Physik Praktikum: Versuch 301

Lars Klompmaker
lars.klompmaker@tu-dortmund.de

Kai Brügge
kai.bruegge@tu-dortmund.de

29.11.2012

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie **3**

2 Versuchsaufbau **5**
2.1 Monozelle . . . 5
2.2 Generator . . . 5

3 Auswertung **5**
3.1 Monozelle Direktmessung . . . 5
3.2 Monozelle ohne Gegenspannung . . . 5
3.3 Monozelle mit Gegenspannung . . . 7
3.4 Sinusspannung . . . 7
3.5 Rechteckspannung . . . 8
3.6 Systematischer Fehler von U_0 . . . 9
3.7 Systematischer Fehler von Punkt H . . . 9
3.8 Leistung der Monozelle . . . 10
3.9 Zusammenfassung . . . 11

4 Diskussion **12**

5 Quellen **12**
5.1 Rechteckspannung . . . 12
5.2 Sägezahnspannung . . . 13

1 Theorie

Ziel dieses Versuches ist es, die Leerlaufspannung und den Innenwiderstand einer Monozelle (Batterie) und eines RC-Generators zu ermitteln.
Diese Spannungsquellen sind laut Definition in der Lage, über einen endlichen Zeitraum eine konstante elektrische Leistung zu liefern. Die Leerlaufspannung einer Quelle lässt sich eigentlich nur dann exakt bestimmen, wenn durch die Spannungsmessung kein Strom aus dem Spannungskreis abführt wird und die Quelle selbst keinen Widerstand besäße. Dies ist jedoch in der Realität nicht möglich, da Voltmeter über den gemessenen Strom die Spannung bestimmen. Nach dem Ohmschen Gesetz stehen der Strom I und die Spannung U mit dem Widerstand R im folgenden Zusammenhang:

$$U = RI. \tag{1}$$

Wenn man ein Voltmeter direkt an den Ausgangsbuchsen der Spannungsquelle anschließt, wird die sogenannte Klemmspannung U_K gemessen, welche je nach Größe des Innenwiderstands kleiner als die eigentliche Leerlaufspannung U_0 ist. Mit Hilfe der Maschenregel (2. Kirchhoffsches Gesetz) würde dann für die Summe der Leerlaufspannungen folgen, dass sie gleich der Summe der Spannungen an den Widerständen sind:

$$\sum_n U_{0\mathrm{n}} = \sum_m R_\mathrm{m} I_\mathrm{m}. \tag{2}$$

So folgt für den einfachen Stromkreis, der als Ersatzschaltbild für die reale Spannungsquelle mit Verbraucher dient, gemäß Abbildung 1, mit $U_{0\mathrm{n}} = U_0$, $I_\mathrm{m} = I$, $R_1 = R_\mathrm{i}$ und $R_2 = R_\mathrm{a}$, dass

$$U_0 = IR_\mathrm{a} + IR_\mathrm{i}. \tag{3}$$

Hieraus folgt für die Klemmspannung U_K:

$$U_\mathrm{K} = IR_\mathrm{a} = U_0 - IR_\mathrm{i}. \tag{4}$$

Wird nun ein hochohmiges Voltmeter benutzt, gilt für die Leerlaufspannung und die Klemmspannung

$$U_\mathrm{K} \approx U_0 \tag{5}$$

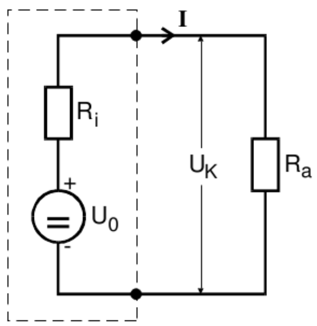


Abbildung 1: Ersatzschaltbild einer realen Spannungsquelle mit Lastwiderstand R_a [1]

