

TU Dortmund

V504 - Thermische Elektronenemission

Markus Stabrin
markus.stabrin@tu-dortmund.de

Kevin Heinicke
kevin.heinicke@tu-dortmund.de

Versuchsdatum: 15. Januar 2013

Abgabedatum: 28. Januar 2013

1 Einleitung

Bei der Erwärmung einer Metalloberfläche ist eine Elektronenemission möglich. Dabei ist besonders die Austrittsarbeit von Bedeutung. Dabei wird der Versuch im Hochvakuum durchgeführt, damit keine Wechselwirkungen mit den Luftmolekülen stattfindet. Es wird die Kathodentemperatur und die Austrittsarbeit der Kathode bestimmt.

2 Theorie

2.1 Austrittsarbeit und die Energieverteilung

Metalle sind häufig kristalline Festkörper. Die Atome darin sind ionisiert und die Elektronen gehören nicht mehr zu einem bestimmten Atom, sondern befinden sich im Kraftfeld sämtlicher Ionen. Darin können sich die Elektronen frei bewegen, wodurch eine hohe elektrische Leitfähigkeit erzeugt wird. Um den Metallverband verlassen zu können, muss das Elektron gegen das Potential Φ anlaufen können. Dafür muss die Austrittsarbeit $e_0\Phi$ geleistet werden. Das Potential des Gitters kann in grober Näherung als konstant angesehen werden. Abb. 1 stellt das sogenannte Potentialtopfmodell dar.

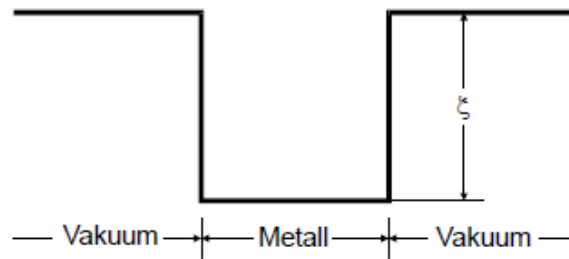


Abbildung 1: Potentialtopfmodell

Die Elektronen des Kristallgitters unterliegen dem Pauli-Verbot, nach dem nur zwei Elektronen mit entgegengesetztem Spin denselben Zustand mit der Energie E haben können. Die Maximalenergie der Elektronen bei $T = 0$ wird als Grenzenergie Φ bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, ob ein Zustand mit der Energie E besetzt wird, wird durch die Fermi-Dirac'sche Verteilungsfunktion angegeben:

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\Phi}{kT}\right) + 1} . \quad (1)$$

Der Verlauf ist in Abb. 2 dargestellt. Die Exponentialfunktion im Nenner übertrifft die Zahl 1 bei weitem, wodurch näherungsweise gilt:

$$f(E) \propto \exp\left(-\frac{\Phi - E}{kT}\right) . \quad (2)$$

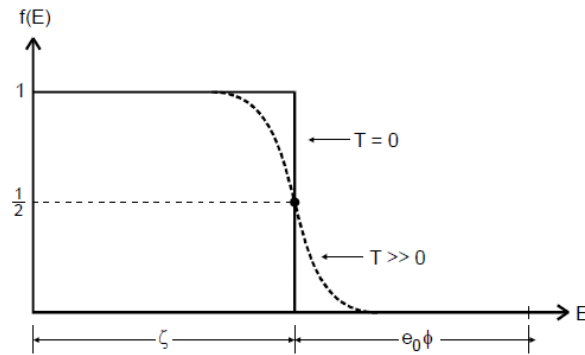


Abbildung 2: Fermi-Dirac'sche Verteilungsfunktion

2.2 Berechnung der Sättigungsstromdichte bei der thermischen Elektronenemission

Für die Sättigungsstromdichte $j_s(T)$ erhält man nach Einführung eines kartesischen Koordinatensystems die Richardson Gleichung:

$$j_s(T) = 4\pi \frac{e_0 m_0 k^2}{h^3} T^2 \exp\left(\frac{-e_0 \Phi}{kT}\right). \quad (3)$$

2.3 Die Hochvakuum-Diode

Um Wechselwirkungen mit den Gasmolekülen der Luft zu vermeiden, muss die Messung des Sättigungsstroms j_s im Hochvakuum durchgeführt werden. Diese ist nach Abb. 3 aufgebaut. Durch eine angelegte Heizspannung kann die Glühkathode auf 1000 bis 3000 K erhitzt werden.

Die austretenden Elektronen werden durch ein elektrisches Feld zur Anode hin beschleunigt. Die Diode wird in der Technik zur Gleichrichtung von Wechselströmen benutzt, da die Elektronen nicht in der Lage sind, gegen ein hohes Gegenfeld anzulaufen.

