V103

Biegung elastischer Stäbe

Evelyn Romanjuk
evelyn.romanjuk@tu-dortmund.de

Ramona Kallo
ramonagabriela.kallo@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.12.17 Abgabe: 12.01.18

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll das Elastizitätsmodul eines Metalls mit verschiedenen Formen bestimmt und die gemessenen Daten mit Literaturwerten verglichen werden.

2 Theorie

2.1 Allgemein

Durch das Einwirken von Kräften auf einen Körper kann es zur Verformung des Körpers kommen. In der Physik wird von Spannungskräften gesprochen, wenn diese auf den Flächeninhalt bezogen sind. Die Spannung wird in zwei anderen Kräften gegliedert: die Normalspannung σ, die senkrecht zur Oberfläche steht und die Tangentialspannung, die zur Oberflächenparallelen zeigt. Es entsteht somit eine relative Längenänderung, die im Fall, dass sie klein genug ist, ein Zusammenhang zwischen der Normalspannung σ und der Deformation zeigt. Dieser Zusammenhang wird in der Physik als Hookesches Gesetz bezeichnet und ist gegeben als:

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L}. \tag{1}$$

Dabei bezeichnet der Proportionalitätsfaktor E den Elastizitätsmodul, der in der Werkstofftechnik eine wichtige Größe darstellt. In diesem Versuch wird das Elastizitätsmodul unter Anwendung einer speziellen Deformation, der Biegung, bestimmt.

2.2 Einseitige Einspannung

Wirkt eine Kraft F auf einen einseitigen eingespannten stabförmigen Probekörper, so entsteht eine Durchbiegung $D(x)$. Dieser ist in der Abbildung 1 zu sehen. Es lässt sich

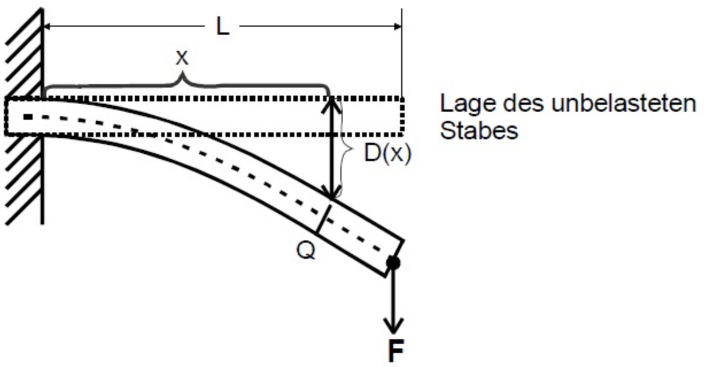

Abbildung 1: Durchbiegung eines einseitig eingespannten Stabes, [1, S. 2].

in der Abbildung 1 erkennen, dass entgegen der Kraft F, noch die Zugspannung in der oberen Schicht und die Druckspannung in der unteren Schicht wirken, die entgegengesetzt gleich sind, so dass ein Gleichgewicht entsteht:

$$M_{\mathrm{F}} = M_{\sigma} \tag{2}$$

Diese bewirken ein Drehmoment M_{σ}, welches sich über die Integration über den Querschnitt Q errechnen lässt:

$$M_{\sigma} = \int\limits_{Q} y \cdot \sigma(y) dq$$

wobei y der Abstand zur neutralen Faser darstellt. Der neutrale Faser ist der Bereich, wo keine Spannungen auftreten. Anhand des Kräftepaares kann eine Drehmomentgleichung aufgestellt werden, um die Funktion $D(x)$ zu bestimmen. Dabei ist $D(x)$ die Durchbiegung eines Stabes zwischen belastetem und unbelastetem Zustand. Der äußere Drehmoment M_{F} auf das Flächenelement Q lässt sich wie folgt berechnen:

$$M_{\mathrm{F}} = F(L - x).$$

Hierbei ist L die Länge der Stabes und x der Abstand des Messpunktes zum Anfang des Stabes. Es wird in die Gleichung 2 eingesetzt und es ergibt sich nun:

$$\int\limits_{Q} y \cdot \sigma(y) dq = F(L - x). \tag{3}$$

Mit ein paar Überlegungen aus der Differentialgeometrie wird die Funktion $D(x)$ hergeleitet. In die Gleichung 5 wird das Hookesche Gesetz 1 für $\sigma(y)$ verwendet und somit folgt:

$$\sigma(y) = Ey\frac{d^2D}{dx^2}$$
$$\Longleftrightarrow E\frac{d^2D}{dx^2}\int y^2 dq = F(L - x)$$

mit

$$I = \int\limits_{Q} y^2 dq$$

wobei I das Flächenträgheitsmoment ist, welches berechnet werden kann. Nach Integration folgt die Gleichung für die Funktion $D(x)$:

