

TU Dortmund

V101 - Das Trägheitsmoment

Markus Stabrin
markus.stabrin@tu-dortmund.de

Kevin Heinicke
kevin.heinicke@tu-dortmund.de

Versuchsdatum: 23. April 2013

Abgabedatum: 30. April 2013

1 Einleitung

Bei diesem Versuch soll das Trägheitsmoment verschiedener Körper gemessen werden. Dabei wird der Steiner'sche Satz verifiziert.

2 Theorie

Rotationsbewegungen werden durch das Drehmoment M , die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ und das Trägheitsmoment I charakterisiert. Das Gesamtträgheitsmoment einer punktförmigen Masse m im Abstand r von der Drehachse ist gegeben durch $I = mr^2$. Für einen ausgedehnten Körper gilt dementsprechend:

$$I = \sum_i r_i^2 \cdot m_i \quad . \quad (1)$$

Bzw für infinitesimale Massen:

$$I = \int r^2 dm \quad . \quad (2)$$

Fällt die Drehachse nicht mit einer Hauptträgheitsachse zusammen, sondern ist um den Abstand a verschoben, so gilt der Steiner'sche Satz:

$$I = I_s + m \cdot a^2 \quad . \quad (3)$$

I_s stellt dabei das Trägheitsmoment durch den Schwerpunkt dar, während m der Gesamtmasse des Körpers entspricht.

Wirkt bei einem drehbaren Körper die Kraft \vec{F} im Abstand \vec{r} , so wirkt auf diesen das Drehmoment $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$.

Wird ein Körper wie hier aus seiner Ruhelage um den Winkel φ ausgelenkt, so wirkt auf ihn ein rücktreibendes Drehmoment durch eine Feder. Beim Loslassen führt der ausgelenkte Körper eine harmonische Schwingung aus, wobei für die Schwingungsdauer T gilt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad . \quad (4)$$

Dabei ist die Winkelrichtgröße D mit dem Drehmoment verbunden:

$$M = D\varphi \quad . \quad (5)$$

Bei Drehschwingungen verhält sich das System nur für kleine Winkel φ harmonisch. Die Winkelrichtgröße D kann statisch aus (5) durch Messen der Auslenkung φ als Funktion der Kraft F bestimmt werden, oder dynamisch durch Messung der Schwingungsdauer bei bekanntem Trägheitsmoment I . Eine Kombination beider Methoden ist auch eine gleichzeitige Bestimmung von D und I möglich.

3 Versuchsaufbau und Durchführung

3.1 Versuchsaufbau

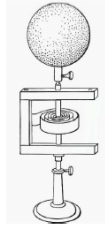


Abb. 2: Experimenteller Aufbau

Abbildung 1: Experimenteller Aufbau [1]

Für den Versuch wird ein Körper auf eine Drillachse geschraubt (Abb. 1). Bei bekannter Winkelrichtgröße D und Eigenträgheitsmoment I_D kann so das Trägheitsmoment aus der Schwingungsdauer T bestimmt werden.

3.2 Durchführung

3.2.1 Statische Methode

Ein Metallstab wird symmetrisch auf die Drillachse geschraubt. Mithilfe einer Federwaage wird die rücktreibende Kraft gemessen, die bei dem Auslenkwinkel φ wirkt. Dabei muss die Federwaage senkrecht zum Radius der vom Körper beschriebenen Kreisbahn gehalten werden.

Nun kann die Winkelrichtgröße D aus der Federkraft F , dem Abstand r zur Drehachse und dem Drehwinkel φ bestimmt werden:

$$D = \frac{F \cdot r}{\varphi}. \quad (6)$$

Diese Messung wird für 10 verschiedene Auslenkwinkel durchgeführt.

3.2.2 Dynamische Methode

Eine Metallstange mit Gewichten an den Enden wird symmetrisch auf die Drillachse geschraubt. Das System wird in Schwingung versetzt und die Schwingungsdauer T gemessen. Diese Messung wird für 10 verschiedene Abstände der Massen zur Drehachse wiederholt.