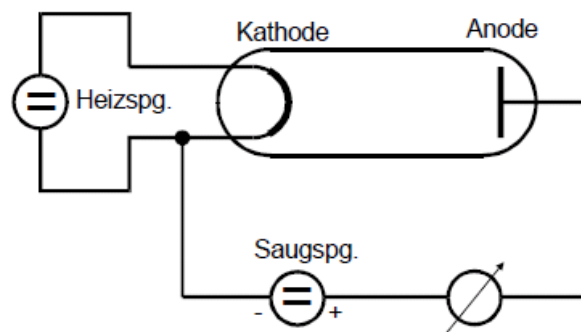


Abbildung 3: Beschaltung einer Hochvakuum-Diode

2.4 Langmuir-Schottkysche Raumladungsdichte

Der Anodenstrom ist nicht nur von der Kathodentemperatur, sondern auch von der Anodenspannung abhängig. Dies kommt, da die Geschwindigkeit v der Elektronen nicht konstant ist und so das Ohm'sche Gesetz nicht gültig ist. Daraus folgt, dass die Raumladungsdichte ρ der Elektronen ortsabhängig ist. Dies folgt aus der konstanten Kontinuitätsgleichung

$$j = -\rho v. \quad (4)$$

Die Elektronen schirmen also die Feldlinien der Anode vor der Kathode ab. Um dennoch Zusammenhänge zwischen Anodenspannung und -strom darstellen zu können, geht man von der Poisson'schen Gleichung aus:

$$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (5)$$

(Δ = Laplace Operator, V = Potential am Aufpunkt, ϵ_0 = Dielektrizitätskonstante des Vakuums)

Es ergibt sich für den Zusammenhang zwischen Stromdichte j und Anodenspannung V :

$$j = \frac{4}{9} \epsilon_0 \sqrt{2 \frac{e_0}{m_0}} \frac{V^{\frac{3}{2}}}{a^2}. \quad (6)$$

Dies ist das Langmuir-Schottkysche Raumladungsgesetz und j wächst mit $V^{\frac{3}{2}}$.

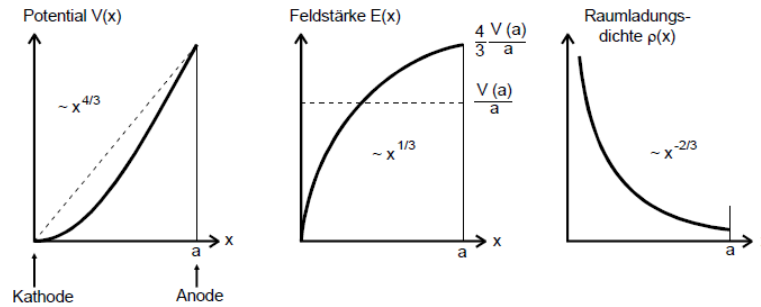


Abbildung 4: Ortsabhängigkeit des potentials V , der Feldstärke E und der Raumladungsdichte ρ im Raumladungsgebiet einer Hochvakuumdiodekennlinie

2.5 Das Anlaufstromgebiet einer Hochvakuumdiode

Bei $T > 0$ treten endlich viele Elektronen aus dem Material aus. Der Energieüberschuss dieser Elektronen ist deren kinetische Energie, mit der sie gegen ein geringes Gegenfeld anlaufen können. Dieser Strom wird als Anlaufstrom bezeichnet. Dabei ergibt sich für den Anlaufstrom in Abhängigkeit vom äußeren Potential:

$$j(V) = j_0 \exp\left(-\frac{e_0(\phi_A + V)}{kT}\right) = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{e_0 V}{kT}\right). \quad (7)$$

2.6 Die Kennlinie der Hochvakuumdiode

Die Kennlinie einer Hochvakuumdiode lässt sich in das Anlaufstrom-, Raumladungsstrom- und Sättigungsstromgebiet gliedern (Abb. 5). Für $V < 0$ ist im Anlaufstromgebiet ein exponentieller Zusammenhang zu erkennen. Für $V > 0$ ist das Raumladungsstromgebiet proportional zu $\sqrt{V^3}$. Mit steigendem V strebt der Anodenstrom einem Sättigungswert entgegen.

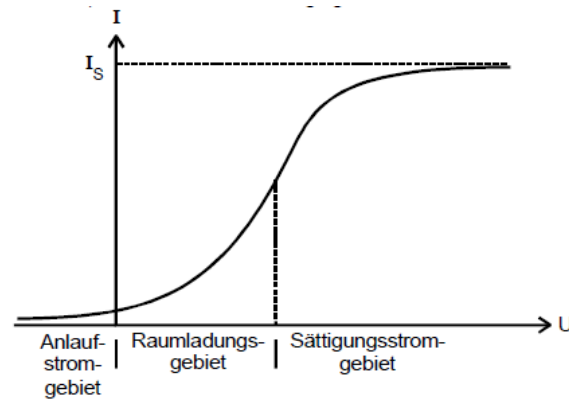


Abbildung 5: Kennlinie einer Hochvakuumdiode

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Kennlinienschar einer Hochvakuumdiode

Für Aufgabenteil a wird die Versuchsanordnung nach Abb. 6 aufgebaut. Die Heizspannung V_f und der Heizstrom I_f wird konstant gehalten. Die Anodenspannung wird nun variiert und der Anodenstrom abgelesen. Aus diesen ergibt sich die Diodenkennlinie. Dies wird für fünf insgesamt verschiedene Heizströme und -spannungen wiederholt. In Aufgabenteil b wird die höchste Heizspannung genutzt.

