

V406

# **Beugung am Spalt**

Evelyn Romanjuk  
evelyn.romanjuk@tu-dortmund.de

Ramona-Gabriela Kallo  
ramonagabriela.kallo@tu-dortmund.de

Durchführung: 26.06.18

Abgabe: 03.07.18

TU Dortmund – Fakultät Physik

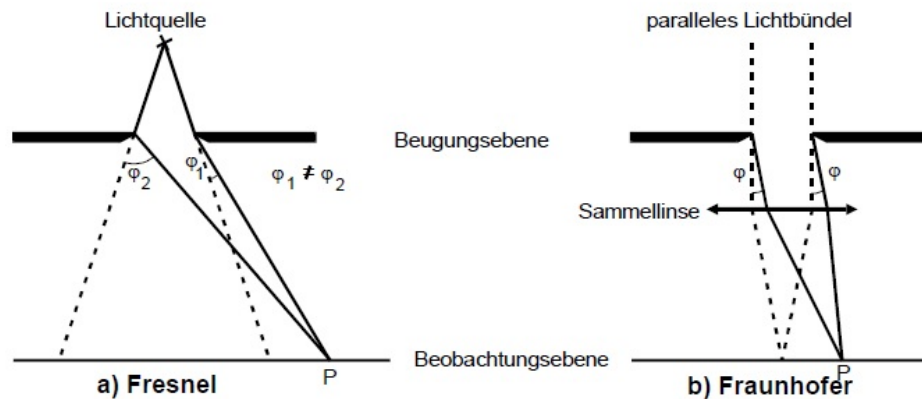
# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
1.1	Beugung am Einzelspalt . . . . .	3
1.2	Beugung am Doppelspalt . . . . .	5
1.3	Fraunhofscher Beugung und Fourier-Transformation . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
3.1	Einzelspalt (0,075 mm) . . . . .	7
3.2	Einzelspalt (0,15 mm) . . . . .	10
3.3	Doppelspalt . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>15</b>
	<b>Literatur</b>	<b>15</b>

# 1 Theorie

Die Beugung des Lichts beschreibt das Phänomen, dass die Lichtausbreitung von den Gesetzen der geometrischen Optik abweicht, wenn ein Lichtstrahl auf Öffnungen trifft, deren Abmessung klein gegen den Durchmesser des Lichtstrahls ist. Gut erklären lässt sich dies, indem das Licht als Welle aufgefasst wird, was aufgrund der großen Anzahl an Photonen hier als Näherung verwendet werden kann.

Grundsätzlich gibt es zwei Ansätze für Beugung am Spalt, die Fresnelsche und die Fraunhofersche Beugung (s. Abb. 1).



**Abbildung 1:** Beugung nach Fresnel und Fraunhofer an einem Spalt, [1, S. 2].

Fresnel geht von einer Lichtquelle in endlicher Entfernung vom Spalt aus, sodass sich eine divergente Lichtausbreitung ergibt. Das ist auch in der Abbildung 1 zu sehen. Es hat zur Folge, dass die Strahlen, die im Punkt P beobachtet werden, unter verschiedenen Winkeln gebrochen werden. Die Fraunhofer Beugung geht hingegen von einer Lichtquelle im Unendlichen aus, wodurch sich ein paralleles Lichtbündel mit ebenen Wellenfronten ergibt. Dies hat den Vorteil, dass es nur einen Brechungswinkel gibt und sich so die Auswertung des Versuches vereinfacht. Im Folgenden wird nur die Fraunhoferschen Beugung betrachtet, da ihre mathematische Beschreibung viel leichter ist.

Das Huygenssche Prinzip geht nun davon aus, dass von jedem Punkt einer Wellenfront zur gleichen Zeit Elementarwellen kreisförmig auslaufen. Diese theoretisch unendlich vielen Wellen interferieren miteinander und bilden so neue Wellenfronten, die sich als Einhüllende der Elementarwellen betrachten lassen.

