V302

Elektrische Brückenschaltungen

Katharina Popp
katharina.popp@tu-dortmund.de

Nicolai Weitkemper
nicolai.weitkemper@tu-dortmund.de

Durchführung: 03.11.2020 Abgabe: 23.11.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Bei diesem Versuch sollen mithilfe von Brückenschaltungen unbekannte Widerstände, sowie Induktivitäten und Kapazitäten gemessen werden. Außerdem wird mithilfe einer Wien-Robinson-Brücke die Frequenz der Brückenspannung ermittelt werden.

2 Theorie

2.1 Grundprinzip der elektrischen Brückenschaltungen

Elektrische Brückenschaltungen werden dazu verwendet, um unbekannte Größen, wie zum Bespiel Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten zu bestimmen. Dazu wird die Potentialdifferenz U_{Br} zwischen zwei Punkten an der Schaltung gemessen. Mithilfe der Kirchhoff'schen Regeln lässt sich diese Brückenspannung U_{Br} berechnen.

1. Die Knotenregel besagt, dass alle Ströme, die in einen Knoten hineinfließen, in der Summe gleich Null sein müssen.
$$\sum_k I_k = 0 \tag{1}$$
2. Die Maschenregel besagt, dass in einer Masche alle vorhandenen Spannungen in der Summe gleich Null sein müssen.
$$\sum_k U_k = 0 \tag{2}$$

Daraus folgt für die allgemeine Brückenspannung:

$$U_{\mathrm{Br}} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} U_{\mathrm{S}} \tag{3}$$

Hierbei ist U_{S} die Speisespannung des Stromkreises. Für das Verhältnis

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \tag{4}$$

verschwindet die Brückenspannung und man spricht von einer abgeglichenen Brücke. In den Brückenschaltungen sind Bauelemente enthalten, die als Abgleichelemente dienen. Dies sind Potentiometer, mit denen sich die ohmschen Widerstände in den Schaltungen variieren lassen, um die Brückenspannung auf Null zu regeln. Da die Speisespannung proportional zur Brückenspannung ist, sollte die Speisespannung möglichst hoch eingestellt werden, damit eine höhere Abgleichempfindlichkeit erzielt wird. Ziel ist es also, um eine unbekannte Größe zu bestimmen, die gegebenen Bauteile so einzustellen, dass die Brückenspannung gleich Null wird. Dann kann man aus den Beziehungen der bekannten Größen die Größen für das unbekannte Bauteil berechnen.

2.2 Bestimmung der unbekannten Größen

2.2.1 Messung von ohmschen Widerständen

Um unbekannte Widerstände zu bestimmen, wird die Wheatstone'sche Brückenschaltung verwendet. Diese besteht nur aus ohmschen Widerständen und kann mit Gleich- und Wechselstrom betrieben werden. Der unbekannte Widerstand kann mithilfe der Gleichung (4) berechnet werden. Es gilt

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \,. \tag{5}$$

Die schon bekannten Widerstände sind R_2, R_3 und R_4. $\frac{R_3}{R_4}$ kann durch ein Potentiometer so eingestellt werden, dass die Brückenspannung U_{Br} gleich Null wird. Mit den so eingestellten Widerständen können die Größen für das unbekannte Bauteil berechnet werden.

2.2.2 Komplexe Widerstände

Bei der Verwendung von Kondensatoren mit einer Kapazität C und Spulen mit einer Induktivität L werden bei der Berechnung komplexe Widerstände verwendet. Als Speisespannung wird eine Wechselspannung eingesetzt. Komplexe Widerstände setzen sich aus einem Wirkwiderstand X und einem Blindwiderstand Y zusammen. Die allgemeine Darstellung lautet

$$\boldsymbol{R} = X + jY \,. \tag{6}$$

Für ohmsche Widerstände R, Kapazitäten C und Induktivitäten L werden durch

$$\boldsymbol{R}_R = R \,, \qquad \boldsymbol{R}_C = -\frac{j}{\omega C} \,, \qquad \boldsymbol{R}_L = j\omega L \tag{7}$$

dargestellt.

