

TU Dortmund

V406 - Beugung am Spalt

Markus Stabrin
markus.stabrin@tu-dortmund.de

Kevin Heinicke
kevin.heinicke@tu-dortmund.de

Versuchsdatum: 23. Oktober 2012

Abgabedatum: 30. Oktober 2012

1 Einleitung

In diesem Versuch wird das Verhalten von monochromatischem Licht bei Beugung an dünnen Spalten untersucht.

Unter der Annahme, dass sich Licht wellenartig ausbreitet wird der Intensitätsverlauf des Beugungsmusters hinter einem Einfach-, sowie einem Doppelspalt untersucht. Aus den Messwerten lässt sich schließlich eine Aussage über die Spaltbreite machen.

2 Theorie

Im Folgenden werden verschiedenen Annahmen gemacht, die die Beschreibung des Lichtes vereinfachen. Dadurch können die Phänomene dieses Experimentes gut erklärt werden.

2.1 Das Huygenssche Prinzip

Um die Natur des Lichtes detailliert beschreiben zu können, muss man es quantenmechanisch betrachten. Für etliche Phänomene reicht es jedoch aus, über große Zahlen von Lichtquanten zu mitteln und diese durch das klassische Wellenmodell näherungsweise zu beschreiben. Diese Näherung wird hier gemacht.

Das Huygenssche Prinzip geht von der Welleneigenschaft des Lichtes aus. Es besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfläche zur gleichen Zeit Elementarwellen aussendet. Diese Kugelwellen interferieren miteinander und bilden eine neue Wellenfront, die die Einhüllende der Elementarwellen ist und wiederum neue Elementarwellen aussendet. Die Überlagerung aller Elementarwellen an einem Ort im Raum beschreibt dann den dortigen Schwingungszustand der Welle.

2.2 Fresnel- und Fraunhoferbeugung

Für die Beschreibung von Beugungserscheinungen gibt es grundsätzlich zwei verschiedene Versuchsanordnungen. Abbildung 1 skizziert diese.

2.2.1 Fresnelbeugung

Die Fresnelsche Anordnung betrachtet eine Lichtquelle, die sich im endlichen Abstand vor dem Spalt befindet. Dadurch divergieren die Strahlenbündel und das Licht wird am Spalt in unterschiedlichen Winkeln gebeugt. Schlußfolgerungen auf den Versuchsaufbau durch Messung des Intensitätsverlaufes werden damit sehr schwierig.

2.2.2 Fraunhoferbeugung

Diese Anordnung geht von parallelen Lichtbündeln aus, die von einer unendlich weit entfernten Lichtquelle entsandt werden. Hierdurch werden Lichtbündel gleicher Phase im gleichen Winkel abelenkt. Die Beschreibung wird hier wesentlich einfacher, weil lediglich

Aus diesem Grund und weil der Fraunhoferaufbau eine leichtere Beschreibung der Beugung liefert, wird der Versuch damit durchgeführt.



Betrachtet man nun den Spalt genauer, lässt sich die Phasendifferenz δ zweier Strahlenbündel einfach beschreiben. Die durch Elementarwellen bestimmten Bündel haben dann unter dem Winkel φ die Phasendifferenz δ

3

Hierbei ist s gerade der Gangunterschied der Bündel und λ die Wellenlänge des einfallenden Lichtes.

Um die Amplitude $B(z, t, \varphi)$ zu bestimmen muss über alle Elementarwellen – also über die gesamte Spaltbreite b – integriert werden:

$$\begin{aligned}
 B(z, t, \varphi) &= A_0 \int_0^b \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} + \delta \right) \right] dx \\
 &= A_0 \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right] \int_0^b \exp \left(\frac{2\pi i x \sin \varphi}{\lambda} \right) dx \\
 \Rightarrow B(z, t, \varphi) &= A_0 \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right] \exp \left[i \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right) \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{\lambda}{\pi \sin \varphi} \sin \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right). \tag{2}
 \end{aligned}$$

Dies beschreibt die Beugung an einem Parallelschlitz. Die ersten beiden exponentiellen Anteile aus Gleichung (2) beschreiben die Amplitude in Abhängigkeit der Zeit t und des Ortes z (senkrecht auf der Schirmfläche).

Die einfallenden Lichtbündel werden über lange Zeit gemessen. Wegen der hohen Frequenz ω des Lichtes können wir nur die über einige Zeit gemittelte Intensität I messen. Der Anteil der Zeitabhängigkeit fällt also weg.