Das gestrichelte Kästchen in Abbildung 1 beschreibt ein Ersatzschaltbild für eine reale Spannungsquelle, in der eine ideale Spannungsquelle (Innenwiderstand null) mit einem Widerstand R_i in Reihe geschaltet ist. Da eine realen Spannungsquelle immer einen gewissen Widerstand hat, kann dieser keine beliebig hohe Elektrische Leistung entzogen werden. Die Leistung kann berechnet werden, indem man die Leistung P in Abhängigkeit von R_a mit U_0 und R_i als festen Parametern wählt. Daraus folgt dann: $P = P(R_a) = I^2 R_a$. Diese Funktion würde für ein gewissen R_a ein Maximum durchlaufen. Wenn R_a

praktisch hierauf anpasst wird, spricht man von Leistungsanpassung. Für rein ohmsche Widerstände liegt das Leistungsmaximum bei $R_a = R_i$. Die maximale Leistung beträgt somit

$$P = \frac{U_0^2 \cdot R_i}{(R_i + R_i)^2} = \frac{U_0^2}{4R_i} \tag{6}$$

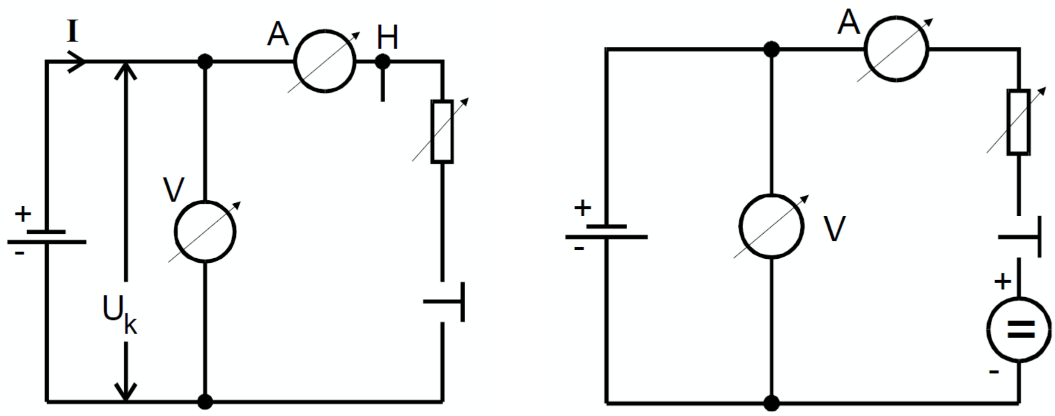
In der Starkstromtechnik ist diese Leistungsanpassung nicht interessant. Wegen des hohen Stromes ist grundsätzlich mit dem Eigenwiderstand der Leitung eine hohe Verlustleistung zu erwarten.

2 Versuchsaufbau

In diesem Versuch messen wir die Klemmspannung mit Hilfe eines Voltmeters und den Strom, der durch den Schaltkreis fließt, unter Verwendung eines Amperemeters.

2.1 Monozelle

Als erstes wird die Klemmspannung einer Monozelle direkt mit einem Voltmeter gemessen. Dann wird die Monozelle nach dem Schaltbild in Abbildung 2a mit einem regelbaren Widerstand verbunden, dessen Widerstand zwischen $0 - 50\Omega$ liegt. Für verschiedene Widerstände werden Spannung und Stromstärke gemessen.



(a) Schaltung zur Bestimmung von U_0 und R_i

(b) Wie Abb. 2a, mit Gegenspannung

Abbildung 2: Versuchsaufbau für Monozelle [1]

Nun schaltet man nach Abbildung 2b eine Gegenspannung hinzu, die ca. 2V größer ist als U_0 und nimmt wieder Spannung und Strom für verschiedene Widerstände auf.

2.2 Generator

Die Monozelle wird nun durch einen Generator ersetzt. Es kann zwischen Rechteck- und Sinusspannung gewählt werden, für beide Spannungen wird wie bei der Monozelle ohne Gegenspannung eine Messreihe aufgenommen. Der Widerstand bei der Rechteckspannung liegt im Bereich $20 - 250\Omega$, bei der Sinusspannung bei $0{,}1 - 5k\Omega$.

3 Auswertung

3.1 Monozelle Direktmessung

Die gemessene Leerlaufspannung hat den Wert

$$U_0 = 1{,}60V.$$

Der Innenwiderstand beträgt $R_v = 10\mathrm{M}\Omega$.

3.2 Monozelle ohne Gegenspannung

Bei der Messung mit der Monozelle ohne Gegenspannung stieg die Spannung mit größer werdendem Lastwiderstand an, die Stromstärke sank. Der Wert des Widerstandes ließ sich nicht ablesen, findet sich jedoch, nach dem ohmschen Gesetz berechnet, in Tabelle 1 zusammen mit den gemessenen Werten für Spannung und Stromstärke.

