TU Dortmund

V107 - Viskosität

Korrektur

Markus Stabrin
markus.stabrin@tu-dortmund.de

Kevin Heinicke
kevin.heinicke@tu-dortmund.de

Versuchsdatum: 27. November 2012

Abgabedatum: 8. Januar 2013

1 Einleitung

Die dynamische Viskosität von Flüssigkeiten ist temperaturabhängig. In diesem Versuch soll die dynamische Viskosität von destilliertem Wasser mit Hilfe des Kugelfall-Viskosimeters nach Höppler bestimmt werden.

2 Theorie

Die Reibungskraft $\vec{F}$ eines sich bewegenden Körpers in einer Flüssigkeit ist von der Berührungsfläche A und der Geschwindigkeit v abhängig. Die Viskosität η wird mit einem Kugelfallviskosimeter bestimmt, in welchem eine Kugel in destilliertem Wasser fällt, ohne Wirbel auszubilden. Da es sich um eine laminare Strömung handelt gilt die Stokes'sche Reibung:

$$F_R = 6\,\pi\,\eta\,v\,r. \tag{1}$$

Mit zunehmender Fallgeschwindigkeit v nimmt die Reibung zu, bis sich ein Kräftegleichgewicht zwischen Reibungskraft $\vec{F}_{\mathrm{R}}$, Schwerkraft $\vec{F}_{\mathrm{g}}$ und Auftrieb $\vec{F}_{\mathrm{A}}$ einstellt. Danach fällt die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit. Die Viskosität η läßt sich nun berechnen durch:

$$\eta = K\,(\rho_{\mathrm{K}} - \rho_{\mathrm{Fl}})\,t. \tag{2}$$

K = Proportionalitätskonstante, ρ_{K} = Dichte der Kugel, ρ_{Fl} = Dichte der Flüssigkeit, t = Fallzeit

Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität wird durch die Andradesche Gleichung

$$\eta(T) = A\exp(\frac{B}{T}), \tag{3}$$

beschrieben, wobei A und B Konstanten sind.

3 Aufbau und Durchführung

Die Abbildung (1) zeigt den Aufbau eines Kugelfall-Viskosimeters nach Höppler.
Es steht eine kleine und eine große Glaskugel zur Verfügung. Zunächst wird die Dichte der Kugeln aus der Masse und dem Volumen bestimmt. Anschließend wird das Viskosimeter mit Hilfe der Libelle justiert. Das Glasrohr in der Mitte wird möglichst frei von Luftblasen mit destilliertem Wasser und jeweils einer der Glaskugeln gefüllt. Dabei ist die Apparatur um wenige Grad geneigt, damit die Kugel auf dem Wasserfilm gleitet und nicht unkontrolliert an die Wand stößt und sich so keine Wirbel ausbilden.
Die Fallzeit t der beiden Kugeln wird auf einer Strecke von 10 cm 10 mal mit einer Stoppuhr gemessen, indem die Apparatur nach einem Durchlauf um 180° gedreht wird. Dabei ist darauf zu achten, dass die Kugel beim Durchlaufen der ersten Messmarke bereits eine konstante Geschwindigkeit erreicht hat. Mit gegebenem K_{klein} kann die

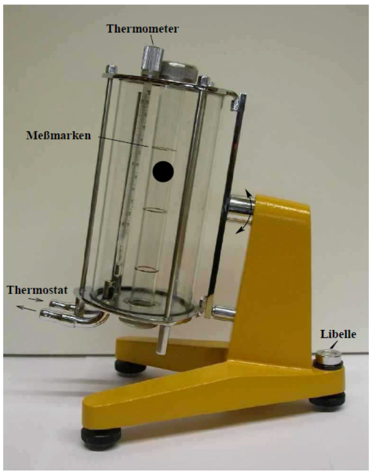

Abbildung 1: Aufbau eines Kugelfall-Viskosimeters nach Höppler [1]

konstante Viskosität bei Raumtemperatur berechnet werden und daraus die Apparaturkonstante $K_{\text{groß}}$.
Um die Röhre mit der Kugel befindet sich ein Wasserbad, welches mit einer Heizvorrichtung verbunden ist. Dieses wird nun auf bis zu 55°C geheizt und dabei bei 10 verschiedenen Temperaturen je zwei Messungen mit der großen Kugel durchgeführt.

