

TU Dortmund

V606 - Suszeptibilität paramagnetischer Stoffe

Markus Stabrin
markus.stabrin@tu-dortmund.de

Kevin Heinicke
kevin.heinicke@tu-dortmund.de

Versuchsdatum: 22. Januar 2013

Abgabedatum: 29. Januar 2013

1 Einleitung

Alle Stoffe haben die Eigenschaft, Magnetfelder, die sie umgeben zu beeinflussen. Zunächst wird das Feld geschwächt, was als Diamagnetismus bezeichnet wird. Bei einigen Stoffen tritt ein verstärkender Effekt ein, der den Diamagnetismus zum Teil weit übertrifft. Dies ist der hier behandelte Paramagnetismus.

In Welcher Art das Magnetfeld verändert wird, wird dabei durch die Suszeptibilitätskonstante χ beschrieben. Diese wird im Folgenden Versuch für verschiedene stark paramagnetische seltene Erden untersucht.

2 Theorie

Die Magnetische Flussdichte \vec{B} ist mit der magnetischen Feldstärke \vec{H} über

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}$$

verknüpft. Dabei ist χ keinesfalls konstant, sondern hängt von der Temperatur T und der Beschaffenheit des Feldes \vec{H} ab.

2.1 Berechnung der Suszeptibilität

Ein Atom, Ion oder Molekül mit nicht verschwindendem Drehimpuls ist in der Lage, sich an einem äußeren Magnetfeld auszurichten. Der Gesamtdrehimpuls \vec{J} setzt sich dabei aus den Anteilen des Bahndrehimpulses \vec{L} , des Gesam spins \vec{S} und des zu vernachlässigenden Kerndrehimpulses ab:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

Zu den Drehimpulsen \vec{L} und \vec{S} gehören, entsprechend der Quantenmechanik, die magnetischen Momente $\vec{\mu}_L$ und $\vec{\mu}_S$. Nach einiger Rechnung führen diese Größen auf den genäherten Betrag des gesamten magnetischen Moments:

$$\vec{\mu}_J = \mu_B g_J \sqrt{J(J+1)}.$$

Dabei bezeichnet g_J den Landé-Faktor, der die Gesamtdrehimpulsquantenzahl J , die Spinquantenzahl S und die Bahndrehimpulsquantenzahl L des Atoms beinhaltet:

$$g_J = \frac{3J(J+1) + \{S(S+1) - L(L+1)\}}{2J(J+1)}.$$

Der Zeeman-Effekt beschreibt nun, dass die Richtung, in die $\vec{\mu}_J$ zeigt nur bestimmte Winkel zum Magnetfeld einnimmt, also ebenfalls gequantelt ist. Jede Richtung entspricht dabei einem Energieniveau und es lässt sich durch Summation über alle Niveaus das mittlere Magnetische Moment bestimmen. Die gesuchte Größe χ kann dann für die Annahme großer Temperaturen - etwa Zimmertemperatur - genähert werden.

Man erhält schließlich das Curiesche Gesetz des Paramagnetismus:

$$\chi = \frac{\mu_0 \mu_B^2 g_J^2 N J(J+1)}{3kT} \quad (1)$$

mit dem Bohrschen Magneton $\mu_B = e_0 \hbar / 2m_0$, das die Elektronenladung e_0 und -masse m_0 , sowie das Plancksche Wirkungsquantum \hbar beinhaltet, der Anzahl N der Momente pro Volumen und der Boltzmannkonstante k .

Weil dabei offensichtlich

$$\chi \propto \frac{1}{T}$$

gilt, ist bei der Untersuchung der Suszeptibilität darauf zu achten, dass Temperaturschwankungen in den Stoffen vermieden werden.

3 Aufbau und Durchführung

Die Größen in Gleichung (1) sind durch einfach Mittel nicht zu messen. Um auf andere Weise χ zu bestimmen lässt sich jedoch die Auswirkung auf ein Magnetfeld einer langen Spule messen. Dessen Induktivität wird verändert, wenn man einen paramagnetischen Stoff in die Spule einbringt.

