

TU Dortmund

V354 - Gedämpfte- und erzwungene Schwingungen

Markus Stabrin
markus.stabrin@tu-dortmund.de

Kevin Heinicke
kevin.heinicke@tu-dortmund.de

Versuchsdatum: 18. Dezember 2012

Abgabedatum: 8. Januar 2013

1 Einleitung

Dieser Versuch behandelt gedämpfte und erzwungene Schwingungen am Beispiel des LC-Kreises. Schaltet man eine Induktivität mit einer Kapazität in Reihe, können sie ihre Energie periodisch austauschen (Abb 1). Durch einen Ohmschen Widerstand im Schaltkreis geht bei jedem Zyklus Energie in Form von Wärme verloren und die Schwingung wird gedämpft. Schließlich lässt sich eine Schwingung anregen, indem man eine äußere, periodische Spannung anlegt. Hierbei treten verschiedene Resonanzphänomene auf.

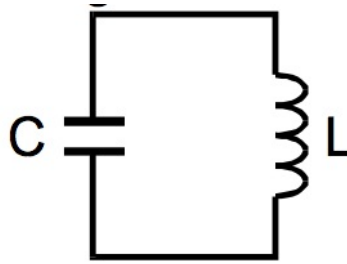


Abbildung 1: Ein LC-Kreis: Energie, die im System vorhanden ist, wird periodisch zwischen Kondensator und Spule ausgetauscht. [1]

2 Theorie

Der hier behandelte Aufbau lässt sich mit den Kirchhoff'schen Regeln durch Differentialgleichungen 2. Ordnung beschreiben. Die Struktur dieser Gleichung ist bei jeder gedämpften Schwingung gleich, weshalb die Ergebnisse leicht auf andere Probleme übertragen werden können (z.B. Stoßdämpfer).

2.1 Gedämpfte harmonische Schwingung

Für den LC-Schwingkreis lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} I + \frac{R}{L} \frac{\partial}{\partial t} I + \frac{1}{LC} I = 0$$

Es bezeichnen R den Widerstand des Kreises, L die Induktivität der Spule und C die Kapazität des Kondensators.

Der Ansatz

$$\begin{aligned} I(t) &= Ae^{\omega t} \\ \Rightarrow \omega &= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \end{aligned}$$

liefert drei verschiedene Arten der Schwingung. Außerdem erkennt man, dass diese Gleichung für den ungedämpften Fall – also $R = 0$ – eine harmonische Schwingung mit der

Frequenz $1/\sqrt{LC}$ ergibt. Die Amplitude A bezeichnet im Folgenden eine Konstante, die von den Anfangsbedingungen abhängt.

2.1.1 Schwingfall $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$

Beim Schwingfall dominiert die Harmonische Schwingung. Die Amplitude der Schwingung nimmt jedoch allmählich ab. Abbildung 4 zeigt den Verlauf der Schwingung. Die Lösung lautet dann

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t} e^{\pm i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t}.$$

2.1.2 Aperiodischer Grenfall $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$

In diesem Fall kehrt die Amplitude schnellstmöglich zur Ausgangslage zurück. Es tritt keine Schwingung auf. Dieser Fall ist in Abbildung 2 als gestrichelte Linie eingezeichnet. Die Lösung lautet hier

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t}.$$

2.1.3 Überdämpfung oder Kriechfall $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$

In diesem Fall nähert sich die Amplitude besonders langsam der Ruhelage. Diese wird erst nach einem Nulldurchgang oder einem vorläufigen Ausschlag erreicht. Die Lösung lautet

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}t}$$

und wird exemplarisch durch die farbigen Graphen in Abbildung 2 visualisiert.

2.2 Erzwungene Schwingungen

Durch eine äußere periodische Spannung $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$ lässt sich eine Schwingung im Kreis erzwingen. Die Kirchhoff'schen Regeln liefern hier die Differentialgleichung für die Kondensatorspannung U_C

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U_C + \frac{R}{L} \frac{\partial}{\partial t} U_C + \frac{1}{LC} U_C = U_0 e^{i\omega t}.$$

Zur Lösung dieser Gleichung wird der homogene und der partikuläre Teil gelöst. Nach genügend großer Zeit ist der homogene Teil, welcher den Einschwingvorgang beschreibt, zu vernachlässigen, weshalb die Schwingung durch den Partikulärteil

