

V353

Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Evelyn Romanjuk
evelyn.romanjuk@tu-dortmund.de

Ramona-Gabriela Kallo
ramonagabriela.kallo@tu-dortmund.de

Durchführung: 01.12.17

Abgabe: 08.12.17

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Allgemeine Relaxationsgleichung und Anwendung auf den RC-Kreis . . .	3
2.1.1 Entladevorgang	4
2.1.2 Aufladevorgang	4
2.2 Relaxationserscheinungen bei periodischer Auslenkung aus der Gleichgewichtslage	5
2.3 Der RC-Kreis als Integrator	6
3 Durchführung	6
3.1 Bestimmung der Zeitkonstanten	6
3.2 Messung der Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz	7
3.3 Messung der Phasenverschiebung in Abhängigkeit von der Frequenz . . .	7
3.4 RC-Kreis als Integrator	7
4 Auswertung	8
4.1 Entladevorgang eines Kondensators	8
4.2 Frequenzabhängigkeit der Amplitude	11
4.3 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung	13
4.4 Beobachtung der Phasenverschiebung zwischen der Generator- und Kondensatorspannung	15
4.5 RC-Kreis als Integrator	17
5 Diskussion	19
Literatur	19

1 Zielsetzung

Das Ziel dieses Versuches ist die Bestimmung der Zeitkonstante eines RC-Kreises, sowie die Messung der Amplitude der Kondensatorspannung und der Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung, jeweils in Abhängigkeit der Generatorfrequenz. Der letzte Teil des Versuches befasst sich mit der Eigenschaft des RC-Kreises als Integrator.

2 Theorie

2.1 Allgemeine Relaxationsgleichung und Anwendung auf den RC-Kreis

Als Relaxationserscheinung wird das nicht-oszillatorische Zurückkehren eines Systems in seinen Grundzustand bezeichnet, nachdem das System angeregt wurde. Wird eine Größe A beobachtet, so ist die Änderungsgeschwindigkeit proportional zur Abweichung von A zum Endzustand $A(\infty)$:

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)].$$

Wird über die Zeit 0 bis t integriert, so ergibt sich

$$\int_{A(0)}^{A(t)} \frac{dA'}{A' - A(\infty)} = \int_0^t c dt' \quad (1)$$
$$\Leftrightarrow \ln \frac{A(t) - A(\infty)}{A(0) - A(\infty)} = ct$$

$$\Leftrightarrow A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)] \cdot e^{ct}. \quad (2)$$

In einem RC-Kreis sind Relaxationserscheinungen bei der Auf- und Entladung des Kondensators über den Widerstand zu beobachten.

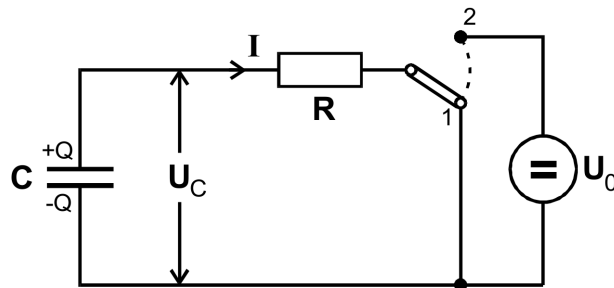


Abbildung 1: Entladung (1) und Aufladung (2) des Kondensators über den Widerstand, [1, S. 1].

2.1.1 Entladevorgang

Sei Q die Ladung auf den Platten eines Kondensators mit der Kapazität C , so lässt sich die Spannung U_C mit

$$U_C = \frac{Q}{C} \quad (3)$$

bestimmen. Weiter ist nach dem Ohmschen Gesetz der Strom I durch den Widerstand R gegeben mit

$$I = \frac{U_C}{R}. \quad (4)$$

Beim Ladungsausgleich fließt die Ladung $I dt$ von einer Kondensatorplatte zur anderen über, was eine Ladungsänderung auf den Platten von

$$dQ = -I dt \quad (5)$$

herbeiführt. Mit (3), (4) und (5) lässt sich nun eine Differentialgleichung aufstellen, die den zeitlichen Verlauf der Ladung des Kondensators beschreibt:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot Q(t).$$

Nach unendlich langer Zeit hat sich der Kondensator vollständig entladen, also gilt

$$Q(\infty) = 0,$$

sodass sich nach Integration, analog zu (2)

$$Q(t) = Q(0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (6)$$

ergibt.

