

V103

Biegung elastischer Stäbe

Katharina Popp
katharina.popp@tu-dortmund.de

Nicolai Weitkemper
nicolai.weitkemper@tu-dortmund.de

Durchführung: 24.11.2020

Abgabe: 13.12.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Problemstellung	3
2.2	Durchbiegung eines homogenen Stabes bei einseitiger Einspannung	3
2.3	Durchbiegung eines homogenen Stabes bei beidseitiger Einspannung . . .	4
3	Durchführung	6
3.1	Messung des Bauteile	6
3.2	Schematischer Aufbau	6
3.3	Einseitige Einspannung	6
3.4	Beidseitige Einspannung	7
4	Auswertung	8
4.1	Bestimmung der Abmessungen der Stäbe	8
4.2	Rechteckiger Stab, einseitig eingespannt	8
4.3	Runder Stab, einseitig eingespannt	11
4.4	Runder Stab, beidseitig eingespannt	12
5	Diskussion	16
5.1	Vergleich mit Literaturwerten	16
5.2	Mögliche Gründe für Abweichungen	16
	Literatur	18

1 Zielsetzung

Im folgenden Versuch soll der Elastizitätsmodul von Metallproben in Form von Stäben mithilfe von elastischer Biegung bestimmt werden.

2 Theorie

2.1 Problemstellung

Die Kraft F , die auf eine Fläche wirkt, wird als Spannung bezeichnet. Man unterscheidet zwischen der senkrecht wirkenden Komponente, der Normalspannung σ , und der parallel zur Fläche wirkenden Komponente, der Tangential- oder Schubspannung. Die Normalspannung ist proportional zur Längenänderung ΔL und wird durch das Hookesche Gesetz beschrieben:

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L}. \quad (1)$$

Der Elastizitätsmodul E stellt eine wichtige Materialkonstante eines Stoffes dar und ist hier ein Proportionalitätsfaktor. Diese Größe kann mithilfe der Biegung eines Körpers bestimmt werden, wobei die Durchbiegung durch eine Funktion $D(x)$ beschrieben wird. $D(x)$ setzt sich aus der Auslenkung $D_0(x)$ bei einer sogenannten Nullmessung, einer Messung ohne angehängtes Gewicht, und einer Auslenkung $D_M(x)$ bei einer Messung mit angehängtem Gewicht zusammen. Es gilt

$$D(x) = D_M(x) - D_0(x). \quad (2)$$

Im Folgenden sollen zwei Möglichkeiten zur Berechnung der Biegung vorgestellt werden.

2.2 Durchbiegung eines homogenen Stabes bei einseitiger Einspannung

Die erste Möglichkeit besteht darin, einen Stab an einer Seite einzuspannen. Die Funktion $D(x)$ kann durch ein Drehmoment M_F berechnet werden, welches die anliegende Kraft F erzeugt. Das Drehmoment bewirkt eine Änderung des Querschnitts des Stabes. Die oberen Schichten werden gedehnt und die unteren gestaucht. Dazwischen liegt die neutrale Faser, eine Fläche, die ihre ursprüngliche Länge beibehält. Im Inneren treten Normalspannungen auf, die ein inneres Drehmoment M_σ erzeugen. Der Stab wird soweit gebogen, bis das äußere und innere Drehmoment gleich sind:

$$M_\sigma = M_F \quad (3)$$

mit

$$M_\sigma = \int_Q y \sigma(y) dq \quad (4)$$

und

$$M_F = F(L - x). \quad (5)$$

Die Variable x stellt eine beliebige Stelle auf dem Stab dar, Q ist der Querschnitt des Stabes und y beschreibt den Abstand zwischen Flächenelement dq und der neutralen Faser. Für $D(x)$ ergibt sich

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad (6)$$

für $0 \leq x \leq L$. Die Variable \mathbf{I} stellt das Flächenträgheitsmoment dar. Dieses wird durch

$$\mathbf{I} = \int_Q y^2 dq(y) \quad (7)$$

beschrieben.