Zudem bewegen wir uns lediglich entlang der Schirmfläche – also in x -Richtung –, wodurch auch der zweite, z -abhängige Term nicht betrachtet werden muss. Dann gilt:

$$I(\varphi) \propto B^2(\varphi).$$

Mit einer Abkürzung lässt sich der Zusammenhang übersichtlich darstellen:

$$\begin{aligned}
 \eta(\varphi) &:= \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}, \\
 \Rightarrow B(\varphi) &= A_0 b \frac{\sin \eta}{\eta}, \tag{3}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I(\varphi) \propto A_0^2 b^2 \left(\frac{\sin \eta}{\eta} \right)^2. \tag{4}$$

Man erkennt, dass die Höhe der Maxima näherungsweise mit dem Quadrat des Winkels abnimmt. Ausserdem entsteht ein Hauptmaximum bei $\varphi = 0$. Symmetrisch auf beiden Seiten entstehen etliche Nebenmaxima. Ein Minimum liegt vor, wenn $I(\varphi) = 0$ ist. Das gilt für

$$\sin \varphi_n = \pm n \frac{\lambda}{b}, \quad n = (1, 2, \dots). \tag{5}$$

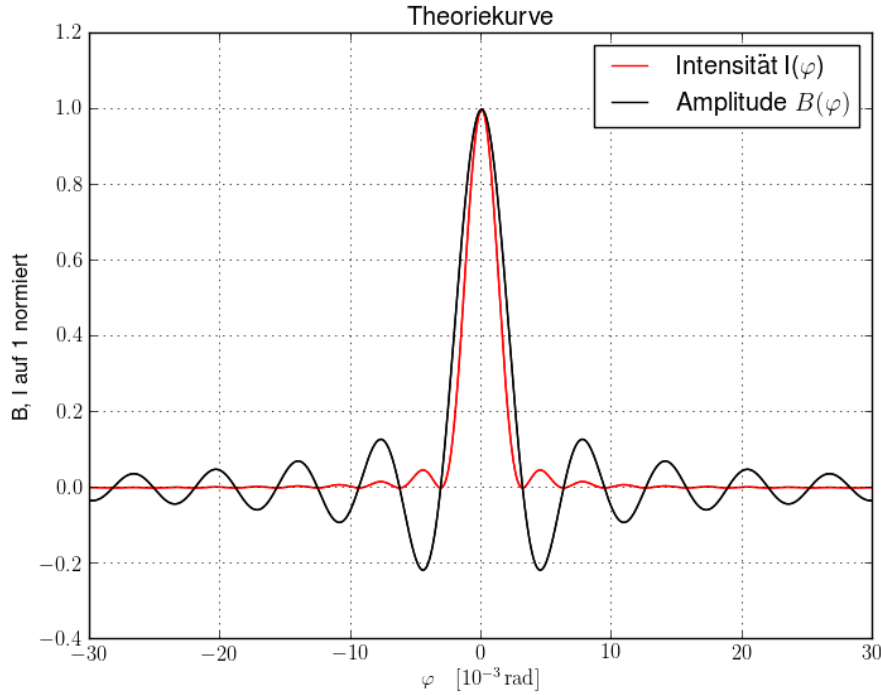


Abbildung 3: Theoretischer Intensitäts- und Amplitudenverlauf

2.4 Fourier-Transformation

Die Amplitudenverteilung lässt sich bei diesem Aufbau auch durch eine Fourier-Transformation der einzelnen Amplitudenverteilungen der einfallenden Wellen beschreiben. Transformiert man die Funktion $f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} A_0 & 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (6)$$

erhält man für die Fourier-Transformation

$$g(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\xi} dx = \frac{A_0}{i\xi} \left(-1 + e^{i\xi b} \right). \quad (7)$$

Unter Anwendung der Eulerschen Formel und mit

$$g(\xi) = \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda} \quad (8)$$

stimmen (7) und (3) überein. Das Huygensche Prinzip wird hierdurch also mathematisch formuliert. Das Integral beschreibt dabei die Summation über alle Elementarwellen. Die Aperturfunktion $f(x)$ kann zudem hierbei einfach um eine Variable y erweitert werden,

was die Beschreibung der Beugung an zweidimensionalen Objekten ermöglicht. Für die Auswertung dieses Experimentes ist besonders wichtig, dass sich die Fourier-Transformation umkehren lässt. Wir können somit aus den Messwerten der Intensität $I(\varphi)$, die proportional zu $B^2(\varphi)$ ist, auf die Gestalt der Aperturfunktion $f(x)$ – also auf unseren Spalt – schließen.

