

TU Dortmund

# V101 - Das Trägheitsmoment

Korrektur

Markus Stabrin

markus.stabrin@tu-dortmund.de

Kevin Heinicke

kevin.heinicke@tu-dortmund.de

Versuchsdatum: 23. April 2013

Abgabedatum: 14. Mai 2013

# 1 Einleitung

Bei diesem Versuch soll das Trägheitsmoment verschiedener Körper gemessen werden. Dabei wird der Steiner'sche Satz verifiziert.

## 2 Theorie

Rotationsbewegungen werden durch das Drehmoment  $M$ , die Winkelbeschleunigung  $\dot{\omega}$  und das Trägheitsmoment  $I$  charakterisiert. Das Gesamtträgheitsmoment einer punktförmigen Masse  $m$  im Abstand  $r$  von der Drehachse ist gegeben durch  $I = mr^2$ . Für einen ausgedehnten Körper gilt dementsprechend:

$$I = \sum_i r_i^2 \cdot m_i \quad . \quad (1)$$

Bei infinitesimalen Massen ergibt sich für das Gesamtträgheitsmoment:

$$I = \int r^2 dm \quad . \quad (2)$$

Fällt die Drehachse nicht mit einer Hauptträgheitsachse zusammen, sondern ist um den Abstand  $a$  verschoben, so gilt der Steiner'sche Satz:

$$I = I_s + m \cdot a^2 \quad . \quad (3)$$

$I_s$  stellt dabei das Trägheitsmoment bzgl. einer Drehachse, welche durch den Schwerpunkt des Körpers geht würde, während  $m$  der Gesamtmasse des Körpers entspricht.

Wirkt bei einem drehbaren Körper die Kraft  $\vec{F}$  im Abstand  $\vec{r}$  von der Drehachse, so wirkt auf den Körper das Drehmoment  $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$ .

Wird ein Körper auf eine Drillachse gespannt und aus seiner Ruhelage um den Winkel  $\varphi$  ausgelenkt, so wirkt auf ihn ein rücktreibendes Drehmoment durch eine Feder.

Beim Loslassen führt der ausgelenkte Körper eine harmonische Schwingung aus, wobei für die Schwingungsdauer  $T$  gilt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad . \quad (4)$$

Dabei ist die Winkelrichtgröße  $D$  mit dem Drehmoment über Gleichung (5) verbunden:

$$M = D\varphi \quad . \quad (5)$$

Bei Drehschwingungen verhält sich das System nur für kleine Winkel  $\varphi$  harmonisch. Die Winkelrichtgröße  $D$  kann statisch aus (5) durch Messen der Auslenkung  $\varphi$  als Funktion der Kraft  $F$  bestimmt werden oder dynamisch aus (4) durch Messung der Schwingungsdauer bei bekanntem Trägheitsmoment  $I$  des Körpers.

## 3 Versuchsaufbau und Durchführung

### 3.1 Versuchsaufbau

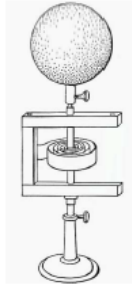


Abbildung 1: Drillachse mit eingespannter Kugel. [1]

Bei dem Versuch zur Bestimmung des Trägheitsmoments  $I$  von verschiedenen Körpern wird eine Drillachse verwendet 1. Diese besteht aus einer zweifach im Raum drehbar gelagerten Achse, welche über eine Spiralfeder mit dem Rahmen verbunden ist. Auf diese Achse können die verschiedenen Körper befestigt werden.

### 3.2 Durchführung

#### 3.2.1 Statische Methode

Ein Metallstab wird symmetrisch auf die Drillachse geschraubt. Mithilfe einer Federwaage wird die rücktreibende Kraft gemessen, die bei dem Auslenkwinkel  $\varphi$  wirkt. Dabei muss die Federwaage senkrecht zum Radius der vom Körper beschriebenen Kreisbahn gehalten werden.

