

Versuch 602

Röntgen-Emissions- und Absorptionsspektren

Thorben Linneweber*Marcel C. Strzys**

16.12.2008

Technische Universität Dortmund

Zusammenfassung

Protokoll zur Untersuchungen der Struktur der inneren Elektronenhülle von verschiedenen Atomen mit Hilfe von Röntgenstrahlung.

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen	1
1.1	Erzeugung von Röntgenstrahlung	1
1.2	Das Emissionsspektrum ohne Feinstruktur	2
1.3	Die Feinstruktur des Röntgen-Emissionsspektrums	4
1.4	Das Absorptionsspektrum	6
1.5	Messung von Intensität und Energie der Röntgenstrahlung . .	8
2	Verschaufbau und Durchführung	9
3	Auswertung	10
3.1	Bestimmung der $\sigma_{1,0}$ Abschirmungszahlen von Strontium, Rubidium und Brom	10
3.2	Bestimmung der $s_{2,1}$ Abschirmungszahlen von Gold und Quecksilber	11
3.3	Bestimmung der Abschirmungszahlen σ_1 und σ_2 für Kupfer .	12
3.4	Bestimmung der Energieauflösung der Apparatur	13
3.5	Vergleich mit Literaturwerten	13
4	Literatur	14

*thorben.linneweber@tu-dortmund.de

**marcel.strzys@web.de

1 Theoretische Grundlagen

Im vorliegenden Versuch sollen die Abschirmungszahlen verschiedener Elemente bestimmt werden. Dies bedingt eine Untersuchung der inneren Elektronenhülle. Durch die höhere Bindungsstärke der inneren Elektronen reicht die Energie von sichtbaren und sogar von UV-Licht für diese Zwecke nicht aus. Man greift daher auf Röntgenstrahlung zurück, deren Energie sich von 10 eV bis 100 keV erstrecken kann.

Im Folgenden wird nun auf die Erzeugung der Röntgenstrahlung eingegangen bevor auf ihre Wechselwirkung mit Materie eingegangen wird. Zuletzt wird ein Verfahren zur Bestimmung der Energie der verwendeten Röntgenstrahlung erläutert.

1.1 Erzeugung von Röntgenstrahlung

Werden Elektronen auf Materie geschossen, so werden sie in dieser durch Ionisation abgebremst und geben ihre kinetische Energie ab. Dies geschieht dabei auf zwei verschiedene Arten; zum einen als Wärmeenergie, zum anderen in Form von elektromagnetische Strahlung, wobei Ersteres mit höherer Wahrscheinlichkeit geschieht. Für diesen Versuch ist jedoch nur Letztere von Bedeutung.

Gelangt ein Elektron in den Einflussbereich eines Atomkernes, so wird es durch Coulombkräfte abgelenkt d.h. auch beschleunigt, wodurch es Strahlung emittiert, welche als Bremsstrahlung bezeichnet wird. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Prozess ist proportional zur Kernladungszahl z . Diese Energie weist ein kontinuierliches Spektrum - mit der gesamten kinetischen Energie der Elektronen als maximale Energie - auf.

Neben der Bremsstrahlung können die Elektronen ihre Energie auch durch Ionisation in elektromagnetische Strahlung umwandeln. Besitzt ein Elektron die gleiche Energie wie eines der Bindungselektronen des Atoms, so kann es das Bindungselektron aus seiner Schale lösen. Da dieser ionisierte Zustand instabil ist besetzt nach einer Relaxationszeit von der Größenordnung von $10^{-8}s$ ein Elektron aus einer höheren Schale das entstandene „Loch“. Das nun entstandene „Loch“ in der höheren Schale wird von einem Elektron aus einer wiederum höheren Schale gefüllt usw.. Die jeweilige Potentialdifferenz wird bei diesen Sprüngen zwischen den Schalen in Form von elektromagnetischer Strahlung frei. Da die Schalen diskrete Energieniveaus besitzen ist auch das Spektrum dieser Strahlung diskret. Es gilt für die Energie des freigesetzten Photons mit der Potentialdifferenz $E_n - E_m$ bei einem „Sprung“ von der n - zur m -Schale:

$$E_{\text{Photon}} = h\nu = E_n - E_m \quad (1)$$

(h steht in dieser Formel für das Plancksche Wirkungsquantum und ν für die Frequenz der freigesetzten Strahlung)

Die so erzeugte Strahlung hängt von den Atomen des bestrahlten Stoffes ab und wird deshalb als charakteristische Röntgenstrahlung bezeichnet. Da wie oben beschrieben die Elektronen auf die Materialschicht geschossen werden müssen, um die Strahlung zu erzeugen, werden in einem evakuierten Glaskolben durch eine Glühkathode freie Elektronen erzeugt, die anschließend durch eine Beschleunigungsspannung auf die Anode beschleunigt werden, in der dann die Strahlung hervorgerufen wird. Diesen Aufbau bezeichnet man als Röntgenröhre und findet sich in Abbildung 1.

