

V353

Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Katharina Popp
katharina.popp@tu-dortmund.de

Nicolai Weitkemper
nicolai.weitkemper@tu-dortmund.de

Durchführung: 11.05.2021

Abgabe: 18.05.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Relaxationsphänomene	3
2.2 Auf- und Entladevorgang eines Kondensators	3
2.3 Relaxationsphänomene bei periodischer Auslenkung	4
2.4 RC-Kreis als Integrator	5
3 Durchführung	7
3.1 Messung einer Entladekurve des Kondensators	7
3.2 Messung der Amplitude und der Phasenverschiebung	8
4 Auswertung	10
4.1 Bestimmung der Zeitkonstante aus dem Entladevorgang	10
4.2 Bestimmung der Zeitkonstante aus der Frequenzabhängigkeit	12
4.3 Bestimmung der Zeitkonstante aus der frequenzabhängigen Phasenverschiebung	14
5 Diskussion	17
Literatur	18

1 Zielsetzung

Das Ziel dieses Versuches ist es, das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises zu bestimmen, sowie die Zeitkonstante RC auf verschiedene Arten zu bestimmen.

2 Theorie

Im folgenden Abschnitt werden die theoretischen Grundlagen der Relaxation eines RC-Kreises erläutert.

2.1 Relaxationsphänomene

Ein System zeigt Relaxationsverhalten, wenn es aus seinem Ausgangszustand gebracht wird und es nicht-oszillatorisch in den Ausgangszustand zurückkehrt. Die zeitliche Änderung der beobachteten Größe A ist dabei proportional zu ihrer Abweichung vom Endzustand $A(\infty)$, welcher nur asymptotisch erreicht wird

$$\frac{dA}{dt} = c(A(t) - A(\infty)) .$$

Integration liefert die Relaxationsgleichung der Größe A , wobei der Faktor $c < 0$ ist. Es gilt:

$$A(t) = A(\infty) + (A(0) - A(\infty)) \cdot e^{ct} .$$

2.2 Auf- und Entladevorgang eines Kondensators

Ein Beispiel für Relaxationsverhalten ist die Auf- und Entladung eines Kondensators.

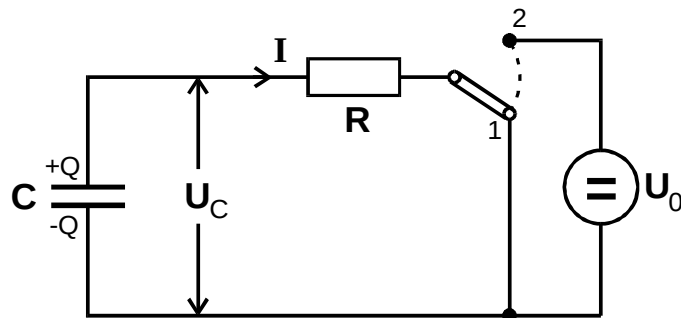


Abbildung 1: Schaltung des Auf- und Entladevorgangs eines Kondensators. [1]

In Abbildung 1 ist die Schaltung dargestellt, die zur Messung der Auf- und Entladung des Kondensators verwendet wird.

Für den Entladevorgang wird der Schalter in der Schaltung in Position 1 gebracht. Auf

dem Kondensator mit der Kapazität C ist eine Ladungsmenge Q gespeichert. Zwischen den Platten liegt eine Spannung U_C an, die mithilfe von

$$U_C = \frac{Q}{C} \quad (1)$$

berechnet werden kann. Für den Strom ergibt sich

$$I = \frac{U_C}{R} \quad (2)$$

mit dem ohm'schen Widerstand R . Der zeitliche Verlauf der Kondensatorladung wird mithilfe der Differentialgleichung

$$\frac{dQ}{dt} = I(t) = -\frac{1}{RC}Q(t) \quad (3)$$

beschrieben. Diese hat die Lösung

$$Q(t) = Q(0) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad (4)$$

wobei der Kondensator nach unendlicher Zeit entladen ist, also $Q(\infty) = 0$.