Tabelle 1: Spannung und Strom der Monozelle sowie errechneter Lastwiderstand

Spannung in V	Stromstärke in A	Widerstand in Ω
0,01	0,120	0,05
0,24	0,100	2,40
0,71	0,084	8,50
0,85	0,071	11,97
1,00	0,058	17,39
1,05	0,052	20,19
1,10	0,047	23,40
1,15	0,042	27,38
1,20	0,037	32,88
1,25	0,031	40,98
1,30	0,026	50,00

Abbildung 3 zeigt die gemessenen Werte graphisch aufgetragen. Es fällt auf, dass die letzten beiden Werte stark von den anderen Werten abweichen. Dies ergibt sich aus einem ungenauen Messbereich und der Umstellung dieses bei den anderen Werten. In der weiteren Betrachtung werden die Punkte nicht berücksichtigt. Aus der mit GNUPlot errechneten Linearisierung kann nun die Leerlaufspannung U_0 als Y-Achsenabschnitt sowie den Innenwiderstand R_i als Betrag der Steigung angeben:

$$R_i = (10{,}2 \pm 0{,}2)\Omega$$
$$U_0 = (1{,}57 \pm 0{,}01)V$$

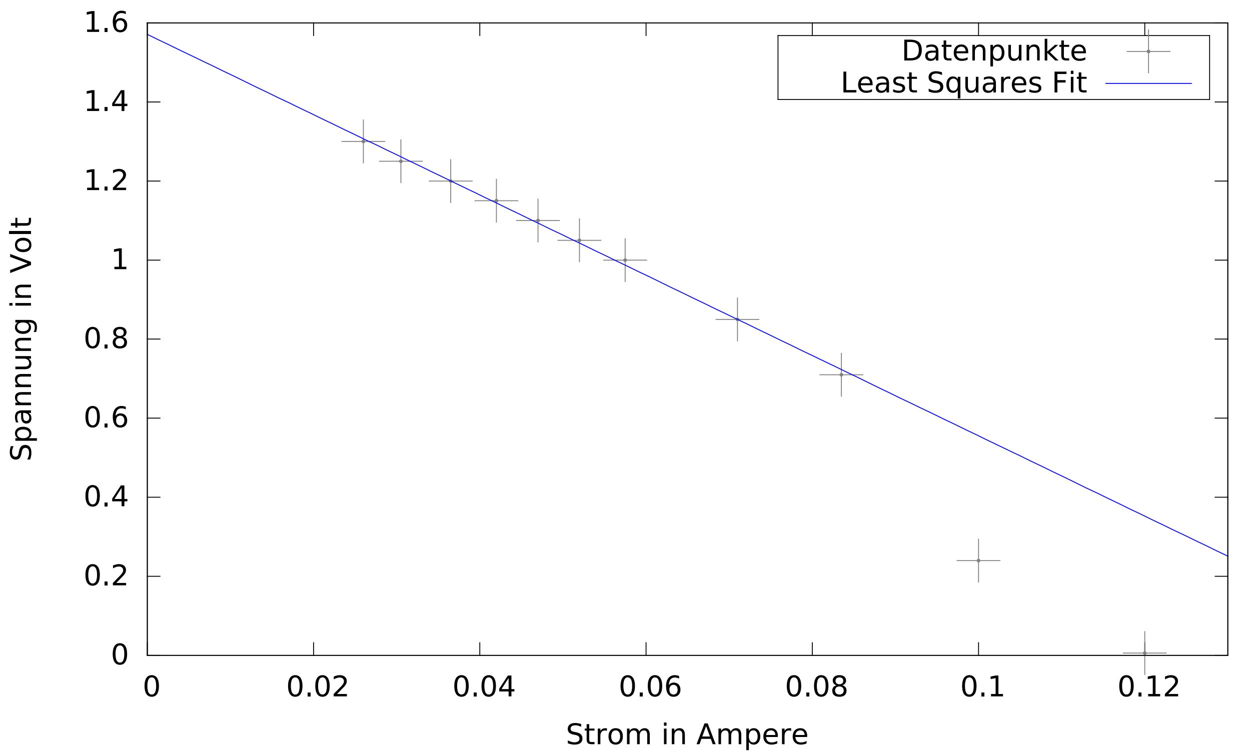


Abbildung 3: Spannung gegen Strom der Monozelle, inkl. Ausgleichsgerade

3.3 Monozelle mit Gegenspannung

Bei der Messung mit der Monozelle mit Gegenspannung sanken sowohl die Spannung als auch die Stromstärke mit steigendem Lastwiderstand. Die Gegenspannung betrug $U_G = 3{,}5$V. Der Widerstand ist wieder aus Stromstärke und Spannung errechnet und findet sich mit den gemessenen Werten in Tabelle 2.