Speziell ist für Stäbe mit rechteckigem Querschnitt

$$\mathbf{I}_r = \frac{1}{12} a^3 b, \quad (8)$$

wobei a die horizontale und b die vertikale Kantenlänge ist, und für Stäbe mit kreisförmigem Querschnitt mit Durchmesser d beziehungsweise Radius $R = \frac{d}{2}$ [3]

$$\mathbf{I}_k = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi}{4} R^4. \quad (9)$$

2.3 Durchbiegung eines homogenen Stabes bei beidseitiger Einspannung

Die zweite Möglichkeit besteht darin, den Stab an beiden Enden einzuspannen und die Kraft in der Mitte des Stabes angreifen zu lassen. Für das äußere Drehmoment M_F ergibt sich

$$M_F = -\frac{F}{2}x \quad (10)$$

für $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ und

$$M_F = \frac{F}{2}(L - x) \quad (11)$$

für $\frac{L}{2} \leq x \leq L$. Für $D(x)$ ergibt sich

$$D(x) = \frac{F}{48EI} (3L^2x - 4x^3) \quad (12)$$

für $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ und

$$D(x) = \frac{F}{48EI} (4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \quad (13)$$

für $\frac{L}{2} \leq x \leq L$.

Der Elastizitätsmodul kann durch Umformen der Gleichungen (6), (12) oder (13) für den jeweiligen Fall berechnet werden.

Die zuvor genannte Formel für das Flächenträgheitsmoment \mathbf{I} ist auch hier gültig.

3 Durchführung

3.1 Messung des Bauteile

Zu Beginn des Versuchs werden ein runder und ein eckiger Stab ausgemessen. Es werden die Länge, der Durchmesser und die Seitenlängen der Stäbe jeweils fünfmal mit einer Schieblehre beziehungsweise einem Maßband gemessen.

3.2 Schematischer Aufbau

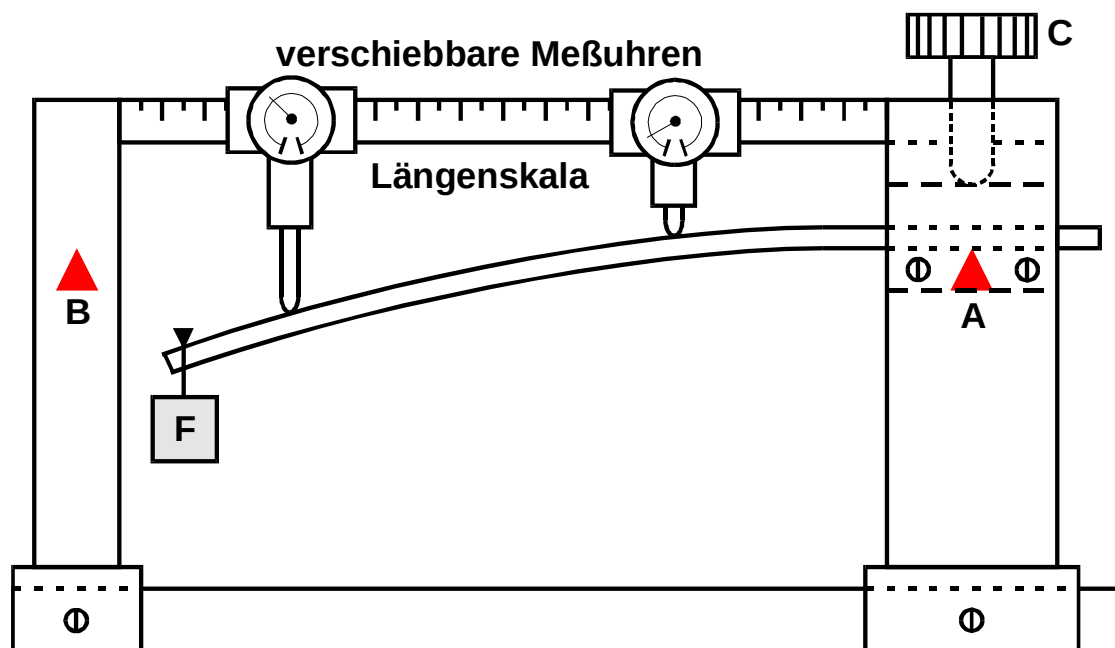


Abbildung 1: Schematischer Aufbau der Messapparatur. [1]