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \cdot (Lx^2 - \frac{x^3}{3}) \tag{4}$$

für $(0 \leq x \leq L)$.

2.3 Beidseitige Einspannung

Nun wird der Stab beidseitig eingespannt. In der Mitte wirkt die Kraft F (siehe Abbildung 2) und der Stab lässt sich in zwei Bereiche unterteilen:

$$\text{Rechts}: 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$
$$\text{Links}: \frac{L}{2} \leq x \leq L.$$

Es gilt also in diesem Fall für das Drehmoment im ersten Bereich:

$$M_{\mathrm{F1}} = -\frac{F}{2} \cdot x.$$

Und für den zweiten Bereich:

$$M_{\mathrm{F2}} = -\frac{F}{2} \cdot (L - x).$$

Die Berechnungen für die Funktion $D(x)$ folgen analog zum vorherigen Kapitel. Mit ein paar Überlegungen aus der Differentialgeometrie sowie Integrationen, folgt für die beiden Bereiche folgendes:

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{F}{48EI} \cdot (3L^2x - 4x^3) \\ D(x) &= \frac{F}{48EI} \cdot (4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3). \end{aligned} \tag{5}$$

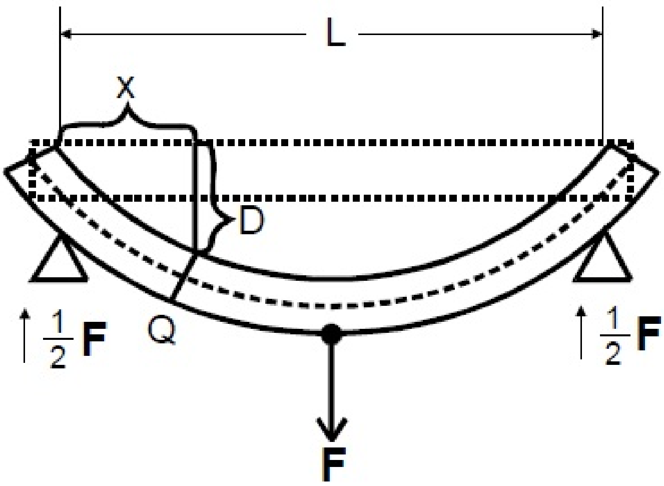

Abbildung 2: Durchbiegung eines beidseitig eingespannten Stabes, [1, S. 5].

3 Durchführung

In der Abbildung 3 ist der Versuchsaufbau schematisch skizziert. Es sind zwei verschiebbaren Meßuhren zu erkennen, die die Auslenkung messen. Die Probekörper werden einseitig an der Position C befestigt und beidseitig an den Positionen A und B. Die Durchbiegung erfolgt erst, wenn das Gewicht angehängt wird. Bei der einseitigen Einspannung wird das Gewicht am Ende der Stabes angehängt und im Gegensatz zu der einseitigen, wird das Gewicht mittig bei der beidseitigen Einspannung angehängt. Außerdem ist auch noch eine Längenskala an der Apparatur abgebildet. Diese dient zur Messung der Biegung an verschiedenen Stellen. Es wird davon ausgegangen, dass die Stäbe nicht gerade sind und deswegen soll eine Nullmessung ohne Last durchgeführt werden. Es werden Stäbe