$$U_C(\omega, t) = U(\omega) e^{i\omega t + \varphi}$$

beschrieben werden kann. Hier gelten die Zusammenhänge

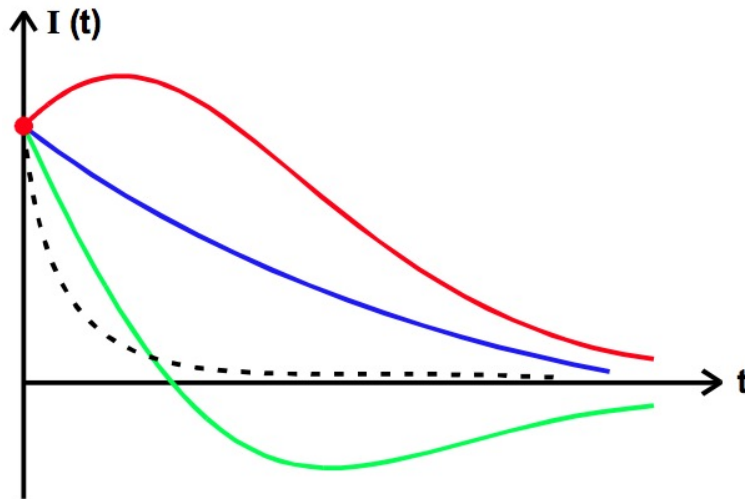


Abbildung 2: Verläufe des Aperiodischen Grenzfalles (gestrichelt) und des Kriechfalles.
[1]

$$U(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (\omega RC)^2}},$$

$$\tan \varphi = \frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}.$$

Der Wert φ gibt hierbei den Phasenunterschied zwischen Erregerspannung $U(t)$ und Resonator, also der Kondensatorspannung U_C an.

Bemerkenswert ist, dass die Spannung $U(\omega)$ bei einer bestimmten Frequenz – der Resonanzfrequenz ω_{res} – einen maximalen Wert annimmt. Es gilt

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

Für den besonderen Fall der schwachen Dämpfung gilt

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$$

$$\Rightarrow U_C = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0 = q U_0.$$

Mit der Eigenfrequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Wenn der Widerstand R also gegen Null geht, kann U_C unendlich verstärkt werden. Diesen Fall nennt man Resonanzkatastrophe.

Der Vorfaktor q wird als Güte des Schwingkreises bezeichnet. Mit den Frequenzen ω_+ und ω_- , die die Frequenzen bezeichnen bei denen $U(\omega)$ gerade den Bruchteil $1/\sqrt{2}$ annimmt, gilt zudem

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}.$$

Im Gegensatz dazu steht die starke Dämpfung:

$$\frac{R^2}{2L^2} \gg \frac{1}{LC}.$$

Nun geht U_C für wachsende Frequenzen monoton gegen Null.

3 Aufbau und Durchführung

Zunächst soll die Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung bestimmt werden. Hierfür wird ein Oszilloskop am Kondensator angeschlossen und ein Rechteckpuls in den RLC-Kreis gespeist. Der zeitliche Abstand zwischen zwei Pulsen muss groß genug gewählt werden, damit eine Abklingen der Amplitude erkennbar ist, bevor die Schwingung neu angeregt wird.

Anschließend wird der Widerstand R_{ap} , bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt bestimmt. Dazu wird der ohmsche Widerstand des Schaltkreises so groß gewählt, dass ein reiner Kriechfall vorherrscht. Unter beobachtung der Kondensatorspannung am Oszilloskop U_C wird der Widerstand verkleinert, bis das Signal fast einen Nulldurchgang, bzw. ein Überschwingen anzeigt. Der Widerstand R_{ap} ist dann gefunden.

Daraufhin speist man die Schaltung mit einer Sinusspannung und misst die Kondensatorspannung U_C für verschiedene Frequenzen ω . Es ist wichtig, dass der Innenwiderstand des Sinusgenerators zum Gesamtwiderstand gerechnet wird.

Schließlich wird die Phase in Abhängigkeit der Frequenz gemessen. Dazu wird auch der Sinusgenerator am Oszilloskop angeschlossen und die Nulldurchgänge beider Signale wie in Abbildung 3 bestimmt. Es gilt dann

$$\varphi = \frac{a}{b} 2\pi$$

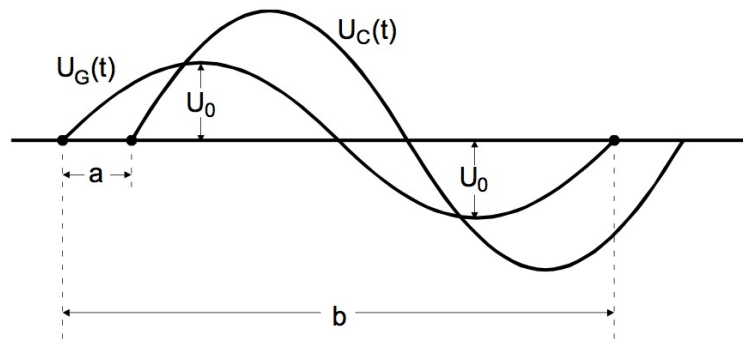


Abbildung 3: Bestimmung der Phase zweier Sinussignale. [1]