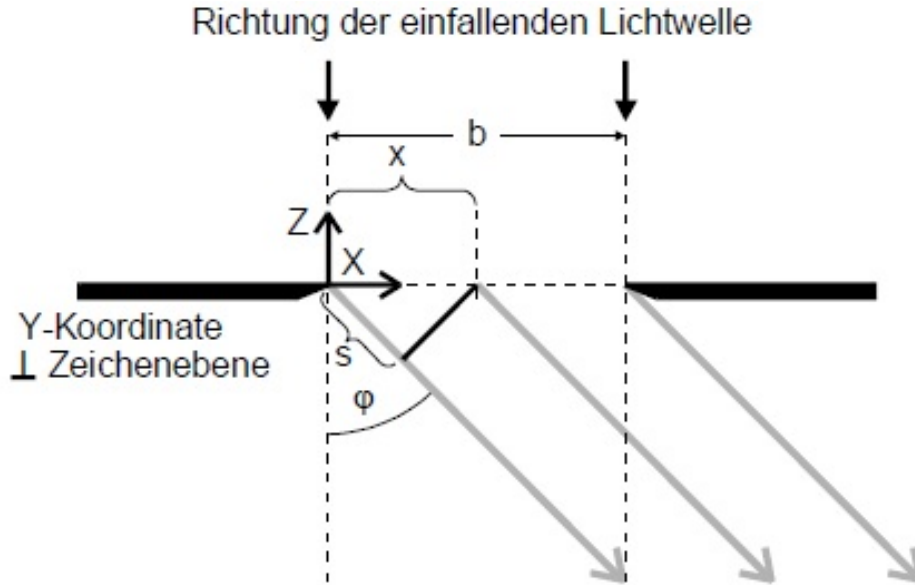
## 1.1 Beugung am Einzelspalt

Wenn das Huygen-Fresnelsche Prinzip auf dem Einzelspalt übertragen wird, dann ist es zu erkennen, dass von jedem Punkte der Spaltöffnungen Kugelwellen ausgehen, die in alle Richtungen fortschreiten. Somit muss dann auch über alle Strahlbündel summiert werden, die unter dem Winkel  $\varphi$  abgelenkt werden, um die Amplitude in  $\varphi$ -Richtung zu

berechnen. Allerdings stellt es sich fest, dass die Wellenfronten der Strahlbündel sehr klein sind. Zum einen wird davon ausgegangen, dass eine Welle sich über die Gleichung:

$$A(z, t) = A_0 \cdot \exp\{i(\omega t - 2s\pi/\lambda)\}$$

beschreiben lässt. Gehen von jedem Punkt der Spaltöffnung sich in alle Richtungen ausbreitende Wellen aus, ergeben sich aus der Interferenz Maxima und Minima der Lichtintensität.



**Abbildung 2:** Beugung am Einzelspalt mit der Fraunhofer-Methode, [1, S. 3].

Zum anderen werden zwei dieser Punkte im Abstand  $x$  am Spalt genommen, sodass es sich durch ihren Gangunterschied  $s$  die Phasendifferenz  $\delta$  ergibt (s. Abb. 2):

$$\delta = \frac{2\pi s}{\lambda} = \frac{2\pi x \sin \varphi}{\lambda}$$

Dabei muss dieser Phasenunterschied bei der Summation berücksichtigt werden. Die Integration über die Spaltbreite  $b$  der Funktion für die Amplitude  $B$  in  $\varphi$ -Richtung:

$$B(z, t, \varphi) = A_0 \int_0^b \exp \left\{ i \left( \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} + \delta \right) \right\} dx$$

( $A_0$  ist die Amplitude der einfallenden Welle,  $z$  die Ausbreitungsrichtung und  $\omega$  die Frequenz) ergibt mit Vernachlässigung der Phasenfunktionen:

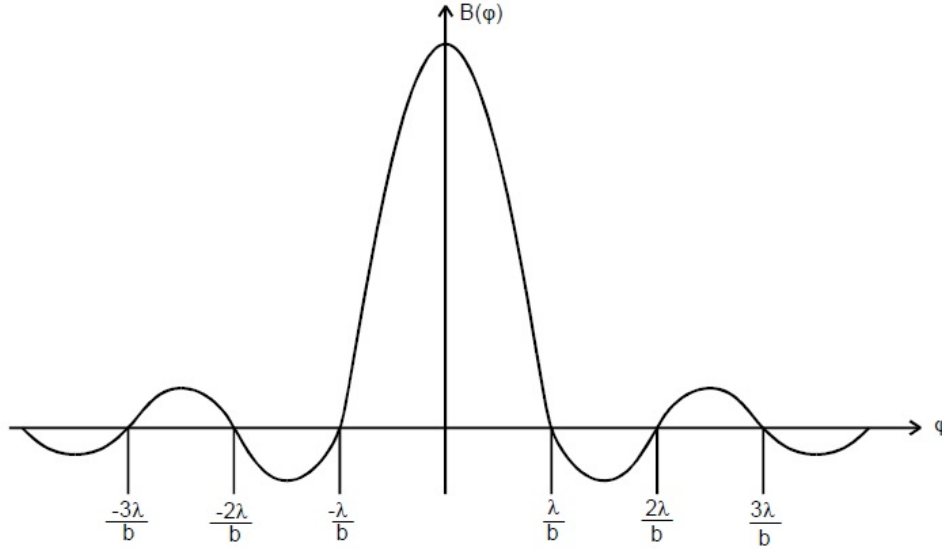
$$B(\varphi) = A_0 b \frac{\sin \eta}{\eta}$$

