

# Versuch 406 - Beugung am Spalt

TU Dortmund, Fakultät Physik

Anfänger-Praktikum

Lars Klompaker

[lars.klompaker@tu-dortmund.de](mailto:lars.klompaker@tu-dortmund.de)

Fabian Lehmann

[fabian.lehmann@tu-dortmund.de](mailto:fabian.lehmann@tu-dortmund.de)

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>2</b>
1.1	Beugung am Einzelspalt . . . . .	2
1.2	Beugung am Doppelspalt . . . . .	4
1.3	Fraunhofersche Beugung und Fourier-Transformation . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
2.1	Messung der Beugungsfigur eines Spaltes . . . . .	5
2.2	Bestimmung der Spaltgröße mit einem Mikroskop . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>5</b>
3.1	Bestimmung der Spaltbreiten durch nichtlineare Näherung . . . . .	5
3.2	Bestimmung der Spaltbreite mit Mikroskop . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>10</b>
4.1	Bestimmung der Spaltbreiten . . . . .	10
4.2	Vergleich der Beugungsfiguren . . . . .	10

# 1 Theorie

Die Beugung des Lichts beschreibt das Phänomen, dass die Lichtausbreitung von der geometrischen Optik abweicht, wenn ein Lichtstrahl auf Öffnungen trifft, deren Abmessung klein gegen den Durchmesser des Lichtstrahls ist. Gut erklären lässt sich dies, indem das Licht als Welle aufgefasst wird, was aufgrund der großen Anzahl an Photonen hier als Näherung verwendet werden kann. Grundsätzlich gibt es zwei Ansätze für Beugung am Spalt, die Fresnelsche und die Fraunhofersche Beugung (s. Abb. 1).

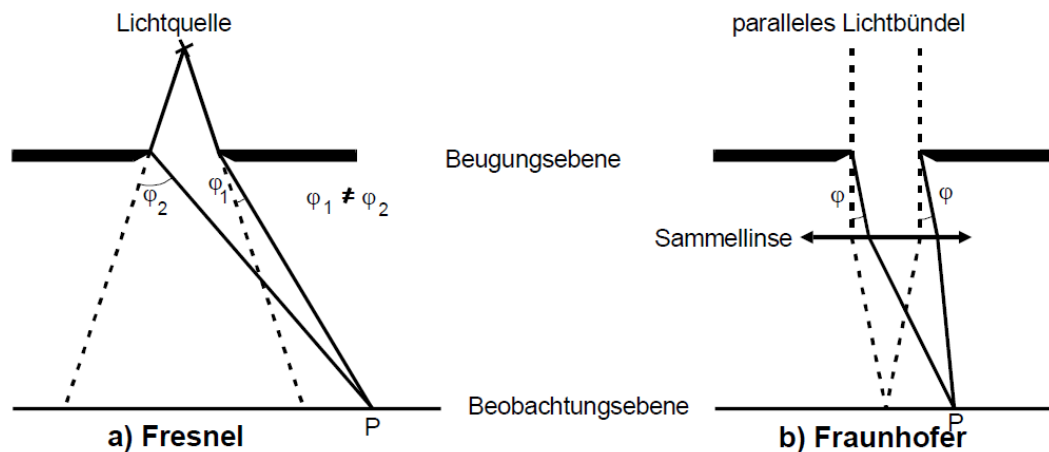


Abbildung 1: Beugung nach Fresnel und Fraunhofer an einem Spalt

Fresnel geht von einer Lichtquelle in endlicher Entfernung vom Spalt aus, sodass sich eine divergente Lichtausbreitung ergibt. Dies hat zur Folge, dass die Strahlen, die im Punkt P beobachtet werden, unter verschiedenen Winkeln gebrochen wurden. Die Fraunhofer Beugung geht hingegen von einer Lichtquelle im Unendlichen aus, wodurch sich ein paralleles Lichtbündel mit ebenen Wellenfronten ergibt. Dies hat den Vorteil, dass es nur einen Brechungswinkel gibt und sich so die Auswertung des Versuches vereinfacht. Im Folgenden wird somit nur noch von der Fraunhoferschen Beugung ausgegangen. Das Huygenssche Prinzip geht nun davon aus, dass von jedem Punkt einer Wellenfront zur gleichen Zeit Elementarwellen kreisförmig auslaufen. Diese theoretisch unendlich vielen Wellen interferieren miteinander und bilden so neue Wellenfronten, die sich als Einhüllende der Elementarwellen betrachten lassen.