2.5 Beugungsmuster am Doppelspalt

Der Doppelspalt lässt sich als Überlagerung zweier Einzelspalte im Abstand s beschreiben. Hieraus bekommt man zusätzlich zur Abhängigkeit (4) einen Cosinus-Anteil, der den Gangunterschied durch den Spaltabstand berücksichtigt:

$$I(\varphi) \propto B^2(\varphi) = 4 \cos^2 \left(\frac{\pi s \sin \varphi}{\lambda} \right) \left(\frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right). \quad (9)$$

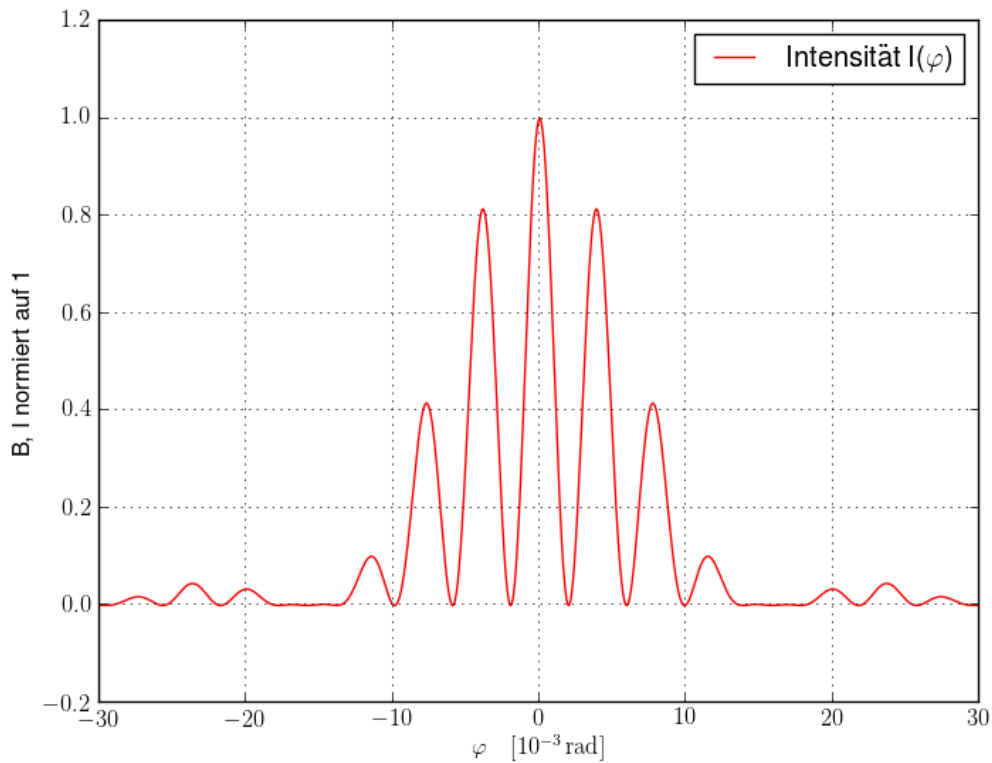


Abbildung 4: Theoretischer Amplitudenverlauf des Doppelspaltes

3 Aufbau und Durchführung

Für den Versuch stand ein He-Ne-Laser, ein größenverstellbarer Einfachspalt, ein größenverstellbarer Doppelspalt, ein lichtempfindlicher Detektor auf einer mechanischen Schiene sowie ein Amperemeter zur Verfügung.

3.1 Messaufgaben

1. Punktweises Ausmessen der Beugungsfigur des Einfachspalts (50 Messpunkte). Anschließendes Bestimmen der Spaltbreite b und Ausmessen der Spaltbreite b mit dem Mikroskop.
2. Wie 1 aber mit variablem Einfachspalt und ohne Mikroskop.
3. Wie 1 aber mit festem Doppelspalt und anschließendem Vergleich mit der theoretischen Verteilung des Einfachspaltes.

3.2 Durchführung

3.2.1 Messungen

Der Laser beleuchtet mit einer Wellenlänge von $\lambda = 633 \text{ nm}$ wie in Abbildung 5 beschrieben verschiedene Einzel- und Doppelspalten mit Spaltbreiten von ca. $20 - 200 \mu\text{m}$. Ein lichtempfindlicher Detektor befindet sich in 100 cm Entfernung vom Spalt, welcher senkrecht zur optischen Achse verstellbar ist.

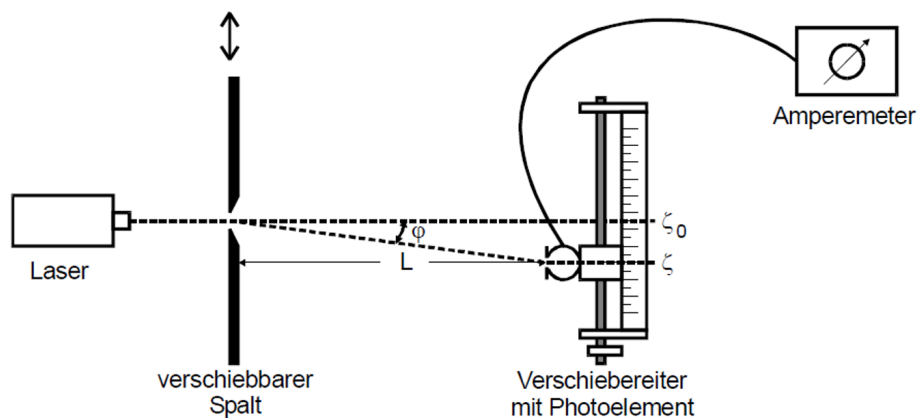


Abbildung 5: Versuchsaufbau [1]