3.2 Anlaufstrom

In Aufgabenteil c wird das Anlaufstromgebiet der Diode untersucht. Dafür wird eine Schaltung nach Abb. 7 aufgebaut, wobei auf ein paar Dinge zu achten ist. Da die Ströme sehr gering sind muss zwischen Anode und Eingangsbuchse ein möglichst kurzes Kabel benutzt werden. Zudem ist der Übergangswiderstand durch mehrmaliges Drehen des Bananensteckers in seiner Buchse zu minimieren.

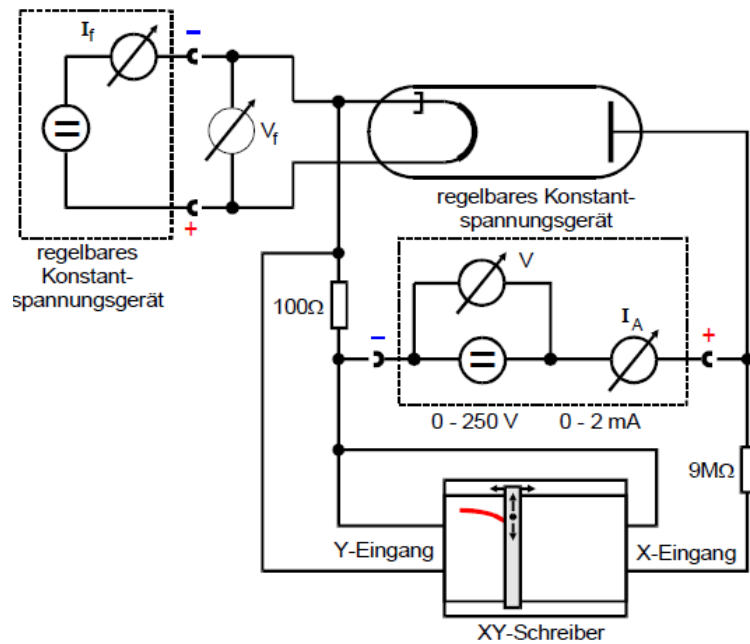


Abbildung 6: Schaltung zum Aufnehmen von Diodenkennlinien

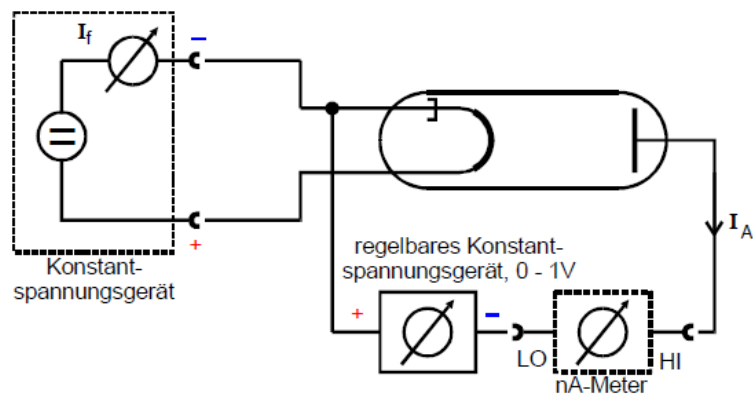


Abbildung 7: Schaltung zur Aufnahme einer Anlaufstromkurve

4 Auswertung

4.1 Sättigungsströme und Kennlinien der Hochvakuumdiode

Um den Sättigungsstrom I_s der Diode abzuschätzen, werden für fünf Heizstromstärken I_H die Kennlinien aufgetragen. Hierfür wird der Diodenstrom I gegen das Diodenpotential U aufgetragen. Für Ströme $I > 1,25 \text{ mA}$ zeigt das Strommessgerät eine Überlastung an. Weil dieser Wert jedoch bei den Heizstromstärken $I_H = 2,9 \text{ A}$ und $I_H = 3,1 \text{ A}$ erreicht wird, bevor ein Abflachen der Kurve erkannt werden kann, können lediglich drei

Sättigungsströme abgelesen werden:

$$\begin{aligned}I_{\text{H}} = 2 \text{ A}, U_{\text{H}} = 3 \text{ V} &\Rightarrow I_{\text{s},1} = 4 \text{ nA} \\I_{\text{H}} = 2,3 \text{ A}, U_{\text{H}} = 3,5 \text{ V} &\Rightarrow I_{\text{s},2} = 40 \text{ nA} \\I_{\text{H}} = 2,6 \text{ A}, U_{\text{H}} = 4 \text{ V} &\Rightarrow I_{\text{s},3} = 0,32 \text{ mA}\end{aligned}$$

Die Folgenden zwei Graphen visualisieren die Messdaten, sowie die geschätzten Sättigungsströme I_{s} . Die Messdaten sind anschließend in Tabelle 4.4 aufgeführt.