Dargestellt ist der schematische Aufbau der benutzten Messapparatur. Diese rigide Konstruktion besitzt zwei Auflagepunkte **A** und **B**, wobei **B** nur für die beidseitige Einspannung benutzt wird, und einer zum Fixieren benutzten Schraube **C**. Abhängig von der Form des zu vermessenden Stabes können verschiedene Platten in **A** eingelegt werden. Zwei verschiebbare Messuhren sind auf einer Längenskala angebracht, die die Distanz von **A** nach **B** in Millimetern angibt. Die Messuhren verfügen beide über eine Mikrometer-Skala.

3.3 Einseitige Einspannung

Zuerst wird der runde Stab wie in Abbildung 1 gezeigt in die Messapparatur eingespannt. Eine der verschiebbaren Messuhren wird an den Anfang der Messskala geschoben, während

die andere nicht verwendet wird. Anschließend wird ein Gewicht gewählt, sodass die maximale Auslenkung des Stabes zwischen 3 mm und 7 mm liegt. Das Gewicht wird mit einer elektronischen Waage fünfmal gemessen. Um nun die Durchbiegung des Stabes zu messen, wird die Messuhr die Skala entlang geschoben und in regelmäßigen Abständen wird zuerst die Auslenkung $D_0(x)$ des runden Stabes ohne angehängtes Gewicht und dann mit angehängtem Gewicht D_M abgelesen. Es werden 20 Messungen durchgeführt.

Die Messung für den eckigen Stab erfolgt analog.

3.4 Beidseitige Einspannung

Diese Messung wird nur für den runden Stab durchgeführt. Der Stab wird in der Messapparatur an den Enden an den Punkten A und B (siehe Abbildung 1) befestigt. Es wird ein Gewicht bestimmt, mit dem die maximale Auslenkung des Stabes zwischen 3 mm und 7 mm liegt und mit einer elektronischen Waage fünfmal ausgemessen. Eine Messuhr wird an den Anfang der Messskala geschoben, die andere an das Ende. Um die Durchbiegung zu messen, wird die Messuhr die Skala entlang geschoben und in regelmäßigen Abständen werden im Wechsel eine Nullmessung und eine Messung mit angehängtem Gewicht durchgeführt. Es werden 16 Messungen durchgeführt.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Abmessungen der Stäbe

Durch fünfmaliges Messen werden Länge und Durchmesser beziehungsweise Kantenlängen der Stäbe bestimmt.

Tabelle 1: Wiederholte Messung der Abmessungen der Stäbe

$L_{\text{rund}} / \text{cm}$	$L_{\text{eckig}} / \text{cm}$	$d_{\text{rund}} / \text{mm}$	$a_{\text{eckig}} / \text{mm}$	$b_{\text{eckig}} / \text{mm}$
60,05	60,30	10,00	12,00	10,00
61,00	60,30	9,95	12,00	9,95
60,00	60,30	10,00	11,95	9,90
60,00	60,30	10,00	12,00	9,95
60,00	60,34	10,00	12,00	10,00

Die gemittelten Werte sind dann

$$L_{\text{rund}} = (60,2 \pm 0,4) \text{ cm}$$

$$L_{\text{eckig}} = (60,308 \pm 0,016) \text{ cm}$$

$$r_{\text{rund}} = (9,990 \pm 0,020) \text{ mm}$$

$$a_{\text{eckig}} = (11,990 \pm 0,020) \text{ mm}$$

$$b_{\text{eckig}} = (9,96 \pm 0,04) \text{ mm} .$$

4.2 Rechteckiger Stab, einseitig eingespannt

Zunächst wurde eine Masse entsprechend der gewünschten Durchbiegung gewählt und fünfmal gewogen. Es ergab sich eine mittlere Masse von $(1006,100 \pm 0,405) \text{ g}$.

