TU Dortmund

V402 - Dispersion am Glasprisma

Korrektur

Markus Stabrin
markus.stabrin@tu-dortmund.de

Kevin Heinicke
kevin.heinicke@tu-dortmund.de

Versuchsdatum: 21. Mai 2013

Abgabedatum: 18. Juni 2013

1 Einleitung

Durch die Wechselwirkung einer Lichtwelle mit den Elektronen der Materie werden die Ausbreitungsgeschwindigkeiten v des Lichtes kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit c. Es wird sich herausstellen, dass die Geschwindigkeit von der Wellenlänge des Lichtes abhängt. Dieses Phänomen wird als Dispersion bezeichnet.

2 Theorie

2.1 Brechung, Brechungsindex und Dispersionskurve

Tritt ein Lichtstrahl schräg in Materie ein, so erfährt er durch die Änderung der Geschwindigkeit an der Grenzfläche eine Richtungsänderung.
Dies wird als Brechung bezeichnet und wird durch den Brechungsindex n beschrieben. Dieser ist definiert durch das Verhältnis der beiden Lichtgeschwindigkeiten.

$$n := \frac{v_1}{v_2} \tag{1}$$

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit gilt:

$$v = \lambda \frac{\omega}{2\pi} \tag{2}$$

Daraus folgt, dass auch der Brechungsindex n eine frequenzabhängige bzw. wellenlängenabhängige Größe ist und somit eine Funktion im Bereich des sichtbaren Lichtes.
Dies wird als Dispersionskurve bezeichnet.

$$n = f(\lambda) \tag{3}$$

2.2 Das Huygenssche Prinzip

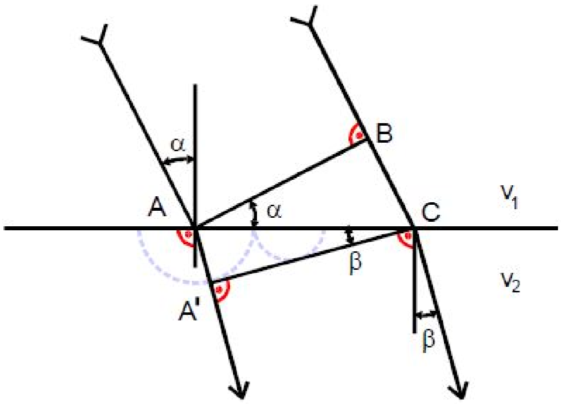

Abbildung 1: Das Huygens'sche Prinzip und die daraus resultierenden wichtigen Größen für die Herleitung des Snelliusschen Brechungsgesetzes, [1]

Jeder Punkt einer bestehenden Wellenfläche kann als Zentrum einer neuen kugelförmigen „Elementarwelle“ aufgefasst werden. Die Einhüllende aller Elementarwellen gibt die Wellenfront für einen späteren Zeitpunkt. Durch die Geschwindigkeitsänderung an einer Grenzfläche kommt so eine Richtungsänderung zustande (Abb. 1).
In der Zeit T = $\bar{BC}/v_1$ erreicht der Punkt B die Grenzfläche. In der Zeit hat die Welle im Punkt A jedoch bereits die Strecke $\mathrm{T}v_2 = \bar{AA'}$ zurückgelegt. Wird dies über die Winkel in Beziehung gesetzt, so ergibt sich:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{v_1}{v_2} \tag{4}$$

Aus Gleichung (1) ergibt sich damit das Snelliussche Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = n \tag{5}$$

2.3 Dispersionsgleichung

Wie bereits in Kapitel 2.1 festgestellt wurde, ist der Brechungsindex von der Freuquenz bzw. der Wellenlänge des Lichts abhängig. Dies wird als Dispersion bezeichnet. Die Dispersionskurve eines Materials ist von Interesse, da durch Kombination unterschiedlicher Linsen mit verschiedenen Dispersionskurven die chromatische Aberration zu kompensieren ist.
Es wird nun die Dispersionsgleichung hergeleitet. Um ein gültiges Modell benutzen zu können, ohne auf die Quantentheorie zurückgreifen zu müssen, darf Licht und Materie nicht in Resonanz miteinander treten können. Dies ist bei Gläsern im sichtbaren Spektralbereich gegeben. Tritt eine ebene Lichtwelle mit der elektrischen Feldstärke

$$\vec{E} = \vec{E_0} \exp\left(i\omega t\right) \tag{6}$$

auf ein Materiel, so wirkt dadurch eine periodische Kraft

$$\vec{F_\mathrm{e}} = q_\mathrm{h}\vec{E} \tag{7}$$

auf die Ladung q_h. Zudem wirkt der Auslenkung der Ladungsträger eine rücktreibende Kraft $\vec{F_\mathrm{r}}$ entgegen, welche proportional zur Auslenkung ist. Weiterhin wirkt auf die periodische Bewegung der Teilchen eine Art Reibungskraft $\vec{F_\mathrm{d}}$ proportional zur Geschwindingkeit. Es ergibt sich hieraus eine DGL für x_h. Diese wird mit $N_\mathrm{h}q_\mathrm{h}/m_\mathrm{h}$ erweitert um diese durch die Polarisation $\vec{P_\mathrm{h}}$ auszudrücken.
Es ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{P_\mathrm{h}}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{f_\mathrm{h}}{m_\mathrm{h}}\frac{\mathrm{d}\vec{P_\mathrm{h}}}{\mathrm{d}t} + \frac{a_\mathrm{h}}{m_\mathrm{h}}\vec{P_\mathrm{h}} = \frac{N_\mathrm{q}{q_\mathrm{h}}^2}{m_\mathrm{h}}\vec{E_0}\exp\left(i\omega t\right) \tag{8}$$

