

Versuch 606: Messung der Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen

Lars Klompmaker Kai Brügge

15. November 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Versuchsaufbau	3
3	Auswertung & Diskussion	6
3.1	Verstärkungsfaktor	6
3.2	Bestimmung der Güte des Selektivverstärkers	6
3.3	Theoretische Berechnung der Suszeptibilität	8
3.4	Experimentelle Bestimmung der Suszeptibilität	9
3.4.1	Methode mit der Widerstandsdifferenz	9
3.4.2	Methode mit der Brückenspannung	11
3.5	Vergleich der Werte	12
4	Quellen	13

1 Einleitung

Im Versuch 606 *Messung der Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen* soll die magnetische Suszeptibilität χ verschiedener Seltener Erden untersucht werden. Für die magnetische Flussdichte \mathbf{B} und die magnetische Feldstärke H gilt im Vakuum

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

Die Flussdichte hängt unter anderem auch von der Magnetisierung \mathbf{M} der im Feld vorhandener Materialien ab. Mit $\mathbf{M} = \mu_0 \chi \mathbf{H}$ gilt

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \chi \mathbf{H}$$

Die Suszeptibilität $\chi(T, H)$ ist eine materialabhängige Größe die zusätzlich von der Temperatur und der Feldstärke abhängen kann. Das hier betrachtete Phänomen des Paramagnetismus entsteht in Materialien deren Atome einen Magnetischen Moment besitzen. In Anwesenheit eines äußeren Feldes richten sich die Momente in Richtung der Feldlinien aus und verstärken die Resultierende Flussdichte. Der magnetische Gesamtdrehimpuls \mathbf{J} eines Atoms ist eine Quantenmechanische Größe die mit dem Gesamtdrehimpuls der Elektronen und deren Spins zusammenhängt. Mit \mathbf{J} verknüpft ist das *Bohrsche Magneton*

$$\mu_B = \frac{1}{2} \frac{e_0}{m_0} \hbar$$

Mit verschiedenen Näherungen und quantenmechanischen Betrachtungen lässt sich ein Ausdruck für χ herleiten der zumindest bei Raumtemperatur gültig ist. Das sogenannte *Curie-Gesetz*

$$\chi = \frac{\mu_0 \mu_B^2 g_J^2 N J(J+1)}{3 k_b T}$$

Dabei sind $k_b = 1,380\,6488 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ die Boltzmann-Konstante ¹ und N die Teilchendichte. Der Wert g_J ist der Lande-Faktor der sich wie folgt aus J berechnet.

$$g_J = \frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

2 Versuchsaufbau

Für die tatsächliche Messung von χ wird eine Brückenschaltung wie in 1 mit zwei Induktivitäten genutzt. Mithilfe der Schaltung wird die Induktivität der Spule gemessen in der das zu untersuchende Material liegt. Aus der Induktivität lässt sich das χ bestimmen.

$$L_M = \mu_0 \frac{n^2 F}{l} + \chi \mu_0 \frac{n^2 Q}{l}$$

¹Entnommen aus <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?k>

Dabei ist F die Querschnittsfläche der Spule, Q die Querschnittsfläche der Probe, n die Anzahl der Windungen und l die Länge der Spule. Die Brückenspannung U_{Br} ergibt sich nach Kirchhoff zu

