

ührung37

V406 - Beugung am Spalt

Kevin Heinicke und Markus Stabrin

27. Oktober 2012

1 Einleitung

In diesem Versuch wird das Verhalten von monochromatischem Licht bei Beugung an dünnen Spalten untersucht.

Unter der Annahme, dass sich Licht wellenartig ausbreitet wird der Intensitätsverlauf des Beugungsmusters hinter einem Einfach-, sowie einem Doppelspalt untersucht. Aus den Messwerten lässt sich schließlich eine Aussage über die Spaltbreite machen.

2 Theorie

Im Folgenden werden verschiedenen Annahmen gemacht, die die Beschreibung des Lichtes vereinfachen. Dadurch können die Phänomene dieses Experimentes gut erklärt werden.

2.1 Das Huygenssche Prinzip

Um die Natur des Lichtes detailliert beschreiben zu können, muss man es quantenmechanisch betrachten. Für etliche Phänomene reicht es jedoch aus, über große Zahlen von Lichtquanten zu mitteln und diese durch das klassische Wellenmodell näherungsweise zu beschreiben. Diese Näherung wird hier gemacht.

Das Huygenssche Prinzip geht von der Welleneigenschaft des Lichtes aus. Es besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfläche zur gleichen Zeit Elementarwellen aussendet. Diese Kugelwellen interferieren miteinander und bilden eine neue Wellenfront, die die Einhüllende der Elementarwellen ist und wiederum neue Elementarwellen aussendet. Die Überlagerung aller Elementarwellen an einem Ort im Raum beschreibt dann den dortigen Schwingungszustand der Welle.

2.2 Fresnel- und Fraunhoferbeugung

Für die Beschreibung von Beugungserscheinungen gibt es grundsätzlich zwei verschiedene Versuchsanordnungen. Abb. 1 skizziert diese.

2.2.1 Fresnelbeugung

Die Fresnelsche Anordnung betrachtet eine Lichtquelle, die sich im endlichen Abstand vor dem Spalt befindet. Dadurch divergieren die Strahlenbündel und das Licht wird am Spalt in unterschiedlichen Winkeln gebeugt. Schlußfolgerungen auf den Versuchsaufbau durch Messung des Intensitätsverlaufes werden damit sehr schwierig.

2.2.2 Fraunhoferbeugung

Diese Anordnung geht von parallelen Lichtbündeln aus, die von einer unendlich weit entfernten Lichtquelle entsandt werden. Hierdurch werden Lichtbündel gleicher Phase im gleichen Winkel abelenkt. Die Beschreibung wird hier wesentlich einfacher, weil lediglich der Gangunterschied bei *einem* Winkel, betrachtet werden muss. Die unendlich entfernte Lichtquelle lässt sich gut durch einen Laser realisieren.

Aus diesem Grund und weil der Fraunhoferaufbau eine leichtere Beschreibung der Beugung liefert, wird der Versuch damit durchgeführt.

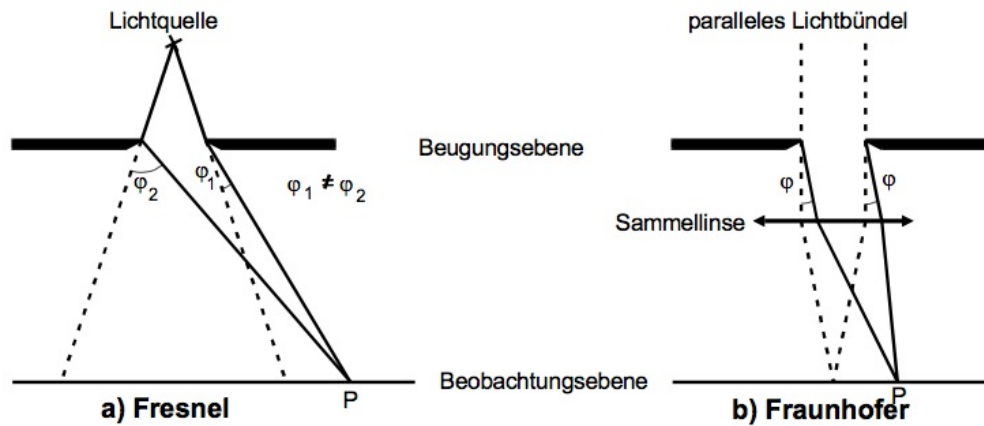


Abbildung 1: Unterschied zwischen Fresnelschem und Fraunhoferschem Versuchsaufbau

