

TU Dortmund

V408 - Geometrische Optik

Korrektur

Markus Stabrin

markus.stabrin@tu-dortmund.de

Kevin Heinicke

kevin.heinicke@tu-dortmund.de

Versuchsdatum: 8. Januar 2013

Abgabedatum: 28. Januar 2013

1 Einleitung

Lichtstrahlen werden beim Übergang von einem Material in ein anderes gebrochen. Dies liegt an der Änderung der materialabhängigen Phasengeschwindigkeit. In diesem Versuch wird die Brechung an einer oder zwei Linsen genauer untersucht.

2 Theorie

Linsen bestehen aus einem Material, welches meistens optisch dichter ist als Luft. Je nach Form besitzen diese spezielle Eigenschaften.

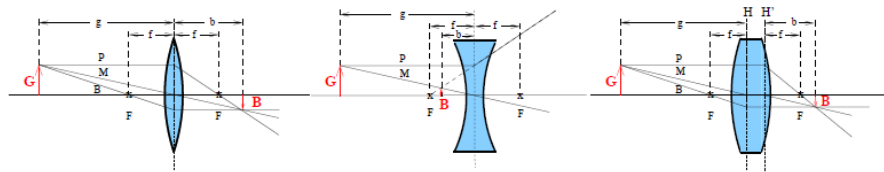


Abbildung 1: Abbildung einer dünnen Sammellinse, einer Zerstreuungslinse und einer dicken Sammellinse [1].

Brennweite f , Brennpunkt F , Bildweite b , Gegenstandsweite g , Gegenstandsgröße G , Bildgröße B , Parallelstrahl P , Mittelpunktstrahl M , Brennpunktstrahl B

2.1 Linsen

Die Sammellinse ist in der Mitte dick und wird zu den Enden dünner. Dadurch bündeln diese das Licht im Brennpunkt. Die Brennweite f und die Bildweite b sind positiv und es entsteht ein reelles Bild.

Bei der Zerstreuungslinse sind Brennweite f und Bildweite b negativ und es entsteht ein virtuelles Bild.

Bei dicken Linsen ist eine Reduktion bei der Brechung auf die Mittelebene nicht mehr möglich und es werden zwei Hauptebenen eingeführt, an denen die Brechung gedacht stattfindet.

Für die Beschreibung der Bildkonstruktion werden drei ausgezeichnete Strahlen verwendet: Parallelstrahl P , Mittelpunktstrahl M und Brennpunktstrahl B , wie in Abb. (1) gezeigt.

2.2 Abbildungsgesetz

Durch Strahlensätze und aus der Bildkonstruktion ergibt sich das Abbildungsgesetz

$$V = \frac{V}{G} = \frac{b}{g}. \quad (1)$$

2.3 Linsengleichung

Für dünne Linsen folgt daraus die Linsengleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}. \quad (2)$$

Bei dicken Linsen werden die Werte b und g jeweils von der näherliegenden Hauptebene an gemessen. Dadurch kann auch bei dieser die Linsengleichung angewendet werden.

2.4 Brechkraft

Die Linsengleichung gibt gleichzeitig auch die Brechkraft D der Linse wieder. Für die Zusammensetzung mehrerer dünner Linsen gilt:

$$D = \frac{1}{f} = \sum_i^N D_i \quad (3)$$

Die Brechkraft wird in Dioptrie [$\text{dpt} = 1/\text{m}$] gemessen.

Haben Linsen zwei unterschiedlich gekrümmte Flächen, so kann man sich diese als zwei dünne, einseitig plane zusammengesetzte Linsen denken. Die Brechkraft kann nun wieder mit Gl. (3) berechnet werden.

2.5 Abbildungsfehler

Bei den Abbildungsfehlern gibt es die sphärische und die chromatische Abberation.

2.5.1 Sphärische Abberation

Bei achsennahen Strahlen wird das Licht an der Linse weniger stark gebrochen, als bei achsenfernen Strahlen. Dadurch kommt es zu einer Verschiebung des Brennpunktes hinter der Linse. Der Brennpunkt von achsenfernen Strahlen liegt näher an der Linse als der von achsennahen Strahlen, wodurch das Bild unscharf wird.

Um wieder ein scharfes Bild zu erhalten, können die achsenfernen Strahlen z.B. mit einer Irisblende ausgeblendet werden.

