TU Dortmund

V103 - Biegung elastischer Stäbe

Markus Stabrin
markus.stabrin@tu-dortmund.de

Kevin Heinicke
kevin.heinicke@tu-dortmund.de

Versuchsdatum: 25. Juni 2013

Abgabedatum: 2. Juli 2013

1 Einleitung

Greifen Kräfte auf die Oberfläche eines Körpers an, können diese Gestalts- oder Volumenveränderungen hervorrufen. Diese wird auf die Flächeneinheit bezogen und die erhaltene physikalische Größe wird als Spannung bezeichnet. In Festkörpern findet sich meist ein linearer Zusammenhang zwischen Deformation und Spannung, welcher durch der Elastizitätsmodul gegeben ist. In diesem Versuch soll dieser für verschiedene Metalle beestimmt werden.

2 Theorie

2.1 Spannung

Spannung besitzt eine Tangential- und eine Normalkomponente. Die Normalkompomente wird als Normalspannung σ oder auch Druck bezeichnet, während die Tangentialkomponente Schubspannung genannt wird.

2.2 Hook'sches Gesetz

Ist die Deformation durch den Druck hinreichend klein, so findet sich meist ein linearer Zusammenhang zwischen der realtiven Änderung $\delta L/L$ und der angreifenden Spannung σ. Es gilt:

$$\sigma = E\frac{\delta L}{L} \tag{1}$$

Der Proportionalitätsfaktor E wird als Elastizitätsmodul bezeichnet und ist eine wichtige Materialkonstante. Eine einfache Methode dieses zu Messen ist die Methode der elastischen Biegung.

2.3 Zusammenhang des Elastizitätsmoduls und der Schallgeschwindigkeit

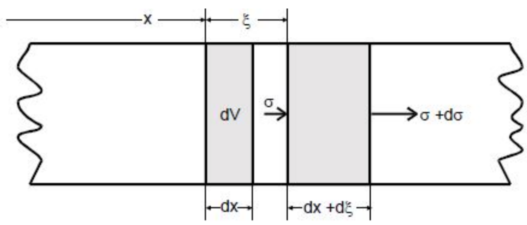

Abbildung 1: Skizze zur Ableitung eines Zusammenhanges zwischen Elastizitätsmodul und Schallgeschwindigkeit. [1]

Es besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Elastizitäsmodul E und der Schallgeschwindikeit c. Durch einen Stoß auf einer Stirnseite tritt eine sich longitudinal ausbreitende Deformation auf. Daher tritt eine ortsabhängige Spannung $\sigma(x)$ auf. Es gilt daher hier:

$$\sigma = E\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{2}$$

Daraus ergibt sich, nach der zeitlichen und räumlichen Verschiebung eines Volumenelements durch die Wellengleichung, für die Schallgeschwindigkeit c:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{3}$$

Dabei ist E der Elastizitätsmodul und ρ die Dichte des Stabes.

2.4 Berechnung der Durchbiegung eines homogenen Stabes bei einseitiger Einspannung

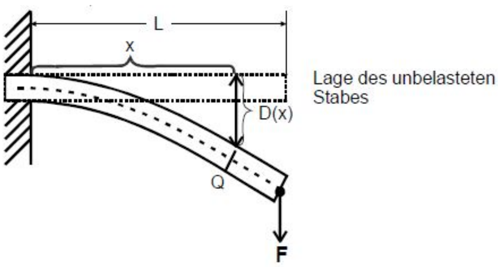

Abbildung 2: Durchbiegung eines elastischen Stabes bei einseitiger Einspannung. [1]

Auf einen Stab greift eine Kraft wie in Abb. 2 an. Der Stab wird gebogen und die Durchbiegung $D(x)$ kann abgelesen werden. Durch eine Messreihe, in der die Größen D und x gemessen werden, kann der Elastizitätsmodul berechnet werden.

Bei dieser Versuchsanordnung treten Kräftepaare auf, sodass eine Drehmomentgleichung aufgestellt werden muss, da ein Drehmoment M_{F} den Querschnitt Q aus seiner vertikalen Lage verdreht. Im Körper bilden sich nun Normalspannungen aus, welche der Deformation entgegenwirken. Auf der oberen Schicht ist dies die Zugspannung und in der unteren die Druckspannung.