2.1.2 Aufladevorgang

Analog zu (2.1.1) kann die Gleichung für den Aufladevorgang mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} Q(0) &= 0 \\ Q(\infty) &= C \cdot U_C \end{aligned}$$

zu

$$Q(t) = C \cdot U_C (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

berechnet werden.

In den Gleichungen für den Auf- und Entladevorgang ist RC eine Zeitkonstante, die angibt, wie lange ein System braucht, um auf $\frac{1}{e} \approx 36,8\%$ seines Ausgangswertes zu kommen.

2.2 Relaxationserscheinungen bei periodischer Auslenkung aus der Gleichgewichtslage

In einem RC-Kreis erfolgt eine periodische Anregung durch eine äußere Wechselspannung $U(t)$ mit

$$U(t) = U_C \cdot \cos(\omega t).$$

Hierbei gilt, dass $U(t)$ gleich U_C ist wenn die Kreisfrequenz ω gering ist, also wenn gilt: $\omega \ll \frac{1}{RC}$.

Desweiteren gilt, dass mit höheren Kreisfrequenzen die Auf- und Entladung des Kondensators aufgrund des Widerstandes zunehmend hinter der angelegten Generatorspannung zurückliegen. Daraus ergibt sich eine Phasenverschiebung φ zwischen den beiden Spannungen und eine abnehmende Amplitude A der Spannungskurve des Kondensators.

Die Frequenzabhängigkeit von Phasenverschiebung und Amplitude kann mit dem Ansatz

$$U_C = A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi\{\omega\})$$

ermittelt werden.

Mit dem 2. Kirchhoffschen Gesetz

$$\begin{aligned} U(t) &= U_R + U_C \\ \Rightarrow U_0 \cdot \cos(\omega t) &= I(t) \cdot R + A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

und

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} \quad (7)$$

folgt:

$$U_C \cdot \cos(\omega t) = -A\omega RC \cdot \sin(\omega t + \varphi) + A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi). \quad (8)$$

Wird nun in (8) $\omega t = \frac{\pi}{2}$ gesetzt, sowie $\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos(\varphi)$ und $\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\varphi)$, so ergibt sich die Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz mit

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega RC). \quad (9)$$

Zu sehen ist, dass die Phasenverschiebung für niedrigere Frequenzen abnimmt und für hohe Frequenzen gegen $\frac{\pi}{2}$ strebt.

Für $\omega t + \varphi = \frac{\pi}{2}$ folgt aus (8):

$$A(\omega) = -\frac{\sin\varphi}{\omega RC} \cdot U_0. \quad (10)$$

Aus (9) und $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ ergibt sich

$$\sin\varphi = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

Wird dies in (10) eingesetzt, so ist das Ergebnis die Gleichung für die Amplitude in Abhängigkeit der Frequenz:

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (11)$$

Es ist zu erkennen, dass die Amplitude für kleine Kreisfrequenzen gegen U_0 geht und für hohe Frequenzen verschwindet.

2.3 Der RC-Kreis als Integrator

Unter bestimmten Bedingungen kann eine Spannung $U(t)$ mit dem RC-Kreis integriert werden. Wird dazu in das 2. Kirchhoffsche Gesetz

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) = I(t) \cdot R + U_C(t)$$

die Gleichung (7) eingesetzt, so folgt:

$$U(t) = RC \cdot \frac{dU_C(t)}{dt} + U_C(t)$$

Mit $\omega \gg \frac{1}{RC}$ ist $|U_C| \ll |U_R|$ und $|U_C| \ll |U|$ und es ergibt sich die Näherung

$$U(t) = RC \cdot \frac{dU_C(t)}{dt}$$

$$\Leftrightarrow U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt'.$$

3 Durchführung

3.1 Bestimmung der Zeitkonstanten

Zur Bestimmung der Zeitkonstanten RC wird die Schaltung wie in Abbildung (2) aufgebaut. Am Generator wird eine Rechteckspannung eingestellt und die Kondensatorspannung am Oszilloskop beobachtet. Bei passender Einstellung des Oszilloskops ist die Entladungskurve des Kondensators in Form einer abfallenden Flanke zu sehen. Von dieser Kurve werden mithilfe des Cursors des Oszilloskops 31 Wertepaare, bestehend aus Kondensatorspannung und Zeit, entnommen. Zuletzt wird die Kurve als Bild gespeichert.

