

D206

# Die Wärmepumpe

Katharina Popp  
katharina.popp@tu-dortmund.de

Nicolai Weitkemper  
nicolai.weitkemper@tu-dortmund.de

Durchführung: 28.10.2020

Abgabe: 17.12.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
1.1	Grundlegendes Prinzip der Wärmepumpe . . . . .	3
1.1.1	Bestimmung der realen Gütezahl . . . . .	3
1.1.2	Bestimmung des Massendurchsatzes . . . . .	4
1.1.3	Bestimmung der mechanischen Kompressorleistung . . . . .	4
1.2	Aufbau einer Wärmepumpe . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>8</b>
3.1	Diagramm der gemessenen Temperaturverläufe . . . . .	9
3.2	Approximation der Temperaturverläufe . . . . .	9
3.3	Berechnung von Differentialquotienten . . . . .	10
3.4	Bestimmung der Gütezahlen . . . . .	10
3.5	Bestimmung des Massendurchsatzes . . . . .	11
3.6	Bestimmung der Kompressorleistung . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>14</b>
	<b>Literatur</b>	<b>15</b>

# 1 Theorie

## 1.1 Grundlegendes Prinzip der Wärmepumpe

Die Wärmepumpe wird dazu verwendet, die Richtung des Wärmeflusses umzukehren. Der „natürliche“ Wärmefluss findet in einem abgeschlossenen System von einem heißeren Körper zu einem kälteren Körper statt.

Um die Richtung des Wärmeflusses umzukehren, muss (hier: mechanische) Arbeit aufgewendet werden. Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik ist dabei die abgegebene Temperatur  $Q_1$  vom heißeren Körper gleich der aufgenommenen Wärme  $Q_2$  des kälteren Körpers und der benötigten Arbeit  $A$ . Es gilt also:

$$Q_1 = Q_2 + A .$$

Mit der Beziehung zwischen Wärme und Temperatur im realistischen, irreversiblen Fall

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} > 0$$

ergibt sich außerdem:

$$Q_1 = A + \frac{T_1}{T_2} Q_2 .$$

Das Verhältnis zwischen der abgegebenen Wärme  $Q_1$  und der benötigten mechanischen Arbeit  $A$  wird durch die Güteziffer  $\nu$  beschrieben:

$$\nu = \frac{Q_1}{A} .$$

### 1.1.1 Bestimmung der realen Güteziffer

Die mechanische Arbeit kann auch durch ein Zeitintervall und die Leistungsaufnahme  $N$  des Kompressors ausgedrückt werden:

$$\nu_{\text{real}} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t N} .$$

Der Quotient  $\frac{\Delta Q_1}{\Delta t}$  beschreibt hier die pro Zeiteinheit gewonnene Wärmemenge. Es gilt

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_1}{\Delta t}$$

und somit auch

$$\nu_{\text{real}} = \frac{1}{N} (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_1}{\Delta t} . \quad (1)$$

### 1.1.2 Bestimmung des Massendurchsatzes

Die aus dem Reservoir 2 entnommene Wärmemenge wird durch

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = (m_2 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_2}{\Delta t}$$

beschrieben.

Wenn die Verdampfungswärme  $L$  bekannt ist, lässt sich der Massendurchsatz aus

$$\frac{Q_2}{\Delta t} = L \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

bestimmen.

Tatsächlich muss  $L$  noch bestimmt werden, was durch Berechnung einer linearen Regression geschieht. Als Ansatz dient die Approximation der Clausius-Clapeyron-Gleichung für ein ideales Gas.  $L$  bezeichnet dabei die (molare) Verdampfungswärme, und  $R$  ist die universelle Gaskonstante.

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} dp &= \frac{L}{R \cdot T^2} dT \\ \ln(p) &= \frac{L}{R} \cdot \frac{1}{T} + c \end{aligned}$$

Durch Integration wurde eine Form gefunden, mit der  $\frac{L}{R}$  die Steigung  $a$  der Regressionsgeraden ist, wenn  $\ln(p)$  gegen  $\frac{1}{T}$  aufgetragen wird. Also ist  $L = a \cdot R$ .