Zwischen diesen Flächen befindet sich die neutrale Faser, in der keine Spannungen auftreten. Diese ist in Abb. 2 als gestrichelte Linie dargestellt. An diesem Punkt ist die Zugspannung entgegengesetzt gleich der Druckspannung. Es bildet sich ein Drehmoment M_σ aus. Dieses ist im Falle der einseitigen Einspannung durch die äußere Kraft gegeben, welche über den Hebelarm $L - x$ angreift.

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)\mathrm{d}q = F(L - x) \tag{4}$$

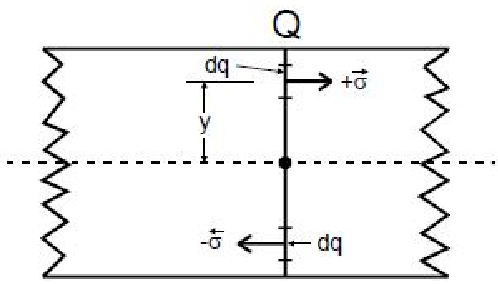

Abbildung 3: Skizze zur Berechnung des Drehmomentes M_σ.[1]

y ist dabei gleich dem Abstand von dq zur neutralen Faser. Aus der differentialgeometrie ergibt sich für große R eine Beziehung für $1/R$. Wird das Hook'sche Gesetzt nun auf unser Problem angewendet verändert sich die Gleichung für das Drehmoment zu:

$$E\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}x^2}\int_Q y^2\mathrm{d} = F(L-x) \tag{5}$$

Das Integral in dieser Gelchung wird als Flächenträgheitsmoment I bezeichnet:

$$I = \int_Q y^2\mathrm{d} \tag{6}$$

Somit ergibt sich für die Durchbiegung $D(x)$:

$$D(x) = \frac{F}{2EI}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) \tag{7}$$

2.5 Berechnung der Durchbiegung eines homogenen Stabes bei zweiseitiger Auflage

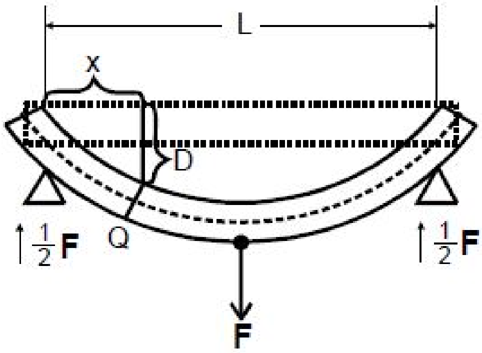

Abbildung 4: Durchbiegung eines homogenen Stabes bei zweiseitiger Auflage.

Diesmal ist der Stab wie in Abb. 4 eingespannt. In diesem Fall greift die Kraft $F/2$ mit dem Hebelarm x an der Querschnittsfläche Q an.
Da nun die Bereiche $0 \leq x \leq L/2$ und $L/2 \leq x \leq L$ getrennt betrachtet werden müssen, ergibt sich nach zweifacher Integration und Bestimmung der 1. konstanten durch annahme einer horitontalen Tangente an der Biegekurve für die Durchbiegung:

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{F}{48EI}(3L^2x - 4x^3), 0 \leq x \leq \frac{L}{2} && (8)\\ D(x) &= \frac{F}{48EI}(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3), \frac{L}{2} \leq x \leq L && (9)\end{aligned}$$