Mit dem folgenden Aufbau kann die Suszeptibilität mittels Messung des Widerstandes R_P oder der Spannung U_{Br} bestimmt werden.

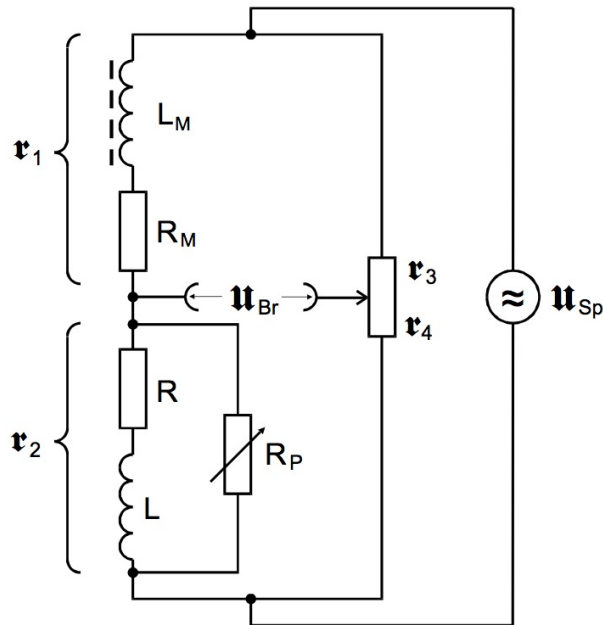


Abbildung 1: Brückenschaltung zur Bestimmung der Suszeptibilität einiger Stoffe [1].

Hier befinden sich zwei möglichst identische Spulen, wie gezeigt hintereinander geschaltet. Durch eine Öffnung im Gehäuse des Aufbaus lässt sich die zu untersuchende Probe in eine der Spulen einbringen. Kleine herstellungsbedingte Unterschiede der Spulen können durch einen variablen Widerstand R_P ausgeglichen werden. Vor jeder Messung muss dieser Widerstand so eingestellt werden, dass die Brückenspannung U_{Br} minimal wird, beide Spulen also etwa den Gleichen Spannungsabfall hervorrufen.

3.1 Bestimmung der Suszeptibilität durch Messung der Brückenspannung

Nachdem eine Probe in die entsprechende Spule eingebracht wurde, wird die Brückenspannung U_{Br} gemessen, die direkt Proportional zu χ ist. Wählt man eine große Frequenz ν für die Sinusspannung U_{Sp} gilt:

$$\begin{aligned} \nu &\rightarrow \infty \\ \Rightarrow \chi &= 4 \frac{F}{A} \frac{U_{Br}}{U_{Sp}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Mit Kenntnis des Durchmessers F der Spule und des Querschnitts A der Probe kann damit durch Messung der Spannungen U_{Br} und U_{Sp} die Suszeptibilität χ berechnet werden.

3.2 Bestimmung der Suszeptibilität durch Messung des Regelwiderstandes

Die Brückenspannung U_{Br} , die sich nach dem Einschieben einer Probe ergeben hat kann nun erneut durch Variation des Widerstandes R_P minimiert werden. Dabei ist χ ebenfalls proportional zum Unterschied ΔR der Widerstände vorher und nachher und lässt sich durch die Messung dieser bestimmen:

$$\chi = 2 \frac{\Delta R}{R_3} \frac{F}{A}. \quad (3)$$

3.3 Unterdrückung der Störspannung

Die Spannungen dieser Messungen liegen im Nanovoltbereich und werden daher leicht durch äußere Einflüsse verfälscht. Da die Brückenschaltung in diesem Versuch aber mit einer Sinusspannung U_{ein} konstanter Frequenz gespeist wird, kann ein Selektivverstärker die Störspannungen herausfiltern.