4 Auswertung

Die Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung ist in Graph (4) zu sehen. Aus dem Graphen (4) wurden die Amplituden aus Tabelle (4) entnommen. Mit einer linearen Ausgleichsrechnung der positiven Amplituden mit Gnuplot ergaben sich der Graph (5). Die Ausgleichsrechnung führte auf die Werte:

$$\begin{aligned} f(x) &= -m \cdot x + b \\ m &= (0,195 \pm 0,003) \text{ 1/cm} \\ b &= (1,692 \pm 0,011) \text{ cm} \end{aligned} \quad (1)$$

Damit ergibt sich für den Vorfaktor des Exponenten $2 \cdot \pi \cdot \mu$ der e-Funktion:

$$\begin{aligned} 1 \text{ 1/cm} &= 0,031 \text{ 1/}\mu\text{s} \\ 2 \cdot \pi \cdot \mu &= 0,031 \cdot m = (6,045 \pm 0,093) \text{ kHz} \end{aligned}$$

Daraus Folgt für die Abklingdauer und den effektiven Dämpfungswiderstand:

$$\begin{aligned} L &= (10,14 \pm 0,03) \text{ mH} \\ \Rightarrow T_{\text{ex}} &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \mu} = (0,16 \pm 0,01) \text{ ms} \\ \Rightarrow R_{\text{eff}} &= 2 \cdot L \cdot 2 \cdot \pi \cdot \mu = (122,59 \pm 1,92) \Omega \end{aligned}$$

Der Fehler von R_{eff} berechnet sich mit:

$$\begin{aligned} \Delta R_{\text{eff}} &= \sqrt{\left(\left| \frac{\partial R}{\partial 2 \cdot \pi \cdot \mu} \right| \cdot \Delta 2 \cdot \pi \cdot \mu \right)^2 + \left(\left| \frac{\partial R}{\partial L} \right| \cdot \Delta L \right)^2} \\ \Delta 2 \cdot \pi \cdot \mu &= 93 \\ \Delta L &= 0.00003 \\ \Rightarrow \Delta R_{\text{eff}} &= 1.92 \end{aligned}$$

f[kHz]	U[V]	f[kHz]	U[V]	f[kHz]	U[V]	f[kHz]	U[V]
1	2.6	29	7.4	32.8	9.9	33.7	10
5	2.6	30	8.2	33	10	33.8	9.9
10	2.8	30.5	8.6	33.1	10	33.9	9.9
15	3.2	31	9	33.2	10	34	9.9
20	3.9	31.5	9.3	33.23	10	34.2	9.8
25	5.2	32	9.6	33.3	10	34.4	9.7
26	5.7	32.2	9.7	33.4	10	34.6	9.6
27	6.2	32.4	9.8	33.5	10	34.8	9.5
28	6.8	32.6	9.9	33.6	10	35	9.3

f[kHz]	U[V]	f[kHz]	U[V]	f[kHz]	U[V]
35.2	9.2	39	5.9	60	1.1
35.4	9	39.5	5.5	65	0.9
35.6	8.8	40	5.2	70	0.7
35.8	8.7	41	4.6	80	0.5
36	8.5	42	4.1	90	0.4
36.5	8	43	3.7	100	0.3
37	7.5	44	3.4	125	0.1
37.5	7.1	45	3.1	150	0.1
38	6.7	50	2.0	200	0
38.5	6.3	55	1.5		

Tabelle 1: Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung an einem Serienresonanzkreis

Der effektive Dämpfungswiderstand von $(122,59 \pm 1,92) \Omega$ ist größer als der verbaute Widerstand $R_1 = (54,7 \pm 0,1) \Omega$ und der Innenwiderstand $R_i = 50 \Omega$ zusammen. Dies lässt sich durch die zusätzlichen Ohm'schen Widerstände in der Spule und den Leitungen erklären.

