V103

Biegung elastischer Stäbe

Nicolai Weitkemper Katharina Popp

Durchführung: 24.11.2020 Abgabe: 08.11.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Im Folgenden Versuch soll das Elastizitätsmodul von Metallproben in Form von Stäben mithilfe von elastischer Biegung bestimmt werden.

2 Theorie

2.1 Problemstellung

Die Kraft F, die auf eine Fläche wirkt, wird als Spannung bezeichnet. Man unterscheidet zwischen der senkrecht wirkenden Komponente, der Normalspannung σ und der parallel zur Fläche wirkenden Komponente, der Tangential- oder Schubspannung. Die Normalspannung ist proportional zur Längenänderung ΔL und wird durch das Hook'sche Gesetz beschrieben:

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L}. \tag{1}$$

Das Elastizitätsmodul E stellt eine wichtige Materialkonstante eines Stoffes dar und ist hier ein Proportionalitätsfaktor. Diese Größe kann mithilfe der Biegung eines Körpers bestimmt werden, wobei die Durchbiegung durch eine Funktion $D(x)$ beschrieben wird. $D(x)$ setzt sich aus der Auslenkung $D_0(x)$ bei einer sogenannten Nullmessung, einer Messung ohne angehängtes Gewicht, und einer Auslenkung $D_\mathrm{M}(x)$ bei einer Messung mit angehängtem Gewicht zusammen. Es gilt

$$D(x) = D_\mathrm{M}(x) - D_0(x). \tag{2}$$

Im Folgenden sollen zwei Möglichkeiten zur Berechnung der Biegung vorgestellt werden.

2.2 Durchbiegung eines homogenen Stabes bei einseitiger Einspannung

Die erste Möglichkeit besteht darin, einen Stab an einer Seite einzuspannen. Die Funktion $D(x)$ kann durch ein Drehmoment M_F berechnet werden, welches die anliegende Kraft F erzeugt. Das Drehmoment bewirkt eine Änderung des Querschnitts des Stabes. Die oberen Schichten werden gedehnt und die unteren gestaucht. Dazwischen liegt die neutrale Faser, eine Fläche, die ihre ursprüngliche Länge beibehält. Im Inneren treten Normalspannungen auf, die ein inneres Drehmoment M_σ erzeugen. Der Stab wird soweit gebogen, bis das äußere und innere Drehmoment gleich sind:

$$M_\sigma = M_\mathrm{F} \tag{3}$$

mit

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)dq \tag{4}$$

und

$$M_\mathrm{F} = F(L - x). \tag{5}$$

Die Variable x stellt eine beliebige Stelle auf dem Stab dar, Q ist der Querschnitt des Stabes und y beschreibt den Abstand zwischen Flächenelement dq und der neutralen Faser. Für $D(x)$ ergibt sich

$$D(x) = \frac{F}{2EI}(Lx^2 - \frac{x^3}{3}) \tag{6}$$

für $0 \leq x \leq L$. Die Variable I stellt das Flächenträgheitsmoment dar.

2.3 Durchbiegung eines homogenen Stabes bei beidseitiger Einspannung

Die zweite Möglichkeit besteht darin, den Stab an beiden Enden einzuspannen und die Kraft in der Mitte des Stabes angreifen zu lassen. Für das äußere Drehmoment M_F ergibt sich

$$M_\mathrm{F} = -\frac{F}{2}x \tag{7}$$

für $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ und

$$M_\mathrm{F} = \frac{F}{2}(L - x) \tag{8}$$

für $\frac{L}{2} \leq x \leq L$. Für $D(x)$ ergibt sich

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(3L^2x - 4x^3) \tag{9}$$

für $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ und

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \tag{10}$$

für $\frac{L}{2} \leq x \leq L$.

Das Elastizitätsmodul kann durch Umformen der Gleichungen (6) , (9) oder (10) für den jeweiligen Fall berechnet werden.

3 Durchführung

3.1 Messung des Bauteile

Zu Beginn des Versuchs werden ein runder und ein eckiger Stab ausgemessen. Es wird die Länge, der Radius und die Seitenlängen der Stäbe jeweils fünfmal mit einer Schieblehre gemessen.

3.2 Schematischer Aufbau

3.3 Einseitige Einspannung

Zuerst wird der runde Stab wie in Abbildung in Kapitel 3.2 in die Messapparatur eingespannt. Eine der verschiebbaren Messuhren wird an den Anfang der Messskala geschoben, während die andere nicht verwendet wird. Anschließend wird ein Gewicht gewählt, sodass die maximale Auslenkung des Stabes zwischen 3 mm und 7 mm liegt. Das Gewicht wird mit einer elektronischen Waage fünfmal gemessen. Um nun die Durchbiegung des Stabes zu messen, wird die Messuhr die Skala entlanggeschoben und in regelmäßigen Abständen wird zuerst die Auslenkung $D_0(x)$ des runden Stabes ohne angehängtes Gewicht und dann mit angehängtem Gewicht, D_M, abgelesen. Es werden 20 Messungen gemacht.

Die Messung für den eckigen Stab ist analog.

3.4 Beidseitige Einspannung

Diese Messung wird nur für den runden Stab durchgeführt. Der Stab wird in der Messapparatur an den Enden an den Punkten A und B (siehe Abbildung) befestigt. Es wird ein Gewicht bestimmt, mit dem die maximale Auslenkung des Stabes zwischen 3 mm und 7 mm liegt und mit einer elektronischen Waage fünfmal ausgemessen. Eine Messuhr wird an den Anfang der Messskala geschoben, die andere an das Ende. Um die Durchbiegung zu messen, wird die Messuhr die Skala entlanggeschoben und in regelmäßigen Abständen wird eine Nullmessung und eine Messung mit angehängtem Gewicht durchgeführt. Es werden 16 Messungen gemacht.