2.3 Beugungsmuster am Einzelspalt

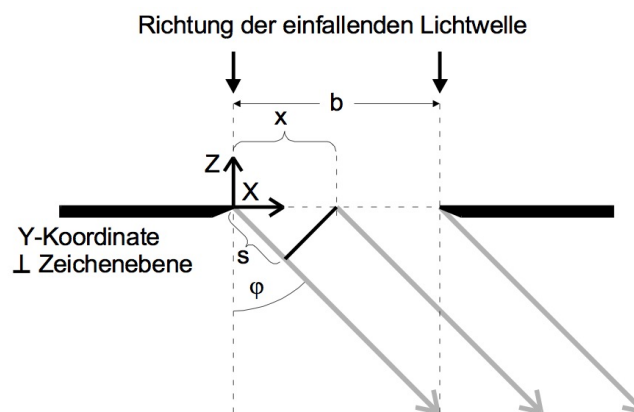


Abbildung 2: Einzelspalt

Betrachtet man nun den Spalt genauer, lässt sich die Phasendifferenz δ zweier Strahlenbündel einfach beschreiben. Die durch Elementarwellen bestimmten Bündel haben dann unter dem Winkel φ die Phasendifferenz δ

$$\delta = \frac{2\pi s}{\lambda} = \frac{2\pi x \sin(\varphi)}{\lambda} \quad (1)$$

Hierbei ist s gerade der Gangunterschied der Bündel und λ die Wellenlänge des einfallenden Lichtes.

Um die Amplitude $B(z, t, \varphi)$ zu bestimmen muss über alle Elementarwellen – also über die gesamte Spaltbreite b – integriert werden:

$$\begin{aligned}
 B(z, t, \varphi) &= A_0 \int_0^b \exp\left(i\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} + \delta\right) dx \\
 &= A_0 \exp\left(i\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) \int_0^b \exp\left(\frac{2\pi i x \sin \varphi}{\lambda}\right) dx \\
 \Rightarrow B(z, t, \varphi) &= A_0 \exp\left[i\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right)\right] \exp\left[i\left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}\right)\right] \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{\lambda}{\pi \sin \varphi} \sin\left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}\right)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Dies beschreibt die Beugung an einem Parallelschlitt. Die ersten beiden exponentiellen Anteile aus Gleichung 2 beschreiben die Amplitude in Abhängigkeit der Zeit t und des Ortes z (senkrecht auf der Schirmfläche).

Die einfallenden Lichtbündel werden über lange Zeit gemessen. Wegen der hohen Frequenz ω des Lichtes können wir nur die über einige Zeit gemittelte Intensität I messen. Der Anteil der Zeitabhängigkeit fällt also weg.

Zudem bewegen wir uns lediglich entlang der Schirmfläche – also in x -Richtung –, wodurch auch der zweite, z -abhängige Term nicht betrachtet werden muss. Dann gilt:

$$I(\varphi) \propto B^2(\varphi)$$

Mit einer Abkürzung lässt sich der Zusammenhang übersichtlich darstellen:

$$\begin{aligned}
 \eta(\varphi) &:= \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \\
 \Rightarrow B(\varphi) &= A_0 b \frac{\sin \eta}{\eta}
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\Rightarrow I(\varphi) \propto A_0^2 b^2 \left(\frac{\sin \eta}{\eta}\right)^2 \tag{4}$$

Man erkennt, dass die Höhe der Maxima näherungsweise mit dem Quadrat des Winkels abnimmt. Ausserdem entsteht ein Hauptmaximum bei $\varphi = 0$. Symmetrisch auf beiden Seiten entstehen etliche Nebenmaxima. Ein Minimum liegt vor, wenn $I(\varphi) = 0$ ist. Das gilt für

$$\sin \varphi_n = \pm n \frac{\lambda}{b} \quad , \quad n = (1, 2, \dots) \tag{5}$$