Schließlich wird aus der molaren Verdampfungswärme  $L$  die Verdampfungswärme mit Bezug auf eine Masse berechnet, indem durch die molare Masse  $M$  dividiert wird:

$$L_{\text{Masse}} = \frac{L}{M} .$$

### 1.1.3 Bestimmung der mechanischen Kompressorleistung

Die Arbeit  $A_m$ , die benötigt wird, um das Gasvolumen  $V_a$  auf den Wert  $V_b$  zu verringern, wird durch

$$A_m = - \int_{V_a}^{V_b} p dV$$

bestimmt.

Zudem ergibt sich die Poisson'sche Gleichung als Zusammenhang zwischen Druck und Volumen

$$p_a V_a = p_b V_b = pV .$$

Für  $A_m$  ergibt sich damit

$$A_m = -p_a V_a \int_{V_a}^{V_b} V^{-\kappa} dV = \frac{1}{\kappa - 1} p_a V_a (V_b^{-\kappa+1} - V_a^{-\kappa+1}) = \frac{1}{\kappa - 1} \left( p_b \sqrt[\kappa]{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) V_a .$$

Außerdem gilt für die mechanische Kompressorleistung mit der Beziehung  $V_a = \frac{1}{\rho}m$

$$N_{\text{mech}} = \frac{\Delta A_m}{\Delta t} = \frac{1}{\kappa - 1} \left( p_b \sqrt{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{1}{\rho} \frac{\Delta m}{\Delta t} . \quad (2)$$

Hierbei bezeichnet  $\rho$  die Dichte des Gases im gasförmigen Zustand. Die Variable  $\kappa$  bezeichnet das Verhältnis der Molwärmen und ist immer positiv.

## 1.2 Aufbau einer Wärmepumpe

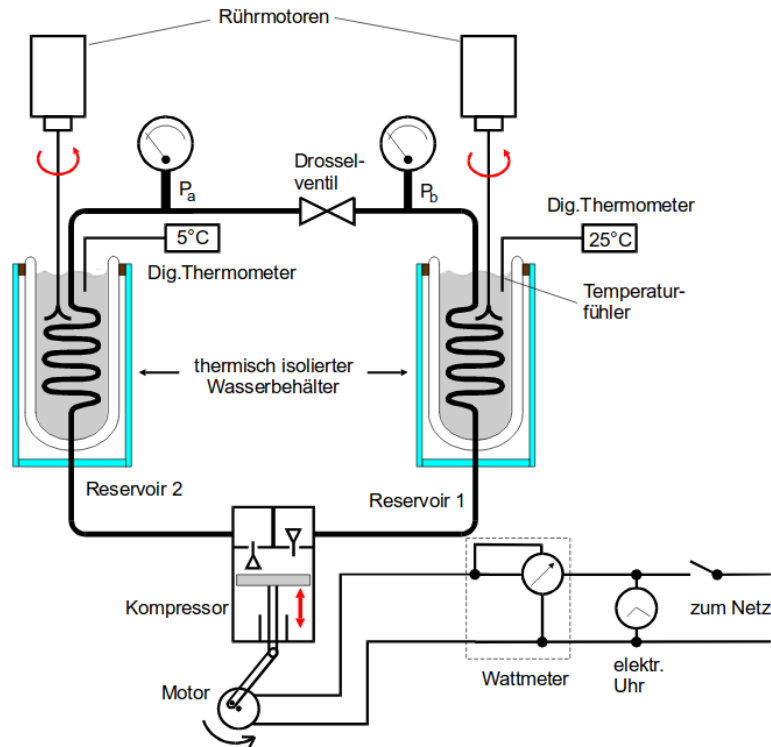


Abbildung 1: Schematischer Aufbau einer Wärmepumpe.

Der grundsätzliche Aufbau der Wärmepumpe besteht aus zwei unterschiedlich warmen Reservoirs und einem Kompressor  $K$ , der das Wärmetransportmedium durch die Kompression erhitzt. Um die Wärme zwischen den Reservoirs 1 und 2 zu transportieren, wird ein Gas verwendet, welches beim Wechsel in den gasförmigen Aggregatzustand Wärme aufnimmt und sie wieder abgibt, sobald es wieder flüssig wird.