$$\eta = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}.$$

Die Funktion ist in der Abbildung 3 zu sehen. Da es sich um eine gerade Funktion handelt, die lokale Maxima und Minima sowie unendlich vielen Nulldurchgängen enthält, dann besitzt sie auch die Nullstellen bei:

$$\sin(\varphi) = \pm n \frac{\lambda}{b}$$

mit  $n = 1, 2, \dots$



**Abbildung 3:** Die Amplitude einer ebenen Welle am Parallelschlitz, [1, S. 4].

Aufgrund der hohen Frequenzen im Bereich  $\omega = 10^{14}$  Hz bis  $10^{15}$  Hz ist die Amplitude nicht direkt messbar. Man misst deshalb die zeitlich gemittelte Intensität  $I(\varphi)$  des gebeugten Lichts. Diese ist bei am Parallelschlitz gebeugten Licht gegeben durch:

$$I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = A_0^2 b^2 \left\{ \frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right\}^2 \cdot \sin^2 \left\{ \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right\}. \quad (1)$$

## 1.2 Beugung am Doppelschlitz

Wie beim Einzelschlitz lässt sich analog die Intensitätsverteilung  $I(\varphi)$  bestimmen. Die Beugung am Doppelschlitz ist in der Abbildung 4 zu sehen. Die Beschreibung der Beugung am Doppelschlitz erfolgt als Überlagerung zweier Einfach-Schlitze mit Breite  $b$  und Abstand  $s$ :

$$I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = 4A_0^2 b^2 \cos^2 \left( \frac{\pi s \sin \varphi}{\lambda} \right) \left( \frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right). \quad (2)$$

Es ergibt sich somit für den Doppelschlitz die Intensitätsverteilung des Einzelschlitzes mit einem  $\cos^2$ -Term, wodurch sich zusätzlich Minima an den Nullstellen der  $\cos^2$ -Verteilung ergeben.

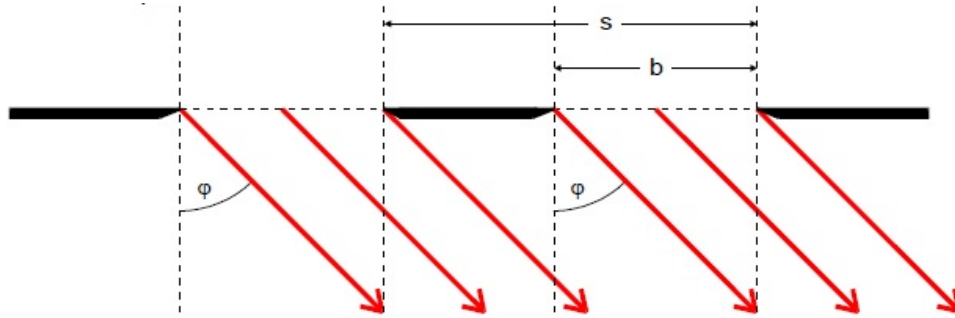


Abbildung 4: Beugung am Doppelspalt, [1, S. 4].

### 1.3 Fraunhofscher Beugung und Fourier-Transformation

Allgemein ist die Fourier-Transformation einer Funktion  $f(x)$  gegeben durch:

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi} dx.$$

Bei der Fraunhofer-Beugung lässt sich  $B(\varphi)$  als Fouriertransformierte der Amplitudenverteilung der einfallenden Welle in der Beugungsebene (Aperturfunktion) ausdrücken. Als Funktion am Spalt wird nun  $f(x) = A_0$  gesetzt, womit sich mit der Eulerschen Formel folgendes ergibt:

$$g(\xi) = \frac{2A_0}{\xi} \exp\left(\frac{ib\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{b\xi}{2}\right).$$

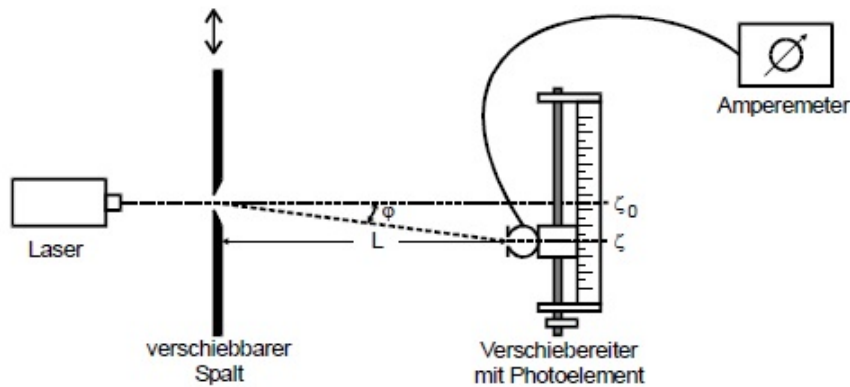
Setzt man nun:

$$\xi := \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda}$$

ergibt sich eine Übereinstimmung zwischen  $g(\xi)$  und  $B(\varphi)$ . Aus der Umkehrbarkeit der Fouriertransformation ergibt sich, dass auch aus der Amplitudenfunktion die Gestalt des beugenden Objektes berechnet werden kann.