$$U_{Br} = \frac{r_1 r_4 - r_3 r_2}{(r_1 + r_2)(r_3 + r_4)} U_{Sp}$$

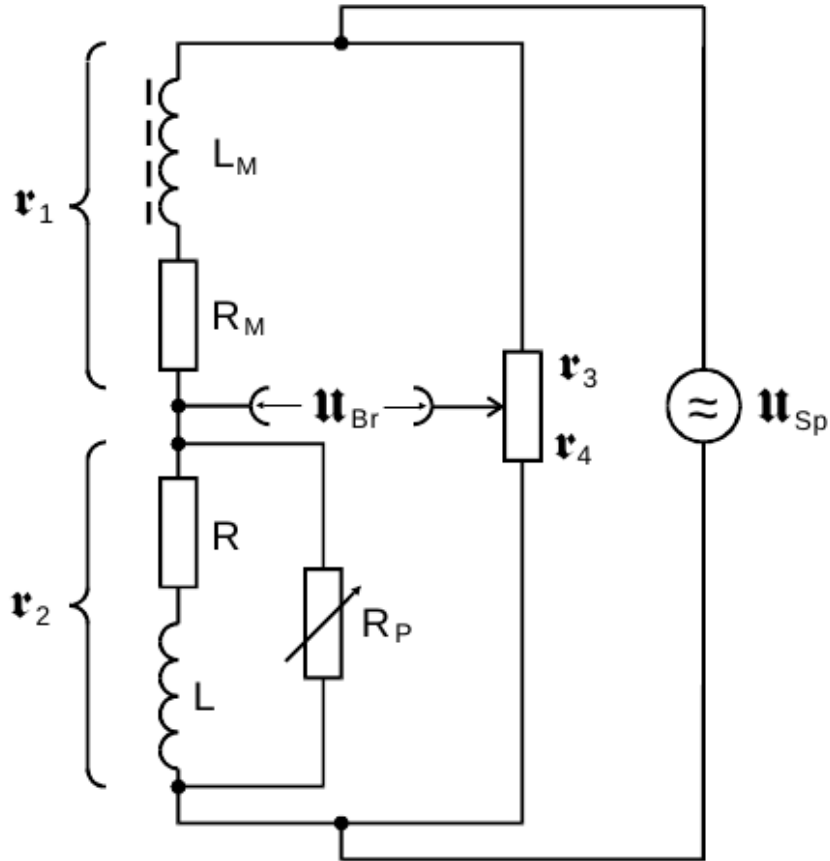


Abbildung 1: Schematischer Versuchsaufbau [1]

Es folgt direkt die Abgleichbedingung für die Brückenspannung $r_1 r_4 = r_3 r_2$. Der Widerstand r_1 ist bedingt durch die Induktion der Spule durch $r_1 = R_M + j\omega L_M$. Mit der Näherung $R_p \gg R$ und $R_p \gg \omega L$ ergibt sich r_2 zu $r_2 \approx R + j\omega L$. Führt man ein Material in die zweite Spule ein ändert sich ihre Induktion. Der Widerstand r_3 muss also angepasst werden um wieder eine ausgeglichene Brücke zu erhalten. $r'_3 = r_3 + \Delta r$. Aus den neuen Abgleichbedingungen kann man den Wert für $\Delta r = \chi \frac{r_3 Q}{2F}$ und $\chi = 2 \frac{\Delta r F}{r_3 Q}$ bestimmen. Um Störspannungen zu vermeiden wird ein analoger Selektivfilter genutzt

um die Spannungsanteile mit Frequenzen die stark von der Frequenz der Generatorspannung abweichen zu entfernen. Außerdem wird ein Linearverstärker genutzt um die Spannungsänderungen meßbar zu machen.

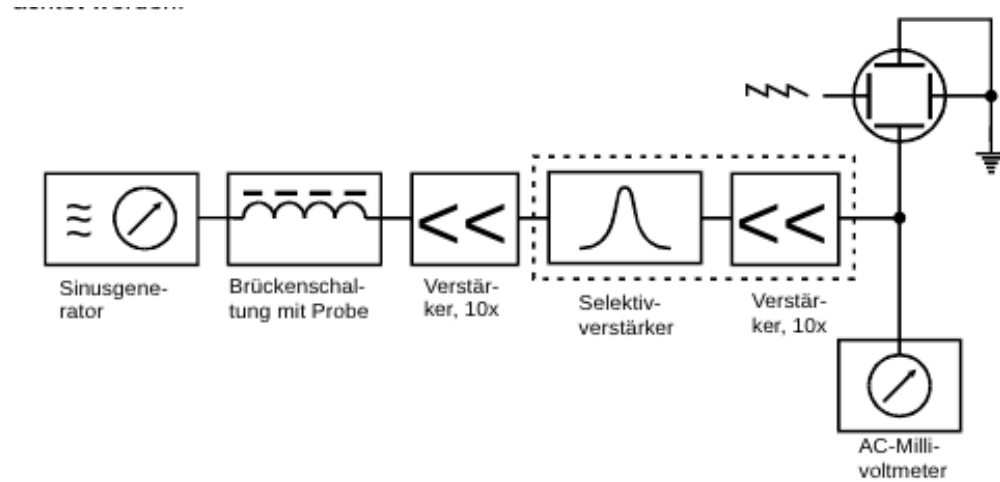


Abbildung 2: Schematischer Versuchsaufbau mit den Verstärkern [1]

