

TU Dortmund

# V606 - Suszeptibilität paramagnetischer Stoffe

Korrektur

Markus Stabrin  
markus.stabrin@tu-dortmund.de

Kevin Heinicke  
kevin.heinicke@tu-dortmund.de

Versuchsdatum: 22. Januar 2013

Abgabedatum: 30. Januar 2013

# 1 Einleitung

Alle Stoffe haben die Eigenschaft, Magnetfelder, die sie umgeben zu beeinflussen. Zunächst wird das Feld geschwächt, was als Diamagnetismus bezeichnet wird. Bei einigen Stoffen tritt ein verstärkender Effekt ein, der den Diamagnetismus zum Teil weit übertrifft. Dies ist der hier behandelte Paramagnetismus.

In welcher Art das Magnetfeld verändert wird, wird dabei durch die Suszeptibilität  $\chi$  beschrieben. Diese wird im Folgenden Versuch für verschiedene stark paramagnetische seltene Erden untersucht.

## 2 Theorie

Die Magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  ist mit der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  über

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}$$

verknüpft. Dabei ist  $\chi$  keinesfalls konstant, sondern hängt von der Temperatur  $T$  und der Beschaffenheit des Feldes  $\vec{H}$  ab.

### 2.1 Berechnung der Suszeptibilität

Ein Atom, Ion oder Molekül mit nicht verschwindendem Drehimpuls ist in der Lage, sich an einem äußeren Magnetfeld auszurichten. Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  setzt sich dabei aus den Anteilen des Bahndrehimpulses  $\vec{L}$ , des Gesam spins  $\vec{S}$  und des zu vernachlässigenden Kerndrehimpulses ab:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

Zu den Drehimpulsen  $\vec{L}$  und  $\vec{S}$  gehören, entsprechend der Quantenmechanik, die magnetischen Momente  $\vec{\mu}_L$  und  $\vec{\mu}_S$ . Nach einiger Rechnung führen diese Größen auf den genäherten Betrag des gesamten magnetischen Moments:

$$\vec{\mu}_J = \mu_B g_J \sqrt{J(J+1)}.$$

Dabei bezeichnet  $g_J$  den Landé-Faktor, der die Gesamtdrehimpulsquantenzahl  $J$ , die Spinquantenzahl  $S$  und die Bahndrehimpulsquantenzahl  $L$  des Atoms beinhaltet:

$$g_J = \frac{3J(J+1) + \{S(S+1) - L(L+1)\}}{2J(J+1)}.$$

Der Zeeman-Effekt beschreibt nun, dass die Richtung, in die  $\vec{\mu}_J$  zeigt nur bestimmte Winkel zum Magnetfeld einnimmt, also ebenfalls gequantelt ist. Jede Richtung entspricht dabei einem Energieniveau und es lässt sich durch Summation über alle Niveaus das mittlere Magnetische Moment bestimmen. Die gesuchte Größe  $\chi$  kann dann für die Annahme großer Temperaturen - etwa Zimmertemperatur - genähert werden.

Man erhält schließlich das Curiesche Gesetz des Paramagnetismus:

$$\chi = \frac{\mu_0 \mu_B^2 g_J^2 N J(J+1)}{3kT} \quad (1)$$

mit dem Bohrschen Magneton  $\mu_B = e_0 \hbar / 2m_0$ , das die Elektronenladung  $e_0$  und -masse  $m_0$ , sowie das Plancksche Wirkungsquantum  $\hbar$  beinhaltet, der Anzahl  $N$  der Momente pro Volumen und der Boltzmannkonstante  $k$ .

Weil dabei offensichtlich

$$\chi \propto \frac{1}{T}$$

gilt, ist bei der Untersuchung der Suszeptibilität darauf zu achten, dass Temperaturschwankungen in den Stoffen vermieden werden.

### 3 Aufbau und Durchführung

Die Größen in Gleichung (1) sind durch einfach Mittel nicht zu messen. Um auf andere Weise  $\chi$  zu bestimmen lässt sich jedoch die Auswirkung auf ein Magnetfeld einer langen Spule messen. Deren Induktivität wird verändert, wenn man einen paramagnetischen Stoff in die Spule einbringt.

Mit dem folgenden Aufbau kann die Suszeptibilität mittels Messung des Widerstandes  $R_P$  oder der Spannung  $U_{Br}$  bestimmt werden.