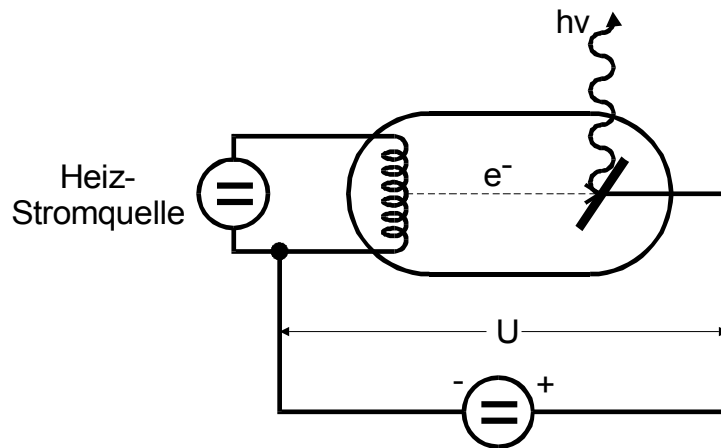


Abbildung 1: Schematischer Aufbau einer Röntgenröhre [1]

1.2 Das Emissionsspektrum ohne Feinstruktur

Die Anzahl der einfallenden Lichtquanten pro Zeit und Fläche wird als Intensität bezeichnet. Trägt man diese gegen die Energie der Lichtquanten auf, so erhält man das Spektrum der Röntgenstrahlung.

Das Emissionsspektrum setzt sich dabei aus der Bremsstrahlung und der charakteristischen Strahlung zusammen. Die maximale Energie der durch die Bremsprozesse erzeugten elektromagnetischen Strahlung liegt dabei bei (mit der Beschleunigungsspannung U und der Elementarladung e_0):

$$E_{max} = h\nu_{max} = e_0 U \quad (2)$$

Das charakteristische Spektrum ergibt sich aus den Energieniveaus des bestrahlten Stoffes, die wiederum aus der Schrödinger-Gleichung folgen. Da die Einbeziehung vieler Elektronen die Rechnung erschwert, nutzt man als Näherung die Eielektronenanregung. Man nimmt dabei an, dass sich das „emittierende“ Elektron in einem Coulombfeld bestehend aus dem Kernfeld und dem Feld der übrigen Elektronen befindet. Es ergibt sich also durch die Abschwächung der äußeren Elektronen eine effektive Kernladungszahl z_{eff} mit $z_{eff} < z$. Für das Potential ergibt sich:

$$U = -\frac{z_{eff}e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3)$$

Für die Energiewerte der Schrödingergleichung folgt:

$$E_n = -R_\infty z_{eff}^2 \frac{1}{n^2} \quad (4)$$

(R_∞ =Rydberg-Energie, z_{eff} effektive Kernladungszahl, n =Hauptquantenzahl)

Beim Übergang eines Elektrons von der n -ten zur m -ten (mit $n < m$) Schale wird somit eine Strahlung vom Betrag

$$h\nu_{n,m} = R_\infty z_{eff}^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (5)$$

frei, wobei dies nur eine grobe Näherung darstellt und auch nur für kleine z gültig ist. Eine graphische Darstellung der Übergänge findet sich in Abbildung 2. Es sei darauf hingewiesen, dass ein erheblicher Unterschied

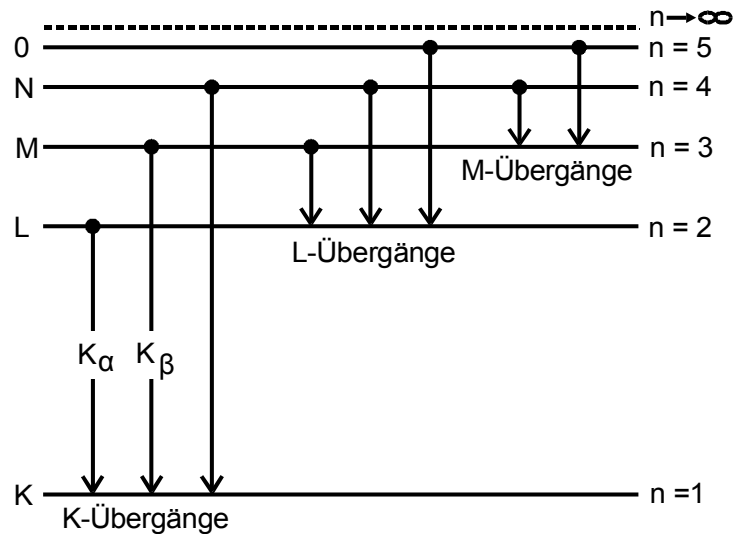


Abbildung 2: Mögliche Röntgenübergänge in der Elektronenhülle(ohne Darstellung der Feinstruktur)(nicht maßstäblich) [1]

zwischen dem optischen Spektrum und dem Röntgenspektrum eines Stoffes besteht, da Ersteres durch Sprünge der äußeren Schale entstehen und somit vom Bindungszustand der Atome abhängt. Letzteres ist jedoch immer ein Linienspektrum, welches im Periodensystem sich mit steigender Ordnungszahl zur höheren Frequenzen hin verschiebt.