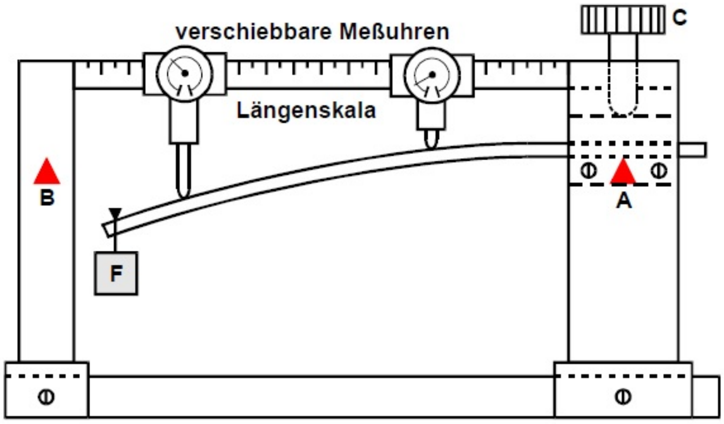

Abbildung 3: Aufbau der Apparatur zur Messung der elastischen Stäbe, [1, S. 6].

mit einem zylindrischen und quadratischen Querschnitt verwendet, die aus verschiedenen Materialien bestehen. Diese beiden werden zuerst gewogen, danach wird mit einer Schieblehre 10 mal die Breite und die Höhe vermessen.

Anschließend wird der Stab einseitig an der Position C eingespannt, und mit Hilfe der Meßuhren wird an 10 Stellen die Durchbiegung gemessen. Dabei ist $D_0(x)$ die Durchbiegung ohne Last, und $D_\mathrm{m}(x)$ dann die Durchbiegung mit Gewicht. Die Werte werden in Abhängigkeit vom Abstand x in einer Tabelle eingetragen. Die tatsächliche Durchbiegung berechnet sich mit:

$$D(x) = D_\mathrm{m}(x) - D_0(x).$$

Als nächstes wird das Verfahren analog für die beidseitige Einspannung wiederholt. Der Unterschied liegt jetzt nun daran, dass das Gewicht mittig angehängt wird und die Stäbe jeweils an den Positionen A und B befestigt werden. Es werden einmal von der rechten und linken Seite die Meßwerte notiert. Anschließend kann $D(x)$ bestimmt werden.

Für die Messung der Durchbiegungen können die Messuhren auch so verwendet werden, dass sie bei jeder Messung neu eingestellt werden, sodass die Durchbiegung direkt ablesbar und deshalb keine Nullmessung erforderlich ist.

4 Auswertung

4.1 Eckiger Stab, einseitige Einspannung

Die gemessene Länge L_e des eckigen Stabes und die Masse m_1 des Gewichtes betragen

$$L_\mathrm{e} = 0{,}45\,\mathrm{m}$$
$$m_1 = 0{,}5141\mathrm{kg}.$$

Die Dicken d des Stabes werden mit

$$\bar{d} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} d_\mathrm{i} \tag{6}$$

gemittelt:

$$d_1 = 0{,}01\,\mathrm{m}$$
$$d_2 = 0{,}01\,\mathrm{m}$$
$$d_3 = 0{,}01\,\mathrm{m}$$
$$d_4 = 0{,}01\,\mathrm{m}$$
$$d_5 = 0{,}01\,\mathrm{m}$$
$$d_6 = 0{,}01\,\mathrm{m}$$
$$d_7 = 0{,}01\,\mathrm{m}$$
$$d_8 = 0{,}01\,\mathrm{m}$$
$$d_9 = 0{,}01\,\mathrm{m}$$
$$d_{10} = 0{,}01\,\mathrm{m}$$
$$d = (0{,}01 \pm 0{,}00)\,\mathrm{m}$$

Aus der Dicke d des Stabes kann dessen Flächenträgheitsmoment bestimmt werden. Für einen quadratischen Querschnitt wird die Formel [2]

$$I_\mathrm{e} = \frac{d^4}{12}$$

verwendet. Für den eckigen Stab ergibt sich also ein Flächenträgheitsmoment von

$$I_\mathrm{e} = (8{,}33 \pm 0{,}00) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^4.$$

Zur Berechnung des Elastizitätsmoduls E wird für den eckigen Stab die Hilfsfunktion $(Lx^2 - \frac{x^3}{3})$ [1, S. 4] verwendet. Gegen diese wird werden die Durchbiegungen $D(x)$ aufgetragen. Die Steigung und der Y-Achsenabschnitt der Ausgleichsgeraden der Form $y = ax + b$, sowie ihre Fehler, werden von dem Python-Modul Matplotlib berechnet und betragen:

$$a_\mathrm{e} = (0{,}0384 \pm 0{,}0008)\,\frac{1}{\mathrm{m}^2}$$
$$b_\mathrm{e} = (0{,}06 \pm 0{,}03) \cdot 10^{-3}\mathrm{m}.$$

Tabelle 1: Eckiger Stab, einseitige Einspannung.