Tabelle 2: Monozelle mit Gegenspannung (3,5V): Spannung,Strom und errechneter Lastwiderstand

Spannung in V	Stromstärke in A	Widerstand in Ω
2,60	0,094	27,81
2,45	0,084	29,17
2,34	0,074	31,62
2,28	0,069	33,04
2,23	0,063	35,68
2,18	0,058	37,91
2,11	0,050	42,20
2,06	0,045	45,78
2,01	0,040	50,25
1,98	0,037	54,25
1,95	0,034	57,35

Graphisch aufgetragen sind die Werte in Abbildung 4, inklusive der mit GNUPlot berechneten Ausgleichsgeraden. Der zuerst gemessene Wert fällt erneut etwas aus der Reihe, da der Messbereich geändert wurde, wird jedoch verwendet. Es ergibt sich wie zuvor die Leerlaufspannung U_0 als Y-Achsenabschnitt sowie den Innenwiderstand R_i als Betrag der Steigung:

$$R_i = (10{,}4 \pm 0{,}3)\Omega$$
$$U_0 = (1{,}59 \pm 0{,}02)V$$

3.4 Sinusspannung

Bei der Messung mit einem Sinusspannung erzeugenden Generator ergaben sich die folgenden Werte für Stromstärke und Spannung und die daraus errechneten Werte für den Lastwiderstand:

Tabelle 3: Sinusspannung: Spannung, Strom und errechneter Lastwiderstand

Spannung in V	Stromstärke in $\cdot 10^{-4} A$	Widerstand in Ω
0,70	23,50	297,87
0,89	21,25	418,82
1,45	14,50	1000,00
1,50	10,25	1463,41
1,82	8,50	2141,18
1,91	7,50	2546,67
2,00	6,25	3200,00
2,08	5,25	3961,90
2,13	4,50	4733,33
2,20	3,50	6285,71

Graphisch dargestellt inklusive einer Ausgleichsgerade befinden sich die Messwerte in Abbildung 5.