Der Kompressor stellt einen Mediumkreislauf in der Wärmepumpe her. Zwischen den Reservoirs herrscht ein hoher Druckunterschied, welcher durch ein Drosselventil  $D$  erzeugt wird. Bei einem Druck  $p_1$  (in der Abbildung  $P_b$ ) und einer Temperatur  $T_1$  aus dem ersten Reservoir ist das Gas flüssig, bei einem Druck  $p_2$  (in der Abbildung  $P_a$ ) und einer Temperatur  $T_2$  aus dem zweiten Reservoir ist das Gas gasförmig.

Das Gas wird zu Beginn des Kreislaufs im Kompressor  $K$  stark erhitzt und durchläuft anschließend das erste Reservoir. Hier wird dem Gas Wärme entzogen und es wird flüssig. Somit ist das erste Reservoir das Wärmenehmende. Danach durchläuft das Gas das Drosselventil  $D$ , wobei ein Reiniger  $R$  das flüssige Medium von Blasenresten trennt, um den Kompressor nicht zu beschädigen. Die Durchlässigkeit wird hier durch den Temperaturunterschied zwischen  $T_1$  und  $T_2$  gesteuert. Im zweiten Reservoir nimmt das Gas wieder Wärme auf und wird gasförmig. Somit ist das zweite Reservoir das Wärmeabgebende. Das Gas gelangt zurück in den Kompressor und wird wieder erhitzt.

## 2 Durchführung

Zu Beginn des Experiments werden die Reservoirs aus Unterabschnitt 1.2 mit einer abgemessenen Wassermenge (hier: 4 L) befüllt. Anschließend werden im Abstand von  $\Delta t = 1 \text{ min}$  die Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ , die Drücke  $p_1$  und  $p_2$ , und die Leistungsaufnahme des Kompressors  $N$  gemessen. Auf den abgelesenen Wert des Drucks muss zusätzlich ein Wert von 1 bar addiert werden. Bei einer Temperatur von  $50^\circ\text{C}$  soll die Messung abgebrochen werden.

### 3 Auswertung

Die zur Verfügung gestellten Messdaten sind im Folgenden tabellarisch aufgelistet:

**Tabelle 1:** Aufgenommene Messdaten.

$t / \text{min}$	$T_1 / ^\circ\text{C}$	$p_1 / \text{bar}$	$T_2 / ^\circ\text{C}$	$p_2 / \text{bar}$	$N / \text{W}$
0,0	21,7	5,0	21,7	5,1	120,0
1,0	23,0	6,0	21,7	4,2	120,0
2,0	24,3	6,5	21,6	4,4	120,0
3,0	25,3	7,0	21,5	4,5	120,0
4,0	26,4	7,0	20,8	4,5	120,0
5,0	27,5	7,0	20,1	4,4	120,0
6,0	28,8	7,5	19,2	4,3	120,0
7,0	29,7	7,5	18,5	4,2	120,0
8,0	30,9	8,0	17,7	4,2	120,0
9,0	31,9	8,0	16,9	4,0	120,0
10,0	32,9	8,0	16,2	4,0	120,0
11,0	33,9	8,5	15,5	3,9	120,0
12,0	34,8	8,5	14,9	3,8	120,0
13,0	35,7	9,0	14,2	3,8	120,0
14,0	36,7	9,0	13,6	3,7	120,0
15,0	37,6	9,0	13,0	3,6	120,0
16,0	38,4	9,5	12,4	3,6	120,0
17,0	39,2	9,5	11,7	3,6	120,0
18,0	40,0	10,0	11,3	3,5	120,0
19,0	40,7	10,0	10,9	3,5	120,0
20,0	41,4	10,0	10,4	3,4	120,0
21,0	42,2	10,0	9,9	3,4	120,0
22,0	42,9	10,5	9,5	3,4	120,0
23,0	43,6	10,5	9,1	3,4	120,0
24,0	44,3	11,0	8,7	3,4	120,0
25,0	44,9	11,0	8,3	3,4	120,0
26,0	45,5	11,0	8,0	3,3	120,0
27,0	46,1	11,0	7,7	3,2	122,0
28,0	46,7	11,5	7,4	3,2	122,0
29,0	47,3	11,5	7,1	3,2	122,0
30,0	47,8	11,75	6,8	3,2	122,0
31,0	48,4	12,0	5,6	3,2	122,0
32,0	48,9	12,0	4,3	3,2	122,0
33,0	49,4	12,0	3,4	3,2	122,0
34,0	49,9	12,0	3,0	3,2	122,0
35,0	50,3	12,0	2,9	3,2	122,0



### 3.1 Diagramm der gemessenen Temperaturverläufe

In Abbildung 2 sind die Approximationen aus Gleichung 3 in Unterabschnitt 3.2 bereits enthalten. Dargestellt sind die zeitlichen Verläufe der Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ .

