

D602

Röntgenemission und -absorption

Katharina Popp
katharina.popp@tu-dortmund.de

Nicolai Weitkemper
nicolai.weitkemper@tu-dortmund.de

Abgabe: 11.05.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Das Röntgenspektrum	3
2.2	Absorption von Röntgenstrahlung	5
2.3	Untersuchung der Röntgenstrahlung mithilfe der Bragg'schen Reflexion	6
3	Vorbereitung	7
4	Durchführung	8
4.1	Versuchsaufbau	8
4.2	Überprüfung der Bragg-Bedingung	9
4.3	Das Emissionsspektrum der Kupfer-Röntgenröhre	9
4.4	Das Absorptionsspektrum verschiedener Materialien	9
5	Auswertung	10
5.1	Messwerte	10
5.2	Überprüfung der Bragg-Bedingung	17
5.3	Analyse eines Emissionsspektrums der Kupfer-Röntgenröhre	17
5.4	Analyse der Absorptionsspektren	20
5.4.1	Zink	21
5.4.2	Gallium	22
5.4.3	Brom	23
5.4.4	Rubidium	24
5.4.5	Strontium	25
5.4.6	Zirkonium	26
5.5	Moseley'sches Gesetz	27
6	Diskussion	29
6.1	Abweichungen	29
6.2	Mögliche Fehlerquellen	29
	Literatur	30

1 Zielsetzung

In dem folgenden Versuch wird das Emissionsspektrum einer Kupfer-Röntgenröhre untersucht, mithilfe dessen die Bragg-Bedingung nachgewiesen werden soll. Außerdem wird das Absorptionsspektrum verschiedener Materialien gemessen.

2 Theorie

Im folgenden Abschnitt sollen die theoretischen Grundlagen der Entstehung von Röntgenstrahlung, die Gestalt des Röntgen- und Absorptionsspektrums, sowie die Bragg-Reflexion erläutert werden.

2.1 Das Röntgenspektrum

Röntgenstrahlung entsteht in einer Röntgenröhre.

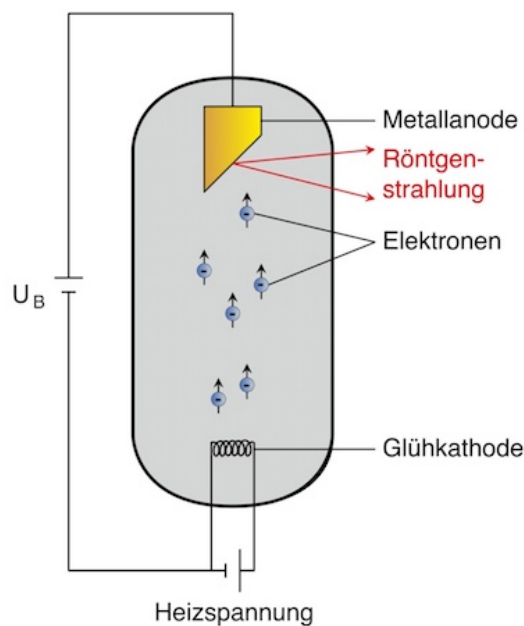


Abbildung 1: Der Aufbau einer Röntgenröhre. [1]

In einer evakuierten Röhre werden mithilfe des glühelektrischen Effekts an einer negativ geladenen Kathode Elektronen ausgelöst. Die Elektronen werden in einem elektrischen Feld zu einer positiv geladenen Anode hin beschleunigt, wobei ihre potentielle (elektrische) Energie in kinetische Energie umgewandelt wird. Wenn die Elektronen auf die Anode

auftreffen, werden sie so stark abgebremst, dass sie Energie in Form von Strahlung abgeben. Es wird dabei zwischen kontinuierlicher Bremsstrahlung und charakteristischer Röntgenstrahlung unterschieden.

Das **kontinuierliche Bremspektrum** entsteht durch die aus Coulombkräften resultierende Abbremsung. Die Elektronen geben Energie in Form eines Photons, auch Röntgenquant genannt, ab. Dabei muss das Elektron jedoch nicht seine gesamte Energie abgeben, sondern kann einen Teil als kinetische Energie behalten, was zu einem kontinuierlichen Spektrum führt, da jedes Elektron einen unterschiedlichen Energiebetrag abgeben kann, wie in Abbildung 2 gezeigt.

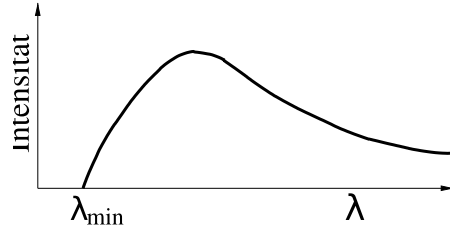


Abbildung 2: Das kontinuierliche Spektrum der Bremsstrahlung. [2]

Die minimale Wellenlänge λ_{\min} beschreibt den Fall, bei dem das Elektron seine gesamte kinetische Energie abgibt und diese in Strahlungsenergie umgewandelt wird. Es gilt

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU_B} ,$$

mit der Elementarladung e des Elektrons und der Beschleunigungsspannung U_B , dem Planckschen Wirkungsquantum h und der Lichtgeschwindigkeit c in Vakuum.

Das **charakteristische Spektrum** kommt durch Ionisierung der Anodenatome zustande, wenn die Elektronen auf die Anode treffen. Dabei entsteht eine Lücke auf einer der inneren Schalen, sodass ein Elektron von einem höheren Energieniveau in die Lücke zurückfallen kann. Die dabei freiwerdende Energie wird in Form eines Röntgenquants ausgesendet, welches genau die Energie aus der Energiedifferenz

$$E = h\nu = E_m - E_n$$

besitzt. Die freiwerdende Energie ist abhängig vom Anodenmaterial, was zu einem diskreten Energiespektrum führt. Die entstehenden scharfen Linien des Spektrums werden mit K_α , K_β , L_α bezeichnet, abhängig von der Schale K , L , M , auf die das Elektron zurückfällt. Der Index α , β bezeichnet die Ursprungs-Schale des Elektrons. Die Elektronen in den inneren Schalen werden von denen aus den äußeren Schalen abgeschirmt, sodass sich die Bindungsenergie der einzelnen Elektronen auf den Schalen unterscheidet. Für die n -te Schale ergibt sich eine Energie von

$$E_n = -R_\infty z_{\text{eff}}^2 \cdot \frac{1}{n^2} , \quad (1)$$

mit der Rydbergenergie $R_\infty = 13,6 \text{ eV}$, der effektiven Kernladungszahl $z_{\text{eff}} = z - \sigma$ und der Abschirmkonstante σ . Die Spektrumslinien der äußeren Elektronen teilen sich in mehrere eng aneinanderliegende Linien auf, da die Bindungsenergien dieser Elektronen sich durch Bahndrehimpuls und Elektronenspin unterscheiden. Diese Reihe von beieinanderliegenden Linien wird als Feinstruktur bezeichnet. Die genaue Energie der einzelnen Linien kann mithilfe der Sommerfeld'schen Feinstrukturformel berechnet werden:

$$E_{n,j} = -R_\infty \left(z_{\text{eff},1}^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \alpha^2 \cdot \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right) . \quad (2)$$

Hierbei stellt $\alpha = \frac{1}{137}$ die Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante und j den Gesamtdrehimpuls des Elektrons dar. Für die K -Schale kann die Energie unter Vernachlässigung des Drehimpulses mithilfe von

$$E_{K,\text{abs}} = R_\infty (z - \sigma_1)^2$$

$$E_{K,\alpha} = R_\infty \left(\frac{1}{n} \right)^2 \cdot (z - \sigma_1)^2 - R_\infty \left(\frac{1}{m} \right)^2 \cdot (z - \sigma_2)^2 \quad (3)$$

$$E_{K,\beta} = R_\infty \left(\frac{1}{n} \right)^2 \cdot (z - \sigma_1)^2 - R_\infty \left(\frac{1}{l} \right)^2 \cdot (z - \sigma_3)^2 \quad (4)$$

berechnet werden.