## 2 Durchführung

Bei allen drei Messreihen, zwei mit verschiedenen Einzelspalten, eine mit einem Doppelspalt, wird der Aufbau in Abbildung 5 auf einer optischen Schiene verwendet. Als Lichtquelle wird ein Helium-Neon-Laser mit einer Wellenlänge von 635 nm verwendet. Dieser wird auf einen Parallelschlitz gerichtet, dessen Breite im Versuch bestimmt werden soll. Im Abstand von einem Meter befindet sich ein Photoelement auf einem Verschiebemeßreiter. So kann das Beugungsbild schrittweise abgetastet werden. Die Intensität des gebeugten Lichts wird mit einer Photodiode gemessen, die einen zur Intensität proportionalen Strom erzeugt. Wichtig ist aufgrund der geringen entstehenden Stromstärken noch



**Abbildung 5:** Experimenteller Aufbau zur Ausmessung der Beugungsfigur, [1, S. 7].

der Dunkelstrom, also der Strom, den die Photodiode ohne eingeschalteten Laser abgibt. Dieser wird dann von den Messergebnissen abgezogen.

Die Photodiode kann senkrecht zum ungebeugten Lichtstrahl auf einem Messreiter verschoben werden. Danach fängt die Messung für den ersten Einzelspalt an. Dabei muss auch noch der Dunkelstrom aufnotiert werden, da dieser bei der Auswertung des Messergebnisses wichtig ist. Die Messungen werden im Dunkeln durchgeführt. Der gemessene Photostrom wird an einem Amperemeter abgelesen und es wird auch der Abstand aufgeschrieben.

Der Spalt und der Laser werden so ausgerichtet, dass die Beugungsfigur möglichst hell und parallel zum Photoelement verläuft. Um eine symmetrische Verteilung der Messwerte zu erreichen wird das Hauptmaximum so ausgerichtet, dass dieses gemessen wird, wenn sich die Photozelle auf der Mitte des Verschiebemessreiter befindet. Der Verschiebemessreiter kann über 50 mm verschoben werden, es werden 50 Messwerte je Beugungsfigur genommen. Zu den beiden Einzelspalten werden jeweils 50 Messwerte aufgenommen und bei dem Doppelspalt jeweils doppelt so viele als bei dem Einzelspalt.

### 3 Auswertung

#### 3.1 Einzelspalt (0,075 mm)

Zunächst wird die Beugungsfigur eines Einfach-Spaltes ausgemessen, dessen Breite von  $b_{t1} = 0,075 \text{ mm}$  vom Hersteller angegeben ist und als Theoriewert dient. In Tabelle 1 sind die eingestellten Schrittweiten in mm sowie die jeweils gemessenen Stromstärken in  $\mu\text{m}$  zu finden. Die Einstellungen der Photodiode auf dem Messreiter wurden dabei um  $+0,94 \text{ mm}$  verschoben, sodass sich die maximale Lichtintensität bei  $0 \text{ mm}$  befindet. Der vor dem Versuch gemessene Dunkelstrom von

$$I_{\text{du}} = 4,3 \text{ nA}$$

wird für den Plot von allen Stromstärken  $I$  abgezogen. Dieser ergibt sich durch Auftragen der Stromstärken  $I - I_{\text{du}}$  gegen die Schrittweiten  $x$  und ist in Abbildung 6 zu finden.