Für den Aufladevorgang wird der Schalter in der Schaltung in Position **2** gebracht. An dem Kondensator ist eine Spannung U_0 angebracht und es gelten die Grenzbedingungen

$$Q(0) = 0 \qquad Q(\infty) = CU_0.$$

Für den zeitlichen Verlauf der Ladung ergibt sich analog

$$Q(t) = CU_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right). \quad (5)$$

Die Zeitkonstante RC gibt die Geschwindigkeit an, mit der das System in seinen Endzustand $Q(\infty)$ strebt. In der Zeit $\Delta T = RC$ ändert sich die Ladung um

$$\frac{Q(t = RC)}{Q(0)}.$$

2.3 Relaxationsphänomene bei periodischer Auslenkung

Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises kann bei Anlegen einer Wechselspannung $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ als Beispiel für andere Gebiete der Physik gesehen werden.

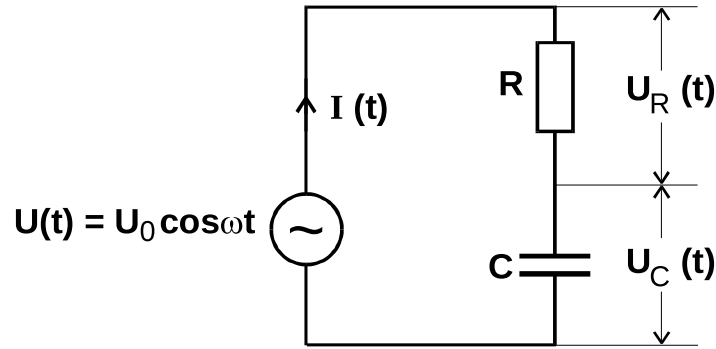


Abbildung 2: Schaltung zur Beobachtung von Relaxationsverhalten bei periodischer Auslenkung. [1]

Die Abbildung 2 zeigt die dafür verwendete Schaltung. Für hinreichend kleine Kreisfrequenz $\omega \ll \frac{1}{RC}$ gilt $U_C(t) = U(t)$, wobei bei steigender Frequenz eine Phasenverschiebung ϕ zwischen der Kondensatorspannung und der Generatorspannung $U_G(t)$ auftritt. Die Spannung $U(t)$ setzt sich nach der zweiten Kirchhoff'schen Regel aus der Spannung am Widerstand U_R und der Spannung am Kondensator, für die

$$U_C = A(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)) \quad (6)$$

gilt, zusammen. Die Spannung $U(t)$ ist für alle Zeiten t gültig, sodass sich mit einigen Umformungen die Phasenverschiebung

$$\phi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (7)$$

ergibt, wobei ϕ für kleine Frequenzen gegen Null geht und sich für hohe Frequenzen asymptotisch an $\frac{\pi}{2}$ annähert. Für die Amplitude ergibt sich mithilfe von $\omega t + \phi = \frac{\pi}{2}$ die folgende Beziehung:

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} . \quad (8)$$

Für kleine Frequenzen $\omega \rightarrow 0$ geht $A(\omega)$ gegen U_0 und für hohe Frequenzen $\omega \rightarrow \infty$ geht $A(\omega)$ gegen Null.

Ein RC-Kreis mit anliegender Wechselspannung kann auch als Tiefpass verwendet werden, da er Frequenzen, die klein gegen $\frac{1}{RC}$ sind, nahezu ungehindert durchlässt und Frequenzen mit $\omega \gg \frac{1}{RC}$ herunterteilt.

2.4 RC-Kreis als Integrator

Für hinreichend große Frequenzen $\omega \gg \frac{1}{RC}$ gilt:

$$U_C \propto \int U(t) dt .$$

Es ergibt sich für die Spannung $U(t)$ wieder der Zusammenhang

$$U(t) = U_R + U_C , \quad (9)$$

wobei $U_R = RC \frac{dU_C}{dt}$ nach der Beziehung in Gleichung 3 verwendet wird. Mit $|U_C| \ll |U_R|$ und $|U_C| \ll |U|$ gilt für die Spannung am Kondensator:

$$U_C = \frac{1}{RC} \int_0^1 U(t') dt' . \quad (10)$$

3 Durchführung

Der folgende Abschnitt beschreibt die Durchführung der verschiedenen Messungen.