2.2 Absorption von Röntgenstrahlung

Bei Röntgenstrahlung mit einer Energie unter 1 MeV sind die dominanten Prozesse der Photoeffekt und der Compton-Effekt. Wenn die Röntgenstrahlung auf einen Absorber trifft, nimmt der Absorptionskoeffizient bei zunehmender Energie ab, steigt aber stark an, sobald die Photonenenergie größer als die Bindungsenergie der ersten Schale ist, was in Abbildung 3 darstellt ist.

Nach dem Moseley'schen Gesetz ist die Absorptionsenergie E_K proportional zum Quadrat der Ordnungszahl Z des Absorbermaterials. Es gilt

$$E_K = Rh(z - \sigma)^2 \quad (5)$$

Die Energie der Schale, aus der das Elektron stammt, wird als K , L , M -Absorptionskante bezeichnet. Für die einzelne K -Kante der K -Schale, welche die Hauptquantenzahl $n = 1$ besitzt, ergibt sich mithilfe der Gleichung 2 die Abschirmkonstante

$$\sigma_K = Z - \sqrt{\frac{E_K}{R_\infty} - \frac{\alpha^2 Z^2}{4}} , \quad (6)$$

mit der Ordnungszahl Z des zu untersuchenden Materials.

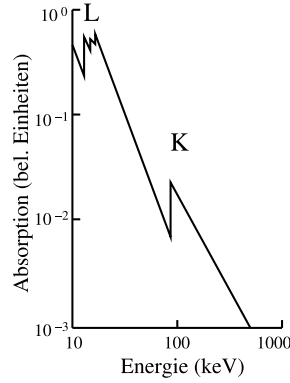


Abbildung 3: Verlauf der Absorption bei steigender Energie der Röntgenstrahlung. [2]

Die L -Schale besitzt drei Kanten, L_I , L_{II} und L_{III} , wobei in diesem Versuch nicht zwischen L_I und L_{II} unterschieden werden kann, sodass sich mit $\Delta E_L = E_{L_{II}} - E_{L_{III}}$ für die Abschirmkonstante

$$\sigma_L = Z - \sqrt{\frac{4}{\alpha} \sqrt{\frac{\Delta E_L}{R_\infty}} - \frac{5\Delta E_L}{R_\infty}} \sqrt{1 + \frac{19}{32} \alpha^2 \frac{\Delta E_L}{R_\infty}} \quad (7)$$

ergibt.

2.3 Untersuchung der Röntgenstrahlung mithilfe der Bragg'schen Reflexion

Die Wellenlängen und damit auch die Energien der Röntgenstrahlung können mithilfe von Reflexion untersucht werden. Die Röntgenstrahlung wird aus der Röntgenröhre (siehe Abbildung 1) auf einen Gitterkristall (hier ein LiF-Kristall) gelenkt. An den Atomen des Kristalls, welche einen Abstand d voneinander haben, werden die Strahlen reflektiert.

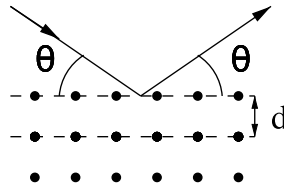


Abbildung 4: Reflexion der Röntgenstrahlung am Gitterkristall. [2]

Bei einem sogenannten Glanzwinkel θ kommt es zu konstruktiver Interferenz. Die Beziehung zwischen Glanzwinkeln der Beugungsordnung n und der Wellenlänge λ ist durch die Bragg-Bedingung

$$2d \sin \theta = n \cdot \lambda \quad (8)$$

gegeben.

3 Vorbereitung

In **Aufgabe 1** sollte recherchiert werden, bei welchen Energien sich die $\text{Cu}K_\alpha$ - und $\text{Cu}K_\beta$ - Linien ergeben und bei welchen Glanzwinkeln θ diese bei einem LiF-Kristall mit $d = 201,4 \text{ pm}$ liegen.

Mit den Wellenlängen der $\text{Cu}K_\alpha$ - und $\text{Cu}K_\beta$ - Linien können die Energien mithilfe der Gleichung

$$E = h \cdot \frac{c}{\lambda} \quad (9)$$

mit dem Planck'schen Wirkungsquantum ($h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$) und der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c berechnet werden. Für die Berechnung der Glanzwinkel θ_n mit der Beugungsordnung n (hier $n = 1$ und $n = 2$) wird die Gleichung 8 aus Abschnitt 2 nach θ umgeformt. Es ergeben sich folgende Werte.

Tabelle 1: Wellenlängen, Energien und Glanzwinkel der $\text{Cu}K_\alpha$ - und $\text{Cu}K_\beta$ - Linie.

	$\lambda / \text{\AA}$	E / keV	$\theta_1 / ^\circ$	$\theta_2 / ^\circ$
$\text{Cu}K_\alpha$	1,530	8,109 96	22,323	49,436
$\text{Cu}K_\beta$	1,392	8,913 96	20,217	43,722

In **Aufgabe 2** sollten Ordnungszahl und Energie E_K^{Lit} der K -Kante und der zu untersuchenden Materialien Zink, Gallium, Brom, Rubidium, Strontium und Zirkonium recherchiert werden [3]. Durch Umstellen von Gleichung 8 und Gleichung 9 kann daraus der zu erwartende Glanzwinkel θ_K^{Lit} bestimmt werden. Mithilfe von Gleichung 6 aus Abschnitt 2 wird die Abschirmkonstante σ_K berechnet.

Tabelle 2: Größen der zu untersuchenden Materialien.

	Z	$E_K^{\text{Lit}} / \text{keV}$	$\theta_K^{\text{Lit}} / ^\circ$	σ_K^{Lit}
Zn	30	9,65	18,601	3,571
Ga	31	10,37	17,267	3,616
Br	35	13,47	13,209	3,854
Rb	37	15,20	11,683	3,951
Sr	38	16,10	11,022	4,006
Zr	40	17,99	9,852	4,109

4 Durchführung

Der folgende Abschnitt stellt die verwendete Messapparatur vor. Zudem wird beschrieben, wie das Emissions- und Absorptionsspektrum sowie die Bragg-Bedingung gemessen werden.

4.1 Versuchsaufbau

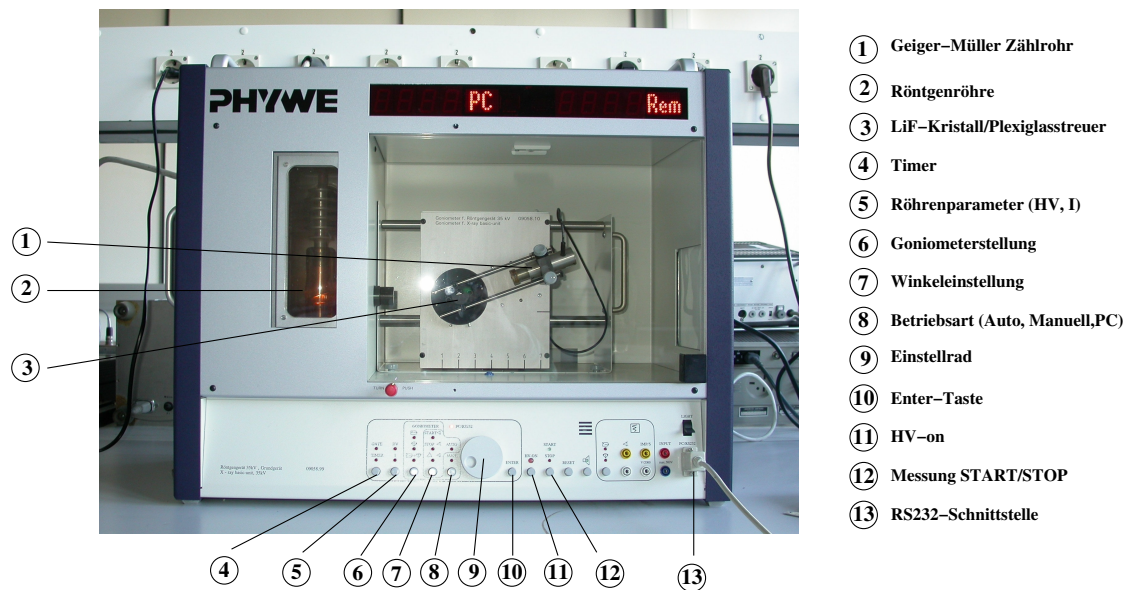


Abbildung 5: Die Versuchsaapparatur mit Benennung der Bestandteile. [2]