Nun kann die Winkelrichtgröße  $D$  aus der Federkraft  $F$ , dem Abstand  $r$  zur Drehachse und dem Drehwinkel  $\varphi$  bestimmt werden:

$$D = \frac{F \cdot r}{\varphi} \quad . \quad (6)$$

Diese Messung wird für 10 verschiedene Auslenkwinkel durchgeführt.

#### 3.2.2 Dynamische Methode

Eine Metallstange mit Gewichten an den Enden wird symmetrisch auf die Drillachse geschraubt. Das System wird in Schwingung versetzt und die Schwingungsdauer  $T$  gemessen. Diese Messung wird für 10 verschiedene Abstände der Massen zur Drehachse wiederholt.

### 3.2.3 Messung des Trägheitsmoments eines Körpers

Auf die Drillachse wird ein Körper geschraubt. Die Schwingungsdauer  $T$  wird gemessen. Diese Messung wird 5 mal wiederholt für zwei verschiedene Körper.

### 3.2.4 Messung des Trägheitsmoments einer Puppe

Eine Holzpuppe wird auf die Drillachse geschraubt. Es wird 5 mal die Schwingungsdauer  $T$  gemessen. Dies wird für insgesamt zwei Körperhaltungen wiederholt. Die Puppe wird Ausgemessen, damit man eine gute Näherung des Körpers als Zusammensetzung mehrerer Zylinder erhält.

## 3.3 Bestimmung des Trägheitsmoments eines Menschen

Der Körper eines Menschen wird vermessen um aus Zylindern bestehend genähert werden zu können. Daraus wird das Trägheitsmoment eines Menschen abgeschätzt.

## 4 Auswertung

Im Folgenden wird über alle Messungen ein Mittelwert  $\bar{T}$  mit Standardabweichung  $\sigma$  gebildet. Bei einer Anzahl von  $n$  Stichproben gilt

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$$
$$\Delta T = \left( \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

### 4.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße $D$

Zunächst muss die Winkelrichtgröße  $D$  aus Gleichung (??) bestimmt werden. Tabelle 1 zeigt die Messwerte. Die Winkel wurden in Radianten umgerechnet. Für die Winkelrichtgröße erhält man damit

$$D = (19,9 \pm 4,3) \frac{\text{mN m}}{\text{rad}}.$$

Berechnet man mit diesem Wert jedoch das Eigenträgheitsmoment der Apparatur, ergeben sich negative Werte. Ein besserer Wert ergibt sich durch eine lineare Ausgleichsrechnung, die im folgenden Kapitel 4.2 durchgeführt wird.

### 4.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes $I_D$ der Drehachse

Zur Messung des Eigenträgheitsmomentes  $I_D$  der Drehachse werden zwei Gewichte der Masse  $m$  im gleichen Abstand  $a$  zur Drehachse an einem Metallstab der Masse  $M$  und der Länge  $l$  angebracht. Das Gesamtträgheitsmoment des Systems wird dann durch

Tabelle 1: Messwerte für die Bestimmung der Winkelrichtgröße  $D$ 

$r[\text{cm}]$	$\varphi[^\circ]$	$F[\text{mN}]$	$D$ $\frac{\text{mN m}}{\text{rad}}$	$r[\text{cm}]$	$\varphi[^\circ]$	$F[\text{mN}]$	$D$ $\frac{\text{mN m}}{\text{rad}}$
20	10	10	11,46	20	60	33	20,83
20	20	16	14,32	20	71	35	23,25
20	30	20	17,19	20	80	38	24,12
20	41	23	20,43	20	90	44	23,44
20	50	27	21,22	20	101	50	23,15

$$I = I_D + I_{\text{Stange}} + 2I_m \quad (7)$$

beschrieben, wobei das Trägheitsmoment der Stange durch  $I_{\text{Stange}}$  gegeben ist und  $I_m$  das Trägheitsmoment eines Gewichtes unter Berücksichtigung des Steinerschen Satzes bezeichnen. Die Stange wird dabei als langer Stab betrachtet. Es gilt mit der Masse  $M$  und Länge  $l$  der Stange, sowie dem Abstand  $a$  zwischen Drehachse und Mittelpunkt der Zusatzgewichte und deren Radius  $r$  und Höhe  $h$ :

$$I_{\text{Stange}} = \frac{1}{12} M l, \\ I_m = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m h^2 + m a^2.$$