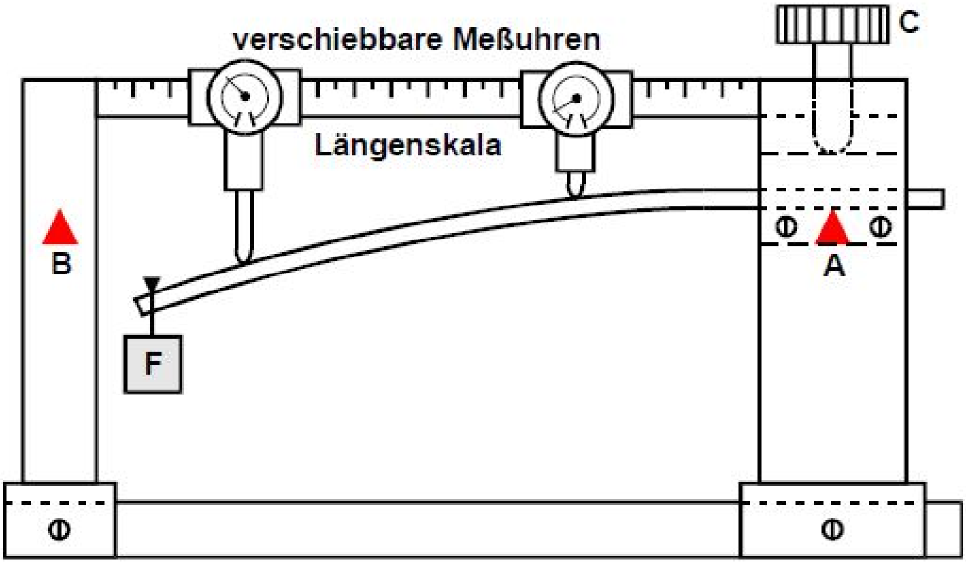

Abbildung 5: Schematische Darstellung einer Apparatur zur Vermessung elastisch gebogener Stäbe. [1]

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Vermessung elastisch gebogener Stäbe

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch eine Biegungsmessung wird ein Versuchsaufbau nach Abb. 5 verwendet. Es ist bei diesem Aufbau möglich den Stab entwede einseitig auf dem Fußpunkt A oder beidseitig auf den Fußpunkten A und B zu befestigen. Es ist nun möglich, je nach Messung, ein Gewicht entweder am Stabende oder in der Stabmitte zu befestigen.
Zur Messung der Durchbiegung $D(x)$ werden zwei Messuhren benutzt. Diese bestehen aus einem federnden Tastenstift und sind so in der Lage Verschiebungen eines Objektes zu messen. Diese sind auf der X-Achse verschiebbar, sodass eine Messung an verschiedenen Stellen x möglich ist.
Es wirkt auch eine Kraft F auf den Stab ohne das ein Gewicht angehängt wurde. Diese Durchbiegung $D_0(x)$ muss von den Durchbiegungen der anschließenden Messungen als Offset abgezogen werden.
Das Gewicht soll so gewählt werden, dass die maximale Durchbiegung zwischen 3 und 7 mm liegt.

3.2 Messung der Schallgeschwindigkeit in Stäben

Zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Stäben wird ein Versuchsaufbau nach Abb. 6 verwendet. Die elastische Deformation wird durch einen Aufprall mit einer Stahlkugel auf einer Stirnseite der Kugel erzeugt. Der Schallimpuls läuft durch den Stab hindurch

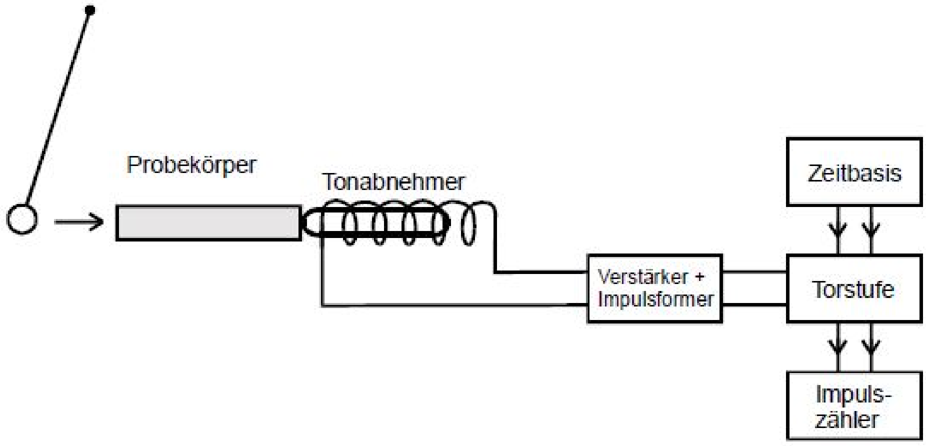

Abbildung 6: Schematische Darstellung einer Apparatur zur Messung der Laufzeit eines Schallimpulses in einem stabförmigen Probenkörper. [1]

und trifft auf die andere Stirnfläche. Dort wird der Schallimpuls in einen elektrischen Impuls umgewandelt. Dieser wird Verstärkt und eine elektronische Torstufe geöffnet, sodass die Impulse an einen Impulszähler weitergeletiet werden. Der größere Teil der Schallwelle wird jedoch reflektiert und trifft nach kurzer Zeit ein zweites Mal auf das Ende des Stabes. Dieser schließt die Torstufe und der Impulszähler zeigt die doppelte Laufzeit des Schallimpulses an. Durch das betätigen eines Schalters kann so auch die doppelte Laufzeit eines zehnfach reflektierten Impulses gemessen werden.
Der Probestab muss anschließend gewogen und ausgemessen werden.