In Abbildung 5 ist die gesamte Versuchsaapparatur dargestellt. Die Hauptbestandteile sind eine Kupfer-Röntgenröhre, ein LiF-Kristall, der für die Bragg-Reflexion verwendet wird, und ein Geiger-Müller-Zählrohr. Die Röntgenröhre ist auf den Kristall ausgerichtet, wobei dieser gedreht werden kann, um die Intensität der Röntgenstrahlung mithilfe des Geiger-Müller-Zählrohrs für verschiedene Glanzwinkel zu messen. Die Messung kann mithilfe der Einstellelemente im unteren Bereich der Apparatur geregelt werden. Für alle Messungen wird eine Beschleunigungsspannung von $U_B = 35 \text{ kV}$ an der Röntgenröhre eingestellt, sowie ein Emissionsstrom von $I = 1 \text{ mA}$ am Geiger-Müller-Zählrohr. Mithilfe der Winkeleinstellung 7 kann ein fester Winkel des LiF-Kristalls eingestellt werden. Zudem muss darauf geachtet werden, dass die 1 mm-Blende und der Kristall in den jeweiligen Halterungen sind. Die Schlitzblende muss in Drehrichtung waagrecht auf dem Geiger-Müller-Zählrohr angebracht sein.

Die Messergebnisse können über einen Rechner aufgenommen werden; dazu wird unter dem Programmpunkt *measure* unter *Messgeräte* das Röntgengerät ausgewählt. Es können die Messart, der Drehwinkel θ , ein Drehmodus und eine Integrationszeit Δt festgelegt werden. Die Messart muss dabei auf *Spektren* eingestellt sein.

4.2 Überprüfung der Bragg-Bedingung

Für diese Messung wird am Rechner das Programm *2:1 Koppelmodus* ausgewählt. Für die Überprüfung der Bragg-Bedingung wird der LiF-Kristall auf einen festen Winkel von $\theta = 14^\circ$ eingestellt. Mit einem Winkelzuwachs von $\Delta\theta = 0,1^\circ$ in einer Integrationszeit von $\Delta t = 5\text{ s}$ wird die Intensität der Röntgenstrahlung am Geiger-Müller-Zählrohr in einem Winkelbereich von $\theta_{\text{GM}} = 26^\circ$ bis $\theta_{\text{GM}} = 30^\circ$ gemessen.

4.3 Das Emissionsspektrum der Kupfer-Röntgenröhre

Es wird in einem Winkelbereich von $\theta = 8^\circ$ bis $\theta = 25^\circ$ in Schritten von $\Delta\theta = 0,1^\circ$ gemessen. Als Integrationszeit wird $\Delta t = 10\text{ s}$ gewählt. Das Röntgenspektrum wird in einer Beugungsordnung von $n = 1$ ausgemessen.

Das Auflösungsvermögen wird bestimmt, wobei die Halbwertsbreiten gemessen werden.

Mithilfe der Gleichungen (3) und (4) können die Abschirmkonstanten σ_1 , σ_2 , und σ_3 , bestimmt werden, wobei $m = 2$ und $l = 3$ zu wählen sind.

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= Z - \sqrt{\frac{E_{\text{K,abs}}}{R_\infty}} \\ \sigma_2 &= Z - 2\sqrt{\frac{1}{n^2}(Z - \sigma_1)^2 - \frac{E_{\text{K},\alpha}}{R_\infty}} \\ \sigma_3 &= Z - 3\sqrt{\frac{1}{n^2}(Z - \sigma_1)^2 - \frac{E_{\text{K},\beta}}{R_\infty}}.\end{aligned}\tag{10}$$

4.4 Das Absorptionsspektrum verschiedener Materialien

Um das Absorptionsspektrum zu messen, wird ein Absorber zwischen dem LiF-Kristall und dem Geiger-Müller-Zählrohr angebracht, sodass die Röntgenstrahlung nach der Reflexion auf den Absorber und nicht direkt auf das Zählrohr trifft. Das Absorptionsspektrum wird in Abständen von $\Delta\theta = 0,1^\circ$ mit einer Integrationszeit von $\Delta t = 20\text{ s}$ gemessen. Die Winkelbereiche werden für jedes Material einzeln gewählt. Als Absorber dienen Materialien mit Ordnungszahlen von $30 \leq Z \leq 50$. Hier sind es Zink, Gallium, Brom, Rubidium, Strontium und Zirkonium, deren Literaturwerte in Abschnitt 3 angegeben sind. Mithilfe der Gleichungen (3) und (4) und der Literaturwerte können die Abschirmkonstanten berechnet werden. Die Rydbergenergie $R_\infty = R \cdot h$ kann nach dem Moseley'schen Gesetz mit Gleichung 5 bestimmt werden.

5 Auswertung

In den folgenden Unterabschnitten sollen die Bragg-Bedingung und das Moseley'sche Gesetz verifiziert und Emissions- und Absorptionsspektren analysiert werden.

5.1 Messwerte

Zunächst seien die Messwerte angegeben, mit denen im Folgenden gerechnet wird.

Tabelle 3: Messwerte zur Bragg-Reflektion.

$\theta_{\text{GM}}/^{\circ}$	N
26,0	56
26,1	58
26,2	54
26,3	62
26,4	58
26,5	68
26,6	72
26,7	83
26,8	89
26,9	95
27,0	105
27,1	119
27,2	125
27,3	141
27,4	154
27,5	157
27,6	166
27,7	180
27,8	188
27,9	211
28,0	212
28,1	215
28,2	218
28,3	215
28,4	208
28,5	189
28,6	189
28,7	176
28,8	164
28,9	149
29,0	138
29,1	125
29,2	111
29,3	107
29,4	95
29,5	77
29,6	73
29,7	58
29,8	56
29,9	53
30,0	53

Tabelle 4: Messwerte zum Emissionsspektrum.

$\theta / ^\circ$	N	$\theta / ^\circ$	N	$\theta / ^\circ$	N	$\theta / ^\circ$	N
8,0	323	12,3	376	16,6	211	20,9	192
8,1	316	12,4	385	16,7	206	21,0	188
8,2	326	12,5	384	16,8	205	21,1	172
8,3	340	12,6	382	16,9	198	21,2	168
8,4	335	12,7	373	17,0	203	21,3	169
8,5	343	12,8	376	17,1	199	21,4	166
8,6	350	12,9	373	17,2	198	21,5	170
8,7	350	13,0	375	17,3	191	21,6	174
8,8	366	13,1	366	17,4	192	21,7	164
8,9	357	13,2	354	17,5	184	21,8	180
9,0	371	13,3	341	17,6	191	21,9	179
9,1	371	13,4	326	17,7	188	22,0	191
9,2	372	13,5	318	17,8	181	22,1	232
9,3	364	13,6	305	17,9	185	22,2	300
9,4	381	13,7	296	18,0	184	22,3	536
9,5	379	13,8	286	18,1	179	22,4	4128
9,6	393	13,9	285	18,2	180	22,5	5050
9,7	375	14,0	274	18,3	166	22,6	4750
9,8	391	14,1	264	18,4	173	22,7	4571
9,9	395	14,2	266	18,5	167	22,8	4097
10,0	402	14,3	270	18,6	169	22,9	901
10,1	405	14,4	255	18,7	160	23,0	244
10,2	390	14,5	255	18,8	159	23,1	179
10,3	398	14,6	260	18,9	157	23,2	151
10,4	400	14,7	251	19,0	149	23,3	145
10,5	418	14,8	250	19,1	153	23,4	130
10,6	401	14,9	248	19,2	150	23,5	121
10,7	410	15,0	253	19,3	147	23,6	126
10,8	408	15,1	257	19,4	150	23,7	117
10,9	409	15,2	248	19,5	148	23,8	112
11,0	414	15,3	242	19,6	149	23,9	110
11,1	420	15,4	249	19,7	143	24,0	105
11,2	417	15,5	246	19,8	153	24,1	106
11,3	417	15,6	252	19,9	182	24,2	107
11,4	409	15,7	236	20,0	291	24,3	95
11,5	406	15,8	234	20,1	1127	24,4	94
11,6	404	15,9	231	20,2	1599	24,5	100
11,7	405	16,0	215	20,3	1533	24,6	91
11,8	400	16,1	217	20,4	1430	24,7	85
11,9	383	16,2	227	20,5	1267	24,8	88
12,0	389	16,3	214	20,6	425	24,9	83
12,1	382	16,4	217	20,7	241	25,0	85
12,2	372	16,5	210	20,8	225		

Tabelle 5: Messwerte für den Zink-Absorber.

