

V106

## **Gekoppelte Pendel**

Katharina Popp  
katharina.popp@tu-dortmund.de

Nicolai Weitkemper  
nicolai.weitkemper@tu-dortmund.de

Durchführung: 01.06.2021

Abgabe: 08.06.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
2.1 Gleichsinnige Schwingungen . . . . .	4
2.2 Gegensinnige Schwingungen . . . . .	5
2.3 Gekoppelte Schwingungen . . . . .	6
<b>3 Durchführung</b>	<b>7</b>
<b>4 Auswertung</b>	<b>8</b>
4.1 Gleichsinnige Schwingungen . . . . .	8
4.2 Gegensinnige Schwingungen . . . . .	8
4.3 Gekoppelte Schwingungen . . . . .	11
4.4 Kopplungskonstante . . . . .	11
<b>5 Diskussion</b>	<b>12</b>
5.1 Abweichungen . . . . .	12
5.2 Mögliche Fehlerquellen . . . . .	12
<b>Literatur</b>	<b>13</b>

# 1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen die Schwingungsdauern von zwei gekoppelten Pendeln bei verschiedenen Auslenkungen untersucht werden. Aus den Messdaten wird anschließend die Kopplungskonstante der verwendeten Feder bestimmt.

# 2 Theorie

Im folgenden Abschnitt werden die theoretischen Grundlagen eines Fadenpendels erläutert.

Zuerst wird ein einfaches Fadenpendel der Länge  $l$  und einer Masse  $m$  betrachtet, welches möglichst reibungsfrei schwingt. Die Bewegung des Pendels nach einer kleinen Auslenkung aus der Ruhelage um den Winkel  $\phi$  lässt sich mit der Gleichung

$$J \cdot \ddot{\phi} + D_p \cdot \phi = 0$$

beschreiben, wobei in diesem Fall die Kleinwinkelnäherung

$$\sin \phi \approx \phi \tag{1}$$

gilt. Die Produkt  $D_p \cdot \phi$  beschreibt das Drehmoment  $M$ , welches auf das Pendel wirkt, wenn es ausgelenkt wird. Das Drehmoment entsteht durch die Gewichtskraft  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ , welche der Auslenkung entgegenwirkt. Der Faktor  $D_p$  beschreibt die Winkelrichtgröße des Pendels. Zusätzlich hat das Trägheitsmoment  $J$  des Pendels einen Einfluss auf die Bewegung.

Das Pendel schwingt nach der Auslenkung harmonisch, was bedeutet, dass es um seine Ruhelage oszilliert und vollständig durch eine Sinus- oder Kosinusfunktion beschrieben werden kann. Anders ausgedrückt ist die rücktreibende Kraft stets proportional zur Auslenkung, wie aus der Differentialgleichung (2) ersichtlich wird. Aus der Lösung dieser kann die Schwingungsfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D_p}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

bestimmt werden.

Im Folgenden werden zwei Pendel gleicher Länge und Masse betrachtet, welche durch eine Feder gekoppelt sind. Durch die Kopplung wirken zusätzliche Drehmomente  $M_1 = D_F(\phi_2 - \phi_1)$  und  $M_2 = D_F(\phi_1 - \phi_2)$  auf die Pendel. Ihre Bewegung lässt sich mit gekoppelten Differentialgleichungen darstellen, bei denen die linke Seite die Bewegung des jeweiligen Pendels und die rechte Seite die Kopplung beschreibt. Es gilt

$$\begin{aligned} J\ddot{\phi}_1 + D\phi_1 &= D_F(\phi_2 - \phi_1) \\ J\ddot{\phi}_2 + D\phi_2 &= D_F(\phi_1 - \phi_2) . \end{aligned}$$

Bei der Entkopplung der Schwingungen wird eine Überlagerung aus Eigenschwingungen um die Auslenkwinkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  beschrieben. Abhängig von den Anfangsbedingungen der Auslenkung  $\alpha(t=0)$  und  $\dot{\alpha}(t=0)$  kann zwischen gleichsinnigen, gegensinnigen und gekoppelten Schwingungen unterschieden werden.