## 1.1 Beugung am Einzelspalt

Gehen von jedem Punkt der Spaltöffnung sich in alle Richtungen ausbreitende Wellen aus, ergeben sich aus der Interferenz Maxima und Minima der Lichtintensität.

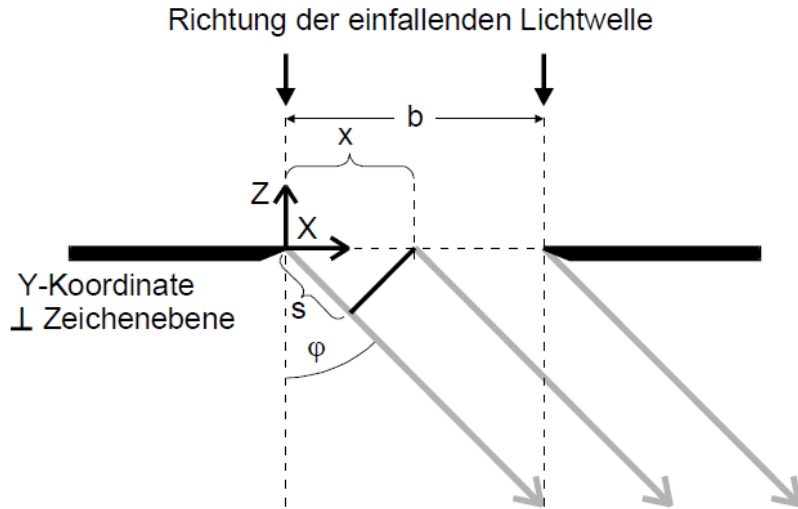


Abbildung 2: Beugung am einfachen Spalt

Nimmt man zwei dieser Punkte im Abstand  $x$  am Spalt, so ergibt sich durch ihren Gangunterschied  $s$  die Phasendifferenz  $\delta$ :

$$\delta = \frac{2\pi s}{\lambda} = \frac{2\pi x \sin \varphi}{\lambda} \quad (1)$$

Die Integration über die Spaltbreite  $b$  der Funktion

$$B(z, t, \varphi) = A_0 \int_0^b \exp \left\{ i \left( \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} + \delta \right) \right\} dx \quad (2)$$

( $A_0$  ist die Amplitude der einfallenden Welle,  $z$  die Ausbreitungsrichtung und  $\omega$  die Frequenz) ergibt mit Vernachlässigung der Phasenfunktionen

$$B(\varphi) = A_0 b \frac{\sin \eta}{\eta} \quad (3)$$

$$\eta = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}. \quad (4)$$

Aufgrund der hohen Frequenzen im Bereich  $\omega = 10^{14}$  bis  $10^{15}$  Hz ist die Amplitude nicht direkt messbar. Man misst deshalb die zeitlich gemittelte Intensität  $I(\varphi)$  des gebeugten Lichts. Diese ist bei am Parallelschlalt gebeugten Licht gegeben durch

$$I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = A_0^2 b^2 \left\{ \frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right\}^2 \cdot \sin^2 \left\{ \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right\}. \quad (5)$$

## 1.2 Beugung am Doppelspalt

Die Beschreibung der Beugung am Doppelspalt erfolgt als Überlagerung zweier Einfach-Spalte mit Breite  $b$  und Abstand  $s$ :

$$I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = 4A_0^2 b^2 \cos^2 \left( \frac{\pi s \sin \varphi}{\lambda} \right) \left( \frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right). \quad (6)$$