Das Trägheitsmoment der Zusatzgewichte besteht dabei aus einem, über die Messung konstanten Anteil  $I_{m,c}$  und dem Anteil durch den Steinerschen Satz  $m a^2$ . Mit den Messwerten

$$\begin{array}{ll} M &= 96,28 \text{ g} \\ l &= 60 \text{ cm} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} m &= 222,70 \text{ g} \\ h &= 3,00 \text{ cm} \\ r &= 2,75 \text{ cm} \end{array}$$

ergeben sich die Werte von  $I_{\text{Stange}}$  und  $I_{m,c}$  zu

$$I_{\text{Stange}} = 2,89 \text{ g m}^2, \quad I_{m,c} = 0,058 \text{ g m}^2.$$

Die Gleichungen (??) und (7) liefern dann den Zusammenhang

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} \left( I_D + I_{\text{Stange}} + 2 \left( I_{m,c} + m a^2 \right) \right).$$

mit

$$\begin{aligned} B &= I_D + I_{\text{Stange}} \Leftrightarrow I_D = B - I_{\text{Stange}} \\ \Rightarrow T^2 &= \frac{4\pi^2}{D} \left( B + 2 \left( I_{m,c} + m a^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Das Eigenträgheitsmoment  $I_D$  kann also durch Messung von  $T$  und  $a$  mit einer Ausgleichsrechnung für den Parameter  $B$  bestimmt werden. Zudem lässt sich mit dieser Rechnung  $D$  bestimmen. Wie in Kapitel 4.1 erwähnt liefert diese Rechnung einen besseren Wert für  $D$ .

Die Ausgleichsrechnung durch *python* liefert

$$\begin{aligned} B &= (5,33 \pm 0,22) \text{ g m}^2 \\ \Rightarrow I_D &= (2,44 \pm 0,22) \text{ g m}^2, \end{aligned}$$

sowie

$$D = (57,9 \pm 0,3) \frac{\text{mN m}}{\text{rad}}.$$

Die zur Berechnung genutzten Daten werden in Tabelle 2 aufgeführt. Da das Eigenträgheitsmoment jedoch größer ist als die Trägheitsmomente der untersuchten Objekte, würden sich negative Trägheitsmomente ergeben. Das ergibt physikalisch keinen Sinn, weshalb  $I_D$  in den späteren Rechnungen nicht abgezogen wird.

Tabelle 2: Messwerte für die Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes  $I_D$

$a[\text{cm}]$	$\overline{T}[\text{s}]$	$a[\text{cm}]$	$\overline{T}[\text{s}]$
26	6,72	16	4,37
26	6,71	16	4,39
24	6,20	14	3,92
24	6,17	14	3,91
22	5,73	12	3,51
22	5,74	12	3,51
20	5,26	10	3,11
20	5,29	10	3,12
18	4,90	08	2,77
18	4,88	08	2,75