Anfangs muss die Apparatur justiert werden. Dafür wird der Laser fixiert und die Höhe des Detektors in Mittelstellung so ausgerichtet, dass der Laserstrahl genau auf den Sensor trifft. Anschließend wird der für die Messung benötigte Spalt in die dafür vorgesehene Vorrichtung gesteckt und so daran gedreht bis das Hauptmaximum mittig vom Sensor

erfasst wird und die n -ten Nebenmaxima links und rechts des Hauptmaximas in etwa die gleiche Intensität haben.

Nun kann die Intensität der Beugungsfigur abhängig von der Detektorstellung gemessen werden. Dabei wird über einen Verschiebeweg von 50 mm die Intensität punktweise gemessen. Die genaue Position kann an der Skala der Schiene abgelesen werden. Ein Strich entspricht einem mm, genauso wie eine Trommelumdrehung. Auf der Trommel kommt eine Skala hinzu, welche in μm ablesbar ist.

Aus der Position des Detektors lässt sich der Beugungswinkel φ aus der Detektorstellung ζ bestimmen. Dies ist notwendig um die aufgenommene Intensitätskurve $I(\zeta)$ mit dem Verlauf $I(\varphi)$ vergleichen zu können.

Es gilt:

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{\zeta - \zeta_0}{L}. \quad (10)$$

Dabei ist ζ_0 die Detektorstellung für den ungebeugten Strahl und L der Abstand des Spalts zur Detektorblende.

Für den Doppelspalt wird genauso vorgegangen.

Zu beachten ist, dass auch bei abgeschaltetem Laser bereits ein sogenannter Dunkelstrom I_{du} fließt, welcher daher bei abgedeckter Detektorblende gemessen werden muss.

3.2.2 Messung des Abstands per Mikroskop

Zunächst muss das Mikroskop geeicht werden, damit die Breite b des Spalts ausgemessen werden kann. Dies geschieht mithilfe eines Objektmikrometers. Dies ist eine Glasplatte mit eingetätzter Mikrometerskala. In der Brennebene des Okulars liegt eine Skala mit willkürlicher Teilung.

Nach der Fokussierung auf die Skala des Objektmikrometers können die Skalen verglichen werden und so die Teilung in μm ausgedrückt werden.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung des Dunkelstroms

Um die Messwerte mit der Theorie vergleichen zu können muss zuerst der Dunkelstrom I_{du} gemessen werden.

Dazu wurde unter Versuchsbedingungen, jedoch mit ausgeschaltetem Laser, eine Messung durchgeführt.

Für den Dunkelstrom ergab sich:

$$I_{\text{du}} = 0,13 \text{ nA} \quad (11)$$

Die Aufgetragenenen Messwerte in den Tabellen sind noch nicht um diesen Wert reduziert.

4.2 Bestimmung der Spaltbreite eines festen Einfachspalts

Im folgenden wird die Spaltbreite eines Einfachspalts auf zwei verschiedene Weisen gemessen. Einmal mit Hilfe des Beugungsmusters und einmal mit Hilfe eines Mikroskops.

4.2.1 Bestimmung mit Hilfe des Beugungsmusters

Wie die Spaltbreite bestimmt wird, wird bereits in Abschnitt 3.2.1 erläutert. Die bereinigten Messwerte finden sich in Tabelle 4.1 wieder.

Die gemessene Intensität wurde in Grafik 6 gegen die Detektorposition aufgetragen und eine Theoriekurve nach Gleichung (4) eingefügt um die Kurven vergleichen zu können. Zur Anpassung wurde Gnuplot benutzt.

Es ergibt sich mithilfe der Formel:

$$f(x) = a^2 b^2 \left(\frac{\lambda}{\pi b \sin\left(\frac{x-x_0}{d}\right)} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi b \sin\left(\frac{x-x_0}{d}\right)}{\lambda} \right) \quad (12)$$

der Wert:

$$b = (74,6 \pm 1,7) \mu\text{m} \quad (13)$$

Die errechnete Spaltbreite b entspricht nicht exakt der vorgegebenen von $b = 80 \mu\text{m}$. Die Abweichung beträgt 6,75 %.