2.2.3 Messung von Kapazitäten

Da bei einem realen Kondensator immer ein Teil der elektrischen Energie in Wärmeenergie umgewandelt wird und so verloren geht, wird mit dem Kondensator ein ohmscher Widerstand in Reihe geschaltet. Dieser ohmsche Widerstand wird mit Gleichung (5) berechnet. Für die Kapazität des Kondensators gilt

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3} \,. \tag{8}$$

Die Kapazität C_2 ist hierbei schon bekannt und ist mit einem Potentiometer, welches den bekannten Widerstand R_2 regelt, in Reihe geschaltet.

2.2.4 Messung von Induktivitäten

Auch bei einer realen Induktivität wird ein Teil der enthaltenen magnetischen Feldenergie in Wärmeenergie umgewandelt und geht verloren. Aus diesem Grund wird auch hier ein ohmscher Widerstand mit der Induktivität, zum Beispiel einer Spule, in Reihe geschaltet. Der ohmsche Widerstand kann wieder mit Gleichung (5) bestimmt werden. Die Induktivität wird durch

$$L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4} \tag{9}$$

berechnet. Die Induktivität L_2 ist hier ebenfalls schon bekannt, und mit dem Potentiometer für R_2 in Reihe geschaltet.

2.2.5 Maxwell-Brücke

Eine weitere Möglichkeit, um Induktivitäten zu bestimmen, ist die Maxwell'sche Brückenschaltung. Die Elemente zum Abgleichen der Brücke sind hier R_2, R_3, R_4 und C_4, wobei R_3 und R_4 durch ein Potentiometer geregelt werden. Die Kapazität C_4 ersetzt die Induktivität L_2, da dies einfacher zu realisieren ist. Der Widerstand, der mit der Induktivität in Reihe geschaltet ist, lässt sich durch Gleichung (5) bestimmen, die Induktivität wird mit

$$L_x = R_2 R_3 C_4 \tag{10}$$

berechnet.

2.3 Frequenzabhängige Brückenschaltungen

Alle komplexen Widerstände sind von der Frequenz ω der Speisespannung U_S abhängig. Ist diese Frequenz zu hoch eingestellt, wird der Anteil der Streukapazitäten, die in den Bauteilen entstehen, zu groß, und ein Abgleichen ist nicht mehr möglich. Wenn die Frequenz zu niedrig ist, kommt es zu Problemen bei der technischen Handhabung, da nun einige Periodendauern für Einschwingvorgänge benötigt werden, bis sich eine stabile Brückenspannung U_Br eingestellt hat. Die Frequenzen sind optimal, wenn sich die Blind- und Wirkwiderstände einer Schaltung in einer Größenordnung befinden.

2.3.1 Die Wien-Robinson-Brücke

In der Schaltung der Wien-Robinson-Brücke sind keine Abgleichelemente enthalten. Die Brückenspannung U_Br soll in Abhängigkeit der Frequenz ω bestimmt werden. Es gilt:

$$\left|\frac{U_\mathrm{Br}}{U_\mathrm{S}}\right| = \frac{1}{9} \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2}, \tag{11}$$

wobei

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \tag{12}$$

ist, mit

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}\,. \tag{13}$$

Die Wien-Robinson-Brücke filtert aus dem kontinuierlichen Frequenzspektrum die Frequenz ω_0 heraus und schwächt die Frequenzen in der Nähe von ω_0. Mit dieser Eigenschaft soll der Klirrfaktor gemessen werden, welcher dazu dient, die Qualität des Sinusgenerators zu prüfen. Wenn der Klirrfaktor hinreichend klein ist, ist auch der Anteil der Oberwellen, welche bei einem realen Sinusgenerator entstehen, gering. Der Generator wird auf die Frequenz ω_0 geregelt, und übrig bleiben nur die von ω_0 verschiedenen Frequenzen.

2.3.2 Die TT-Brücke

Die TT-Brücke dient wie die Wien-Robinson-Brücke als elektronischer Filter. Der Unterschied liegt darin, dass die Spannungen U_S und U_Br gegen Masse angeschlossen werden können. Für das Spannungsverhältnis ergibt sich mit den Bezeichnungen aus den Gleichungen (12) und (13):

$$\left|\frac{U_\mathrm{Br}}{U_\mathrm{S}}\right| = \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 16\Omega^2}. \tag{14}$$

3 Durchführung

Im Folgenden soll die Durchführung der Messungen von verschiedenen Größen mithilfe der oben beschriebenen Brückenschaltungen beschrieben werden. Dabei werden zu jeder Schaltung mehrere Messungen unter Variation der Bauteile R_2, C_2 und L_2 aufgenommen. Zu Beginn des Experiments sind eine Speisespannung U_S, ein digitales Oszilloskop, welches die Brückenspannung U_Br anzeigt, verschiedene ohmsche Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten, sowie zwei Potentiometer gegeben.