Tabelle 2: Wiederholte Messung des benutzten Gewichts.

m / g
1005,9
1006,9
1005,8
1005,9
1006,0

In Tabelle 3 sind die Durchbiegung ohne Last (D_0), unter Last (D_M) und die tatsächliche Durchbiegung (D) mit der Position der Messuhr (x) aufgelistet.

Tabelle 3: Durchbiegung des rechteckigen Stabes nach x -Abstand.

x / cm	$D_0 / \mu\text{m}$	$D_M / \mu\text{m}$	$D / \mu\text{m}$
2,7	134,5	133,0	1,5
5,0	135,0	135,0	0,0
7,5	135,0	134,5	0,5
10,0	133,0	132,0	1,0
12,5	131,5	127,5	4,0
15,0	127,5	118,0	9,5
17,5	119,5	114,0	5,5
20,0	110,5	109,0	1,5
22,5	109,5	72,0	37,5
25,0	107,5	28,0	79,5
27,5	99,0	-19,5	118,5
30,0	67,0	-68,0	135,0
32,5	36,0	-119,0	155,0
35,0	6,0	-169,0	175,0
37,5	-25,5	-222,0	196,5
40,0	-56,5	-276,5	220,0
42,5	-91,0	-330,5	239,5
45,0	-122,5	-386,0	263,5
47,5	-155,0	-440,5	285,5
49,4	-182,0	-479,0	297,0

Es wurde $D(x)$ gegen den Linearisierungsterm $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ aufgetragen (siehe Abbildung 2) und mithilfe von NumPy eine Regressionsgerade $D(x) = k_1 \cdot x + c_1$ berechnet. Deren Parameter sind:

$$k_1 = (0,003\,09 \pm 0,000\,11) \text{ m}^{-2}$$

$$c_1 = (-0,020 \pm 0,006) \text{ mm}.$$

Das Flächenträgheitsmoment \mathbf{I} lässt sich durch Gleichung 8 mit den Abmessungen aus Unterabschnitt 4.1 zu $\mathbf{I} = (1,431 \pm 0,009) \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$ bestimmen.

Die Gewichtskraft $F_G = g \cdot m$ ist durch die Erdbeschleunigung und die zuvor bestimmte Masse gegeben.

Schließlich ist

$$E = \frac{F_G}{2k_1\mathbf{I}} = (4,65 \pm 0,17) \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

der gesuchte Elastizitätsmodul.

Die Messunsicherheit des Elastizitätsmoduls lässt sich gemäß der Gaußschen Fehlerfortpflanzung nach

$$\Delta E = \frac{\partial E}{\partial m} \cdot \Delta m$$

berechnen.