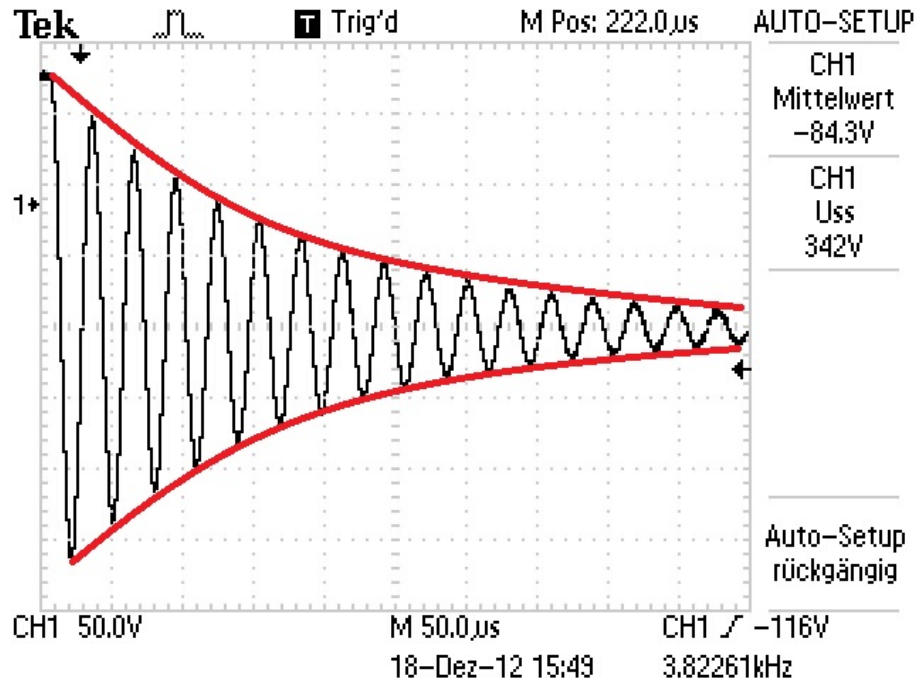


Abbildung 4: Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung. Mit rot ist die Einhüllende gekennzeichnet.

Für die Suche nach dem aperiodischen Grenzfall ergaben sich die Graphiken (6) bis (8). Dabei zeigt Graphik (7) den aperiodischen Grenzfall bei etwa :

$$R_{\text{ap}} = 3,52 \text{ k}\Omega.$$

Für den errechneten Wert ergab sich :

$$\begin{aligned} C &= (2,088 \pm 0,006) \text{ nF} \\ L &= (10,14 \pm 0,03) \text{ mH} \\ R_{\text{ap}} &= \sqrt{\frac{4 \cdot L}{C}} = (3,12 \pm 6,52) \text{ k}\Omega. \end{aligned}$$

Dies entspricht einer Abweichung von etwa 13 %. Der Fehler berechnet sich nach:

$$\Delta R_{\text{ap}} = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial R}{\partial C}\right| \cdot \Delta C\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial R}{\partial L}\right| \cdot \Delta L\right)^2} \quad (2)$$

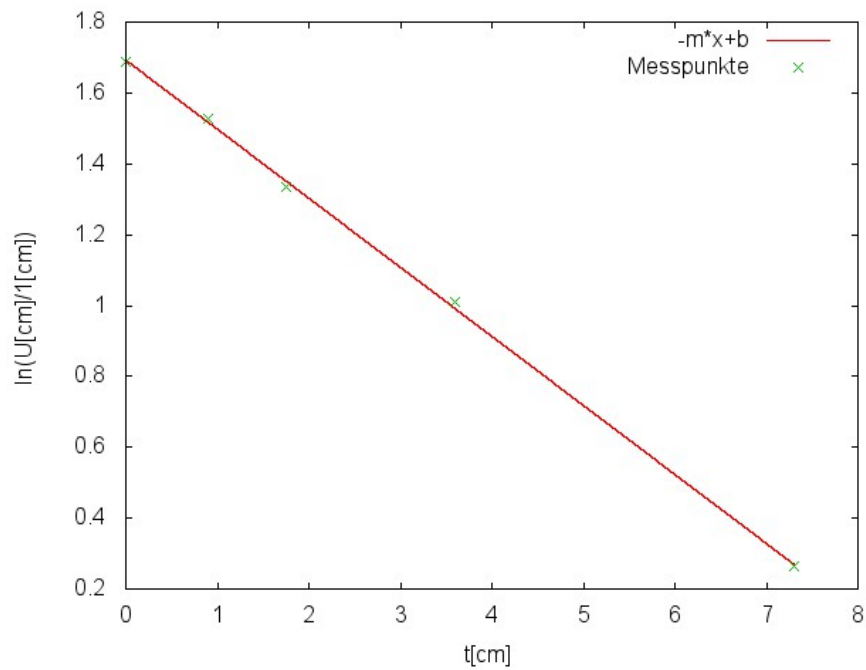


Abbildung 5: Amplituden aus Graph (4) mit einer Ausgleichsrechnung mittels (2)

t[cm]	U[cm]
0	5.4
0.4	-5.1
0.9	4.6
1.3	-4.3
1.75	3.8
2.25	-3.6
3.6	2.75
5	-2.2
7.3	1.3
8.65	-1.2

Tabelle 2: Messwerte aus dem Graphen (4), dabei wird ein Fehler von $\Delta U = 0,5 \text{ mm}$ angenommen