4 Auswertung

Um die dynamische Viskosität zu bestimmen, müssen vorab verschiedene Messungen durchgeführt werden. Zunächst sollen dafür die Größen K der Gleichung (2) und später die Konstanten A und B der Gleichung (3) ermittelt werden. Schließlich wird überprüft, ob die untersuchte Strömung tatsächlich laminar ist.

4.1 Bestimmung der Apparaturkonstante K

Es stehen zwei unterschiedlich große Kugeln zur Verfügung, die das Viskositmeter passieren können. Die Konstante K_{klein} ist für die kleinere Kugel gegeben, wodurch zunächst die Viskosität η_0 bei Raumtemperatur ($T = 20\,°\text{C}$) bestimmt werden kann. Mit Kenntnis dieser Größe lässt sich anschließend die entsprechende Konstante $K_{\text{groß}}$ für die später verwendete große Kugel bestimmen.
Es werden zehn Messwerte für die Fallzeit t der kleinen Kugel aufgenommen:

Tabelle 1: Messwerte der Fallzeit t der kleinen Kugel bei Raumtemperatur

Messung	t[s]	Messung	t[s]
1	12.92	6	12.86
2	12.81	7	12.84
3	12.87	8	12.84
4	12.52	9	12.73
5	12.78	10	12.60

Es wird ein Mittelwert mit mittlerem Fehler gebildet:

$$t_{\text{klein}} = (12{,}78 \pm 0{,}04)\,\text{s}.$$

Desweiteren muss aus dem Durchmesser d_{klein} und der Masse m_{klein} die Dichte $\rho_{K,\text{klein}}$ der Kugel bestimmt werden. Es gilt

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{6m}{\pi d^3}.$$

Die Masse ist hierbei bekannt, der Durchmesser muss mit einem Messschieber gemessen werden, wobei der Ablesefehler $\Delta d = 0{,}05\,\text{mm}$ beträgt.
Durch Gauß'sche Fehlerfortpflanzung erhält man einen Fehler

$$\Delta\rho = \left|\frac{\partial\rho}{\partial d}\right| \cdot \Delta d = \frac{18m}{\pi d^4} \cdot \Delta d.$$

Damit kann die Dichte bestimmt werden:

$$\begin{aligned} d_{\text{klein}} &= (15{,}64 \pm 0{,}05)\,\text{mm} \\ m_{\text{klein}} &= 4{,}4531\,\text{g} \\ \Rightarrow \quad \rho_{\text{klein}} &= (2{,}223 \pm 0{,}021)\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}. \end{aligned}$$

Mit den obigen Größen wird η_0 bestimmt. Auch hier erhält man einen Fehler durch Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta\eta = \left|\frac{\partial\eta}{\partial\rho_K}\right| \cdot \Delta\rho_K + \left|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right| \cdot \Delta t = K\left(t \cdot \Delta\rho_K + |\rho_K - \rho_{\mathrm{Fl}}| \cdot \Delta t\right)$$

Die Dichte ρ_{Fl} des Wassers und die Konstante K_{klein} sind bekannt [2] [1] . Man erhält

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{klein}} &= 0{,}0764\,\frac{\mathrm{mPa\,cm^3}}{\mathrm{g}} \\ \rho_{\mathrm{Fl}} &= 0{,}998\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm^3}} \\ \Rightarrow \quad \eta_0 &= (1{,}196 \pm 0{,}006)\,\mathrm{mPa\,s}. \end{aligned}$$

Nun kann $K_{\mathrm{groß}}$ der großen Kugel bestimmt werden. Hierfür werden die gleichen Messungen mit der zweiten Kugel wiederholt.