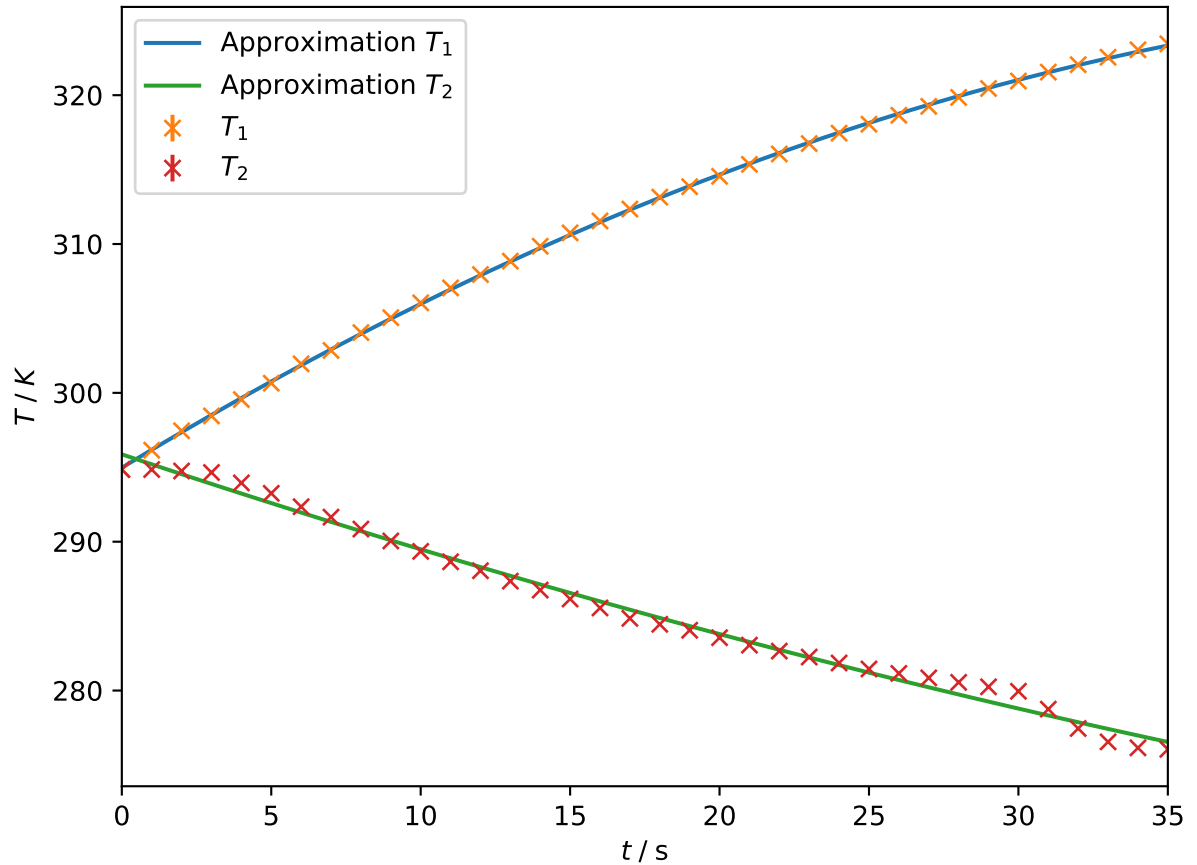


Abbildung 2: Temperaturverläufe in Abhängigkeit der Zeit  $t$ .