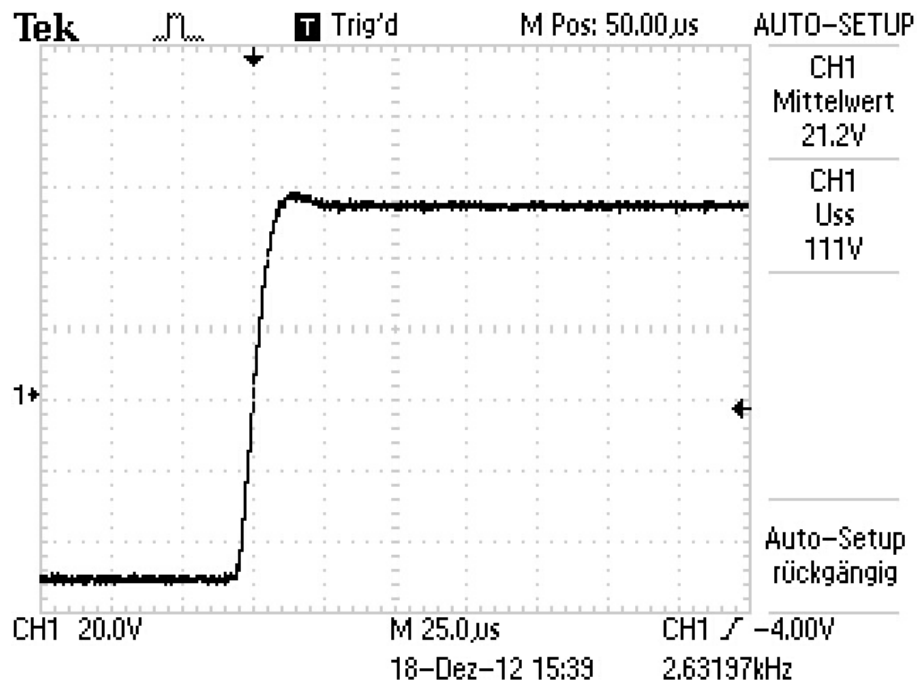


Abbildung 6: Überdämpfung

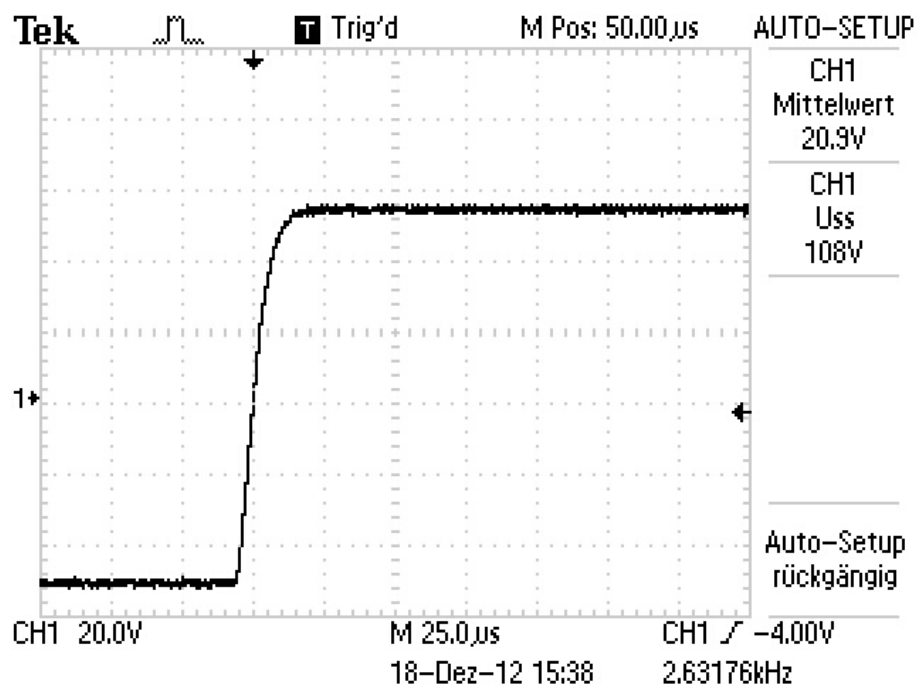


Abbildung 7: Aperiodischer Grenzfall

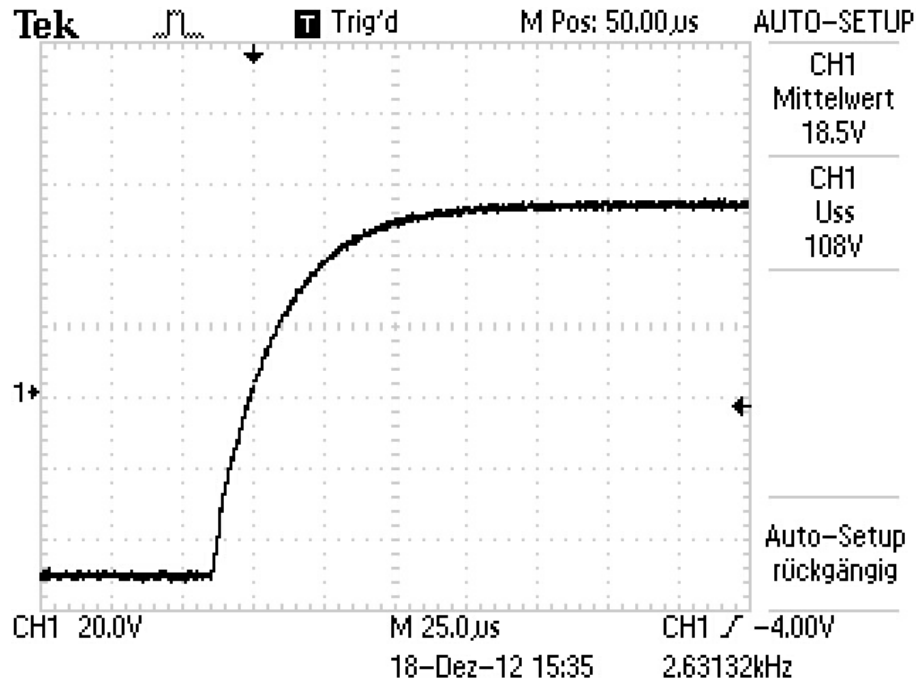


Abbildung 8: Kriechfall

Bei der Messung der frequenzabhängigkeit der Spannung ergaben sich die Werte aus Tabelle (3). Diese sind zudem in Graph (9) dargestellt, wobei U_c mit $U_0 = (2,6 \pm 0,1) \text{ V}$ normiert wurde. Der Bereich um die Resonanzfrequenz ist in Graph (10) dargestellt. Die Schnittpunkte des Graphen mit der Linie stellt dabei die Breite der Resonanzkurve dar. Bei diesem Versuch wurde der Gesamtwiderstand benutzt:

$$R_2 = (523,9 \pm 0,5) \Omega$$

$$R_i = 50 \Omega$$

$$R_{\text{ges}} = (573,9 \pm 0,5) \Omega$$

Das Maximum der Kurve gibt die Resonanzüberhöhung q an, die Schnittpunkte f_1 und f_2 die Grenzen für die Breite. Ablesen der Werte ergibt ungefähr:

$$q = 3,846 \pm 0,050$$

$$f_1 = (37,5 \pm 0,5) \text{ kHz}$$

$$f_2 = (28,5 \pm 0,5) \text{ kHz}$$

$$\rightarrow w_1 - w_2 = 2 \cdot \pi \cdot (f_1 - f_2) = (56\,548,66 \pm 0,01) \text{ kHz}$$

f[kHz]	U[V]	f[kHz]	U[V]	f[kHz]	U[V]	f[kHz]	U[V]
1	2.6	29	7.4	32.8	9.9	33.7	10
5	2.6	30	8.2	33	10	33.8	9.9
10	2.8	30.5	8.6	33.1	10	33.9	9.9
15	3.2	31	9	33.2	10	34	9.9
20	3.9	31.5	9.3	33.23	10	34.2	9.8
25	5.2	32	9.6	33.3	10	34.4	9.7
26	5.7	32.2	9.7	33.4	10	34.6	9.6