3.1 Messung einer Entladekurve des Kondensators

Für die Bestimmung der Zeitkonstante RC kann entweder die Entlade- oder die Aufladekurve des Kondensators untersucht werden. Hier wird die Entladekurve gemessen, wobei die verwendete Schaltung in der folgenden Abbildung 3 dargestellt ist.

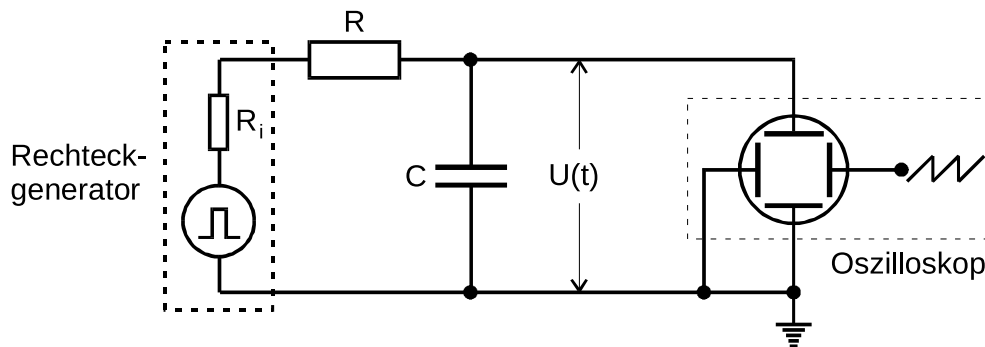


Abbildung 3: Schaltung zur Messung der Auf- und Entladekurve des Kondensators im RC-Kreis. [1]

Zu Beginn der Messung muss am Generator eine Rechteckspannung eingestellt werden, welche auf einem Oszilloskop in Abhängigkeit von der Zeit darstellbar ist. Die Entladekurve ist in Abbildung 4 zu sehen.

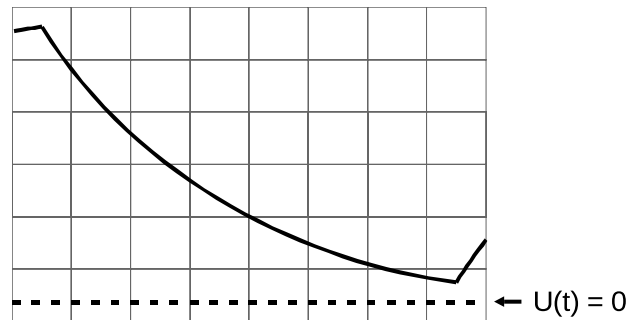


Abbildung 4: Gestalt der Entladekurve. [1]

Es werden 15 Messwerte aufgenommen, wobei die Zeitkonstante mithilfe der Gleichung 4 berechnet werden kann.

3.2 Messung der Amplitude und der Phasenverschiebung

Für diese Messung wird am Generator eine sinusförmige Spannung angelegt, welche wieder auf einem Oszilloskop dargestellt werden kann.

Für die Messung der Amplitude wird die folgende Schaltung verwendet.

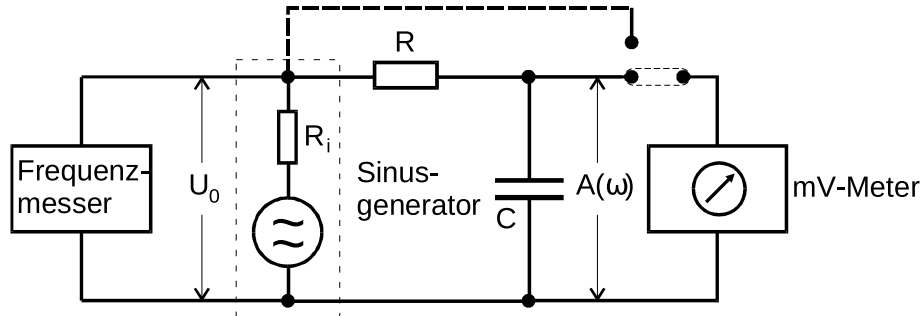


Abbildung 5: Schaltung zur Messung der Spannungsamplitude in Abhängigkeit der Frequenz. [1]

Zu Beginn wird die Frequenz der kleinst- und größtmöglich darstellbaren Amplitude bestimmt. In diesem Fall lag die größtmögliche Amplitude bei $\omega = 10 \text{ Hz}$ und die kleinstmögliche Amplitude bei $\omega = 2000 \text{ Hz}$. Anschließend wird das Intervall zwischen beiden Frequenzwerten in geeigneten Abständen ausgemessen. Die Zeitkonstante kann dann durch Umstellen der Gleichung 8 berechnet werden.

