

TU Dortmund

V351 - Fourier-Analyse und Synthese

Markus Stabrin
markus.stabrin@tu-dortmund.de

Kevin Heinicke
kevin.heinicke@tu-dortmund.de

Versuchsdatum: 14. Mai 2013

Abgabedatum: 21. Mai 2013

1 Einleitung

In diesem Versuch wird die experimentelle Umsetzung des Fourierschen Theorems untersucht.

2 Theorie

2.1 Das Fouriersche Theorem und Fourieranalyse

In der Physik spielen periodische Vorgänge eine zentrale Rolle. Sie lassen sich in bestimmten Fällen gut durch einfache sin- oder cos-Funktionen beschreiben, benötigen meist jedoch eine komplexere Beschreibung.

Das Fouriersche Theorem besagt, dass jede periodische Funktion mit der Periodendauer T durch die folgende Unendliche Reihe von sin- und cos-Funktionen dargestellt werden kann, wenn diese konvergiert:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) . \quad (1)$$

Für die Kreisfrequenz ω und die Koeffizienten a_n und b_n mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt dabei:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} , \quad (2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt ,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt , \quad (3)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt .$$

Die Koeffizienten müssen dabei für große n gegen 0 streben, damit die Fourierreihe konvergiert. Falls die Funktion f zudem an einer Stelle t_0 unstetig ist, besitzt die Fourierreihe an dieser Stelle eine endliche Abweichung zu f . Dies wird als Gibbsches Phänomen bezeichnet.

Die Ermittlung der Fourierkoeffizienten bezeichnet man als Fourieranalyse. Bei geraden Funktionen verschwinden dabei alle b_n -, bei ungeraden verschwinden alle a_n -Anteile.

Als Spektrum bezeichnet man zudem das Bild aller Amplituden a_n und b_n , aufgetragen gegen die Frequenz ν . Abbildung 1 zeigt beispielsweise ein Linienspektrum.

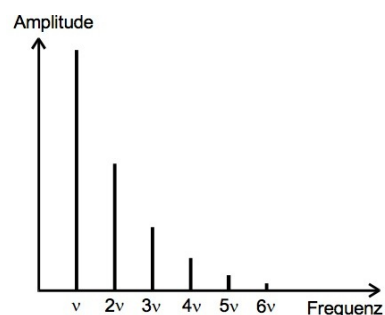


Abbildung 1: Frequenzspektrum einer Funktion [1].

2.2 Fouriertransformation

Als Fouriertransformation bezeichnet man die Bestimmung des gesamten Frequenzspektrums einer Funktion f . Im Gegensatz zur Fourieranalyse ist es dabei egal, ob f periodisch oder nichtperiodisch ist. Eine periodische Funktion führt lediglich auf das in Kapitel 2.1 beschriebene Frequenzspektrum mit diskreten Amplituden (den Koeffizienten a_n und b_n), während eine nichtperiodische Funktion ein kontinuierliches Spektrum $g(\nu)$ liefert. Zudem lässt sich mit Kenntnis des Frequenzspektrums, durch Rücktransformation von g , die Funktion selbst finden:

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\nu t} dt \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)e^{-i\nu t} d\nu. \quad (5)$$

Da es praktisch unmöglich ist, in Gleichung (4) über den unendlichen Zeitraum zu integrieren, treten bei der Umsetzung Fehler auf und die Periodizität von f geht verloren. Statt diskreten Frequenzen liefert die Transformation eine stetige Funktion mit Linien endlicher Breite.

3 Versuchsaufbau und Durchführung

Im Voraus des Versuchs sollen mit Gleichungen (1) bis (3) die Fourierkoeffizienten einer Rechteck-, Dreieck und Sägezahnspannung berechnet werden.

