

TU Dortmund

V101 - Das Trägheitsmoment

Korrektur

Markus Stabrin

markus.stabrin@tu-dortmund.de

Kevin Heinicke

kevin.heinicke@tu-dortmund.de

Versuchsdatum: 23. April 2013

Abgabedatum: 14. Mai 2013

1 Einleitung

Bei diesem Versuch soll das Trägheitsmoment verschiedener Körper gemessen werden. Dabei wird der Steiner'sche Satz verifiziert.

2 Theorie

Rotationsbewegungen werden durch das Drehmoment M , die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ und das Trägheitsmoment I charakterisiert. Das Gesamtträgheitsmoment einer punktförmigen Masse m im Abstand r von der Drehachse ist gegeben durch $I = mr^2$. Für einen ausgedehnten Körper gilt dementsprechend:

$$I = \sum_i r_i^2 \cdot m_i \quad . \quad (1)$$

Bei infinitesimalen Massen ergibt sich für das Gesamtträgheitsmoment:

$$I = \int r^2 dm \quad . \quad (2)$$

Fällt die Drehachse nicht mit einer Hauptträgheitsachse zusammen, sondern ist um den Abstand a verschoben, so gilt der Steiner'sche Satz:

$$I = I_s + m \cdot a^2 \quad . \quad (3)$$

I_s stellt dabei das Trägheitsmoment bzgl. einer Drehachse, welche durch den Schwerpunkt des Körpers geht würde, während m der Gesamtmasse des Körpers entspricht.

Wirkt bei einem drehbaren Körper die Kraft \vec{F} im Abstand \vec{r} von der Drehachse, so wirkt auf den Körper das Drehmoment $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$.

Wird ein Körper auf eine Drillachse gespannt und aus seiner Ruhelage um den Winkel φ ausgelenkt, so wirkt auf ihn ein rücktreibendes Drehmoment durch eine Feder.

Beim Loslassen führt der ausgelenkte Körper eine harmonische Schwingung aus, wobei für die Schwingungsdauer T gilt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad . \quad (4)$$

Dabei ist die Winkelrichtgröße D mit dem Drehmoment über Gleichung (5) verbunden:

$$M = D\varphi \quad . \quad (5)$$

Bei Drehschwingungen verhält sich das System für kleine Winkel φ harmonisch. Die dämpfende Wirkung ist bei diesem Versuch jedoch bei kleinen Winkeln sehr groß, so dass ein Winkel zwischen 40° und 60° gewählt wird. Die Winkelrichtgröße D kann statisch aus (5) durch Messen der Auslenkung φ als Funktion der Kraft F bestimmt werden oder dynamisch aus (4) durch Messung der Schwingungsdauer bei bekanntem Trägheitsmoment I des Körpers.

3 Versuchsaufbau und Durchführung

3.1 Versuchsaufbau

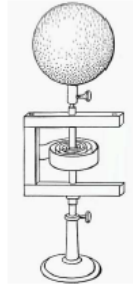


Abbildung 1: Drillachse mit eingespannter Kugel. [1]

Bei dem Versuch zur Bestimmung des Trägheitsmoments I von verschiedenen Körpern wird eine Drillachse verwendet 1. Diese besteht aus einer zweifach im Raum drehbar gelagerten Achse, welche über eine Spiralfeder mit dem Rahmen verbunden ist. Auf diese Achse können die verschiedenen Körper befestigt werden.

3.2 Durchführung

3.2.1 Statische Methode

Ein Metallstab wird symmetrisch und horizontal auf die Drillachse geschraubt. Mithilfe einer Federwaage wird die rücktreibende Kraft gemessen, die bei dem Auslenkwinkel φ wirkt. Dabei muss die Federwaage senkrecht zum Radius der vom Körper beschriebenen Kreisbahn gehalten werden.

Diese Messung wird für 10 verschiedene Auslenkwinkel durchgeführt. Dabei bleibt der Abstand r konstant.

3.2.2 Dynamische Methode

Eine Metallstange wird horizontal und symmetrisch auf die Drillachse geschraubt. In einem Abstand r werden symmetrisch Gewichte aufgeschraubt. Das System wird um einen Winkel φ ausgelenkt. Nach loslassen des Stange schwingt das System und die Schwingungsdauer $3T$ wird gemessen und gemittelt.

Die Schwingungsdauer wird dabei von zwei Uhren gleichzeitig gestoppt. Diese Messung wird für 10 verschiedene Abstände r der Massen zur Drehachse wiederholt.