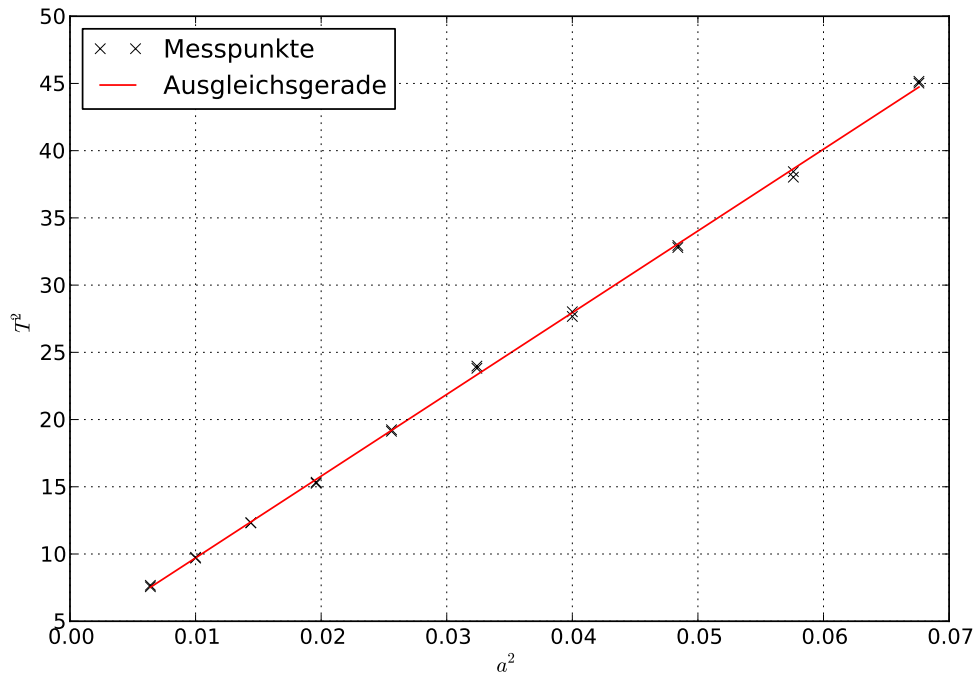


Abbildung 2: Ausgleichsgerade zur Bestimmung von  $I_D$  und  $D$

### 4.3 Bestimmung der Trägheitsmomente $I_k$ verschiedener Körper

Aus der Periodendauer wird gemäß Gleichung (??) das Trägheitsmoment berechnet. Es gilt

$$I = \frac{T^2 D}{4\pi^2},$$

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{T D}{2\pi^2} \Delta T\right)^2 + \left(\frac{T^2}{4\pi^2} \Delta D\right)^2}.$$

Die experimentellen Daten werden zudem mit den theoretischen Werten verglichen, um ihre Aussagekraft zu beurteilen. Hierzu wird jeweils der relative Unterschied  $\delta_k$  zwischen dem gemessenen Wert  $I_{\text{exp}}$  und dem theoretisch errechneten Wert  $I_t$  in Prozent angegeben.

### 4.3.1 Die große Holzkugel

Das Trägheitsmoment  $I_{1,t}$  der Holzkugel berechnet sich nach

$$I_{1,t} = \frac{2}{5}mr^2,$$

$$\Delta I_{1,t} = \frac{2}{5}\sqrt{(r^2\Delta m)^2 + (2mr\Delta r)^2}.$$

Die folgenden Messwerte für die Masse  $m$  und den Radius  $r$  liefern

$$m = (1168,4 \pm 0,1) \text{ g},$$

$$r = (7,35 \pm 0,05) \text{ cm},$$

$$\Rightarrow I_{1,t} = (2,53 \pm 0,34) \text{ g m}^2.$$

Tabelle 4 beinhaltet die Messdaten zur experimentellen Bestimmung:

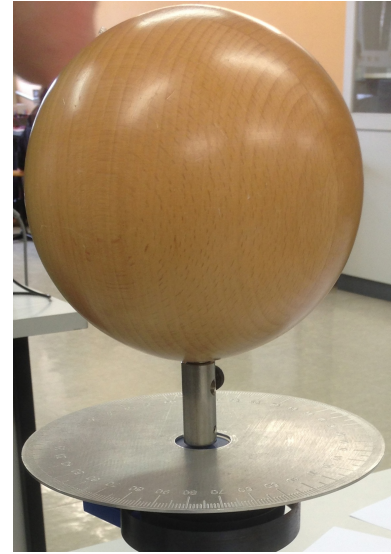


Abbildung 3: Kugelkörper

Tabelle 3: Messwerte für die Bestimmung des Trägheitsmomentes  $I_{1,\text{exp}}$  der Holzkugel