Dies ist die bekannte DGL für eine erzwungene Schwingung. Die Lösung lautet:

$$\vec{P_\mathrm{h}} = \frac{1}{{\omega_\mathrm{h}}^2 - w^2 + i\frac{f_\mathrm{h}}{m\mathrm{h}}\omega}\frac{N_\mathrm{h}{q_\mathrm{h}}^2}{m_\mathrm{h}}\vec{E_0}\exp\left(i\omega t\right) \tag{9}$$

Nun muss noch über alle h summiert werden um die gesamte Polarisation zu erhalten. Benutzt man nun, dass $\vec{P} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 \vec{E}$ ist und $n^2 = \epsilon$ erhält ergibt sich ein Zusammenhang zwischen dem Brechungsindex und der Frequenz bzw. der Wellenlänge. Es folgt:

$$\tilde{n}^2 = 1 + \sum_h \frac{1}{\omega_\mathrm{h}{}^2 - w^2 + i\frac{f_\mathrm{h}}{m\mathrm{h}}\omega} \frac{N_\mathrm{h} q_\mathrm{h}{}^2}{m_\mathrm{h}\epsilon_0} \tag{10}$$

$\tilde{n}$ ist mit $\tilde{n} = n(1$ - $ik)$ als komplexe größe dargestellt. Dabei ist k die Absorptionskonstante des Lichtes im jeweiligen Medium und n der Brechungsindex. Es ergibt sich somit durch Einsetzen in die Gleichung einer ebenen Welle:

$$\frac{E(x,t)}{E_0} = \exp\left(i\omega(t - \frac{xn}{c})\right) \cdot \exp\left(-\omega \frac{n}{c} kx\right) \qquad . \tag{11}$$

Wird nun $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ gesetzt, ergibt sich ein Exponentialfaktor $-2\pi kx/\lambda$, welcher die Abnahme der Amplitude mit zunehmender Schichtdicke beschreibt. Die Dispersionsgleichungen ist nun gegeben, wenn Gl. (10) in Real- und Imaginärteil zerlegt wird.

$$\begin{aligned} Re(\tilde{n}^2) = n^2(1-k^2) &= 1 + \sum_n \frac{N_\mathrm{h} q_\mathrm{h}^2 (\omega_\mathrm{h}{}^2 - \omega^2)}{\epsilon_0 m_\mathrm{h} \left((\omega_\mathrm{h}{}^2 - \omega^2)^2 + \frac{f_\mathrm{h}{}^2}{m_\mathrm{h}{}^2}\omega^2 \right)} \\ Im(\tilde{n}^2) = -2n^2 k &= \sum_n \frac{N_\mathrm{h} q_\mathrm{h}{}^2 f_\mathrm{h}\omega}{\epsilon_0 m_\mathrm{h}{}^2 \left((\omega_\mathrm{h}{}^2 - \omega^2)^2 + \frac{f_\mathrm{h}{}^2}{m_\mathrm{h}{}^2}\omega^2 \right)} \end{aligned} \tag{12}$$

Bei $\omega_\mathrm{h} = \omega$ tritt Resonanz und damit eine besonders starke Absorption auf. Da der Bereich nur außerhalb der Resonanzstelle betrachtet werden soll ($n^2 k \approx 0$), geht Gleichung (12) über in:

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_n \frac{N_\mathrm{h} q_\mathrm{h}{}^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_\mathrm{h}} \frac{\lambda^2 \lambda_\mathrm{h}^2}{\lambda^2 - \lambda_\mathrm{h}^2} \qquad . \tag{13}$$

Es wird nun angenommen, dass nur die Absorptionsstelle λ_1 existiert. Nun kann die Gleichung nach den Potenzen von λ/λ_1 entwickelt werden.
Für $\lambda >> \lambda_\lambda 1$ ergibt sich:

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{N_1 q_1{}^2 \lambda_1{}^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0^2 m_1} \left(1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^4 + \cdots \right) \tag{14}$$

Vereinfacht lässt sich schreiben:

$$n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_4}{\lambda^4} + \cdots \tag{15}$$

Für $\lambda << \lambda_1$ ergibt sich analog:

$$n^2(\lambda) = 1 - A'_2\lambda^2 - A'_4\lambda^4 - \cdots \tag{16}$$

Alle Koeffizienten $A'_{2\mathrm{i}}$ und $A_{2\mathrm{i}}$ mit $i > 0$ sind positiv.

Diese Gleichungen sind geeignet um die Dispersion von Gläsern im sichtbaren Spektralbereich zu beschreiben.
Der Verlauf der Kurven ist in Abb. 2 dargestellt.