### 3.2 Approximation der Temperaturverläufe

Zur Approximation des Temperaturverläufe bietet sich ein Polynom zweiten Grades an:

$$T(t) = At^2 + Bt + C. \quad (3)$$

Als Fit-Parameter wurden berechnet:

**Tabelle 2:** Fit-Parameter.

	$A / \text{K/s}^2$	$B / \text{K/s}$	$C / \text{K}$
$T_1$	$-3,225 \cdot 10^{-6} \pm 4,193 \cdot 10^{-8}$	$2,028 \cdot 10^{-2} \pm 9,110 \cdot 10^{-5}$	$2,950 \cdot 10^2 \pm 4,135 \cdot 10^{-2}$
$T_2$	$9,550 \cdot 10^{-7} \pm 2,671 \cdot 10^{-7}$	$-1,121 \cdot 10^{-2} \pm 5,803 \cdot 10^{-4}$	$2,959 \cdot 10^2 \pm 2,634 \cdot 10^{-1}$

### 3.3 Berechnung von Differentialquotienten

Mithilfe der Approximation aus Gleichung 3 werden nun für vier verschiedene Temperaturen konkrete Differentialquotienten  $\frac{dT_1}{dt}$  und  $\frac{dT_2}{dt}$  berechnet. Die Ableitung des Polynoms lautet:

$$\frac{dT}{dt} = 2At + B.$$

Fehlerrechnung:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{dT}{dt} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \frac{dT}{dt}}{\partial A} \cdot \Delta A\right)^2 + \left(\frac{\partial \frac{dT}{dt}}{\partial B} \cdot \Delta B\right)^2} \\ &= \sqrt{(2t \cdot \Delta A)^2 + (\Delta B)^2}. \end{aligned}$$

**Tabelle 3:** Ableitungen der Approximationsfunktion.

$t / \text{min}$	$\frac{dT_1}{dt} / \text{K/min}$	$\frac{dT_2}{dt} / \text{K/min}$
7	$1,054 \pm 0,006$	$-0,624 \pm 0,037$
14	$0,892 \pm 0,007$	$-0,576 \pm 0,044$
21	$0,729 \pm 0,008$	$-0,528 \pm 0,053$
28	$0,567 \pm 0,010$	$-0,480 \pm 0,064$

### 3.4 Bestimmung der Güteziffern

Jeder Wassereimer war mit 4 L Wasser befüllt. Die Wärmekapazität der „Kupferschlangen“ war gegeben als  $m_k c_k = 750 \text{ J/K}$ . Laut Versuchsanleitung soll  $m_k c_k$  auch die Wärmekapazität der Eimer enthalten, dazu liegen jedoch keine weiteren Daten vor. Die

Wärmekapazität des Wassers in Reservoir 1 lässt sich mit

$$\rho_{\text{Wasser}} = 0,998\,207 \frac{\text{kg}}{\text{L}} \quad (\text{Wasserdichte bei } 20^\circ\text{C} [2])$$

$$c_{\text{Wasser}} = 4,1851 \text{ J/gK} \quad (\text{spezifische Wärmekapazität bei } 20^\circ\text{C} [3])$$

$$\begin{aligned} C_{\text{Wasser},1} &= m_1 \cdot c_{\text{Wasser}} \\ &= (\rho_{\text{Wasser}} \cdot V_{\text{Wasser}}) \cdot c_{\text{Wasser}} \\ &= \left(0,998\,207 \frac{\text{kg}}{\text{L}} \cdot 4 \text{ L}\right) \cdot 4,1851 \text{ J/gK} \\ &= 16\,710,38 \frac{\text{J}}{\text{K}} \end{aligned}$$

bestimmen, sodass aus einfacher Summation die gesamte Wärmekapazität

$$C_{\text{ges}} = 750 \frac{\text{J}}{\text{K}} + 16\,710,38 \frac{\text{J}}{\text{K}} = 17\,460,38 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

folgt.