Die Messung der Phasenverschiebung kann mit denselben Einstellungen durchgeführt werden.

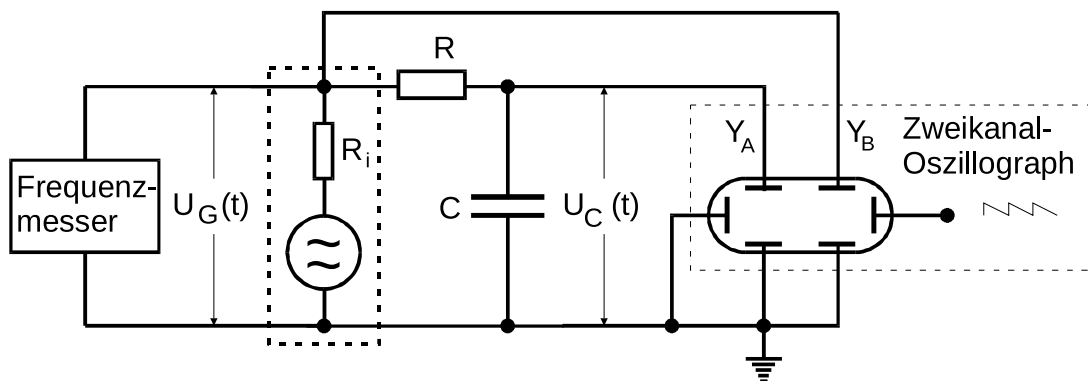


Abbildung 6: Schaltung zur Messung der Phasenverschiebung von Generator- und Kondensatorspannung. [1]

In Abbildung 6 ist die verwendete Schaltung gezeigt. Die Generatorspannung U_G wird am Eingang Y_A angeschlossen, die Kondensatorspannung U_C am Eingang Y_B . Am Oszilloskop muss die Einstellung DUAL ausgewählt werden, um gleichzeitig die eingehende

Generatorspannung und die Kondensatorspannung zu sehen. Es wird dasselbe Frequenzintervall wie zuvor abgelaufen, wobei die Abstände a und b entsprechend der Darstellung in Abbildung 7 gemessen werden.

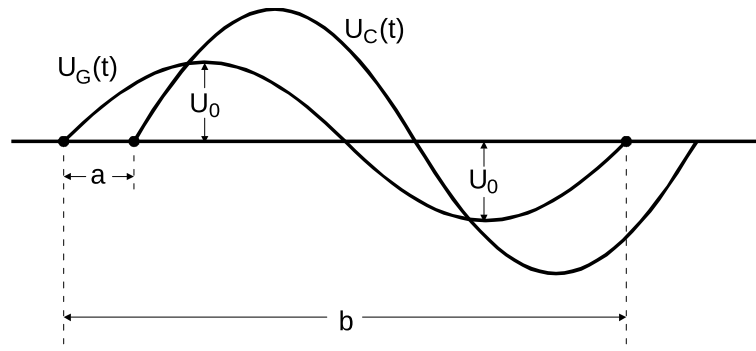


Abbildung 7: Die Phasenverschiebung zwischen Generatorspannung und Kondensatorspannung. [1]

Die Phasenverschiebung kann mithilfe von

$$\phi = \frac{a}{b} \cdot 360 \quad \text{bzw.} \quad \phi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi$$

bestimmt und in Gleichung 7 zur Berechnung der Zeitkonstante eingesetzt werden.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Zeitkonstante aus dem Entladevorgang

U bezeichnet hierbei die Spannung am Kondensator, die zuvor auch U_C genannt wurde.