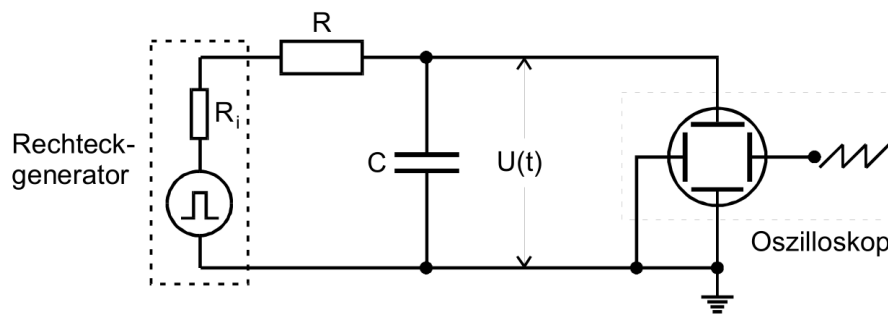


Abbildung 2: Messschaltung zur Bestimmung der Zeitkonstanten des RC-Gliedes, [1, S. 6].

3.2 Messung der Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz

In dieser Messung wird der in Abbildung (3) zu sehende Aufbau vorgenommen. Nun wird schrittweise die Frequenz am Generator in einem Bereich von 10 bis 10000 Hz erhöht. Für 30 Frequenzen wird die Spannungsamplitude mit dem Cursor gemessen und notiert.

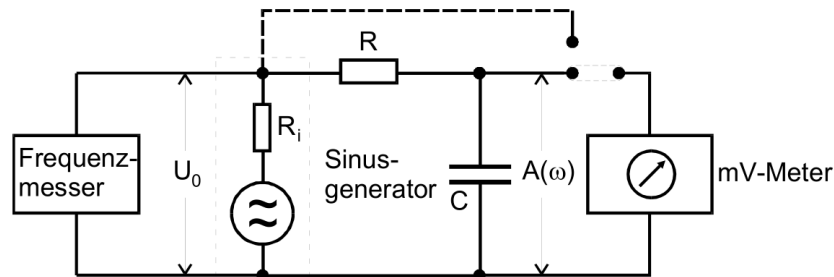


Abbildung 3: Messschaltung zur Bestimmung der Amplituden in Abhängigkeit der Frequenz, [1, S. 7].

3.3 Messung der Phasenverschiebung in Abhängigkeit von der Frequenz

Zur Messung der frequenzabhängigen Phasenverschiebung wird die Schaltung wie in Abbildung (4) aufgebaut. Am Oszilloskop ist nun die Generator- und die Kondensatorspannung zu sehen. Wie in der zweiten Messung werden nacheinander 22 Frequenzen im Intervall von 10 bis 10000 Hz eingestellt und die Phasenverschiebung der beiden Kurven bestimmt, indem mit dem Cursor der Abstand a gemessen wird (vgl. Abbildung (4)). Der Abstand b wird durch Umrechnen der Frequenz zur Periodendauer ermittelt.

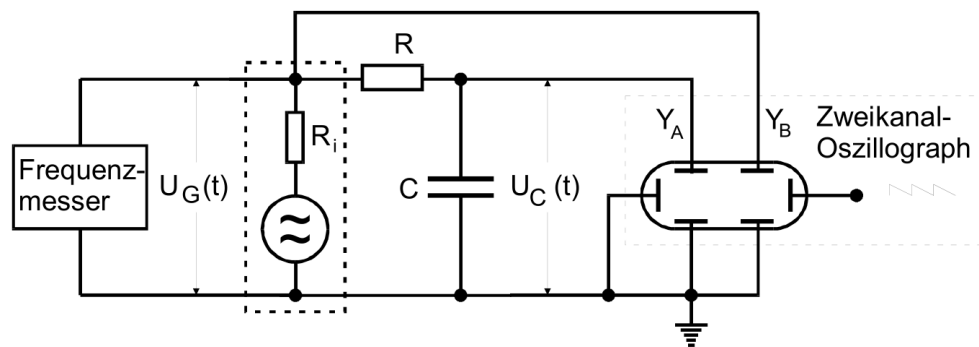


Abbildung 4: Messschaltung zur Bestimmung der Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz, [1, S. 7].