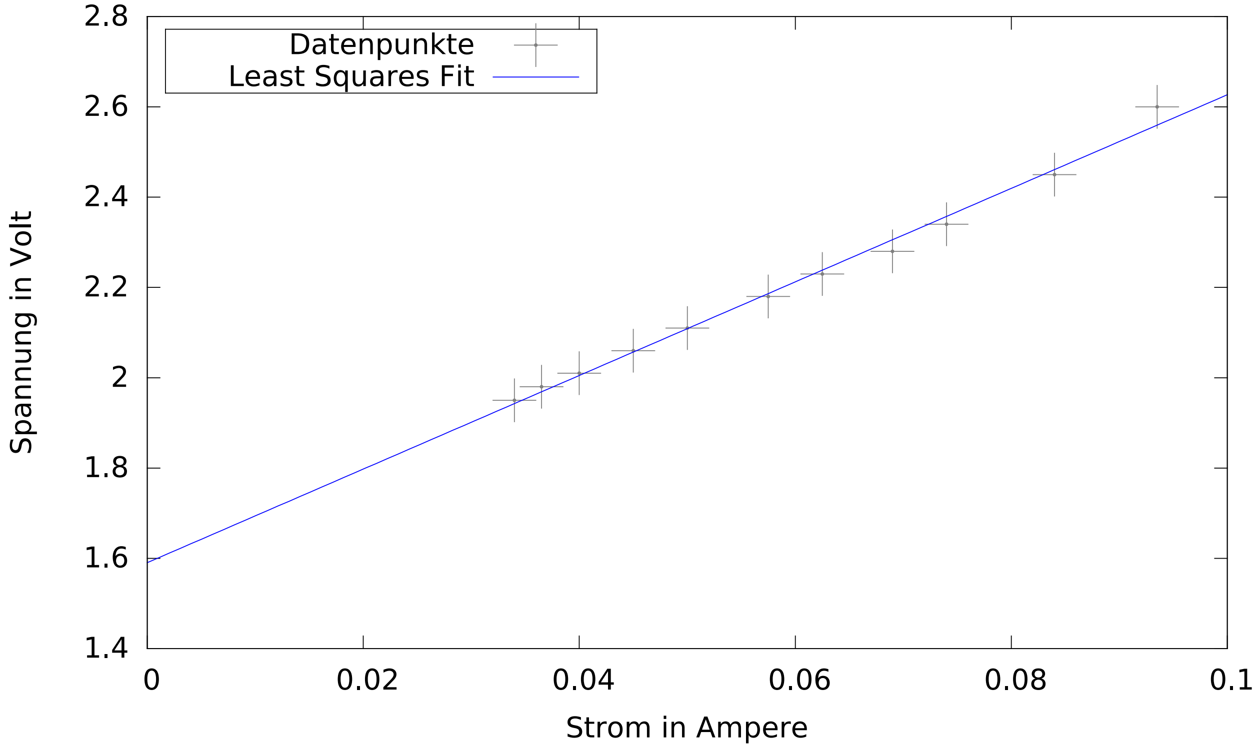


Abbildung 4: Spannung gegen Strom der Monozelle mit Gegenspannung, inkl. Ausgleichsgerade

Für die Linearisierung ergibt sich:

$$R_i = (740 \pm 35)\Omega$$
$$U_0 = (2{,}45 \pm 0{,}04)V$$

3.5 Rechteckspannung

Bei der Messung mit einem Rechteckspannung erzeugenden Generator ergaben sich die folgenden Werte für Stromstärke und Spannung und die daraus errechneten Werte für den Lastwiderstand:

Tabelle 4: Rechteckspannung: Spannung, Strom und errechneter Lastwiderstand

Spannung in V	Stromstärke in $\cdot 10^{-3} A$	Widerstand in Ω
0,16	5,90	27,54
0,21	4,85	42,27
0,28	4,10	68,29
0,32	3,30	96,97
0,34	2,90	117,24
0,36	2,50	144,00
0,38	2,15	176,74
0,40	1,90	207,89
0,41	1,65	248,48
0,42	1,40	300,00

Graphisch dargestellt inklusive einer Ausgleichsgerade befinden sich die Messwerte in Abbildung 6.