Tabelle 2: Messwerte der Fallzeit t der großen Kugel bei Raumtemperatur

Messung	t[s]	Messung	t[s]
1	94.89	6	95.44
2	95.35	7	95.46
3	95.15	8	95.29
4	95.64	9	95.40
5	94.20	10	95.37

$$\bar{t} = (95{,}22 \pm 0{,}13)\,\mathrm{s}$$

Masse m und Durchmesser d dieser Kugel werden gemessen und Dichte ρ bestimmt. Die Ablesefehler betragen $\Delta m = 0{,}05\,\mathrm{g}$ und $\Delta d = 0{,}05\,\mathrm{mm}$. Weil nun auch m fehlerbehaftet ist erhält man

$$\Delta\rho = \frac{6}{\pi d^3}\left(\frac{3m}{d} \cdot \Delta d + \Delta m\right)$$

$$\begin{aligned} m &= (4{,}60 \pm 0{,}05)\,\mathrm{g}, \\ d &= (15{,}82 \pm 0{,}05)\,\mathrm{mm}, \\ \Rightarrow \quad \rho &= (2{,}219 \pm 0{,}045)\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm^3}} \end{aligned}$$

Durch Umstellen der Gleichung (2) erhalten wir

$$K = \frac{\eta}{(\rho_K - \rho_{\mathrm{Fl}})\,\bar{t}}. \tag{4}$$

Mit Gauß'scher Fehlerfortpflanzung erhält man dann den Fehler

$$\Delta K = \frac{\Delta\eta}{|\rho_K - \rho_{\mathrm{Fl}}|\,t} + \frac{\eta}{|\rho_K - \rho_{\mathrm{Fl}}|\,t}\left[\frac{\Delta\rho_K}{|\rho_K - \rho_{\mathrm{Fl}}|} + \frac{\Delta t}{t}\right].$$

$$\Rightarrow \quad K = (10{,}28 \pm 0{,}44)\,\frac{\mathrm{\mu Pa\,cm^3}}{\mathrm{g}}$$

4.2 Temperaturabhängigkeit der Viskosität η von destilliertem Wasser

Da nun $K_{\text{groß}}$ bekannt ist, kann die dynamische Viskosität $\eta(T)$ für verschiedene Temperaturen T mit Messung der Fallzeit t bestimmt werden. Durch eine lineare Regression der Werte $\ln\eta(T)$ und $1/T$ lassen sich die Konstanten A und B aus Gleichung (3) bestimmen. Zu jeder Temperatur werden zwei Messwerte aufgenommen. Die folgende Tabelle zeigt die Messwerte

Tabelle 3: Mittelwerte der Fallzeit $\bar{t}$ der großen Kugel in Abhängigkeit der Temperatur T

T[°C]	t[s]	T[°C]	t[s]
27	82.58	42	61.73
27	82.43	42	61.80
30	79.09	45	58.40
30	79.23	45	58.33
33	73.46	48	55.40
33	73.52	48	54.32
36	69.81	51	52.80
36	69.61	51	53.03
39	64.86	54	50.78
39	65.16	54	50.35

Aus jedem Wert kann nun mit Gleichung (3) die Viskosität $\eta(T)$ bestimmt werden. Die oben beschriebene lineare Regression durch numpy liefert dann

$$\begin{aligned} A &= (2{,}26 \pm 0{,}17)\,\mathrm{\mu Pa\,s} \\ B &= (1841 \pm 24)\,\mathrm{K}. \end{aligned}$$