3.4 RC-Kreis als Integrator

Um zu zeigen, dass der RC-Kreis als Integrator wirkt, wird die Frequenz der Generatorspannung auf 3000 Hz gestellt. Anschließend werden nacheinander Sinus-, Rechteck- und

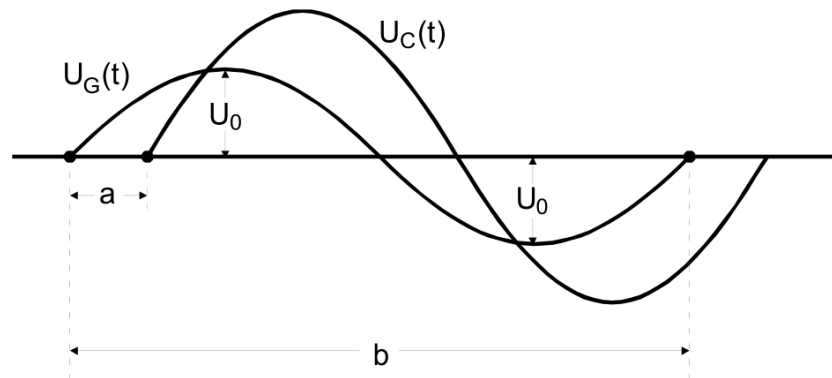


Abbildung 5: Messung der Phasenverschiebung zwischen zwei Spannungen, [1, S. 7].

Dreiecksspannung an das RC-Glied angelegt. Auf dem Oszilloskop werden nun angelegte und integrierte Spannung angezeigt, welche dann für jede angelegte Spannung als Bilder gespeichert werden.

4 Auswertung

4.1 Entladevorgang eines Kondensators

Bei der ersten Methode zur Bestimmung der Zeitkonstante wird der Entladevorgang eines Kondensators über einen Widerstand in der Abbildung 6 beobachtet. Die gemessenen Daten befinden sich in der Tabelle 1. Es werden aus der Tabelle 1 die 31 Wertepaare entnommen und die Spannung U_C logarithmiert. Mit den Wertepaare wird eine lineare Ausgleichsgerade zur Bestimmung der Zeitkonstante durchgeführt und in die Abbildung 7 eingetragen.

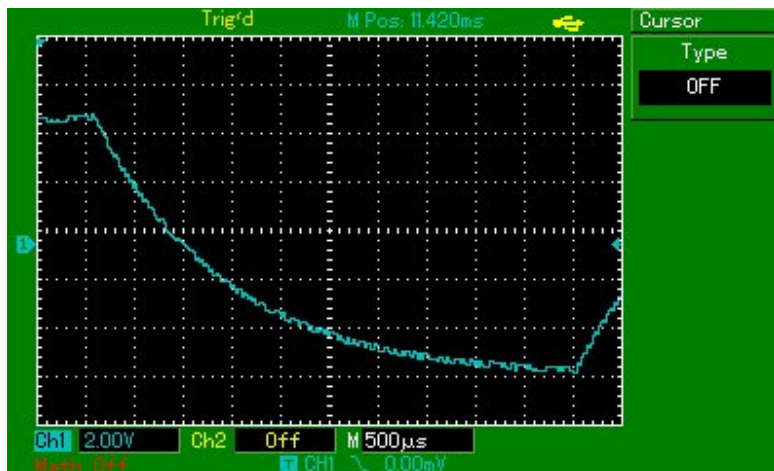


Abbildung 6: Entladevorgang eines Kondensators

Eine lineare Ausgleichsgerade lässt sich berechnen wie:

$$y = mx + b \quad (12)$$

wobei m die Steigung und b der y-Achsenabschnitt sind. Über Formel 6 lässt sich RC bestimmen. Die Steigung der Ausgleichsgeraden der Form in der Gleichung 12 wird vom Python-Modul Matplotlib berechnet und beträgt:

$$\begin{aligned} m &= -\frac{1}{RC} \\ &= (-983,89 \pm 27,88) \frac{1}{s} \end{aligned}$$

mit R als Widerstand und C als Kapazität des Kondensators. Der y-Achsenabschnitt ist gegeben als:

$$b = \ln(Q(0))$$

wobei $Q(0)$ die Ladung des Kondensators zum Zeitpunkt $t = 0$ beschreibt und beträgt somit:

$$b = (1.016 \pm 0.035)\ln(C).$$

Die Steigung lässt sich nach RC umstellen und mit Hilfe des bekannten Wertes ergibt sich:

$$\begin{aligned} RC &= -\frac{1}{m} \\ &= (1,016 \pm 0,035) \text{ ms.} \end{aligned}$$