1.3 Die Feinstruktur des Röntgen-Emissionsspektrums

Durch eine Störungsrechnung kann man eine genauere Lösung des Problems erhalten. Es ergibt sich die Sommerfeldsche Feinstruktur, die in erster Näherung lautet:

$$E_{n,j} = -R_{\infty} \left\{ z_{eff1}^2 \frac{1}{n^2} + \alpha^2 z_{eff2}^4 \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right\} \quad (6)$$

α ist hierbei die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante und j der Gesamtdrehimpuls des „aktiven“ Elektrons, welcher sich aus der Bahndrehimpulsquantenzahl l und der Spinquantenzahl $s = \frac{1}{2}$ ergibt nach:

$$j = l + \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad j = l - \frac{1}{2} \quad (7)$$

Die effektiven Kernladungszahlen ergeben sich aus den sogenannten Abschirmungszahlen σ und s nach:

$$z_{eff1} = z - \sigma \quad \text{und} \quad z_{eff2} = z - s \quad (8)$$

σ und s beschreiben dabei die Abschwächung des Kernfeldes durch die unteiligten Hüllenelektronen. σ wird als „Konstante der vollständigen Abschirmung“ bezeichnet. Sie resultiert vor allem aus den Hüllenelektronen, deren Ladungsverteilungsmaximum innerhalb der n -ten Schale liegt, es gibt aber auch einen Einfluss der äußeren Elektronen auf σ . Die „Konstante der inneren Abschirmung“ s wird hingegen nur von den Elektronen der n -ten Schale beeinflusst. Da beide Größen von den Quantenzahlen n und l abhängen schreibt man:

$$E_{n,j} = -R_{\infty} \left\{ (z - \sigma_{n,l})^2 \frac{1}{n^2} + \alpha^2 (z - s_{n,l})^4 \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right\} \quad (9)$$

Da bei gegebener Hauptquantenzahl n mehrere l - und j -Werte möglich sind, spalten sich die Energieniveaus des vorderen Kapitels in mehrer Unterniveaus auf; man spricht von der Feinstruktur-Aufspaltung.

Durch die Beziehung $l_{max} = n - 1$ lässt sich die Anzahl der Unterniveaus berechnen und es ergibt sich die Abbildung 3. An dieser Graphik 3 ist zudem zu erkennen, dass die Übergängen zudem durch sogenannte Auswahlregeln festgelegt sind. Für das Röntgengebiet bedeutet dies, dass zum einen der Bahndrehimpuls der Niveaus sich um $\Delta l = \pm 1$ unterscheiden muss, zum anderen dass Übergänge um $\Delta n \geq 3$ höchst unwahrscheinlich sind.