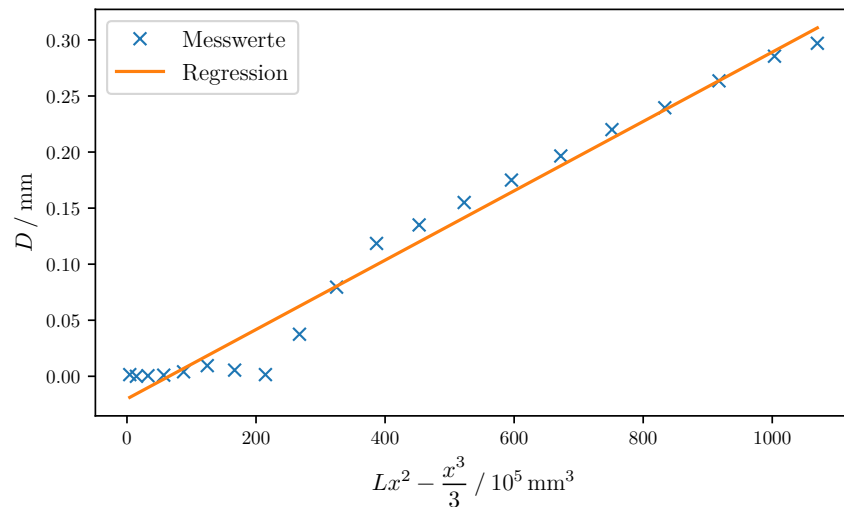


Abbildung 2: Durchbiegung eines einseitig eingespannten eckigen Stabes, aufgetragen gegen einen Linearisierungsterm.

4.3 Runder Stab, einseitig eingespannt

Zunächst wurde wieder eine Masse gewählt und fünfmal gewogen, wobei sich im Mittel eine Masse von $(352,42 \pm 0,12)$ g ergab.

Tabelle 4: Wiederholte Messung des benutzten Gewichts.

m / g
352,2
352,5
352,4
352,5
352,5

In Tabelle 5 sind die Durchbiegung ohne Last (D_0), unter Last (D_M) und die tatsächliche Durchbiegung (D) mit der Position der Messuhr (x) aufgelistet.

Tabelle 5: Durchbiegung des runden Stabes nach x -Abstand.

x / cm	$D_0 / \mu\text{m}$	$D_M / \mu\text{m}$	$D / \mu\text{m}$
2,7	107,0	105,5	1,5
5,0	105,5	106,5	-1,0
7,5	107,5	107,5	0,0
10,0	107,0	107,0	0,0
12,5	107,5	104,0	3,5
15,0	106,0	96,0	10,0
17,5	105,0	82,0	23,0
20,0	99,0	67,0	32,0
22,5	90,5	52,5	38,0
25,0	84,0	36,5	47,5
27,5	75,5	20,0	55,5
30,0	69,0	2,5	66,5
32,5	60,5	-15,0	75,5
35,0	53,0	-40,0	93,0
37,5	43,0	-52,0	95,0
40,0	33,0	-72,0	105,0
42,5	27,0	-88,0	115,0
45,0	14,0	-112,0	126,0
47,5	4,0	-131,0	135,0
49,4	2,0	-155,0	157,0

Es wurde $D(x)$ gegen den Linearisierungsterm $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ aufgetragen (siehe Abbildung 3) und mithilfe von NumPy eine Regressionsgerade $D(x) = k_2 \cdot x + c_2$ berechnet. Deren

Parameter sind:

$$k_2 = (0,001\,454 \pm 0,000\,030) \text{ m}^{-2}$$

$$c_2 = (-0,0027 \pm 0,0016) \text{ mm} .$$

Das Flächenträgheitsmoment \mathbf{I} lässt sich diesmal durch Gleichung 9 mit den Abmessungen aus Unterabschnitt 4.1 bestimmen.

Schließlich ist

$$E = \frac{F_G}{2k_2\mathbf{I}} = (1,013 \pm 0,022) \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

der gesuchte Elastizitätsmodul.