Um die Qualität dieses Filters zu beurteilen, muss dessen Güte Q bestimmt werden. Dafür werden mit einer Eingangsspannung U_{ein} konstanter Amplitude Signale unterschiedlicher Frequenz ν hinter dem Selektivverstärker gemessen. Das Verhältnis V der gemessenen Spannung U_{aus} zur Eingangsspannung U_{ein} nimmt bei einer bestimmten Frequenz - der Durchlassfrequenz ν_0 - etwa den Wert 1 an. Mit den Frequenzen ν_+ und ν_- , an denen das Verhältnis V gerade $1/\sqrt{2}$ beträgt lässt sich die Güte bestimmen und es gilt

$$Q = \frac{\nu_0}{\nu_+ - \nu_-} . \quad (4)$$

Bei dieser Messung sollten alle Verstärker deaktiviert sein.

Bei den Messungen mit aktivierten Verstärkern ist es wichtig, den genauen Verstärkungsgrad zu bestimmen. Dazu wird bei eingeschalteten Verstärkern V erneut berechnet. Alle gemessenen Spannungen werden dann um diesen Faktor bereinigt.

4 Auswertung

4.1 Filterkurve des Selektivverstärkers

Die Untersuchung der Filterkurve des Selektiv-Verstärkers ergab die in Tabelle 1 aufgelisteten Werte. Daraus ergibt sich der Graph 2. Aus diesem lassen sich die Werte für ν_0 , ν_+ und ν_- ablesen:

$$\begin{aligned} \nu_0 &= 34,9 \text{ kHz} , \\ \nu_+ &= (35,10 \pm 0,02) \text{ kHz} , \\ \nu_- &= (34,72 \pm 0,02) \text{ kHz} . \end{aligned}$$

Aus diesen lässt sich die Güte mithilfe von Gleichung (4) berechnen.

$$Q = 91,84 \pm 6,84$$

Der Fehler ergibt sich mittels Gauß'scher Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial Q}{\partial \nu_+} \right| &= \left| \frac{\partial Q}{\partial \nu_-} \right| , \\ \Delta \nu_+ &= \Delta \nu_- , \\ \Delta Q &= \sqrt{2} \cdot \left(\left| \frac{\partial Q}{\partial \nu_{+,-}} \right| \Delta \nu_{+,-} \right) . \end{aligned}$$

Damit weicht die errechnete Güte $Q = 91,84 \pm 6,84$ um etwa 8,8 % von der eingestellten Güte $Q = 100$ ab.

| f[kHz] | U[mV] | f[kHz] | U[mV] |
|--------|-------|--------|-------|
| 25.0 | 0.0 | 35.1 | 6.1 |
| 30.0 | 0.2 | 35.2 | 4.9 |
| 30.5 | 0.2 | 35.3 | 4.0 |
| 31.0 | 0.3 | 35.4 | 3.4 |
| 31.5 | 0.4 | 35.5 | 2.9 |
| 32.0 | 0.5 | 35.6 | 2.5 |
| 32.5 | 0.6 | 35.7 | 2.2 |
| 33.0 | 0.7 | 35.8 | 2.0 |
| 33.5 | 1.1 | 35.9 | 1.8 |
| 34.0 | 1.8 | 36.0 | 1.6 |
| 34.1 | 2.0 | 36.5 | 1.1 |
| 34.2 | 2.3 | 37.0 | 0.8 |
| 34.3 | 2.7 | 37.5 | 0.6 |
| 34.4 | 3.1 | 38.0 | 0.5 |
| 34.5 | 3.8 | 38.5 | 0.4 |
| 34.6 | 4.6 | 39.0 | 0.3 |
| 34.7 | 5.9 | 39.5 | 0.3 |
| 34.8 | 7.4 | 40.0 | 0.2 |
| 34.9 | 8.6 | 40.5 | 0.0 |
| 35.0 | 7.4 | | |