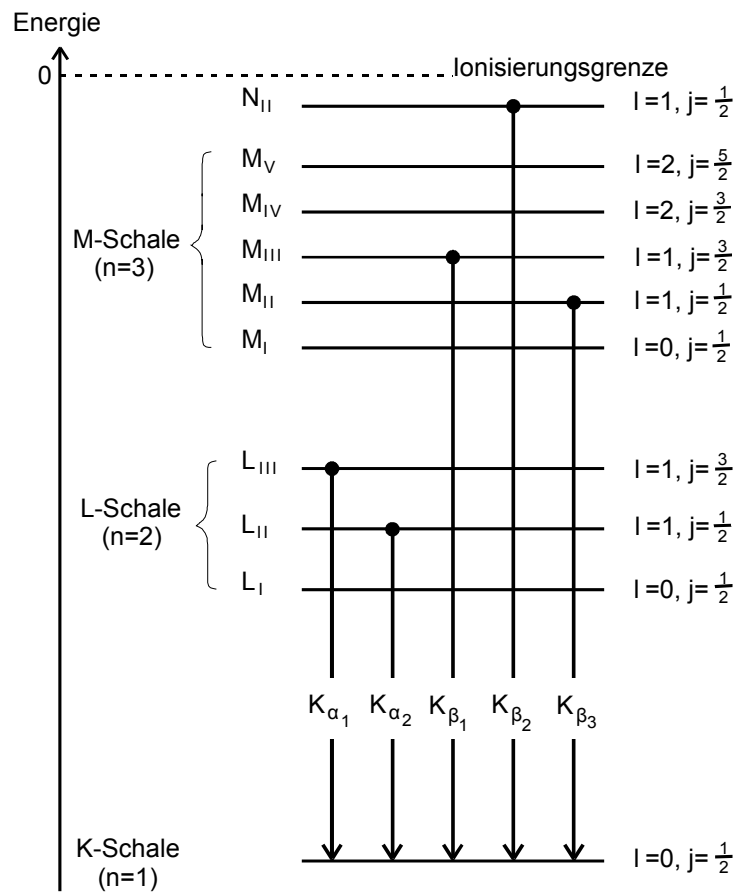


Abbildung 3: Feinstruktur-Aufspaltung der K-, L- und M-Schale eines Atoms sowie mögliche K-Übergänge zwischen den Niveaus (nicht maßstäblich) [1]

Die Energie der emittierten Strahlung lässt sich nun als Übergang von den Quantenzahlen n', l', j' zu den Quantenzahlen n, l, j , ausdrücken als:

$$E = R_\infty \left\{ \frac{(z - \sigma_{nl})^2}{n^2} - \frac{(z - \sigma_{n'l'})^2}{n'^2} + \alpha^2 \frac{(z - s_{nl})^4}{n^3} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) - \alpha^2 \frac{(z - s_{n'l'})^4}{n'^3} \left(\frac{1}{j' + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n'} \right) \right\} \quad (10)$$

Die oben beschriebenen Abschirmungszahlen sollen im Rahmen dieses Versuches von verschiedenen Stoffen bestimmt werden. Wie an der Formel ersichtlich, ist das Emissionsspektrum hierzu nur eingeschränkt brauchbar. Eine Alternative bietet jedoch das Absorptionsspektrum.

1.4 Das Absorptionsspektrum

Dringt Röntgenstrahlung in Materie ein, wird die Intensität der Strahlung energie- und materialabhängig abgeschwächt. Dies geschieht hauptsächlich durch Absorption, in geringem Maße jedoch auch durch Streuung. Der als innerer Photoeffekt bezeichnete Vorgang der Absorption tritt auf, wenn ein Photon mindestens die Bindungsenergie eines Hüllenelektrons aufweist. Es schlägt das Hüllennatom aus seiner Bindung. Die übrige Energie geht als kinetische Energie auf das Elektron über:

$$h\nu = E_B + E_{kin} \quad (11)$$

Die Wahrscheinlichkeit für diesen Effekt ist proportional zur Kernladungszahl z und zur Quantenenergie $h\nu$ des Photons. Im Röntgenbereich gilt für den Absorptionskoeffizienten μ dabei ungefähr:

$$\mu \approx z^5 E^{-3,5} \quad (12)$$

Schlägt jedoch ein Quant ein Elektron der inneren Schalen aus seiner Bindung, so ergibt sich eine Unstetigkeit und man kann für diese unter Vernachlässigung der optischen Niveaus für die K-Schale annähern:

$$h\nu_{K_{Abs}} = E_{1, \frac{1}{2}} - E_\infty = R_\infty \left\{ (z - \sigma_{1,0})^2 - \alpha^2 (z - s_{1,0})^4 \frac{1}{4} \right\} \quad (13)$$

Auf Grund der wenigen Elektronen in der K-Schale verschwindet die Konstante der Abschirmung $s_{1,0}$ aus Formel 13. Nun lässt sich $\sigma_{1,0}$ über eine Messung von $h\nu_{K_{Abs}}$ bestimmen.

Zur Bestimmung von $s_{2,1}$ wählt man den Weg über die 3 L-Absorptionsenergien,

für die gilt:

$$h\nu_{L_{AbsI}} = E_{2,0,\frac{1}{2}} - E_{\infty} = R_{\infty} \left\{ \frac{(z - \sigma_{2,0})^2}{8} - \alpha^2 \frac{(z - s_{2,0})^4}{8} \frac{5}{8} \right\} \quad (14)$$

$$h\nu_{L_{AbsII}} = E_{2,1,\frac{1}{2}} - E_{\infty} = R_{\infty} \left\{ \frac{(z - \sigma_{2,1})^2}{4} - \alpha^2 \frac{(z - s_{2,1})^4}{8} \frac{5}{8} \right\} \quad (15)$$

$$h\nu_{L_{AbsIII}} = E_{2,1,\frac{3}{2}} - E_{\infty} = R_{\infty} \left\{ \frac{(z - \sigma_{2,1})^2}{4} - \alpha^2 \frac{(z - s_{2,1})^4}{8} \frac{1}{8} \right\} \quad (16)$$

Aus der Differenz von (15) und (17) kann nun $s_{2,1}$ ermittelt werden durch:

$$h\nu_{L,abs,II} - h\nu_{L,abs,III} = R_{infy} \alpha^2 \frac{(z - s_{2,1})^4}{16} \quad (17)$$

Experimentell geht man nun so vor, dass man eine dünne Scheibe des zu untersuchenden Materials mit monoenergetischer Röntgen-Strahlung beschießt und die transmittierte Strahlung gegen die Energie der Quanten aufträgt. Ein solches Absorptionsspektrum findet sich Abbildung 4.