$\theta / ^\circ$	N
18,0	58
18,1	54
18,2	55
18,3	54
18,4	54
18,5	55
18,6	65
18,7	84
18,8	91
18,9	100
19,0	102
19,1	100
19,2	98
19,3	100
19,4	95
19,5	98

Tabelle 6: Messwerte für den Gallium-Absorber.

$\theta / ^\circ$	N
17,0	66
17,1	66
17,2	78
17,3	88
17,4	102
17,5	116
17,6	121
17,7	121
17,8	122
17,9	122
18,0	119
18,1	114
18,2	110
18,3	108
18,4	104
18,5	110
18,6	110
18,7	109
18,8	99
18,9	100
19,0	98

Tabelle 7: Messwerte für den Brom-Absorber.

$\theta / ^\circ$	N
12,8	10
12,9	12
13,0	9
13,1	13
13,2	18
13,3	21
13,4	25
13,5	27
13,6	27
13,7	22
13,8	25
13,9	21
14,0	23
14,1	20
14,2	21
14,3	19

Tabelle 8: Messwerte für den Rubidium-Absorber.

$\theta / ^\circ$	N
11,2	11
11,3	10
11,4	10
11,5	12
11,6	17
11,7	32
11,8	39
11,9	47
12,0	57
12,1	64
12,2	61
12,3	57
12,4	54
12,5	54

Tabelle 9: Messwerte für den Strontium-Absorber.

$\theta / ^\circ$	N
10,5	43
10,6	41
10,7	40
10,8	44
10,9	50
11,0	89
11,1	120
11,2	152
11,3	181
11,4	193
11,5	181
11,6	196
11,7	181
11,8	173
11,9	166
12,0	159

Tabelle 10: Messwerte für den Zirkonium-Absorber.

$\theta / ^\circ$	N
9,5	112
9,6	120
9,7	126
9,8	147
9,9	180
10,0	225
10,1	266
10,2	282
10,3	290
10,4	301
10,5	295
10,6	283
10,7	296
10,8	283
10,9	286
11,0	286

5.2 Überprüfung der Bragg-Bedingung

Gemäß der Bragg-Bedingung wird erwartet, dass das gemessene Intensitätsmaximum ($\theta_{B, \text{exp}} = 28,2^\circ$ bzw. $N = 218$) unter dem ersten Glanzwinkel auftritt. In Abbildung 6 ist gezeigt, dass diese Annahme zutrifft; die Abweichung beträgt nur $0,2^\circ$.

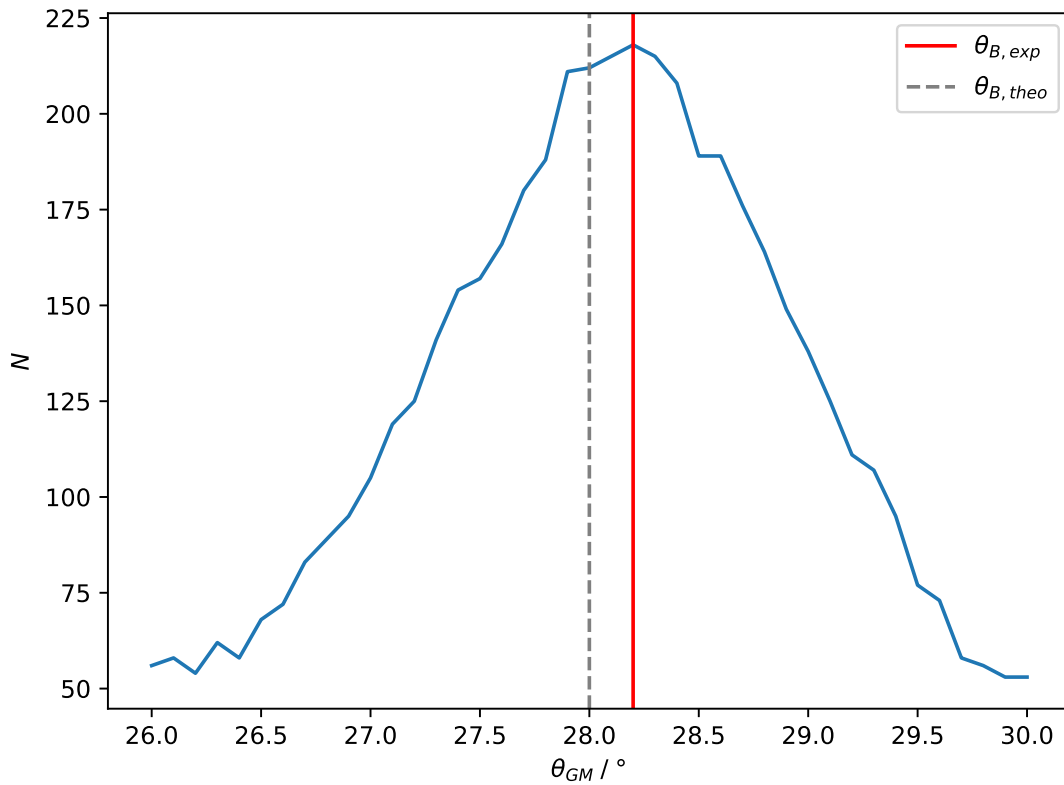


Abbildung 6: Zählrate in Abhängigkeit vom Winkel des Geiger-Müller-Zählrohrs.

5.3 Analyse eines Emissionsspektrums der Kupfer-Röntgenröhre

In Abbildung 7 ist das Emissionsspektrum der verwendeten Röntgenröhre aufgetragen. Hervorgehoben sind auch die K_α - bzw. K_β -Kanten sowie die jeweilige Halbwertsbreite.

Über den gesamten Messbereich verläuft das kontinuierliche Bremsspektrum. Zudem finden sich zwei Kanten des charakteristischen Spektrums, deren Intensitätsmaxima mithilfe von `scipy.signal.find_peaks` bestimmt wurden. Sie liegen bei