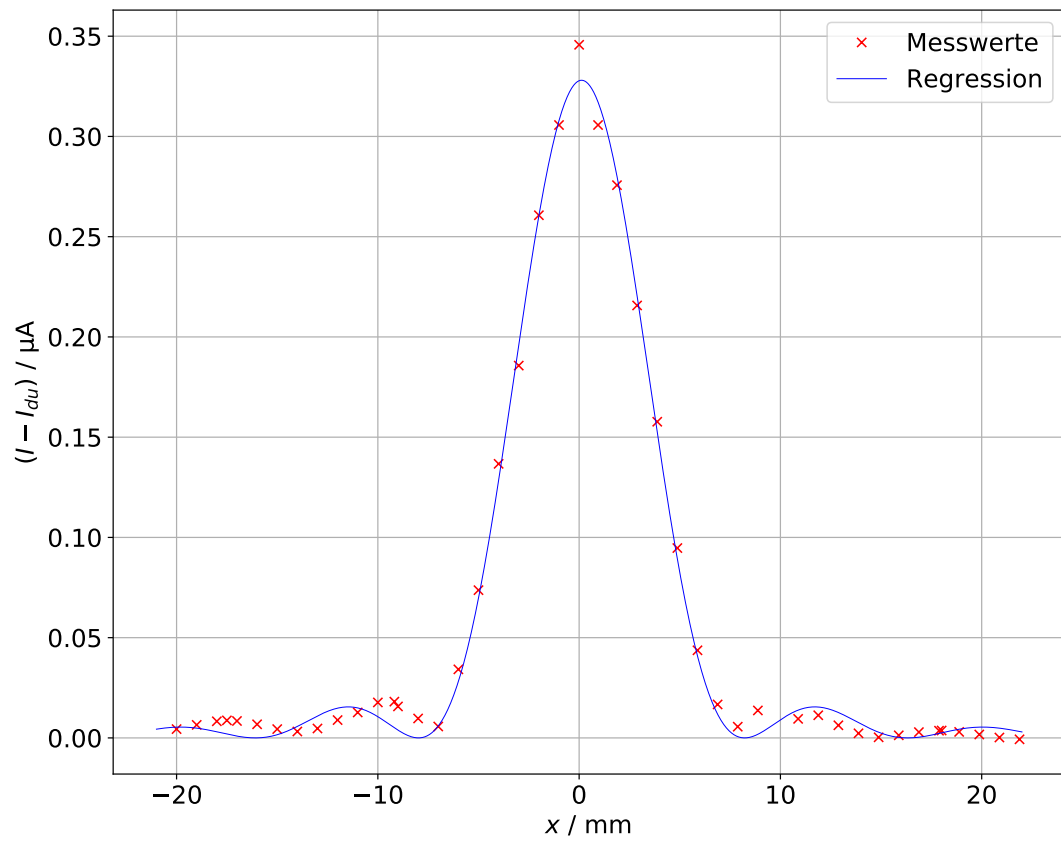
**Tabelle 1:** Messwerte zur Untersuchung des Einzelspalt mit 0,075 mm.

$x/10^{-3}$ m	$I/10^{-6}$ A	$x/10^{-3}$ m	$I/10^{-6}$ A
-20,00	0,008 70	0,94	0,3100
-19,00	0,010 80	1,88	0,2800
-18,00	0,012 60	2,88	0,2200
-17,50	0,013 05	3,88	0,1620
-17,00	0,012 75	4,88	0,0990
-16,00	0,011 10	5,88	0,0480
-15,00	0,008 70	6,88	0,0210
-14,00	0,007 50	7,88	0,0099
-13,00	0,009 00	8,88	0,0180
-12,00	0,013 20	10,88	0,0138
-11,00	0,017 00	11,88	0,0156
-10,00	0,022 00	12,88	0,0106
-9,18	0,022 40	13,88	0,0066
-9,00	0,020 00	14,88	0,0046
-8,00	0,014 00	15,88	0,0056
-7,00	0,010 00	16,88	0,0072
-6,00	0,038 50	17,88	0,0079
-5,00	0,078 00	18,01	0,0080
-4,00	0,141 00	18,88	0,0073
-3,00	0,190 00	19,88	0,0060
-2,00	0,265 00	20,88	0,0045
-1,00	0,310 00	21,88	0,0036
0,00	0,350 00		

Mithilfe des Python-Moduls matplotlib wird mit Gleichung 1 eine nichtlineare Ausgleichsrechnung durch die Messwerte vorgenommen, wie in Abbildung 6 zu sehen ist. Diese Ausgleichsrechnung liefert einen experimentellen Wert der Spaltbreite  $b_{\text{es},1}$ :

$$b_{\text{es},1} = (0,0784 \pm 0,0008) \text{ mm.}$$





**Abbildung 6:** Stromstärke  $I - I_{du}$  als Funktion der Schrittweite  $x$ , sowie nichtlineare Regression für den Einfach-Spalt mit 0,075 mm.