$x / 10^{-3}$ m	$D(x) / 10^{-3}$ m	$(Lx^2 - \frac{x^3}{3}) / 10^{-3}\text{m}^3$
110	0,25	5,0
150	0,41	9,0
170	0,51	11,4
200	0,69	15,3
230	0,82	19,7
250	0,93	22,9
300	1,27	31,5
350	1,62	40,8
400	1,92	50,7
446	2,45	59,9

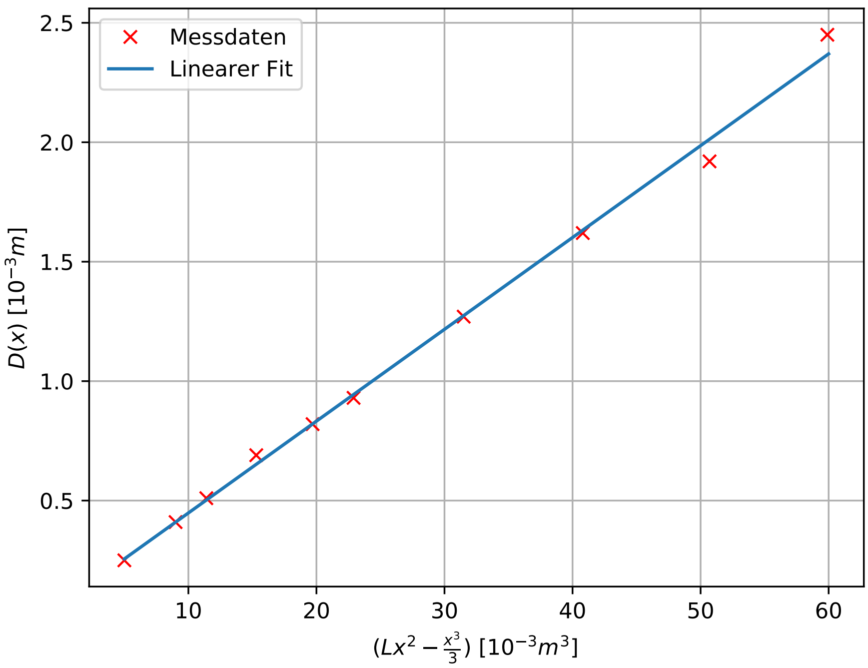

Abbildung 4: Lineare Regression: Eckiger Stab, einseitig eingespannt.

Wird Gleichung (7) nach E umgestellt und die Steigung passend eingesetzt, so ergibt sich das Elastizitätsmodul zu

$$E = \frac{F}{2 \cdot I \cdot a}.$$
$$\iff E = \frac{m \cdot g}{2 \cdot I \cdot a} \tag{7}$$

Der Fehler wird mithilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung ermittelt:

$$\begin{aligned} \varDelta E &= \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial a}\right)^2 \cdot (\varDelta a)^2} \\ \iff \varDelta E &= \frac{m \cdot g}{2 \cdot I \cdot a^2} \cdot \varDelta a. \end{aligned} \tag{8}$$

Nach Einsetzen aller Werte ergibt sich für den eckigen Stab ein Elastizitätsmodul von

$$E_{\mathrm{e}} = (78{,}8 \pm 1{,}6) \cdot 10^9 \,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