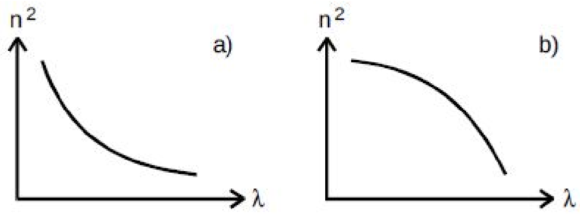

Abbildung 2: Gestalt der Dispersionskurven. a) für $\lambda >> \lambda_1$, b) für $\lambda << \lambda_1$ [1].

Dies ist der Fall für normale Dispersion, da der Brechungsindex mit zunehmender Wellenlänge sinkt. Bei Anomaler Dispersion wäre es der umgekehrte Fall und der Brechungsindex würde zunehmen. Dies wird in der Nähe von Absorptionsstellen λ_i beobachtet. Eine Beschreibung ist nicht durch die Gleichungen 15 und 16 möglich.

2.4 Abbesche Zahl

Die Abbesche Zahl ist eine weitere wichtige Größe in der Optik. Je kleiner die Zahl ist, umso größer ist die Dispersion. Sie stellt damit eine grobe Klassifizierung von Glassorten da. Daher wird sie für die Konstkruktion einfacher Linsensysteme verwendet, um deren Aberration zu verringern.
Es gilt:

$$v = \frac{n_\mathrm{D} - 1}{n_\mathrm{F} - n_\mathrm{C}} \tag{17}$$

Die Größen n_D, n_F und n_C stellen die Brechungsindices für die Wellenlängen der Fraunhoferschen Linien dar: $\lambda_\mathrm{C} = 656\,\mathrm{nm}$, $\lambda_\mathrm{D} = 589\,\mathrm{nm}$ und $\lambda_\mathrm{F} = 486\,\mathrm{nm}$.

2.5 Auflösungsvermögen eines Prismen-Spektralapparates

Das Auflösungsvermögen gibt an, wie gering der Wellenlängenunterschied $\Delta\lambda$ zweier benachbarter Spektrallinien werden darf, sodass sie vom Gerät gerade noch getrent werden können.
Es ergibt sich der Ausdruck (18) für das Auflösevermögen A.

$$A := \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \tag{18}$$

Dabei ist λ die gemittelte Wellenlänge der beiden Spektrallinien.
Fallen zwei Spektrallinien mit den Wellenlängen λ und $\lambda + \Delta\lambda$ in das Prisma, werden sie in leicht unterschiedliche Richtungen gebrochen. Eine Trennung der beiden Linien soll genau dann noch möglich sein, wenn das Helligkeitsmaximum der einen gerade in das erste Minium der anderen fällt.

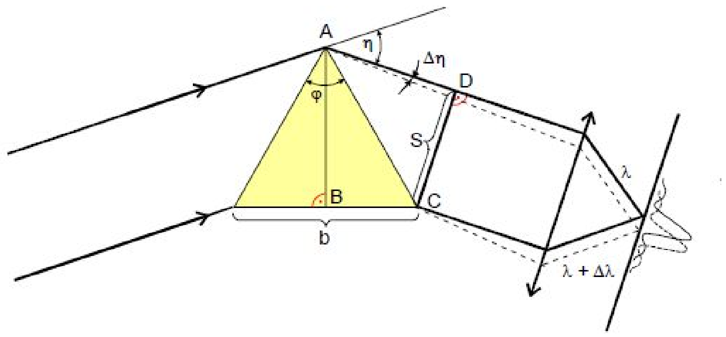

Abbildung 3: Skizze zum Auflösungsvermögen eines Prismenspektralapparates [1].

Für die Dispersion des Glasmaterials gilt nach Kapitel 3.1 Gl. (25):

$$n(\lambda) = \frac{\sin(\frac{\eta+\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})} \tag{19}$$

Wird hier nun $\lambda + \Delta\lambda$ eingesetzt, ergibt sich:

$$n(\lambda + \Delta\lambda) = n(\lambda) + \Delta\lambda \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\sin(\frac{\eta+\Delta\eta+\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})} \tag{20}$$

Mithilfe der Näherungen $\cos(\frac{\Delta\eta}{2} \approx 1)$, $\sin(\frac{\Delta\eta}{2}) \approx \frac{\Delta\eta}{2}$ und $\Delta\eta = \frac{\lambda}{s}$ lässt sich Gl. (20) umformen zu:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 2s \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\sin(\frac{\varphi}{2})}{\cos(\frac{\eta+\varphi}{2})} \qquad . \tag{21}$$

Mithilfe der Winkelbeziehungen aus Grafik 3 aus den Dreiecken ABC und ACD ergibt sich für das Auflösungsvermögen:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = b \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \tag{22}$$

3 Versuchsaufbau und Durchführung

3.1 Beschreibung der Messapparatur

Um den Brechungsindex in Abhängigkeit von der Wellenlänge zu bestimmen, wird hier ein Prismenspektralapparat verwendet. Dieser besteht aus einem Glasprisma, durch welches der Lichtsrahl hindurchgeht. Dabei wird er bei einem Einfallswinkel von $\neq 90\,°$ zweimal gebrochen. Aus dem Winkel η der gesamten Richtungsänderung des Strahles lässt sich mithilfe des Snellius'schen Brechungsgesetztes 5 der Brechungsindex des Glases berechnen. Es genügt den Spezialfall eines symmetrischen Strahlenganges in Abb. 4 zu betrachten.
Daraus lassen sich nun die folgenden Winkelbeziehungen ablesen.