$$\theta_{K_\alpha} = 22,5^\circ$$

$$\theta_{K_\beta} = 20,2^\circ .$$

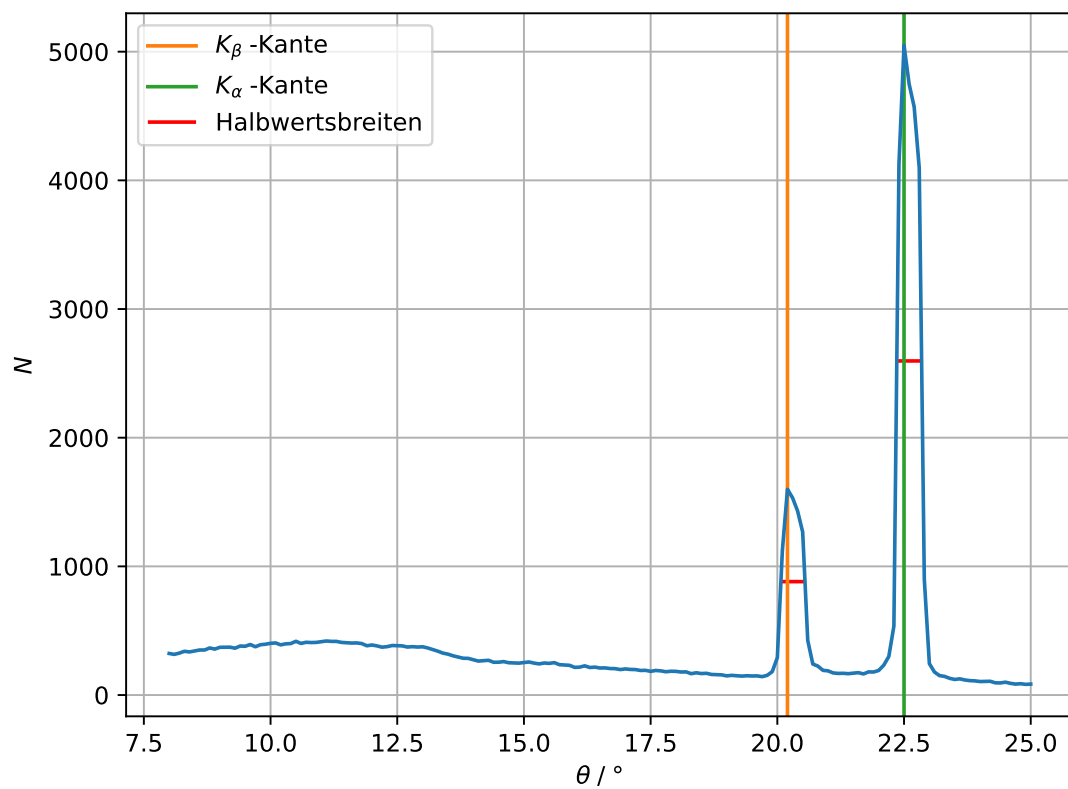


Abbildung 7: Das Emissionsspektrum der Kupfer-Röntgenröhre.

Die Halbwertsbreiten lassen sich mit `scipy.signal.peak_widths` finden:

$$\begin{aligned}\Delta\theta_{K_\alpha} &= 0,490^\circ \\ \Delta\theta_{K_\beta} &= 0,476^\circ .\end{aligned}$$

Aus der Bragg-Bedingung können nun die Wellenlänge und somit die Energie eines Röntgenquants bestimmt werden. Die Energien für die Peaks ergeben sich zu

$$\begin{aligned}E_{K_\alpha} &= 8,04 \text{ keV} \\ E_{K_\beta} &= 8,91 \text{ keV} .\end{aligned}$$

Die Energiedifferenzen über die Halbwertsbreiten sind

$$\begin{aligned}\Delta E_{K_\alpha} &= 0,164 \text{ keV} \\ \Delta E_{K_\beta} &= 0,199 \text{ keV} .\end{aligned}$$

Das Auflösungsvermögen ist definiert als

$$A = \frac{E}{\Delta E}$$

und kann aus den gerade gewonnen Werten zu

$$\begin{aligned}A_{K_\alpha} &= 48,92 \\ A_{K_\beta} &= 44,85\end{aligned}$$

bestimmt werden.

Mit dem (theoretischen) Literaturwert $E_{\text{abs}} = (8987,96 \pm 0,15) \text{ eV}$ [4], der Rydberg-Energie R_∞ und der Kernladungszahl $Z_{\text{Kupfer}} = 29$ werden die Abschirmkonstanten

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 3,298 \pm 0,021 \\ \sigma_2 &= 12,34 \pm 0,13 \\ \sigma_3 &= 22,0 \pm 0,7\end{aligned}$$

berechnet.

5.4 Analyse der Absorptionsspektren

Schließlich sollen die Absorptionsspektren verschiedener Absorbermaterialien analysiert werden. Dazu wird wieder die Zählrate N gegen den Winkel θ aufgetragen und der näherungsweise lineare Abschnitt zwischen Maximum und Minimum als Absorptionskante identifiziert. In der Mitte der Kante, also bei einer Intensität

$$I_K = \frac{I_K^{\min} + I_K^{\max}}{2} ,$$

wird der zugehörige Winkel θ aus einer linearen Interpolation (in den nachfolgenden Plots als graue Gerade dargestellt) zwischen den nächstgelegenen Messwerten bestimmt.

Aus dem Winkel θ kann dann wie zuvor über die Zusammenhänge von Winkel und Wellenlänge (Bragg) sowie Wellenlänge und Energie die Absorptionsenergie bestimmt werden.

5.4.1 Zink

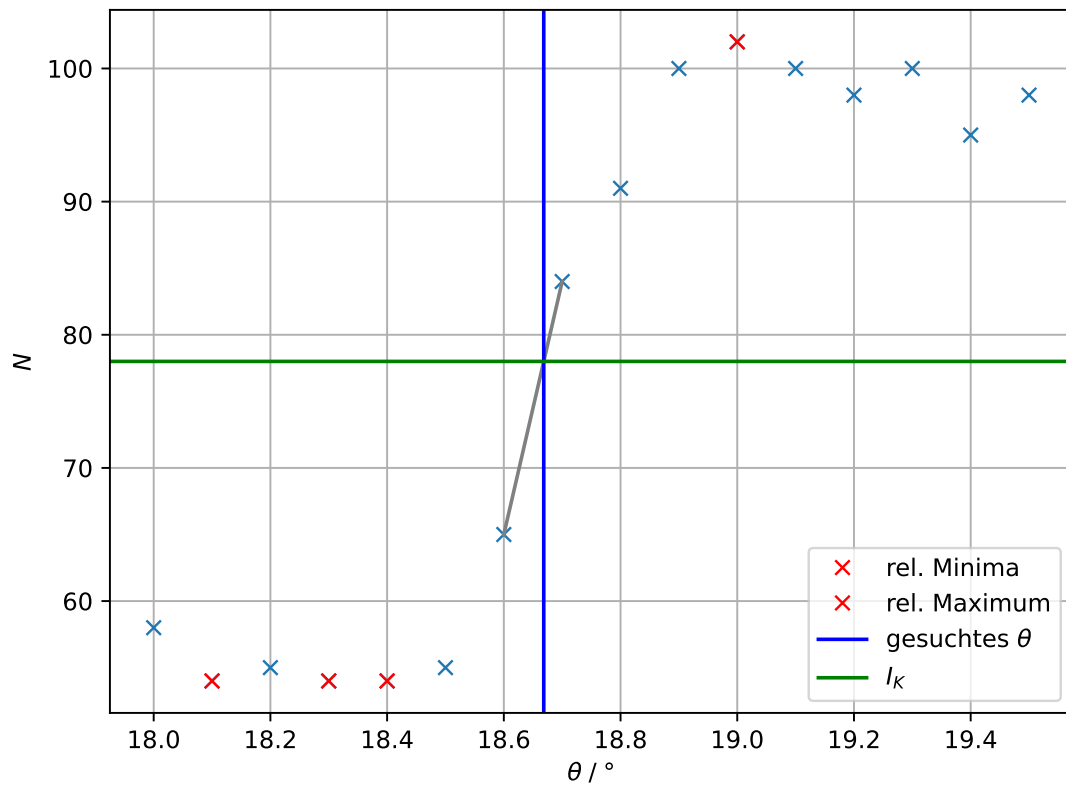


Abbildung 8: Absorptionsspektrum von Zink.

Die Intensität wird im Mittel für $18,3^\circ$ minimal ($N = 54$) und für $19,0^\circ$ maximal ($N = 102$). Also ist $I_K = 78,0$ und die Mitte der abgelesenen Absorptionskante liegt bei $18,67^\circ$. Die Absorptionsenergie beträgt demnach $E_{\text{Zink}} = 9,62 \text{ keV}$ und die Abschirmkonstante ist $\sigma_{K,\text{Zink}} = 3,62$.