3.1 Wheatstone'sche Brückenschaltung

Zunächst wird die Wheatstone'sche Brückenschaltung anhand der Abbildung in Kapitel 2.2.1 gebaut. Es wird eine konstante Frequenz von $f = 1000\,\mathrm{Hz}$ eingestellt.

Die Brücke wird mit Wechselstrom betrieben. Anschließend wird mithilfe des Potentiometers, welches einen Gesamtwiderstand von $1\,\mathrm{k\Omega}$ besitzt, die Brückenschaltung abgeglichen, indem die Widerstände R_3 und R_4 variiert werden und U_Br auf Null geregelt wird. Nachdem die Messwerte für R_2, R_3 und R_4 abgelesen wurden, wird mithilfe von Gleichung (5) der unbekannte Widerstand R_x mit dem Wert 13 berechnet. Der Widerstand R_4 wird durch $1000\,\mathrm{k\Omega} - R_3$ berechnet, da zwischen den Eingängen des Potentiometers ein Unterschied von $1000\,\mathrm{k\Omega}$ besteht. Die Messung wird wiederholt unter der Variation von R_2. Wir haben die Messung mit einem anderen Potentiometer noch ein weiteres Mal durchgeführt.

3.2 Kapazitätsmessbrücke

Die Schaltung der Kapazitätsmessbrücke wird nach der Abbildung in Kapitel 2.2.3 aufgebaut. Die Brücke wird mit Wechselspannung betrieben. Die ohmschen Widerstände R_2 und R_3/R_4 werden bei dieser Schaltung durch Potentiometer eingestellt. Um beide Widerstände möglichst gleichmäßig einzustellen, sollten die Potentiometer abwechselnd geregelt werden für das Abgleichen der Brücke. Wenn die Brückenspannung gleich Null ist, können die Werte der Widerstände abgelesen werden und Wert 9, welcher den unbekannten Verlustwiderstand und die unbekannte Kapazität beschreibt, kann mit den Gleichungen (5) und (8) identifiziert werden. Anschließend wiederholen wir die Messung unter Variation von C_2

3.3 Induktivitätsmessbrücke

Die Schaltung der Induktivitätsmessbrücke wird nach dem Schaltplan in Kapitel 2.2.4 geschaltet. In dieser Schaltung werden die Widerstände R_2, R_3/R_4 durch die Potentiometer bestimmt, die wieder alternierend zum Abgleichen eingestellt werden. Der zu bestimmende Wert ist hier 17. Mit den Gleichungen (5) und (9) kann der Verlustwiderstand und die Induktivität berechnet werden. Wir wiederholen die Messung unter Variation von L_2.

3.4 Maxwell-Brücke

Der Wert 17 soll hier noch einmal mithilfe einer Maxwell-Brücke bestimmt werden. Wir bauen die Schaltung anhand von Abbildung 2.2.5 auf. Der Widerstand R_2 ist konstant, während R_3 und R_4 dieses Mal getrennt mit jeweils einem Potentiometer bestimmt werden. Im Gegensatz zur Kapazitätsmessbrücke variieren wir die Kapazität C_2 und haben keine weitere Induktivität in der Schaltung. Die unbekannte Induktivität wird mit Gleichung (10) bestimmt und der unbekannte Verlustwiderstand mit Gleichung (5).