$\overline{T}[\text{s}]$	$\overline{T}[\text{s}]$	$\overline{T}[\text{s}]$
1,82	1,84	1,84
1,82	1,87	1,82
1,82	1,83	1,86
1,85	-	-

Die Messwerte aus Tabelle 4 liefern mit Gleichung (??)

$$I_{1,\text{exp}} = (4,96 \pm 0,02) \text{ g m}^2,$$

$$\delta_1 = 96 \%.$$



### 4.3.2 Der Messingzylinder

Das Trägheitsmoment  $I_{2,t}$  des Zylinders berechnet sich unabhängig von der Höhe nach Gleichung (8).

$$\begin{aligned} I_{2,t} &= \frac{1}{2}mr^2, \\ \Delta I_{2,t} &= \frac{1}{2}\sqrt{(r^2\Delta m)^2 + (2mr\Delta r)^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Mit den gemessenen Werten für die Masse  $m$  und den Radius  $r$  folgt

$$\begin{aligned} m &= (1436,0 \pm 0,1) \text{ g}, \\ r &= (4,25 \pm 0,05) \text{ cm}, \\ \Rightarrow I_{2,t} &= (1,30 \pm 0,03) \text{ g m}^2. \end{aligned}$$

Folgende Tabelle beinhaltet die Messdaten zur experimentellen Bestimmung:

Tabelle 4: Messwerte für die Bestimmung des Trägheitsmomentes  $I_{2,\text{exp}}$  des Messingzylinders

$\overline{T}[\text{s}]$	$\overline{T}[\text{s}]$	$\overline{T}[\text{s}]$
1,34	1,35	1,32
1,35	1,34	1,32
1,31	1,32	1,33
1,30	-	-

Die Messwerte liefern mit Gleichung (??)

$$\begin{aligned} I_{2,\text{exp}} &= (2,59 \pm 0,01) \text{ g m}^2, \\ \delta_2 &= 99\%. \end{aligned}$$

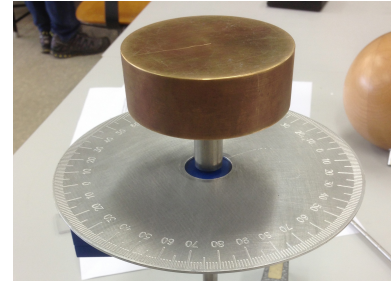


Abbildung 4: Messingzylinder

### 4.3.3 Puppe

Die Holzpuppe wird zur Berechnung des Trägheitsmomentes näherungsweise durch eine Anordnung von Zylindern  $Z_i$  beschrieben. Dabei werden Arme, Beine, Torus und Kopf jeweils als Zylinder betrachtet und mit Hilfe des Steinerschen Satzes zu einem Gesamtträgheitsmoment  $I$  zusammengesetzt. Der Index  $i$  ist stets nach den Körperteilen benannt.

Kopf und Torus werden durch die Symmetrieachse gedreht. Die Beine werden parallel zur Symmetrieachse gedreht und müssen daher mit dem Steinerschen Satz verschoben werden. Ebenso werden die Arme in der ersten Position der Puppe parallel und in der zweiten Position im rechten Winkel zur Symmetrieachse gedreht. Die Stellungen der Puppe sind in Abbildung 5 und 6 verdeutlicht.