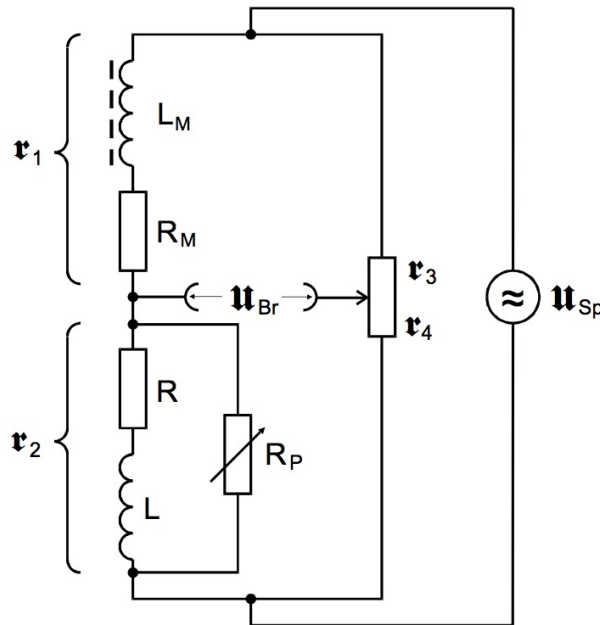


Abbildung 1: Brückenschaltung zur Bestimmung der Suszeptibilität einiger Stoffe [1].

Hier befinden sich zwei möglichst identische Spulen, wie gezeigt, hintereinander geschaltet. Durch eine Öffnung im Gehäuse des Aufbaus lässt sich die zu untersuchende Probe in eine der Spulen einbringen. Kleine herstellungsbedingte Unterschiede der Spulen können durch einen variablen Widerstand  $R_P$  ausgeglichen werden. Vor jeder Messung muss dieser Widerstand so eingestellt werden, dass die Brückenspannung  $U_{Br}$  minimal wird, beide Spulen also etwa den gleichen Spannungsabfall hervorrufen.

### 3.1 Bestimmung der Suszeptibilität durch Messung der Brückenspannung

Nachdem eine Probe in die entsprechende Spule eingebracht wurde, wird die Brückenspannung  $U_{Br}$  gemessen, die direkt Proportional zu  $\chi$  ist. Wählt man eine große Frequenz  $\nu$  für die Sinusspannung  $U_{Sp}$  gilt:

$$\begin{aligned} \nu &\rightarrow \infty \\ \Rightarrow \chi &= 4 \frac{F}{A} \frac{U_{Br}}{U_{Sp}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Mit Kenntnis des Durchmessers  $F$  der Spule und des Querschnitts  $A$  der Probe kann damit durch Messung der Spannungen  $U_{Br}$  und  $U_{Sp}$  die Suszeptibilität  $\chi$  berechnet werden.

### 3.2 Bestimmung der Suszeptibilität durch Messung des Regelwiderstandes

Die Brückenspannung  $U_{Br}$ , die sich nach dem Einschieben einer Probe ergeben, hat kann nun erneut durch Variation des Widerstandes  $R_P$  minimiert werden. Dabei ist  $\chi$  ebenfalls proportional zum Unterschied  $\Delta R$  der Widerstände vorher und nachher und lässt sich durch die Messung dieser bestimmen:

$$\chi = 2 \frac{\Delta R}{R_3} \frac{F}{A}. \quad (3)$$

### 3.3 Unterdrückung der Störspannung

Die Spannungen dieser Messungen liegen im Nanovoltbereich und werden daher leicht durch äußere Einflüsse verfälscht. Da die Brückenschaltung in diesem Versuch aber mit einer Sinusspannung  $U_{ein}$  konstanter Frequenz gespeist wird, kann ein Selektivverstärker die Störspannungen herausfiltern.

Um die Qualität dieses Filters zu beurteilen, muss dessen Güte  $Q$  bestimmt werden. Dafür werden mit einer Eingangsspannung  $U_{ein}$  konstanter Amplitude Signale unterschiedlicher Frequenz  $\nu$  hinter dem Selektivverstärker gemessen. Das Verhältnis  $V$  der gemessenen Spannung  $U_{aus}$  zur Eingangsspannung  $U_{ein}$  nimmt bei einer bestimmten Frequenz - der Durchlassfrequenz  $\nu_0$  - etwa den Wert 1 an. Mit den Frequenzen  $\nu_+$  und  $\nu_-$ , an denen das Verhältnis  $V$  gerade  $1/\sqrt{2}$  beträgt, lässt sich die Güte bestimmen und es gilt

$$Q = \frac{\nu_0}{\nu_+ - \nu_-} . \quad (4)$$

Bei dieser Messung sollten alle Verstärker deaktiviert sein.