Tabelle 1: Frequenzabhängigkeit der Spannung bei einem Selektivverstärker

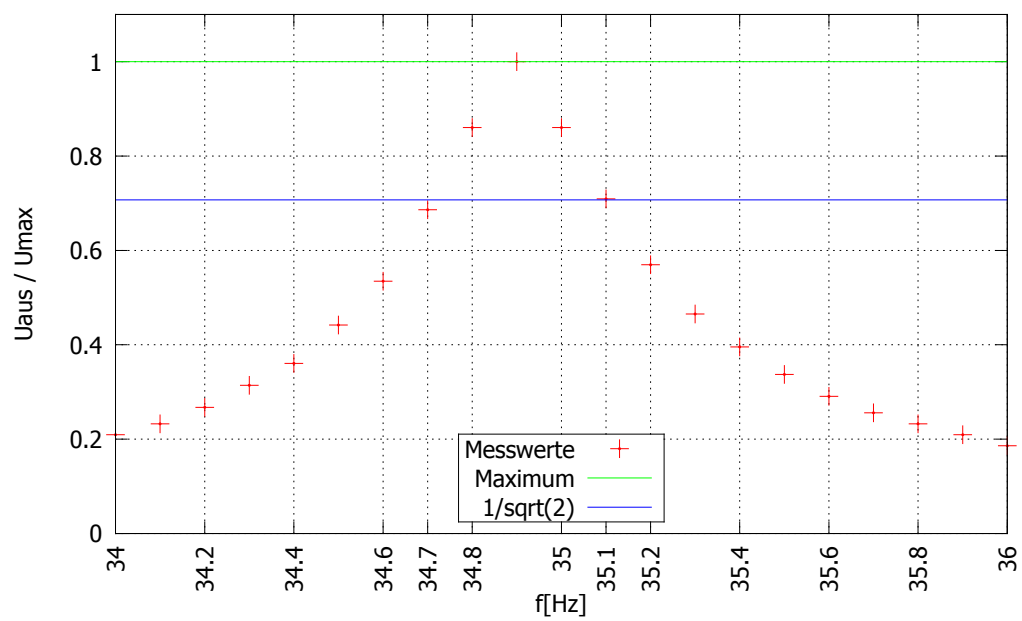


Abbildung 2: Filterkurve des Selektivverstärkers

4.2 Bestimmung der Suszeptibilität

Für die Messung der Suszeptibilität wird eine Spule mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned}n &= 250 \\F &= 0,866 \text{ cm}^2, \\L &= 13,5 \text{ cm}, \\R &= 0,7 \Omega,\end{aligned}$$

verwendet.

Bei der Messung zur Bestimmung der Suszeptibilität ergaben sich die Werte in den Tabellen 6, 7 und 8.

Die Mittelwerte sind in Tabelle 4 aufgeführt.

Bei der Bestimmung der Suszeptibilität mit den Gleichungen (1), (2) und (3) wurden zusätzlich die Werte aus den Tabellen 3 und 5 verwendet.

A_{real} ergibt sich mithilfe der Gleichung:

$$A_{\text{real}} = \frac{M}{L\rho}. \quad (5)$$

Die Verstärkung durch den Linear- und Selektivverstärker ergab eine Verstärkung um einen Faktor von 86.73.

Für die Berechnung der Suszeptibilität nach Gleichung (1) wurden die vorgegebenen Werte verwendet:

$$\begin{aligned}S &= \frac{5}{2}, \\L &= 6, \\J &= \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Für die Temperatur wurden $T = 295 \text{ K}$ benutzt und für die Anzahl der Momente pro Volumen N die Werte aus Tabelle 5.

Bei der Berechnung nach Gleichung (2) wird für A der A_{real} Wert benutzt. Die 1 V Eingangsspannung wird durch die Verstärker auf $U_{\text{sp}} = 86,73 \text{ V}$ verstärkt. U_{br} wird aus Tabelle 4 benutzt.

Für die dritte Methode nach Gl. (3) wird auch A_{real} benutzt. Der feste Widerstand ist mit $R_3 = 998 \Omega$ gegeben. ΔR ergibt sich aus Tabelle 4.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 angegeben.