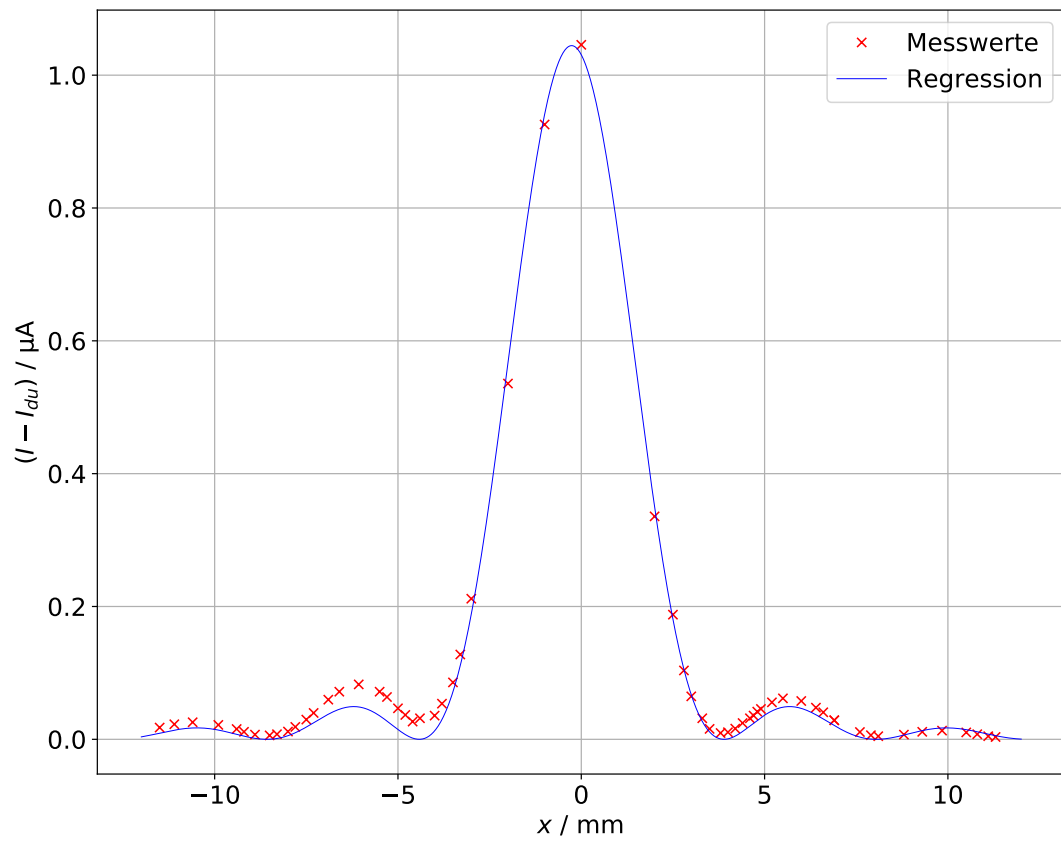
### 3.2 Einzelspalt (0,15 mm)

Nun wird ein Einzelspalt der Breite  $b_{t2} = 0,15 \text{ mm}$  untersucht. Tabelle 2 enthält die aufgenommen Messdaten. Zu den Werten von  $x$  werden hier 1 mm addiert. Für den Plot wird wieder der Dunkelstrom  $I_{\text{du}}$  von den gemessenen Strömen abgezogen.

**Tabelle 2:** Messwerte zur Untersuchung des Einzelspaltes mit 0,15 mm.

$x/10^{-3} \text{ m}$	$I/10^{-6} \text{ A}$	$x/10^{-3} \text{ m}$	$I/10^{-6} \text{ A}$
-11,50	0,0220	2,0	0,3400
-11,10	0,0270	2,5	0,1920
-10,60	0,0300	2,8	0,1080
-9,90	0,0260	3,0	0,0690
-9,40	0,0198	3,3	0,3600
-9,20	0,0156	3,5	0,0200
-8,90	0,0114	3,8	0,0138
-8,50	0,0102	4,0	0,0150
-8,30	0,0120	4,2	0,0204
-8,00	0,0160	4,4	0,0288
-7,80	0,0230	4,6	0,0360
-7,50	0,0340	4,7	0,0400
-7,30	0,0440	4,8	0,0460
-6,90	0,0640	4,9	0,0500
-6,60	0,0760	5,2	0,0600
-6,07	0,0870	5,5	0,0660
-5,50	0,0760	6,0	0,0620
-5,30	0,0680	6,4	0,0520
-5,00	0,0510	6,6	0,0450
-4,80	0,0410	6,9	0,0330
-4,60	0,0310	7,6	0,0153
-4,40	0,0360	7,9	0,0105
-4,00	0,0400	8,1	0,0090
-3,80	0,0580	8,8	0,0114
-3,50	0,0900	9,3	0,0156
-3,30	0,1320	9,8	0,0174
-3,00	0,2160	10,5	0,0147
-2,00	0,5400	10,8	0,0120
-1,00	0,9300	11,1	0,0090
0,00	1,0500	11,3	0,0078

Die aufgetragenen Messdaten, sowie die Ausgleichsrechnung, die analog zum ersten Versuchsteil erfolgt, sind in Abbildung 7 zu sehen. Die Regression ergibt eine Spaltbreite  $b_{\text{es},2}$  von:



**Abbildung 7:** Stromstärke  $I - I_{du}$  als Funktion der Schrittweite  $x$ , sowie nichtlineare Regression für den Einfach-Spalt mit 0,15 mm.