3.3 Messung des Trägheitsmoments eines Körpers

Auf die Drillachse wird ein Körper geschraubt. Die Schwingungsdauer $3T$ wird gemessen und gemittelt. Diese Messung wird 5 mal wiederholt für eine große Holzkugel und einen Messingzylinder.

3.4 Messung des Trägheitsmoments einer Puppe

Eine Holzpuppe wird auf die Drillachse geschraubt. Es wird 5 mal die Schwingungsdauer $3T$ gemessen und gemittelt. Dies wird für insgesamt zwei Körperhaltungen wiederholt. Dabei sind einmal die Arme an den Körper der Puppe angelehnt und einmal horizontal seitlich ausgestreckt. Um die Arme, Beine, den Kopf und den Oberkörper als Zylinder nähern zu können, werden deren Durchmesser an 10 verschiedenen Stellen gemessen und gemittelt. Durch die Näherung kann ein Theoriewert der Puppe errechnet werden.

4 Auswertung

Im Folgenden wird über alle Messungen ein Mittelwert \bar{T} mit Standardabweichung σ gebildet. Bei einer Anzahl von n Stichproben gilt

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \\ \Delta T &= \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

4.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße D

Die Winkelrichtgröße berechnet sich nach

$$D = \frac{F \cdot r}{\varphi}.$$

Tabelle 1 zeigt die Messwerte. Die Winkel wurden in Radianen umgerechnet. Für die Winkelrichtgröße erhält man damit

$$D = (19,9 \pm 4,3) \frac{\text{mN m}}{\text{rad}}.$$

Berechnet man mit diesem Wert jedoch das Eigenträgheitsmoment der Apparatur, ergeben sich negative Werte. Ein besserer Wert ergibt sich durch eine lineare Ausgleichsrechnung, die im folgenden Kapitel 4.2 durchgeführt wird.

4.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes I_D der Drehachse

Zur Messung des Eigenträgheitsmomentes I_D der Drehachse werden zwei Gewichte der Masse m im gleichen Abstand a zur Drehachse an einem Metallstab der Masse M und der Länge l angebracht. Das Gesamtträgheitsmoment des Systems wird dann durch

$$I = I_D + I_{\text{Stange}} + 2I_m \quad (6)$$

beschrieben, wobei das Trägheitsmoment der Stange durch I_{Stange} gegeben ist und I_m das Trägheitsmoment eines Gewichtes unter Berücksichtigung des Steinerschen Satzes

Tabelle 1: Messwerte für die Bestimmung der Winkelrichtgröße D

$r[\text{cm}]$	$F[\text{mN}]$	$\varphi[^\circ]$	$D \left[\frac{\text{mN m}}{\text{rad}} \right]$	$r[\text{cm}]$	$F[\text{mN}]$	$\varphi[^\circ]$	$D \left[\frac{\text{mN m}}{\text{rad}} \right]$
20	10	10	11,46	20	60	33	20,83
20	20	16	14,32	20	71	35	23,25
20	30	20	17,19	20	80	38	24,12
20	41	23	20,43	20	90	44	23,44
20	50	27	21,22	20	101	50	23,15

bezeichnen. Die Stange wird dabei als langer Stab betrachtet. Es gilt mit der Masse M und Länge l der Stange, sowie dem Abstand a zwischen Drehachse und Mittelpunkt der Zusatzgewichte und deren Radius r und Höhe h :

$$I_{\text{Stange}} = \frac{1}{12} M l, \\ I_{\text{m}} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m h^2 + m a^2.$$

Das Trägheitsmoment der Zusatzgewichte besteht dabei aus einem, über die Messung konstanten Anteil $I_{\text{m,c}}$ und dem Anteil durch den Steinerschen Satz $m a^2$. Mit den Messwerten

$$\begin{aligned} M &= 96,28 \text{ g} & m &= 222,70 \text{ g} \\ l &= 60 \text{ cm} & h &= 3,00 \text{ cm} \\ & & r &= 2,75 \text{ cm} \end{aligned}$$

ergeben sich die Werte von I_{Stange} und $I_{\text{m,c}}$ zu

$$I_{\text{Stange}} = 2,89 \text{ g m}^2, \quad I_{\text{m,c}} = 0,058 \text{ g m}^2.$$