Zunächst wird die Filterkurve des Selektivfilters gemessen. Dazu wird die Spannungsquelle direkt mit dem Selektivfilter verbunden und auf eine feste Spannung und Frequenz eingestellt. Die resultierende Spannung bei veränderlicher Spannungsfrequenz wird dabei mit einem Voltmeter gemessen. Die Ergebnisse sind in 3.2 zu sehen.

3 Auswertung & Diskussion

3.1 Verstärkungsfaktor

Um die sehr kleinen Brückenspannungen messen zu können, werden ein Linear- und ein Selektivverstärker verwendet und so die Spannung erhöht. Beide Verstärker verstärken die Spannung theoretisch um den Faktor 10. Es sollte daher eine Verstärkung um den Faktor 100 erfolgen.

Bei einer Inputspannung $U_{in} = 5mV$ ergab sich wie erwartet eine Outputspannung $U_{out} = 500mV$, der Verstärkungsfaktor beträgt somit auch in der Praxis 100.

3.2 Bestimmung der Güte des Selektivverstärkers

Bei der Vermessung der Filterkurve des Selektivverstärkers ergeben sich die in Tabelle 1 aufgeführten Messwerte. Die Filterkurve (Abbildung 3) erhält man, indem die gemessenen Spannungswerte U_A durch die Inputspannung U_E (hier 60mV) geteilt werden.

Tabelle 1: Messwerte und Spannungsverhältnis

Frequenz [kHz]	U_{out} [mV]	$\frac{U_A}{U_E}$	Frequenz [kHz]	U_{out} [mV]	$\frac{U_A}{U_E}$
34,0	10,0	0,167	35,1	58,5	0,975
34,1	11,0	0,183	35,2	54,0	0,900
34,2	12,0	0,200	35,3	48,8	0,813
34,3	13,5	0,225	35,4	33,5	0,558
34,4	15,0	0,250	35,5	27,0	0,450
34,5	17,0	0,283	35,6	22,0	0,367
34,6	20,5	0,342	35,7	19,0	0,317
34,7	24,5	0,408	35,8	16,0	0,267
34,8	30,5	0,508	35,9	14,0	0,233
34,9	38,7	0,645	36,0	13,0	0,217
35,0	50,0	0,833			

Anhand der Werte lässt sich die Güte Q des benutzen Filters bestimmen. Diese ergibt sich, indem man zuerst zwei Grenzfrequenzen v_+ und v_- definiert, bei denen das Spannungsverhältnis auf $\frac{1}{\sqrt{2}}$ des Maximums der Kurve abgefallen ist. Die Güte ergibt sich dann mit dem Verhältnismaximum v_0 durch:

$$Q = \frac{v_0}{v_+ - v_-} \quad (1)$$

Mit diesen Werten ergeben sich graphisch ermittelt die in Tabelle 2 aufgeführten Werte

Die Güte mit $Q = 85,61$ liegt vergleichsweise weit entfernt von der zu erwartenden Güte $Q = 100$.

Dies lässt sich durch eine insgesamt ungenaue Messung erklären. Das Maximum lässt