3.1 Analyse

Die drei Signale werden dann von einem Funktionsgenerator erzeugt und jeweils in einem Oszilloskop visualisiert. Das Oszilloskop ist dabei in der Lage, das Frequenzspektrum des Signals mit einer Fouriertransformation zu identifizieren. In diesem Spektrum kann das Verhältnis der Fourierkoeffizienten zueinander bestimmt werden, um es mit den theoretisch bestimmten Werten der Koeffizienten zu vergleichen.

3.2 Synthese

Im Folgenden Schritt wird ein Signalgenerator benutzt, der sin- Funktionen der Frequenzen ν , 2ν , bis 9ν erzeugen und addieren kann. Zunächst wird dabei jede Amplitude der einzelnen Signale auf die entsprechenden Fourierkoeffizienten eingestellt. Dabei werden die Spannungsbeträge der Funktionen für $n > 0$ relativ zur Eingangsspannung U_0 berechnet.

Anschließend wird die Phase φ zwischen den Oberwellen und dem Hauptsignal justiert, sodass sie mit den Phasen der Fouriersummanden übereinstimmen.

Dafür wird das Hauptsignal auf den X-Eingang und das Signal der Oberwelle auf den Y-Eingang des Oszilloskopes gelegt, wodurch dieses eine entsprechende Lissajous-Figur darstellt. Anhand dieser Figuren lässt sich leicht erkennen, ob die Phase φ zwischen den Signalen 0 oder π beträgt. Abbildung 2 zeigt die Lissajous-Figur der dritten Oberwelle bei einer Phase $\varphi = 0$.

Schließlich werden alle Signale summiert und wiederum auf dem Oszilloskop ausgegeben. Die Resultierende Funktion ist die Fouriersynthese der ersten neun Fourierkomponenten.



Abbildung 2: Lissajous-Figur der 3. Oberwelle in Phase [1].

4 Auswertung

4.1 Theoretische Vorbereitung

Die Fourierkoeffizienten in der theoretischen Vorbereitung ergaben mittels der Gleichungen (2) und (3) für die Rechtecks-, die Sägezahn- und die Dreiecksspannung:

$$\begin{aligned} \text{Rechteck : } b_n &= \frac{4}{n\pi}, n \text{ ungerade} \quad , \\ \text{Sägezahn : } b_n &= \frac{\pi^2}{n} \quad , \\ \text{Dreieck : } a_n &= \frac{4}{n^2\pi^2}, n \text{ ungerade} \quad . \end{aligned}$$

4.2 Fourier-Amplituden von drei verschiedenen Schwingungsformen

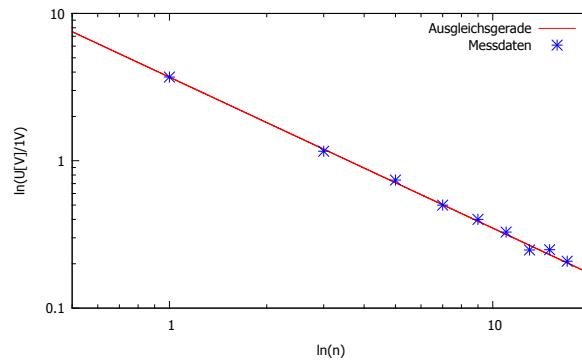


Abbildung 3: Graphische Darstellung der Fourier-Amplituden einer Rechtecksspannung und einem $a \cdot x^b$ fit.

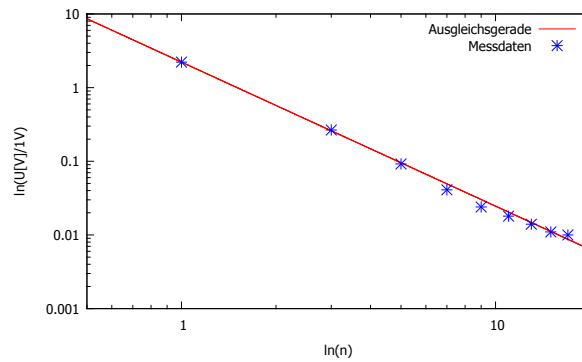


Abbildung 4: Graphische Darstellung der Fourier-Amplituden einer Dreiecksspannung und einem $a \cdot x^b$ fit.