Tabelle 1: Messwerte für die Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Entladezeit.

t / ms	U / V
0,0	14,0
0,4	11,5
0,8	9,6
1,0	8,9
1,2	8,2
1,6	6,8
2,0	5,6
2,4	4,6
2,8	4,0
3,0	3,5
4,0	2,0
5,0	1,2
6,0	0,9
7,0	0,4
7,6	0,0

Aus Gleichung 4 wird – unter Ausnutzung von $U \propto Q$ – die Gleichung für eine Regressionsgerade folgendermaßen bestimmt:

$$U(t) = U_0 \cdot \exp(-t/RC)$$
$$\Leftrightarrow \ln(U(t)) = \underbrace{-\frac{1}{RC}}_a t + \underbrace{\ln(U_0)}_b .$$

Die Parameter werden durch Ausführung der Regression zu

$$a = -0,492 \pm 0,010$$

$$b = 2,686 \pm 0,033$$

bestimmt, woraus die Zeitkonstante

$$RC = -\frac{1}{a} = (2,03 \pm 0,04) \text{ ms}$$

folgt. Messwerte und Regressionsgerade sind in Abbildung 8 dargestellt.

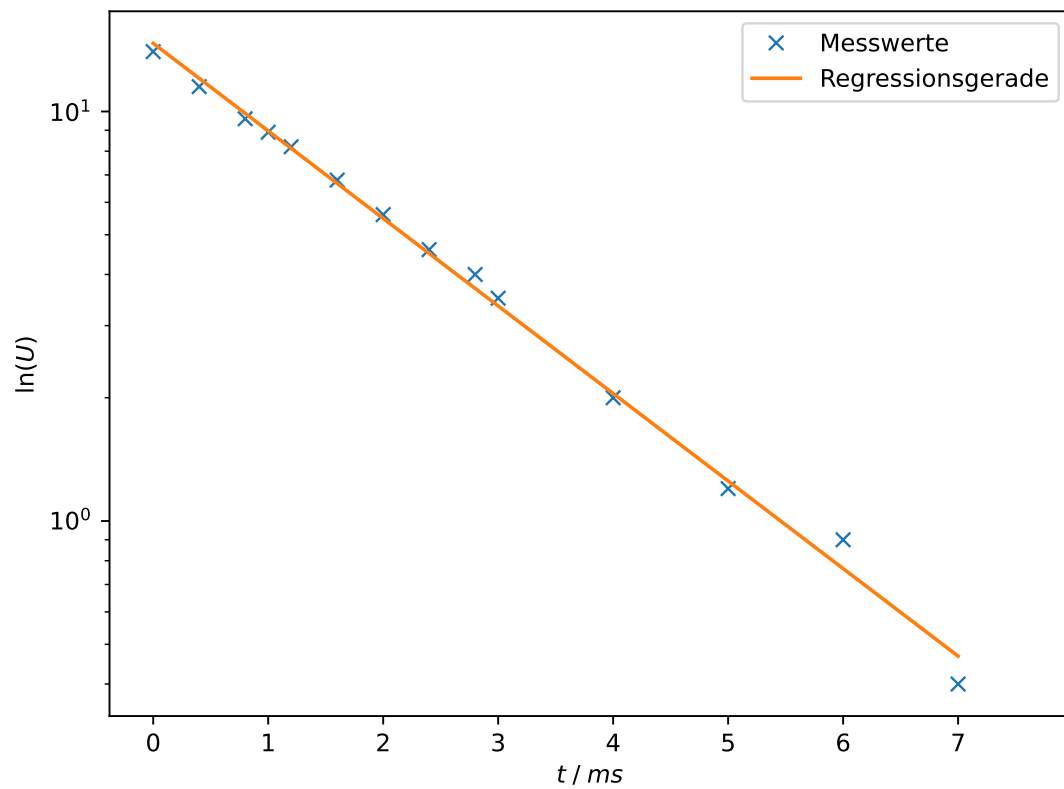


Abbildung 8: Messwerte und Regressionsgerade.