3.5 Wien-Robinson-Brücke

Zunächst wird die Schaltung nach der Abbildung in Kapitel 2.3.1 aufgebaut. Wir benutzen drei konstante Widerstände, wobei $2R'$ der doppelte Wert von R' sein sollte. Zusätzlich werden zwei gleiche Kapazitäten benötigt, wobei in unserem Fall nur zwei ähnliche Kapazitäten zur Verfügung standen. Im ersten Teil der Messung wird eine konstante Speisespannung von $U_\text{S} = 20\,\text{k}\Omega$ eingestellt. Ziel ist es, in einem Frequenzspektrum von $20\,\text{Hz}$ bis $30\,000\,\text{Hz}$ ein Minimum der Brückenspannung U_Br zu finden. Dazu beginnen wir bei $20\,\text{Hz}$ und verdoppeln den Wert, um einen groben Überblick über den Verlauf von U_Br zu bekommen. Im Bereich des Minimums werden in kleineren Abständen der Frequenzen nochmal mehr Messwerte aufgenommen. Anschließend wird der grobe Verlauf weiter bis zur oberen Grenze des Spektrums von $30\,000\,\text{Hz}$ gemessen. Im zweiten Teil des Messung wird die Speisespannung U_S auf dem Oszilloskop dargestellt und der Verlauf dieser Spannung in Abhängigkeit der Frequenz bestimmt.

4 Auswertung

4.1 a)

Zunächst sollte ein unbekannter Ohm'sche Widerstand („Wert 13") mithilfe der Wheatstoneschen Brückenschaltung ausgemessen werden. Für die Linearität $\frac{R_3}{R_4}$ gilt eine unsystematische Abweichung von $\pm 0.5\%$. Für den festen Widerstand R_2 war dagegen keine Abweichung angegeben, sodass die berechnete Abweichung für R_x kaum aussagekräftig ist.

Die nachstehende Tabelle ist in je zwei Zeilen untergliedert, weil der Versuch mit einem anderen Potentiometer wiederholt wurde.

Tabelle 1: TODO

R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	R_x / Ω
664	317	683	308.182 ±1.541
332	483	517	310.166 ±1.551
332	488	512	316.438 ±1.582
664	323	677	316.798 ±1.584

Damit ist R_x zu 312.896 ± 0.782 bestimmt.

4.2 b)

Mithilfe der Kapazitätsmessbrücke sollte eine unbekannte Kapazität („Wert 9") bestimmt werden. Die Toleranz (Eichgenauigkeit) des Verlustwiderstands beträgt hier $\pm 3\,\%$. Wie zuvor wird die Abweichung für $\frac{R_3}{R_4}$ berücksichtigt.

Tabelle 2: TODO

C_2 / nF	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	C_x / nF	R_x / Ω
750	267	630	370	440.476 ±2.202	454.622 ±13.827
450	438.5	508	492	435.827 ±2.179	452.760 ±13.770

Die gemittelten Werte sind $C_x = (438{,}151 \pm 1{,}549)\,\mathrm{nF}$ und $R_x = (453{,}691 \pm 9{,}757)\,\Omega$.

4.3 c)

Mit der Induktivitätsbrücke soll eine unbekannte Induktivität („Wert 17") berechnet werden. Die Toleranz des Verlustwiderstands entspricht der aus b).

Tabelle 3: TODO

L_2 / mH	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	L_x / mH	R_x / Ω
27.5	57	605.5	394.5	87.49	42.21
14.6	33	740.5	259.5	94.17	41.66

4.4 d)

Hier soll der „Wert 17" erneut berechnet werden, allerdings mit einer Maxwell-Brücke. Die Toleranz für R_3 und R_4 beträgt $\pm 3\,\%$.

Wert 17

Tabelle 4: TODO

R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	C_4 / nF	R_x / Ω	L_x / mH
664	81.5	608	750	89.006	40.587
664	137.5	1003	450	91.026	41.085
332	277.5	1003	450	91.854	41.459

4.5 e)

In dieser Messreihe wurde die Abhängigkeit der Brückenspannung von der Frequenz untersucht. Das folgende Diagramm zeigt den Verlauf der Spannung. Auf der x-Achse ist $\Omega = \frac{v}{v_0}$ aufgetragen, wobei v_0 die Frequnz dargestellt, bei der die Brückenspannung U_{Br} miminal wird. Auf der y-Achse ist der Quotient $\frac{U_{\mathrm{Br}}}{U_{\mathrm{S}}}$ dargestellt.

4.6 f)

In diesem Aufgabenteil soll der sogenannte Klirrfaktor k nach der Formel

$$k := \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + ...}}{U_1} \tag{15}$$

berechnet werden. Dazu gilt

$$U_2 = \frac{U_{\mathrm{Br}}}{f(2)} \ . \tag{16}$$