3.3 Messprogramm

Zunächst wird die Durchbiegung $D(x)$ in Abhängigkeit von der Distanz x vom Einspannungsort für je einen zylindrischen und rechteckigen Querschnitt bei einseitiger Einspannung gemessen.
Anschließend wird die Messung bei beidseitiger Einspannung wiederholt.
Weiterhin wird die Laufzeit des Schallimpulses in den zuvor ausgemessenen Probestäbe bestimmt.
Abschließend werden die Probestäbe und die Belastungsgewichte ausgemessen und gewogen.

4 Auswertung

Im Folgenden werden einige Mittelwerte gebildet. Bei einer Anzahl von n Messwerten x_i gilt für den Mittelwert x:

$$x = \frac{1}{n}\sum_{\mathrm{i}=0}^{n} x_\mathrm{i}\,.$$

Die Varianz σ_x dieses Wertes, bzw. dessen Fehler Δx betragen

$$\Delta x^2 = \sigma_x = \frac{1}{n-1}\sum_{\mathrm{i}=0}^{n}(x_\mathrm{i} - x)^2\,.$$

4.1 Einseitige Einspannung

Zur Bestimmung des Elastizitätsmodules der beiden Stangen, wird jeweils eine lineare Ausgleichsrechnung der Form $D(x) = a\chi$ mit Gleichung (7) durchgeführt. Hierfür wird die Durchbiegung D gegen das Argument

$$\chi = Lx^2 - \frac{x^3}{3}$$

aufgetragen. Aus der Steigung a lässt sich mit Kenntnis der Kraft F, die am Stab angreift und des Flächenträgheitsmomentes I die Elastizität E bestimmen:

$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{2EI} \\ \Leftrightarrow \quad E &= \frac{F}{2aI}\,. \end{aligned}$$

Für die Kraft F gilt mit der Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$:

$$F = mg$$

Zunächst wird ein quadratischer Stab mit Breite b gemessen. Hier gilt für das Flächenträgheitsmoment I und den Fehler ΔI:

$$\begin{aligned} I &= \frac{b^4}{12}\,, \\ \Delta I &= \frac{b^3}{3}\Delta b\,. \end{aligned}$$

Die Breite des Stabes wird durch Mittelung über zehn Messwerte bestimmt und es folgt:

$$\begin{aligned} b &= (9{,}96 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm} \\ \Rightarrow \quad I &= (820{,}1 \pm 2{,}7)\,\mathrm{mm}^4\,. \end{aligned}$$

Mit der Gewichtmasse m folgt die Kraft F:

$$\begin{aligned} m &= 542{,}5\,\mathrm{g} \\ \Rightarrow \quad F &= 5{,}322\,\mathrm{N}\,. \end{aligned}$$

Die lineare Ausgleichsrechnung liefert dann:

$$\begin{aligned} a &= (4{,}916 \pm 0{,}053) \cdot 10^{-8}\,\mathrm{mm}^4 \\ \Rightarrow \quad E &= (65{,}947 \pm 0{,}743)\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^3}\,. \end{aligned}$$

Anschließend wird die Biegung eines zylindrischen Stabes mit Radius r gemessen. Für das Flächenträgheitsmoment I gilt dabei

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{4} r^4 \\ \Delta I &= \pi r^3 \Delta r\,. \end{aligned}$$

Der Radius r wird wiederum durch Mittelung über zehn Messwerte des Durchmessers bestimmt und es folgt

$$\begin{aligned} r &= (4{,}972 \pm 0{,}003)\,\mathrm{mm} \\ \Rightarrow \quad I &= (7677 \pm 16)\,\mathrm{mm}^4\,. \end{aligned}$$