4.2 Runder Stab, einseitige Einspannung

Die Länge L_r des runden Stabes und Masse m_1 des Gewichtes werden mit

$$
\begin{aligned}
L_\mathrm{r} &= 0{,}44\mathrm{m} \\
m_1 &= 0{,}5141\mathrm{kg}
\end{aligned}
$$

bestimmt und die gemessenen Radien sind:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 0{,}01\,\mathrm{m} \\
r_2 &= 0{,}01\,\mathrm{m} \\
r_3 &= 0{,}01\,\mathrm{m} \\
r_4 &= 0{,}01\,\mathrm{m} \\
r_5 &= 0{,}0098\,\mathrm{m} \\
r_6 &= 0{,}0097\,\mathrm{m} \\
r_7 &= 0{,}01\,\mathrm{m} \\
r_8 &= 0{,}01\,\mathrm{m} \\
r_9 &= 0{,}01\,\mathrm{m} \\
r_{10} &= 0{,}01\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Die Radien r_i lassen sich analog zum eckigen Stab mit Gleichung (9) mitteln. Die Standardabweichung wird mit der Formel

$$
\Delta\bar{r} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(r_\mathrm{i}-\bar{r})^2}
$$

berechnet. Daraus ergibt sich für den Mittelwert r der Radien:

$$
r = (9{,}95 \pm 0{,}03)\cdot 10^{-3}\mathrm{m}
$$

Das Flächenträgheitsmoment I_r [2] für einen kreisförmigen Querschnitt ist:

$$
I_\mathrm{r} = \frac{\pi r^4}{4}.
$$

Die Fehlerrechnung für I_r erfolgt durch die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung mit

$$
\begin{aligned}
\Delta I_\mathrm{r} &= \sqrt{\left(\frac{\partial I_\mathrm{r}}{\partial r}\right)^2 \cdot (\Delta r)^2} \\
\iff \quad \Delta I_\mathrm{r} &= \pi \cdot r^3 \cdot \Delta r.
\end{aligned}
$$

Hiermit beträgt das Flächenträgheitsmoment für den runden Stab

$$
I_\mathrm{r} = (7{,}69 \pm 0{,}09)\cdot 10^{-9}\mathrm{m}^4.
$$

Tabelle 2: Runder Stab, einseitige Einspannung.

$x/\,10^{-3}\,\mathrm{m}$	$D(x)/\,10^{-3}\,\mathrm{m}$	$(Lx^2 - \frac{x^3}{3})/\,10^{-3}\mathrm{m}^3$
100	0,37	4,1
130	0,57	6,7
150	0,71	8,8
190	1,05	13,6
230	1,45	19,2
270	1,88	25,5
310	2,32	32,4
360	2,92	41,5
410	3,62	50,9
440	4,01	56,8

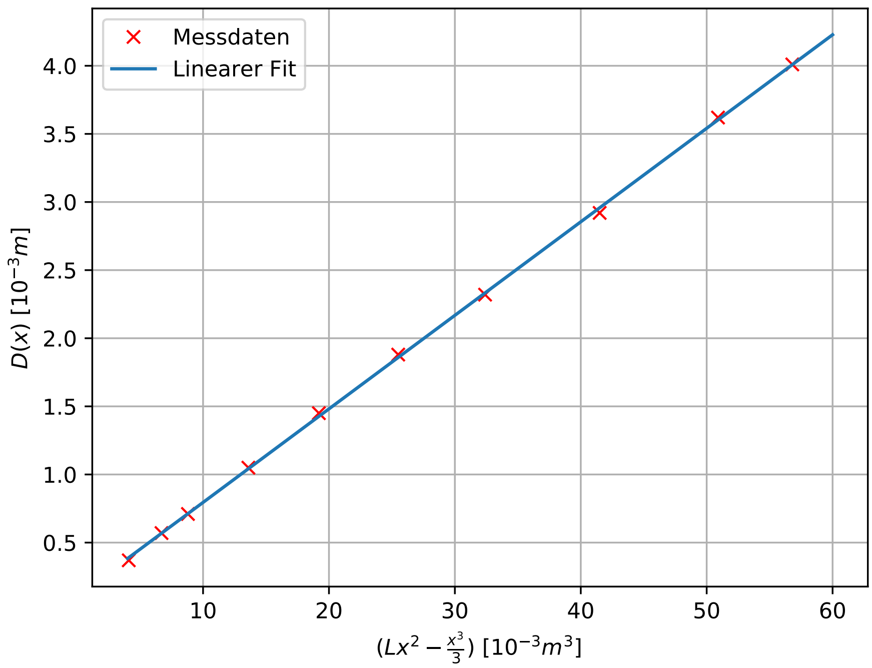

Abbildung 5: Lineare Regression: Runder Stab, einseitig eingespannt.