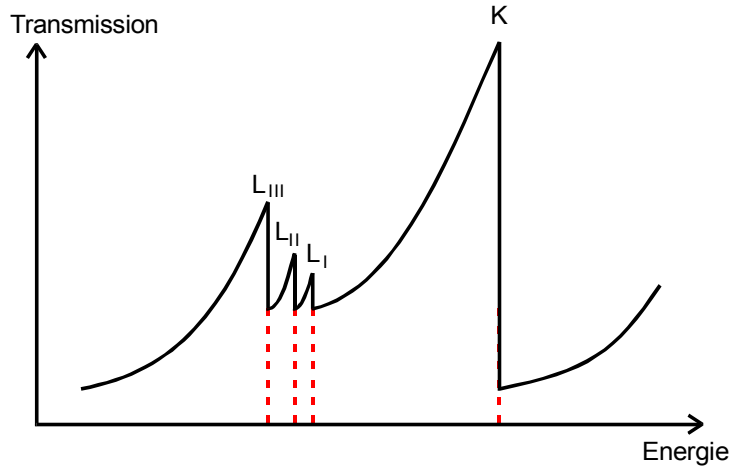


Abbildung 4: Ein typisches Röntgen-Absorptionsspektrum mit K- und L-Kanten (nicht maßstäblich) [1]

Nach Formel 12 nimmt der Absorptionskoeffizient mit Anstieg der Quantenenergie ab und damit die Transmission zu. Erreicht die Quantenenergie die Bindungsenergie eines Hüllenelektrons, so ergibt sich an dieser Stelle eine Unstetigkeitsstelle, die sogenannte Absorptionskante. Die Position der Kanten entspricht den Absorptionsenergien $h\nu_{Abs}$. Die Anzahl der Kanten pro Schale ergeben sich aus der Feinstrukturaufspaltung.

Zusätzliche mögliche auftretende Effekte sind Fluoreszenz-Strahlung und der Compton-Effekt, die jedoch in diesem Versuch nicht näher betrachtet werden sollen. Zur Minimierung der Effekte werden nur Stoffe mit Kernladungen $z > 13$ gewählt, da unterhalb dieser Grenze der Compton-Effekt nicht zu vernachlässigen ist.

1.5 Messung von Intensität und Energie der Röntgenstrahlung

Zur Messung der Intensität der Strahlung wird ihre ionisierende Wirkung genutzt. Dies geschieht mit Hilfe eines Geiger-Müller-Zählrohrs in Verbindung mit einem elektrischen Zählwerk und einem Zeitgeber.

Die Energiewerte der Röntgenstrahlung werden in dem vorliegenden Versuch durch Interferenz an einem Kristallgitter „eingeteilt“. Die Röntgenstrahlung wird dabei an den Atomhüllen der Gitteratome in alle Raumrichtungen elastisch gestreut. Durch die Geometrie des Gitters ergibt sich nun eine konstruktive Interferenz, wenn der Gangunterschied Δ zweier benachbarter Strahlen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ ist. Eine Veranschaulichung ist in Abbildung 5 zu sehen. Über die sogenannte Braggsche

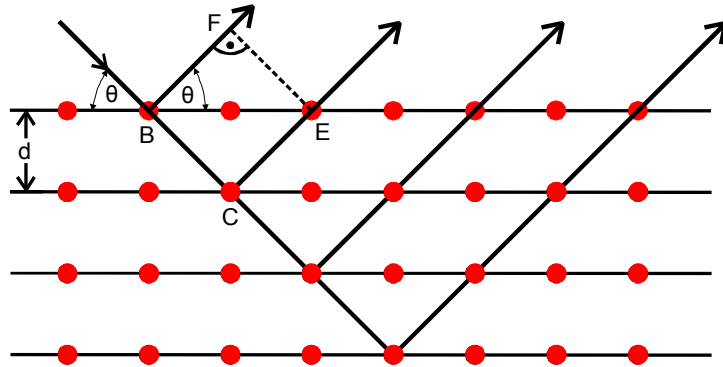


Abbildung 5: Zweidimensionales Kristallgitter zur Veranschaulichung der Interferenzbedingung [1]

Reflexionsbedingung kann man nun die Winkel mit merklicher Intensität bestimmen:

$$2d \sin(\theta) = n\lambda \quad ; \quad \text{mit } n=1,2,3,\dots \quad (n=\text{Interferenzanordnung}) \quad (18)$$

Über λ lässt sich nun die Beziehung für die Energie der Röntgenstrahlung aufstellen:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc \cdot n}{2d \sin(\theta)} \quad (19)$$

Mit dem Netzebenenabstand d und gegebener Interferenzordnung n hat man nun eine eindeutige Zuordnung zwischen dem Winkel θ und der Energie der Röntgenquanten E . Nun kann mittels des Winkels die Energie der nun monoenergetischen Röntgenquanten bestimmt werden.