## 2.1 Gleichsinnige Schwingungen

Die beiden Pendel werden, wie in Abbildung 1 dargestellt, um den gleichen Winkel  $\alpha_1 = \alpha_2$  ausgelenkt, sodass nur die Gewichtskraft als rücktreibende Kraft wirkt. Die Verbindung der Pendel über die Feder hat keinen Einfluss auf die Schwingung, weshalb die Feder entfernt werden kann. Für die Schwingungsfrequenz ergibt sich

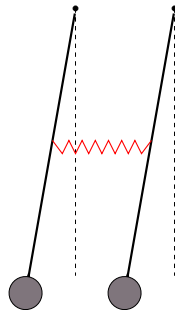
$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (2)$$

wobei  $g$  die Erdbeschleunigung darstellt. Die Schwingungsdauer  $T_+$  ergibt sich aus dem grundlegenden Zusammenhang

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3)$$

zu

$$T_+ = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4)$$



**Abbildung 1:** Darstellung der gleichsinnigen Schwingung bei zwei gekoppelten Pendeln.  
[1]

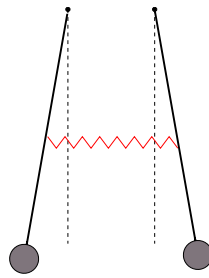
## 2.2 Gegensinnige Schwingungen

Beide Pendel werden um den gleichen Winkel  $\alpha_1 = -\alpha_2$  in entgegengesetzte Richtungen ausgelenkt, wie in Abbildung 2 dargestellt ist, sodass die Feder eine gleich große, rüktreibende Kraft ausübt. Für die Schwingungsfrequenz ergibt sich

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{l}} \quad (5)$$

mit der Kopplungskonstante  $K$  der Feder. Für die Schwingungsdauer ergibt sich

$$T_- = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + 2K}}. \quad (6)$$



**Abbildung 2:** Darstellung der gegensinnigen Schwingung bei zwei gekoppelten Pendeln.  
[1]

Die Kopplungskonstante  $K$  wird als Maß für die Kopplung betrachtet und kann aus den folgenden Zusammenhängen berechnet werden:

$$K = \frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{\omega_-^2 + \omega_+^2} = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2}. \quad (7)$$

## 2.3 Gekoppelte Schwingungen

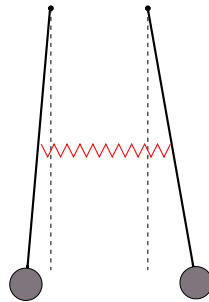
Ein Pendel bleibt zu Beginn in seiner Ruhelage  $\alpha_1 = 0$ , während das andere um den Winkel  $\alpha_2 \neq 0$  ausgelenkt wird. Durch die Feder kann das schwingende Pendel seine Energie auf das ruhende Pendel übertragen und es so zum Schwingen anregen, wie in Abbildung 3 gezeigt. Dabei sinkt die Auslenkung des ersten Pendels und die des zweiten Pendels nimmt solange zu, bis sich das erste Pendel in Ruhe befindet und das zweite Pendel maximal ausgelenkt wird. Der Zeitraum, in dem ein Pendel aus seiner Ruhelage heraus angeregt wird und schließlich wieder dorthin zurückkehrt, wird als Schwebung bezeichnet. Für die Schwebungsfrequenz ergibt sich

$$\omega_S = \omega_+ - \omega_- \quad (8)$$

und für die Schwebungsdauer

$$T_S = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} . \quad (9)$$

Der Vorgang der vollständigen Energieübertragung setzt sich periodisch fort.



**Abbildung 3:** Darstellung der gekoppelten Schwingung bei zwei gekoppelten Pendeln.  
[1]

### 3 Durchführung

Im Folgenden sollen der Versuchsaufbau und die Durchführung der verschiedenen Messungen erläutert werden.