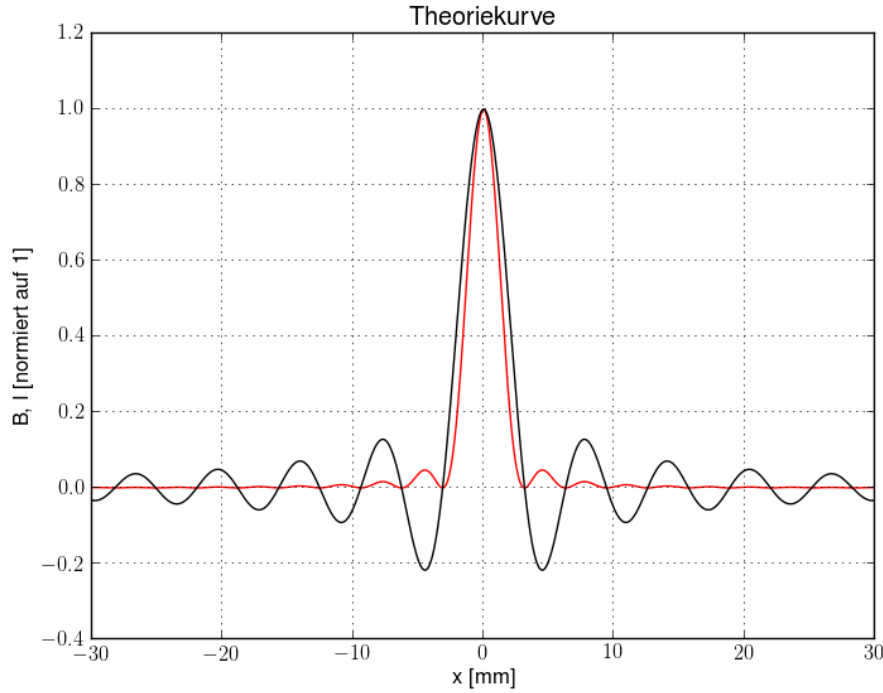


Abbildung 3: Theoretischer Intensitäts- und Amplitudenverlauf

2.4 Fourier-Transformation

Die Amplitudenverteilung lässt sich bei diesem Aufbau auch durch eine Fourier-Transformation der einzelnen Amplitudenverteilungen der einfallenden Wellen beschreiben. Transformiert man die Funktion $f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} A_0 & 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6)$$

erhält man für die Fourier-Transformation

$$g(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\xi} dx = \frac{A_0}{i\xi} (-1 + e^{i\xi b}) \quad (7)$$

unter Anwendung der Eulerschen Formel und mit

$$g(\xi) = \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda} \quad (8)$$

stimmen 7 und 3 überein. Das Huygensche Prinzip wird hierdurch also mathematisch formuliert. Das Integral beschreibt dabei die Summation über alle Elementarwellen. Die Aperturfunktion $f(x)$ kann zudem hierbei einfach um eine Variable y erweitert werden,

was die Beschreibung der Beugung an zweidimensionalen Objekten ermöglicht. Für die Auswertung dieses Experimentes ist besonders wichtig, dass sich die Fourier-Transformation umkehren lässt. Wir können somit aus den Messwerten der Intensität $I(\varphi)$, die proportional zu $B^2(\varphi)$ ist, auf die Gestalt der Aperturfunktion $f(x)$ – also auf unseren Spalt – schließen.

2.5 Beugungsmuster am Doppelspalt

Der Doppelspalt lässt sich als Überlagerung zweier Einzelspalte im Abstand s beschreiben. Hieraus bekommt man zusätzlich zur Abhängigkeit 4 einen Cosinus-Anteil, der den Gangunterschied durch den Spaltabstand berücksichtigt:

$$I(\varphi) \propto B(\varphi) = 4 \cos^2 \left(\frac{\pi s \sin \varphi}{\lambda} \right) \left(\frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right) \quad (9)$$

3 Aufbau und Durchführung

Für den Versuch stand ein He-Ne-Laser, ein größenverstellbarer Einfachspalt, ein größenverstellbarer Doppelspalt, ein lichtempfindlicher Detektor auf einer mechanischen Schiene sowie ein Amperemeter zur Verfügung.