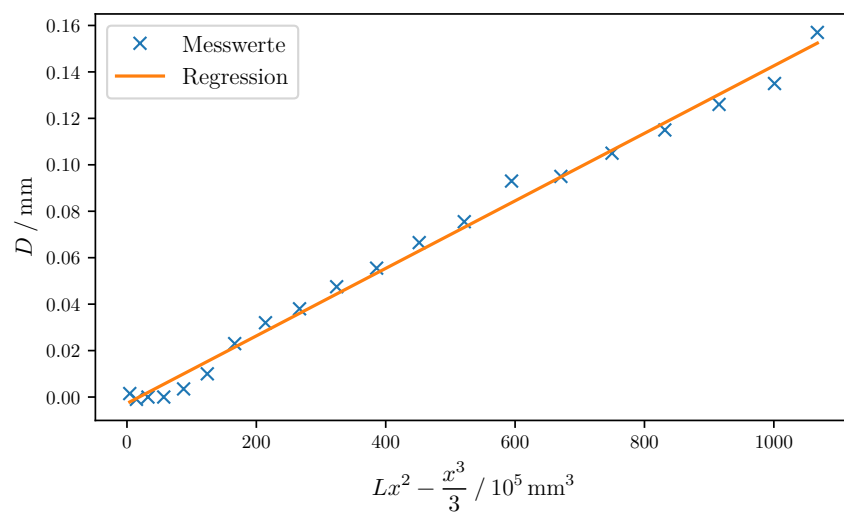


Abbildung 3: Durchbiegung eines einseitig eingespannten runden Stabes, aufgetragen gegen einen Linearisierungsterm.

4.4 Runder Stab, beidseitig eingespannt

Es wurde eine geeignete Masse gewählt und fünfmal gewogen, wobei sich eine mittlere Masse von $(1005,980 \pm 0,074) \text{ g}$ ergab.

In Tabelle 7 sind die Durchbiegung ohne Last (D_0), unter Last (D_M) und die tatsächliche Durchbiegung (D) mit der Position der Messuhr (x) aufgelistet.

Tabelle 6: Wiederholte Messung des benutzten Gewichts.

m / g
1005,9
1005,9
1006,0
1006,0
1006,1

Tabelle 7: Durchbiegung des runden Stabes nach x -Abstand.

x / cm	$D_0 / \mu\text{m}$	$D_M / \mu\text{m}$	$D / \mu\text{m}$
2,7	17,0	17,0	0,0
6,0	17,0	17,0	0,0
9,0	17,0	17,0	0,0
12,0	18,0	17,5	0,5
15,0	17,0	17,0	0,0
18,0	16,0	16,0	0,0
21,0	17,0	16,0	1,0
24,0	16,0	13,0	3,0
27,0	16,0	12,0	4,0
30,0	15,5	12,5	3,0
33,0	17,0	14,0	3,0
36,0	17,5	16,0	1,5
39,0	17,5	17,0	0,5
42,0	17,5	17,0	0,5
45,0	17,0	17,0	0,0
49,4	17,0	17,0	0,0

Für die rechte Seite ($x \leq \frac{L}{2}$) wurde $D(x)$ gegen den Linearisierungsterm $3L^2x - 4x^3$ aufgetragen (siehe Abbildung 4), für die linke gegen $4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3$ (siehe Abbildung 5). Mithilfe von NumPy kann dann jeweils eine Regressionsgerade $D(x) = k_{3,4} \cdot x + c_{3,4}$ berechnet werden. Deren Parameter sind

$$\begin{aligned}k_3 &= (1,1 \pm 0,5) \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-2} \\c_3 &= (-0,8 \pm 0,8) \mu\text{m}\end{aligned}$$

für die rechte und

$$\begin{aligned}k_4 &= (3,3 \pm 1,0) \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-2} \\c_4 &= (-4,6 \pm 1,9) \mu\text{m}\end{aligned}$$

für die linke Seite.

Das Flächenträgheitsmoment \mathbf{I} wird aus Unterabschnitt 4.3 übernommen.

Schließlich sind

$$\begin{aligned}E_{\text{rechts}} &= \frac{F_G}{2k_3\mathbf{I}} = (4,0 \pm 2,0) \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\E_{\text{links}} &= \frac{F_G}{2k_4\mathbf{I}} = (1,3 \pm 0,4) \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \bar{E} &= (2,6 \pm 1,0) \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\text{arithmetisches Mittel})\end{aligned}$$

die gesuchten Elastizitätsmoduln.