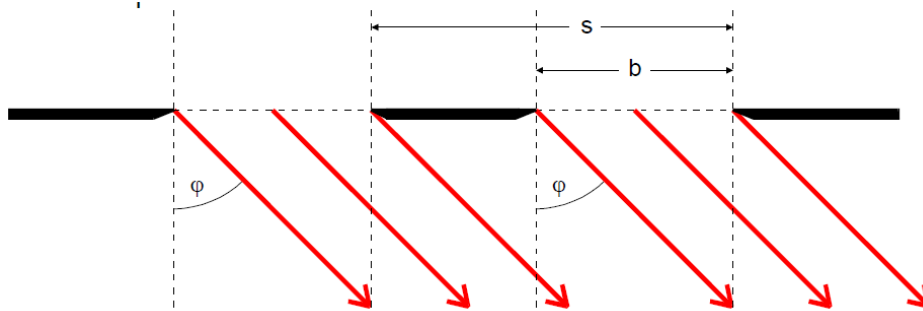


Abbildung 3: Beugung am Doppelspalt

Es ergibt sich somit für den Doppelspalt die Intensitätsverteilung des Einzelspalts mit einem  $\cos^2$ -Term, wodurch sich zusätzlich Minima an den Nullstellen der  $\cos^2$ -Verteilung ergeben.

## 1.3 Fraunhofersche Beugung und Fourier-Transformation

Allgemein ist die Fourier-Transformation einer Funktion  $f(x)$  gegeben durch

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi} dx. \quad (7)$$

Bei der Fraunhofer-Beugung lässt sich  $B(\varphi)$  als Fouriertransformierte der Amplitudenverteilung der einfallenden Welle in der Beugungsebene (Aperturfunktion) ausdrücken. Als Funktion am Spalt wird nun  $f(x) = A_0$  gesetzt, womit sich mit der Eulerschen Formel folgendes ergibt:

$$g(\xi) = \frac{2A_0}{\xi} \exp \left( \frac{ib\xi}{2} \right) \sin \left( \frac{b\xi}{2} \right). \quad (8)$$

Setzt man nun

$$\xi := \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda} \quad (9)$$

ergibt sich eine Übereinstimmung zwischen  $g(\xi)$  und  $B(\varphi)$ .

Aus der Umkehrbarkeit der Fouriertransformation ergibt sich, dass auch aus der Amplitudenfunktion die Gestalt des beugenden Objektes berechnet werden kann.

## 2 Durchführung

### 2.1 Messung der Beugungsfigur eines Spaltes

Bei allen drei Messreihen, zwei mit verschiedenen Einzelspalten, eine mit einem Doppelspalt, wird der Aufbau in Abbildung 4 auf einer optischen Schiene verwendet.