$$b_{\text{es},2} = (0,15279 \pm 0,00116) \text{ mm.}$$

### 3.3 Doppelspalt

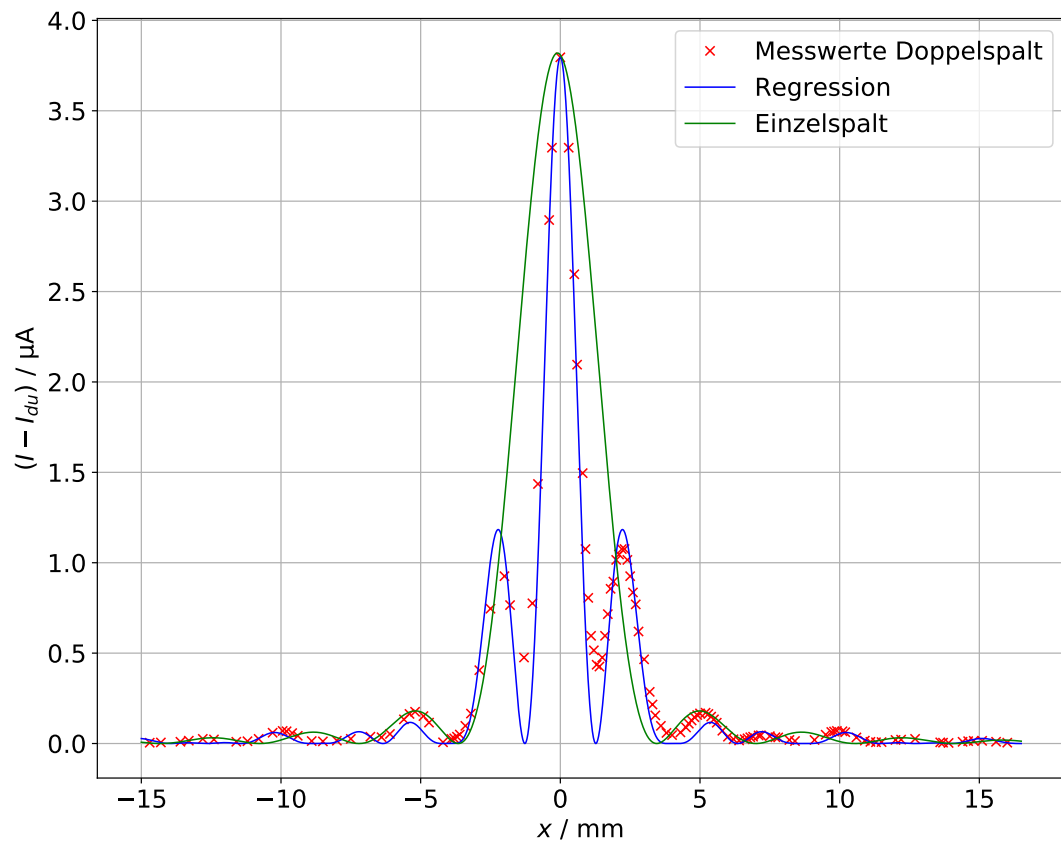
Zuletzt wird ein Doppelspalt untersucht, dessen Spaltbreite  $b_{t3} = 0,15 \text{ mm}$  beträgt, während der Abstand zwischen den beiden Spalten  $g = 0,25 \text{ mm}$  ist. Alle Messwerte sind in den Tabellen 3 und 4 zu finden. Auf die Einstellungen  $x$  werden in diesem Fall  $0,8 \text{ mm}$  addiert und der Dunkelstrom abermals abgezogen. Die Regression erfolgt wiederum mit Python, wobei nun Gleichung 2 verwendet wird. Zudem wird analog zu den vorherigen Versuchsreihen die Beugungsfigur eines Einfach-Spalttes hinzugefügt, wie in Abbildung 8 zu sehen ist.

**Tabelle 3:** Messwerte zur Untersuchung des Doppelspalttes.

$x/10^{-3} \text{ m}$	$I/10^{-6} \text{ A}$	$x/10^{-3} \text{ m}$	$I/10^{-6} \text{ A}$	$x/10^{-3} \text{ m}$	$I/10^{-6} \text{ A}$	$x/10^{-3} \text{ m}$	$I/10^{-6} \text{ A}$
-14,7	0,0087	-6,4	0,039	-0,4	2,900	2,2	0,108
-14,3	0,0102	-6,1	0,057	-0,3	3,300	2,3	0,108
-4,2	0,0111	-5,6	0,138	0,0	3,800	2,4	0,102
-13,6	0,0140	-5,4	0,168	0,3	3,300	2,5	0,093
-13,3	0,0200	-5,2	0,180	0,5	2,600	2,6	0,084
-12,8	0,0300	-4,9	0,156	0,6	2,100	2,7	0,077
-12,4	0,0270	-4,7	0,120	0,8	1,500	2,8	0,062
-11,6	0,0140	-3,9	0,030	0,9	1,080	3,0	0,047
-11,2	0,0170	-3,8	0,033	1,0	0,081	3,2	0,029
-10,8	0,0300	-3,7	0,042	1,1	0,060	3,3	0,022
-10,3	0,0640	-3,6	0,054	1,2	0,052	3,4	0,016
-9,9	0,0740	-3,4	1,102	1,3	0,044	3,6	0,102
-9,8	0,0720	-3,2	0,170	1,4	0,043	3,8	0,063
-9,6	0,0620	-2,9	0,410	1,5	0,048	4,0	0,051
-9,4	0,0470	-2,5	0,750	1,6	0,060	4,3	0,066
-8,9	0,0180	-2,0	0,930	1,7	0,072	4,5	0,093
-8,5	0,0160	-1,8	0,770	1,8	0,086	4,6	0,114
-8,0	0,0200	-1,3	0,480	1,9	0,090	4,7	0,132
-7,5	0,0300	-1,0	0,780	2,0	0,102	4,8	0,150
-6,8	0,0420	-0,8	1,440	2,1	0,105	4,9	0,162