Für den Versuch sind zwei Pendel sowie eine Stoppuhr gegeben. Die Pendel bestehen aus einem dünnen Stahlstab, welcher so befestigt ist, dass das Pendel möglichst reibungsfrei schwingen kann. Auf dem Stab ist eine Masse  $m = 1\text{ kg}$  befestigt, welche sich auf dem Stab verschieben lässt, sodass verschiedene Pendellängen  $l$ , welche vom Punkt der Aufhängung zum Mittelpunkt der Masse gemessen werden, eingestellt werden können. Bei der Messung darf das Pendel nicht zu weit ausgelenkt werden, um die Gültigkeit der Kleinwinkelnäherung zu gewährleisten. Die maximale Auslenkung  $x$ , unter der Annahme, dass der Auslenkwinkel  $\alpha < 10^\circ$  beträgt, lässt sich mithilfe der Gleichung

$$x = \sin(\alpha) \cdot l \quad (10)$$

berechnen.

Es werden in verschiedenen Messungen die Schwingungsdauern der Pendel gemessen. Zu Beginn der Messung wird die Pendellänge wie beschrieben mit einem Maßband bestimmt, wobei diese bei beiden Pendeln ungefähr gleich sein sollte. Anschließend wird die Schwingungsdauer  $T_+$  der einzelnen Pendel beobachtet, was gleichzeitig auch der Messung der gleichsinnigen Schwingung in Unterabschnitt 2.1 entspricht, bei der keine Feder zur Kopplung benötigt wird. Es werden für beide Pendel jeweils 20 Messwerte aufgenommen, indem die Zeit für fünf Schwingungsdauern gemessen wird.

Anschließend wird dieselbe Messung für die gegensinnige Schwingung in Unterabschnitt 2.2 durchgeführt, wobei hier die Feder wieder in den Versuchsaufbau integriert wird. Außerdem muss darauf geachtet werden, dass sich die gegeneinander schwingenden Massen nicht berühren, weshalb beide Pendel anfangs *zueinander* ausgelenkt werden. Es werden wieder 20 Messwerte für je fünf Schwingungsdauern  $T_-$  aufgenommen.

Danach wird die gekoppelte Schwingung aus Unterabschnitt 2.3 untersucht. Dazu wird zuerst die Schwingungsdauer  $T$  eines Pendels betrachtet, indem dieses ausgelenkt und das andere festgehalten wird. Beim Loslassen werden zehnmal die Zeiten für je fünf Schwingungsdauern gemessen. Anschließend wird die Schwebungsdauer  $T_S$  gemessen; dazu werden die Pendel wie vorher ausgelenkt und es wird die Zeit gemessen, bis das ursprünglich ruhende Pendel vom schwingenden Pendel angeregt wurde und wieder zur Ruhe gekommen ist. Hier wird zehnmal eine Schwebungsdauer gemessen.

Sämtliche obenstehende Messungen werden für eine weitere Pendellänge wiederholt.

Die Kopplungskonstante  $K$  kann anschließend mit der Gleichung 7 berechnet werden.

## 4 Auswertung

Im Folgenden sind beide Durchgänge stets unter Angabe der jeweiligen Pendellänge nebeneinander aufgeführt.

### 4.1 Gleichsinnige Schwingungen

Tatsächlich wurde nicht wirklich eine gleichsinnige Schwingung gemessen; stattdessen werden die einzeln bestimmten Schwingungsdauern  $T_1$  und  $T_2$  als Datengrundlage genommen. (Das ist vertretbar, weil aus Gleichung 4 hervorgeht, dass die Schwingungsdauern nicht von der Kopplungskonstante abhängen, sodass auch  $K = 0$  gewählt und somit die koppelnde Feder entfernt werden kann.) Entsprechend wird in Tabelle 1 zwischen dem linken und rechten Pendel unterschieden, aber nachher über alle Werte gemittelt.

Es lässt sich aber erkennen, dass die Schwingungsdauern links ( $T_1$ ) und rechts ( $T_2$ ) in beiden Durchläufen im Rahmen der Messgenauigkeit übereinstimmen.

Die aufgelisteten Werte wurden bereits durch die Anzahl der pro Messung gezählten Perioden dividiert, sodass es sich tatsächlich um Periodendauern handelt.

Der in den folgenden Tabellen verwendete Mittelwert berechnet sich mittels folgender Formel:

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i . \quad (11)$$

Die Standardabweichung des Mittelwerts wird mit

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad (12)$$

berechnet.