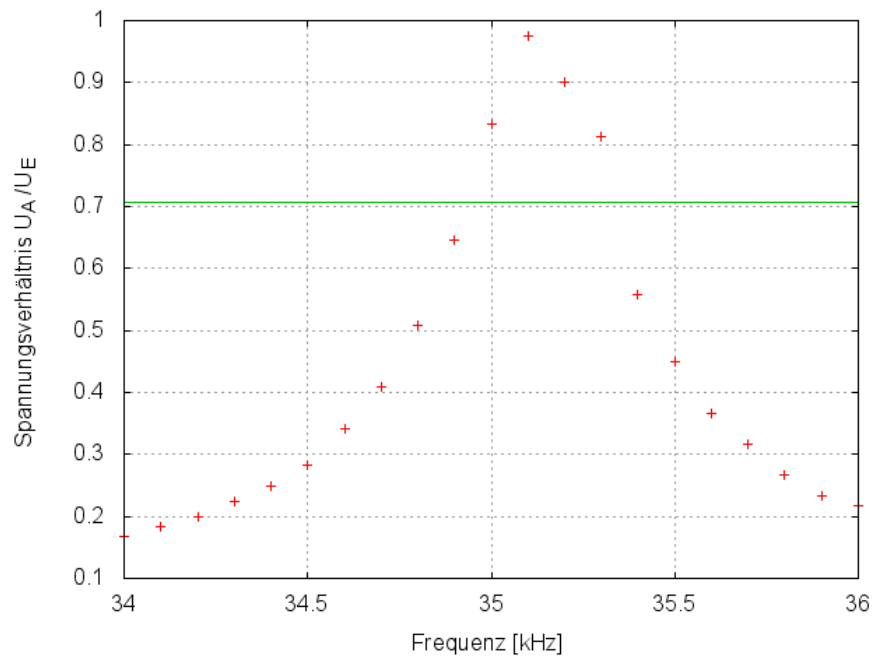


Abbildung 3: Selektivverstärker Kurve

Tabelle 2: Güte des Selektivverstärkers

v_0	v_+	v_-	Güte Q
35,10	35,34	34,93	85,61

sich nicht genau definieren, da vor allem im kritischen Bereich des Maximums zu wenig Messwerte aufgenommen wurden. Weiterhin liegt für das Wertepaar (35, 3; 0, 813) möglicherweise ein Messfehler vor, da das Spannungsverhältnis vom zu erwartenden Verlauf abweicht und die Kurve im zu untersuchenden Teil breiter macht.

3.3 Theoretische Berechnung der Suszeptibilität

Die Berechnung der magnetischen Suszeptibilität erfolgt wie in Abschnitt angegeben mit Hilfe der Elektronenkonfiguration und den Hundschen-Regeln durch Gleichung .

$$\chi \approx \frac{\mu_0 \mu_B^2 N J(J+1)}{3kT} \quad (2)$$

Die verwendeten Proben sind Gd_2O_3 , Nd_2O_3 und Dy_2O_3 . Es treten die folgenden Größen auf (Quelle: [2]):

- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$ Die magnetische Feldkonstante
- $\mu_B = 9,2740 \cdot 10^{-24} \frac{J}{T}$ Das Bohrsche Magneton
- N ist die Anzahl der Momente pro Volumeneinheit
- $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ Die Boltzmannkonstante
- $T = 293^\circ K$ Die Temperatur der Probe (Raumtemperatur während des Versuchs)
- J Der Gesamtdrehimpuls

Die Rechnung wird für jeden Stoff einzeln durchgeführt. Die Nebenquantenzahl l für f-Elektronen beträgt 3, es ergeben sich folglich für die möglichen Orientierungsquantenzahlen ($m = 2l + 1$) sieben Möglichkeiten (-3;-2;-1;0;1;2;3).

Nd_2O_3 besitzt 3 4f-Elektronen. Diese nehmen nach der ersten Hundschen Regel den gleichen Spin an ($3\frac{1}{2}$). Dann können sie nicht mehr in ihren Orientierungsquantenzahlen übereinstimmen und ordnen sich nach der zweiten Regel zu maximalem Drehimpuls an ($3 + 2 + 1$).

Gd_2O_3 besitzt 7 4f-Elektronen. Sie belegen den gleiche Spin ($7\frac{1}{2}$). Der Drehimpuls wird so insgesamt aufgehoben ($-3 - 2 - 1 + 0 + 3 + 2 + 1$). Hinzu kommen hier noch zwei weitere Elektronen, die auch den maximalen Spin annehmen ($3 + 2$).

Dy_2O_3 besitzt 9 4f-Elektronen. Diese können nicht den gleichen Spin annehmen, da nur sieben mögliche Orientierungszahlen vorhanden sind. Folglich nehmen zwei der neun Elektronen negativen Spin an ($7\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}$)

Der Landé-Faktor berechnet sich nach Gleichung 2.

$$g_j = \frac{3J(J+1) + (S(S+1) - L(L+1))}{2J(J+1)} \quad (3)$$

Zusätzlich wird jeweils die Anzahl der magnetischen Momente benötigt. Dies geschieht nach $N = 2 \frac{\rho}{m}$ (ρ ist die Dichte des Stoffes, m seine molekulare Masse).