5.4.2 Gallium

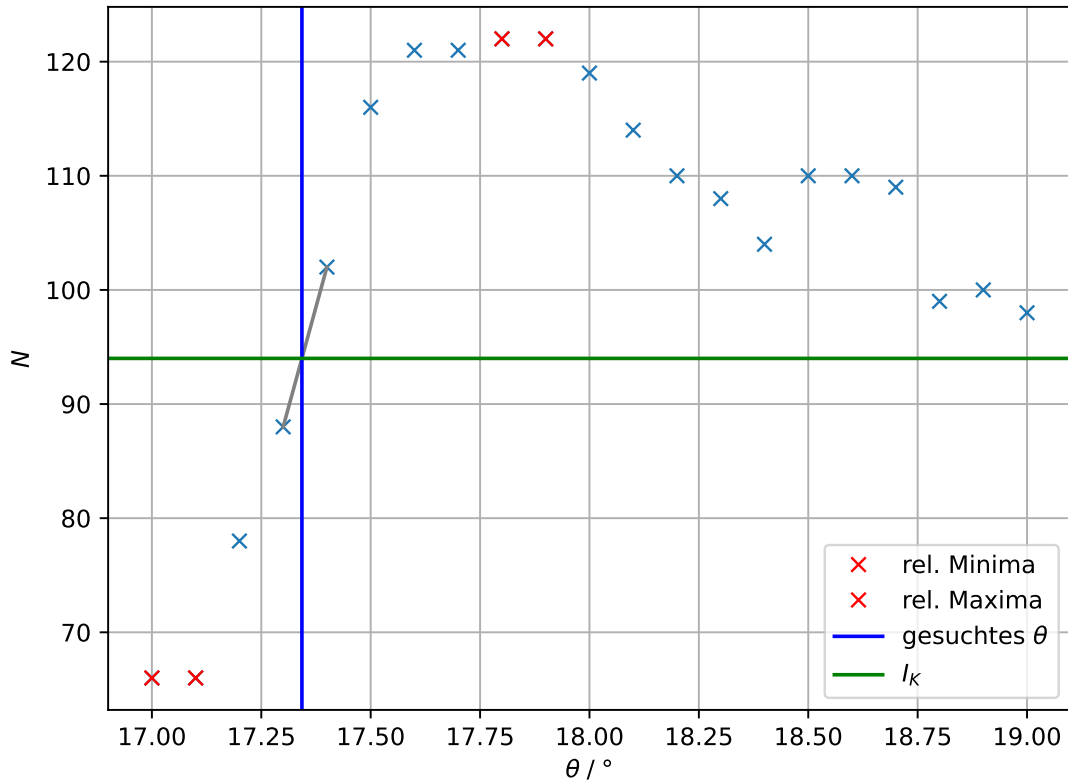


Abbildung 9: Absorptionsspektrum von Gallium.

Die Intensität wird im Mittel für $17,1^\circ$ minimal ($N = 66$) und im Mittel für $17,9^\circ$ maximal ($N = 122$). Also ist $I_K = 94,0$ und die Mitte der abgelesenen Absorptionskante liegt bei $17,34^\circ$. Die Absorptionsenergie beträgt demnach $E_{\text{Gallium}} = 10,33 \text{ keV}$ und die Abschirmkonstante ist $\sigma_{K,\text{Gallium}} = 3,68$.

5.4.3 Brom

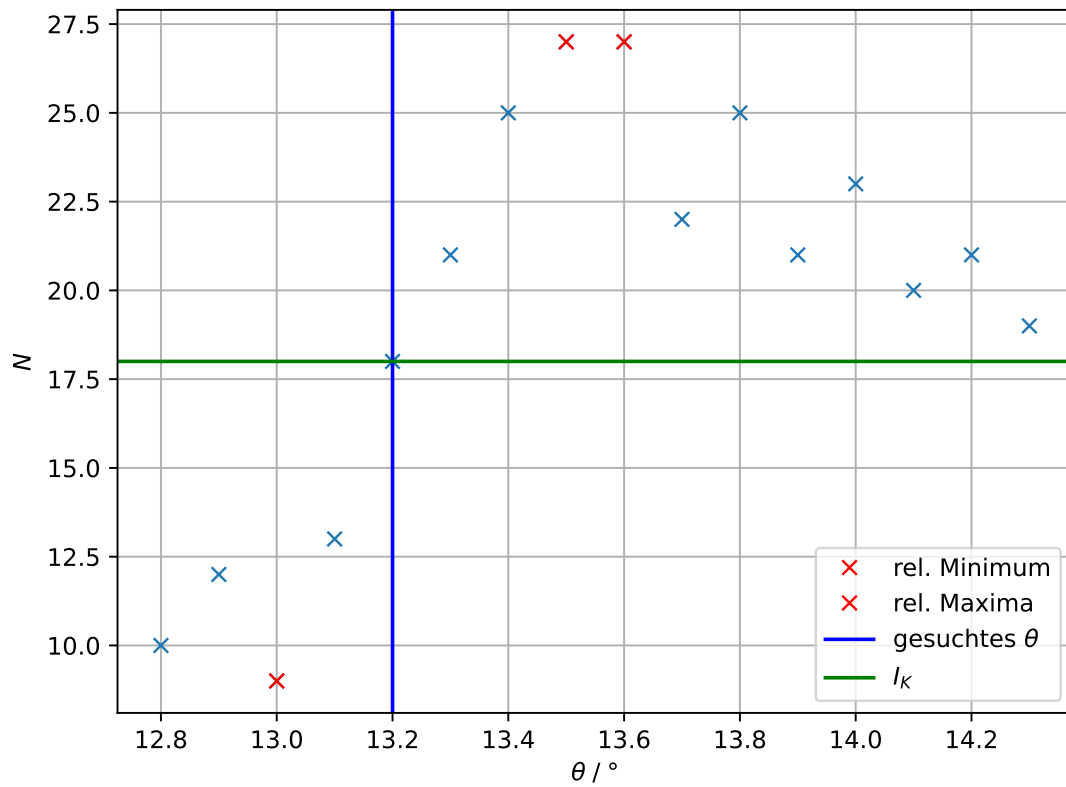


Abbildung 10: Absorptionsspektrum von Brom.

Die Intensität wird für $13,0^\circ$ minimal ($N = 9$) und im Mittel für $13,6^\circ$ maximal ($N = 27$). Also ist $I_K = 18,0$ und die Mitte der abgelesenen Absorptionskante liegt bei $13,20^\circ$. Die Absorptionsenergie beträgt demnach $E_{\text{Brom}} = 13,48 \text{ keV}$ und die Abschirmkonstante ist $\sigma_{K,\text{Brom}} = 3,84$.