27	6.2	32.4	9.8	33.5	10	34.8	9.5
28	6.8	32.6	9.9	33.6	10	35	9.3

f[kHz]	U[V]	f[kHz]	U[V]	f[kHz]	U[V]
35.2	9.2	39	5.9	60	1.1
35.4	9	39.5	5.5	65	0.9
35.6	8.8	40	5.2	70	0.7
35.8	8.7	41	4.6	80	0.5
36	8.5	42	4.1	90	0.4
36.5	8	43	3.7	100	0.3
37	7.5	44	3.4	125	0.1
37.5	7.1	45	3.1	150	0.1
38	6.7	50	2.0	200	0
38.5	6.3	55	1.5		

Tabelle 3: Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung an einem Serienresonanzkreis

Dieser Wert liegt sehr nah an dem Referenzwert $R/L = (56\,597,63 \pm 2,79) \frac{\Omega}{H}$. Der errechnete Wert für $q = 3,840 \pm 0,136$ weicht damit um nur etwa 0,2 % vom abgelesenen Wert ab. Der Fehler errechnet sich vom Typ wie in Gleichung (2).

Die Messdaten zur Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung sind in Tabelle (4) dargestellt. Der dazugehörige Graph (4) zeigt die Messwerte und die signifikanten Stellen bei $\Phi = 45^\circ$, $\Phi = 90^\circ$ und $\Phi = 135^\circ$. Diese entsprechen den Punkten, wo die Frequenz die Werte f_2 , f_{res} und f_1 annimmt.

Es ergibt sich für die abgelesenen Werte:

$$\begin{aligned}
 w_2 &= 2 \cdot \pi \cdot f_2 &= (188,496 \pm 3,142) \text{ kHz} \\
 w_{\text{res}} &= 2 \cdot \pi \cdot f_{\text{res}} &= (210,487 \pm 3,142) \text{ kHz} \\
 w_1 &= 2 \cdot \pi \cdot f_1 &= (241,903 \pm 3,142) \text{ kHz}
 \end{aligned}$$

Die errechneten Werte ergeben:

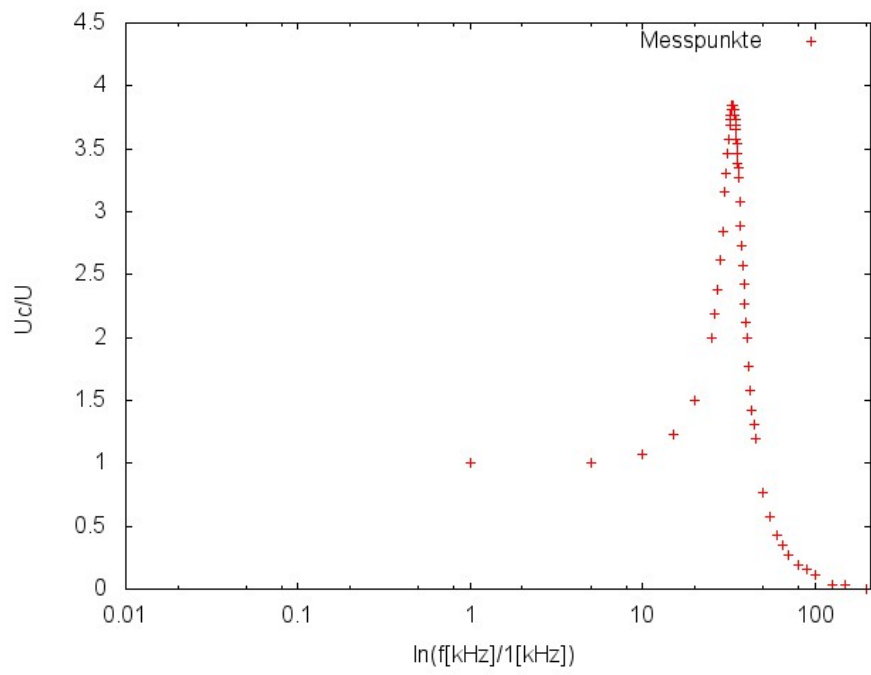


Abbildung 9: Frequenzabhängigkeit der Spannung

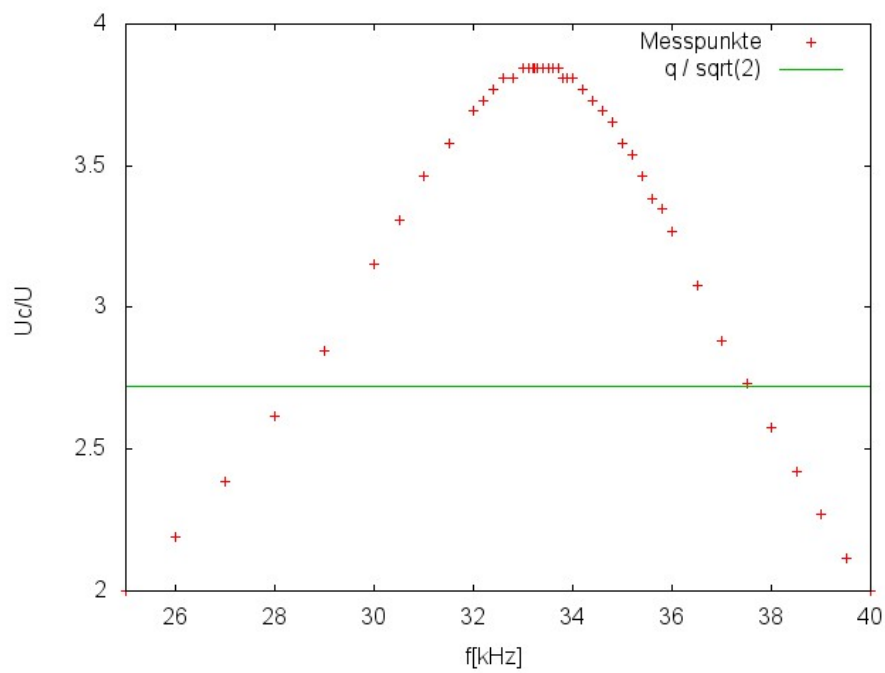


Abbildung 10: Frequenzabhängigkeit der Spannung im Bereich um die Resonanzfrequenz

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} = (247,461 \pm 0,414) \text{ kHz} \\
w_{\text{res}} &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} = (217,290 \pm 0,440) \text{ kHz} \\
w_2 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} = (190,863 \pm 0,395) \text{ kHz}
\end{aligned}$$

Die Fehler errechnen sich nach:

$$\begin{aligned}
\Delta w_1 &= \sqrt{\left(\left|\frac{\partial w_1}{\partial C}\right| \cdot \Delta C\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial w_1}{\partial L}\right| \cdot \Delta L\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial w_1}{\partial R}\right| \cdot \Delta R\right)^2} \\
\Delta w_2 &= \sqrt{\left(\left|\frac{\partial w_2}{\partial C}\right| \cdot \Delta C\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial w_2}{\partial L}\right| \cdot \Delta L\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial w_2}{\partial R}\right| \cdot \Delta R\right)^2} \\
\Delta w_{\text{res}} &= \sqrt{\left(\left|\frac{\partial w_{\text{res}}}{\partial C}\right| \cdot \Delta C\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial w_{\text{res}}}{\partial L}\right| \cdot \Delta L\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial w_{\text{res}}}{\partial R}\right| \cdot \Delta R\right)^2}
\end{aligned}$$

Die Werte befinden sich in der selben Größenordnung und die Abweichungen lassen sich durch systematische Fehler erklären.