Tabelle 3: Errechnete Werte

	Dy_2O_3	Gd_2O_3	Nd_2O_3
4f-Elektronen	9	7	3
Spin S	2,5	3,5	1,5
Drehimpuls L	5	0	6
Gesamtdrehimpuls J	7,5	3,5	4,5
Landé-Faktor g_j	1,33	2,00	0,73
$m[u]$	373,00	362,50	336,48
$m[\text{kg} \cdot 10^{-25}]$	6,19	6,02	5,59
$N[10^{28}]$	2,52	2,46	2,59

Dabei ergeben sich die folgenden Werte:

Nach Gleichung 1 erhalten wir nun die Suszeptibilität der verwendeten Proben. Als Temperatur wird dabei $T = 293K$ verwendet. Es ergeben sich die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}\chi_{Dy_2O_3} &= 0,0252 \\ \chi_{Gd_2O_3} &= 0,0138 \\ \chi_{Nd_2O_3} &= 0,0030\end{aligned}$$

3.4 Experimentelle Bestimmung der Suszeptibilität

Die experimentelle Bestimmung der Suszeptibilität erfolgt pro Stoff über zwei Methoden: Zum einen über die Änderung der Brückenspannung gegenüber der ohne Probe abgeglichenen Brücke mit Gleichung , zum anderen über die Widerstandsdifferenz der abgeglichenen Brücke ohne und mit Probe mit Gleichung . Im Folgenden wird die über das erste Verfahren bestimmte Suszeptibilität χ_U genannt, beim zweiten Verfahren entsprechend χ_R .

Bei beiden Verfahren wird der Querschnitt der Probe benötigt. Man benutzt hierbei den Querschnitt, den die Probe hätte, wenn sie ein Einkristall wäre. Dieser reale Querschnitt berechnet sich nach

$$Q_{real} = \frac{m}{l \cdot \rho} \quad (4)$$

mit der Länge der Probe l , der Probendichte ρ und der Masse m . Es ergeben sich folgende Werte:

3.4.1 Methode mit der Widerstandsdifferenz

Die Bestimmung der Suszeptibilität über die Widerstandsdifferenz erfolgt mittels

$$\chi = 2 \cdot \frac{\Delta R}{r_3} \frac{F}{Q} \quad (5)$$

Tabelle 4: Querschnittberechnung

	Nd_2O_3	Dy_2O_3	Gd_2O_3
m[g]	9,00	16,60	14,08
l[m]	0,160	0,174	0,163
$\rho[\frac{kg}{m^3}]$	7240	7800	7400
$Q_{real}[m^2]$	$7,77 \cdot 10^{-6}$	$12,23 \cdot 10^{-6}$	$11,67 \cdot 10^{-6}$
$Q_{real}[mm^2]$	7,77	12,23	11,67

r_3 bezeichnet den festen Widerstand (siehe Abbildung 1) mit $r_3 = 998\Omega$, F ist der Querschnitt der Spule mit $F = 86,6mm^2$. Für Q werden die oben berechneten Q_{real} verwendet.

Es ergeben sich die in den folgenden Tabellen aufgeführten Werte für die Suszeptibilität. R' ist der Widerstand mit Probe. Dabei ist R der eingestellte Widerstand am Potentiometer ohne Probe und R' der Widerstand nach erneutem Abgleichen der Brücke mit Probe.

Tabelle 5: Suszeptibilität nach Methode der Widerstandsdifferenz

Stoff	$\Delta R[Ohm]$	χ_R
Gd_2O_3	0,800	0,01189
	0,800	0,01189
	0,795	0,01182
	0,805	0,01197
Nd_2O_3	0,090	0,00203
	0,085	0,00192
	0,115	0,00259
	0,140	0,00316
Dy_2O_3	1,625	0,02306
	1,695	0,02405
	1,615	0,02292
	1,665	0,02362