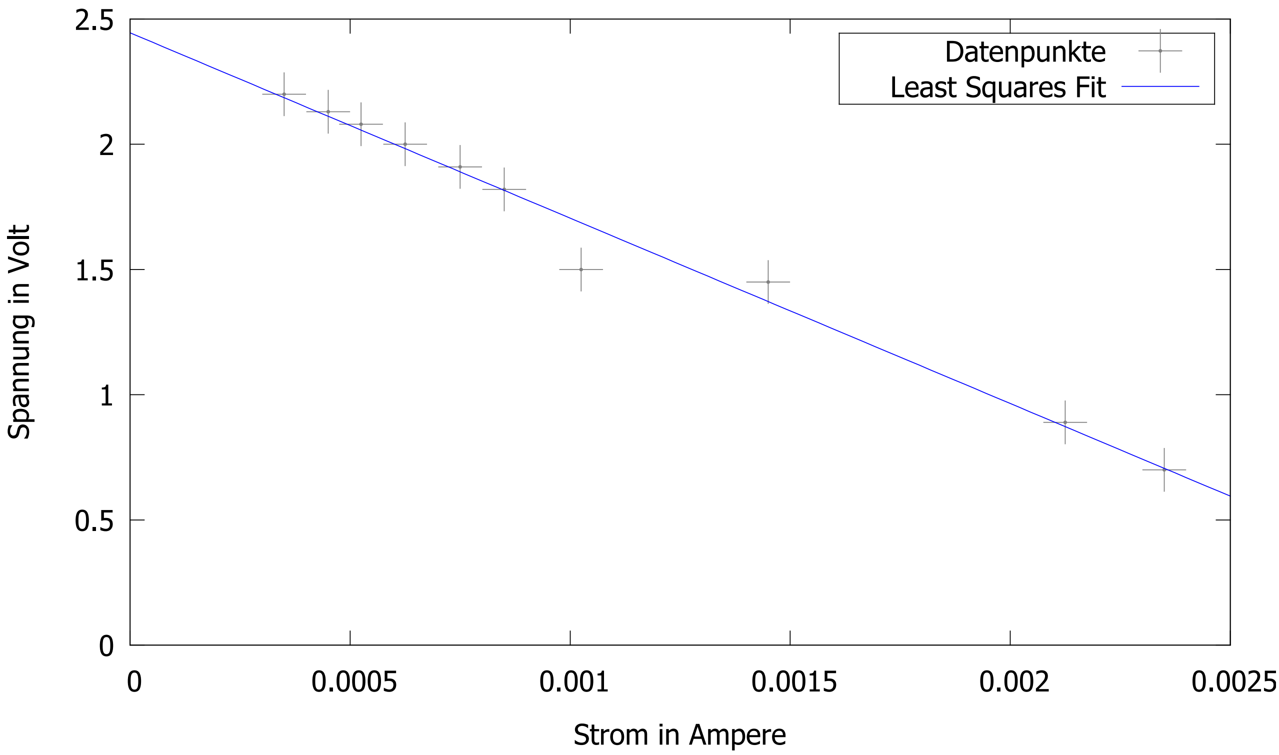


Abbildung 5: Spannung gegen Strom der der Sinusspannung, Ausgleichsgerade

Für die Linearisierung ergibt sich:

$$R_i = (58{,}7 \pm 1{,}9)\Omega$$
$$U_0 = (0{,}51 \pm 0{,}01)V$$

3.6 Systematischer Fehler von U_0

Bei der direkten Messung von U_0 ergibt sich ein systematischer Fehler, da der Innenwiderstand des Voltmeters nicht, wie in der Theorie angenommen, unendlich ist, sondern einen endlichen Wert hat. Für das benutzte Voltmeter beträgt dieser ca. $R_\mathrm{V} = 10M\Omega$. Es ergibt sich für den realen Wert von U_0:

$$U_0 = U_\mathrm{k} \cdot \left(1 + \frac{R_i}{R_V}\right)$$
$$U_0 = 1{,}60V$$

Es ergibt sich quasi keine Abweichung vom gemessenen Wert, der Unterschied ist folglich so gering, dass er vernachlässigt werden kann.

3.7 Systematischer Fehler von Punkt H

Wird das Voltmeter hinter das Amperemeter am Punkt H in Abbildung 2a geschaltet, ergibt sich ein systematischer Fehler, da der Innenwiderstand des Amperemeters mitgemessen werden würde. Die Spannungswerte würden somit abweichen.