3.2.3 Messung des Trägheitsmoments eines Körpers

Auf die Drillachse wird ein Körper geschraubt. Die Schwingungsdauer T wird gemessen. Diese Messung wird 5 mal wiederholt für zwei verschiedene Körper.

3.2.4 Messung des Trägheitsmoments einer Puppe

Eine Holzpuppe wird auf die Drillachse geschraubt. Es wird 5 mal die Schwingungsdauer T gemessen. Dies wird für insgesamt zwei Körperhaltungen wiederholt. Die Puppe wird Ausgemessen, damit man eine gute Näherung des Körpers als Zusammensetzung mehrerer Zylinder erhält.

3.3 Bestimmung des Trägheitsmoments eines Menschen

Der Körper eines Menschen wird vermessen um aus Zylindern bestehend genähert werden zu können. Daraus wird das Trägheitsmoment eines Menschen abgeschätzt.

4 Auswertung

Im Folgenden werden alle Schwingungsdauern T über drei Perioden gemessen und gemittelt. Zudem werden jeweils 10 Messungen vorgenommen und ein Mittelwert \bar{T} mit der Standardabweichung σ gebildet. Bei einer Anzahl von n Stichproben gilt

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \\ \Delta T &= \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Der Ablesefehler bei Längenbestimmung liegt bei allen Werten bei $\Delta x = 0,5 \text{ mm}$.

4.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße D

Zunächst muss die Winkelrichtgröße D aus Gleichung (6) bestimmt werden. Die folgende Tabelle zeigt die Messwerte. Für die Winkelrichtgröße erhält man damit

$$D = (19,9 \pm 4,3) \text{ mN m}.$$

Berechnet man mit diesem Wert jedoch das Eigenträgheitsmoment der Apparatur, ergeben sich negative Werte. Ein besserer Wert ergibt sich durch die lineare Ausgleichsrechnung im folgenden Kapitel 4.2. Diese ergibt

$$D = (57,9 \pm 0,3) \text{ mN m}.$$

4.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes I_D der Drehachse

Um den Einfluss des Eigenträgheitsmomentes I_D der Apparatur auf die Messwerte zu bestimmen, muss dieses gemessen werden. Hierbei werden zwei Gewichte der Masse m im gleichen Abstand a zur Drehachse an einem Metallstab der Masse M und der Länge l angebracht. Das Gesamtträgheitsmoment des Systems wird dann durch

Tabelle 1: Messwerte für die Bestimmung der Winkelrichtgröße D

$r[\text{cm}]$	$\varphi[^\circ]$	$F[\text{mN}]$	$D[\text{mN m}]$	$r[\text{cm}]$	$\varphi[^\circ]$	$F[\text{mN}]$	$D[\text{mN m}]$
20	10	10	2,00	20	60	33	3,63
20	20	16	2,50	20	71	35	4,05
20	30	20	3,00	20	80	38	4,21
20	41	23	3,56	20	90	44	4,09
20	50	27	3,70	20	101	50	4,04

$$I = I_{\text{D}} + I_{\text{Stange}} + 2I_{\text{m}} \quad (7)$$

beschrieben, wobei das Trägheitsmoment der Stange durch I_{stange} gegeben ist und I_{m} das Trägheitsmoment eines Gewichtes unter Berücksichtigung des Steinerschen Satzes bezeichnen. Hierbei kann näherungsweise angenommen werden, dass für gegen a kleine Radien r und geringe Höhen h , der zylindrischen Gewichten, gilt:

$$I_{\text{m}} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2 + ma^2 \approx ma^2.$$

Die Gleichung (4) und (7) liefern dann den Zusammenhang

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{4\pi^2}{D} (I_{\text{D}} + I_{\text{Stange}} + 2ma^2) = \frac{4\pi^2}{D} (B + 2ma^2), \\ \Rightarrow I_{\text{D}} &= B - I_{\text{Stange}}. \end{aligned}$$