Mit dem Gewicht der Masse m folgt die Kraft F:

$$\begin{aligned} m &= 267{,}8\,\mathrm{g} \\ \Rightarrow \quad F &= 2{,}627\,\mathrm{N}\,. \end{aligned}$$

Die Ausgleichsrechnung liefert hierfür:

$$\begin{aligned} a &= (3{,}33 \pm 0{,}32) \cdot 10^{-8}\,\mathrm{mm}^4 \\ \Rightarrow \quad E &= (82{,}127 \pm 1{,}552)\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^3}\,. \end{aligned}$$

Tabellen 1 und 2 beinhalten die entsprechenden Messdaten. Abbildungen 7 und 8 zeigen die Ausgleichsgerade und die Messwerte.

Tabelle 1: Messdaten für Biegung D der Stäbe

	Quadratisch			Zylindrisch		
x [mm]	D_0 [mm]	D_{m} [mm]	D [mm]	D_0 [mm]	D_{m} [mm]	D [mm]
80	6,61	2,16	0,22	3,17	0,24	0,17
110	6,76	2,84	0,36	3,55	0,82	0,27
140	7,16	3,57	0,56	3,96	1,48	0,39
170	7,52	4,30	0,89	4,40	2,23	0,54
200	7,83	5,00	1,02	4,80	2,85	0,69
230	8,04	5,51	1,31	5,20	3,48	0,87
260	8,10	5,91	1,59	5,55	4,08	1,06
290	8,10	6,23	1,87	5,87	4,61	1,26
320	8,10	6,51	2,19	6,19	5,13	1,47
350	8,07	6,76	2,53	6,48	5,61	1,72
380	8,05	7,03	2,83	6,77	6,08	1,95
410	7,94	7,05	3,22	6,95	6,41	2,17
440	7,84	7,28	3,59	7,13	6,74	2,48
470	7,77	7,41	3,92	7,31	7,04	2,73
500	7,70	7,48	4,45	7,42	7,25	2,93

Tabelle 2: Messwerte zur Bestimmung von Breite b und Durchmesser r der Stäbe

b [mm]		r [mm]	
9,968	9,950	9,949	9,945
9,973	9,959	9,939	9,949
9,972	9,966	9,936	9,950
9,965	9,960	9,937	9,944
9,961	9,949	9,943	9,941