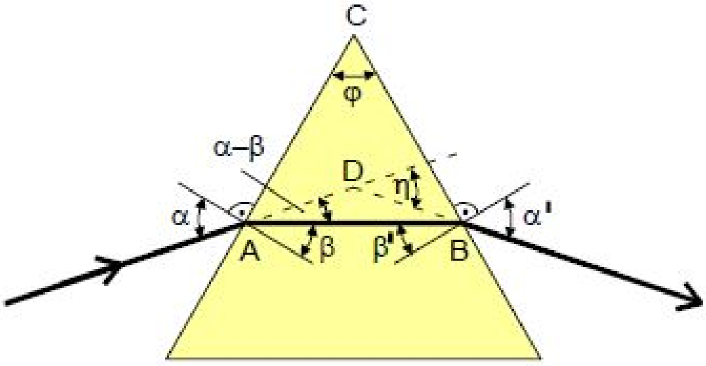

Abbildung 4: Symmetrischer Strahlengang durch ein Prisma [1]

$$\sphericalangle \mathrm{CAB} = 90 - \frac{\phi}{2} = 90 - \beta \tag{23}$$

Weiterhin ergibt sich:

$$\alpha = \frac{\eta + \varphi}{2} \tag{24}$$

Nun ergibt sich mit Snellius:

$$n = \frac{\sin(\frac{\eta+\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})} \tag{25}$$

Zur Bestimmmung der Winkel wird ein Goniometer verwendet (Abb. 5).

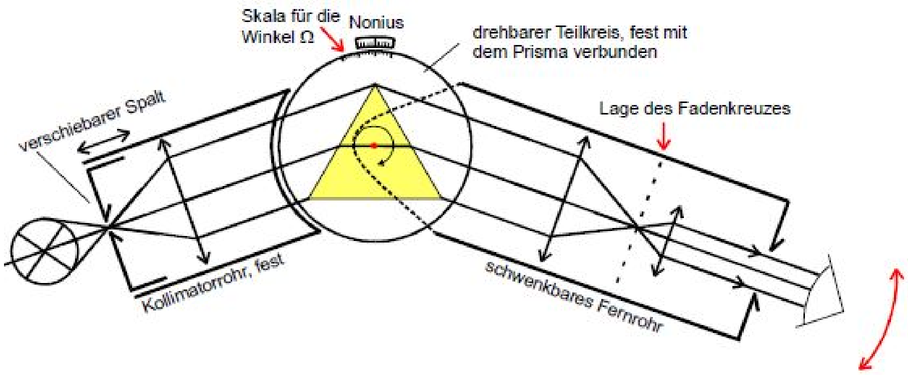

Abbildung 5: Schematische Darstellung eines Prismen-Spektralapparates [1]

Das Licht fällt durch einen Spalt auf eine Sammellinse, wodurch parallele Strahlen erzeugt werden (Kollimator). Das Prisma bricht das Licht und der gebrochene Strahl gelangt in das Fernrohr. Die dortige Objektivlinse entwirft ein reelles Spaltbild in ihrer

Brennebene und dieses kann mithilfe des Okulars beobachtet werden. In der Brennebene des Objektivs ist ein Fadenkreuz angebracht und dieses kann durch Schwenken des Fernrohres um die Goniometerachse mit dem Spaltbild zur Deckng gebracht werden kann.

3.2 Beschreibung des Messvorganges

Nachdem ein scharfes Spaltbild im Fernrohr beobachtet wird, können die Größen φ und η gemessen werden.

3.3 φ-Messung

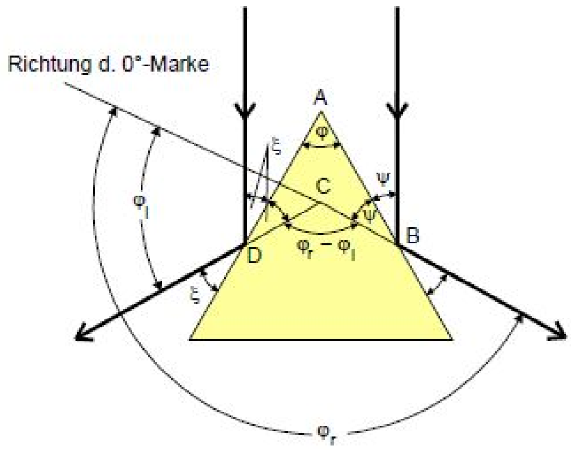

Abbildung 6: Skizze zur Bestimmung des Winkels φ zwischen den brechenden Oberflächen. [1]

Zur Messung des brechenden Winkels φ wird das Prisma mit seiner brechenden Kante ungefähr auf das Kollimatorrohr ausgerichtet (Abb. 6).
Das Fadenkreuz wird auf die Maxima der gebrochenen Strahlen gelegt und der dazugehörige Winkel φ_{l} notiert. Nun wird das Fernrohr auf die andere Seite gefahren und das Verfahren widerholt. Dort werden die Winkel φ_{r} notiert.
Für den Winkel φ ergibt sich:

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_{\mathrm{r}} - \varphi_{\mathrm{r}}) \tag{26}$$

3.3.1 η-Messung

Nun kann der Winkel η des Strahlenganges berechnet werden. Für diese Messung muss ein symmetrischer Strahlengang vorliegen (Abb. 7). Um diese Einstellung zu finden, muss die Stellung des Prismas solange um die Goniometerachse verändert werden, bis der reflektierte und der gebrochene Strahlengang zusammenfallen. Die Winkelstellung Ω_{l} des Fernrohrs wird notiert.