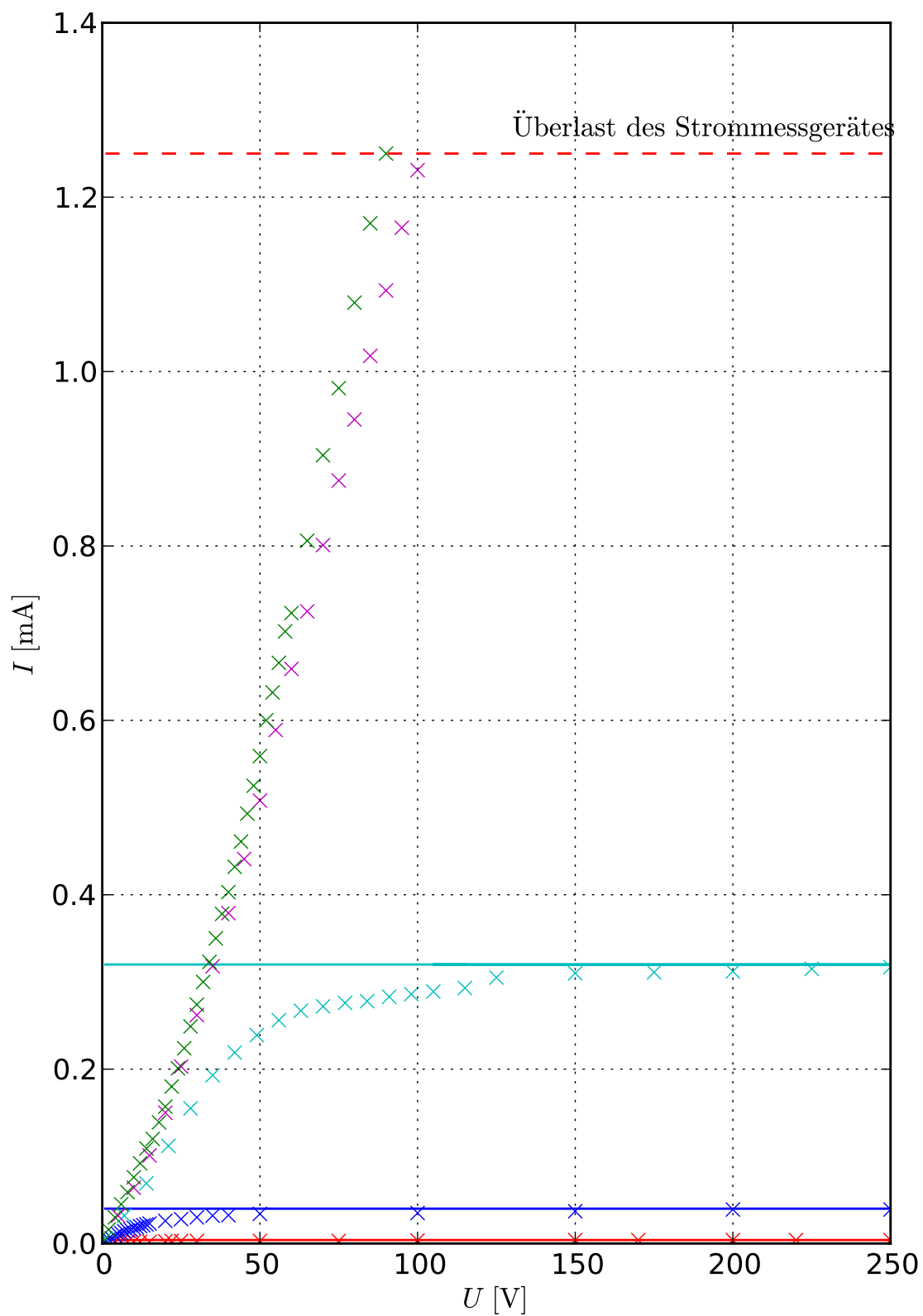


Abbildung 8: Kennlinien der Hochvakuumdiode für Heizströme von $I_s = 2 \text{ A}$ bis $I_s = 3,1 \text{ A}$.