Es ergibt sich folglich für die Mittelwerte und deren Fehler (gegeben durch $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sigma$, σ ist die Standardabweichung):

$$Gd_2O_3: \chi_R = (0,01189 \pm 0,00003)$$

$$Nd_2O_3: \chi_R = (0,00242 \pm 0,00029)$$

$$Dy_2O_3: \chi_R = (0,02341 \pm 0,00026)$$

3.4.2 Methode mit der Brückenspannung

Die Bestimmung der Suszeptibilität über die Brückenspannung erfolgt mittels

$$\chi = 4 \cdot \frac{F U_{Br}}{Q U_{Sp}} \quad (6)$$

U_{Br} ist die Spannung, die bei eingelegter Probe gemessen wird, der Verstärkungsfaktor 100 muss aus diesen gemessenen Werten herausgerechnet werden. Für U_{Sp} sind feste 0,5V eingestellt. Es ergeben sich die folgenden Werte (Q ist Tabelle 4 zu entnehmen):

Tabelle 6: Suszeptibilität über die Brückenspannung

Stoff	U_{Br} [mV]	χ_U
Gd_2O_3	18,5	0,01098
	17,8	0,01056
	19,0	0,01128
	19,0	0,01128
Nd_2O_3	3,4	0,00303
	3,0	0,00268
	2,8	0,00250
	3,1	0,00276
Dy_2O_3	39,0	0,02209
	39,0	0,02209
	40,0	0,02266
	38,0	0,02152

Es ergibt sich folglich für die Mittelwerte und deren Fehler (gegeben durch $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sigma$, σ ist die Standardabweichung):

$$Gd_2O_3: \chi_U = (0,01102 \pm 0,00017)$$

$$Nd_2O_3: \chi_U = (0,00274 \pm 0,00009)$$

$$Dy_2O_3: \chi_U = (0,02209 \pm 0,00023)$$

3.5 Vergleich der Werte

Tabelle 7: Errechnete Werte und Abweichung zum Theoriewert

	Gd_2O_3	Nd_2O_3	Dy_2O_3
χ_{Theo}	0,0138	0,0030	0,0252
χ_R	0,0119	0,0024	0,0234
Fehler χ_R	0,0001	0,0003	0,0003
Abweichung	13,84%	19,87%	7,10%
χ_U	0,0110	0,0027	0,0221
Fehler χ_U	0,0002	0,0001	0,0002
Abweichung	20,11%	9,20%	12,34%

Die experimentell bestimmten Werte weichen teilweise stark, teilweise weniger stark von den errechneten Theoriewerten ab. Dabei ist dies unabhängig von der Art der Messung oder der Probe. So kann prinzipiell nicht eine Methode als schlechter bezeichnet werden. Die starken Unterschiede ergeben sich vermutlich durch die Schwierigkeit, die Messgeräte aufgrund von Schwankungen richtig abzulesen und der geringen Anzahl an Messungen für jede Probe. Bei der Methode über die Widerstandsdifferenz ergab sich zudem die Schwierigkeit, den regelbaren Widerstand genau auf das Spannungsminimum einzustellen.

Da die Messungen für die beiden verschiedenen Methoden in größerem zeitlichen Abstand durchgeführt wurden, könnte sich zudem die Temperatur der Probe verändert haben. Dies würde eventuell die Unterschiede in der Abweichung bei den einzelnen Stoffen erklären, lässt sich jedoch nicht nachweisen.

Zudem fällt auf, dass alle experimentellen Werte kleiner als der Theoriewert sind. Eine sichere Erklärung hierfür ergibt sich aus den Daten nicht. Vermutlich liegt ein systematischer Fehler vor, wo dieser liegt ist jedoch unklar.

Aus den Daten ist nicht erkennbar, dass eine Methode genauer ist als die andere. Insgesamt sind die Werte für die Schwierigkeiten bei der Messung jedoch recht nah im Theoriewert und wären durch mehr Messungen und genauere Apparaturen diesen vermutlich noch ähnlicher.

4 Quellen

- 1 Skript zum Versuch 606 des physikalischen Anfängerpraktikums an der TU Dortmund zu finden unter:
<http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V606.pdf>
(Stand 08.11.2012)
- 2 Naturkonstanten entnommen von der Internet-Seite des National Institute of Standards and Technology, zu finden unter:
<http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html> (Stand 08.11.2012)