Auf mögliche Fehlerquellen wird in der Diskussion eingegangen.

| x[mm] | I[nA] | x[mm] | I[nA] | x[mm] | I[nA] |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 1.3 | 17 | 12 | 34 | 2.75 |
| 1 | 1.3 | 18 | 12.5 | 35 | 3.4 |
| 2 | 1.5 | 19 | 16 | 36 | 4 |
| 3 | 1.8 | 20 | 24 | 37 | 3.6 |
| 4 | 2.2 | 21 | 32 | 38 | 2.7 |
| 5 | 2.3 | 22 | 46 | 39 | 1.55 |
| 6 | 2.1 | 23 | 58 | 40 | 0.84 |
| 7 | 1.5 | 24 | 68 | 41 | 0.58 |
| 8 | 0.9 | 25 | 72 | 42 | 0.82 |
| 9 | 0.8 | 26 | 68 | 43 | 1.1 |
| 10 | 1.6 | 27 | 58 | 44 | 1.45 |
| 11 | 3.4 | 28 | 44 | 45 | 1.5 |
| 12 | 6.4 | 29 | 28 | 46 | 1.26 |
| 13 | 9.6 | 30 | 18 | 47 | 0.9 |
| 14 | 11 | 31 | 9.2 | 48 | 0.66 |
| 15 | 12.5 | 32 | 3.8 | 49 | 0.42 |
| 16 | 12.5 | 33 | 2.4 | 50 | 0.34 |

Tabelle 4.1: Intensität des festen Einfachspalts abhängig von der Detektorstellung x

4.2.2 Bestimmung mit Hilfe des Mikroskops

Das Ausmessen mithilfe des Mikroskops wurde bereits in Abschnitt 3.2.2 erklärt. Es wurde auf das Objektmikrometer fokussiert. Nun wurde der Spalt unter das Objektiv gelegt und mithilfe eines verschiebbaren Teilstrichs die Spaltkanten überdeckt. Diese Fixierung wurde dann auf die Mikrometerskala des Objektmikrometers gelegt und ausgemessen. Aufgrund von Unschärfen wurde ein Fehler von $\sigma_0 = 10 \mu\text{m}$ angenommen. Es ergab sich für die Spaltbreite b:

$$b = 70 \mu\text{m} \quad (14)$$

Damit ergibt sich für die gemessene Spaltbreite $b_{\text{mikro}} = (70 \pm 10) \mu\text{m}$. Es besteht ein Unterschied von 12,5 % zwischen der gemessenen und der angegebenen Spaltbreite von $b = 80 \mu\text{m}$. Auf Fehlerquellen wird in der Diskussion eingegangen.