Die Fehler errechnen sich mithilfe Gauß'scher Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned}\text{Gl. (3)} \Rightarrow \Delta\chi &= \left| \frac{\partial\chi}{\partial\Delta R} \right| \Delta(\Delta R) \\ \text{Gl. (2)} \Rightarrow \Delta\chi &= \sqrt{\left(\left| \frac{\partial\chi}{\partial\Delta U_{\text{br}}} \right| \Delta U_{\text{br}} \right)^2 + \left(\left| \frac{\partial\chi}{\partial\Delta U_{\text{sp}}} \right| \Delta U_{\text{sp}} \right)^2}\end{aligned}$$

Die Ergebnisse weisen auf einen systematischen Fehler hin, da die gemessenen Werte sehr vom Theoriewert abweichen.

| Probe | χ_{exp1} | χ_{exp2} | χ_{theo} | $\Delta\chi_1$ | $\Delta\chi_2$ |
|------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------|----------------|
| Dysprosium | $0,0239 \pm 0,0014$ | $0,0250 \pm 0,0001$ | 0,0126 | 89,68 % | 98,41 % |
| Neodym | $0,0026 \pm 0,0021$ | $0,0030 \pm 0,0001$ | 0,0015 | 73,33 % | 100,00 % |
| Gadolinium | $0,0110 \pm 0,0014$ | $0,0115 \pm 0,0001$ | 0,0069 | 59,42 % | 66,66 % |

Tabelle 2: Werte für die Suszeptibilität mit 3 verschiedenen Messtechniken. χ_{exp1} nach Gl. (3), χ_{exp2} nach Gl. (2) und χ_{theo} nach Gl. (1)

| Probe | Masse [g] | Länge [cm] | Dichte [g/cm ³] | A_{real} [cm ²] |
|------------|-----------|------------|-----------------------------|--------------------------------------|
| Dysprosium | 16.6 | 17.7 | 7800 | 0.12 |
| Neodym | 9.0 | 16.3 | 7240 | 0.08 |
| Gadolinium | 14.8 | 16.6 | 7400 | 0.12 |

Tabelle 3: Daten der Messproben.

| Probe | \bar{R}_0 [m Ω] | ΔR_0 [m Ω] | \bar{U}_0 [mV] | ΔU_0 [mV] | \bar{U}_{br} [mV] | ΔU_{br} [mV] |
|------------|---------------------------|----------------------------|------------------|-------------------|----------------------------|-----------------------------|
| Dysprosium | 2872 | 7.85 | 4.02 | 0.06 | 74.40 | 0.40 |
| Neodym | 2832 | 12.30 | 3.90 | 0.03 | 5.88 | 0.24 |
| Gadolinium | 2839 | 8.70 | 3.86 | 0.02 | 34.20 | 0.37 |

| \bar{R}_1 [m Ω] | ΔR_1 [m Ω] | $\overline{\Delta R}$ [m Ω] | $\Delta(\Delta R)$ [m Ω] |
|---------------------------|----------------------------|-------------------------------------|----------------------------------|
| 1220 | 6.30 | 1652 | 10.55 |
| 2719 | 7.50 | 118 | 6.80 |
| 2075 | 10.85 | 764 | 9.65 |

Tabelle 4:
Mittelwerte und Standardabweichung der Probenwerte.

| Probe | $\rho[\text{kg}/\text{m}^3]$ | $M[\text{kg}/\text{mol}]$ | $M[\text{kg}]$ | $N[1/\text{m}^3]$ |
|-----------|------------------------------|---------------------------|-----------------------|----------------------|
| Dy_2O_3 | 7800 | 0.3730 | $6,19 \cdot 10^{-25}$ | $1,26 \cdot 10^{28}$ |
| Nd_2O_3 | 7240 | 0.3365 | $5,59 \cdot 10^{-25}$ | $1,30 \cdot 10^{28}$ |
| Gd_2O_3 | 7400 | 0.3625 | $6,02 \cdot 10^{-25}$ | $1,23 \cdot 10^{28}$ |