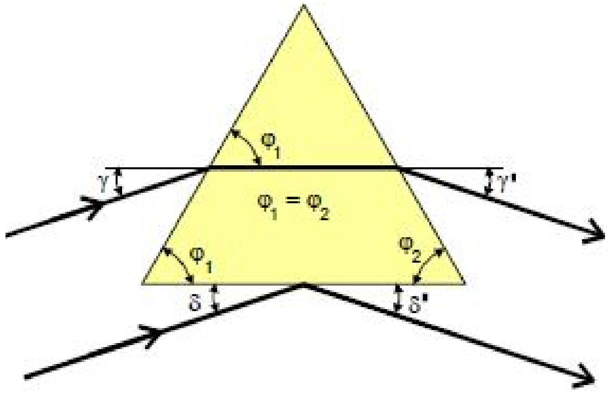

Abbildung 7: Verlauf des reflektierten und des gebrochenen Strahls bei einem symmetrischen Strahlengang an einem gleichschenkligen Prisma [1].

Die Richtung des ungebrochenen Strahls ist nicht mit hinreichender Genauigkeit bekannt, weshalb die Messung bei einer spiegelsymmetrischen Stellung des Prismas wiederholt wird. Der neue Winkel Ω_r wird notiert.

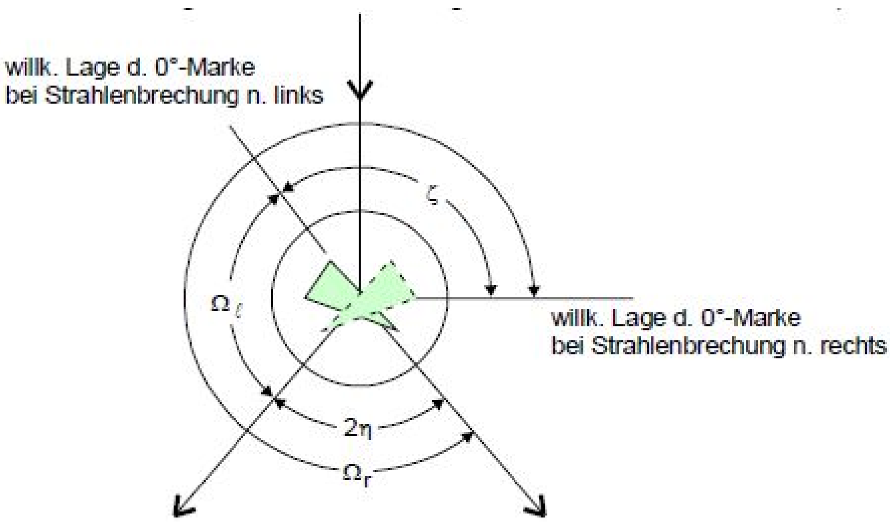

Abbildung 8: Darstellung der Messgrößen Ω_l und Ω_r in Zusammenhang mit den beiden spiegelbildchen Prismenstellungen. [1]

Aus den Beziehungen in Abb. 8 ergibt sich für den Winkel η:

$$-\eta = -180 + (\Omega_r - \Omega_l) \tag{27}$$

4 Auswertung

Im Folgenden werden einige Mittelwerte, sowie deren Fehler berechnet. Dabei wird bei n Messwerten x_i, der Fehler Δx und der Mittelwert x wie folgt berechnet:

$$x = \frac{1}{n}\sum_0^n x_i\,,$$

$$\Delta x = \left(\frac{1}{n-1}\sum_0^n (x-x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

4.1 Brechungsindizes n_i in Abhängigkeit der Wellenlänge λ

Zunächst werden aus den Messdaten, die in Tabellen 1 und 2 aufgeführt sind, die Winkel φ und η bestimmt. Die Mittelung über die Daten aller Wellenlängen λ liefert mit Gleichung (26):

$$\varphi = (69{,}7 \pm 1{,}1)^\circ\,.$$

Aus dem Versuchsaufbau geht jedoch hervor, dass alle Winkel des Prismas etwa $\varphi = 60^\circ$ betragen müssen. Weil dieser Wert den tatsächlichen Aufbau des Prismas offensichtlich besser wiederspiegelt, wird dieser als Vergleichswert aufgeführt. Die durch Rechnung mit $\varphi = 60^\circ$ resultierenden Werte der Brechungsindizes n_i werden mit n_opt gekennzeichnet, die aus dem gemessenen Winkel φ berechneten Werte mit n. Auf die Abweichung des gemessenen Wertes n zum optimalen n_opt Wert wird in der Diskussion (5) eingegangen. Für den Fehler Δn der gemessenen Werte gilt nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung

$$\Delta n = \left|\frac{\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\cos(\varphi)-1}\right|\Delta\varphi\,. \tag{28}$$