Die Gleichungen (4) und (6) liefern den Zusammenhang

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} \left(I_{\text{D}} + I_{\text{Stange}} + 2 \left(I_{\text{m,c}} + m a^2 \right) \right).$$

mit

$$\begin{aligned} B &= I_{\text{D}} + I_{\text{Stange}} \Leftrightarrow I_{\text{D}} = B - I_{\text{Stange}} \\ \Rightarrow T^2 &= \frac{4\pi^2}{D} \left(B + 2 \left(I_{\text{m,c}} + m a^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Das Eigenträgheitsmoment I_{D} kann also durch Messung von T und a mit einer Ausgleichsrechnung für den Parameter B bestimmt werden (siehe Abb. 2). Zudem lässt sich

mit dieser Rechnung D bestimmen. Wie in Kapitel 4.1 erwähnt liefert diese Rechnung einen besseren Wert für D .

Die Ausgleichsrechnung durch *python* liefert

$$\begin{aligned} B &= (5,33 \pm 0,22) \text{ g m}^2 \\ \Rightarrow I_D &= (2,44 \pm 0,22) \text{ g m}^2, \end{aligned}$$

sowie

$$D = (57,9 \pm 0,3) \frac{\text{mN m}}{\text{rad}}.$$

Die zur Berechnung genutzten Daten werden in Tabelle 2 aufgeführt. Da das Eigenträgheitsmoment jedoch größer ist als die Trägheitsmomente der untersuchten Objekte, würden sich negative Trägheitsmomente ergeben. Das ergibt physikalisch keinen Sinn, weshalb I_D in den späteren Rechnungen nicht abgezogen wird.

Tabelle 2: Messwerte für die Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes I_D

$a[\text{cm}]$	$\bar{T}[\text{s}]$	$a[\text{cm}]$	$\bar{T}[\text{s}]$
26	6,72	16	4,37
26	6,71	16	4,39
24	6,20	14	3,92
24	6,17	14	3,91
22	5,73	12	3,51
22	5,74	12	3,51
20	5,26	10	3,11
20	5,29	10	3,12
18	4,90	08	2,77
18	4,88	08	2,75

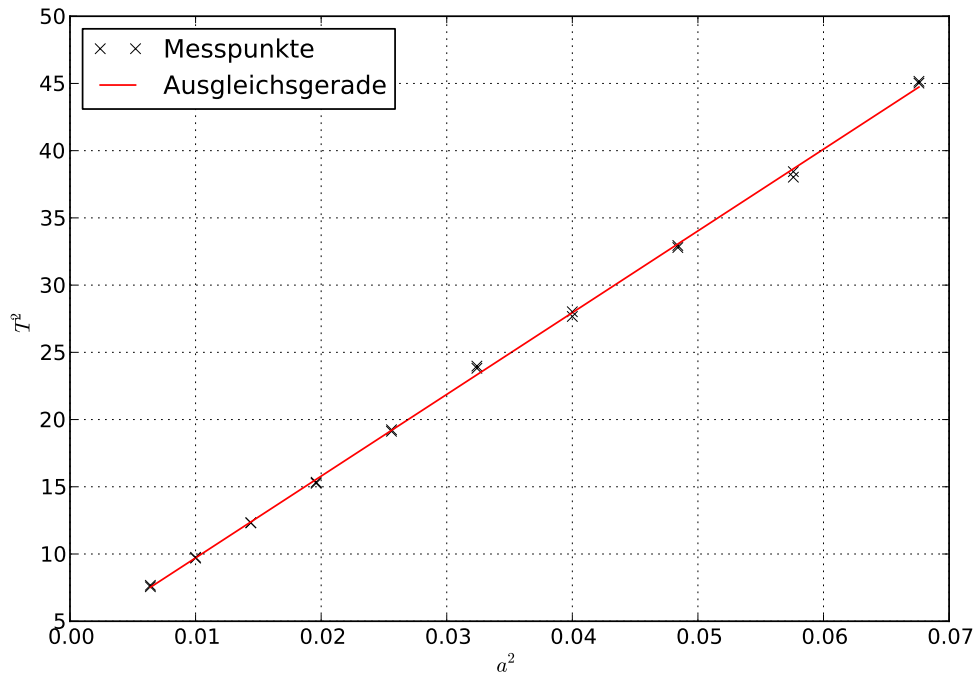


Abbildung 2: Ausgleichsgerade zur Bestimmung von I_D und D

4.3 Bestimmung der Trägheitsmomente I_k verschiedener Körper

Aus der Periodendauer wird gemäß Gleichung (4) das Trägheitsmoment berechnet. Es gilt

$$I = \frac{T^2 D}{4\pi^2},$$

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{T D}{2\pi^2} \Delta T\right)^2 + \left(\frac{T^2}{4\pi^2} \Delta D\right)^2}.$$

Die experimentellen Daten werden zudem mit den theoretischen Werten verglichen, um ihre Aussagekraft zu beurteilen. Hierzu wird jeweils der relative Unterschied δ_k zwischen dem gemessenen Wert I_{exp} und dem theoretisch errechneten Wert I_t in Prozent angegeben.