5.4.4 Rubidium

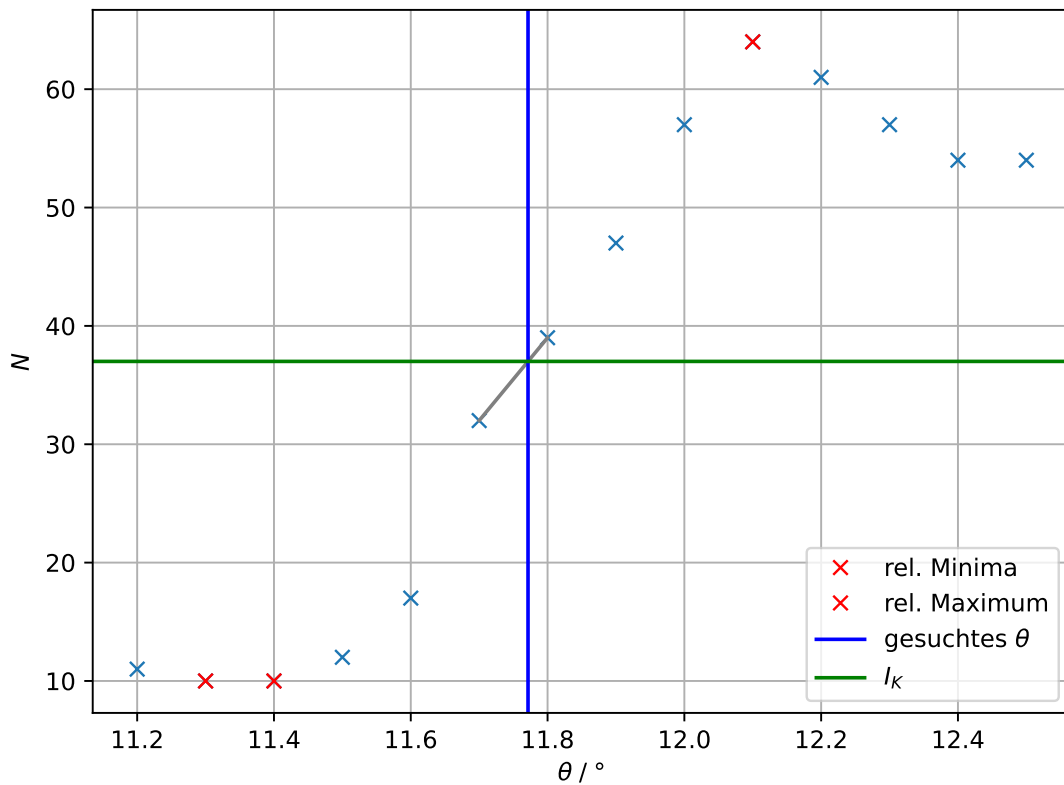


Abbildung 11: Absorptionsspektrum von Rubidium.

Die Intensität wird im Mittel für $11,4^\circ$ minimal ($N = 10$) und für $12,1^\circ$ maximal ($N = 64$). Also ist $I_K = 37,0$ und die Mitte der abgelesenen Absorptionskante liegt bei $11,77^\circ$. Die Absorptionsenergie beträgt demnach $E_{\text{Rubidium}} = 15,09 \text{ keV}$ und die Abschirmkonstante ist $\sigma_{K,\text{Rubidium}} = 4,08$.

5.4.5 Strontium

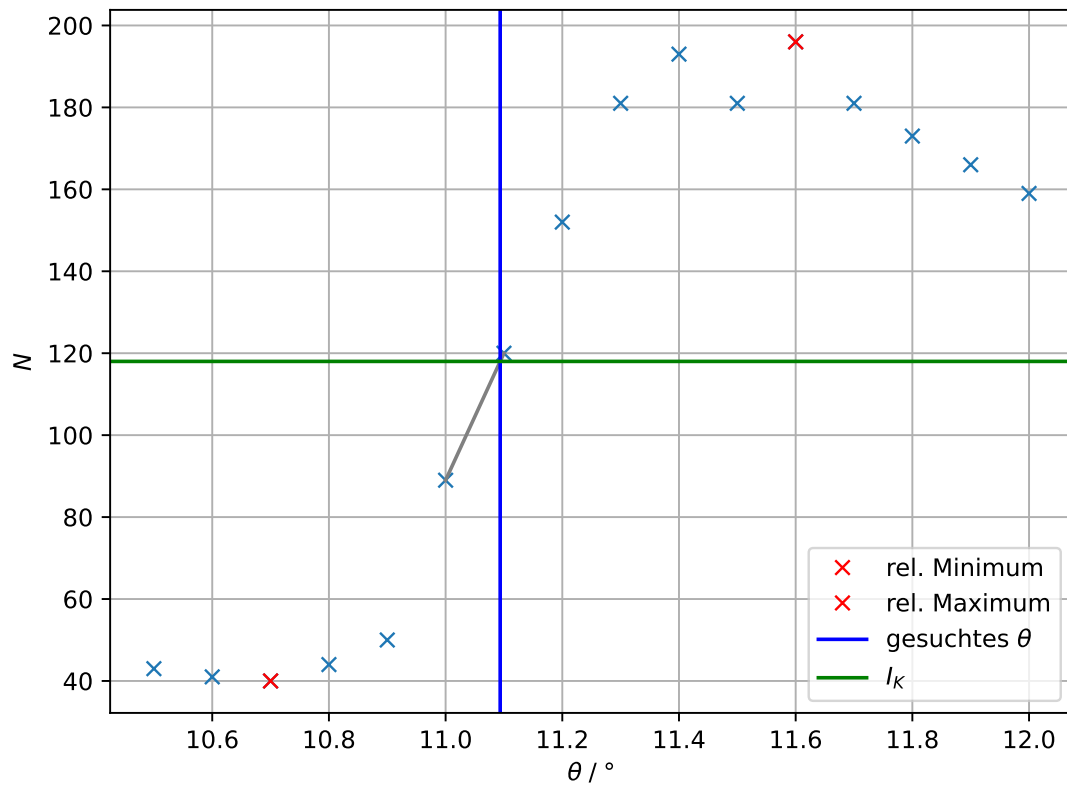


Abbildung 12: Absorptionsspektrum von Strontium.

Die Intensität wird für $10,7^\circ$ minimal ($N = 40$) und für $11,6^\circ$ maximal ($N = 196$). Also ist $I_K = 118,0$ und die Mitte der abgelesenen Absorptionskante liegt bei $11,09^\circ$. Die Absorptionsenergie beträgt demnach $E_{\text{Strontium}} = 16,00 \text{ keV}$ und die Abschirmkonstante ist $\sigma_{K,\text{Strontium}} = 4,12$.

5.4.6 Zirkonium

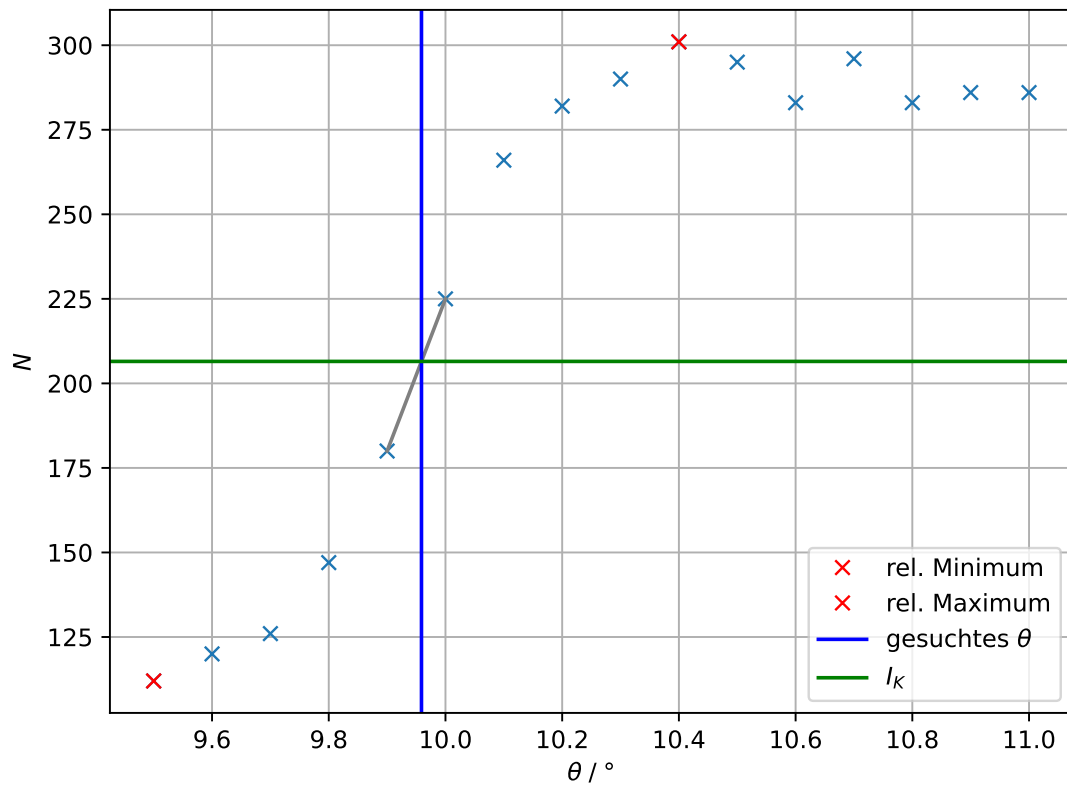


Abbildung 13: Absorptionsspektrum von Zirkonium.