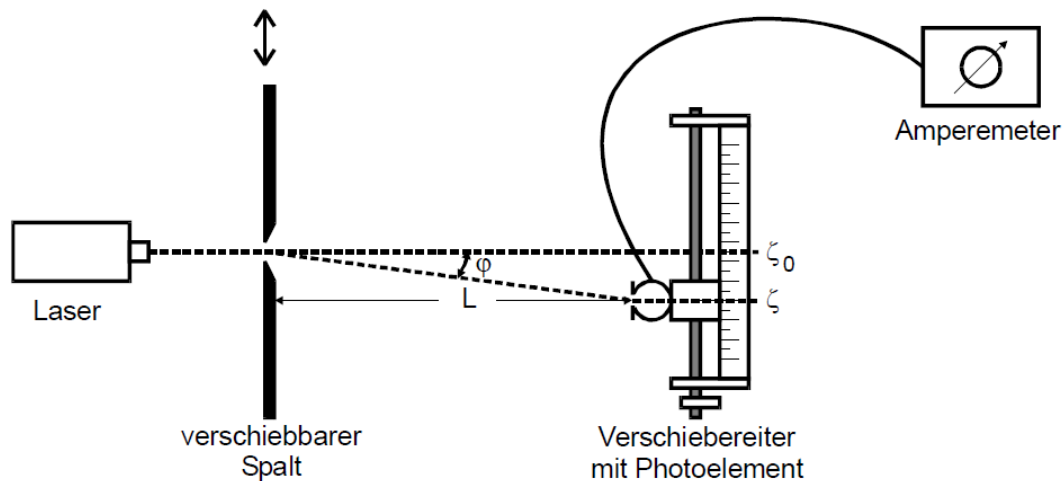


Abbildung 4: Versuchsaufbau zur Ausmessung der Beugungsfigur

Als Lichtquelle wird ein Helium-Neon-Laser mit einer Wellenlänge von  $633\text{ nm}$  verwendet. Die Intensität des gebeugten Lichts wird mit einer Photodiode gemessen, die einen zur Intensität proportionalen Strom erzeugt. Wichtig ist aufgrund der geringen entstehenden Stromstärken noch der Dunkelstrom, also der Strom, den die Photodiode ohne eingeschalteten Laser abgibt. Dieser wird dann von den Messergebnissen abgezogen. Die Photodiode kann Senkrecht zum ungebeugten Lichtstrahl auf einem Messreiter verschoben werden.

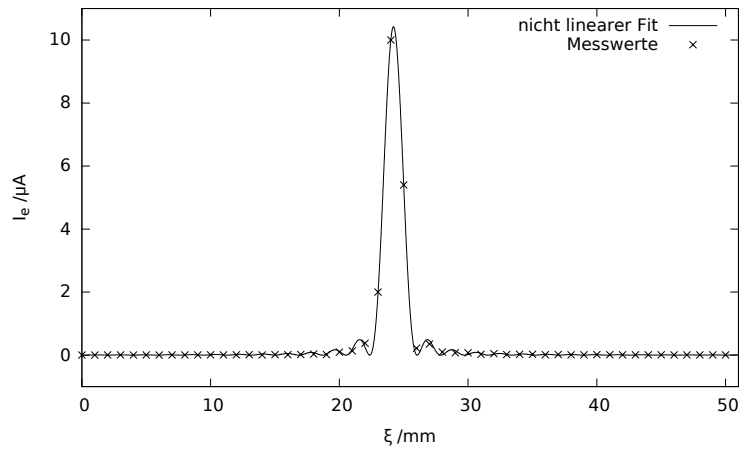
### 2.2 Bestimmung der Spaltgröße mit einem Mikroskop

Das verwendete Mikroskop hat eine willkürliche Skala in die Optik eingebaut. Dadurch muss zunächst eine Eichmessung nötig, dies geschieht mit einer auf einer Glasplatte aufgedruckten Skala. Danach lässt sich die Spaltgröße mit der nun geeichten Mikroskopskala bestimmen.

## 3 Auswertung

### 3.1 Bestimmung der Spaltbreiten durch nichtlineare Näherung

Die Gleichung für die Intensitätsverteilung am Einzelspalt, Gleichung (5), beziehungsweise Gleichung (7) (Fouriertransformierte), lässt sich durch Parameteranpassung nichtlinear an



**Abbildung 5:** Beugungsfigur und Näherung (Spalt 1)

die Messergebnisse anpassen.  $L = 100,3$  cm ist der Abstand vom Spalt zum Detektor,  $\zeta - \zeta_0$  der Abstand des Detektors von dem Laserintensitätsmaximum in der Schirmebene senkrecht zum Strahlengang und  $\varphi$  beschreibt den Winkel zwischen Spalt und Detektor zum Strahlengang (vgl. Abb. 4). Die Laserwellenlänge ist  $\lambda = 633$  nm.

$$\text{Kleinwinkelnäherung: } \varphi \approx \tan \varphi = \frac{\zeta - \zeta_0}{L} \quad (10)$$

$$\varphi \approx \sin \varphi \quad (11)$$

$$\Rightarrow I(x) \propto \left( A \frac{\lambda}{\pi} \frac{L}{\zeta - \zeta_0} \sin \left( \frac{\pi}{\lambda} \frac{\zeta - \zeta_0}{L} b \right) \right)^2 \quad (12)$$

Um die Spaltbreite  $b$  aus den Messdaten (Tab. 3.1, Tab. 3.2) zu bestimmen, wird Gleichung 12 mit dem GnuPlot-Befehl *fit* nichtlinear genähert.