Abbildung 5: Puppe in Stellung 1

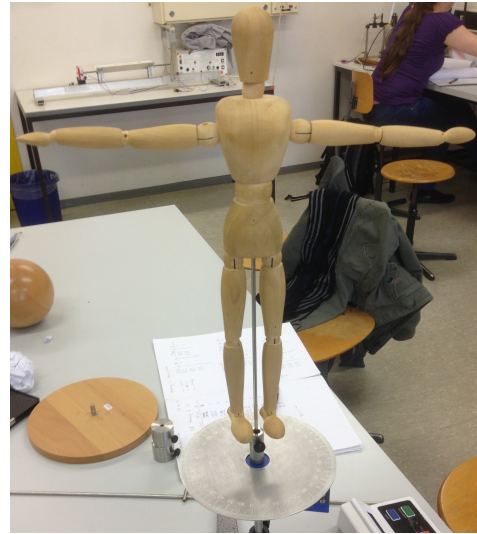


Abbildung 6: Puppe in Stellung 2

Die einzelnen Massen  $m_i$  werden dabei aus der Dichte  $\rho = M/V = 0,743 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  mit der Gesamtmasse  $M$  und dem Gesamtvolumen  $V$  bestimmt:

$$M = 340,75 \text{ g} \quad , \quad V = 458,8 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow \rho = 0,743 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Für  $I$  gilt damit

$$I = I_{\text{Kopf}} + I_{\text{Torus}} + 2I_{\text{Arm}} + 2I_{\text{Bein}} + 2m_{\text{Arm}}a_{\text{Arm}}^2 + 2m_{\text{Bein}}a_{\text{Bein}}^2 ,$$

$$\Delta I = \left[ (\Delta I_{\text{K}})^2 + (\Delta I_{\text{T}})^2 + (2\Delta I_{\text{A}})^2 + 2(\Delta I_{\text{B}})^2 + \right. \\ \left. + (2a_{\text{A}}^2 \Delta m_{\text{A}})^2 + (4a_{\text{A}}m_{\text{A}}\Delta a_{\text{A}})^2 + (2a_{\text{B}}^2 \Delta m_{\text{B}})^2 + (4a_{\text{B}}m_{\text{B}}\Delta a_{\text{B}})^2 \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} V_i &= \pi r_i^2 h_i, \\ \Delta V_i &= \pi \sqrt{(r_i h_i \Delta r_i)^2 + (r_i^2 \Delta h_i)^2} \end{aligned}$$

und  $I_i$  in Stellung 1 wie in Gleichung (8) beschrieben. In Stellung 2 gilt

$$\begin{aligned} I_{\text{Arm}} &= \frac{1}{4} m_{\text{Arm}} r_{\text{Arm}}^2 + \frac{1}{12} m_{\text{Arm}} h_{\text{Arm}}^2, \\ \Delta I_{\text{Arm}} &= \sqrt{\left(\frac{1}{4} r_{\text{A}}^2 + \frac{1}{12} h_{\text{A}}^2\right)^2 \Delta m_{\text{A}}^2 + \left(\frac{1}{2} m_{\text{A}} r_{\text{A}} \Delta r_{\text{A}}\right)^2 + \left(\frac{1}{6} m_{\text{A}} h_{\text{A}} \Delta h_{\text{A}}\right)^2} \end{aligned}$$

Mit  $a_{\text{Arm}} = r_{\text{Torus}} + r_{\text{Arm}}$  und  $a_{\text{Bein}} = (3,00 \pm 0,05) \text{ cm}$  folgt für Stellung 1

$$I_1 = (1,96 \pm 0,16) \text{ kg cm}^2.$$

Mit  $a_{\text{Arm}} = r_{\text{Torus}} + h_{\text{Arm}}/2$  folgt für Stellung 2

$$I_2 = (8,91 \pm 0,17) \text{ kg cm}^2.$$

Die Messdaten aus den Tabellen 6 und 7 liefern mit Gleichung (??) die Ergebnisse

$$\begin{aligned} I_1 &= (1,84 \pm 0,15) \text{ kg cm}^2, \\ I_2 &= (5,02 \pm 0,30) \text{ kg cm}^2, \\ \delta_1 &= 6,1 \%, \\ \delta_2 &= 43,7 \%. \end{aligned}$$