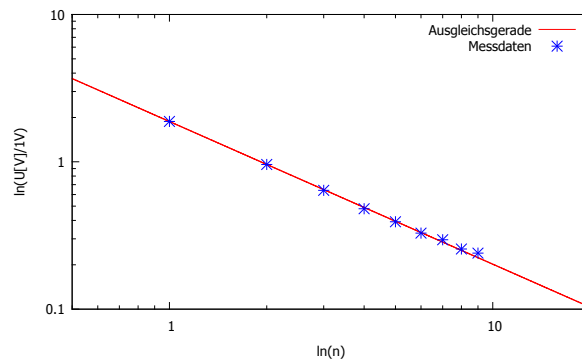


Abbildung 5: Graphische Darstellung der Fourier-Amplituden einer Sägezahnspannung und einem $a \cdot x^b$ fit.

Rechteck n-te Oberwelle	U[V]	Sägezahn n-te Oberwelle	U[V]	Dreieck n-te Oberwelle	U[V]
1	3.700	1	1.880	1	2.220
3	1.160	2	0.960	3	0.266
5	0.740	3	0.640	5	0.092
7	0.500	4	0.480	7	0.041
9	0.400	5	0.392	9	0.024
11	0.328	6	0.328	11	0.018
13	0.248	7	0.296	13	0.014
15	0.249	8	0.256	15	0.011
17	0.208	9	0.240	17	0.010

Tabelle 1: Messwerte der Spannung U bei der n-ten Oberschwingung

Bei der Messung der ersten 9, von null verschiedenen, Fourieramplituden einer Rechtecks-, einer Dreiecks- und einer Sägezahnschwingung ergaben sich die in Tabelle 1 gemessenen Werte. Die Daten sind in den Graphiken 3, 4 und 5 dargestellt.

Eine Ausgleichsrechnung mithilfe der Funktion $a * x^b$ ergab folgende Werte:

Dreiecksspannung		
a	=	$2,220 \pm 0,005$
b	=	$-1,955 \pm 0,014$
Rechtecksspannung		
a	=	$3,695 \pm 0,022$
b	=	$-1,025 \pm 0,009$
Sägezahnspannung		
a	=	$1,878 \pm 0,009$
b	=	$-0,968 \pm 0,007$

Bei der Rechtecks- und Sägezahnspannung ist eine erwartete Abnahme der Amplitude mit $1/x$ erkennbar. Die Dreiecksspannung hingegen lässt eine erwartete $1/x^2$ Abhängigkeit erkennen.

Die geringen Abweichungen des Exponenten von den Erwarteten könnten sich durch die Analyse Bauteile des Oszilloskops erklären lassen.

4.3 Sukzessive Zusammensetzung verschiedener Schwingungsformen aus deren Komponenten

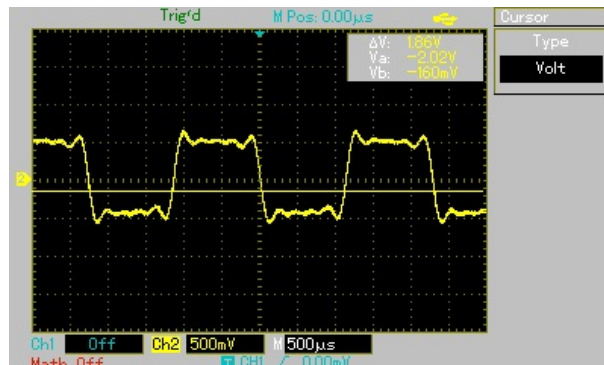


Abbildung 6: Fouriersynthese einer Rechtecksspannung aus den ersten 9 Oberschwingungen.