Bei Spalt 1 wurden die Funktionsparameter zu Beginn mit  $A = 15$  und  $b = 0,0004$  geraten. Die Näherung ergab folgende Werte:

$$A = (9,36 \pm 0,04) \quad (13)$$

$$b = (3,45 \pm 0,02) \cdot 10^{-4} \quad (14)$$

Die Näherung ist in Abbildung 5 dargestellt.

Bei Spalt 2 wurden die Funktionsparameter zu Beginn mit  $A = 5$  und  $b = 0,00015$  geraten.

Die Näherung ergab folgende Werte:

$$A = (6,37 \pm 0,03) \quad (15)$$

$$b = (1,21 \pm 0,01) \cdot 10^{-4} \quad (16)$$

Die Näherung ist in Abbildung 6 dargestellt.

Die gemessene Intensitätsverteilung des Doppelspaltes mit Spaltbreite  $b=0,25$  mm und Spaltabstand  $d=0,15$  mm (Tab. 3.3) ist in Abbildung 7 dargestellt.

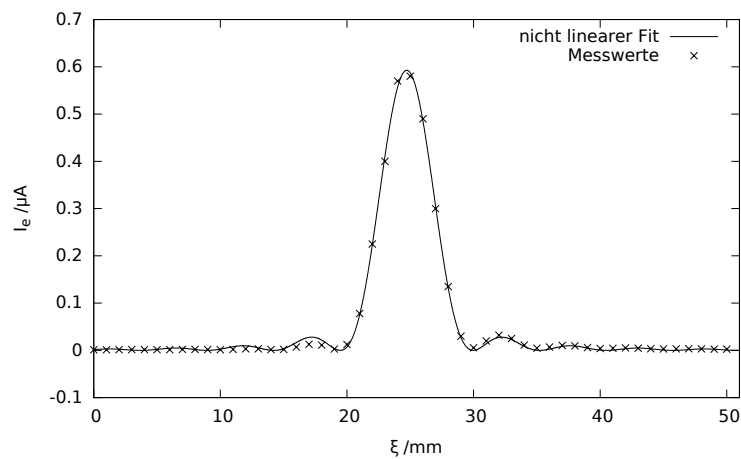
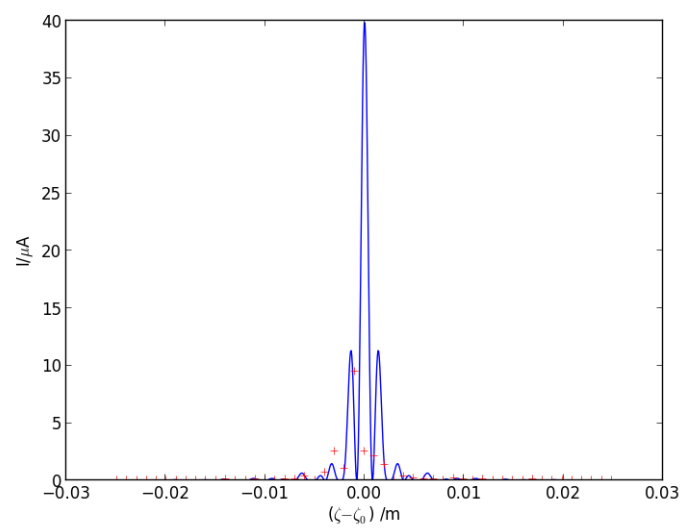


Abbildung 6: Beugungsfigur und Näherung (Spalt 2)

### 3.2 Bestimmung der Spaltbreite mit Mikroskop

Das Mikroskop wird so kalibriert, dass sechs Abstände des Objektmikrometers 17 Abstände der Mikroskopmessskala entsprechen. Einem Abstand des Objektmikrometers entsprechen 0,1 mm. Der auszumessende Spalt 1 verdeckt 14 Abstände der Mikroskopmessskala nicht, also ergibt sich für die Spaltbreite

$$b = \frac{6 \cdot 10^{-4} \text{ m}}{17} \cdot 14 = 4,9 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (17)$$