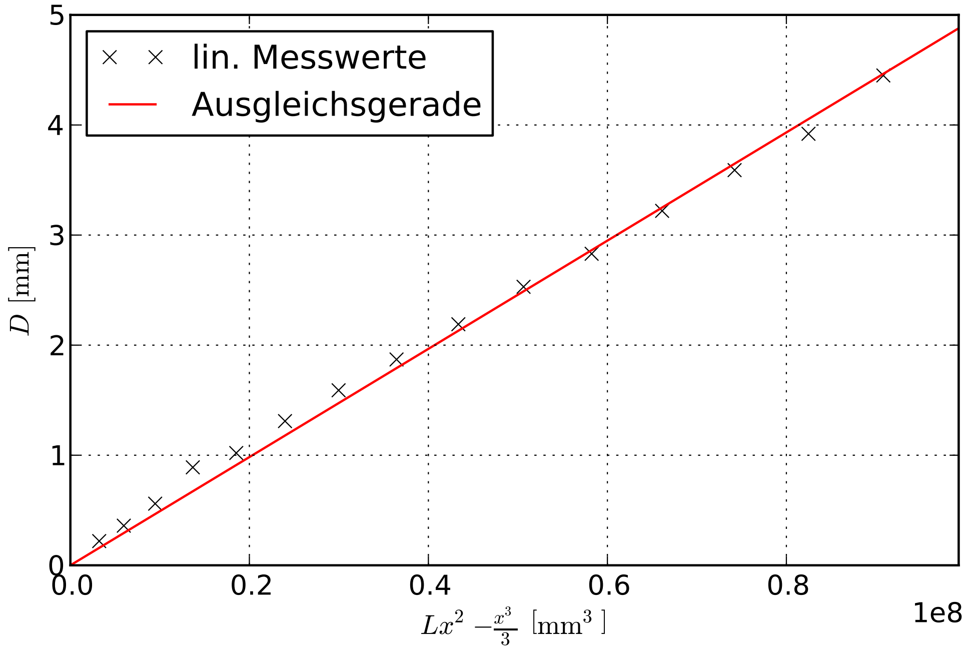

Abbildung 7: Lineare Ausgleichsrechnung für den quadratischen Stab

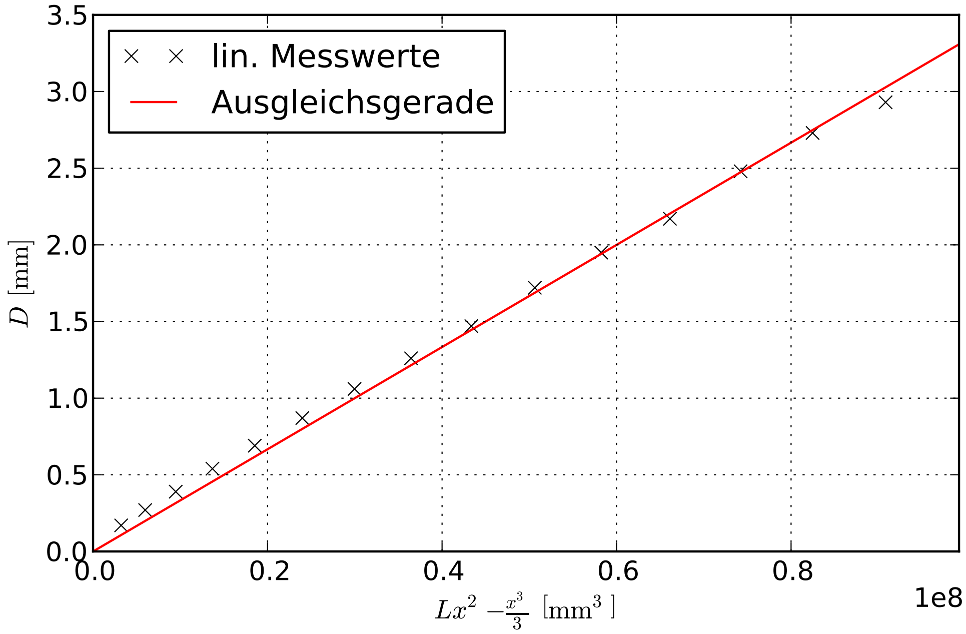

Abbildung 8: Lineare Ausgleichsrechnung für den zylindrischen Stab

4.2 Beidseite Auflage

Der zylindrische Stab aus Kapitel 4.1 wird nun beidseitig aufgelegt und das Gewicht der Masse m wird mittig befestigt. Durch zwei Ausgleichsrechnungen der Form $D = a_{\text{re}}\chi$ für die rechte Seite des Stabes bzw. $D = a_{\text{li}}\phi$ für die linke Seite des Stabes lassen sich zwei Werte E_{rechts} und E_{links} der Elastizität bestimmen.
Dabei ist

$$\begin{aligned} \chi &= 3L^2x - 4x^3 \\ \phi &= 4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\,, \\ E_{\text{re,li}} &= \frac{F}{48a_{\text{re,li}}I}\,. \end{aligned}$$

Mit dem Gewicht der Masse m folgt die Kraft F:

$$\begin{aligned} m &= 1648{,}3\,\text{g} \\ \Rightarrow \quad F &= 16{,}17\,\text{N}\,. \end{aligned}$$

Das Flächenträgheitsmoment I bleibt unverändert zu Kapitel 4.1. Die Ausgleichsrechnungen liefern dann

$$\begin{aligned} E_{\text{re}} &= (73{,}806 \pm 1{,}444)\,\frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}\,, \\ E_{\text{li}} &= (60{,}007 \pm 2{,}481)\,\frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}\,, \\ \overline{E} = \frac{E_{\text{re}} + E_{\text{li}}}{2} &= (66\,907 \pm 2871)\,\frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}\,. \end{aligned}$$

Tabelle 3 und Abbildung 9 zeigen die Messdaten, sowie die Ausgleichsgeraden.