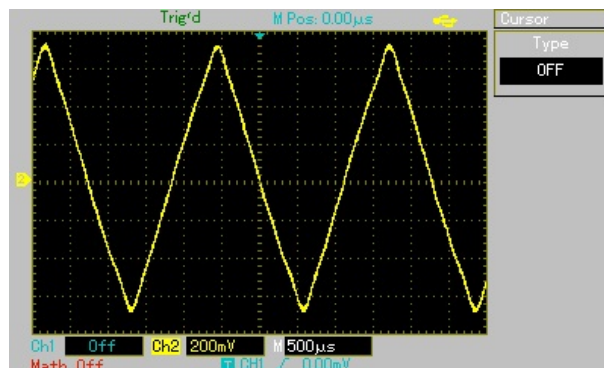


Abbildung 7: Fouriersynthese einer Dreiecksspannung aus den ersten 9 Oberschwingungen.

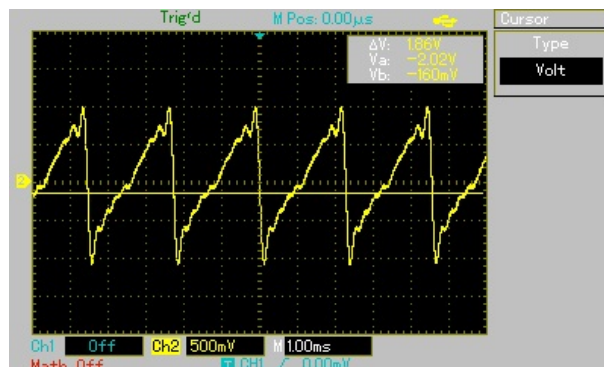


Abbildung 8: Fouriersynthese einer Sägezahnspannung aus den ersten 9 Oberschwingungen.

Rechteck n-te Oberschwingugn	U[V]	Dreieck n-te Oberschwingugn	U[V]	Sägezahn n-te Oberschwingugn	U[V]
1	0.600	1	0.600	1	0.600
2	0.000	2	0.000	2	-0.300
3	0.200	3	0.067	3	0.200
4	0.000	4	0.000	4	-0.150
5	0.120	5	0.024	5	0.120
6	0.000	6	0.000	6	-0.100
7	0.085	7	0.012	7	0.085
8	0.000	8	0.000	8	-0.075
9	0.065	9	0.007	9	0.065

Tabelle 2: Werte der theoretisch errechneten Amplituden aus den Fourier-Koeffizienten.

Bei der sukzessiven Zusammensetzung verschiedener Schwingungsformen aus deren Komponenten ergaben sich für die Rechtecksspannung, die Dreiecksspannung und die Sägezahnspannung die in den Graphiken 6, 7 und 8 gezeigten Bilder auf dem Oszilloskop. Für die Oberschwingungen wurden die in Tabelle 2 aufgeführten Werte verwendet, welche zuvor aus den Fourierkoeffizienten errechnet wurden.

5 Diskussion

Bei diesem Versuch gab es wenig Probleme. Das Ablesen der Fourieramplituden am Oszilloskop war bei der Sägezahnspannung in höheren Oberwellenbereichen etwas schwietig, da das Signal sehr verrauscht war. Bei der Erzeugung von Schwingungsformen mithilfe des Oberwellengenerators musste sich erst etwas eingearbeitet werden, doch nachdem man die richtigen Amplituden den richtigen Oberwellen zugeordnet hatte, hat auch dies gut funktioniert. Da die Phase bei 0° und 180° gleich aussah, ließ sich diese erst durch ausprobieren richtig ermitteln.

Literatur

- [1] Physikalisches Anfängerpraktikum der TU Dortmund: Versuch V351 - Fourier-Analyse und Synthese. <http://129.217.224.2/HOME/PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V351.pdf>. Stand: Mai 2013.