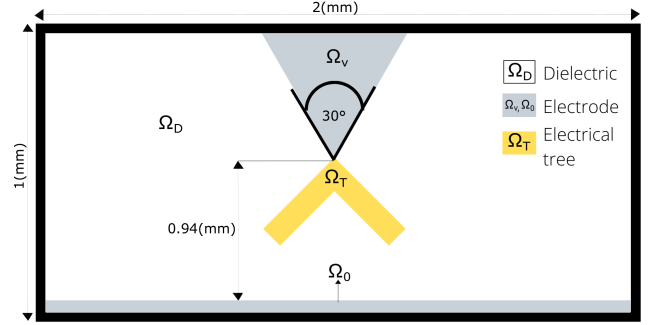


Figure 6: Geometría del problema.

El modelo necesita la información de la distribución del campo eléctrico. Para lograr esto, como se muestra en la Figura 6, la geometría se ha subdividido en cuatro regiones distintas, correspondientes a la punta, los electrodos, el árbol eléctrico y el dieléctrico. Para obtener el potencial en el espacio y posteriormente el campo eléctrico, se resuelve el problema de Laplace dado por la ecuación 29, aplicando condiciones de Dirichlet dadas por las ecuaciones 30 y 31 a los electrodos y al árbol eléctrico, y condiciones de Neumann de la ecuación 32 a las demás fronteras del problema. Después de resolver estas ecuaciones, el campo eléctrico se obtiene usando la ecuación 33.

$$\nabla^2 V(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \Omega_D \quad (29)$$

$$V(\vec{x}) = U, \quad \vec{x} \in \partial\Omega_V, \Omega_T \quad (30)$$

$$V(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \partial\Omega_0 \quad (31)$$

$$\partial_n V(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \partial\Omega_N \quad (32)$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} V(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega_D \quad (33)$$

donde los dominios están definidos como en la Figura 6, y  $U$  es el voltaje aplicado en la punta.

2) *Autómata celular:* Para decidir donde se puede formar una nueva ramificación, se deben cumplir dos condiciones. La primera y principal es que la rama en cuestión supere un valor de umbral de campo eléctrico correspondiente a la rigidez dieléctrica. La segunda corresponde a que al menos una de las celdas vecinas definidas en el problema (ver ejemplo de la figura 7 donde se define como celdas vecinas a las 8 celdas que rodean a la celda candidata) debe ser parte del árbol o de los electrodos conductores (punta o placa).

Una vez que todas las celdas que cumplen con estas condiciones han sido identificadas, se procede a aplicar el modelo estocástico de la ecuación 34. En esta ecuación,  $d_x$

representa el nivel de daño de la ramificación, el cual puede variar entre 0 y 1.  $|\vec{E}_n|$  corresponde al nivel de campo eléctrico en la celda  $n$  y  $\eta$  es una variable que determina el peso relativo entre estas dos variables en el modelo estocástico.

$$P = \frac{|\vec{E}_n|^\eta}{\sum_{i=1}^k |\vec{E}_k|^\eta} \quad (34)$$

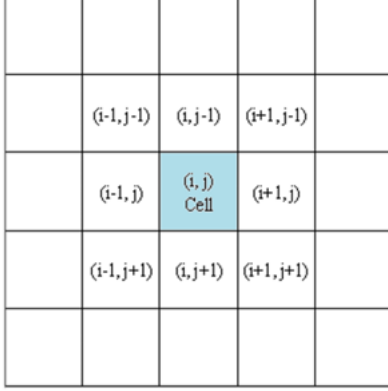


Figure 7: Celdas vecinas a  $(i,j)$  en un modelo bidimensional.

3) *Simulación*: Para la simulación se han considerado los siguientes parámetros:

- Discretización equiespaciada de tamaño  $10\mu m$
- Potencial de la punta de  $12kV$
- árbol conductor, por lo que no hay caída de potencial en este
- Material aislante: Resina Epóxica con una rigidez dieléctrica de  $250 \frac{kV}{cm}$
- Hardware utilizado: CPU Intel i5 8va generación, 8GB de RAM
- Valor de  $\eta = 2$  de modo que se priorice la formación de ramificaciones donde exista un mayor nivel de campo eléctrico

Para la resolución del sistema de ecuaciones se ha utilizado GMRES junto con un preconditionador ILU incompleto, este preconditionador es recalculado cada 50 iteraciones, la razón de escoger tal valor, es que puesto que como el cambio que ocurre en el sistema de ecuaciones en un paso de simulación es en una de las 20000 filas de este, el preconditionador mantiene su eficacia a la hora de resolver el sistema de ecuaciones por GMRES, permitiendo que el método converja con un error absoluto menor a  $10^{-5}$  en un tiempo de 0.5s en promedio. A partir de las figuras 8 y 9 se puede evidenciar en primer lugar que el modelo es capaz de crear estructuras arborescentes en 2 dimensiones. Además el tiempo que se ha demorado en resolver el sistema de ecuaciones para una cantidad de 20000 incógnitas vía GMRES ha sido de un promedio de 0.61s