2.5.2 chromatische Abberation

Licht verschiedener Wellenlängen wird unterschiedlich stark gebrochen. Je kürzer die Wellenlänge, umso stärker die Brechung. Dadurch liegt der Brennpunkt von kurzwelligem Licht (z.B. blau) näher an der Linse als der von langwelligem Licht (z.B. rot).

Diese Eigenschaft des Lichts wird Dispersion genannt.

3 Aufbau und Durchführung

Die Messapparatur befindet sich auf einer optischen Bank, auf denen die optischen Elemente verschoben werden können. Die Lichtquelle ist eine Halogenlampe und der Gegenstand ein „Perl L“. Vorweg wird die Größe von „Perl L“ bestimmt.

3.1 Bestimmung der Brennweite durch Messung der Gegenstandsweite und Bildweite

Zunächst wird die Brennweite von einer Linse mit bekannter Brennweite und einer mit unbekannter gemessen. Dafür wird auf die optische Bank eine Halogenlampe, der Gegenstand „Perl L“, eine Sammellinse unbekannter/bekannter Brennweite und ein Schirm angebracht.

Nach Ausrichten der Linse mit gegebener Brennweite auf einer festen Gegenstandsweite g , wird der Schirm so eingestellt, dass das Bild scharf abgebildet wird.

Das Wertepaar (g_i, b_i) wird für insgesamt 10 verschiedene Gegenstandsweiten notiert. Anschließend wird dieselbe Messung mit einer Linse unbekannter Brennweite wiederholt.

3.2 Bestimmung der Brennweite einer Linse nach der Methode von Bessel

Der Abstand e zwischen Schirm und Gegenstand wird konstant eingestellt, wobei dieser mindestens vier mal so groß wie die Brennweite f der Linse sein sollte.

Es werden zwei Linsenpositionen gesucht, an denen das Bild scharf abgebildet wird. Dabei handelt es sich um eine symmetrische Anordnung und es gilt:

$$b_1 = g_2 \quad \text{und} \quad b_2 = g_1 .$$

Wenn $g > b$ ist, wird das Bild verkleinert, andersrum vergrößert.

Es wird die Messung für insgesamt 10 weitere Abstände e_i wiederholt.

Die chromatische Abberation wird auf dieselbe Weise untersucht, nur dass hier jeweils ein blauer oder roter Filter vor den Gegenstand gesetzt wird.

Diese Messung wird für 5 verschiedene Abstände e_i wiederholt.

3.3 Bestimmung der Brennweite eines Linsensystems nach der Methode von Abbe

Es handelt sich hierbei um ein 2-Linsen System, wobei diese wie eine dicke Linse angesehen werden. Dabei wird die Gegenstandsweite g und die Bildweite b jeweils zu den Hauptebenen H und H' gemessen, wie in Abb. (2) gezeigt.

Da die Positionen von H und H' nicht bekannt sind, wird sich ein beliebiger Referenzpunkt A gesucht und zu diesem die Gegenstandsweite g' und die Bildweite b' gemessen. Es gilt:

$$g' = g + h = f \cdot \left(1 + \frac{1}{V}\right) + h, \quad (4)$$

$$b' = b + h' = f \cdot (1 + V) + h'. \quad (5)$$

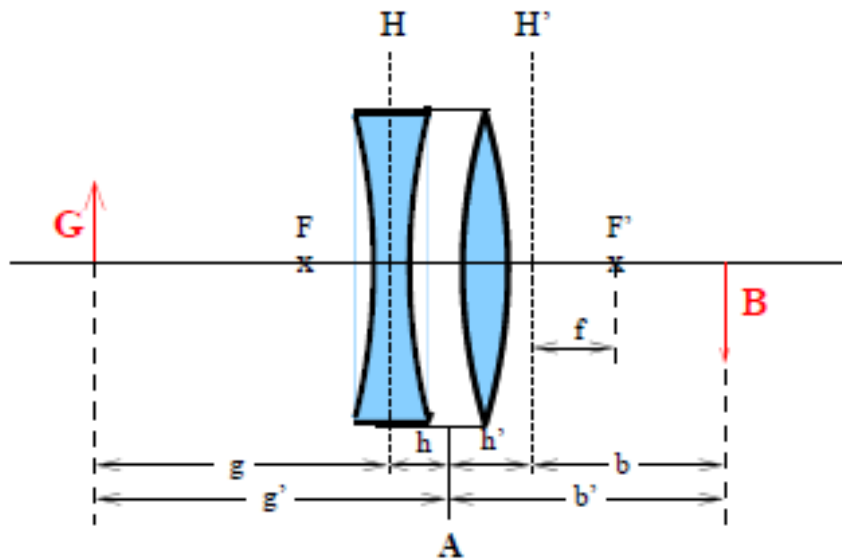


Abbildung 2: Bestimmung der Brennweite eines Linsensystems nach der Methode von Abbe

Die Linsen werden so dicht zusammengeschoben, dass diese sich berühren und dieser Abstand wird beibehalten.

Die Bildgröße B wird gemessen, sowie die Abstände g' und b' zum Referenzpunkt A . Diese Messung wird für 10 Gegenstandsweiten g' wiederholt.

4 Auswertung

Für einige Ergebnisse wird im Folgenden ein Mittelwert \bar{x} der gemessenen Größe x und der entsprechende Fehler $\Delta\bar{x}$ benötigt. Für diese Größen gilt bei einem Umfang von n Messwerten

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$\Delta\bar{x} = \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

4.1 Verifizierung der Linsen- und Maßstabsgleichung

Zunächst sollen die Gleichungen (1) und (2) anhand einer Linse bekannter Brennweite verifiziert werden. Dazu werden Bildweite b , Bildgröße B und Gegenstandsweite g ge-

messen. Die Gegenstandsgröße wird zu $G = (2,75 \pm 0,05)$ cm gemessen und bleibt bei allen folgenden Messungen konstant.

Die folgende Tabelle enthält die Messwerte der Linse mit bekannter Brennweite, sowie die Abbildungsmaßstäbe $V_1 = b/g$ und $V_2 = B/G$ und deren Verhältnis V_1/V_2 :

Tabelle 1: Messwerte der bekannten Linse

$g[\text{mm}]$	$b[\text{mm}]$	$f [\text{mm}]$	$B[\text{mm}]$	V_1	V_2	V_1/V_2
200,5	899,5	163,56	135,0	3,854	3,964	0,972
203,0	847,0	164,14	115,0	3,502	3,564	0,983
206,0	794,0	163,64	109,0	3,186	3,236	0,984
211,0	739,0	163,78	98,0	2,837	2,909	0,975
215,0	685,0	163,66	89,0	2,486	2,545	0,977
221,5	628,5	163,56	80,0	2,112	2,145	0,984
229,5	570,5	163,17	70,0	1,703	1,745	0,976
241,0	509,0	162,11	59,0	1,104	1,127	0,979
259,0	441,0	163,75	48,0	4,172	4,182	0,998
309,0	341,0	163,95	31,0	4,486	4,909	0,914

Zu jedem Wertepaar (g_i, b_i) kann die Brennweite f_i bestimmt werden. Der Mittelwert \bar{f} wird mit den Herstellerangaben f_{Her} verglichen. Auf Abweichungen wird in der Diskussion eingegangen.

Man erhält

$$\begin{aligned}\bar{f} &= (163,53 \pm 0,18) \text{ mm} , \\ f_{\text{Her}} &= 150 \text{ mm} , \\ \bar{f}/f_{\text{Her}} &= 1,09 .\end{aligned}$$

Der Mittelwert der Abbildungsverhältnisse $\overline{V_1/V_2}$ sollte zudem etwa 1 betragen, wenn Gleichung (1) gilt.

$$\overline{V_1/V_2} = 0,974 .$$

4.2 Brennweite einer unbekannten Linse

Die vorherige Messung wird bei einer Linse unbekannter Brennweite wiederholt. Folgende Tabelle beinhaltet die Messdaten:

Tabelle 2: Messwerte der unbekannten Linse

$g[\text{mm}]$	$b[\text{mm}]$	$f [\text{mm}]$	$B[\text{mm}]$	V_1	V_2	V_1/V_2
201,0	299,0	120,20	42,5	1,488	1,545	0,963
174,0	376,0	118,95	62,0	2,161	2,255	0,958
170,0	405,0	120,52	69,0	2,593	2,727	0,951
167,0	433,0	120,62	75,0	3,063	3,218	0,952
164,0	461,0	119,84	80,0	3,560	3,764	0,946
160,0	490,0	120,30	88,5	3,983	4,182	0,953
157,0	518,0	121,29	95,0	3,708	4,091	0,906
154,0	571,0	120,48	112,5	3,299	3,455	0,955
153,5	546,5	120,97	103,5	2,811	2,909	0,966
150,5	599,5	119,74	115,0	2,382	2,509	0,949

Wie oben folgen aus der Messung die Werte

$$\begin{aligned}\bar{f} &= (120,29 \pm 0,21) \text{ mm} , \\ \overline{V_1/V_2} &= 0,950 .\end{aligned}$$

Die folgenden Grafiken 3 und 4 zeigen die Wertepaare (g_i, b_i) auf den Achsen eines Koordinatensystems eingezeichnet. Falls keine Messfehler auftreten, schneiden sich die Geraden im Brennpunkt (f, f) .

Durch Ablesen werden damit die Brennweiten bestimmt zu

$$\begin{aligned}f_{\text{bekannt}} &= (160 \pm 5) \text{ mm} , \\ f_{\text{unbekannt}} &= (120 \pm 5) \text{ mm} .\end{aligned}$$

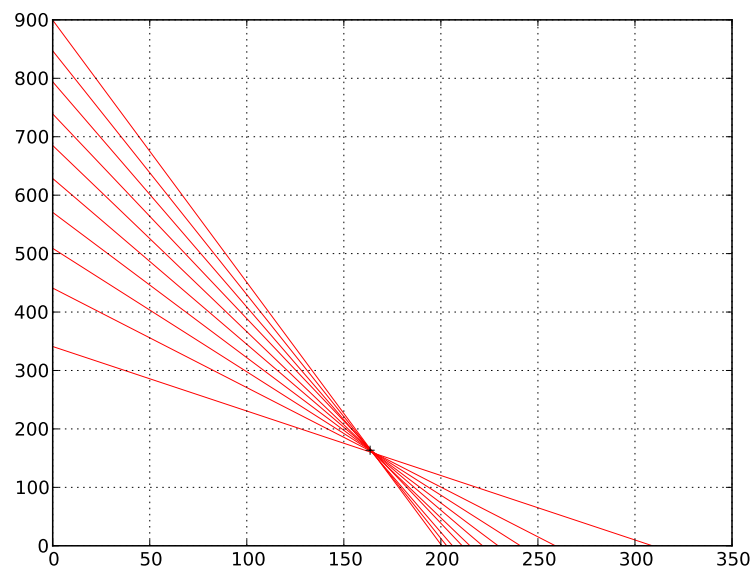


Abbildung 3: Wertepaare (g_i, b_i) der bekannten Linse auf die x- und y-Achsen eingetragen.

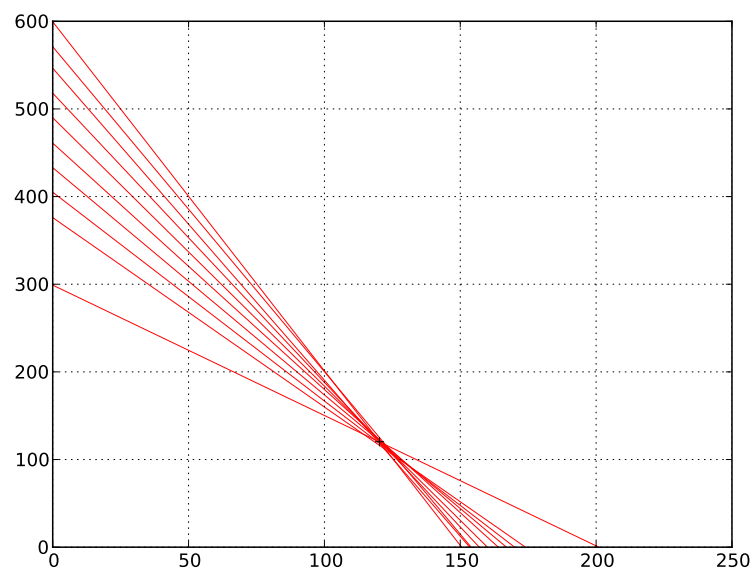


Abbildung 4: Wertepaare (g_i, b_i) der unbekannten Linse auf die x- und y-Achsen eingetragen.