Das Eigentragheitsmoment I_{D} kann also durch Messung von T und a mit einer Ausgleichsrechnung bestimmt werden. Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} M &= (96,28 \pm 0,10) \text{ g} \quad , \quad l = (60,00 \pm 0,05) \text{ cm} \\ I_{\text{Stange}} &= \frac{1}{12}Ml^2, \\ \Delta I_{\text{Stange}} &= \frac{1}{12}\sqrt{(l^2\Delta M)^2 + (Ml\Delta l)^2}, \\ \Delta I_{\text{D}} &= \sqrt{(\Delta B)^2 + (\Delta I_{\text{Stange}})^2}, \\ \Rightarrow I_{\text{Stange}} &= (2,89 \pm 0,01) \text{ g m}^2 \end{aligned}$$

Die Ausgleichsrechnung durch *python* liefert

$$\begin{aligned} B &= (5,33 \pm 0,22) \text{ g m}^2 \\ \Rightarrow I_{\text{D}} &= (2,44 \pm 0,22) \text{ g m}^2. \end{aligned}$$

Die zur Berechnung genutzten Daten werden in folgender Tabelle aufgeführt. Da das Eigenträgheitsmoment jedoch größer ist als die Trägheitsmomente der untersuchten Objekte, würden sich negative Trägheitsmomente ergeben. Das macht physikalisch keinen Sinn, weshalb I_D in den späteren Rechnungen nicht abgezogen wird.

Tabelle 2: Messwerte für die Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes I_D

$a[\text{cm}]$	$T[\text{s}]$	$a[\text{cm}]$	$T[\text{s}]$
26	20,16	16	13,12
26	20,13	16	13,16
24	18,60	14	11,75
24	18,50	14	11,72
22	17,18	12	10,53
22	17,22	12	10,53
20	15,78	10	09,34
20	15,88	10	09,37
18	14,69	08	08,31
18	14,64	08	08,25