4.2 Bestimmung der Zeitkonstante aus der Frequenzabhängigkeit

Tabelle 2: Messwerte für die Kondensatorspannung in Abhängigkeit der angelegten Frequenz.

f / Hz	U / V
10	14,0
24	13,6
35	12,7
50	11,9
75	9,8
100	8,1
150	5,9
200	4,5
300	3,0
400	2,0
500	1,5
550	1,2
600	1,1
700	0,8
800	0,6
900	0,5
1000	0,4
1200	0,2
1500	0,0

Dazu wird ein Fit der in Gleichung 8 erklärten Funktion $A(\omega)$ mittels `scipy.optimize.curve_fit` berechnet. Die bestimmten Parameter lauten

$$U_0 = 15 \text{ V}$$
$$RC = (2,103 \pm 0,018) \text{ ms} .$$

In Abbildung 9 sind Messwerte und Fit dargestellt.

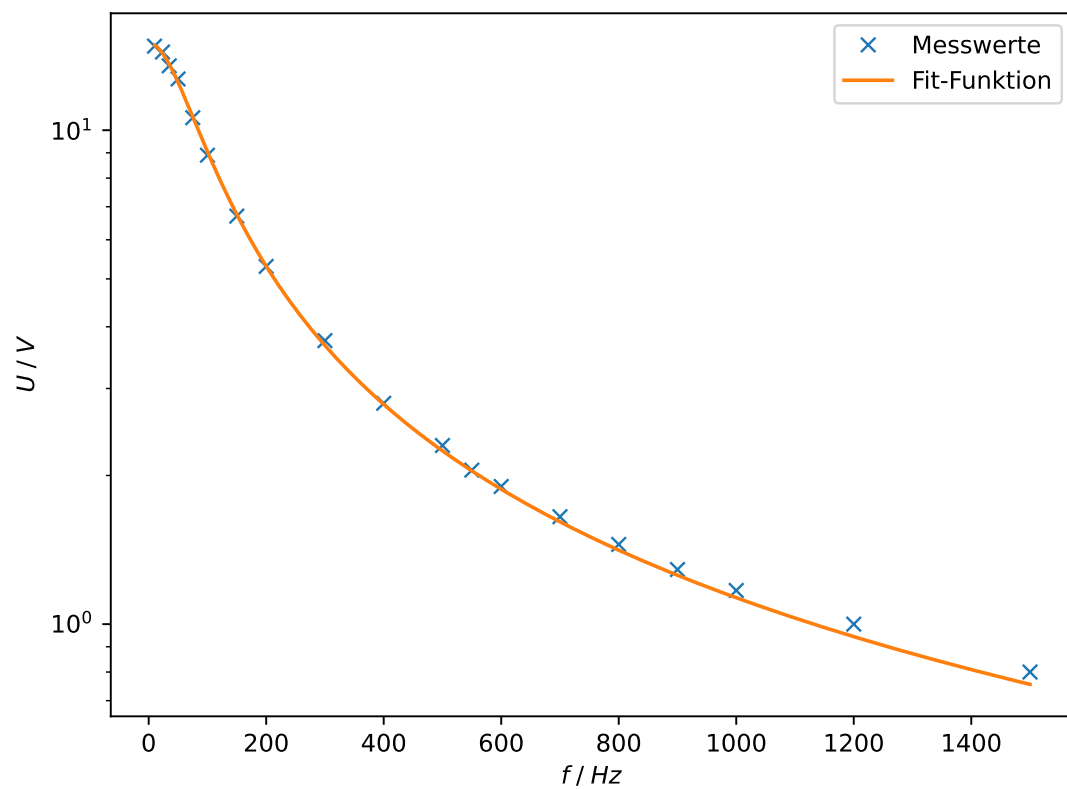


Abbildung 9: Messwerte und Fit-Funktion.

4.3 Bestimmung der Zeitkonstante aus der frequenzabhängigen Phasenverschiebung

Wie zuvor beschrieben wurde, tritt mit steigender Frequenz zunehmend eine Phasenverschiebung zwischen Kondensatorspannung und Gegenspannung auf. Auch aus diesem Phänomen lässt sich RC berechnen. Dazu wird ein Fit für Gleichung 7 berechnet. Hier ergibt sich

$$RC = (11,0 \pm 0,7) \text{ ms} .$$

Aufgrund der großen Abweichung von den zuvor berechneten RC ist in Abbildung 10 zum Vergleich auch die erwartete Kurve für diese eingezeichnet. Dabei wurde die dazwischen liegende Fläche gefüllt.