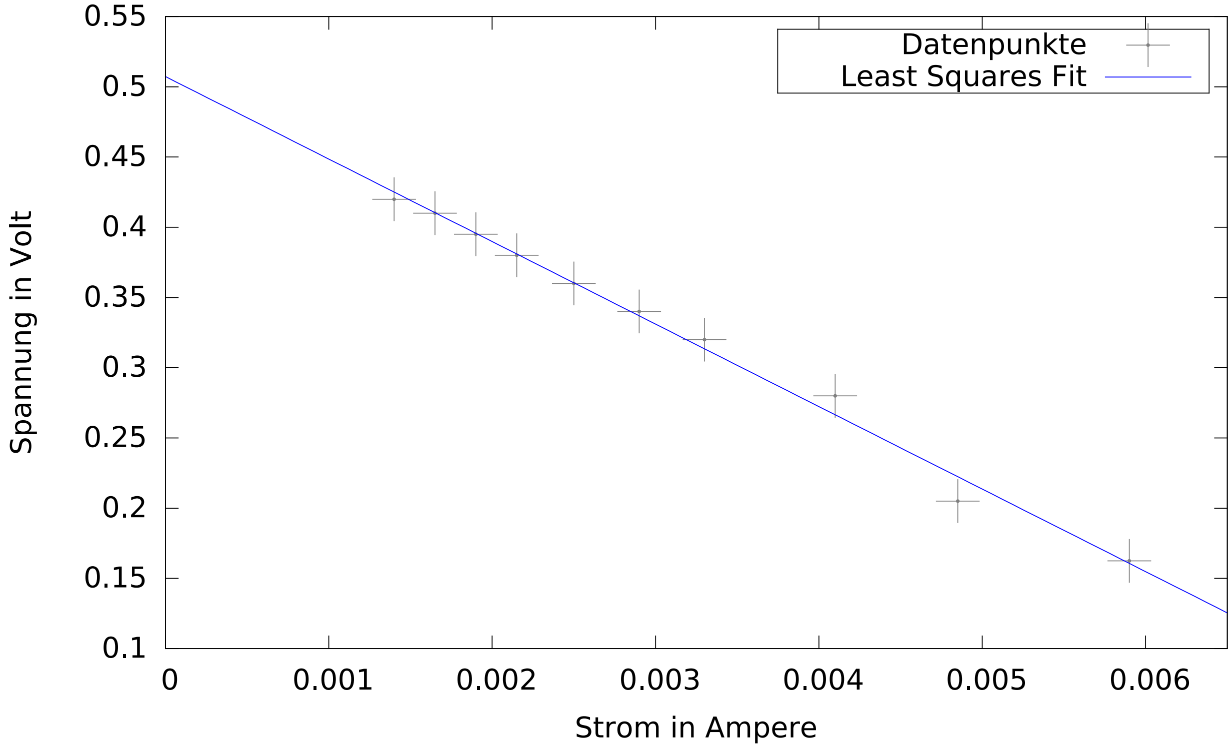


Abbildung 6: Spannung gegen Strom der der Rechteckspannung, Ausgleichsgerade

3.8 Leistung der Monozelle

Der Wert des regelbaren Belastungswiderstands berechnet sich nach

$$R_a = \frac{U_k}{I} \tag{7}$$

und findet sich in Tabelle 1 zusammen mit den gemessenen Werten für die Klemmspannung U_k und den Strom I. Die Leistung am Widerstand ist demnach:

$$P_{exp} = U_k I = I^2 R = \frac{U^2}{R} \tag{8}$$

und die theoretische Kurve

$$P_{theo} = \frac{U_0^2 R_a}{(R_i + R_a)^2} \tag{9}$$

Graphisch aufgetragen findet sich dieser Zusammenhang in Abbildung 7.