Nun wird das Elastizitätsmodul wieder mit der Hilfsfunktion $(Lx^2 - \frac{x^3}{3})$ berechnet, indem $D(x)$ gegen die Hilfsfunktion aufgetragen wird. Wieder werden Steigung und Achsenabschnitt der Ausgleichsgeraden mit dazugehörigen Fehlerwerten von Matplotlib berechnet:

$$a_\mathrm{r} = (0{,}0687 \pm 0{,}0004)\,\frac{1}{\mathrm{m}^2}$$
$$b_\mathrm{r} = (0{,}11 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}.$$

Analog zum eckigen Stab werden die Formeln (10) und (11) verwendet. Damit hat der runde Stab ein Elastizitätsmodul E_r von

$$E_\mathrm{r} = (4{,}77 \pm 0{,}03) \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

4.3 Runder Stab, beitseitige Auflage

Bei der beidseitigen Auflage wird der runde Stab aus dem Unterkapitel zuvor verwendet. Die Länge L_r, der Radius r und das Flächenträgheitsmoment I_r sowie die Masse m_2 des angehängten Gewichtes sind:

$$
\begin{aligned}
L_\text{r} &= 0{,}6\text{m} \\
r &= (9{,}95 \pm 0{,}03) \cdot 10^{-3}\,\text{m} \\
I_\text{r} &= (7{,}69 \pm 0{,}09) \cdot 10^{-9}\,\text{m}^4 \\
m_2 &= 1{,}17\,\text{kg}
\end{aligned}
$$

Tabelle 3: Runder Stab, beidseitige Auflage, rechts.

$x/\,10^{-3}\,\text{m}$	$D_\text{r}(x)/\,10^{-3}\,\text{m}$	$(3L^2x - 4x^3)/\,10^{-3}\text{m}^3$
30	0,15	32,2
50	0,17	53,5
70	0,29	74,2
90	0,39	94,3
110	0,50	113,5
130	0,55	131,6
150	0,60	148,5
170	0,68	163,9
190	0,73	177,8
210	0,78	189,8

Tabelle 4: Runder Stab, beidseitige Auflage, links.

$x/\,10^{-3}\,\text{m}$	$D_\text{l}(x)/\,10^{-3}\,\text{m}$	$(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3)/\,10^{-3}\text{m}^3$
340	0,81	210,5
360	0,75	203,9
380	0,71	195,0
400	0,66	184,0
420	0,60	171,1
440	0,55	156,4
460	0,46	140,2
480	0,36	122,7
500	0,28	104,0
520	0,18	84,4

Bei der beidseitigen Auflage werden jeweils die Elastizitätsmodule der linken und rechten Hälfte des Stabes berechnet. Dafür werden die folgenden Hilfsfunktionen [1,