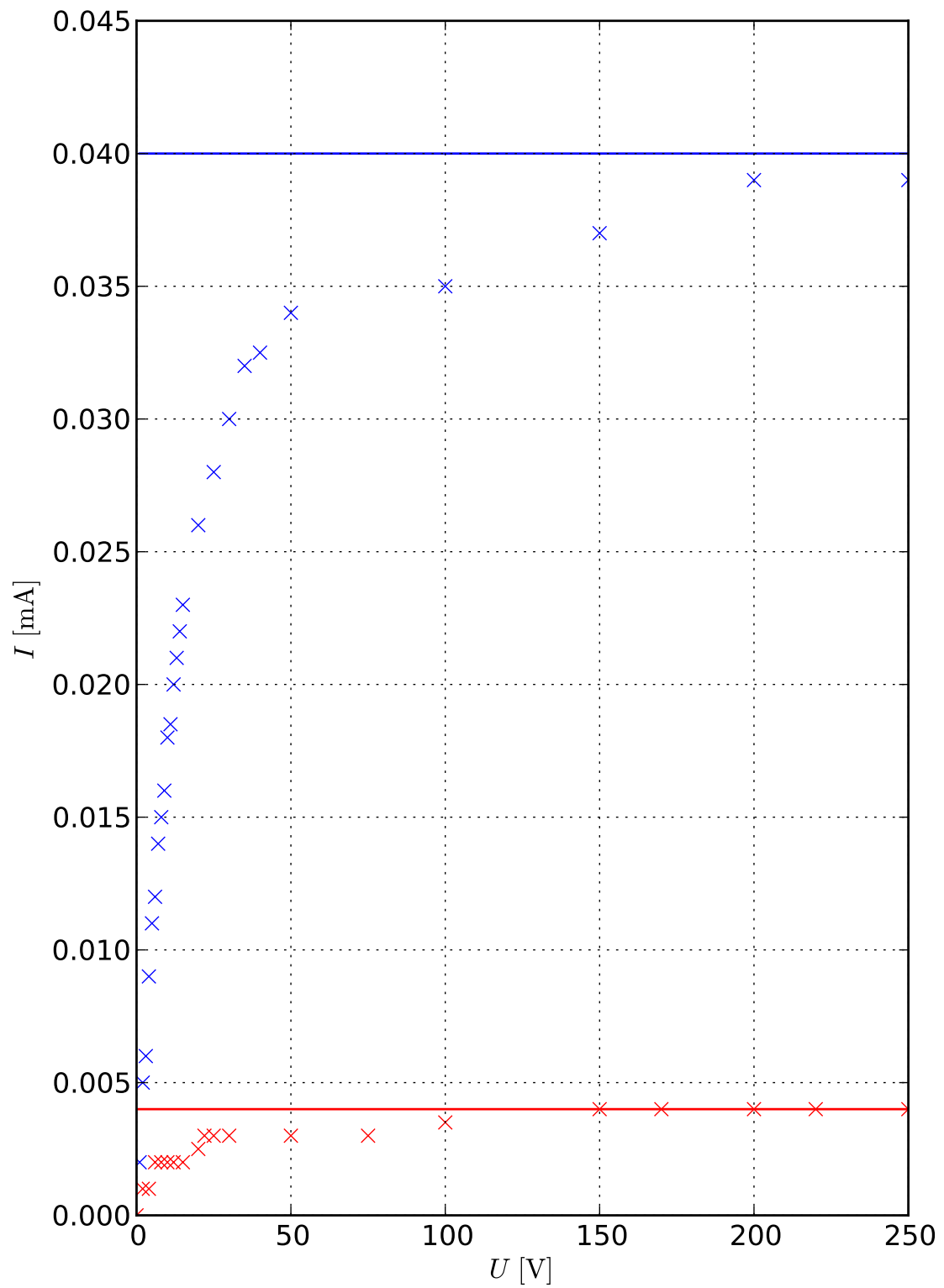


Abbildung 9: Kennlinien der Hochvakuumdiode für Heizströme von $I_s = 2$ A und $I_s = 2,3$ A. In dieser Auflösung lassen sich die Werte besser erkennen.

Tabelle 1: Messwerte für die Diodenkennlinien. Für die Verifizierung des Langmuir-Schottkyschen Raumladungsgesetzes wurden bei maximaler Heizleistung besonders viele Messwerte genommen.