Tabelle 5: Durchmesser der zylinderförmigen Körperteile der Puppe

$d_{\text{Kopf}}[\text{mm}]$	$d_{\text{Torus}}[\text{mm}]$	$d_{\text{Arm}}[\text{mm}]$	$d_{\text{Bein}}[\text{mm}]$
32,0	48,0	21,0	25,0
29,0	50,0	18,0	26,0
19,0	48,0	12,0	24,0
18,0	40,0	17,0	23,0
32,0	32,0	16,0	20,0
26,0	33,0	10,0	15,0
29,0	42,0	20,0	19,0
32,0	51,0	15,0	21,0
27,0	56,0	16,0	20,0
26,0	51,0	19,0	17,0

Tabelle 6: Benötigte Eigenschaften der Körperteile

	$r[\text{mm}]$	$h[\text{mm}]$	$V[\text{cm}^3]$	$m[\text{g}]$	$I[\text{g cm}^2]$
Kopf	$13,5 \pm 2,5$	$65,0 \pm 0,5$	$37,2 \pm 6,9$	$27,6 \pm 1,0$	$25,2 \pm 9,3$
Torus	$22,6 \pm 4,0$	$133,0 \pm 0,5$	$213,4 \pm 37,8$	$171,8 \pm 1,0$	$438,8 \pm 155,3$
Arm 1	$8,2 \pm 1,7$	$170,0 \pm 0,5$	$35,9 \pm 7,4$	$26,7 \pm 1,0$	$9,0 \pm 3,7$
Arm 2	$8,2 \pm 1,7$	$170,0 \pm 0,5$	$35,9 \pm 7,4$	$26,7 \pm 1,0$	$646,5 \pm 24,6$
Bein	$10,5 \pm 1,8$	$197,0 \pm 0,5$	$68,2 \pm 11,7$	$50,7 \pm 1,0$	$27,9 \pm 9,6$
	$I_1 = (1,96 \pm 0,16) \text{ kg cm}^2$ , $I_2 = (8,91 \pm 0,17) \text{ kg cm}^2$				

Tabelle 7: Schwingungsdauern der Puppe

$\overline{T_1}[\text{s}]$	$\overline{T_1}[\text{s}]$	$\overline{T_2}[\text{s}]$	$\overline{T_2}[\text{s}]$
0,57	0,57	0,96	0,96
0,56	0,54	0,96	0,89
0,59	0,53	0,98	0,96
0,57	0,60	0,97	0,94
0,56	0,61	0,89	0,94

## 5 Diskussion

Es ist auffällig, dass die experimentellen Werte für die Holzkugel und den Zylinder etwa 100 % von den theoretischen Werten abweichen. Lediglich bei Stellung 1 der Puppe (siehe Abb. 5) weicht der experimentelle Wert nur etwa 6 % vom Theoriewert ab.

Der größte Fehler wird hier bei dem Dämpfungseffekt der Apparatur vermutet. Während der Messung fällt auf, dass die Schwingung bei mehr als 3 Perioden schon stark gedämpft wurde. Kürzere Schwingphasen konnten jedoch wegen der Reaktionszeit kaum gemessen werden. Weil die Puppe in Stellung 1 mit der höchsten Frequenz geschwungen ist, liegt hier möglicherweise der kleinste Fehler vor. Die Dämpfung schien bei langsameren Schwingungen einen größeren Effekt zu haben.

Eine weitere Fehlerquelle war die Bestimmung der Winkelrichtgröße  $D$  mit Hilfe eines Kraftmessers. Innere Reibungskräfte sorgten für sprunghafte Wertänderungen, was die Genauigkeit des Gerätes in Frage stellt.

Tabelle 8: Relative Unterschiede zwischen theoretisch und experimentell ermittelten Werten für das Trägheitsmoment  $I$

Körper	$\delta[\%]$
Holzkugel	96
Messingzylinder	99
Puppe 1	6
Puppe 2	24

## Literatur

- [1] Physikalisches Anfängerpraktikum der TU Dortmund: Versuch V101 - Das Trägheitsmoment. <http://129.217.224.2/HOME/PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Traegheit.pdf>. Stand: April 2013.