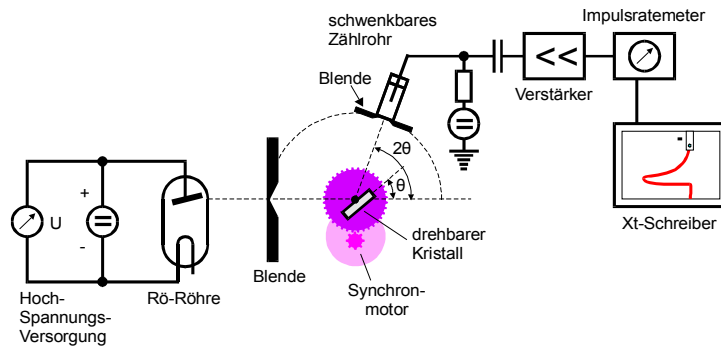


Abbildung 6: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus [1]

2 Verschaufbau und Durchführung

Der Aufbau dieses Versuches findet sich schematisch in Abbildung 6, hierbei ist darauf hinzuweisen, dass der Xt-Schreiber (aus der Zeichnung) durch einen Computer ersetzt wird, der nicht nur die Messwerte aufnimmt, sondern auch den Synchronmotor steuert.

Mittels einer Röntgen-Röhre (Cu-Anode) wird bei einer Beschleunigungsspannung von $U_B = 35\text{ kV}$ Röntgenstrahlung erzeugt, welche durch eine Blende auf einen schwenkbaren LiF-Kristall mit parallelen Netzebenen trifft. Als Interferenzanordnung tritt in diesem Versuch nur $n = 1$ auf. Nach der Reflexion trifft die nun monoenergetische Strahlung auf die Materialprobe, die vor die (Eintritts-)Blende (Blende dient der Abschirmung von Streustrahlung) des Zählrohres geschraubt wird. Die transmittierte Strahlung gelangt nun auf das Zählrohr. Die auftretenden Impulse werden vom Rechner notiert. Dieser steuert ebenfalls den Winkel des Kristalls und des Zählrohres. Kristall und Zählrohr stehen dabei in einem Winkelverhältnis von 2:1.

Die Aufgabe der Experimentatoren besteht darin eine geeignete Schrittweite (in unserem Fall 0.1°), geeignetes Zeitintervall pro Winkel und den Winkelbereich festzulegen.

- Es wird nun die Abschirmungszahl $\sigma_{1,0}$ aus den K-Absorptionskanten von Rubidium und Strontium bestimmt.
- Die Abschirmungszahl $s_{2,1}$ wird aus den L_{II} - und L_{III} -Absorptionskanten von Gold und Quecksilber ermittelt.
- Die Abschirmungszahlen σ_1 und σ_2 werden für Kupfer unter Vernachlässigung des Drehimpulsbeitrages aus den Emissionsenergien E_{K_α} und E_{K_β} abgeschätzt.
- Das Auflösungsvermögen der Apparatur wird bestimmt.

3 Auswertung

3.1 Bestimmung der $\sigma_{1,0}$ Abschirmungszahlen von Strontium, Rubidium und Brom

Zur Bestimmung der Abschirmzahlen wird die Lage der K-Kanten der drei Elemente bestimmt. Über Gleichung 13 können die Abschirmungszahlen $\sigma_{1,0}$ dann nach Bestimmung der Energie berechnet werden:

$$E_k = R_\infty \left((z - \sigma_{1,0})^2 + \alpha^2 \frac{z^4}{4} \right)$$

$$\sigma_{1,0} = z - \sqrt{\frac{E_k - R_\infty \alpha^2 \frac{z^4}{4}}{R_\infty}} \quad (20)$$

Mit Hilfe der BRAGG-Reflexion (Gleichung 19) kann die gesuchte Energie über den bekannten Kristallwinkel bestimmt werden.

Der hierfür benötigte Winkel lässt sich theoretisch exakt am Spektrum ablesen, da die Kante eine Unstetigkeit ausweist. Im praktisch gemessenen Spektrum ist der Übergang jedoch stetig. Der „richtige“ Winkelwert liegt genau zwischen dem Winkelwert für die minimale und dem Winkelwert für die maximale Intensität der entsprechenden Kante. Die so bestimmten Kristallwinkel finden sich in Tabelle 1.