4.3 Bestimmung der Brennweite einer Linse nach der Methode von Bessel

Mit dem Abstand d

$$d = |g_1 - b_1| = |g_2 - b_2|,$$

zwischen beiden Linsenpositionen gilt die Beziehung

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4e}. \quad (6)$$

Folgende Tabellen zeigen die Messwerte für weißes, rotes und blaues Licht.

Tabelle 3: Messwerte der Bild- und Gegenstandsweiten für die Methode nach Bessel mit weißem Licht.

g_1 [mm]	b_1 [mm]	g_2 [mm]	b_2 [mm]	e [mm]	d [mm]	f [mm]
199,0	901,0	902,0	198,0	1000,0	571,0	168,49
201,5	848,5	850,0	200,0	1050,0	648,5	162,37
208,5	741,5	742,0	208,0	1100,0	703,0	162,68
213,0	687,0	689,0	211,0	950,0	533,5	162,60
219,5	630,5	631,0	219,0	900,0	476,0	162,06
225,0	775,0	796,0	204,0	850,0	411,5	162,70
227,0	573,0	577,0	223,0	800,0	350,0	161,72
238,0	512,0	513,0	237,0	750,0	275,0	162,29
256,0	444,0	441,0	259,0	700,0	185,0	162,78
308,0	342,0	338,0	312,0	650,0	30,0	162,15

Tabelle 4: Messwerte der Bild- und Gegenstandsweiten für die Methode nach Bessel bei blauem und rotem Licht.

g_1 [mm]	b_1 [mm]	g_2 [mm]	b_2 [mm]	e [mm]	d [mm]	f [mm]
rotes Licht						
206,0	794,0	796,0	204,0	1000,0	588,0	163,56
203,0	847,0	847,0	203,0	1050,0	644,0	163,75
202,0	898,0	809,0	291,0	1100,0	696,0	164,91
211,0	739,0	741,0	209,0	950,0	528,0	164,14
215,0	685,0	686,0	214,0	900,0	470,0	163,64
blaues Licht						
204,5	795,5	797,0	203,0	1000,0	591,0	162,68
201,0	849,0	850,0	200,0	1050,0	648,0	162,52
200,0	900,0	901,0	199,0	1100,0	700,0	163,64
209,0	741,0	743,0	207,0	950,0	532,0	163,02
213,0	687,0	687,0	213,0	900,0	474,0	162,59

Durch Bildung des Mittelwertes erhält man die Brennweiten für weißes Licht (\bar{f}), rotes Licht (\bar{f}_{rot}) und für blaues Licht (\bar{f}_{blau}):

$$\begin{aligned}\bar{f} &= (162,98 \pm 0,62) \text{ mm} , \\ f_{\text{Her}} &= 150 \text{ mm} , \\ \bar{f}/f_{\text{Her}} &= 1,09 , \\ \bar{f}_{\text{rot}} &= (164,00 \pm 0,25) \text{ mm} , \\ \bar{f}_{\text{blau}} &= (162,89 \pm 0,21) \text{ mm} , \\ \bar{f}_{\text{rot}} - \bar{f}_{\text{blau}} &= (1,11 \pm 0,33) \text{ mm}\end{aligned}$$

4.4 Bestimmung der Brennweite eines Linsensystems nach der Methode von Abbe

Eine Lineare Regression der Gleichungen (4) und (5) liefert die Brennweite f , sowie die Positionen von h und h' . Die Regression wird mit folgenden Werten durchgeführt:

Tabelle 5: Messwerte der Bild- und Gegenstandsweiten zur Hilfsebene A für die Methode nach Abbe.

g' [mm]	b' [mm]	e [mm]	B [mm]	V
242,0	958,0	1200,0	81,0	2,95
251,0	899,0	1150,0	73,0	2,65
262,0	838,0	1100,0	65,0	2,36
275,0	775,0	1050,0	57,0	2,07
291,0	709,0	1000,0	50,0	1,82
332,0	618,0	950,0	39,0	1,42
384,0	516,0	900,0	27,0	0,98
235,0	1015,0	1250,0	89,0	3,24
231,0	1069,0	1300,0	95,0	3,45
222,0	1128,0	1350,0	105,0	3,82