Abbildung 11 zeigt schließlich, in welchem Verhältnis die Relativamplitude zu der Phase φ steht. Es wurde mit dem gerade bestimmten $RC = (11,0 \pm 0,7) \text{ ms}$ gerechnet.

Tabelle 3: Messwerte für die Phasenverschiebung sowie die daraus berechneten $\frac{1}{f}$ und φ in Abhängigkeit der angelegten Frequenz.

f / Hz	a / ms	b / ms	$\frac{1}{f} / \text{ms}$	φ / rad
50	2,00	18,00	20,00	0,63
75	1,60	13,00	13,33	0,75
100	1,40	10,80	10,00	0,88
150	1,04	6,75	6,67	0,98
200	0,85	5,00	5,00	1,07
300	0,70	3,35	3,33	1,32
400	0,51	2,50	2,50	1,27
500	0,41	2,00	2,00	1,29
550	0,40	1,85	1,82	1,38
600	0,36	1,70	1,67	1,36
700	0,32	1,44	1,43	1,41
900	0,24	1,12	1,11	1,36
1200	0,19	0,84	0,83	1,43
1500	0,15	0,67	0,67	1,46
2000	0,12	0,50	0,50	1,51

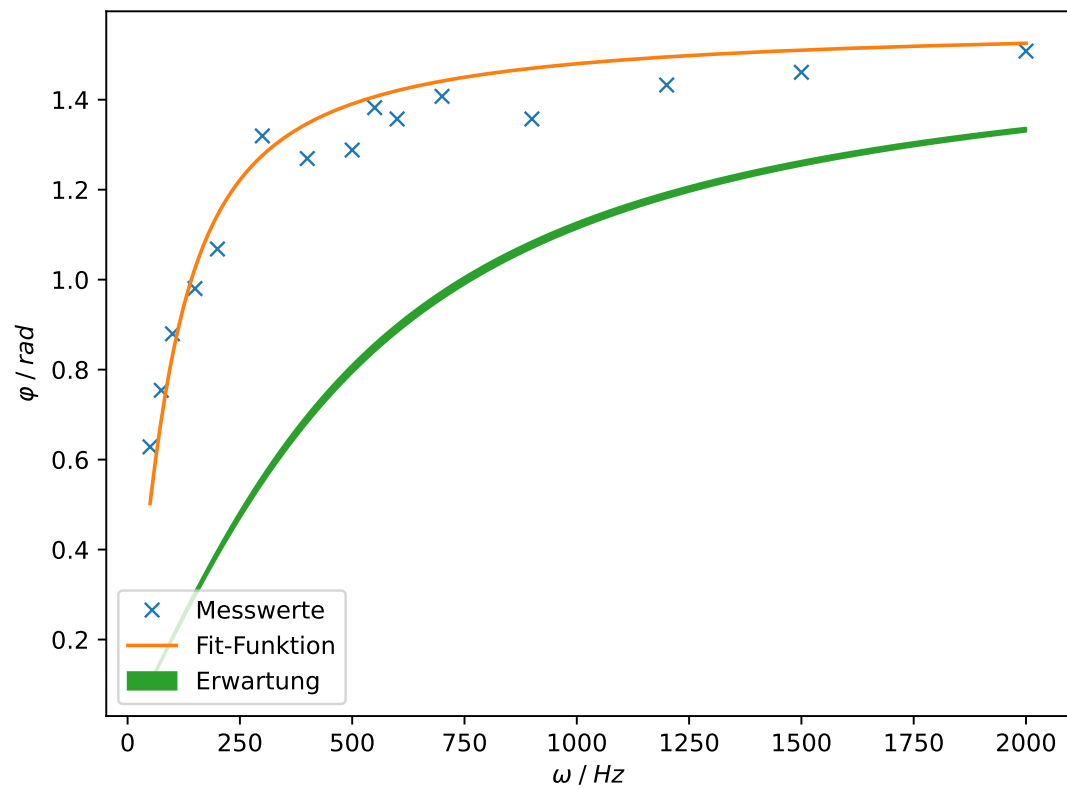


Abbildung 10: Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz.