Tabelle 1: Messdaten zur Entladung eines Kondensators

t/ms	U_C/V
9,02	4,08
9,10	3,52
9,18	2,96
9,30	2,32
9,46	1,44
9,56	0,96
9,70	0,32
9,84	-0,24
10,00	-0,80
10,16	-1,36
10,36	-1,92
10,52	-2,32
10,70	-2,72
10,88	-3,04
11,16	-3,52
11,34	-3,76
11,50	-4,00
11,64	-4,16
11,82	-4,24
12,04	-4,48
12,26	-4,64
12,50	-4,72
12,68	-4,88
12,82	-4,96
12,98	-5,04
13,14	-5,04
13,32	-5,04
13,46	-5,12
13,66	-5,20
13,92	-5,20

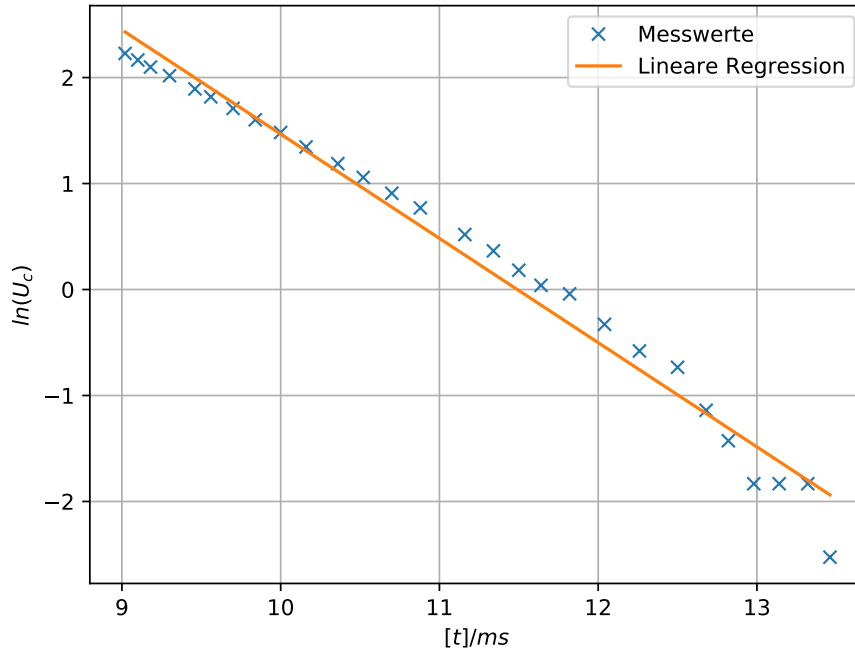


Abbildung 7: Lineare Ausgleichsgerade zur Bestimmung der Zeitkonstante

4.2 Frequenzabhängigkeit der Amplitude

Bei der zweiten Methode soll die Zeitkonstante RC mit der Frequenzabhängigkeit der Amplitude A am Kondensator bestimmt werden. Die Messdaten befinden sich in der Tabelle 2. Mit Hilfe von den Messwerten wird eine Ausgleichsrechnung mit der Formel 11 durchgeführt, die in der Abbildung 8 zu sehen ist. Zur Vereinfachung wird die Formel 11 umgeschrieben und es gilt:

$$\frac{A(\nu)}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi\nu RC)^2}} \quad (13)$$

wobei U_0 die Amplitude der Schwingung ist. Hier wird ebenfalls die Zeitkonstante vom Python-Modul Matplotlib aus der Gleichung 13 berechnet und beträgt somit:

$$RC = (1,329 \pm 0,013) \text{ ms.}$$

Tabelle 2: Messdaten für die Frequenzabhängigkeit der Amplitude

ν/Hz	U/V
10	5,00
20	5,04
30	4,96
40	4,80
50	4,68
60	4,52
70	4,36
80	4,16
90	4,04
100	3,88
200	2,54
300	1,82
400	1,38
500	1,12
600	0,95
700	0,81
800	0,71
900	0,63
1000	0,568
2000	0,288
3000	0,190
4000	0,145
5000	0,116
6000	0,082
7000	0,082
8000	0,072
9000	0,064
10000	0,058