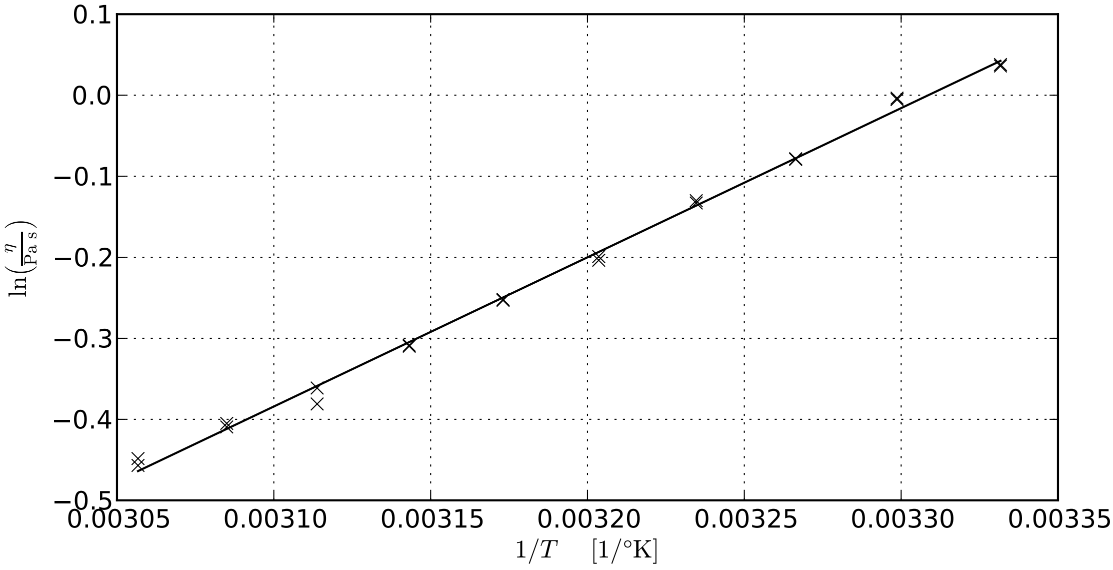

Abbildung 2: Werte und Ausgleichsgerade der linearen Regression für $\ln \eta$ und $1/T$

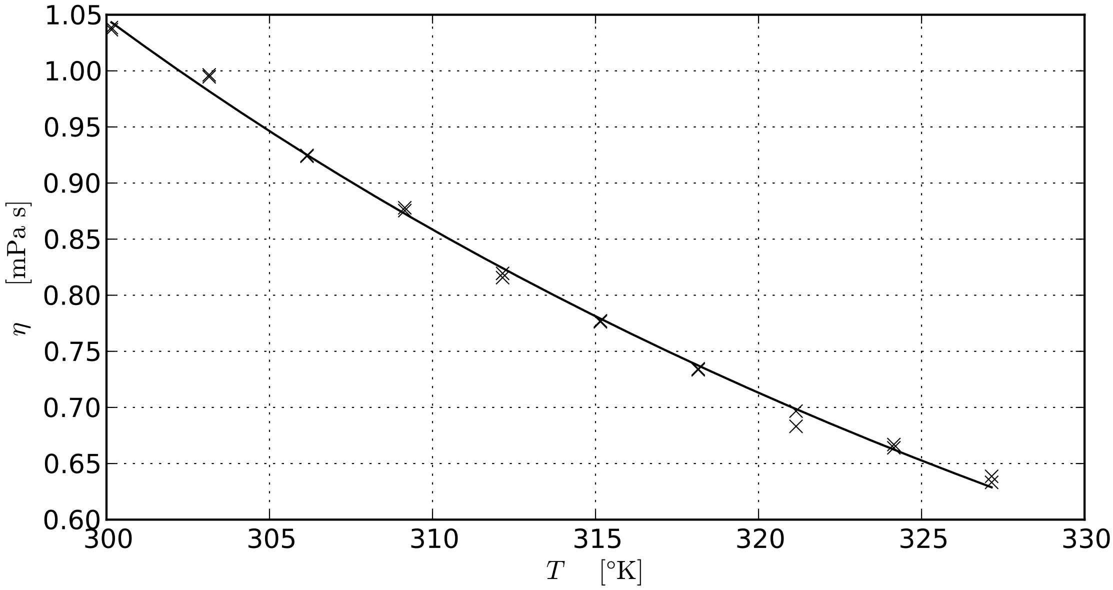

Abbildung 3: Werte und Theoriekurve für $\eta(T)$ und T

4.3 Überprüfung auf laminare Strömung

Schließlich wird überprüft, ob die vorliegende Strömung laminar ist – ob also keine Turbulenzen im Wasser auftreten. Dazu muss die Reynoldszahl Re unter $Re_{\mathrm{krit}} = 1000$ liegen [3]. Der Wert berechnet sich nach