Die Messwerte liefern anschließend mit Gleichung (25) die in Tabelle 1 aufgeführten Brechungsindizes n_opt und n:

Tabelle 1: Werte des Brechungsindex bei verschiedenen Wellenlängen λ

Farbe	λ[nm]	φ_l[°]	φ_r[°]	φ[°]	n_opt	n
gelb	578,0	97,2	239,2	71,0	1,657	$1{,}528 \pm 0{,}013$
grün	546,1	97,8	239,0	70,6	1,652	$1{,}524 \pm 0{,}013$
blaugrün	491,6	98,0	238,4	70,2	1,645	$1{,}519 \pm 0{,}013$
violett	404,7	99,0	237,6	69,3	1,634	$1{,}511 \pm 0{,}013$
ultraviolett	365,0	99,4	236,4	68,5	1,627	$1{,}505 \pm 0{,}012$
ultraviolett	366,3	99,6	236,2	68,3	1,625	$1{,}504 \pm 0{,}012$

Tabelle 2: Messwerte zur Bestimmung von η

Farbe	λ[nm]	Ω_l[°]	Ω_r[°]	η[°]
gelb	578,0	53,4	285,3	51,9
grün	546,1	53,6	285,0	51,4
blaugrün	491,6	54,0	284,7	50,7
violett	404,7	54,5	284,1	49,6
ultraviolett	365,0	54,9	283,8	48,9
ultraviolett	366,3	55,0	283,7	48,7

4.2 Bestimmung der Dispersionsgleichung und deren Parameter A_i

Es werden zwei lineare Ausleichsrechungen der λ^2- n^2-, bzw. der $1/\lambda^2$- n^2- Wertepaare für Dispersiosngleichungen (15) und (16) durchgeführt. Die Ausgleichsrechnung liefert die Koeffizienten A_i und A'_i, sowie deren Fehler ΔA. Dabei werden Koeffizienten bis $i = 2$ betrachtet.
Daraus lassen sich die Abweichungsquadrate bei einer Anzahl von z Messwerten wie folgt berechnen:

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{z-2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{z}\left(n^2(\lambda_\mathrm{i}) - A_0 - \frac{A_2}{\lambda_\mathrm{i}^2}\right)^2 , \\
s'^2 &= \frac{1}{z-2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{z}\left(n^2(\lambda_\mathrm{i}) - A'_0 + A'_2\cdot\lambda_\mathrm{i}^2\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Die Ausgleichsrechnung liefert die Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
A_0 &= 2{,}372 \pm 0{,}009 , \\
A_2 &= (1{,}509 \pm 0{,}103)\cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}^2 , \\
A'_0 &= 2{,}217 \pm 0{,}006 , \\
A'_2 &= (3{,}480 \pm 0{,}384)\cdot 10^{11}\,\frac{1}{\mathrm{m}^2} .
\end{aligned}
$$

Um eine Entscheidung für eine der Dispersionsgleichungen zu treffen, werden die Abweichungsquadrate berechnet:

$$
\begin{aligned}
s^2 &= 0{,}036\,07 , \\
s'^2 &= 0{,}036\,09 .
\end{aligned}
$$

Weil die Abweichung s'^2 für Gleichung (16) größer, als s^2 ist, wird die hier auftretende Dispersion durch Gleichung (15) beschrieben. Die folgenden Abbildungen 9 bis 11 zeigen die Messwerte, sowie den Verlauf der Dispersionsgleichung. Die gewählte Dispersionsgleichung (15) ist zudem in Abbildung 11 nichtlinearisiert aufgetragen.