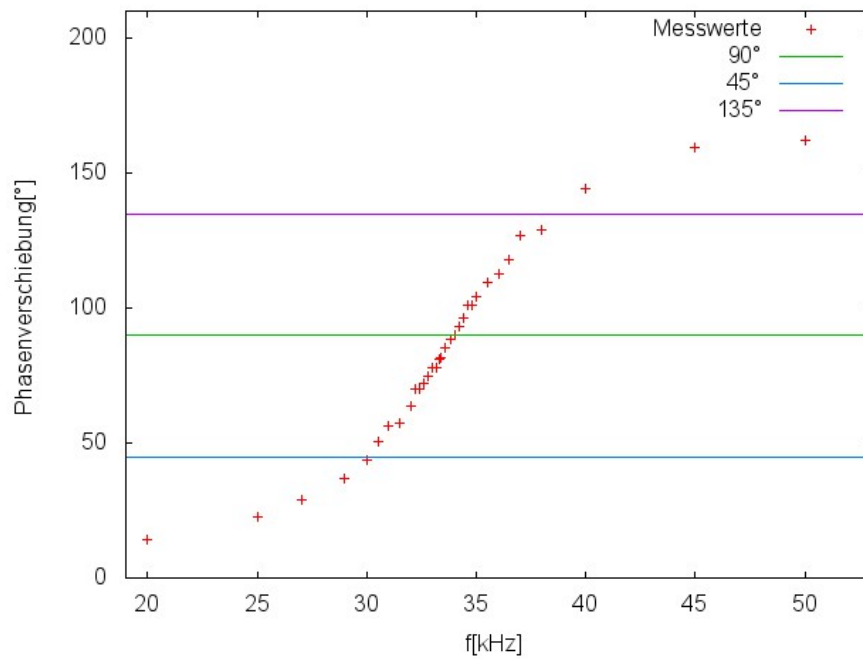


Abbildung 11: Phase der Spannung in Abhängigkeit von der Frequenz

f[kHz]	a	b	a/b	f[kHz]	a	b	a/b	f[kHz]	a	b	a/b
1	0	4	0	30.5	0.9	6.4	0.141	33.2	2.6	12	0.216
5	0	8	0	31	1	6.4	0.156	33.3	2.7	12	0.225
10	0.1	10	0.01	31.5	2	12.6	0.159	33.4	2.7	11.9	0.227
15	0.2	6.8	0.029	32	2.2	12.4	0.177	33.6	2.8	11.8	0.237
20	0.4	10	0.04	32.2	2.4	12.4	0.194	33.8	2.9	11.8	0.246
25	0.5	8	0.063	32.4	2.4	12.4	0.194	34	2.9	11.6	0.25
27	0.6	7.4	0.081	32.6	2.4	12	0.2	34.2	3	11.6	0.259
29	0.7	6.8	0.103	32.8	2.5	12	0.208	34.4	3.1	11.6	0.267
30	0.8	6.6	0.121	33	2.6	12	0.216	34.6	3.2	11.4	0.281

f[kHz]	a	b	a/b	f[kHz]	a	b	a/b
34.8	3.2	11.4	0.281	38	3.8	10.6	0.358
35	3.3	11.4	0.289	40	4	10	0.4
35.5	3.4	11.2	0.304	45	3.9	8.8	0.443
36	3.5	11.2	0.313	50	3.6	8	0.45
36.5	3.6	11	0.327	75	2.6	5.4	0.481
37	3.8	10.8	0.352	100	2	4	0.5

Tabelle 4: longcaption

5 Diskussion

Der Versuch hat gezeigt, dass Experiment und Theorie nah beieinander liegen. Die Abweichungen zwischen den errechneten und den gemessenen Werten lagen zwischen 0,2 % und 13 %.

Besonders bei dem Ablesen des Widerstands für den aperiodischen Grenzfall war es schwierig den exakten Wert zu ermitteln, da das Oszilloskop nicht sehr genau ablesbar ist. Dies gilt dementsprechend auch für das Ablesen der Werte aus den Thermodrucken, da auch diese nicht genau sind. Der Versuch ist damit der anfällig für ablesefehler.

Für die meisten Werte gab es jedoch gute Übereinstimmungen und der Versuch ist gut geeignet um gedämpfte- und erzwungene Schwingungen am RLC Kreis zu untersuchen.

6 Literaturverzeichnis

Literatur

- [1] Physikalisches Anfängerpraktikum der TU Dortmund: Versuch Nr. 354 - Gedämpfte und erzwungene Schwingungen. Stand: Dezember 2012.