Die prozentuale Abweichung wird stets als

$$\frac{\omega_{\text{exp}} - \omega_{\text{theo}}}{\omega_{\text{theo}}} \cdot 100 \% \quad (13)$$

angegeben.

### 4.2 Gegensinnige Schwingungen

Tabelle 3 zeigt die Periodendauern der gegensinnigen Schwingungen sowie die zugehörigen Mittelwerte und Standardabweichungen.

Die in Tabelle 4 angegebenen berechneten Werte greifen bereits auf die nach Gleichung 7 berechnete Kopplungskonstante  $K$  zurück.



**Tabelle 1:** Periodendauern der gleichsinnigen Schwingung.

Pendellänge $l$ / m	$T_+ / \text{s}$			
	0,5		1	
	links ( $T_1$ )	rechts ( $T_2$ )	links ( $T_1$ )	rechts ( $T_2$ )
	1,38	1,40	1,94	1,98
	1,44	1,41	1,94	1,92
	1,30	1,41	1,96	1,93
	1,40	1,44	1,96	1,97
	1,40	1,41	1,94	1,95
	1,41	1,45	1,97	1,96
	1,42	1,43	1,97	1,96
	1,43	1,43	1,98	1,95
	1,41	1,43	1,99	1,96
	1,43	1,42	1,95	1,95
	1,44	1,39	1,95	1,90
	1,41	1,42	1,91	1,91
	1,39	1,42	1,91	1,89
	1,41	1,41	1,93	1,93
	1,41	1,43	1,93	1,95
	1,40	1,40	1,94	1,93
	1,41	1,42	1,94	1,93
	1,36	1,40	1,91	1,91
	1,41	1,41	1,93	1,92
	1,42	1,44	1,92	1,95
Mittelwert $\bar{T}_+$	1,410		1,941	
Standardabweichung des Mittelwerts	0,003 98		0,003 65	

**Tabelle 2:** Vergleich der experimentell bestimmten mit der berechneten Schwingungsfrequenz für gleichsinnige Schwingungen.

Pendellänge $l$ / m	$\omega_+ / \text{rad/s}$	
	0,5	1
gemessen (nach Gleichung 3)	4,456	3,238
berechnet (nach Gleichung 2)	4,429	3,132
Abweichung in %	0,61	3,39

**Tabelle 3:** Periodendauern der gegensinnigen Schwingung.

Pendellänge $l$ / m	$T_-$ / s	
	0,5	1
	1,37	1,89
	1,36	1,93
	1,38	1,91
	1,37	1,92
	1,35	1,89
	1,39	1,92
	1,40	1,94
	1,38	1,93
	1,37	1,93
	1,37	1,93
	1,35	1,89
	1,34	1,87
	1,36	1,91
	1,38	1,88
	1,36	1,90
	1,36	1,87
	1,35	1,88
	1,33	1,91
	1,37	1,96
	1,39	1,92
Mittelwert $\bar{T}$	1,366	1,910
Standardabweichung des Mittelwerts	0,003 80	0,005 48

**Tabelle 4:** Vergleich der experimentell bestimmten mit der berechneten Schwingungsfrequenz für gegensinnige Schwingungen.

Pendellänge $l$ / m	$\omega_-$ / rad/s	
	0,5	1
gemessen (nach Gleichung 3)	4,601	3,290
berechnet (nach Gleichung 5)	4,443	3,137
Abweichung in %	3,55	4,90

### 4.3 Gekoppelte Schwingungen

In Tabelle 5 sind Schwingungsdauern  $T$  und Schwebungsdauern  $T_S$  sowie Mittelwerte und Standardabweichungen der gekoppelten Schwingung aufgeführt. Für das 1 m-Pendel wurde  $T_S$  nur in ganzen Sekunden gemessen.