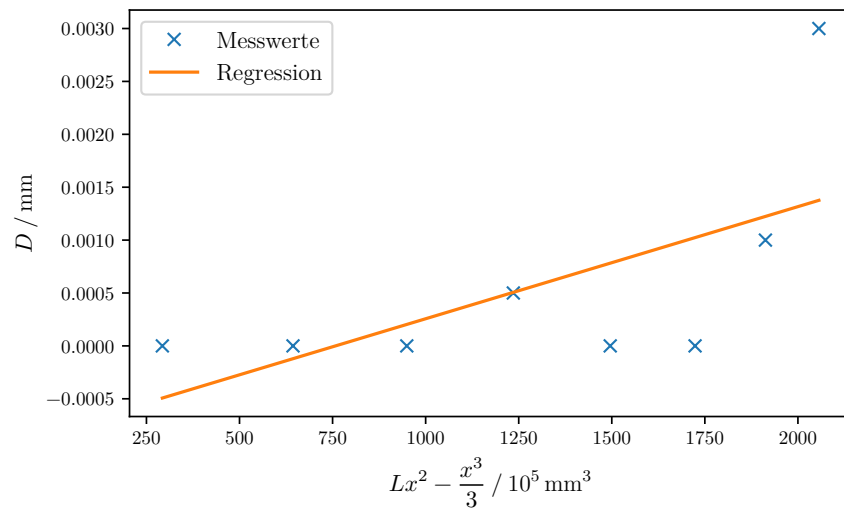


Abbildung 4: Durchbiegung eines beidseitig eingespannten runden Stabes, aufgetragen gegen einen Linearisierungsterm: rechte Seite.

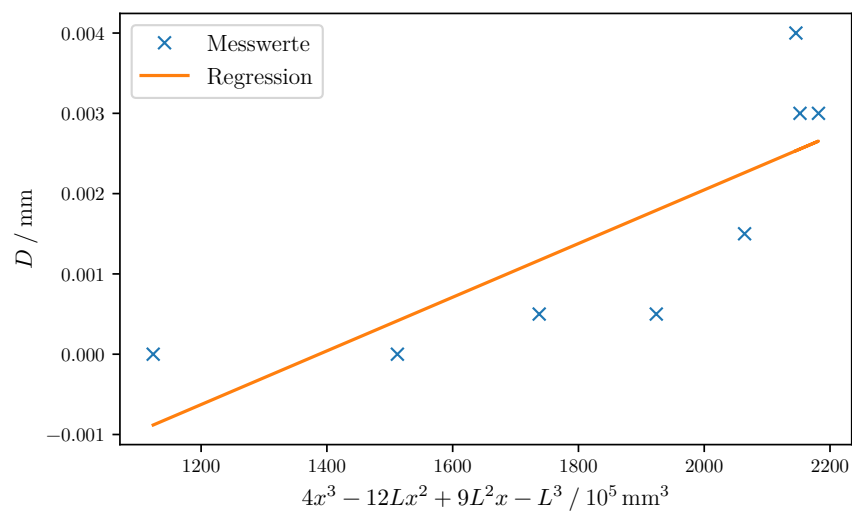


Abbildung 5: Durchbiegung eines beidseitig eingespannten runden Stabes, aufgetragen gegen einen Linearisierungsterm: linke Seite.

5 Diskussion

Im Folgenden sollen die Ergebnisse der Messung diskutiert werden.

5.1 Vergleich mit Literaturwerten

Der bei der Messung eines einseitig eingespannten rechteckigen Stabes berechnete Elastizitätsmodul ist mit $(46,5 \pm 1,7)$ GPa eher klein und ließe sich nur durch Metalle wie Magnesium oder Zinn ([2]) erklären. Gleichzeitig zeugen die geringe Messunsicherheit und die Regressionsgerade davon, dass die Werte in sich konsistent sind. Es könnte sich jedoch um einen systematischen Fehler handeln.

Der Elastizitätsmodul des einseitig eingespannten runden Stabes passt dagegen mit $(101,3 \pm 2,2)$ GPa gut zu Literaturwerten für Gusseisen, Messing oder Kupfer ([2]). Hier fällt die Messunsicherheit relativ betrachtet noch geringer aus.