Element	Θ_{min} [°]	Θ_{max} [°]	Θ [°]
Sr	10,4	10,9	$10,65 \pm 0.05$
Rb	10,9	11,6	$11,25 \pm 0.05$
Br	12,6	13,1	$12,85 \pm 0.05$

Tabelle 1: Kristallwinkel der Elemente Rubidium und Strontium

Für die folgenden Betrachtungen nehmen wir eine Ungenauigkeit der Winkelwerte von $\pm 0,05^\circ$ an.

Durch Einsetzen des Ausdrucks für die Energie in Gleichung 20 erhalten wir letztendlich:

$$\sigma_{1,0} = z - \sqrt{\frac{\frac{hcn}{2d \sin \Theta} - R_\infty \alpha^2 \frac{z^4}{4}}{R_\infty}} \quad (21)$$

Hierbei ist $h = 4,13567 \cdot 10^{-15} \text{ eV}$ das Plancksche Wirkungsquantum, die Lichtgeschwindigkeit $c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, n die Interferenzordnung (hier $n = 1$), $d = 2,01 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ der Netzebenenabstand des verwendeten LiF-Kristalls, die Rydberg-Energie $R_\infty = 13,6 \text{ eV}$, z die Kernladungszahl und $\alpha = 1/137$ die Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante.

Mit Hilfe der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung wird zusätzlich der Fehler bestimmt:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{1,0} &= \left| \frac{\partial\sigma_{1,0}}{\partial\Theta} \right|_{\Theta_0} \cdot \Delta\Theta_0 \\ &= \frac{hcn \cos \Theta_0 \sqrt{\frac{2hcn - dR_\infty \alpha^2 z^4 \sin \Theta_0}{dR_\infty \sin \Theta_0}}}{2 \sin \Theta_0 (2hcn - dR_\infty \alpha^2 z^4 \sin \Theta_0)} \cdot \Delta\Theta_0\end{aligned}$$

Wir erhalten folgende Ergebnisse für die Abschirmungszahlen der drei Elemente:

$$\begin{aligned}\sigma_{1,0}^{Sr} &= 3,36 \pm 0,001 \\ \sigma_{1,0}^{Rb} &= 3,27 \pm 0,001 \\ \sigma_{1,0}^{Br} &= 3,38 \pm 0,001\end{aligned}$$

3.2 Bestimmung der $s_{2,1}$ Abschirmungszahlen von Gold und Quecksilber

Zur Bestimmung der Abschirmzahlen wird die Lage der L-Kanten der beiden Elemente bestimmt. Die Kristallwinkel werden wie in 3.1 beschrieben abgelesen. Die bestimmten Werte finden sich in Tabelle 2.

Element	Θ_{LII} [°]	Θ_{LIII} [°]
Au	$12,60 \pm 0,05$	$14,55 \pm 0,05$
Hg	$12,10 \pm 0,05$	$14,10 \pm 0,05$

Tabelle 2: Lage der L_{II} und L_{III} Kanten der Elemente Gold und Quecksilber

Nach Formel 17 kann die Abschirmungskonstante $s_{2,1}$ errechnet werden:

$$s_{2,1} = z - \sqrt{\left(\frac{4}{\alpha} \sqrt{\frac{\Delta E}{R_\infty}} - \frac{5\Delta E}{R_\infty} \right) \left(1 + \frac{19}{32} \alpha^2 \frac{\Delta E}{R_\infty} \right)}$$

ΔE ist die Differenz der L_{II} und L_{III} Kantenenergien und errechnet sich durch:

$$\Delta E = \frac{hcn}{2d} \left(\frac{1}{\sin \Theta_{LIII}} - \frac{1}{\sin \Theta_{LII}} \right)$$

Den Fehler errechnen wir wie zuvor mit Hilfe der Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsformel:

$$\Delta s_{2,1} = \sqrt{\left| \frac{\partial s_{2,1}}{\partial \Theta_{L_{III}}} \right|_{\Theta_{L_{III},0}}^2 \cdot \Delta \Theta_{L_{III}}^2 + \left| \frac{\partial s_{2,1}}{\partial \Theta_{L_{II}}} \right|_{\Theta_{L_{II},0}}^2 \cdot \Delta \Theta_{L_{II}}^2}$$

Wir erhalten folgende Ergebnisse für die $s_{2,1}$ Abschirmungszahlen der beiden Elemente:

$$s_{2,1}^{Au} = 3,16 \pm 0,63$$

$$s_{2,1}^{Hg} = 2,49 \pm 0,61$$

3.3 Bestimmung der Abschirmungszahlen σ_1 und σ_2 für Kupfer

Zunächst bestimmen wir die Lage der K_α - und K_β -Linien im Emissionsspektrum für Kupfer. Die bestimmten Kristallwinkel finden sich in Tabelle 3.