**Abbildung 7:** Beugungsfigur und Theoriekurve (Doppelspalt)



$\zeta$ /mm	I /nA
0	3.8
1	4.0
2	4.6
3	4.6
4	3.4
5	6.4
6	3.8
7	4.8
8	5.2
9	4.8
10	8.8
11	6.0
12	8.4
13	11.5
14	7.2
15	16.0
16	12.5
17	19.0
18	32.0
19	16.0
20	95.0
21	135.0
22	380.0
23	2000.0
24	10000.0
25	5400.0
26	220.0
27	350.0
28	96.0
29	72.0
30	73.0
31	25.5
32	45.0
33	21.0
34	26.5
35	27.0
36	12.0
37	20.0
38	9.6
39	9.0
40	16.0
41	11.5
42	10.0
43	9.4
44	9.0
45	8.2
46	6.9
47	7.4
48	6.0
49	5.6
50	5.5

**Tabelle 3.1:** Intensitätsmesswerte (Spalt 1),  
Dunkelstrom:  
 $I_D=3,2$  nA,  $\zeta_0=24$  mm

$\zeta$ /mm	I /nA
0	1.25
1	1.20
2	1.45
3	1.70
4	1.60
5	1.35
6	1.45
7	1.95
8	2.05
9	1.60
10	1.30
11	2.10
12	3.20
13	3.10
14	1.60
15	2.15
16	7.00
17	13.00
18	11.00
19	2.75
20	12.50
21	78.00
22	225.00
23	400.00
24	570.00
25	580.00
26	490.00
27	300.00
28	135.00
29	30.00
30	5.50
31	20.00
32	32.00
33	25.00
34	11.00
35	4.60
36	7.00
37	10.50
38	9.60
39	5.80
40	3.80
41	4.30
42	5.20
43	4.60
44	3.50
45	3.00
46	3.30
47	3.40
48	3.10
49	2.60
50	2.40

**Tabelle 3.2:** Intensitätsmesswerte (Spalt 2),  
Dunkelstrom:  
 $I_D=1,15$  nA,  
 $\zeta_0=25$  mm

$\zeta$ /mm	I /nA
0	2.4
1	8.7
2	10.5
3	18.5
4	17.0
5	2.95
6	44.0
7	27.5
8	9.3
9	27.5
10	7.3
11	68.0
12	39.0
13	14.0
14	135.0
15	34.0
16	54.0
17	115.0
18	75.0
19	330.0
20	58.0
21	720.0
22	2550.0
23	1050.0
24	9500.0
25	2500.0
26	2150.0
27	1350.0
28	46.0
29	360.0
30	180.0
31	125.0
32	115.0
33	18.5
34	170.0
35	66.0
36	29.0
37	110.0
38	20.5
39	45.0
40	30.0
41	23.5
42	85.0
43	13.0
44	23.5
45	36.0
46	9.2
47	21.0
48	4.2
49	28.5
50	40.0

**Tabelle 3.3:** Intensitätsmesswerte (Doppelspalt),  
Dunkelstrom:  
 $I_D=1,15$  nA,  $\zeta_0=24$  mm

## 4 Diskussion

### 4.1 Bestimmung der Spaltbreiten

	Herstellerwert/mm	Näherungswert/mm	Mikroskopwert/mm
Spalt 1	0,40	0,345	0,49
Spalt 2	0,15	0,121	-