Nicht mit Literaturwerten oder den Ergebnissen für einseitige Einspannung vereinbar ist hingegen der für beidseitige Einspannung bestimmte Elastizitätsmodul des runden Stabes von $(26\,000 \pm 10\,000)$ GPa, welcher mehrere Größenordnungen über dem zuvor bestimmten Wert liegt. Es ist nicht klar, ob dies den sehr kleinen Durchbiegungen geschuldet ist, die zu niedriger Präzision führen, oder ein Fehler in der Auswertung der Daten unterlaufen ist. Auffällig war jedoch, dass die Streuung der Messwerte in den Abbildungen 4 und 5 so hoch war, dass kein guter Fit bestimmt werden konnte. Würden beispielsweise die Werte in der linken Hälfte der Plots verworfen, ergäbe sich jeweils eine steilere Regressionsgerade und somit ein kleinerer und letztlich realistischerer Elastizitätsmodul.

5.2 Mögliche Gründe für Abweichungen

Ein wesentlicher Grund für Unregelmäßigkeiten sind vermutlich Ungenauigkeiten der Messuhren beziehungsweise der gesamten Konstruktion. Die Befestigung der Messuhren an der Schiene, auf der sie entlang geschoben wurden, erlaubte beispielsweise eine Neigung und daraus resultierend eine Abweichung von mehreren Millimetern. Es wurde versucht, diese stets zu eliminieren, jedoch lässt sich schwer abschätzen, ob dies geglückt ist.

Insbesondere bei der Messung des Stabes mit kreisförmigem Querschnitt war eine Biegung senkrecht zur Messrichtung erkennbar, welche dazu führte, dass die Rolle der Messuhr nicht immer den höchsten Punkt des Stabes traf. Dies könnte zu gravierenden Messfehlern geführt haben, da diese in etwa die gleiche Größenordnung wie die erzielten Durchbiegungen hatten.

Das Ablesen der Messuhren wurde dadurch erschwert, dass die Skalen teils Werte unter Null anzeigten, und dass der kleine Millimeter-Zeiger eine Verschiebung aufwies.

Vor allem bei der beidseitigen Einspannungen war zudem der Unterschied der Durchbiegung mit und ohne Gewicht zwischen zwei Messpunkten sehr gering, beziehungsweise kaum auf der Messuhr zu erkennen, obwohl das größte zur Verfügung stehende Gewicht von etwas 1 kg gewählt wurde, was zu fälschlicherweise konstanten Abschnitten in der Messreihe führte.

Ebenfalls bei der Messung des beidseitig eingespannten Stabes können dadurch Abweichungen entstanden sein, dass die Kraft nicht bei jeder Messung an derselben Stelle angegriffen hat, aufgrund des häufigen Wechsels zwischen Nullmessung und Messung mit Gewicht. Die Schwierigkeit bestand auch darin, das Gewicht genau in die Mitte des Stabes zu hängen, da dessen Auflagepunkte beziehungsweise Enden aufgrund der Messapparatur nicht zu sehen waren. Auch bei der Messung des einseitig eingespannten Stabes können aus diesem Grund Abweichungen entstanden sein.

Aus diesen Gründen müsste die Messung gegebenenfalls mit anderen Geräten wiederholt werden.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Versuch 103: Biegung elastischer Stäbe.*
- [2] H. Föll. *Elastizitätsmodul in Zahlen.* URL: https://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_7/illustr/t7_1_2.html (besucht am 13.12.2020).
- [3] Universität Siegen. *Flächenträgheitsmomente einiger Querschnitte.* URL: https://www.bau.uni-siegen.de/subdomains/bauinformatik/lehre/tm2/arbeitsblaetter/arbeitsblatt_08_flaechentraegheitsmomente_bsp.pdf (besucht am 13.12.2020).