Bei den Messungen mit aktivierten Verstärkern ist es wichtig, den genauen Verstärkungsgrad zu bestimmen. Dazu wird bei eingeschalteten Verstärkern  $V$  erneut berechnet. Alle gemessenen Spannungen werden dann um diesen Faktor bereinigt.

## 4 Auswertung

### 4.1 Filterkurve des Selektivverstärkers

Die Untersuchung der Filterkurve des Selektiv-Verstärkers ergab die in Tabelle 1 aufgelisteten Werte. Daraus ergibt sich der Graph 2. Aus diesem lassen sich die Werte für  $\nu_0$ ,  $\nu_+$  und  $\nu_-$  ablesen:

$$\begin{aligned} \nu_0 &= 34,9 \text{ kHz} , \\ \nu_+ &= (35,10 \pm 0,02) \text{ kHz} , \\ \nu_- &= (34,72 \pm 0,02) \text{ kHz} . \end{aligned}$$

Aus diesen lässt sich die Güte mithilfe von Gleichung (4) berechnen.

$$Q = 91,84 \pm 6,84$$

Der Fehler ergibt sich mittels Gauß'scher Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial Q}{\partial \nu_+} \right| &= \left| \frac{\partial Q}{\partial \nu_-} \right| , \\ \Delta \nu_+ &= \Delta \nu_- , \\ \Delta Q &= \sqrt{2} \cdot \left( \left| \frac{\partial Q}{\partial \nu_{+,-}} \right| \Delta \nu_{+,-} \right) . \end{aligned}$$

Damit weicht die errechnete Güte  $Q = 91,84 \pm 6,84$  um etwa 8,8 % von der eingestellten Güte  $Q = 100$  ab.

f[kHz]	U[mV]	f[kHz]	U[mV]
25.0	0.0	35.1	6.1
30.0	0.2	35.2	4.9
30.5	0.2	35.3	4.0
31.0	0.3	35.4	3.4
31.5	0.4	35.5	2.9
32.0	0.5	35.6	2.5
32.5	0.6	35.7	2.2
33.0	0.7	35.8	2.0
33.5	1.1	35.9	1.8
34.0	1.8	36.0	1.6
34.1	2.0	36.5	1.1
34.2	2.3	37.0	0.8
34.3	2.7	37.5	0.6
34.4	3.1	38.0	0.5
34.5	3.8	38.5	0.4
34.6	4.6	39.0	0.3
34.7	5.9	39.5	0.3
34.8	7.4	40.0	0.2
34.9	8.6	40.5	0.0
35.0	7.4		

Tabelle 1: Frequenzabhängigkeit der Spannung bei einem Selektivverstärker

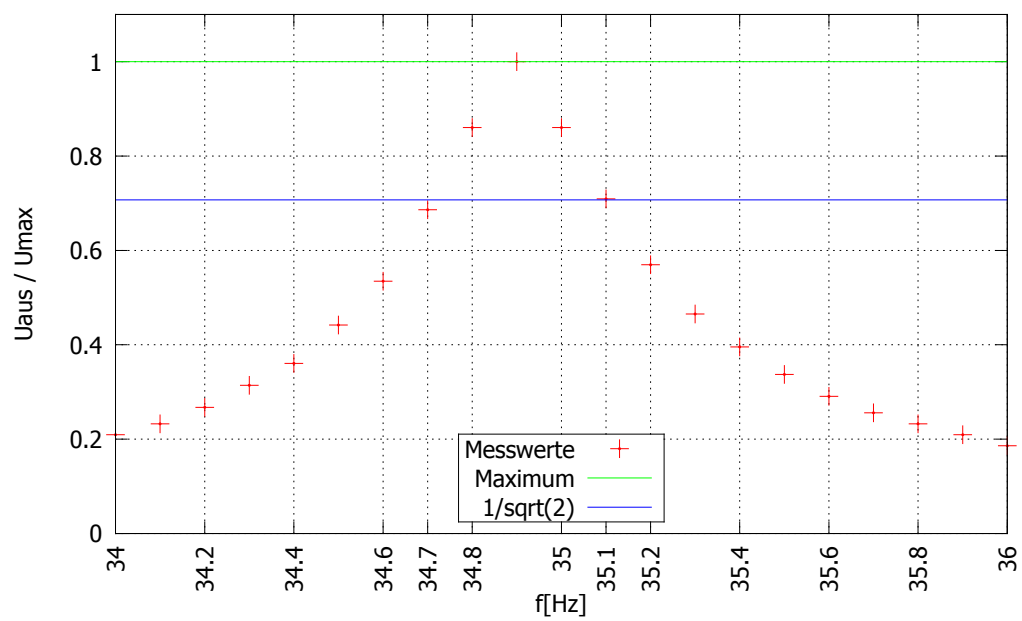


Abbildung 2: Filterkurve des Selektivverstärkers

## 4.2 Bestimmung der Suszeptibilität

Für die Messung der Suszeptibilität wird eine Spule mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned}n &= 250 \\F &= 0,866 \text{ cm}^2, \\L &= 13,5 \text{ cm}, \\R &= 0,7 \Omega,\end{aligned}$$

verwendet.