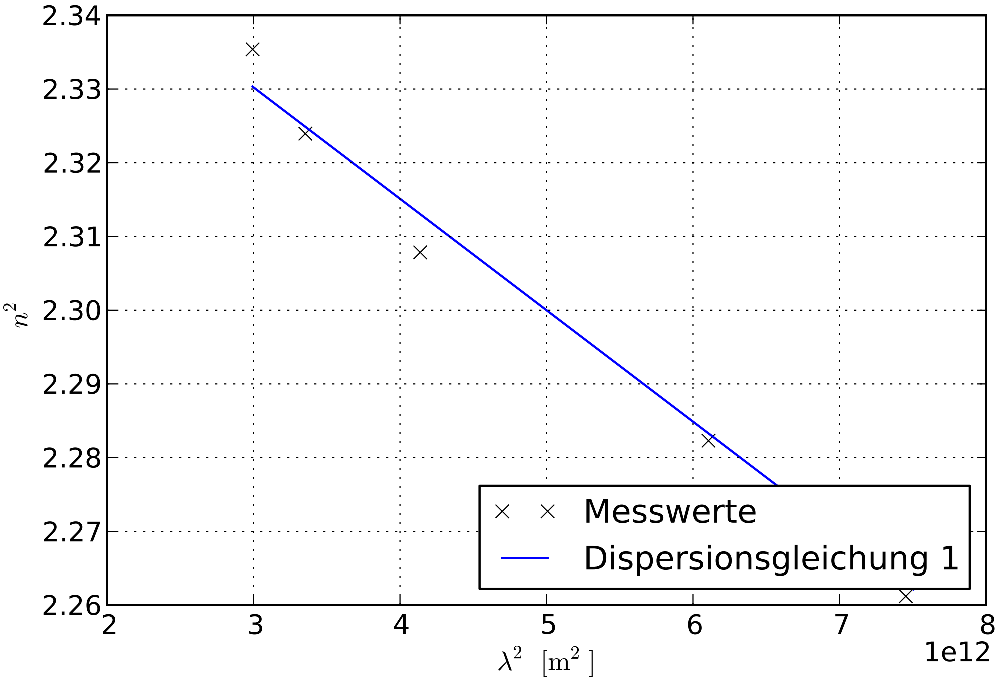

Abbildung 9: Ausgleichskurve mit Hilfe von Gleichung (15)

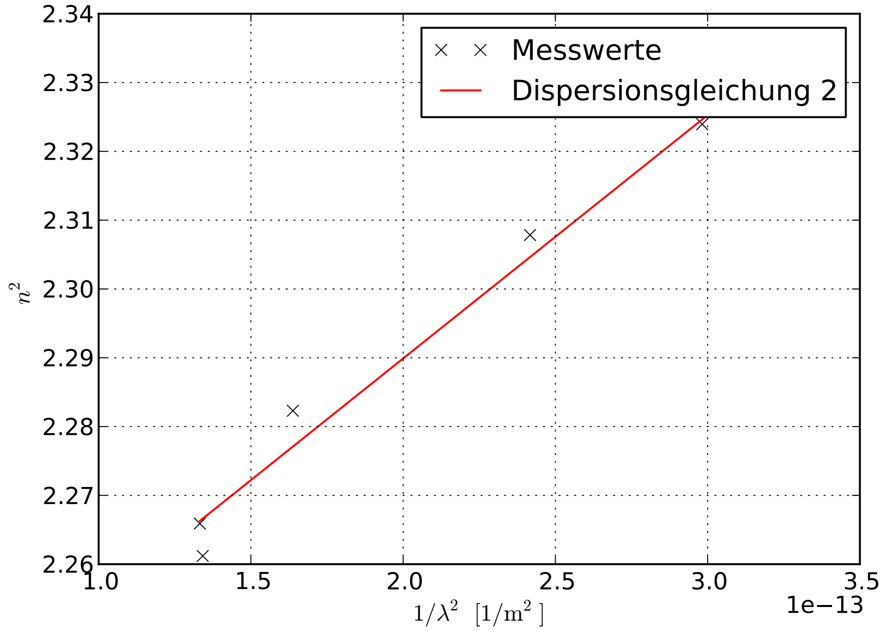

Abbildung 10: Ausgleichskurve mit Hilfe von Gleichung (16)

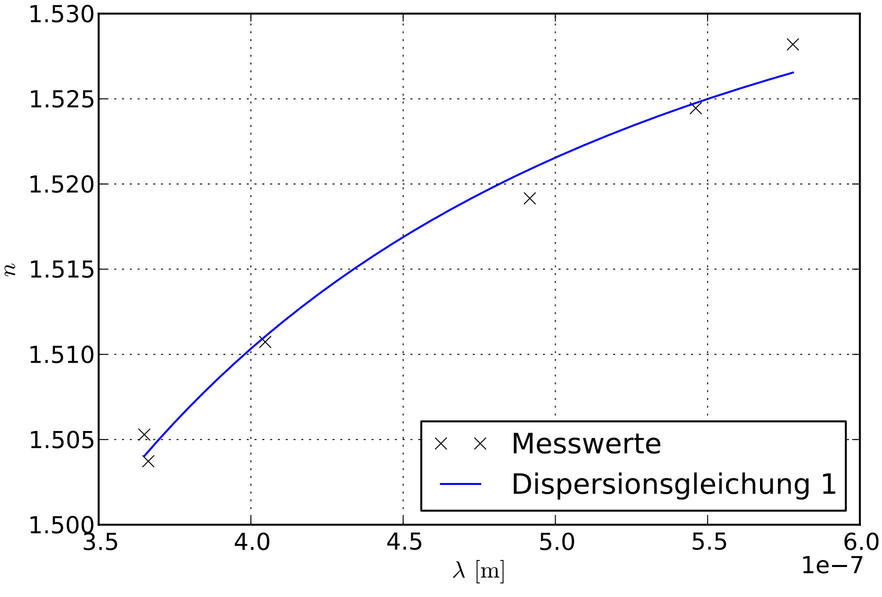

Abbildung 11: Theoriekurve der hier gewählten Dispersionsgleichung

4.3 Berechnung der Abbeschen Zahl ν

Mit Gleichung (17) und Kenntnis der Koeffizienten A_0 bis A_2 aus Kapitel 4.2 lässt sich die Abbesche Zahl bestimmen. Zunächst werden die Brechungsindizes der Fraunhoferschen Linien bestimmt. Der dabei auftretende Fehler lautet

$$\Delta n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}}\left(\Delta A_0{}^2 + \frac{\Delta A_2{}^2}{\lambda^4}\right)\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Die Dispersionsgleichung liefert zunächst

$$\begin{aligned} n_\mathrm{C} &= 1{,}477\,85 \pm 0{,}001\,84\,, \\ n_\mathrm{D} &= 1{,}474\,99 \pm 0{,}001\,91\,, \\ n_\mathrm{F} &= 1{,}468\,05 \pm 0{,}002\,15\,. \end{aligned}$$