Tabelle 5: Massen der Messproben.

| $R_0 [\text{m}\Omega]$ | $U_0 [\text{mV}]$ | $\Delta U_0 [\text{mV}]$ | $U_1 [\text{mV}]$ | $\Delta U_1 [\text{mV}]$ | $R_1 [\text{m}\Omega]$ | $\Delta R [\text{m}\Omega]$ |
|------------------------|-------------------|--------------------------|-------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------|
| 2850 | 3.9 | 0.1 | 73 | 1 | 1210 | 1640 |
| 2865 | 3.9 | 0.1 | 75 | 1 | 1230 | 1635 |
| 2890 | 4.1 | 0.1 | 75 | 1 | 1230 | 1660 |
| 2865 | 4.0 | 0.1 | 74 | 1 | 1230 | 1635 |
| 2890 | 4.2 | 0.1 | 75 | 1 | 1200 | 1690 |

Tabelle 6: Gemessene Werte zur Bestimmung der Suszeptibilität von Dysprosium.

| $R_0 [\text{m}\Omega]$ | $U_0 [\text{mV}]$ | $\Delta U_0 [\text{mV}]$ | $U_1 [\text{mV}]$ | $\Delta U_1 [\text{mV}]$ | $R_1 [\text{m}\Omega]$ | $\Delta R [\text{m}\Omega]$ |
|------------------------|-------------------|--------------------------|-------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------|
| 2850 | 4.0 | 0.1 | 6.5 | 0.1 | 2715 | 135 |
| 2785 | 3.9 | 0.1 | 5.3 | 0.1 | 2685 | 100 |
| 2850 | 3.9 | 0.1 | 6.4 | 0.1 | 2720 | 130 |
| 2845 | 3.9 | 0.1 | 5.5 | 0.1 | 2725 | 120 |
| 2830 | 3.8 | 0.1 | 5.7 | 0.1 | 2725 | 105 |

Tabelle 7: Gemessene Werte zur Bestimmung der Suszeptibilität von Neodym.

| $R_0 [\text{m}\Omega]$ | $U_0 [\text{mV}]$ | $\Delta U_0 [\text{mV}]$ | $U_1 [\text{mV}]$ | $\Delta U_1 [\text{mV}]$ | $R_1 [\text{m}\Omega]$ | $\Delta R [\text{m}\Omega]$ |
|------------------------|-------------------|--------------------------|-------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------|
| 2840 | 3.8 | 0.1 | 35 | 1 | 2050 | 790 |
| 2840 | 3.9 | 0.1 | 34 | 1 | 2085 | 755 |
| 2810 | 3.9 | 0.1 | 34 | 1 | 2050 | 760 |
| 2840 | 3.8 | 0.1 | 33 | 1 | 2105 | 735 |
| 2865 | 3.9 | 0.1 | 35 | 1 | 2085 | 780 |

Tabelle 8: Gemessene Werte zur Bestimmung der Suszeptibilität von Gadolinium.

5 Diskussion

Bei diesem Versuch ist die Brückenschaltung eine systematische Fehlerquelle. Durch Raufdrücken auf das Schaltelement oder auch durch drehen der Probe, veränderte sich der erhaltene Wert für die Spannung signifikant. Dies könnte an einer Änderung der Leitfähigkeit der Spule liegen oder auch durch einen Wackelkontakt innerhalb des Elements. Die Messung der Filterkurve hat gut funktioniert und die gemessene Güte wich nur um 8,8 % vom Theoriewert ab.

Die errechneten Werte für die Suszeptibilität aus dem Experiment liegen relativ dicht bei, während sie bis zu 100 % vom Theoriewert abweichen. Dies lässt auf systematische Fehler innerhalb der Messapparatur schließen.

Dieser Versuch ist daher sehr empfindlich, gerade weil die Suszeptibilitäten klein sind.

Literatur

- [1] Physikalisches Anfängerpraktikum der TU Dortmund: Versuch Nr. 606 - Messung der Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen. Stand: Januar 2013.