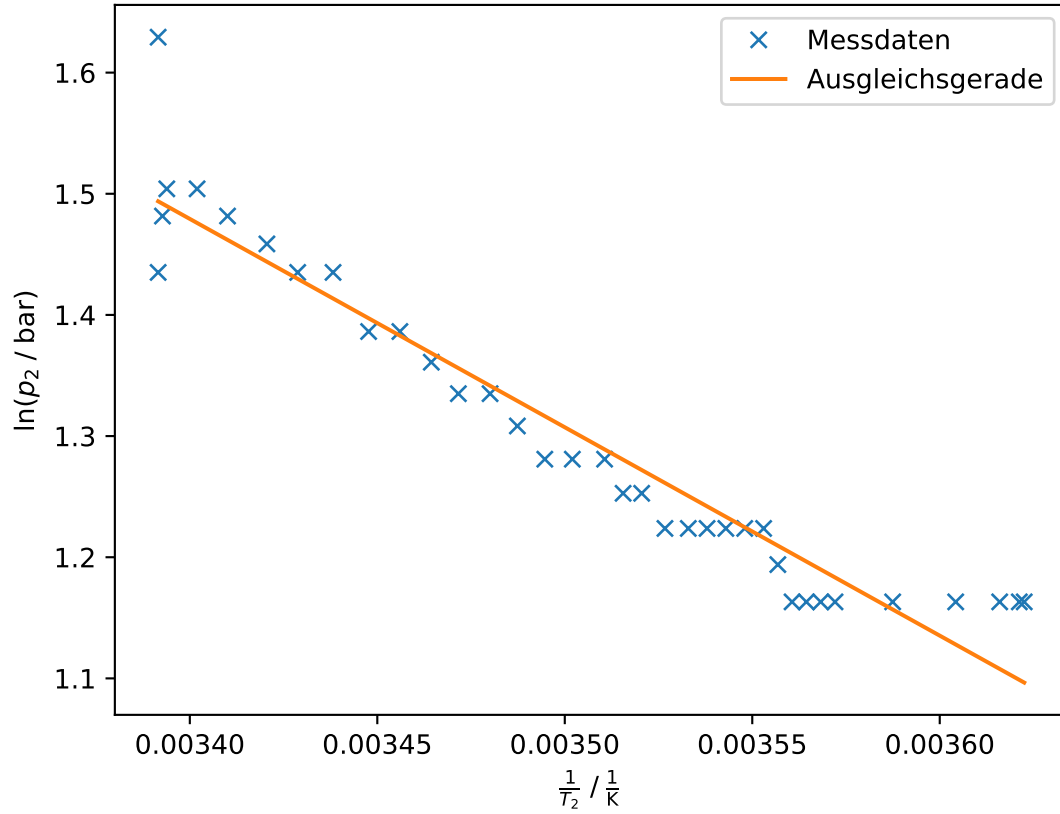
Unter Zuhilfenahme von Gleichung 1 und der Differentialquotienten aus Tabelle 3 kann nun die reale Gütezahl für verschiedene  $t$  berechnet werden.

**Tabelle 4:** Vergleich der idealen und realen Güteziffern.

$t / \text{min}$	$\nu_{\text{ideal}}$	$\nu_{\text{real}}$
7	$27,040 \pm 0,335$	$2,557 \pm 0,014$
14	$13,413 \pm 0,079$	$2,162 \pm 0,017$
21	$9,763 \pm 0,041$	$1,768 \pm 0,020$
28	$8,139 \pm 0,028$	$1,352 \pm 0,024$

### 3.5 Bestimmung des Massendurchsatzes

Mithilfe der in Unterunterabschnitt 1.1.2 aufgeführten Formeln lässt sich der Massendurchsatz für verschiedene Zeitpunkte bestimmen. Als Zwischenschritt wurde die Verdampfungswärme zu  $L = (118 \pm 6) \text{ J/g}$  berechnet. (Dieser Wert stimmt mit Literaturwerten in etwa überein. [1]) Abbildung 3 zeigt die dabei durchgeführte Regression.



**Abbildung 3:** Visualisierung der durchgeführten linearen Regression.

**Tabelle 5:** Massendurchsatz.

$t / \text{min}$	$\frac{dT_2}{dt} / \text{K/min}$	$\frac{dm}{dt} / \text{g/s}$
7	$-0,624 \pm 0,037$	$1,536 \pm 0,121$
14	$-0,576 \pm 0,044$	$1,418 \pm 0,131$
21	$-0,528 \pm 0,053$	$1,300 \pm 0,147$
28	$-0,480 \pm 0,064$	$1,181 \pm 0,169$

### 3.6 Bestimmung der Kompressorleistung

Im Folgenden wird die mechanische Leistung des Kompressors berechnet, die dieser abgibt, wenn er zwischen den Drücken  $p_1$  und  $p_2$  arbeitet.