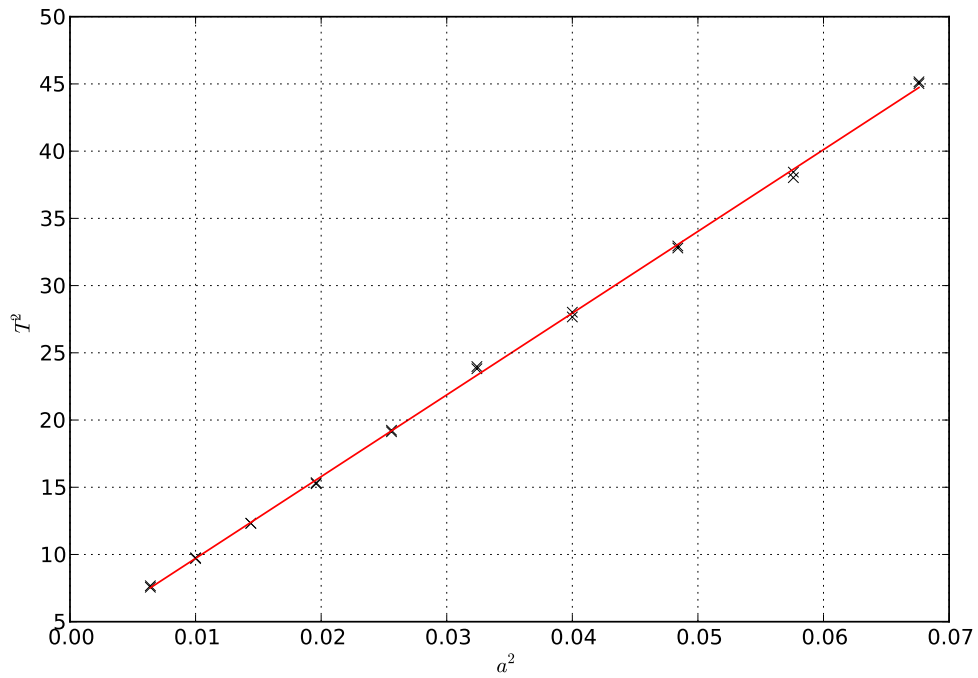


Abbildung 2: Ausgleichsgerade zur Bestimmung von I_D und D

4.3 Bestimmung der Trägheitsmomente I_k verschiedener Körper

Schließlich werden die Trägheitsmomente I_k für k verschiedene Körper bestimmt. Dabei handelt es sich um eine Holzkugel, einen Messingzylinder, sowie eine Holzpuppe, die in zwei verschiedenen Körperhaltungen eingespannt wird.

Aus der Periodendauer wird dann gemäß Gleichung (4) das Trägheitsmoment berechnet. Es gilt

$$I = \frac{T^2 D}{4\pi^2},$$
$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{T D}{2\pi^2} \Delta T\right)^2 + \left(\frac{T^2}{4\pi^2} \Delta D\right)^2}.$$

Die experimentellen Daten werden zudem mit den theoretischen Werten verglichen, um ihre Aussagekraft zu beurteilen. Hierzu wird jeweils der relative Unterschied δ_k in Prozent angegeben.

4.3.1 Die große Holzkugel

Das Trägheitsmoment $I_{1,\text{theorie}}$ der Holzkugel berechnet sich nach

$$I_{1,\text{theorie}} = \frac{2}{5}mr^2,$$

$$\Delta I_{1,\text{theorie}} = \frac{2}{5}\sqrt{(r^2\Delta m)^2 + (2mr\Delta r)^2}.$$

Mit den gemessenen Werten für die Masse m und den Radius r folgt

$$m = (1168,4 \pm 0,1) \text{ g},$$

$$r = (7,35 \pm 0,05) \text{ cm},$$

$$\Rightarrow I_{1,\text{theorie}} = (2,53 \pm 0,34) \text{ g m}^2.$$

Folgende Tabelle beinhaltet die Messdaten zur experimentellen Bestimmung:

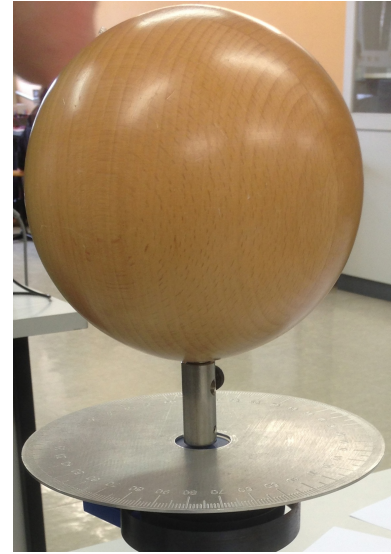


Abbildung 3: Kugelkörper

Tabelle 3: Messwerte für die Bestimmung des Trägheitsmomentes $I_{1,\text{exp}}$ der Holzkugel

$T[\text{s}]$	$T[\text{s}]$	$T[\text{s}]$
1,82	1,84	1,84
1,82	1,87	1,82
1,82	1,83	1,86
1,85	-	-

Die Messwerte liefern mit Gleichung (4)

$$I_{1,\text{exp}} = (1,91 \pm 0,03) \text{ g m}^2,$$

$$\delta_1 = 24,5 \text{ \%}.$$

4.3.2 Der Messingzylinder

Das Trägheitsmoment $I_{2,\text{theorie}}$ des Zylinders berechnet sich unabhängig von der Höhe nach

$$I_{2,\text{theorie}} = \frac{1}{2}mr^2, \quad (8)$$

$$\Delta I_{2,\text{theorie}} = \frac{1}{2}\sqrt{(r^2\Delta m)^2 + (2mr\Delta r)^2}.$$