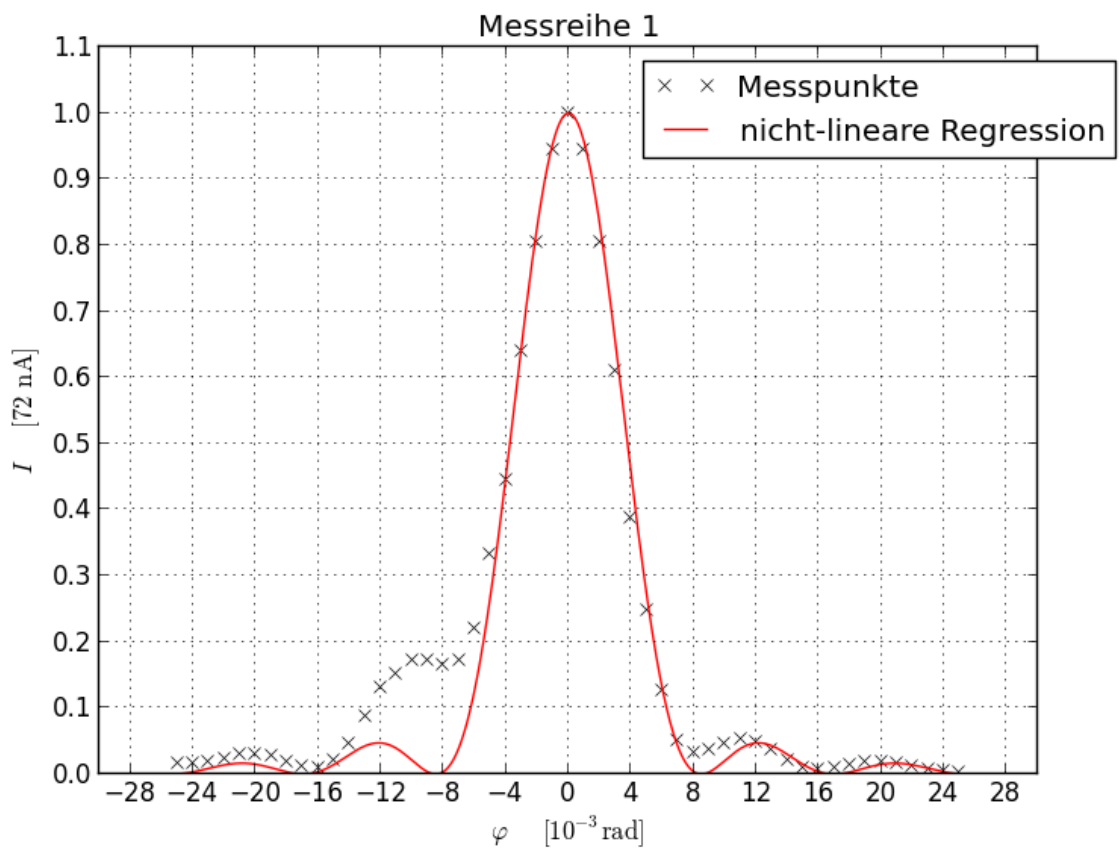


Abbildung 6: Graphische Darstellung der Beugung eines festen Einfachspalt

4.3 Bestimmung der Spaltbreite eines variablen Einfachspalts

Nun sollte die Breite b eines variablen Einfachspalts gemessen werden. Das Messverfahren ist dasselbe wie zuvor.

Die dazugehörigen Intensitätswerte abhängig von der Detektorposition finden sich in Tabelle 4.2. Weiter wurde eine Theoriekurve in die Grafik 7 eingügt, sodass ein Vergleich zwischen Theorie und Experiment möglich ist. Dafür wurde Gnuplot verwendet.

Es ergab sich:

$$b = (100,0 \pm 2,3) \mu\text{m} \quad (15)$$

| x[mm] | I[nA] | x[mm] | I[nA] | x[mm] | I[nA] |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 2.5 | 17 | 15 | 34 | 4.8 |
| 1 | 2.1 | 18 | 13 | 35 | 3 |
| 2 | 2.1 | 19 | 12.5 | 36 | 1.85 |
| 3 | 2.5 | 20 | 23.5 | 37 | 1.55 |
| 4 | 2.9 | 21 | 50 | 38 | 2.1 |
| 5 | 2.85 | 22 | 98 | 39 | 2.85 |
| 6 | 2.5 | 23 | 135 | 40 | 3 |
| 7 | 2.75 | 24 | 165 | 41 | 2.8 |
| 8 | 4 | 25 | 155 | 42 | 1.95 |
| 9 | 6.2 | 26 | 125 | 43 | 1 |
| 10 | 8 | 27 | 92 | 44 | 0.6 |
| 11 | 7.9 | 28 | 50 | 45 | 0.51 |
| 12 | 6 | 29 | 25.5 | 46 | 0.72 |
| 13 | 4 | 30 | 11 | 47 | 0.86 |
| 14 | 4.8 | 31 | 7.2 | 48 | 0.86 |
| 15 | 8.5 | 32 | 6.4 | 49 | 0.68 |
| 16 | 13 | 33 | 6 | 50 | 0.45 |

Tabelle 4.2: Intensität des variablen Einfachspalts abhängig von der Detektorstellung
x

Für die Spaltbreite b hat sich in der Messung ein Wert innerhalb des Bereiches von $20 - 200 \mu\text{m}$ ergeben. Da es sich um einen variablen Einfachspalt mit unbekannter Größe handelt, kann nicht genau gesagt werden wie weit vom tatsächlichen Wert abgewichen wurde. Es ist jedoch mit einem Fehler zu rechnen.