$I_H = 2 \text{ A}$ $U_H = 3 \text{ A}$		$I_H = 2,3 \text{ A}$ $U_H = 3,5 \text{ A}$		$I_H = 2,6 \text{ A}$ $U_H = 4 \text{ A}$		$I_H = 2,9 \text{ A}$ $U_H = 5 \text{ A}$		$I_H = 3,1 \text{ A}$ $U_H = 6 \text{ A}$	
$U \text{ [V]}$	$I \text{ [mA]}$	$U \text{ [V]}$	$I \text{ [mA]}$	$U \text{ [V]}$	$I \text{ [mA]}$	$U \text{ [V]}$	$I \text{ [mA]}$	$U \text{ [V]}$	$I \text{ [mA]}$
0,0000	0	0,0020	1	0,006	001	0,032	005	0	0,001
0,0010	2	0,0050	2	0,032	007	0,064	010	2	0,016
0,0010	4	0,0060	3	0,069	014	0,101	015	4	0,030
0,0020	6	0,0090	4	0,112	021	0,150	020	6	0,045
0,0020	8	0,0110	5	0,155	028	0,203	025	8	0,059
0,0020	10	0,0120	6	0,193	035	0,262	030	10	0,076
0,0020	12	0,0140	7	0,219	042	0,318	035	12	0,092
0,0020	15	0,0150	8	0,239	049	0,379	040	14	0,109
0,0025	20	0,0160	9	0,256	056	0,441	045	16	0,120
0,0030	22	0,0180	10	0,267	063	0,508	050	18	0,139
0,0030	25	0,0185	11	0,272	070	0,589	055	20	0,157
0,0030	30	0,0200	12	0,276	077	0,659	060	22	0,180
0,0030	50	0,0210	13	0,278	084	0,725	065	24	0,201
0,0030	75	0,0220	14	0,283	091	0,801	070	26	0,224
0,0035	100	0,0230	15	0,286	098	0,875	075	28	0,249
0,0040	150	0,0260	20	0,305	125	0,945	080	30	0,274
0,0040	170	0,0280	25	0,310	150	1,018	085	32	0,300
0,0040	200	0,0300	30	0,311	175	1,093	090	34	0,323
0,0040	220	0,0320	35	0,312	200	1,165	095	36	0,350
0,0040	250	0,0325	40	0,315	225	1,231	100	38	0,378
-	-	0,0340	50	0,317	250	-	-	40	0,403
-	-	0,0350	100	0,289	105	-	-	42	0,432
-	-	0,0370	150	0,293	115	-	-	44	0,461
-	-	0,0390	200	-	-	-	-	46	0,493
-	-	0,0390	250	-	-	-	-	48	0,525
-	-	-	-	-	-	-	-	50	0,559
-	-	-	-	-	-	-	-	52	0,600
-	-	-	-	-	-	-	-	54	0,632
-	-	-	-	-	-	-	-	56	0,666
-	-	-	-	-	-	-	-	58	0,702
-	-	-	-	-	-	-	-	60	0,723
-	-	-	-	-	-	-	-	65	0,806
-	-	-	-	-	-	-	-	70	0,904
-	-	-	-	-	-	-	-	75	0,981
-	-	-	-	-	-	-	-	80	1,079
-	-	-	-	-	-	-	-	85	1,170
-	-	-	-	-	-	-	-	90	1,250

4.2 Verifizierung des Langmuir-Schottkyschen Raumladungsgesetzes

Um die Vorhersage des Langmuir-Schottkyschen Raumladungsgesetzes zu prüfen, wurden bei maximalem Heizstrom $I_H = 3,1 \text{ A}$ möglichst viele Werte aufgenommen. Das Gesetz gilt in einem Bereich von $U = 0$ bis zum Wendepunkt der Diodenkennlinie. Weil in dieser Messreihe kein Wendepunkt erkennbar ist wird angenommen, dass das Gesetz für alle Werte erfüllt ist.

Es gilt dann

$$\begin{aligned} I &\propto U^a, \\ \Leftrightarrow \ln I &\propto a \ln U. \end{aligned}$$

Mit einem Konstanten Exponenten a , der durch lineare Regression ermittelt werden kann und etwa den Wert $a_{\text{Theorie}} = 3/2$ annehmen sollte.

Lineare Regression mit Hilfe des Python-Moduls numpy ergibt

$$a = 1,204 \pm 0,007.$$

Zusätzlich wird eine nicht-lineare Regression durch numpy durchgeführt und liefert

$$a = 1,380 \pm 0,008.$$

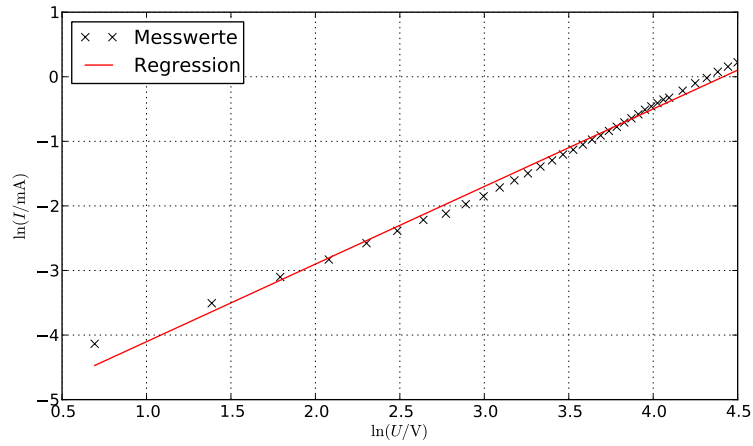


Abbildung 10: Lineare Regression der $(\ln U, \ln I)$ Wertepaare zur Kontrolle des Exponenten des Langmuir-Schottkyschen Raumladungsgesetzes.