Bei der Messung zur Bestimmung der Suszeptibilität ergaben sich die Werte in den Tabellen 7, 8 und 9.

Die Mittelwerte sind in Tabelle 5 aufgeführt.

Bei der Bestimmung der Suszeptibilität mit den Gleichungen (1), (2) und (3) wurden zusätzlich die Werte aus den Tabellen 4 und 6 verwendet.

$A_{\text{real}}$  ergibt sich mithilfe der Gleichung:

$$A_{\text{real}} = \frac{M}{L\rho}. \quad (5)$$

Die Verstärkung durch den Linear- und Selektivverstärker ergab eine Verstärkung um einen Faktor von 86.73.

Für die Berechnung der Suszeptibilität nach Gleichung (1) wurden die vorgegebenen Werte verwendet, welche in Tabelle 2 zu finden sind.

Probe	S	L	J
Dysprosium	2.5	5	7.5
Neodym	1.5	6	4.5
Gadolinium	3.5	0	3.5

Tabelle 2: Quantenzahlen der Proben



Für die Temperatur wurden  $T = 295 \text{ K}$  benutzt und für die Anzahl der Momente pro Volumen  $N$  die Werte aus Tabelle 6.

Bei der Berechnung nach Gleichung (2) wird für  $A$  der  $A_{\text{real}}$  Wert benutzt. Die 1 V Eingangsspannung wird durch die Verstärker auf  $U_{\text{sp}} = 86,73 \text{ V}$  verstärkt.  $U_{\text{br}}$  wird aus Tabelle 5 benutzt.

Für die dritte Methode nach Gl. (3) wird auch  $A_{\text{real}}$  benutzt. Der feste Widerstand ist mit  $R_3 = 998 \Omega$  gegeben.  $\Delta R$  ergibt sich aus Tabelle 5.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 angegeben.

Die Fehler errechnen sich mithilfe Gauß'scher Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned} \text{Gl. (3)} \Rightarrow \Delta\chi &= \left| \frac{\partial\chi}{\partial\Delta R} \right| \Delta(\Delta R) \\ \text{Gl. (2)} \Rightarrow \Delta\chi &= \sqrt{\left( \left| \frac{\partial\chi}{\partial\Delta U_{\text{br}}} \right| \Delta U_{\text{br}} \right)^2 + \left( \left| \frac{\partial\chi}{\partial\Delta U_{\text{sp}}} \right| \Delta U_{\text{sp}} \right)^2} \end{aligned}$$

Die Werte durchs Experiment errechneten Werte weichen um 5 % und 8 % vom Theorie-wert ab. Bei Gadolinium sind es 24.55 % und 35.64 %. Für Neodym ist der Fehler durch den Widerstand 15.38 %. Bei der Methode mittels der Spannung hingegen sind es 200 % unterschied.

Probe	$\chi_{\text{exp1}}$ Widerstand	$\chi_{\text{exp2}}$ Spannung	$\chi_{\text{theo}}$	$\Delta\chi_1$	$\Delta\chi_2$
Dysprosium	$0,0239 \pm 0,0014$	$0,0234 \pm 0,0001$	0,0253	5,86 %	8,12 %
Neodym	$0,0026 \pm 0,0021$	$0,0010 \pm 0,0001$	0,0030	15,38 %	200 %
Gadolinium	$0,0110 \pm 0,0014$	$0,0101 \pm 0,0001$	0,0137	24,55 %	35,64 %

Tabelle 3: Werte für die Suszeptibilität mit 3 verschiedenen Messtechniken.  $\chi_{\text{exp1}}$  nach Gl. (3),  $\chi_{\text{exp2}}$  nach Gl. (2) und  $\chi_{\text{theo}}$  nach Gl. (1)

Probe	Masse [g]	Länge [cm]	Dichte [g/cm <sup>3</sup> ]	$A_{\text{real}}$ [cm <sup>2</sup> ]
Dysprosium	16.6	17.7	7.80	0.12
Neodym	9.0	16.3	7.24	0.08
Gadolinium	14.8	16.6	7.40	0.12

Tabelle 4: Daten der Messproben.