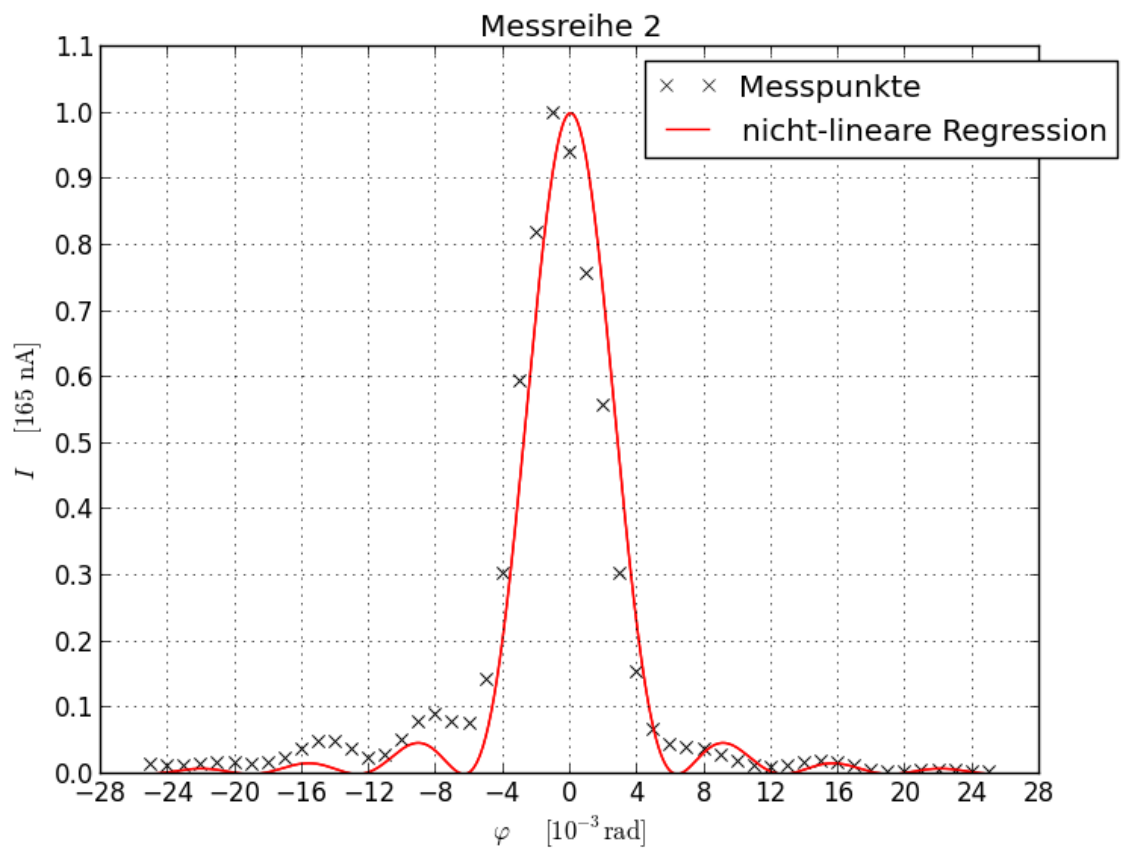


Abbildung 7: Graphische Darstellung der Beugung eines variablen Einfachspalt

4.4 Bestimmung der Spaltbreite eines festen Doppelspalts

Auch hier wurde dasselbe Verfahren wie bei den vorherigen Messungen angewendet. Die Messwerte sind in Tabelle 4.3 zu finden und der dazugehörige Graph mit Theorikurve nach Gleichung (9) in Grafik 8.

Für die Spaltbreite b und den Abstand zwischen den Spalten d ergab sich:

$$\begin{aligned} b &= (33,5 \pm 1,6) \mu\text{m} \\ d &= (226,7 \pm 2,3) \mu\text{m} \end{aligned}$$

Die gemessenen Werte weichen um $\Delta b = 16,25\%$ und $\Delta d = 9,32\%$ von den ablesbaren Werten auf der Messscheibe $b = 40 \mu\text{m}$ und $d = 250 \mu\text{m}$ ab. Mögliche Fehlerquellen kommen in der Diskussion.

| x[mm] | I[nA] | x[mm] | I[nA] | x[mm] | I[nA] |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 1 | 17 | 6.4 | 34 | 2.8 |
| 1 | 2.3 | 18 | 25 | 35 | 10 |
| 2 | 1.6 | 19 | 8 | 36 | 2.8 |
| 3 | 1.4 | 20 | 26 | 37 | 3.4 |
| 4 | 0.98 | 21 | 24 | 38 | 2.9 |
| 5 | 0.6 | 22 | 12.5 | 39 | 0.66 |
| 6 | 0.78 | 23 | 38 | 40 | 1.25 |
| 7 | 0.36 | 24 | 9.4 | 41 | 0.38 |
| 8 | 0.58 | 25 | 32 | 42 | 0.34 |
| 9 | 0.53 | 26 | 22.5 | 43 | 0.36 |
| 10 | 1.25 | 27 | 17 | 44 | 0.3 |
| 11 | 2.25 | 28 | 32 | 45 | 0.5 |
| 12 | 1.6 | 29 | 6.8 | 46 | 0.5 |
| 13 | 7 | 30 | 28 | 47 | 0.68 |
| 14 | 3.2 | 31 | 10.5 | 48 | 0.68 |
| 15 | 9.6 | 32 | 10.5 | 49 | 0.64 |
| 16 | 12.5 | 33 | 16 | 50 | 0.77 |

Tabelle 4.3: Intensität des festen Doppelspalts abhängig von der Detektorstellung x