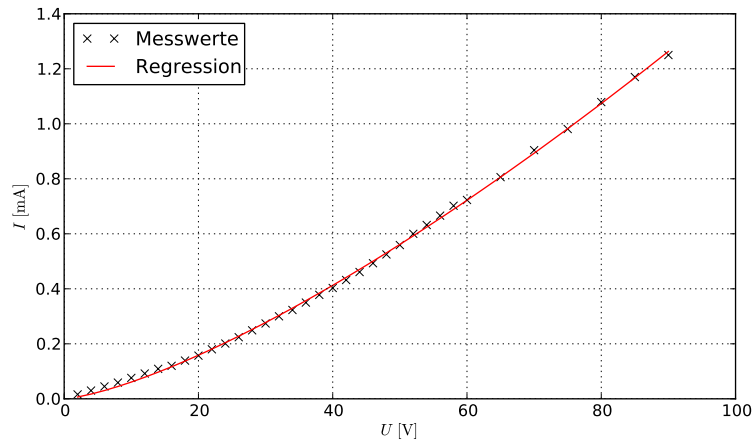


Abbildung 11: Nicht-lineare Regression der (U, I) Wertepaare zur Kontrolle des Exponenten des Langmuir-Schottkyschen Raumladungsgesetzes.

4.3 Bestimmung der Kathodentemperatur...

4.3.1 ...mit Hilfe des Kathodenstromes I und der Kathodenspannung U im Anlaufstromgebiet

Aus den Wertepaaren (U, I) im Anlaufstromgebiet der Diode bei maximaler Heizleistung ($I_H = 3,1 \text{ A}$), lässt sich die Temperatur T der Kathode ermitteln. Wegen der Beziehung

$$I(U) \propto \exp\left(-\frac{e_0 U}{kT}\right)$$

lässt sich T durch lineare Regression von $\ln I$ gegen $c \cdot U$ bestimmen. Die Berechnung durch numpy liefert dann den Wert für c , woraus sich T errechnen lässt. Es ist zu beachten, dass die gemessene Spannung U um die im Messgerät abfallende Spannung $U_- = I \cdot 1 \text{ M}\Omega$ korrigiert werden muss. Die Regression wird also mit $U_k = U - U_-$ durchgeführt.

Die Temperatur T ist dabei außerdem mit einem Fehler behaftet, der mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung bestimmt wird. Es gilt

$$\begin{aligned} c &= -\frac{e_0}{kT} \\ \Leftrightarrow T &= -\frac{e_0}{kc}, \\ \Delta T &= \frac{e_0}{kc^2} \Delta c, \end{aligned}$$

mit der Stefan-Boltzmann Konstante $k = 1,381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ [2] und der Elementarladung $e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ [2].

Die Regression liefert

$$\begin{aligned} c &= (-3,360 \pm 0,088) \frac{\text{C}}{\text{J}} \\ \Rightarrow T &= (3454 \pm 90) \text{ K}. \end{aligned}$$

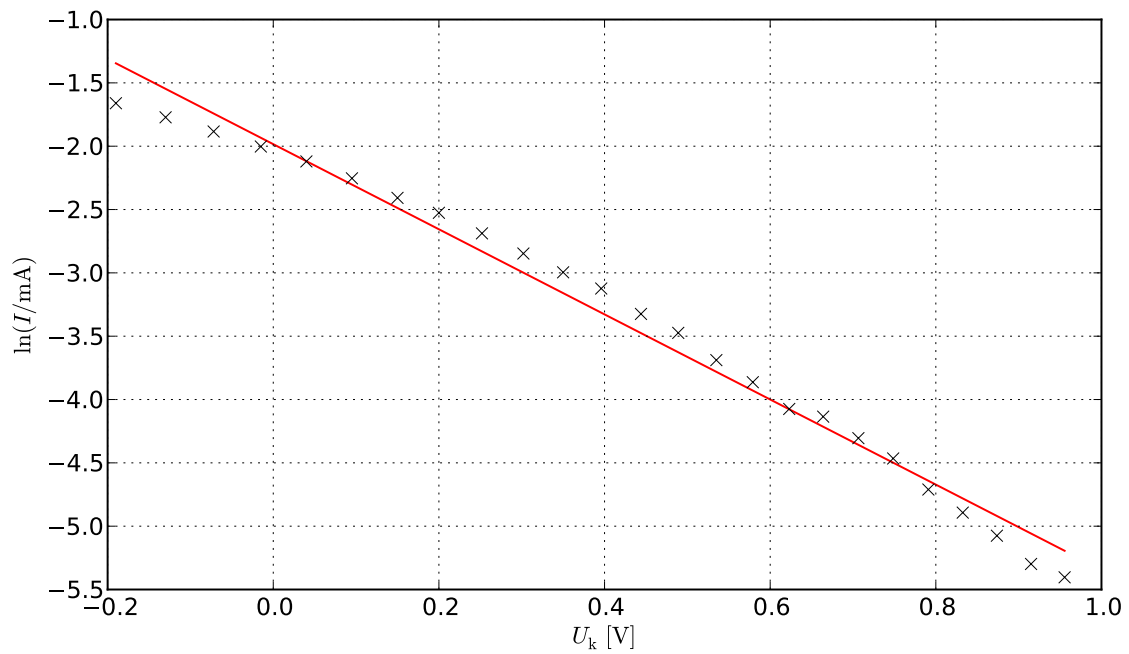


Abbildung 12: Lineare Regression von $\ln I$ gegen U_k im Anlaufstrombereich.