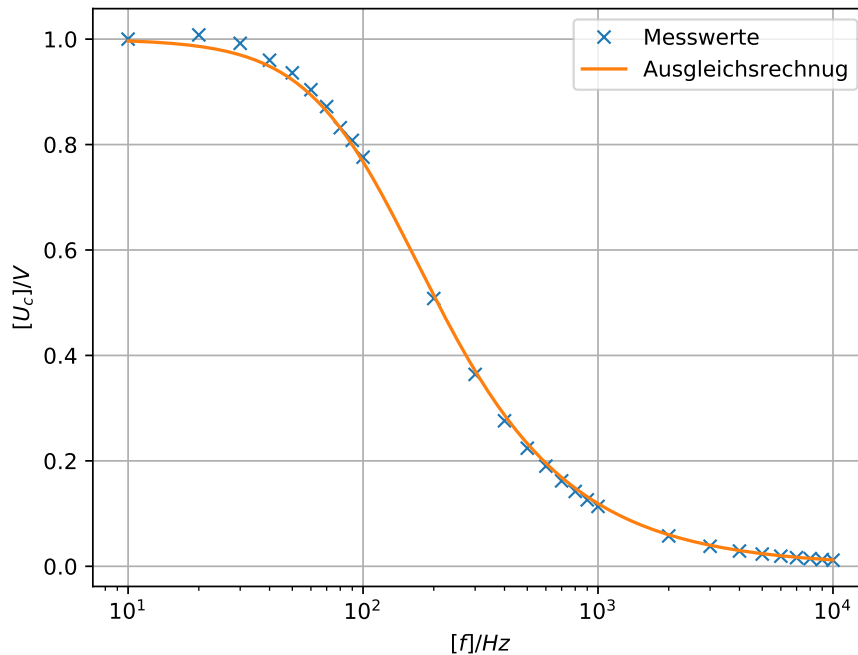


Abbildung 8: Bestimmung der Zeitkonstante mit der Amplitude A in Abhängigkeit der Frequenz ν

4.3 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung

Bei der dritten Methode wird die RC -Konstante mit Hilfe der Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung bestimmt. Die Phasenverschiebung errechnet sich wie folgt:

$$\phi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi \quad (14)$$

wobei a der zeitliche Abstand der Nulldurchgänge der Schwingungen und b die Periodendauer einer Schwingung sind. In der Tabelle 3 befinden sich die gemessenen Daten. Für die Ausgleichsrechnung wird die Formel 9 benötigt. Analog zu den ersten beiden Methoden werden die Wertepaare aus der Tabelle 3 entnommen und gemäß Gleichung ?? eine Regression durchgeführt, die in der Abbildung 9 zu sehen ist.

Die Zeitkonstante RC beträgt also:

$$RC = (1,849 \pm 0,018) \text{ ms.}$$

Tabelle 3: Messdaten für die Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung

ν/Hz	a/ms	b/ms	ϕ/rad
10	2,40	97,60	0,154
20	2,40	50,00	0,301
30	1,80	33,20	0,340
40	1,60	25,00	0,402
50	1,52	18,48	0,517
60	1,52	16,72	0,577
70	1,44	14,24	0,635
80	1,52	12,64	0,755
90	1,28	11,12	0,723
100	1,20	9,92	0,760
200	0,92	5,00	1,156
300	0,72	3,36	1,346
400	0,56	2,50	1,407
500	0,48	2,00	1,507
600	0,41	1,67	1,542
700	0,36	1,44	1,570
800	0,29	1,25	1,457
900	0,31	1,11	1,754
1000	0,25	1,00	1,570
2000	0,16	0,50	2,010