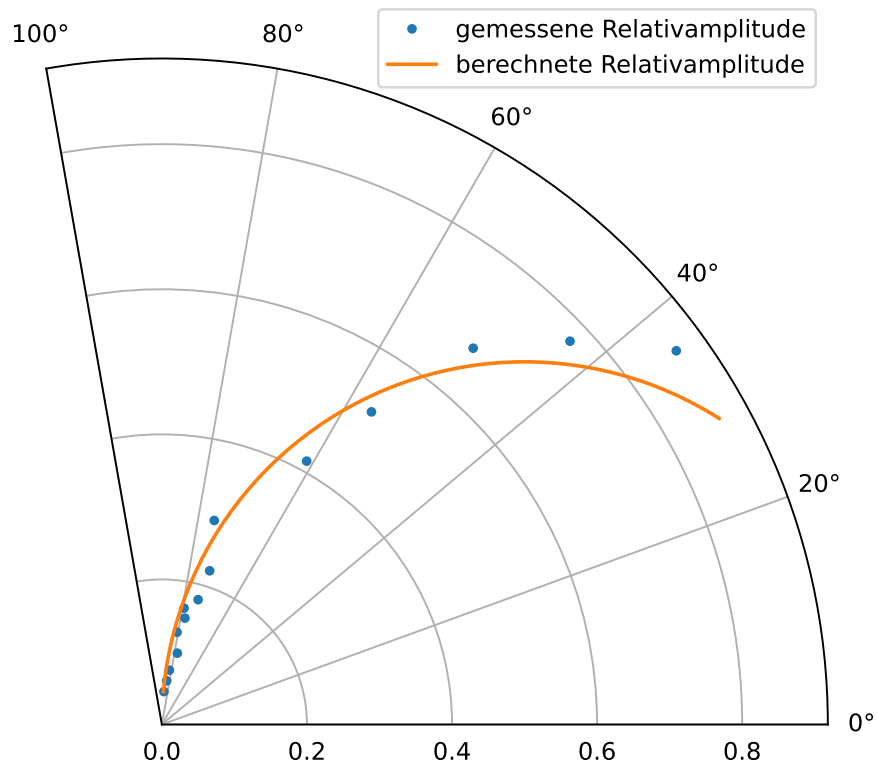


Abbildung 11: Polar-Plot der gemessenen und berechneten Relativamplituden.

5 Diskussion

Es war kein Wert für die Zeitkonstante auf der Apparatur angegeben. Daher können lediglich die Ergebnisse aus den verschiedenen Messmethoden verglichen werden.

Die Werte für RC aus Unterabschnitt 4.1 und Unterabschnitt 4.2 betrugen $(2,03 \pm 0,04)$ ms beziehungsweise $(2,103 \pm 0,018)$ ms. Das entspricht einer relativen Abweichung zueinander von 3,47 %.

Der in Unterabschnitt 4.3 bestimmte Wert von $(11,0 \pm 0,7)$ ms weicht hingegen um ein Vielfaches ab. Es handelt sich augenscheinlich um einen systematischen Fehler. Die Fehlerursache konnte nicht genau bestimmt werden, aber es ist bemerkenswert, dass der Fit selbst relativ gut funktioniert zu haben scheint. Es wurde außerdem das abgelesene b mit den Werten verglichen, die direkt aus der Frequenz ω bestimmt werden können. Dabei wurden keine nennenswerten Abweichungen festgestellt, sodass gefolgert werden kann, dass die für den großen Fehler verantwortlichen Abweichungen bei a liegen.

Zur Durchführung ist des Weiteren zu erwähnen, dass das Ablesen des analogen Oszilloskops für niedrige Frequenzen immer schwieriger wurde, weil das Bild zu flackern begann. Deshalb fehlen für die niedrigsten Frequenzwerte auch die Werte der Phasenverschiebung.

Literatur

- [1] *Versuchsanleitung zum Versuch 353: Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises.*
TU Dortmund.