**Tabelle 5:** Schwingungsdauern  $T$  und Schwebungsdauern  $T_S$  der gekoppelten Schwingung.

Pendellänge $l$ / m	0,5		1	
	$T$ / s	$T_S$ / s	$T$ / s	$T_S$ / s
	1,40	37,23	1,97	92,00
	1,38	39,80	1,92	95,00
	1,42	36,91	1,92	96,00
	1,37	37,75	1,93	95,00
	1,40	37,73	1,95	96,00
	1,37	36,85	1,86	92,00
	1,37	38,63	1,91	93,00
	1,37	36,78	1,91	96,00
	1,41	36,44	1,89	95,00
	1,45	37,97	1,92	97,00
Mittelwert	1,395	37,609	1,920	94,7
Standardabweichung des Mittelwerts	0,008 57	0,321	0,009 93	0,559

**Tabelle 6:** Vergleich der experimentell bestimmten mit der berechneten Schwebungsfrequenz für gekoppelte Schwingungen.

Pendellänge $l$ / m	$\omega_S$ / rad/s	
	0,5	1
gemessen (nach Gleichung 3)	0,167	0,0663
berechnet (nach Gleichung 8)	0,145	0,0530
Abweichung in %	15,08	26,03

### 4.4 Kopplungskonstante

Aus den experimentellen Werten zu  $\omega_+$  und  $\omega_-$  kann mithilfe von Gleichung 7 die Kopplungskonstante  $K$  bestimmt werden. Sie ergibt sich zu  $(0,032 \pm 0,004) \text{ m/s}^2$  für das 0,5 m-Pendel beziehungsweise  $(0,0161 \pm 0,0034) \text{ m/s}^2$  für das 1 m-Pendel.

## 5 Diskussion

### 5.1 Abweichungen

Die Abweichungen wurden bereits in den jeweiligen Unterkapiteln der Auswertung aufgeführt. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die relativen Abweichungen für gleichsinnige und gegensinnige Schwingungen stets unter 5% lagen. Im Rahmen der Möglichkeiten des Versuchsaufbaus können diese Ergebnisse also als Erfolg verbucht werden.

Größere Abweichungen finden sich bei den Schwebungsfrequenzen in Unterabschnitt 4.1; die experimentell bestimmte Schwebungsfrequenz des 1 m-Pendels weicht um über ein Viertel vom „theoretisch“ berechneten Wert ab.

Es muss betont werden, dass die experimentell bestimmte Kopplungskonstante  $K$  benutzt wurde, um besagte „Theoriewerte“ zu berechnen (siehe z.B. Gleichung 6). Ein unabhängiger Referenzwert steht nicht zur Verfügung.

### 5.2 Mögliche Fehlerquellen

Eine wesentliche Fehlerquelle ist das manuelle Erfassen der Periodendauern. Um bessere Werte zu erzielen, wurde zwar meist über mehrere Periodendauern hinweg und von zwei Personen gleichzeitig gemessen, dennoch unterliegen die Werte schon hierbei einer gewissen Unsicherheit.

Ebenfalls manuell erfolgte das anfängliche Auslenken der Pendel. Diese könnten beim Loslassen eine zusätzliche Beschleunigung erfahren haben. Auch der anfängliche Auslenkwinkel konnte mangels Skala o.ä. nur geschätzt werden und war bei den Messungen somit nicht konsistent.

Für die Berechnungen wurde angenommen, dass das Trägheitsmoment (abhängig von Länge und Masse) beider Pendel gleich ist. Wie bereits in Unterabschnitt 4.1 erwähnt wurde, stimmen die Schwingungsdauern  $T_1$  und  $T_2$  in beiden Durchläufen im Rahmen der Messgenauigkeit überein, sodass die Annahme weitestgehend zutrifft.

Die Kleinwinkelnäherung ist – offensichtlich – nur eine Näherung. Wenngleich mit Winkeln  $< 10^\circ$  gearbeitet wurde, wird durch diese Näherung ein Fehler induziert.

Durch Reibung an der Aufhängung (Spitzenlagerung), welche zwar optimiert, aber nicht ideal ist, aber auch durch Luftwiderstand, wird das Pendel gebremst. Da nicht davon auszugehen ist, dass diese Brems effekte genau linear von der Geschwindigkeit abhängen, kann dies die Periodendauer beeinflussen.

## Literatur

- [1] *Versuchsanleitung zum Versuch 106: Gekoppelte Pendel.* TU Dortmund.