Eine lineare Regression mit numpy liefert die Werte

$$\begin{aligned}f_1 &= (217,8 \pm 6,4) \text{ mm} , \\ f_2 &= (217,4 \pm 3,4) \text{ mm} , \\ h &= (-48,8 \pm 9,6) \text{ mm} , \\ h' &= (96,7 \pm 12,3) \text{ mm} , \\ \bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2} &= (217,6 \pm 5,0) \text{ mm} .\end{aligned}$$

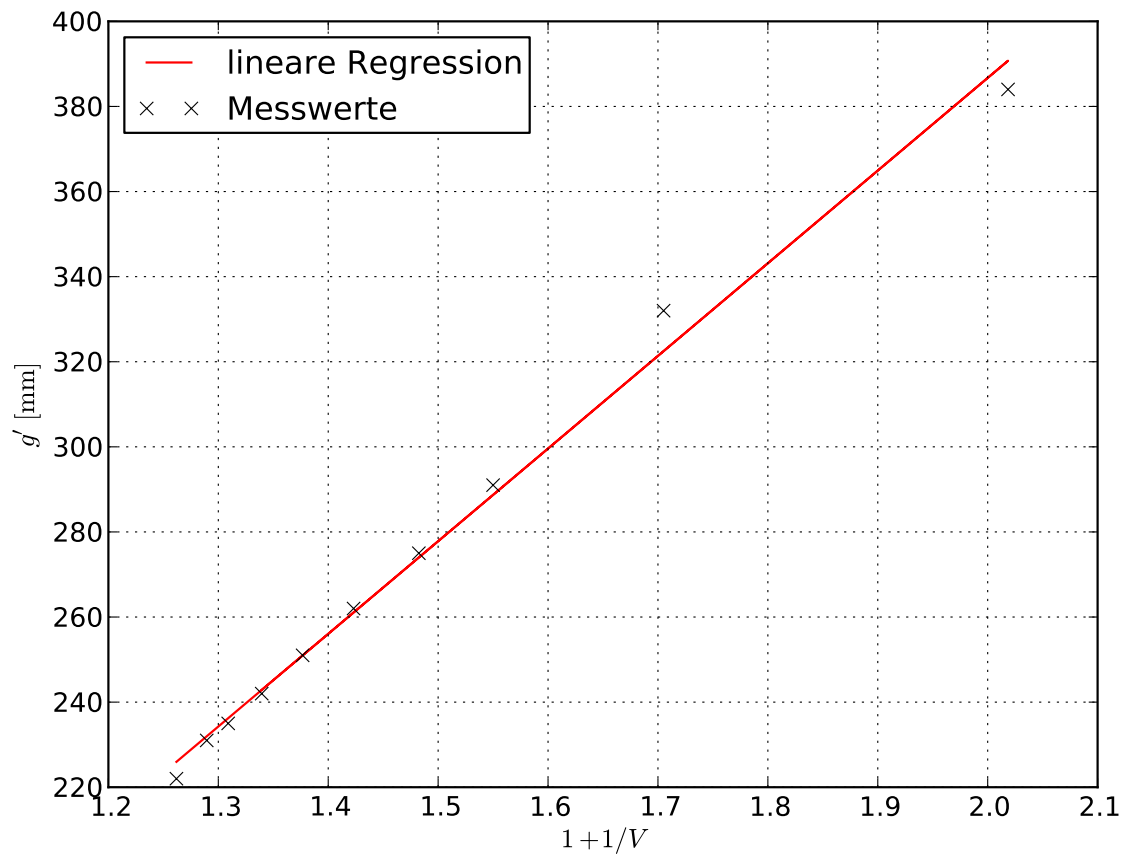


Abbildung 5: Lineare Regression g' gegen $1 + 1/V$.

