

V406 - Beugung am Spalt

Kevin Heinicke und Markus Stabrin

27. Oktober 2012

1 Einleitung

In diesem Versuch wird das Verhalten von monochromatischem Licht bei Beugung an dünnen Spalten untersucht.

Unter der Annahme, dass sich Licht wellenartig ausbreitet wird der Intensitätsverlauf des Beugungsmusters hinter einem Einfach-, sowie einem Doppelspalt untersucht. Aus den Messwerten lässt sich schließlich eine Aussage über die Spaltbreite machen.

2 Theorie

Im Folgenden werden verschiedenen Annahmen gemacht, die die Beschreibung des Lichtes vereinfachen. Dadurch können die Phänomene dieses Experimentes gut erklärt werden.

2.1 Das Huygenssche Prinzip

Um die Natur des Lichtes detailliert beschreiben zu können, muss man es quantenmechanisch betrachten. Für etliche Phänomene reicht es jedoch aus, über große Zahlen von Lichtquanten zu mitteln und diese durch das klassische Wellenmodell näherungsweise zu beschreiben. Diese Näherung wird hier gemacht.

Das Huygenssche Prinzip geht von der Welleneigenschaft des Lichtes aus. Es besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfläche zur gleichen Zeit Elementarwellen aussendet. Diese Kugelwellen interferieren miteinander und bilden eine neue Wellenfront, die die Einhüllende der Elementarwellen ist und wiederum neue Elementarwellen aussendet. Die Überlagerung aller Elementarwellen an einem Ort im Raum beschreibt dann den dortigen Schwingungszustand der Welle.

2.2 Fresnel- und Fraunhoferbeugung

Für die Beschreibung von Beugungserscheinungen gibt es grundsätzlich zwei verschiedene Versuchsanordnungen. Abb. 1 skizziert diese.

2.2.1 Fresnelbeugung

Die Fresnelsche Anordnung betrachtet eine Lichtquelle, die sich im endlichen Abstand vor dem Spalt befindet. Dadurch divergieren die Strahlenbündel und das Licht wird am Spalt in unterschiedlichen Winkeln gebeugt. Schlußfolgerungen auf den Versuchsaufbau durch Messung des Intensitätsverlaufes werden damit sehr schwierig.

2.2.2 Fraunhoferbeugung

Diese Anordnung geht von parallelen Lichtbündeln aus, die von einer unendlich weit entfernten Lichtquelle entsandt werden. Hierdurch werden Lichtbündel gleicher Phase im gleichen Winkel abelenkt. Die Beschreibung wird hier wesentlich einfacher, weil lediglich der Gangunterschied bei *einem* Winkel, betrachtet werden muss. Die unendlich entfernte Lichtquelle lässt sich gut durch einen Laser realisieren.

Aus diesem Grund und weil der Fraunhoferaufbau eine leichtere Beschreibung der Beugung liefert, wird der Versuch damit durchgeführt.

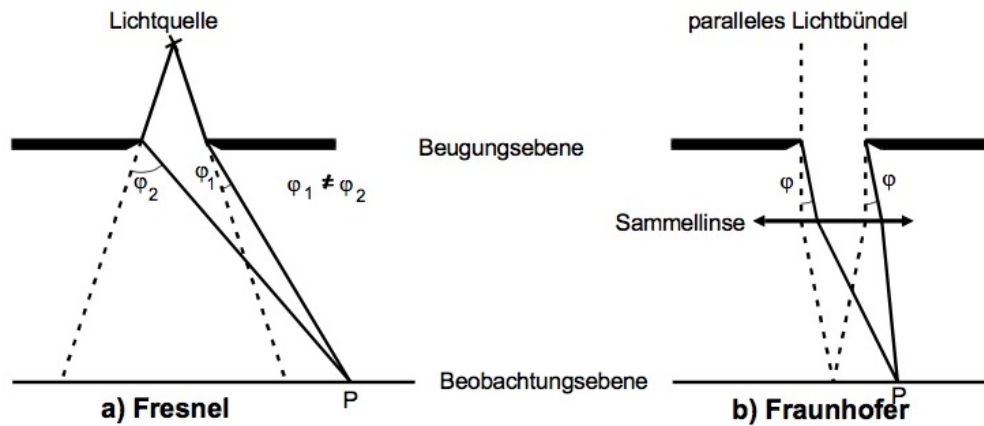


Abbildung 1: Unterschied zwischen Fresnelschem und Fraunhoferschem Versuchsaufbau