#### IV. CONCLUSIONES

Se ha propuesto el método de diferencias finitas generalizadas para la resolución de la ecuación de Poisson, este

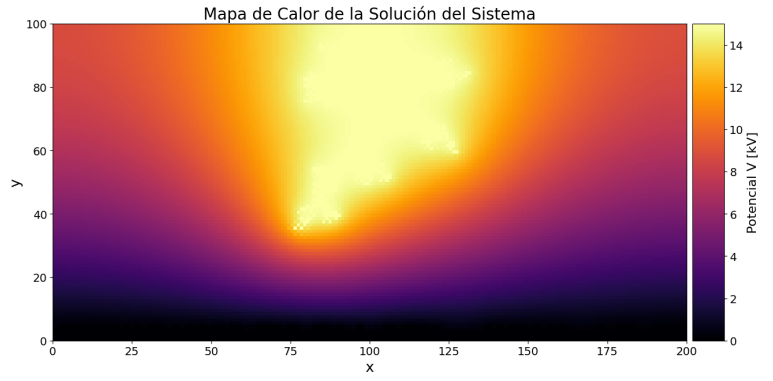


Figure 8: Distribución de potencial de un árbol eléctrico.

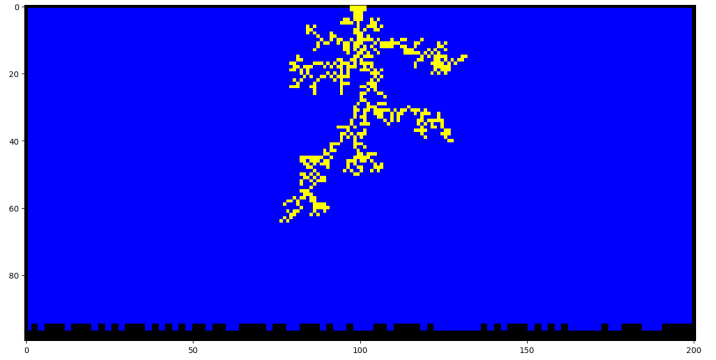


Figure 9: Geometría del árbol eléctrico.

método ha presentado la versatilidad tanto en poder ajustar el número de términos que se usan para aproximar la función que se está buscando como en la distribución de los puntos que se usan, de modo que al usar una mayor cantidad de términos en la expansión de Taylor, el orden que el que disminuye el error también aumenta, lo mismo ocurre al usar una mayor cantidad de puntos en el espacio. Desde el punto de vista de la propagación de árboles eléctricos, se puede observar que permite una versatilidad en la discretización de la geometría utilizando de modo que esta permite usar una mayor cantidad de puntos en el área de interés, es decir en la vecindad de los electrodos y la ramificación. Si bien en este trabajo se ha utilizado una grilla equiespaciada, se puede visualizar como desafío futuro el uso de una grilla basada en puntos no equiespaciados como por ejemplo los puntos de Halton, para ello además de la resolución del problema de campo por medio de diferencias finitas generalizadas es necesario redefinir el modelo de crecimiento, puesto que el autómata celular que se ha planteado se basa en grillas equiespaciadas, otro desafío que se pueden visualizar, en particular en fenómenos con geometría dinámica como el de los árboles eléctricos se encuentra el diseñar estrategias de reciclaje de las matrices del algoritmo para que estas no deban ser completamente modificadas cada vez que la geometría cambia, de esta manera es posible reducir el costo computacional del algoritmo global.

## REFERENCES

- [1] S. J. Dodd, "A deterministic model for the growth of non-conducting electrical tree structures," *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 36, no. 2, pp. 129–141, 2003.
- [2] J. V. Champion and S. J. Dodd, "Systematic and reproducible partial discharge patterns in an epoxy resin," *IEEE International Conference on Conduction & Breakdown in Solid Dielectrics*, pp. 339–343, 1995.
- [3] A. L. Barclay, P. J. Sweeney, L. A. Dissado, and G. C. Stevens, "Stochastic modelling of electrical treeing: Fractal and statistical characteristics," *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 23, no. 12, pp. 1536–1545, 1990.
- [4] L. A. Dissado, S. J. Dodd, J. V. Champion, P. I. Williams, and J. M. Alison, "Propagation of electrical tree structures in solid polymeric insulation," *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, vol. 4, no. 3, pp. 259–279, 1997.
- [5] L. A. Dissado and P. J. Sweeney, "Physical model for breakdown structures in solid dielectrics," *Physical Review B*, vol. 48, no. 22, pp. 16 261–16 268, 1993.