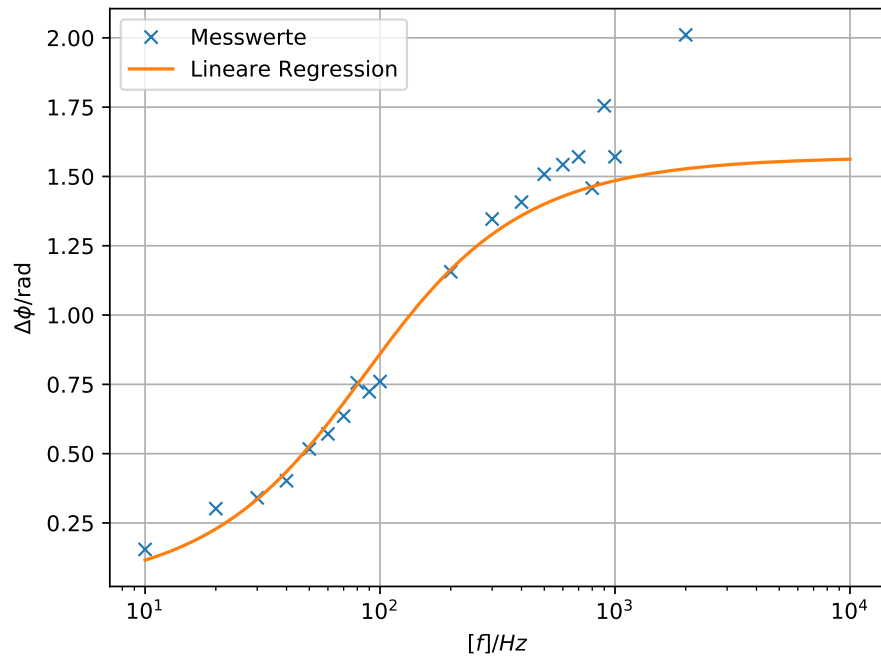


Abbildung 9: Bestimmung der Zeitkonstante unter Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung

4.4 Beobachtung der Phasenverschiebung zwischen der Generator- und Kondensatorspannung

Mit Hilfe der Daten aus der Tabelle lässt sich ein Polarplot erstellen, der in Abbildung 10 zu sehen ist.

Tabelle 4: Messdaten zur Beobachtung der Phasenverschiebung zwischen der Generator- und Kondensatorspannung

$\frac{A}{U_0}$	ϕ/rad
0,959	0,154
0,967	0,301
0,952	0,340
0,921	0,402
0,898	0,516
0,867	0,571
0,836	0,635
0,798	0,755
0,775	0,723
0,744	0,760
0,487	1,156
0,349	1,346
0,214	1,407
0,182	1,507
0,155	1,542
0,136	1,570
0,120	1,457
0,109	1,754
0,055	1,570
0,036	2,010

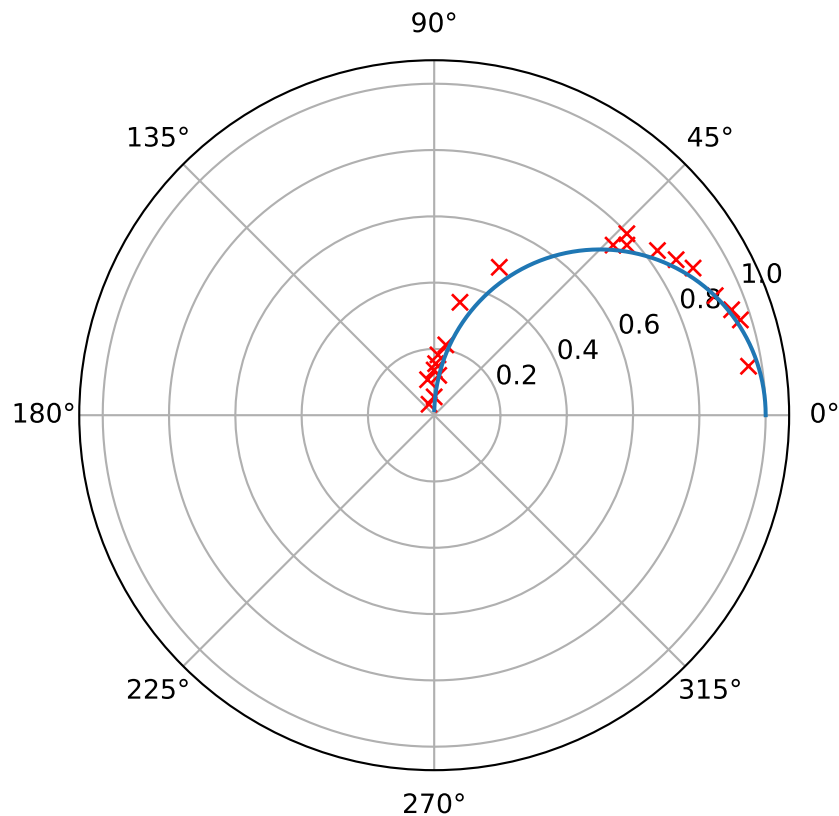


Abbildung 10: Polarplot zur Beobachtung der Phasenverschiebung zwischen der Generator- und Kondensatorspannung

4.5 RC-Kreis als Integrator

Der RC-Kreis kann unter bestimmten Voraussetzungen als Integrator arbeiten. Es lässt sich eine hohe Frequenz einstellen, die in diesem Versuch 3000 Hz beträgt. Die gelbe Funktion ist die Ausgangsspannung und die blaue Funktion ist die Spannung über den RC-Kreis. In der Abbildung 11 wurde aus der Sinusspannung eine Cosinusspannung, zunächst aus der Rechteckspannung in der Abbildung 13 eine konstant steigende Funktion und aus der Dreieckspannung in 12 eine Parabel. Es wird also bei allen ausgegeben Bildern gezeigt, dass der RC-Kreis auch als Integrator funktionieren kann.