Der Fehler der Abbeschen Zahl lautet

$$\Delta\nu = \left[\left(\frac{1}{n_\mathrm{F} - n_\mathrm{C}}\right)^2 \Delta n_\mathrm{D}^2 + \left(\frac{n_\mathrm{D} - 1}{(n_\mathrm{F} - n_\mathrm{C})^2}\right)^2 \left(\Delta n_\mathrm{F}^2 + \Delta n_\mathrm{C}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Es wurde jeweils mit 11 Nachkommastellen gerechnet und es folgt

$$\nu = 48{,}48 \pm 13{,}98\,.$$

4.4 Das Auflösungsvermögen A des Prismas

Wie in Kapitel 3 gezeigt, gilt mit einer Basisbreite b des Prismas für das Auflösungsvermögen:

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = b\frac{\partial n}{\partial\lambda}\,.$$

Mit der hier genutzten Dispersionsgleichung (15) gilt für das Auflösungsvermögen A und den entsprechenden Fehler ΔA:

$$\begin{aligned} A &= b\frac{A_2}{\lambda^3}\frac{1}{\sqrt{A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}}}\,, \\ \Delta A &= \left[\left(\frac{bA_2}{2\lambda^3\left(A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 \Delta A_0^2 + \left[\frac{b}{\lambda^3\left(A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{A_2 b}{2\lambda^5\left(A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]^2 \Delta A_2^2\right]^{\frac{1}{2}}\,. \end{aligned}$$

Bei einer Basislänge $b = 3\,\mathrm{cm}$ folgt für das Auflösungsvermögen des hier vorliegenden Prismas bei den Fraunhoferwellenlängen $\lambda_\mathrm{C} = 656\,\mathrm{nm}$ und $\lambda_\mathrm{F} = 486\,\mathrm{nm}$:

$$\begin{aligned} A_\mathrm{C} &= 1087 \pm 68\,, \\ A_\mathrm{F} &= 2690 \pm 171\,. \end{aligned}$$

4.5 Berechnung des nächsten Absorptionspunktes λ_1

Durch Koeffizientenvergleich in Formeln (15) und (14) erhält man

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 + \frac{N_1 q_1^2 \lambda_1^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_1}\,, \\ A_2 &= \lambda_1^2 (A_0 - 1)\,, \\ \Rightarrow \quad \lambda_1 &= \sqrt{\frac{A_2}{A_0 - 1}}\,, \\ \Delta\lambda_1 &= \left[\frac{1}{4}\frac{A_2}{(A_0-1)^3}\Delta {A_0}^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{A_2(A_0-1)}\Delta {A_2}^2\right]^{\frac{1}{2}}\,. \end{aligned}$$

Mit den Koeffizienten A_0 und A_2 aus Kapitel 4.2 lässt sich also der Wert λ_1 der nächsten Absorptionsstelle finden:

$$\lambda_1 = (111{,}3 \pm 3{,}4)\,\mathrm{nm}\,.$$

5 Diskussion

Zunächst muss festgehalten werden, dass die Durchführung dieses Versuchs einige Schwierigkeiten beinhaltet. Bei Drehung des Fernrohrs, wurde das Prisma oft unbeabsichtigt mitgedreht, was teilweise große Messfehler zur Folge hatte und weshalb eine Messung wiederholt werden musste.
Der Wert des Prismainnenwinkels $\varphi = 71°$ stimmt offensichtlich nicht mit dem tatsächlichen Aufbau des Prismas überein und weist damit auf einen Systematischen Fehler des Aufbaus hin.
Die daraus basierenden Werte für den Brechungsindex weichen dennoch nur etwa um 10 % von den mit Hilfe des tatsächlichen Prismenwinkels berechneten Werten ab. Die Werte des Brechungsindex selbst stimmen relativ gut mit dem erwarteten Wert von etwa $n = 2$ überein.
Dasselbe gilt für die Abbesche Zahl ν. Mit einem Wert von $\nu = 52{,}6 \pm 17{,}5$ liegt sie unter Berücksichtigung des Fehlers innerhalb des Erwarteten Wertebereichs zwischen $\nu = 30$ und $\nu = 60$ [2].
Das Auflösungsvermögen A des Prismas liegt ebenfalls in der erwarteten Größenordnung von $A = 2000$, kann aber mangels Herstellerangaben nicht direkt verglichen werden.
Die nächste Absorptionsstelle $\lambda_1 = 111\,\mathrm{nm}$ liegt erwartungsgemäß im Bereich des Ultravioletten.

Literatur

[1] Physikalisches Anfängerpraktikum der TU Dortmund: Versuch V402 - Dispersion am Glasprisma. `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V402.pdf`. Stand: Mai 2013.

[2] Carl Zeiss Vision GmbH. Grundlagen – Optik & Auge – Abbe-Zahl. `http://www.zeiss.de/4125680F0052EC92/Contents-Frame/40FF5667B79376E841256865003C3E85`. Stand: Mai 2013