$$Re = \frac{\rho_{\mathrm{Fl}} v d_{\mathrm{B}}}{\eta},$$

wobei v die charakteristische Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit gegenüber dem Körper und d die Bezugslänge bezeichnet.
Es wird der maximale Wert Re_{max} ermittelt, der in diesem Versuch erreicht wird. Mit einer Gefäßlänge von $x = 10\,\mathrm{cm}$ erhält man die Geschwindigkeit v_{max}, für die die Reynoldszahl maximal wird. Außerdem wählt man aus den Messwerten die Viskosität η_{max}, für welche dies ebenfalls gilt. Die Bezugslänge d_{B} entspricht hierbei dem Durchmesser der Kugel ($d_{\mathrm{B}} = d$). Gauß'sche Fehlerfortpflanzung liefert

$$\begin{aligned}
\Delta Re &= \frac{\rho_{\mathrm{Fl}}}{\eta}\left(d\Delta v + v\Delta d + \frac{vd}{\eta}\Delta\eta\right), \\
\Delta v &= \frac{x}{t^2}\Delta t, \\
\Delta\eta &= |\rho_{\mathrm{K}} - \rho_{\mathrm{Fl}}|\, t \cdot \Delta K + K\left(t \cdot \Delta\rho_K + |\rho_K - \rho_{\mathrm{Fl}}| \cdot \Delta t\right).
\end{aligned}$$

Für Δt ist der mittlere Fehler

$$\Delta t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{t} - t_i\right)^2}{n^2 - n}}.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
v_{\mathrm{max}} &= \frac{10\,\mathrm{cm}}{50{,}565\,\mathrm{s}} = (0{,}1980 \pm 0{,}0004)\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}, \\
\eta_{\mathrm{max}} &= (0{,}635 \pm 0{,}053)\,\mathrm{mPa\,s}, \\
d &= (1{,}582 \pm 0{,}005)\,\mathrm{cm} \\
\Rightarrow \quad Re &= 49{,}23 \pm 4{,}13 < Re_{\mathrm{krit}}.
\end{aligned}$$

Somit liegt hier eine laminare Strömung vor.

5 Diskussion

Dieser Versuch stellt eine Möglichkeit zur Bestimmung der Viskosität von Wasser vor. Alle damit ermittelten Werte liegen weit über den Literaturwerten [2]. Bei $T = 20\,°\mathrm{C}$ lag die Abweichung bei $19\,\%$. Mit steigender Temperatur vergrößerte sich der Unterschied sogar noch und stieg bei $T = 54\,°\mathrm{C}$ auf etwa $22\,\%$ an. Diese Unterschiede lassen sich nur duch systematische Fehler erklären. Die Messung liefert also insgesamt eher schlechte Werte.

Literatur

[1] Physikalisches Anfängerpraktikum der TU Dortmund: Versuch Nr. 107 - Das Kugelfallviskosimeter nach Höppler. Stand: November 2012.

[2] Universität Magdeburg, Institut für Strömungsmechanik und Thermodynamik: Stoffwerte von Wasser. www.uni-magdeburg.de/isut/LSS/Lehre/Arbeitsheft/IV.pdf. Stand: 2. Dezember 2012.

[3] Walcher, W.: Praktikum der Physik. Teubner Studienbücher, Teubner-Verlag. Stuttgart. Stand: 28. Dezember 2012.