2.3 Beugungsmuster am Einzelspalt

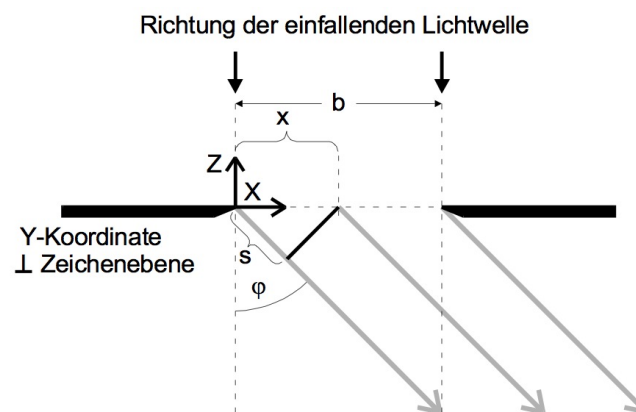


Abbildung 2: Einzelspalt

Betrachtet man nun den Spalt genauer, lässt sich die Phasendifferenz δ zweier Strahlenbündel einfach beschreiben. Die durch Elementarwellen bestimmten Bündel haben dann unter dem Winkel φ die Phasendifferenz δ

$$\delta = \frac{2\pi s}{\lambda} = \frac{2\pi x \sin(\varphi)}{\lambda} \quad (1)$$

Hierbei ist s gerade der Gangunterschied der Bündel und λ die Wellenlänge des einfallenden Lichtes.

Um die Amplitude $B(z, t, \varphi)$ zu bestimmen muss über alle Elementarwellen – also über die gesamte Spaltbreite b – integriert werden:

$$\begin{aligned}
B(z, t, \varphi) &= A_0 \int_0^b \exp\left(i\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} + \delta\right) dx \\
&= A_0 \exp\left(i\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) \int_0^b \exp\left(\frac{2\pi i x \sin \varphi}{\lambda}\right) dx \\
\Rightarrow B(z, t, \varphi) &= A_0 \exp\left[i\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right)\right] \exp\left[i\left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}\right)\right] \cdot \\
&\quad \cdot \frac{\lambda}{\pi \sin \varphi} \sin\left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}\right)
\end{aligned} \tag{2}$$

Dies beschreibt die Beugung an einem Parallelschlitt. Die ersten beiden exponentiellen Anteile aus Gleichung 2 beschreiben die Amplitude in Abhängigkeit der Zeit t und des Ortes z (senkrecht auf der Schirmfläche).

Die einfallenden Lichtbündel werden über lange Zeit gemessen. Wegen der hohen Frequenz ω des Lichtes können wir nur die über einige Zeit gemittelte Intensität I messen. Der Anteil der Zeitabhängigkeit fällt also weg.

Zudem bewegen wir uns lediglich entlang der Schirmfläche – also in x -Richtung –, wodurch auch der zweite, z -abhängige Term nicht betrachtet werden muss. Dann gilt:

$$I(\varphi) \propto B^2(\varphi)$$

Mit einer Abkürzung lässt sich der Zusammenhang übersichtlich darstellen:

$$\begin{aligned}
\eta(\varphi) &:= \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \\
\Rightarrow B(\varphi) &= A_0 b \frac{\sin \eta}{\eta}
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\Rightarrow I(\varphi) \propto A_0^2 b^2 \left(\frac{\sin \eta}{\eta}\right)^2 \tag{4}$$

Man erkennt, dass die Höhe der Maxima näherungsweise mit dem Quadrat des Winkels abnimmt. Ausserdem entsteht ein Hauptmaximum bei $\varphi = 0$. Symmetrisch auf beiden Seiten entstehen etliche Nebenmaxima. Ein Minimum liegt vor, wenn $I(\varphi) = 0$ ist. Das gilt für

$$\sin \varphi_n = \pm n \frac{\lambda}{b} \quad , \quad n = (1, 2, \dots) \tag{5}$$