3.1 Messaufgaben

1. Punktweises Ausmessen der Beugungsfigur des Einfachspalts (50 Messpunkte). Anschließendes bestimmen der Spaltbreite b und ausmessen der Spaltbreite b mit dem Mikroskop.
2. Wie 1 aber mit variablem Einfachspalt und ohne Mikroskop.
3. Wie 1 aber mit festem Doppelspalt und anschließendem Vergleich mit der theoretischen Verteilung des Einfachspaltes.

3.2 Durchführung

3.2.1 Messungen

Der Laser beleuchtet mit einer Wellenlänge von $\lambda = 633 \text{ nm}$ wie in 4 beschrieben einen ca. $20\text{--}200 \mu\text{m}$ breiten Parallelschlitz. Ein lichtempfindlicher Detektor befindet sich in etwa $100\text{--}120 \text{ cm}$ Entfernung vom Schlitz, welcher senkrecht zur optischen Achse verstellbar ist.

Anfangs muss die Apparatur justiert werden. Dafür wird der Laser fixiert und die Höhe des Detektors in Mittelstellung so ausgerichtet, dass der Laserstrahl genau auf den Sensor trifft. Anschließend wird der für die Messung benötigte Schlitz in die dafür vorgesehene Vorrichtung gesteckt und so daran gedreht bis das Hauptmaximum mittig vom Sensor

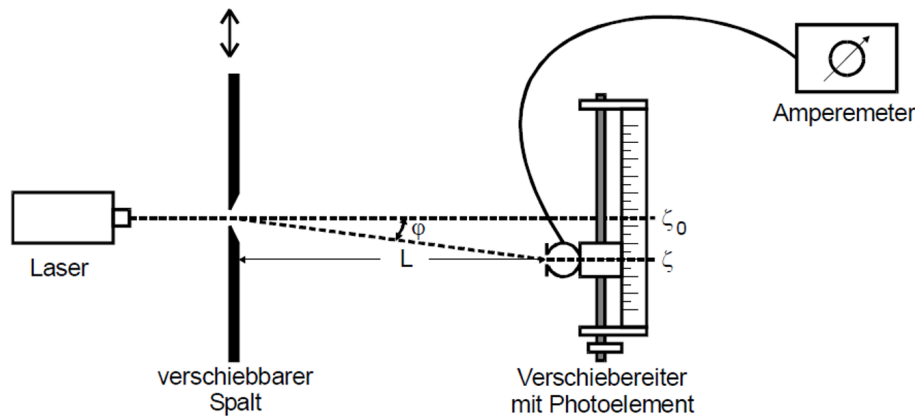


Abbildung 4: Abb.?

erfasst wird und die n-ten Nebenmaxima links und rechts des Hauptmaximas in etwa die gleiche Intensität haben.

Nun kann die Intensität der Beugungsfigur abhängig von der Detektorstellung gemessen werden. Dabei wird über einen Verschiebeweg von 50 mm die Intensität punktweise gemessen. Die genaue Position kann an der Skala der Schiene abgelesen werden. Ein Strich entspricht einem cm, genauso wie eine Trommelumdrehung. Auf der Trommel kommt eine Skala hinzu, welche in μm ablesbar ist.

Aus der Position des Detektors lässt sich der Beugungswinkel φ aus der Detektorstellung ζ bestimmen. Dies ist notwendig um die aufgenommene Intensitätskurve $I(\zeta)$ mit der dem nach ?????? berechneten Verlauf $I(\varphi)$ vergleichen zu können.

Es gilt:

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{\zeta - \zeta_0}{L} \quad (10)$$

Dabei ist ζ_0 die Detektorstellung für den ungebeugten Strahl und L der Abstand des Spalts zur Detektoblende.

Für den Doppelspalt wird genauso vorgegangen.