Mit den gemessenen Werten für die Masse m und den Radius r folgt

$$m = (1436,0 \pm 0,1) \text{ g},$$

$$r = (4,25 \pm 0,05) \text{ cm},$$

$$\Rightarrow I_{2,\text{theorie}} = (1,30 \pm 0,03) \text{ g m}^2.$$

Folgende Tabelle beinhaltet die Messdaten zur experimentellen Bestimmung:

Tabelle 4: Messwerte für die Bestimmung des Trägheitsmomentes $I_{2,\text{exp}}$ des Messingzylinders

$T[\text{s}]$	$T[\text{s}]$	$T[\text{s}]$
1,34	1,35	1,32
1,35	1,34	1,32
1,31	1,32	1,33
1,30	-	-

Die Messwerte liefern mit Gleichung (4)

$$I_{2,\text{exp}} = (1,00 \pm 0,02) \text{ g m}^2,$$

$$\delta_2 = 23,1 \text{ \%}.$$

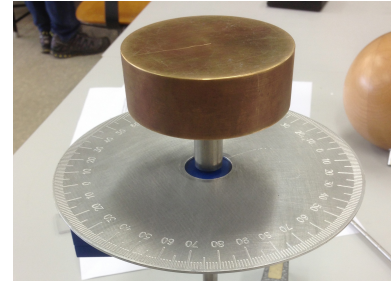


Abbildung 4: Messingzylinder

4.3.3 Puppe

Die Holzpuppe wird zur Berechnung des Trägheitsmomentes näherungsweise durch eine Anordnung von Zylindern Z_i beschrieben. Dabei werden Arme, Beine, Torus und Kopf jeweils als Zylinder betrachtet und mit Hilfe des Steinersches Satzes zu einem Gesamtträgheitsmoment I zusammengesetzt. Die Indizes i sind stets nach den Körperteilen benannt.

Kopf und Torus werden durch die Symmetrieachse gedreht. Die Beine werden parallel zur Symmetrieachse gedreht und müssen daher mit dem Steinerschen Satz verschoben werden. Ebenso werden die Arme in der ersten Position der Puppe parallel und in der zweiten Position im rechten Winkel zur Symmetrieachse gedreht. Die Stellungen der Puppe sind in Abbildung 5 und 6 verdeutlicht.

Alle Zylinderradien r_i werden über zehn Messwerte an verschiedenen Stellen des jeweiligen Körperteils gemittelt. Füße und Hände werden mit jeweils einem Messwert zu den Beinen, beziehungsweise Armen gezählt.

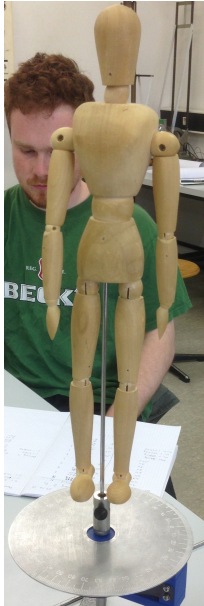


Abbildung 5: Puppe in Stellung 1

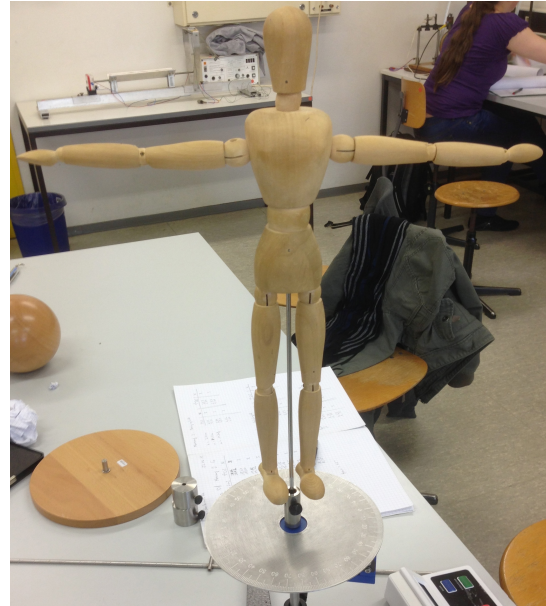


Abbildung 6: Puppe in Stellung 2

Die einzelnen Massen m_i werden dabei aus der Dichte $\rho = M/V = 0,743 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ mit der Gesamtmasse M und dem Gesamtvolumen V bestimmt.