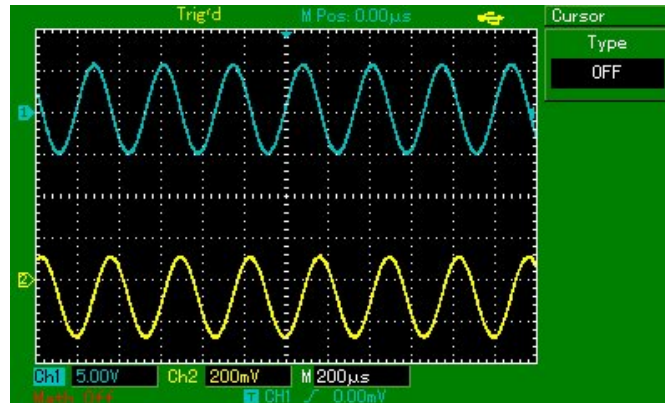


Abbildung 11: RC-Kreis, Sinusschwingung

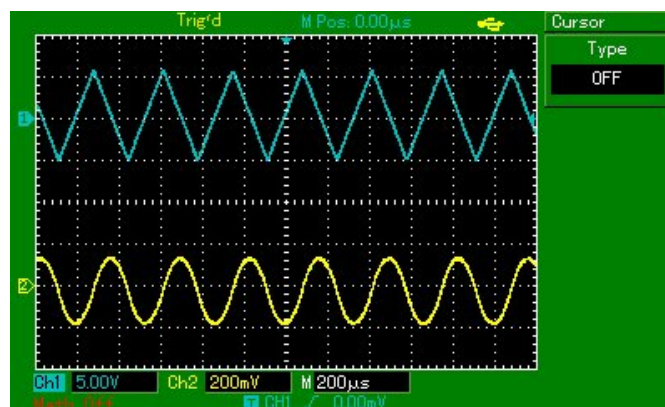


Abbildung 12: RC-Kreis, Dreieckschwingung

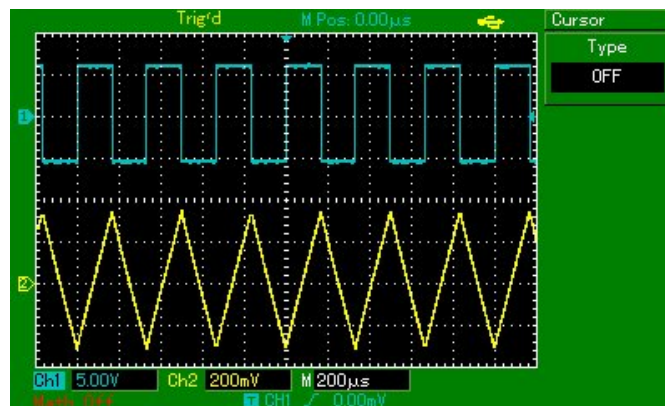


Abbildung 13: RC-Kreis, Rechteckschwingung

5 Diskussion

Es lässt sich erschließen, dass die ermittelten Werte bei der Zeitkonstante nah beieinander liegen. Es können jedoch systematische Fehler auftreten, da der Innenwiderstand des Generators bei allen Versuchen vernachlässigt wird. Der genaue Wert der Zeitkonstante kann nicht berechnet werden, weil die benötigten Angaben über den Widerstand R des RC-Gliedes fehlen und keine Messgeräte vorhanden sind. In der Abbildung 6 ist gut erkennbar den exponentiellen Abfall bei der Entladevorgang des Kondensators. Mit zunehmender Frequenz nimmt die Amplitude der Kondensatorspannung ab. Weiterhin lassen sich auf Messfehler zurückführen. Bei der Einstellung für größere Frequenzen bei der Phasenverschiebung wurden die zu ermittelten Größen immer kleiner und somit war dies ungenau messbar.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 353: Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/V353.pdf> (besucht am 03.12.2017).