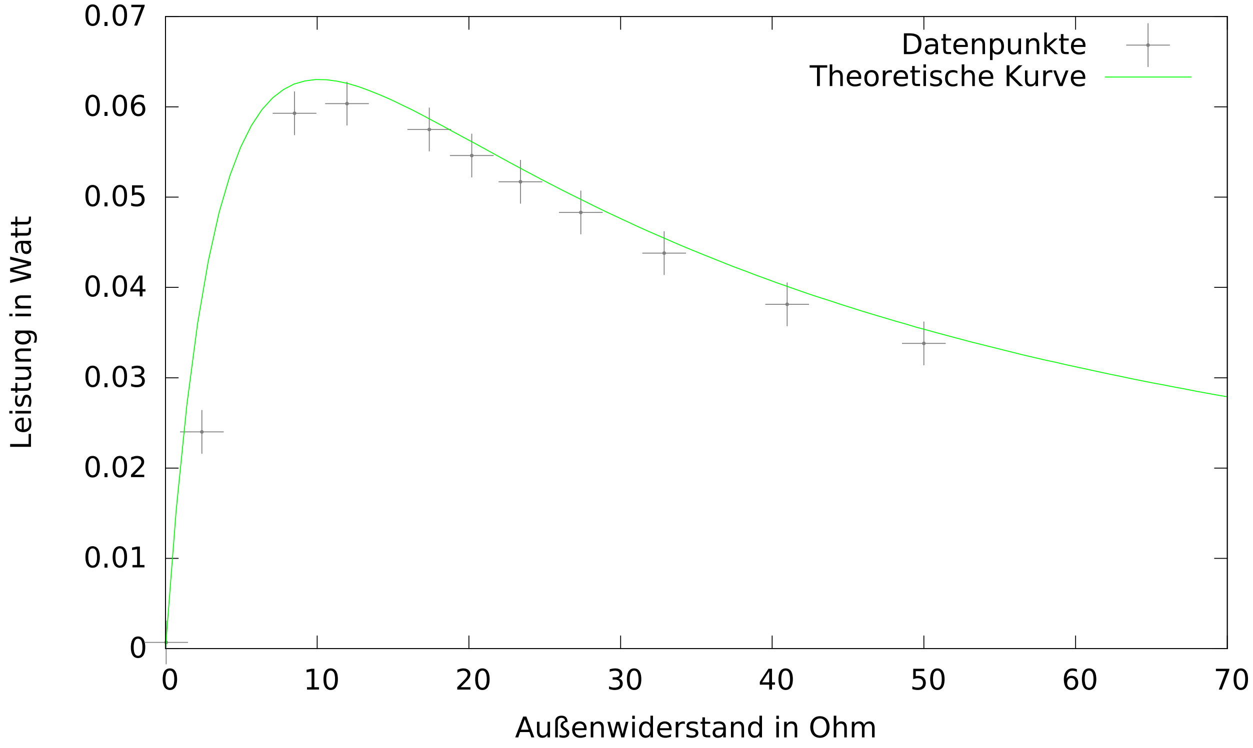


Abbildung 7: Leistung: Theoretische Kurve und Messwerte

3.9 Zusammenfassung

Tabelle 5: Errechnete Innenwiderstände und Leerlaufspannungen

Spannungsquelle	U_0/V	R_i/Ω
Monozelle	$1{,}57 \pm 0{,}01$	$10{,}2 \pm 0{,}2$
Monozelle mit U_g	$1{,}59 \pm 0{,}02$	$10{,}4 \pm 0{,}3$
Sinusspannung	$2{,}45 \pm 0{,}04$	740 ± 35
Rechteckspannung	$0{,}51 \pm 0{,}01$	$58{,}7 \pm 1{,}9$

Grafik

4 Diskussion

Durch das Variieren des Messbereichs am Multimeter kam es zu großen Fehlern. Dies liegt an einer ungenügenden Eichung auf allen Messbereichen.
Wie erwartet, ergaben sich für die beiden Messungen mit der Monozelle kaum verschiedene Werte für den Innenwiderstand und die Leerlaufspannung.
Der systematische Fehler von U_0 ist verschwindend gering, was am hohen Innenwiderstand des benutzen Voltmeters liegt.
Die experimentell bestimmten Werte für die Leistung am Lastwiderstand sind alle geringer als die theoretisch zu erwartenden. Es liegt folglich ein systematischer Fehler vor.

5 Quellen

- [1]Skript zum Versuch 301 des physikalischen Anfängerpraktikums an der TU Dortmund zu finden unter:

http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V301.pdf (Stand 05.12.2012)

$$f(t) = \begin{cases} +\frac{4A}{T}t + A, & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ -\frac{4A}{T}t + A, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

$b_n = 0 \qquad \forall n$, da $f(t)$ eine gerade Funktion ist.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt \\ &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^0 \frac{4A}{T}t\cdot\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt - \frac{T}{2}\int_0^{-\frac{T}{2}}\frac{4A}{T}t\cdot\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt + \cancel{\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 2A\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt} \end{aligned}$$

Der letzte Term verschwindet wegen des Integrals des Cosinus über eine volle Periode. Partielle Integration liefert nun:

$$\begin{aligned} &= \frac{8A}{T}\frac{T}{2\pi n}\left[\cancel{t\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\Big|_{-\frac{T}{2}}^0} - \int_{-\frac{T}{2}}^0 \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt - \cancel{t\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}} + \int_0^{\frac{T}{2}}\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt\right] \\ &= \frac{8A}{T^2}\left(\frac{T}{2\pi n}\right)^2\left[\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\Big|_{-\frac{T}{2}}^0 - \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right] \\ &= \frac{2A}{\pi^2 n^2}(1-\cos(-n\pi)-\cos(n\pi)+1) \\ &= \frac{4A}{\pi^2 n^2}(1-\cos(n\pi)) \end{aligned}$$

und somit: $a_n = \frac{4A}{\pi^2 n^2}$, n ungerade.

5.1 Rechteckspannung

$$f(t) = \begin{cases} A, & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ -A, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Grafik

$a_n = 0 \qquad \forall n$, da $f(t)$ eine ungerade Funktion ist.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} A\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt - \frac{T}{2}\int_{0}^{\frac{T}{2}} A\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt \\
&= \frac{2}{T}\left(A\frac{T}{2n\pi}\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{T}{2}} - A\frac{T}{2n\pi}\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{0}\right) \\
&= \frac{A}{n\pi}(\cos(n\pi) - \cos(0) - \cos(0) + \cos(n\pi)) = \frac{2A}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1)
\end{aligned}$$

und somit: $b_n = -\frac{4A}{n\pi}$, n ungerade.

5.2 Sägezahnspannung

$$f(t) = \frac{2A}{T}t$$

$a_n = 0 \qquad \forall n$, da $f(t)$ eine ungerade Funktion ist.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2A}{T}t\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \frac{4A}{T^2}\cdot\left[-\frac{T}{2n\pi}t\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \cancel{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{T}{2n\pi}\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt}\right] \\
&= \frac{A}{n\pi}\cos(n\pi)
\end{aligned}$$

und somit: $b_n = \frac{A}{n\pi}(-1)^n$.