4.3.1 Die große Holzkugel

Das Trägheitsmoment $I_{1,t}$ der Holzkugel berechnet sich nach

$$I_{1,t} = \frac{2}{5}mr^2,$$

$$\Delta I_{1,t} = \frac{2}{5}\sqrt{(r^2\Delta m)^2 + (2mr\Delta r)^2}.$$

Die folgenden Messwerte für die Masse m und den Radius r liefern

$$m = (1168,4 \pm 0,1) \text{ g},$$

$$r = (7,35 \pm 0,05) \text{ cm},$$

$$\Rightarrow I_{1,t} = (2,53 \pm 0,34) \text{ g m}^2.$$

Tabelle 3 beinhaltet die Messdaten zur experimentellen Bestimmung:

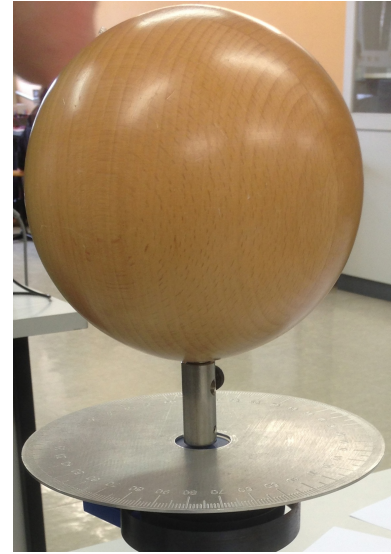


Abbildung 3: Kugelkörper

Tabelle 3: Messwerte für die Bestimmung des Trägheitsmomentes $I_{1,\text{exp}}$ der Holzkugel

$\overline{T}[\text{s}]$	$\overline{T}[\text{s}]$	$\overline{T}[\text{s}]$
1,82	1,84	1,84
1,82	1,87	1,82
1,82	1,83	1,86
1,85	-	-

Die Messwerte aus Tabelle 3 liefern mit Gleichung (4)

$$I_{1,\text{exp}} = (1,71 \pm 0,02) \text{ g m}^2,$$

$$\delta_1 = 48 \, \%. \quad .$$

4.3.2 Der Messingzylinder

Das Trägheitsmoment $I_{2,t}$ des Zylinders berechnet sich unabhängig von der Höhe nach Gleichung (7).

$$\begin{aligned} I_{2,t} &= \frac{1}{2}mr^2, \\ \Delta I_{2,t} &= \frac{1}{2}\sqrt{(r^2\Delta m)^2 + (2mr\Delta r)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Mit den gemessenen Werten für die Masse m und den Radius r folgt

$$\begin{aligned} m &= (1436,0 \pm 0,1) \text{ g}, \\ r &= (4,25 \pm 0,05) \text{ cm}, \\ \Rightarrow I_{2,t} &= (1,30 \pm 0,03) \text{ g m}^2. \end{aligned}$$

Tabelle 4 beinhaltet die Messdaten zur experimentellen Bestimmung:

Tabelle 4: Messwerte für die Bestimmung des Trägheitsmomentes $I_{2,\text{exp}}$ des Messingzylinders

$\overline{T}[\text{s}]$	$\overline{T}[\text{s}]$	$\overline{T}[\text{s}]$
1,34	1,35	1,32
1,35	1,34	1,32
1,31	1,32	1,33
1,30	-	-

Die Messwerte liefern mit Gleichung (4)

$$\begin{aligned} I_{2,\text{exp}} &= (0,89 \pm 0,01) \text{ g m}^2, \\ \delta_2 &= 46 \%. \end{aligned}$$

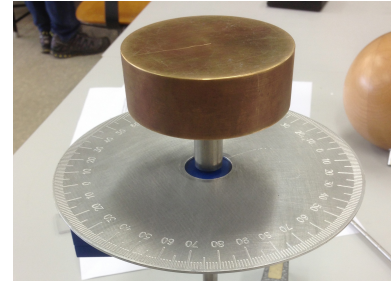


Abbildung 4: Messingzylinder

4.3.3 Diese Puppe

Die Holzpuppe wird zur Berechnung des Trägheitsmomentes näherungsweise durch eine Anordnung von Zylindern Z_i beschrieben. Dabei werden Arme, Beine, Torus und Kopf jeweils als Zylinder betrachtet und mit Hilfe des Steinerschen Satzes zu einem Gesamtträgheitsmoment I zusammengesetzt. Der Index i ist stets nach den Körperteilen benannt.