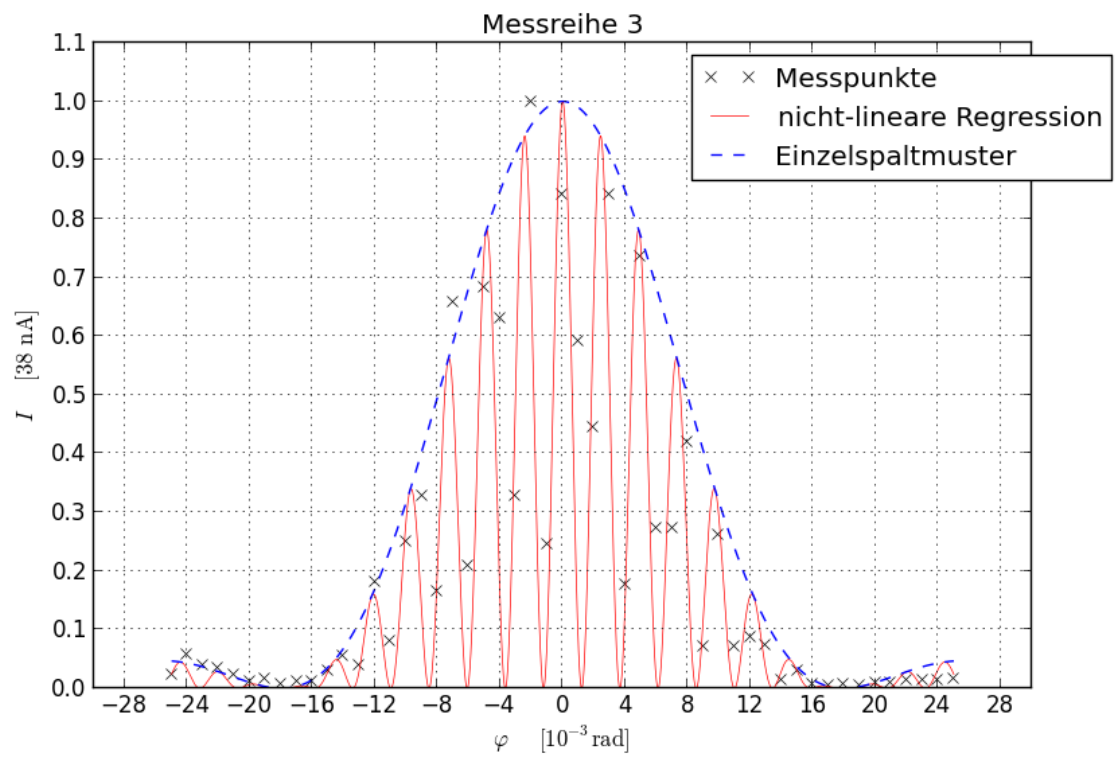


Abbildung 8: Graphische Darstellung der Beugung eines festen Doppelspalts

5 Diskussion

Allgemein lässt sich sagen, dass sich die theoretisch hergeleiteten Beziehungen besonders gut in den ersten beiden Messreihen wiedergespiegelt haben. Die Auswertung dieser Daten lieferte Werte für Spaltbreite und -abstand, die sehr nahe an den Herstellerangaben lagen.

Die dritte Messreihe lieferte auf den ersten Blick äußerst diffuse Werte. Dies lag an der geringen Auflösung der Messpunkte. Mit mehr Messpunkten hätte ein Fit hier genauere Werte für Spaltbreite- und abstand des Doppelspaltes liefern können. Dennoch waren die so gewonnenen Werte durchaus akzeptabel.

Die Fehlerquellen waren bei allen Messungen jedoch sehr groß. Die zuvor gemessene Dunkelspannung I_{du} hat höchst empfindlich auf Veränderungen der Lichtverhältnisse im Laborraum reagiert. Durch Ein- und Ausschalten der Lampen an anderen Versuchstischen oder das öffnen der Eingangstür konnten die Messwerte somit leicht beeinträchtigt werden. Zudem stellte das Justieren der Versuchsanordnung eine große Fehlerquelle dar. Der Laser konnte lediglich durch eine Stellschraube in Höhe und Ausrichtung fixiert werden. So war es schwierig, die Photozelle exakt zu treffen. Ebenso konnte nicht ausgeschlossen werden, dass die Photozelle genau senkrecht zum Laser zeigte. Dadurch traf auf einer Seite eventuell mehr Licht frontal auf die Zelle, als auf der anderen. Dies würde den Intensitätsunterschied neben dem Hauptmaximum in unseren Messdaten erklären.

Schließlich lässt sich über die Messung der Spaltbreite mit dem Mikroskop nur sagen, dass diese Methode äußerst ungenau ist. Zwar war das Ergebnis in derselben Größenordnung wie die Herstellerangabe, die Empfindlichkeit der Optik war jedoch so groß, dass wir die Aussagekraft dieser Messung stark bezweifeln. Die geringe Tiefenschärfe des Mikroskopes machte eine genaue Justierung auf die Ränder des Spaltes sehr schwierig.

Literatur

- [1] Physikalisches Anfängerpraktikum der TU Dortmund: Versuch Nr. 602 - Röntgen-Emissions- und Absorptionsspektren. Stand: Oktober 2012.