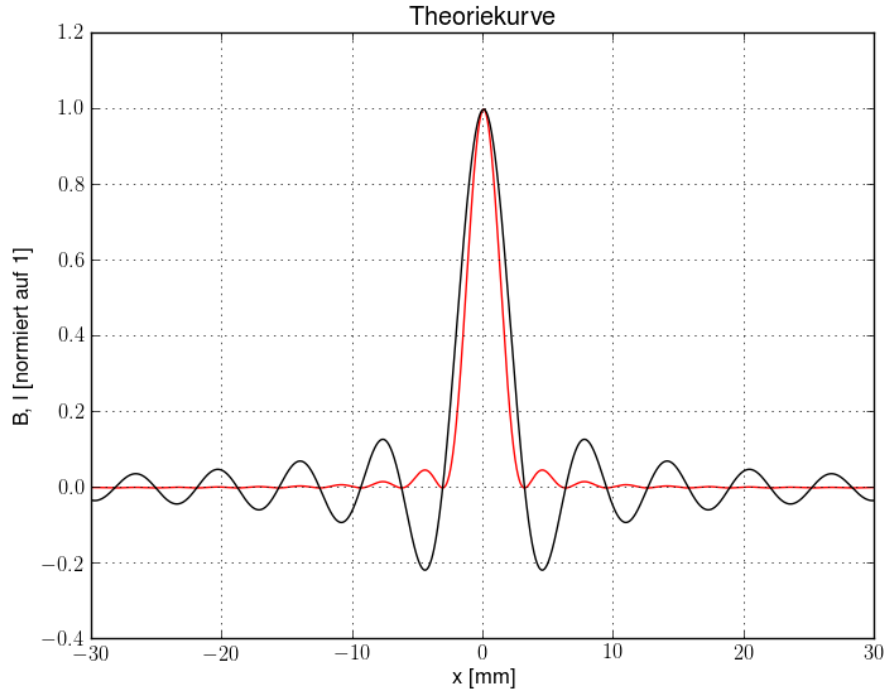


Abbildung 3: Theoretischer Intensitäts- und Amplitudenverlauf

2.4 Fourier-Transformation

Die Amplitudenverteilung lässt sich bei diesem Aufbau auch durch eine Fourier-Transformation der einzelnen Amplitudenverteilungen der einfallenden Wellen beschreiben. Transformiert man die Funktion $f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} A_0 & 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6)$$

erhält man für die Fourier-Transformation

$$g(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\xi} dx = \frac{A_0}{i\xi} (-1 + e^{i\xi b}) \quad (7)$$

unter Anwendung der Eulerschen Formel und mit

$$g(\xi) = \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda} \quad (8)$$

stimmen 7 und 3 überein. Das Huygensche Prinzip wird hierdurch also mathematisch formuliert. Das Integral beschreibt dabei die Summation über alle Elementarwellen. Die Aperturfunktion $f(x)$ kann zudem hierbei einfach um eine Variable y erweitert werden,

was die Beschreibung der Beugung an zweidimensionalen Objekten ermöglicht. Für die Auswertung dieses Experimentes ist besonders wichtig, dass sich die Fourier-Transformation umkehren lässt. Wir können somit aus den Messwerten der Intensität $I(\varphi)$, die proportional zu $B^2(\varphi)$ ist, auf die Gestalt der Aperturfunktion $f(x)$ – also auf unseren Spalt – schließen.

2.5 Beugungsmuster am Doppelspalt

Der Doppelspalt lässt sich als Überlagerung zweier Einzelspalte im Abstand s beschreiben. Hieraus bekommt man zusätzlich zur Abhängigkeit 4 einen Cosinus-Anteil, der den Gangunterschied durch den Spaltabstand berücksichtigt:

$$I(\varphi) \propto B(\varphi) = 4 \cos^2 \left(\frac{\pi s \sin \varphi}{\lambda} \right) \left(\frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right) \quad (9)$$