V107: Kugelfall-Viskosimeter

Ramona Kallo Evelyn Romanjuk

03.11.2017

Inhaltsverzeichnis

1 Auswertung

1.1 Fehlerrechnung

In der folgenden Auswertung werden Mittelwerte mit

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{\mathrm{i}} \tag{1}$$

und der zugehörige Fehler mit

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_{\mathrm{i}}-\bar{x})^2} \tag{2}$$

berechnet. Beim Rechnen mit mehreren fehlerbehafteten Werten wird die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung zur Berechnung des neuen Fehlers genutzt:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\delta f}{\delta x_{\mathrm{i}}}\right)^2 \cdot (\Delta x_{\mathrm{i}})^2}. \tag{3}$$

1.2 Bestimmung der Apparatekonstanten

Um später die Viskosität von Wasser bei verschiedenen Temperaturen berechnen zu können, muss die Apparatekonstante K_{gr} der großen Kugel bestimmt werden. Hierfür werden zunächst die Dichten der beiden Kugeln aus den gegebenen Massen

$$m_{\mathrm{kl}} = 4{,}48 \cdot 10^{-3}\mathrm{kg}$$
$$m_{\mathrm{gr}} = 4{,}97 \cdot 10^{-3}\mathrm{kg}$$

sowie den Radien der Kugeln aus Tabelle (1) berechnet.

Tabelle 1: Radien der Kugeln

Kleine Kugel $r_{\mathrm{kl}}/10^{-3}\mathrm{m}$	Große Kugel $r_{\mathrm{gr}}/10^{-3}\mathrm{m}$
7,754 50	7,763 00
7,754 50	7,762 50
7,754 25	7,762 75
7,754 25	7,762 75
7,754 75	7,763 25

Der Mittelwert der Radien wird mit Gleichung (1) und der Fehler des Mittelwerts mit Gleichung (2) zu

$$r_{\mathrm{kl}} = (7{,}75445 \pm 0{,}00009) \cdot 10^{-3}\mathrm{m}$$
$$r_{\mathrm{gr}} = (7{,}76285 \pm 0{,}00013) \cdot 10^{-3}\mathrm{m}$$

berechnet. Die Volumina der Kugeln mit zugehörigem Fehler können dann mit Gleichung (3) errechnet werden. Es ergibt sich:

$$V_{\mathrm{kl}} = (1{,}95318 \pm 0{,}00007) \cdot 10^{-6}\mathrm{m}^3$$
$$V_{\mathrm{gr}} = (1{,}95953 \pm 0{,}00009) \cdot 10^{-6}\mathrm{m}^3$$

Hieraus können nun die Dichten der beiden Kugeln berechnet werden. Wieder wird Gleichung (3) für die Berechnung des Fehlerwertes genutzt.

$$\rho_{\mathrm{kl}} = (2293{,}65 \pm 0{,}08)\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$
$$\rho_{\mathrm{gr}} = (2536{,}321 \pm 0{,}116)\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Weiterhin wird für die Berechnung der Apparatekonstanten die Viskosität η_{RT} von Wasser bei Raumtemperatur bestimmt. Verwendet werden

$$K_{\mathrm{kl}} = 7{,}64 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}$$
$$\rho_{\mathrm{fl}} = 998{,}2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

wobei K_{kl} die bereits gegebene Apparatekonstante der kleinen Kugel ist und ρ_{fl} die Dichte von Wasser bei Raumtemperatur [2]. Zudem entnimmt man die Fallzeiten der beiden Kugeln von

$$t_{\mathrm{kl}} = (12{,}42 \pm 0{,}09)\,\mathrm{s}$$
$$t_{\mathrm{gr}} = (73{,}4 \pm 0{,}3)\,\mathrm{s}$$

aus Tabelle (2).

Tabelle 2: Fallzeiten der Kugeln durch Wasser bei Raumtemperatur

Kleine Kugel $t_{\mathrm{kl}}/\mathrm{s}$	Große Kugel $t_{\mathrm{gr}}/\mathrm{s}$
12,03	72,63
12,06	72,34
12,24	73,27
12,37	73,26
12,40	74,61
12,95	72,85
12,60	72,82
12,63	73,56
12,44	74,28
12,47	74,66

Nun lässt sich die Viskosität η_{RT} mit Gleichung [K, DCIHTE; ZEIT] bestimmen. Sie beträgt

$$\eta_{\text{RT}} = (1{,}23 \pm 0{,}09) \cdot 10^{-3}\,\text{Pa} \cdot \text{s}$$

wobei der Fehlerwert wiederum aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung (3) stammt.