Element	Kante	Θ [°]
Cu	K_α	$21,8 \pm 0,05$
Cu	K_β	$19,5 \pm 0,05$

Tabelle 3: Lage der K-Kanten im Emissionsspektrum von Kupfer

Die Abschirmungszahlen können nach folgender Formel bestimmt werden:

$$\sigma_1 = z - \sqrt{\frac{E_{K_\beta}}{R_\infty}} \quad (22)$$

$$\sigma_2 = z - \sqrt{-\frac{E_{K_\alpha} - R_\infty(z - \sigma_1)^2}{R_\infty/4}} \quad (23)$$

Der Fehler nach Gauss'scher Fehlerfortpflanzung wird wie folgt berechnet:

$$\Delta \sigma_1 = \left| \frac{\partial \sigma_1}{\partial \Theta_{K_\beta}} \right|_{\Theta_{K_\beta,0}} \cdot \Delta \Theta_{K_\beta}$$

$$\Delta \sigma_2 = \sqrt{\left| \frac{\partial \sigma_2}{\partial \Theta_{K_\alpha}} \right|_{\Theta_{K_\alpha,0}}^2 \cdot \Delta \Theta_{K_\alpha}^2 + \left| \frac{\partial \sigma_2}{\partial \Theta_{K_\beta}} \right|_{\Theta_{K_\beta,0}}^2 \cdot \Delta \Theta_{K_\beta}^2}$$

Wir erhalten somit für die Abschirmungszahlen:

$$\sigma_1 = 2,94 \pm 0,001$$

$$\sigma_2 = 12,42 \pm 0,021$$

3.4 Bestimmung der Energieauflösung der Apparatur

Die Winkelbreite der CuK_α -Emissionslinie wird bestimmt. Die Grenzwinkel liegen hier bei $\Theta_1 = 21,6^\circ$ und $\Theta_2 = 22,5^\circ$. Damit ergibt sich aus den zugehörigen Energien eine Energieauflösung von:

$$\Delta E = 8377eV - 8059eV = 318eV$$

Aus den vorliegenden Daten konnten wir keine Extrapolation auf die Intensität 0 durchführen, da die Steigung der Emissionskurve im kleinen Winkelbereich (bei $\approx 4,0^\circ$) die Steigung 0 besitzt und trotzdem noch Intensität gemessen wird. Allerdings können wir in unsere Messwerten ablesen, dass bei etwa $\Theta_{minimum} = 5,0^\circ$ die Intensität nicht mehr schwächer wird (Es wurde bis $4,0^\circ$ gemessen, es ist also anzunehmen, dass immer ein Reststrahlen gemessen werden kann.) Die zugehörige Energie liegt bei $E_{maximum} = 35,3keV$, was zur verwendeten Beschleunigungsspannung von $35kV$ passt.

3.5 Vergleich mit Literaturwerten

Für den Vergleich der bestimmten Energien verwendeten wir Werte aus dem Internetangebot [2] und [3]. Der Vergleich der Werte findet sich in Tabelle 4.

Element	Kante	Energie [keV]	Literaturwert [keV]
Sr	K	$16,69 \pm 0,001$	16,10
Rb	K	$15,81 \pm 0,001$	15,20
Br	K	$13,86 \pm 0,001$	13,48
Au	L_{III}	$12,28 \pm 0,001$	11,92
	L_{II}	$14,13 \pm 0,001$	13,73
Hg	L_{III}	$12,66 \pm 0,001$	12,28
	L_{II}	$14,71 \pm 0,001$	14,21
Cu	K_α	$8,31 \pm 0,001$	8,04
	K_β	$9,24 \pm 0,001$	8,90

Tabelle 4: Vergleich der bestimmten Energien mit Literaturwerten.

Es zeigt sich, dass die von uns gemessenen Werte alle höher liegen, als der zugehörige Literaturwert. Es ist offensichtlich, dass ein systematischer Fehler vorliegt, der möglicherweise durch die verwendete Messapparatur zustande kommt. Da wir keinen Einfluss auf den vorgegebenden Versuchsaufbau haben, ist es nicht möglich einen Fehler (z.B. durch falsche Kalibrierung) zu finden.

4 Literatur

- 1 Skript zum Versuch 602 des physikalischen Anfängerpraktikums an der TU Dortmund zu finden unter:
<http://praktikum.physik.uni-dortmund.de/neu/a-praktikum/anleitungen.html>
(Stand 16.11.2008)
- 2 Internetangebot des Biomolecular Structure Center der Universität von Washington <http://skuld.bmsc.washington.edu/scatter/periodic-table.html>
(Stand 17.01.2009)
- 3 Center For Synchrotron Radiation Research & Instrumentation CSRRI
<http://csrri.iit.edu/cgi-bin/period-form?ener=&name=Cu>