Für I gilt damit

$$\begin{aligned}
 I &= I_{\text{Kopf}} + I_{\text{Torus}} + 2I_{\text{Arm}} + 2I_{\text{Bein}} + 2m_{\text{Arm}}a_{\text{Arm}}^2 + 2m_{\text{Bein}}a_{\text{Bein}}^2, \\
 \Delta I &= \left[(\Delta I_{\text{K}})^2 + (\Delta I_{\text{T}})^2 + (2\Delta I_{\text{A}})^2 + 2(\Delta I_{\text{B}})^2 + \right. \\
 &\quad \left. + (2a_{\text{A}}^2\Delta m_{\text{A}})^2 + (4a_{\text{A}}m_{\text{A}}\Delta a_{\text{A}})^2 + (2a_{\text{B}}^2\Delta m_{\text{B}})^2 + (4a_{\text{B}}m_{\text{B}}\Delta a_{\text{B}})^2 \right]^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} V_i &= \pi r_i^2 h_i, \\ \Delta V_i &= \pi \sqrt{(r_i h_i \Delta r_i)^2 + (r_i^2 \Delta h_i)^2} \end{aligned}$$

und I_i in Stellung 1 wie in Gleichung (8) beschrieben. In Stellung 2 gilt

$$\begin{aligned} I_{\text{Arm}} &= \frac{1}{4} m_{\text{Arm}} r_{\text{Arm}}^2 + \frac{1}{12} m_{\text{Arm}} h_{\text{Arm}}^2, \\ \Delta I_{\text{Arm}} &= \sqrt{\left(\frac{1}{4} r_{\text{A}}^2 + \frac{1}{12} h_{\text{A}}^2\right)^2 \Delta m_{\text{A}}^2 + \left(\frac{1}{2} m_{\text{A}} r_{\text{A}} \Delta r_{\text{A}}\right)^2 + \left(\frac{1}{6} m_{\text{A}} h_{\text{A}} \Delta h_{\text{A}}\right)^2} \end{aligned}$$

Mit $a_{\text{Arm}} = r_{\text{Torus}}$ und $a_{\text{Bein}} = (3,00 \pm 0,05) \text{ cm}$ folgt für Stellung 1

$$I_1 = (1,72 \pm 0,16) \text{ kg cm}^2.$$

Mit $a_{\text{Arm}} = h_{\text{Arm}}/2$ folgt für Stellung 2

$$I_2 = (6,58 \pm 0,17) \text{ kg cm}^2.$$

Die Messdaten liefern mit Gleichung (4) die Ergebnisse

$$\begin{aligned} I_1 &= (1,84 \pm 0,15) \text{ kg cm}^2, \\ I_2 &= (5,02 \pm 0,30) \text{ kg cm}^2, \\ \delta_1 &= 7,0 \%, \\ \delta_2 &= 23,7 \%. \end{aligned}$$