Probe	$\bar{R}_0$ [m $\Omega$ ]	$\Delta R_0$ [m $\Omega$ ]	$\bar{U}_0$ [mV]	$\Delta U_0$ [mV]	$\bar{U}_{br}$ [mV]	$\Delta U_{br}$ [mV]
Dysprosium	2872	7.85	4.02	0.06	70.38	0.40
Neodym	2832	12.30	3.90	0.03	1.98	0.24
Gadolinium	2839	8.70	3.86	0.02	30.34	0.37

$\bar{R}_1$ [m $\Omega$ ]	$\Delta R_1$ [m $\Omega$ ]	$\bar{\Delta R}$ [m $\Omega$ ]	$\Delta(\Delta R)$ [m $\Omega$ ]
1220	6.30	1652	10.55
2719	7.50	118	6.80
2075	10.85	764	9.65

Tabelle 5:  
Mittelwerte und Standardabweichung der Probenwerte.

Probe	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	M[kg/mol]	M[kg]	N[1/m <sup>3</sup> ]
$Dy_2O_3$	7800	0.3730	$6,19 \cdot 10^{-25}$	$2,52 \cdot 10^{28}$
$Nd_2O_3$	7240	0.3365	$5,59 \cdot 10^{-25}$	$2,59 \cdot 10^{28}$
$Gd_2O_3$	7400	0.3625	$6,02 \cdot 10^{-25}$	$2,46 \cdot 10^{28}$

Tabelle 6: Massen der Messproben.

$R_0$ [m $\Omega$ ]	$U_0$ [mV]	$\Delta U_0$ [mV]	$U_1$ [mV]	$\Delta U_1$ [mV]	$R_1$ [m $\Omega$ ]	$\Delta R$ [m $\Omega$ ]
2850	3.9	0.1	73	1	1210	1640
2865	3.9	0.1	75	1	1230	1635
2890	4.1	0.1	75	1	1230	1660
2865	4.0	0.1	74	1	1230	1635
2890	4.2	0.1	75	1	1200	1690

Tabelle 7: Gemessene Werte zur Bestimmung der Suszeptibilität von Dysprosium.

$R_0$ [m $\Omega$ ]	$U_0$ [mV]	$\Delta U_0$ [mV]	$U_1$ [mV]	$\Delta U_1$ [mV]	$R_1$ [m $\Omega$ ]	$\Delta R$ [m $\Omega$ ]
2850	4.0	0.1	6.5	0.1	2715	135
2785	3.9	0.1	5.3	0.1	2685	100
2850	3.9	0.1	6.4	0.1	2720	130
2845	3.9	0.1	5.5	0.1	2725	120
2830	3.8	0.1	5.7	0.1	2725	105

Tabelle 8: Gemessene Werte zur Bestimmung der Suszeptibilität von Neodym.

$R_0$ [m $\Omega$ ]	$U_0$ [mV]	$\Delta U_0$ [mV]	$U_1$ [mV]	$\Delta U_1$ [mV]	$R_1$ [m $\Omega$ ]	$\Delta R$ [m $\Omega$ ]
2840	3.8	0.1	35	1	2050	790
2840	3.9	0.1	34	1	2085	755
2810	3.9	0.1	34	1	2050	760
2840	3.8	0.1	33	1	2105	735
2865	3.9	0.1	35	1	2085	780

Tabelle 9: Gemessene Werte zur Bestimmung der Suszeptibilität von Gadolinium.

## 5 Diskussion

Bei diesem Versuch ist die Brückenschaltung eine systematische Fehlerquelle. Durch Raufdrücken auf das Schaltelement oder auch durch Drehen der Probe, veränderte sich der erhaltene Wert für die Spannung signifikant. Dies könnte an einer Änderung der Leitfähigkeit der Spule liegen oder auch durch einen Wackelkontakt innerhalb des Elements.

Die Messung der Filterkurve hat gut funktioniert und die gemessene Güte weicht nur um 8,8 % vom Theoriewert ab.

Die errechneten Werte der Suszeptibilität für Dysprosium und Gadolinium sind relativ niedrig, doch ist die Abweichung bei Neodym signifikant größer. Da die Spannung  $U_{br}$  und der Querschnitt  $A_{real}$  des Neodyms sehr viel kleiner als die der anderen Materialien ist, fallen systematische Fehler noch stärker ins Gewicht.

Dieser Versuch ist daher sehr empfindlich, weil die Suszeptibilitäten klein sind und systematische Fehler das Ergebnis relativ stark beeinflussen.

## Literatur

- [1] Physikalisches Anfängerpraktikum der TU Dortmund: Versuch Nr. 606 - Messung der Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen. Stand: Januar 2013.