**Tabelle 4:** Messwerte zur Untersuchung des Doppelspaltes.

Messung	Zählrate	Messung	Zählrate	Zählrate	Zählrate
4,90	0,1620	8,2	0,0240	14,8	0,019 20
5,00	0,1710	8,4	0,0530	15,1	0,019 14
5,20	0,1746	9,1	0,0680	15,6	0,014 10
5,30	0,1680	9,5	0,0710	16,0	0,009 00
5,40	0,1530	9,7	0,0740		
5,50	0,1380	9,8	0,0720		
5,60	0,1194	9,9	0,0670		
5,80	0,0750	10,1	0,0380		
6,00	0,0420	10,2	0,0201		
6,20	0,0280	10,6	0,0135		
6,40	0,0210	10,9	0,0114		
6,60	0,0279	11,1	0,0123		
6,70	0,0330	11,3	0,0240		
6,80	0,0390	11,5	0,0260		
6,90	0,0420	12,0	0,0300		
7,10	0,0490	12,2	0,0108		
7,18	0,0500	12,7	0,0090		
7,50	0,0450	13,6	0,0075		
7,70	0,0390	14,4	0,0138		
7,80	0,0380	14,6	0,0174		



**Abbildung 8:** Stromstärke  $I - I_{du}$  als Funktion der Schrittweite  $x$ , sowie nichtlineare Regression für den Doppelspalt.

## 4 Diskussion

Beim Vergleich der Messwerte des ersten Einfach-Spaltes mit der Regression fällt auf, dass die Ausgleichsrechnung in etwa dem Verlauf der aufgenommenen Werte entspricht, aber dennoch Abweichungen zeigt. Hier lässt sich vermuten, dass die Regression noch genauer vorgenommen werden kann, um bessere Ergebnisse zu erzielen. Für den ersten Einfach-Spalt ergeben sich folgende Werte für die experimentelle und tatsächliche Spaltbreite:

$$\text{Experimentell: } b_{\text{es},1} = (0,0784 \pm 0,0008) \text{ mm}$$

$$\text{Tatsächlich: } b_{\text{t}1} = 0,075 \text{ mm.}$$

Die Abweichung zwischen den beiden Werten beträgt 4,53%. Da dies eine recht kleine Abweichung ist, kann diese Untersuchung als genau angenommen werden.

Die Regression der zweiten Messreihe zeigt beim Betrachten der Abbildung 7 bessere Ergebnisse vor. Hier stimmt die Regression mehr mit den Messwerten überein als im vorherigen Versuchsteil. Die Spaltbreite wird wie folgt bestimmt:

$$\text{Experimentell: } b_{\text{es},2} = (0,15279 \pm 0,00116) \text{ mm}$$

$$\text{Tatsächlich: } b_{\text{t}2} = 0,15 \text{ mm.}$$

Hier lässt sich eine geringe Abweichung von 1,86% feststellen. Somit ist auch diese Untersuchung genau.

Im letzten Versuchsteil ist zu erkennen, dass die Regression recht gut den Verlauf der aufgenommenen Messdaten darstellt. Die Beugungsfigur des Einfach-Spaltes hüllt die des Doppelspaltes im mittleren Teil bis auf kleine Abweichungen zunächst ein, was für größer werdenden Schrittweiten jedoch nicht mehr der Fall ist. Es lässt sich die Vermutung anstellen, dass mit einer genaueren Versuchsdurchführung diese Eigenschaft des Einfach-Spaltes deutlicher werden würde.

Insgesamt hat der Versuch jedoch gute Ergebnisse geliefert, wie sich an den geringen Abweichungen der experimentellen Werte von denen des Herstellers erkennen lässt.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 406: Beugung am Spalt*. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/V406.pdf> (besucht am 28.06.2018).