Tabelle 5: Radien der zylinderförmigen Körperteile der Puppe

$r_{\text{Kopf}}[\text{mm}]$	$r_{\text{Torus}}[\text{mm}]$	$r_{\text{Arm}}[\text{mm}]$	$r_{\text{Bein}}[\text{mm}]$
$32,0 \pm 0,5$	$48,0 \pm 0,5$	$21,0 \pm 0,5$	$25,0 \pm 0,5$
$29,0 \pm 0,5$	$50,0 \pm 0,5$	$18,0 \pm 0,5$	$26,0 \pm 0,5$
$19,0 \pm 0,5$	$48,0 \pm 0,5$	$12,0 \pm 0,5$	$24,0 \pm 0,5$
$18,0 \pm 0,5$	$40,0 \pm 0,5$	$17,0 \pm 0,5$	$23,0 \pm 0,5$
$32,0 \pm 0,5$	$32,0 \pm 0,5$	$16,0 \pm 0,5$	$20,0 \pm 0,5$
$26,0 \pm 0,5$	$33,0 \pm 0,5$	$10,0 \pm 0,5$	$15,0 \pm 0,5$
$29,0 \pm 0,5$	$42,0 \pm 0,5$	$20,0 \pm 0,5$	$19,0 \pm 0,5$
$32,0 \pm 0,5$	$51,0 \pm 0,5$	$15,0 \pm 0,5$	$21,0 \pm 0,5$
$27,0 \pm 0,5$	$56,0 \pm 0,5$	$16,0 \pm 0,5$	$20,0 \pm 0,5$
$26,0 \pm 0,5$	$51,0 \pm 0,5$	$19,0 \pm 0,5$	$17,0 \pm 0,5$

Tabelle 6: Benötigte Eigenschaften der Körperteile

i	$r_i[\text{mm}]$	$h_i[\text{mm}]$	$V_i[\text{cm}^3]$	$m_i[\text{g}]$	$I_i[\text{g cm}^2]$
Kopf	$13,5 \pm 2,5$	$65,0 \pm 0,5$	$37,2 \pm 6,9$	$27,6 \pm 1,0$	$25,2 \pm 9,3$
Torus	$22,6 \pm 4,0$	$133,0 \pm 0,5$	$213,4 \pm 37,8$	$171,8 \pm 1,0$	$438,8 \pm 155,3$
Arm 1	$8,2 \pm 1,7$	$170,0 \pm 0,5$	$35,9 \pm 7,4$	$26,7 \pm 1,0$	$9,0 \pm 3,7$
Arm 2	$8,2 \pm 1,7$	$170,0 \pm 0,5$	$35,9 \pm 7,4$	$26,7 \pm 1,0$	$646,5 \pm 24,6$
Bein	$10,5 \pm 1,8$	$197,0 \pm 0,5$	$68,2 \pm 11,7$	$50,7 \pm 1,0$	$27,9 \pm 9,6$

Tabelle 7: Schwingungsdauern der Puppe

$T_1[\text{s}]$	$T_1[\text{s}]$	$T_2[\text{s}]$	$T_2[\text{s}]$
0,57	0,57	0,96	0,96
0,56	0,54	0,96	0,89
0,59	0,53	0,98	0,96
0,57	0,60	0,97	0,94
0,56	0,61	0,89	0,94

5 Diskussion

Es ist auffällig, dass alle experimentellen Werte etwa 25 % unter den theoretischen Werten liegen. Lediglich bei Stellung 1 (siehe Abb. 5) weicht der experimentelle Wert nur etwa 7 % vom Theoriewert ab.

Der größte Fehler wird hier bei dem Dämpfungseffekt der Apparatur vermutet. Während der Messung ist aufgefallen, dass die Schwingung bei mehr als 3 Perioden schon stark gedämpft wurde. Kürzere Schwingphasen konnten jedoch wegen der Reaktionszeit kaum gemessen werden. Weil die Puppe in Stellung 1 mit der höchsten Frequenz geschwungen ist, liegt hier möglicherweise der kleinste Fehler vor.

Eine weitere Fehlerquelle war die Bestimmung der Winkelrichtgröße D mit Hilfe eines Kraftmessers. Per Hand war eine optimale Ausrichtung des Kraftmessers nicht möglich. Zudem sorgten innere Reibungskräfte für sprunghafte Wertänderungen, was die Genauigkeit des Gerätes in Frage stellt.

Literatur

- [1] Physikalisches Anfängerpraktikum der TU Dortmund: Versuch V101 - Das Trägheitsmoment. Stand: April 2013.