Kopf und Torus werden durch die Symmetrieachse gedreht. Die Beine werden parallel zur Symmetrieachse gedreht und müssen daher mit dem Steinerschen Satz verschoben werden. Ebenso werden die Arme in der ersten Position der Puppe parallel und in der zweiten Position im rechten Winkel zur Symmetrieachse gedreht. Die Stellungen der Puppe sind in Abbildung 5 und 6 verdeutlicht.



Abbildung 5: Puppe in Stellung 1

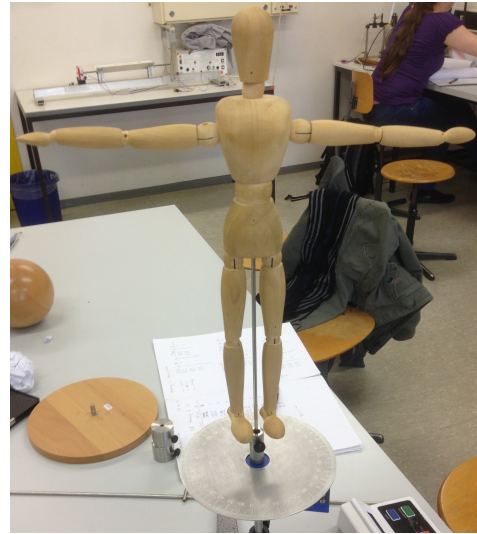


Abbildung 6: Puppe in Stellung 2

Die einzelnen Massen m_i werden dabei aus der Dichte $\rho = M/V$ mit der Gesamtmasse M und dem Gesamtvolumen V bestimmt:

$$M = 340,75 \text{ g} \quad , \quad V = 458,8 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow \rho = 0,743 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Für I gilt damit

$$I = I_{\text{Kopf}} + I_{\text{Torus}} + 2I_{\text{Arm}} + 2I_{\text{Bein}} + 2m_{\text{Arm}}a_{\text{Arm}}^2 + 2m_{\text{Bein}}a_{\text{Bein}}^2 ,$$

$$\Delta I = \left[(\Delta I_K)^2 + (\Delta I_T)^2 + (2\Delta I_A)^2 + 2(\Delta I_B)^2 + \right. \\ \left. + (2a_A^2 \Delta m_A)^2 + (4a_A m_A \Delta a_A)^2 + (2a_B^2 \Delta m_B)^2 + (4a_B m_B \Delta a_B)^2 \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} V_i &= \pi r_i^2 h_i, \\ \Delta V_i &= \pi \sqrt{(r_i h_i \Delta r_i)^2 + (r_i^2 \Delta h_i)^2} \end{aligned}$$

und I_i in Stellung 1 wie in Gleichung (7) beschrieben. In Stellung 2 gilt

$$\begin{aligned} I_{\text{Arm}} &= \frac{1}{4} m_{\text{Arm}} r_{\text{Arm}}^2 + \frac{1}{12} m_{\text{Arm}} h_{\text{Arm}}^2, \\ \Delta I_{\text{Arm}} &= \sqrt{\left(\frac{1}{4} r_{\text{A}}^2 + \frac{1}{12} h_{\text{A}}^2\right)^2 \Delta m_{\text{A}}^2 + \left(\frac{1}{2} m_{\text{A}} r_{\text{A}} \Delta r_{\text{A}}\right)^2 + \left(\frac{1}{6} m_{\text{A}} h_{\text{A}} \Delta h_{\text{A}}\right)^2} \end{aligned}$$

Mit $a_{\text{Arm}} = r_{\text{Torus}} + r_{\text{Arm}}$ und $a_{\text{Bein}} = (3,00 \pm 0,05) \text{ cm}$ folgt für Stellung 1

$$I_{1,\text{t}} = (1,96 \pm 0,16) \text{ kg cm}^2.$$

Mit $a_{\text{Arm}} = r_{\text{Torus}} + h_{\text{Arm}}/2$ folgt für Stellung 2

$$I_{2,\text{t}} = (8,91 \pm 0,17) \text{ kg cm}^2.$$

Die Messdaten aus den Tabellen 6 und 7 liefern mit Gleichung (4) die Ergebnisse

$$\begin{aligned} I_{1,\text{exp}} &= (1,66 \pm 0,06) \text{ kg cm}^2, \\ I_{2,\text{exp}} &= (4,50 \pm 0,10) \text{ kg cm}^2, \end{aligned}$$