Tabelle 2: Messwerte für Diодenspannung U , U_k und -strom I im Anlaufstrombereich.

U [V]	U_k [V]	I [mA]	U [V]	U_k [V]	I [mA]
0,00	-0,190	0,190	0,52	0,48900	0,03100
0,04	-0,130	0,170	0,56	0,53500	0,02500
0,08	-0,072	0,152	0,60	0,57900	0,02100
0,12	-0,015	0,135	0,64	0,62300	0,01700
0,16	0,040	0,120	0,68	0,66400	0,01600
0,20	0,095	0,105	0,72	0,70650	0,01350
0,24	0,150	0,090	0,76	0,74850	0,01150
0,28	0,200	0,080	0,80	0,79100	0,00900
0,32	0,252	0,068	0,84	0,83250	0,00750
0,36	0,302	0,058	0,88	0,87375	0,00625
0,40	0,350	0,050	0,92	0,91500	0,00500
0,44	0,396	0,044	0,96	0,95550	0,00450
0,48	0,444	0,036	-	-	-

4.3.2 ...mit Hilfe der Heizleistung $U_H I_H$

Anhand der Heizleistung $U_H I_H$ der Kathodenheizung lässt sich die Temperatur T der Kathode ebenfalls bestimmen. Es gilt dabei

$$T = \left(\frac{I_H U_H - N_{WL}}{f \eta \sigma} \right)^{\frac{1}{4}},$$

mit der Stefan-Boltzmannschen Strahlungskonstante $\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$ [2], der Kathodenoberfläche $f = 0,35 \text{ cm}^2$ [1], dem Emissionsgrad $\eta = 0,28$ [2] und der Wärmeleitung $N_{WL} = 0,9$ [2]. Wegen Ablesefehlern des Heizstromes I_H und der Heizspannung U_H ist die Temperatur T fehlerbehaftet. Für den Fehler gilt nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung

$$\Delta T = \frac{1}{4} (f \eta \sigma)^{-\frac{1}{4}} |I_H U_H - N_{WL}|^{-\frac{3}{4}} (U_H \Delta I_H + I_H \Delta U_H).$$

Damit ergeben sich die Werte

I_H [A] $\pm 0,1$ A	U_H [V] $\pm 0,1$ V	T [K]
2,0	3,0	1741 ± 4
2,3	3,5	1894 ± 4
2,6	4,0	2033 ± 4
2,9	5,0	2224 ± 3
3,1	6,0	2376 ± 3

4.4 Bestimmung der Austrittsarbeit

Mit Hilfe der Richardson-Gleichung lässt sich schließlich aus den Sättigungsströmen I_s die Austrittsarbeit von Elektronen im gegebenen Material bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} e_0 \Phi &= -kT \cdot \ln \left(\frac{I_s h^3}{4\pi e_0 m_0 k^2 T^2} \right), \\ \Delta e_0 \Phi &= \left| k \ln \left(\frac{I_s h^3}{4\pi e_0 m_0 k^2 T^2} \right) \right| \Delta T. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ [2] das Plancksche Wirkungsquantum und $m_0 = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ [2] die Elektronenmasse.

Man erhält

I_s [nA]	T [K]	$e_0\Phi$ [eV]
4	1741 ± 4	$7,240 \pm 0,002$
40	1894 ± 4	$5,649 \pm 0,002$
320	2033 ± 4	$7,741 \pm 0,002$

Durch Bildung des Mittelwertes über alle $n = 3$ Werte und des Fehlers

$$\Delta x = \left(\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

erhält man für die Austrittsarbeit:

$$\overline{e_0\Phi} = (6,877 \pm 0,003) \text{ eV}.$$

5 Diskussion

Besonders auffällig sind in diesem Experiment die Abweichung der Kathodentemperatur zwischen Kapitel 4.3.1 und 4.3.2. Der Unterschied von über 30 % lässt sich nur durch Systematische Fehler erklären.

Zudem konnte die Austrittsarbeit auf Grund der kleinen Wertestichprobe nicht sonderlich genau bestimmt werden. Falls mehr Messwerte oberhalb von Kathodenspannungen von $U = 90 \text{ V}$ aufgenommen werden könnten, würde die Abweichung von fast 50 % vom Literaturwert $e_0\Phi = 4,6 \text{ eV}$ [3] eventuell geringer ausgefallen.

Literatur

- [1] Physikalisches Anfängerpraktikum der TU Dortmund: Versuch Nr. 504 - Thermische Elektronenemission. Stand: Januar 2013.
- [2] National Institute of Standards and Technology: Reference on Constants, Units and Uncertainty. <http://physics.nist.gov/cuu/index.html>. Stand: 16.01.2013.
- [3] Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY. <http://mhf-e.desy.de/e638/e836/>. Stand: 06.02.2013.