Zu beachten ist, dass auch bei abgeschaltetem Laser bereits ein sogenannter Dunkelstrom I_{du} fließt, welcher daher bei abgedeckter Detektorblende gemessen werden muss.

3.2.2 Messung des Abstands per Mikroskop

Zunächst muss das Mikroskop geeicht werden, damit die Breite b des Spalts ausgemessen werden kann. Dies geschieht mithilfe eines Objektmikrometers. Dies ist eine Glasplatte mit eingetätzter Mikrometerskala. In der Brennebene des Okulars liegt eine Skala mit willkürlicher Teilung.

Nach der Fokussierung auf die Skala des Objektmikrometers können die Skalen verglichen werden und so die Teilung in μm ausgedrückt werden.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung des Dunkelstroms

Um die Messwerte mit der Theorie vergleichen zu können muss zuerst der Dunkelstrom I_{du} gemessen werden.

Dazu wurde unter Versuchsbedingungen, jedoch mit ausgeschaltetem Laser, eine Messung durchgeführt.

Für den Dunkelstrom ergab sich:

$$I_{\text{du}} = 0,13 \text{ nA} \quad (11)$$

Die Aufgetragenen Messwerte in den Tabellen sind noch nicht um diesen Wert reduziert.

4.2 Bestimmung der Spaltbreite eines festen Einfachspalts

Im folgenden wird die Spaltbreite eines Einfachspalts auf zwei verschiedene Weisen gemessen. Einmal mithilfe des Beugungsmusters und einmal mit Hilfe eines Mikroskops.

4.2.1 Bestimmung mit Hilfe des Beugungsmusters

Wie die Spaltbreite bestimmt wird, wird bereits in 3.2.1 erläutert. Die bereinigten Messwerte finden sich in Tabelle 1 wieder.

Die gemessene Intensität wurde in Grafik ?? gegen die Detektorposition aufgetragen und eine Theoriekurve nach Gleichung 4 eingefügt um die Kurven vergleichen zu können.

Zur Anpassung wurde PyPlot benutzt.

Es ergibt sich mithilfe der Formel:

$$f(x) = a^2 b^2 \left(\frac{\lambda}{\pi b \sin(\frac{x-x_0}{d})} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi b \sin(\frac{x-x_0}{d})}{\lambda} \right) \quad (12)$$

für die Werte ergaben sich:

blablabla auswertung

4.2.2 Bestimmung mit Hilfe des Mikroskops

Das Ausmessen mithilfe des Mikroskops wurde bereits in 3.2.2 erklärt. Es wurde auf das Objektmikrometer fokussiert. Nun wurde der Spalt unter das Objektiv gelegt und mithilfe eines verschiebbaren Teilstrichs die Spaltkanten überdeckt. Diese Fixierung wurde dann auf die Mikrometerskala des Objektmikrometers gelegt und ausgemessen. Aufgrund von Unschärfen wurde ein Fehler von $\sigma_0 = 10 \mu\text{m}$ angenommen.

Es ergab sich für die Spaltbreite b:

$$b = 70 \mu\text{m} \quad (13)$$

Tabelle 1: Intensität des festen Einfachspalts abhängig von der Detektorstellung x

x[mm]	I[nA]	x[mm]	I[nA]	x[mm]	I[nA]
0	1.3	17	12	34	2.75
1	1.3	18	12.5	35	3.4
2	1.5	19	16	36	4
3	1.8	20	24	37	3.6
4	2.2	21	32	38	2.7
5	2.3	22	46	39	1.55
6	2.1	23	58	40	0.84
7	1.5	24	68	41	0.58
8	0.9	25	72	42	0.82
9	0.8	26	68	43	1.1
10	1.6	27	58	44	1.45
11	3.4	28	44	45	1.5
12	6.4	29	28	46	1.26
13	9.6	30	18	47	0.9
14	11	31	9.2	48	0.66
15	12.5	32	3.8	49	0.42
16	12.5	33	2.4	50	0.34

Damit ergibt sich für die gemessene Spaltbreite $b_{\text{mikro}} = (70 \pm 10) \mu\text{m}$. Es besteht ein großer Unterschied zwischen der gemessenen und der angegebenen Spaltbreite von $b = 80 \mu\text{m}$. Auf Fehlerquellen wird in der Diskussion eingegangen.