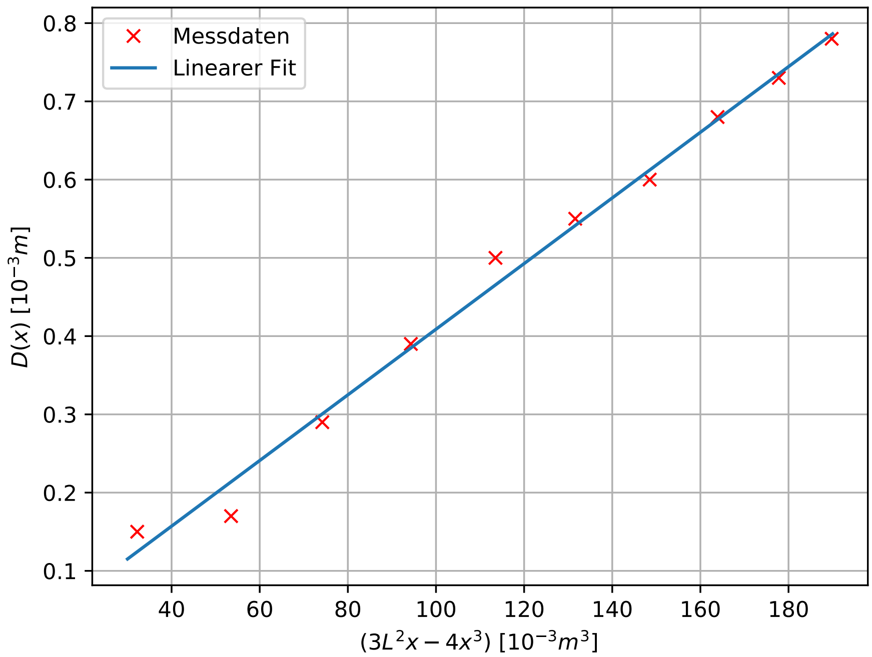

Abbildung 6: Lineare Regression: Runder Stab, beidseitig aufgelegt, rechte Seite

S. 5,6] verwendet:

$$\text{Rechts}: 0 \leq x \leq \frac{L_\mathrm{r}}{2}: 3L_\mathrm{r}^2 x - 4x^3$$
$$\text{Links}: \frac{L_\mathrm{r}}{2} \leq x \leq L_\mathrm{r}: 4x^3 - 2L_\mathrm{r}x^2 + 9L_\mathrm{r}^2 x - L_\mathrm{r}^3$$

Die Durchbiegungen $D(x)$ der jeweiligen Seite werden gegen die entsprechende Hilfsfunktion aufgetragen. Die Ausgleichsrechnung erfolgt über Matplotlib. Es ergeben sich folgende Werte für die Steigungen und die Y-Achsenabschnitte:

$$a_\mathrm{br} = (0{,}0042 \pm 0{,}0001)\,\frac{1}{\mathrm{m}^2}$$
$$b_\mathrm{br} = (-0{,}01 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$a_\mathrm{bl} = (0{,}005 \pm 0{,}008 \cdot 10^{-2})\,\frac{1}{\mathrm{m}^2}$$
$$b_\mathrm{bl} = (-0{,}23 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

Nun werden die beiden Gleichungen (8) nach E umgestellt. Dadurch ergibt sich:

$$E_\mathrm{br/bl} = \frac{m_2 \cdot g}{48 \cdot I_\mathrm{r} \cdot a_\mathrm{br/bl}}.$$

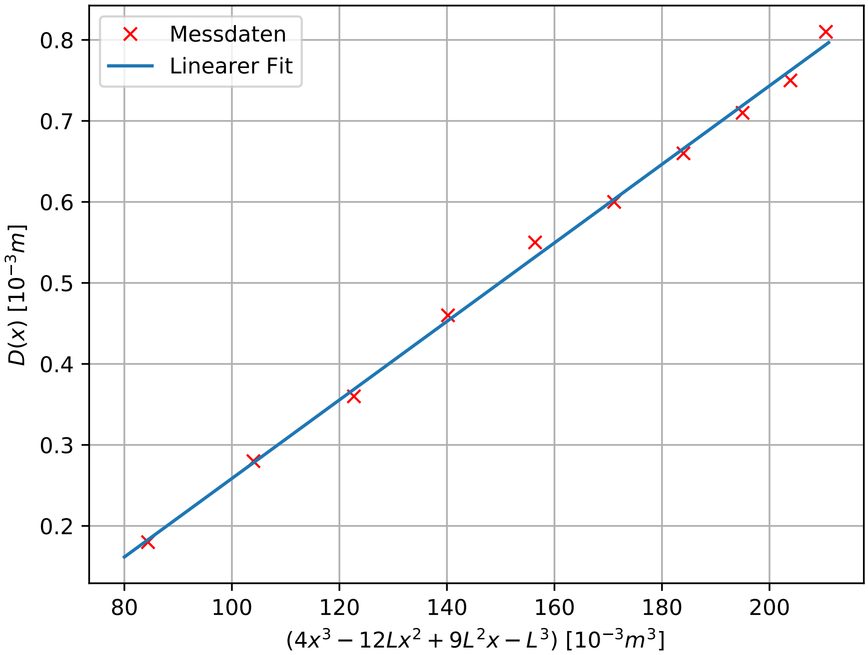

Abbildung 7: Lineare Regression: Runder Stab, beidseitig aufgelegt, linke Seite

Der zugehörige Fehler kann aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung erhalten werden:

$$\Delta E_{\mathrm{br/bl}} = \sqrt{\left(\frac{\partial E_{\mathrm{br/bl}}}{\partial I_{\mathrm{r}}}\right)^2 \cdot (\Delta I_{\mathrm{r}})^2 + \left(\frac{\partial E_{\mathrm{br/bl}}}{\partial a_{\mathrm{br/bl}}}\right)^2 \cdot (\Delta a_{\mathrm{br/bl}})^2}$$

$$\iff \Delta E_{\mathrm{br/bl}} = \sqrt{\left(\frac{m_2 \cdot g}{48 \cdot I_{\mathrm{r}}^2 \cdot a_{\mathrm{br/bl}}}\right)^2 \cdot (\Delta I_{\mathrm{r}})^2 + \left(\frac{m_2 \cdot g}{48 \cdot I \cdot a_{\mathrm{br/bl}}^2}\right)^2 \cdot (\Delta a_{\mathrm{br/bl}})^2}.$$

Hiermit lauten die Elastizitätsmodule der beiden Seiten:

$$E_{\mathrm{br}} = (7{,}40 \pm 0{,}18) \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$
$$E_{\mathrm{bl}} = (6{,}22 \pm 0{,}17) \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

5 Diskussion

Für diesen Versuch wurden zwei Kupferstäbe, rund und eckig, gewählt und untersucht. Die Literaturwerte [3] des Elastizitätsmoduls für Kupfer liegen in einem Bereich zwischen 1,3 und $1{,}8 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Die experimentell bestimmten Werte sind

$$E_\text{e} = (78{,}8 \pm 1{,}6) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$
$$E_\text{r} = (4{,}77 \pm 0{,}03) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

für die einseitige Einspannung und

$$E_\text{br} = (7{,}40 \pm 0{,}18) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$
$$E_\text{bl} = (6{,}22 \pm 0{,}17) \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

für die beidseitige Auflage. Es fällt auf, dass vor allem das Elastizitätsmodul des eckigen Stabes bei einseitiger Einspannung sehr stark von dem Literaturwert abweicht und auch den größten Fehlerwert besitzt. Die Abweichung von E_e zur oberen Grenze des Literaturwertes beträgt 42,8%. Das dem Literaturwert nächste Elastizitätsmodul ist E_r mit einer Abweichung von 1,65%. Zudem ist E_r der am genauesten bestimmte Wert, was an dem geringen Fehlerwert zu erkennen ist. Somit liefert die Messung des Elastizitätsmoduls durch einseitige Einspannung eines runden Stabs das beste Ergebnis, auch im Bezug zur Methode durch beidseitige Auflage, welche mit dem gleichen Stab durchgeführt wurde.

Dennoch sind bei der Durchführung einige Quellen für Messungenauigkeiten zu beobachten. Insbesondere seien hier die Messuhren genannt, deren Zeiger sich auch bei kleinen oder gar keinen Erschütterungen deutlich bewegen, was zu einer ungenauen Messung führt. Digitale Messuhren könnten hier bessere Ergebnisse liefern. Zudem ist es möglich, dass die Stäbe auch ohne zusätzliches Gewicht verbogen sind, was ebenfalls die Werte verfälschen könnte. Zuletzt ist es nicht auszuschließen, dass Messwerte nicht genau genug abgelesen werden, was sowohl bei den Messuhren als auch beim Abmessen der Radien bzw. Dicken der Stäbe mit der Schieblehre der Fall sein könnte.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuch 103: Biegung elastischer Stäbe.* 2017. URL: `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/V103.pdf` (besucht am 27.12.2017).

[2] Universtität Siegen. *Flächenträgheitsmomente einiger Querschnitte.* URL: `https://www.bau.uni-siegen.de/subdomains/bauinformatik/lehre/tm2/arbeitsblaetter/arbeitsblatt_08_flaechentraegheitsmomente_bsp.pdf` (besucht am 10.01.2018).

[3] Wikipedia. *Elastizitätsmodul.* URL: `https://de.wikipedia.org/wiki/Elastizit%C3%A4tsmodul#Typische_Zahlenwerte` (besucht am 10.01.2018).