Die Intensität wird für $9,5^\circ$ minimal ($N = 112$) und für $10,4^\circ$ maximal ($N = 301$). Also ist $I_K = 206,5$ und die Mitte der abgelesenen Absorptionskante liegt bei $9,96^\circ$. Die Absorptionsenergie beträgt demnach $E_{\text{Zirkonium}} = 17,80 \text{ keV}$ und die Abschirmkonstante ist $\sigma_{K,\text{Zirkonium}} = 4,31$.

5.5 Moseley'sches Gesetz

Mit den gerade gewonnenen Daten soll zuletzt das Moseley'sche Gesetz überprüft werden. Dazu wird Gleichung 5 zu einer Geradengleichung umgeformt:

$$E_K = Rh(z - \sigma)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{E_K} = \underbrace{\sqrt{Rh}}_a \cdot z - \underbrace{\sqrt{Rh}\sigma_k}_b .$$

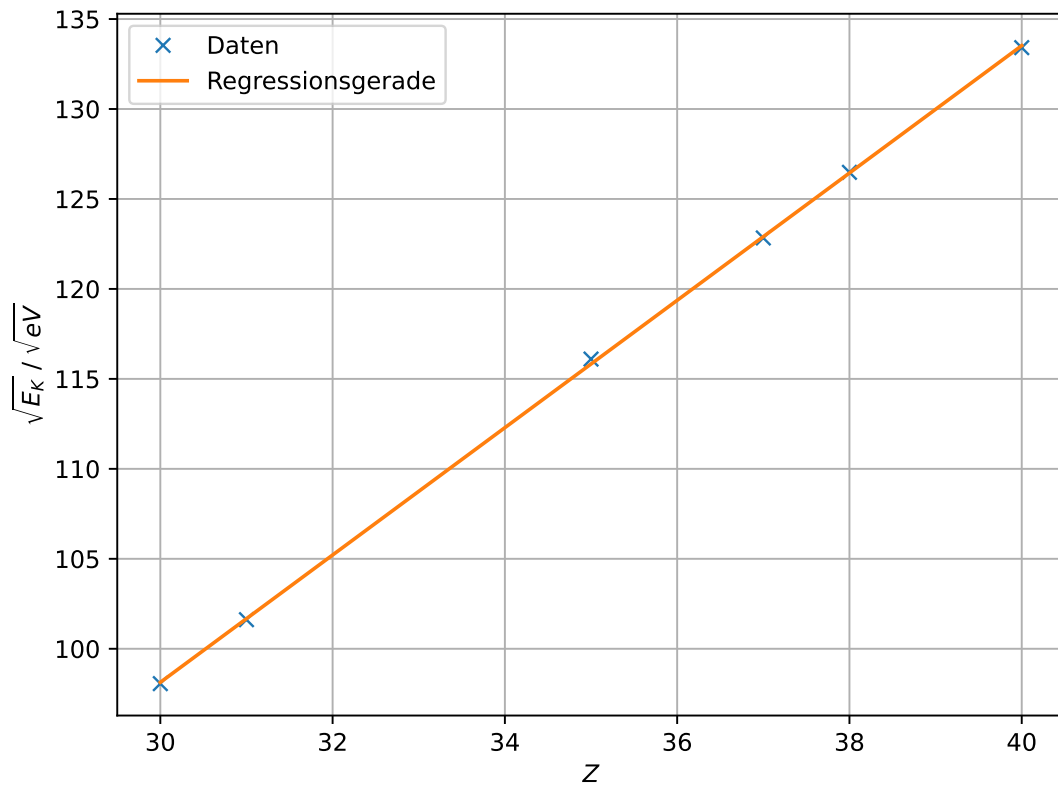


Abbildung 14: Verhältnis von Absorptionsenergien zu Kernladungszahlen mit Regressionsgerade.

Mithilfe von linearer Regression werden die Parameter zu

$$a = (3,539 \pm 0,018) \sqrt{\text{eV}}$$

$$b = (-8,0 \pm 0,6) \sqrt{\text{eV}}$$

bestimmt. Daraus lassen sich die Rydbergenergie

$$R_y = a^2 = (12,52 \pm 0,13) \text{ eV}$$

und die Rydbergfrequenz

$$R = \frac{a^2}{h} = (3,03 \pm 0,03) \text{ PHz}$$

errechnen.

6 Diskussion

6.1 Abweichungen

In Unterabschnitt 5.2 wurde bereits erwähnt, dass die Abweichung des gemessenen Bragg-Winkels vom Erwartungswert um $0,2^\circ$ abweicht.

Unterabschnitt 5.3 widmete sich der Analyse des Emissionsspektrums der Kupferanode. Die dort bestimmten θ_{K_α} und θ_{K_β} weichen nur um 0,79 % bzw. 0,08 % von den in Tabelle 1 angegebenen Werten ab.

Tabelle 11 listet die in Unterabschnitt 5.4 bestimmten Abschirmkonstanten zusammen mit ihrem Literaturwert (siehe Tabelle 2) und der relativen Abweichung auf.

Tabelle 11: Vergleich der berechneten Abschirmkonstanten mit den Literaturwerten.

Absorber	σ_K	$\sigma_{K, \text{Lit}}$	Abweichung /%
Zink	3,62	3,57	1,32
Gallium	3,68	3,62	1,64
Brom	3,84	3,85	0,29
Rubidium	4,08	3,95	3,16
Strontium	4,12	4,01	2,78
Zirkonium	4,31	4,11	4,79

Es ergeben sich kleine Abweichungen von $< 5\%$, welche aber bis auf Brom durchweg durch zu große σ_K zustande kommen.

Die in Unterabschnitt 5.5 aus den verschiedenen Abschirmenergien berechnete Rydbergfrequenz (bzw. Rydbergenergie) weicht um 7,97 % vom Literaturwert 13,61 eV [5] (bzw. 3,29 PHz [6]) ab.

6.2 Mögliche Fehlerquellen

Zunächst sei darauf hingewiesen, dass dieser Versuch nicht von den Autoren durchgeführt wurde, sondern auf Basis vorgegebener Daten erfolgte. Daher können zur tatsächlichen Durchführung nur Mutmaßungen angestellt werden.

In Unterabschnitt 5.4 wurden die Absorptionskanten abgelesen. Aufgrund der relativ geringen Winkelauflösung und der Schwankungen zwischen Messwerten gab es dabei jedoch einen gewissen Spielraum. Mit Blick auf die stets zu großen Messwerte kann vermutet werden, dass die Winkelbereiche „zu weit rechts“ geschätzt wurden. Auch ein systematischer Fehler ist nicht auszuschließen.

Eine längere Integrationszeit könnte die Genauigkeit weiter erhöhen.

Literatur

- [1] Physikunterricht-Online.de. 2017. URL: <https://physikunterricht-online.de/jahrgang-12/roentgenstrahlung/roentgenroehre-2/> (besucht am 09.05.2021).
- [2] *Versuchsanleitung zum Versuch 602: Röntgenemission und -absorption*. TU Dortmund.
- [3] *Wellenlängen und Anregungsenergien von K- und L- Absorptionskanten*. URL: <https://wissen.science-and-fun.de/tabellen-fur-spektroskopiker/wellenlaengen-und-anregungsenergien-von-k-und-l-absorptionskanten/> (besucht am 29.05.2021).
- [4] *X-Ray Transition Energies Database*. National Instituts of Standards und Technology. URL: <https://physics.nist.gov/cgi-bin/XrayTrans/search.pl?element=Cu&trans=Kedge&units=eV> (besucht am 09.05.2021).
- [5] National Instituts of Standards und Technology. URL: <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?rydhcev> (besucht am 09.05.2021).
- [6] National Instituts of Standards und Technology. URL: <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?rydchz> (besucht am 09.05.2021).