Tabelle 4.1: Vergleich der Einzelspaltgrößen

Vergleicht man die verschieden bestimmten Spaltbreiten (Tab. 4.1), dann fällt bei Spalt 1 die Näherung durch nichtlineare Regression mit  $\Delta b = 55\mu\text{m}$  ungenauer aus als bei Spalt 2 mit  $\Delta b = 29\mu\text{m}$ . Die Messanordnung eignet sich nur bedingt für genaue Messungen, beispielsweise sind die Intensitätswerte links des Hauptmaximas meist höher als rechts des Maximas (vgl. Tab. 3.1, Tab. 3.2, Tab. 3.3). Da störende Lichtquellen nicht ausgeschaltet werden konnten, wurde versucht die Lichtquelle symmetrisch im Strahlengang zu platzieren um eine gleichmäßige Ausleuchtung zu bekommen, was jedoch nur geringfügig eine Verbesserung brachte. Möglich wäre auch, dass die Reflektion der Wand auf der einen Seite der Versuchsanordnung die Intensitätsmessung verfälschte. Verbessern ließe sich außerdem noch die Länge des Messabstandes, 1 mm ist zu groß um eine verlässliche Intensitätskurve zu bestimmen.

Der mit dem Mikroskop bestimmte Wert der Spaltbreite passt zu Spalt 1. Der Unterschied von  $\Delta b = 90\mu\text{m}$  könnte auf die Ungenauigkeiten bei dem Ablesen der Abstände zurückzuführen sein. Da sich Mikroskopskala und Objektmikrometerskala aufgrund unterschiedlicher Entfernung zur Mikroskoplinse nicht gleichzeitig scharf stellen ließen, konnte der Spalt nur ungenau gemessen werden.

### 4.2 Vergleich der Beugungsfiguren

Wird die Beugungsfigur des Doppelspalt (Abb. 7) mit der eines Einzelspalt (Abb. 5) verglichen, so ist beim Einzelspalt ein ausgeprägteres Hauptmaximum zu sehen als beim Doppelspalt, das Hauptmaximum scheint beim Doppelspalt breiter zu sein. Das gemessene Hauptmaximum ist beim Doppelspalt ähnlich groß wie beim Einzelspalt, die restlichen Werte sind hingegen meist größer. Außerdem ist zu erkennen, dass die Werte beim Doppelspalt flächiger verteilt sind, sich also über einen größeren Wertebereich in einem bestimmten Messintervall erstrecken. Die Theoriekurve passt auch nur bedingt zu den Messwerten, was vermutlich an den schon erwähnten Problemen liegt, welche durch die feinteiligere Aufteilung des Beugungsbildes noch verstärkt werden. Es müssten kleinere Messabstände gewählt werden.

4061

a) Dunkelstrom: 32 nA

b = 0,4 mm  
L = 100,3 cm (coll.)

2,8-3,1

Dunkelstrom: 7,15 nA

b = 0,4 mm

b = 0,25 / d = 0,15 mm

0  
1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50

nA

3,8  
~~4,0~~

4,6

4,6

3,4

6,4

3,8

4,8

5,2

4,8

8,8

6,0

8,4

11,5

7,2

16

~~10,5~~

19

32

16

95

135

380

2000

0,04 nA 10.000 nA

54,00 nA

220

350

96

72

73

25,5

~~45~~

21

26,5

~~27~~

~~12~~

~~20~~

96

90

16

11,5

10

9,4

9,0

8,2

~~6,9~~

3,5

6,0

5,6

5,5

I<sub>p</sub> / nA

1,25

1,20

1,45

1,20

1,60

1,35

1,45

1,95

2,05

7,6

1,3

2,1

3,2

3,7

1,6

2,15

2,0

1,3

7,1

2,75

72,5

78

225

400

570

580

490

300

135

30

5,5

20

~~32~~

25

11

4,6

7

10,5

9,6

2,8

3,8

4,3

4,2

4,6

3,0

3,3

3,4

3,1

2,6

2,4

I<sub>p</sub> / nA

2,4

8,7

10,5

18,5

17

2,95

44

27,5

9,3

27,5

7,3

68

39

14

735

54

1,75

75

330

58

720

2550

1050

9500

2560

2750

1350

46

360

180

125

195

18,5

770

66

29

110

20,5

45,5

30

23,5

85

13

23,5

36

92

27

4,2

28,5

40

Mikroskop:

Strahl 1 (0,4 mm)

Skala: 1-7

70 ± 1 mm

18 Schritte  
mit Roul

17 Mikroskopstride  
out 6 Skalenschritte

15 Mikroskop  
Schritte  
für Strahl 1

J. Julema