Tabelle 5: Durchmesser der zylinderförmigen Körperteile der Puppe

$d_{\text{Kopf}}[\text{mm}]$	$d_{\text{Torus}}[\text{mm}]$	$d_{\text{Arm}}[\text{mm}]$	$d_{\text{Bein}}[\text{mm}]$
32,0	48,0	21,0	25,0
29,0	50,0	18,0	26,0
19,0	48,0	12,0	24,0
18,0	40,0	17,0	23,0
32,0	32,0	16,0	20,0
26,0	33,0	10,0	15,0
29,0	42,0	20,0	19,0
32,0	51,0	15,0	21,0
27,0	56,0	16,0	20,0
26,0	51,0	19,0	17,0

Tabelle 6: Benötigte Eigenschaften der Körperteile

	$r[\text{mm}]$	$h[\text{mm}]$	$V[\text{cm}^3]$	$m[\text{g}]$	$I[\text{g cm}^2]$
Kopf	$13,5 \pm 2,5$	$65,0 \pm 0,5$	$37,2 \pm 6,9$	$27,6 \pm 1,0$	$25,2 \pm 9,3$
Torus	$22,6 \pm 4,0$	$133,0 \pm 0,5$	$213,4 \pm 37,8$	$171,8 \pm 1,0$	$438,8 \pm 155,3$
Arm 1	$8,2 \pm 1,7$	$170,0 \pm 0,5$	$35,9 \pm 7,4$	$26,7 \pm 1,0$	$9,0 \pm 3,7$
Arm 2	$8,2 \pm 1,7$	$170,0 \pm 0,5$	$35,9 \pm 7,4$	$26,7 \pm 1,0$	$646,5 \pm 24,6$
Bein	$10,5 \pm 1,8$	$197,0 \pm 0,5$	$68,2 \pm 11,7$	$50,7 \pm 1,0$	$27,9 \pm 9,6$
	$I_1 = (1,96 \pm 0,16) \text{ kg cm}^2$, $I_2 = (8,91 \pm 0,17) \text{ kg cm}^2$				

Tabelle 7: Schwingungsdauern der Puppe

$\overline{T_1}[\text{s}]$	$\overline{T_1}[\text{s}]$	$\overline{T_2}[\text{s}]$	$\overline{T_2}[\text{s}]$
0,57	0,57	0,96	0,96
0,56	0,54	0,96	0,89
0,59	0,53	0,98	0,96
0,57	0,60	0,97	0,94
0,56	0,61	0,89	0,94

5 Diskussion

Es ist auffällig, dass die experimentellen Werte für die Holzkugel und den Zylinder etwa 100 % von den theoretischen Werten abweichen. Lediglich bei Stellung 1 der Puppe (siehe Abb. 5) weicht der experimentelle Wert nur etwa 6 % vom Theoriewert ab.

Der größte Fehler wird hier bei dem Dämpfungseffekt der Apparatur vermutet. Während der Messung fällt auf, dass die Schwingung bei mehr als 3 Perioden schon stark gedämpft wurde. Kürzere Schwingphasen konnten jedoch wegen der Reaktionszeit kaum gemessen werden. Weil die Puppe in Stellung 1 mit der höchsten Frequenz geschwungen ist, liegt hier möglicherweise der kleinste Fehler vor. Die Dämpfung schien bei langsameren Schwingungen einen größeren Effekt zu haben.

Eine weitere Fehlerquelle war die Bestimmung der Winkelrichtgröße D mit Hilfe eines Kraftmessers. Innere Reibungskräfte sorgten für sprunghafte Wertänderungen, was die Genauigkeit des Gerätes in Frage stellt.

Tabelle 8: Relative Unterschiede zwischen theoretisch und experimentell ermittelten Werten für das Trägheitsmoment I

Körper	$\delta[\%]$
Holzkugel	96
Messingzylinder	99
Puppe 1	76
Puppe 2	85

Literatur

- [1] Physikalisches Anfängerpraktikum der TU Dortmund: Versuch V101 - Das Trägheitsmoment. <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Traegheit.pdf>. Stand: April 2013.