Folgende Daten für  $\text{Cl}_2\text{F}_2\text{C}$  waren bereits gegeben:  $\rho_0 = 5,51 \text{ g/l}$  bei  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  und  $p_0 = 1 \text{ bar}$ ,  $\kappa = 1.14$

Durch Umformen der idealen Gasgleichung kann  $\rho(t)$  folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\rho(t) = \frac{p_2(t) \cdot \rho_0 \cdot T_0}{p_0 \cdot T_2(t)} .$$

Einsetzen von  $\rho(t)$  und den zuvor bestimmten Differentialquotienten in Gleichung 2 liefert dann Werte für  $N_{\text{mech}}$ , die in der folgenden Tabelle aufgelistet sind.

**Tabelle 6:** Kompressorleistung.

$t / \text{min}$	$\rho / \text{g/L}$	$N_{\text{mech}} / \text{W}$
7	$21,674 \pm 0,007$	$15,695 \pm 1,237$
14	$19,420 \pm 0,007$	$22,258 \pm 2,049$
21	$18,079 \pm 0,006$	$24,730 \pm 2,802$
28	$17,167 \pm 0,006$	$26,751 \pm 3,829$

## 4 Diskussion

Insgesamt scheint der Versuch gut gelungen zu sein. Die Messwerte weisen keine großen Abweichungen auf, und die daraus berechneten Daten wie Verdampfungswärme und reale Güteziffer sind mit Literaturwerten vergleichbar.

Auffällig war jedoch die große Abweichung der realen Güteziffer vom Idealwert. Mögliche Gründe dafür sind vor allem folgende:

**Nicht-ideale Isolierung** Obwohl Reservoirs und Leitungen eine Isolierung aufweisen, lassen sich Wärmeverluste beziehungsweise Wärmeaufnahme in Reservoir 2 nicht vollständig vermeiden.

**Keine vollständig adiabatische Kompression** Zur Bestimmung der mechanischen Kompressorleistung  $N_{\text{mech}}$  wurde näherungsweise angenommen, dass die Kompression adiabatisch erfolgt. Zudem wurde ein ideales Gas angenommen, um die Approximation der Clausius-Clapeyron-Gleichung verwenden zu können.

**Ungenauigkeiten beim Ablesen** Da die Druckmessung mit analogen Manometern erfolgte, könnte an dieser Stelle eine Messunsicherheit aufgetreten sein. Zudem sind jede Minute fünf Messwerte aufzunehmen. Da dies manuell und nacheinander geschieht, entsteht auch dabei ein subjektiver Fehler. Es muss betont werden, dass der Versuch nicht von den Urhebern dieses Protokolls durchgeführt wurde und daher in diesen Punkten nur Mutmaßungen geäußert werden können.

**Wahl der vier Zeitindizes** Zur Bestimmung der vier Differentialquotienten, die im weiteren Verlauf genutzt wurden, wurden die äquidistanten Zeiten **7, 14, 21, 28** (von 35 Minuten) als Zeitindizes  $t_1, \dots, t_4$  gewählt. Eine andere Wahl hätte die Werte für die ideale und reale Güteziffer verändert.

**Fehler der Ausgleichsfunktion** Da die Differentialquotienten der Temperaturverläufe mit einer Ausgleichsfunktion berechnet wurden, spielt auch deren Fit eine Rolle. Allerdings war die Ungenauigkeit der Fit-Parameter so gering, dass daraus keine nennenswerten Abweichungen resultieren.

## Literatur

- [1] *Dichlordifluormethan, R12, Verdampfungsenthalpie*. URL: <https://www.unternehmensberatung-babel.de/industriegase-lexikon/verdampfungsenthalpie-ueberchlaegig-berechnen/r12-verdampfungsenthalpie.html> (besucht am 17.11.2020).
- [2] *Dichte von Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur*. 2019. URL: <https://www.internetchemie.info/chemie-lexikon/daten/w/wasser-dichtetabelle.php> (besucht am 11.11.2020).
- [3] *Spezifische Wärmekapazität*. URL: [https://www.chemie.de/lexikon/Spezifische\\_W%C3%A4rmekapazit%C3%A4t.html](https://www.chemie.de/lexikon/Spezifische_W%C3%A4rmekapazit%C3%A4t.html) (besucht am 11.11.2020).