4.3 Bestimmung der Spaltbreite eines variablen Einfachspalts

Nun sollte die Breite b eines variablen Einfachspalts gemessen werden. Das Messverfahren ist dasselbe wie zuvor.

Die dazugehörigen Intensitätswerte abhängig von der Detektorposition finden sich in Tabelle 2. Weiter wurde eine Theoriekurve in die Grafik 5 eingügt, sodass ein Vergleich zwischen Theorie und Experiment möglich ist. Dafür wurde Gnuplot verwendet.

Es ergab sich:

$$b = (7,46 \pm 1,70) \mu\text{m} \quad (14)$$

Tabelle 2: Intensität des festen Einfachspalts abhängig von der Detektorstellung x

x[mm]	I[nA]	x[mm]	I[nA]	x[mm]	I[nA]
0	2.5	17	15	34	4.8
1	2.1	18	13	35	3
2	2.1	19	12.5	36	1.85
3	2.5	20	23.5	37	1.55
4	2.9	21	50	38	2.1
5	2.85	22	98	39	2.85
6	2.5	23	135	40	3
7	2.75	24	165	41	2.8
8	4	25	155	42	1.95
9	6.2	26	125	43	1
10	8	27	92	44	0.6
11	7.9	28	50	45	0.51
12	6	29	25.5	46	0.72
13	4	30	11	47	0.86
14	4.8	31	7.2	48	0.86
15	8.5	32	6.4	49	0.68
16	13	33	6	50	0.45

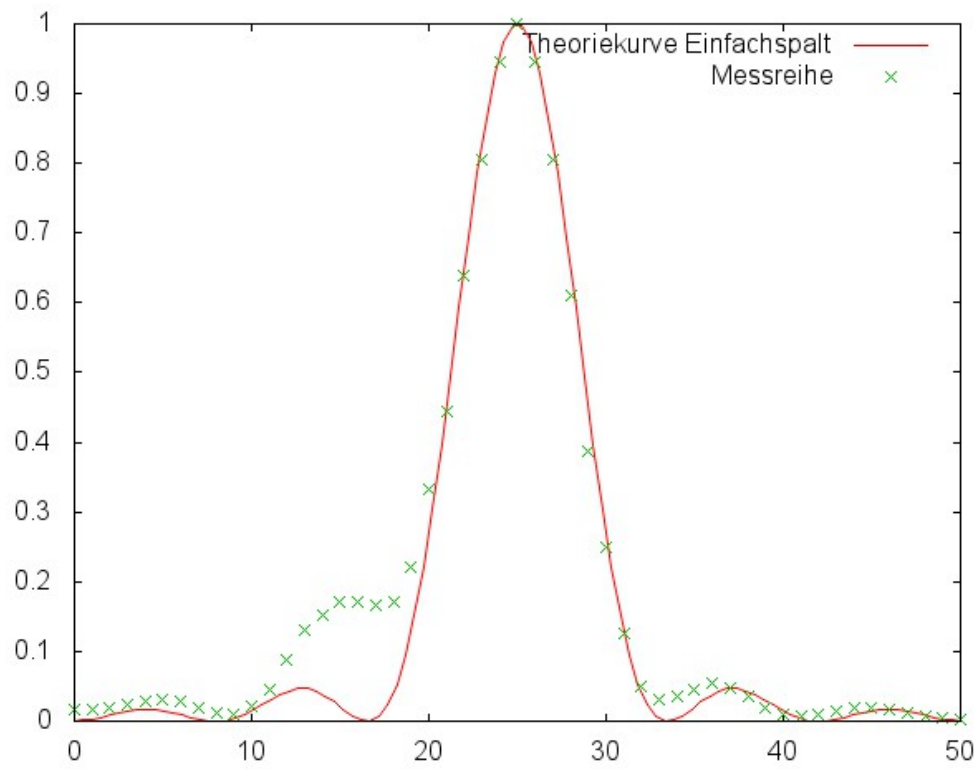


Abbildung 5: Graphische Darstellung der des festen Einfachspalt