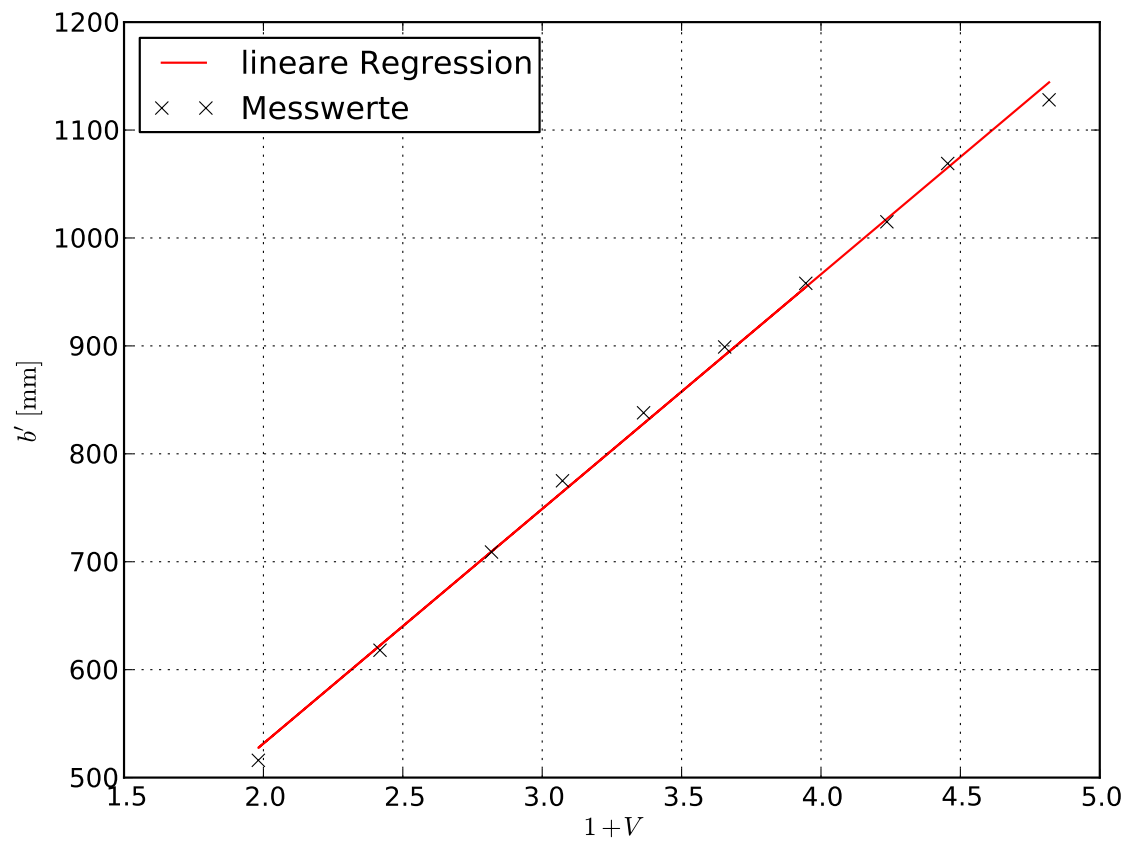


Abbildung 6: Lineare Regression b' gegen $1+V$.

5 Diskussion

Alle Methoden zur Bestimmung der Brennweite liefern etwa einen Wert von $f \approx 163$ mm. Dieser Wert weicht jedoch um fast 9 % von den Herstellerangaben ($f_{\text{Her}} = 150$ mm) ab. Unter der Annahme, dass die Herstellerangaben korrekt sind, legt das Ergebnis nahe, dass ein Systematischer Fehler vorliegt. Eventuell wurde der Schärfepunkt bei jeder Messung falsch gewählt. Dennoch sind die Werte insgesamt akzeptabel und bestätigen somit die Messmethoden zur Bestimmung der Brennweite und damit die Linsengleichung (2). Der Mittelwert der Abbildungsmaßstabverhältnisse weicht mit 0,97 zudem nur um 3 % vom Theoriewert $(B/G)/(b/g) = 1$ ab, wodurch Gleichung (1) ebenfalls bestätigt werden kann.

Die Messung zur chromatischen Abberation zeigt selbst unter Berücksichtigung der Fehlertoleranzen einen minimalen Unterschied der Brennweiten von $\Delta f = 0,78$ mm bei rotem und blauem Licht. Der Effekt kann also bei empfindlichen Systemen, wie zum Beispiel Fotokameras nicht vernachlässigt werden.

Literatur

- [1] Physikalisches Anfängerpraktikum der TU Dortmund: Versuch Nr. 408 - Geometrische Optik. Stand: Januar 2013.