Tabelle 3: Messdaten bei beidseitiger Auflage des zylindrischen Stabes

x [mm]	D_0 [mm]	D_m [mm]	D [mm]	x [mm]	D_0 [mm]	D_m [mm]	D [mm]
30	3,91	3,54	0,37	290	6,77	5,05	1,72
50	3,85	3,36	0,49	310	6,80	5,08	1,72
70	3,81	3,18	0,63	330	6,90	5,13	1,77
90	3,78	2,99	0,79	350	6,95	5,20	1,75
110	3,73	2,78	0,95	370	7,00	5,28	1,72
130	3,68	2,59	1,09	390	7,04	5,38	1,66
150	3,65	2,43	1,22	410	7,09	5,52	1,57
170	3,60	2,27	1,33	430	7,14	5,69	1,45
190	3,52	2,13	1,39	450	7,19	5,88	1,31
210	3,48	2,00	1,48	470	7,33	6,21	1,12
230	3,45	1,90	1,55	490	7,45	6,52	0,93
250	3,35	1,79	1,56	510	7,55	6,85	0,70
270	3,34	1,77	1,57	530	7,67	7,23	0,44

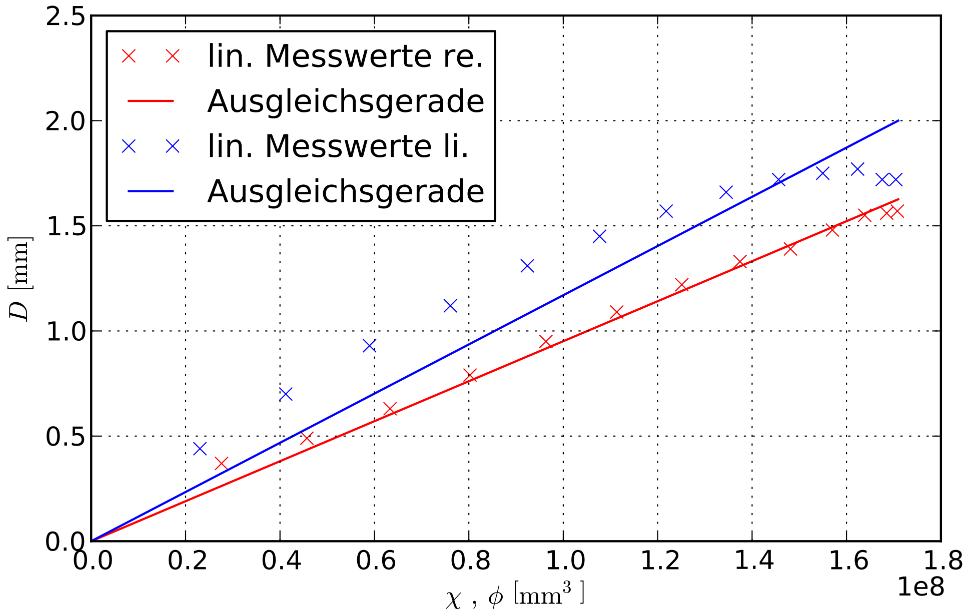

Abbildung 9: Ausgleichsgeraden bei beidseitiger Einspannung

5 Diskussion

Die durch diesen Versuch ermittelten Werte stimmen gut mit Werten aus Literatur überein. Bei quadratischen Stab aus Aluminium erwartet man ein Elastizitätsmodul von ca $E = 70\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^2}$ [2]. Der Gemessene Wert von $E = (65{,}9 \pm 0{,}7)\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^2}$ entspricht dem relativ gut. Die Abweichung von etwa 7% lässt sich durch Messungenauigkeiten erklären. Weil die Legierung des zweiten Stabes nicht bekannt ist, lässt sich hierüber nur schwer eine Aussage treffen. Der Wert der Elastizität E liegt jedoch ebenfalls im Bereich des Aluminiums.
Durch den Vergleich der Ergebnisse einseitiger und beidseitiger Einspannung lässt sich jedoch sagen, dass die Methoden eine relativ gute Übereinstimmung der Messwerte haben. Somit wird das Ergebnis aus Kapitel 4.1 durch das Ergebnis aus Kapitel 4.2 untermauert.

Literatur

[1] Physikalisches Anfängerpraktikum der TU Dortmund: Versuch V103 - Biegung elastischer Stäbe. `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V103.pdf`. Stand: Juni 2013.

[2] Uni Kiel. Elastizitätsmodul in Zahlen. `http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_7/illustr/t7_1_2.html`. Stand: Juni 2013.