Zuletzt wird Gleichung[K; DICHTE; ZEIT] nach K_{gr} umgestellt. Mit den zuvor errechneten Werten ergibt sich eine Apparatekonstante von

$$K_{\text{gr}} = (1{,}09 \pm 0{,}08) \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{kg}}$$

1.3 Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität

Wie bei der Bestimmung der Apparatekonstanten K_{gr} kann Gleichung [K; DICHTE; ZEIT] für die Berechnung der Viskositäten von Wasser bei unterschiedlichen Temperaturen verwendet werden. Hierbei sind K_{gr}, ρ_{gr} und t_{gr} fehlerbehaftete Größen, weshalb die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung mit Gleichung (3) durchgeführt werden muss. Für die Dichte ρ_{fl} von Wasser bei verschiedenen Temperaturen werden Literaturdaten [2] verwendet.

Tabelle 3: Messdaten zur Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser

Temperatur T/K	Fallzeit t_{gr}/s	Dichte Wasser $\rho_{\text{fl}}/\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Viskosität $\eta/10^{-3}\,\text{Pa} \cdot \text{s}$
303,15	$61{,}76 \pm 1{,}07$	995,64	$6{,}12 \pm 0{,}13$
307,15	$55{,}7 \pm 0{,}4$	994,37	$5{,}52 \pm 0{,}08$
310,15	$52{,}6 \pm 0{,}2$	993,32	$5{,}22 \pm 0{,}06$
313,20	$49{,}5 \pm 0{,}2$	992,19	$4{,}91 \pm 0{,}06$
317,15	$47{,}6 \pm 0{,}4$	990,63	$4{,}73 \pm 0{,}07$
321,15	$43{,}5 \pm 0{,}1$	988,93	$4{,}33 \pm 0{,}05$
325,65	$40{,}7 \pm 0{,}2$	986,89	$4{,}05 \pm 0{,}02$
329,65	$37{,}9 \pm 0{,}4$	984,97	$3{,}78 \pm 0{,}06$
333,15	$36{,}5 \pm 0{,}3$	983,20	$3{,}64 \pm 0{,}05$
336,15	$34{,}9 \pm 0{,}1$	981,63	$3{,}49 \pm 0{,}04$

Im Folgenden wird der natürliche Logarithmus der Viskosität gegen den Kehrwert der Temperatur aufgetragen, wie in Abbildung (1) zu sehen ist.

Mithilfe des Graphen lassen sich nun die Konstanten der Andradeschen Gleichung errechnen:

$$\begin{aligned} \eta(T) &= Ae^{\frac{B}{T}} \\ \iff \ln(\eta) &= \ln(A) + \frac{B}{T} \\ A &= (2.2 \pm 0.5) \cdot 10^{-5}\,\text{Pa} \cdot \text{s} \\ B &= (1698.9 \pm 39.3)\text{K} \end{aligned}$$

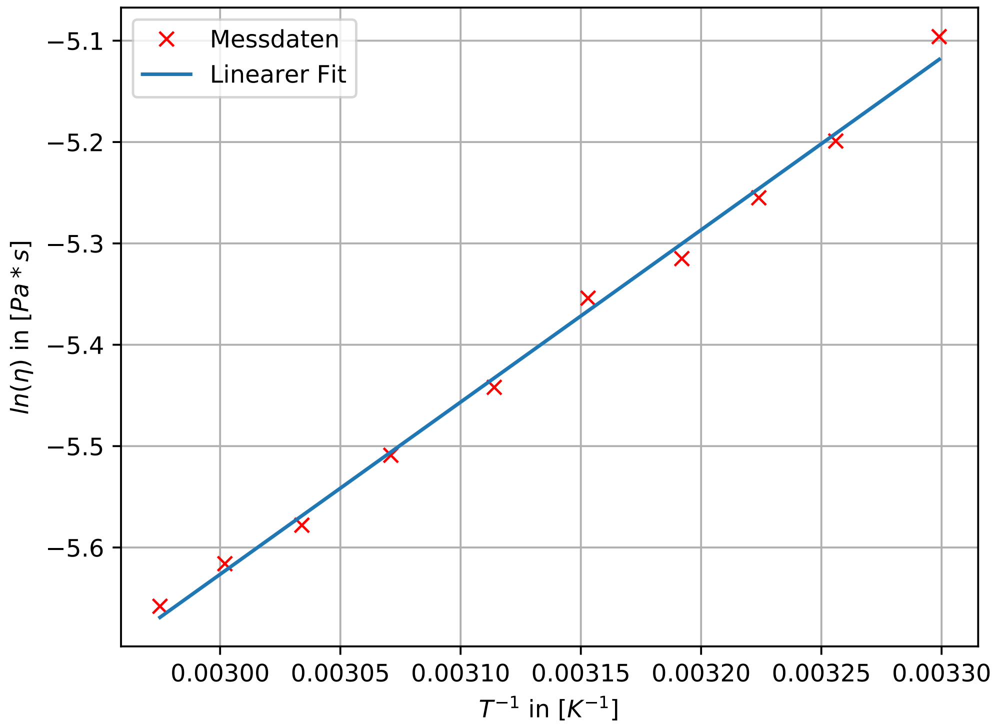

Abbildung 1: Bestimmung der Konstanten der Andradeschen Gleichung

Zuletzt wird geprüft, ob die Strömung laminar oder turbulent ist. Hierzu wird die Reynoldszahl Re_{max} der kleinen und der großen Kugel berechnet und dann mit dem kritischen Wert der Reynoldszahl Re_{krit}=1160 verglichen. Wird in Gleichung [REYNOLDSZAHL] $d = 2r_{\text{kl/gr}}$ und $v = \frac{x}{t_{\text{kl/gr}}}$ gesetzt, so ergibt sich

$$Re = \frac{\rho \cdot 2r_{\text{kl/gr}} \cdot x}{\eta \cdot t_{\text{kl/gr}}} \tag{4}$$

wobei x die Fallstrecke der Kugeln ist und $x = 0.1\text{m}$ [1, S. 3] beträgt. Um den maximalen Wert der Reynoldszahl zu erhalten, wird jeweils die kleinste Fallzeit der Kugeln gewählt. Bei der großen Kugel entspricht dies der Fallzeit bei der höchsten Wassertemperatur.

Die Reynoldszahlen der beiden Kugel betragen damit

$$Re_{\text{max,kl}} = 101.4 \pm 7.5$$
$$Re_{\text{max,gr}} = 12.5 \pm 0.2$$

2 Diskussion

Schon bei der Berechnung der Apparatekonstante fällt auf, dass die benötigte Viskosität von Wasser bei Raumtemperatur recht stark von ihrem Literaturwert von $1 mPa \cdot s$ abweicht. Diese Abweichung beträgt rund 23%. Da die Fallzeit und die Dichte der kleinen Kugel jeweils geringe Fehlerwerte hatten, könnte man vermuten, dass die gegebene Apparatekonstante der kleinen Kugel zu ungenau bestimmt wurde. Dennoch weist die Apparatekonstante K_{gr}, welche unter anderem mit dieser Viskosität berechnet wurde, einen geringen Fehler auf. Daher kann man davon ausgehen, dass dieser Fehler sich nicht allzu stark auf diese weiteren Rechnungen auswirkte. Weiterhin liegen die berechneten Reynoldszahlen sehr deutlich unter dem kritischen Wert von 1160, woraus zu schließen ist, dass die Strömung im Rohr laminar ist und Wirbel nicht die Durchführung oder die Ergebnisse beeinflusst haben.

Zuletzt ist in Abbildung (1) zu erkennen, dass die meisten Messwerte recht nah an der Ausgleichsgeraden liegen, sodass diese, als auch die daraus bestimmten Konstanten der Andradeschen Gleichung als relativ genau betrachtet werden können.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuch 207: Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler*. 2017. URL: `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/ViskositaetMP.pdf`.

[2] Frostburg State University. *Water Density Calculator*. URL: `http://antoine.frostburg.edu/chem/senese/javascript/water-density.html`.