**V353**

# Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Evelyn Romanjuk
evelyn.romanjuk@tu-dortmund.de

Ramona Kallo
ramonagabriela.kallo@tu-dortmund.de

Durchführung: 01.12.17 Abgabe: 08.12.17

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Zielsetzung

Das Ziel dieses Versuches ist .....

# 2 Theorie

## 2.1 Allgemeine Relaxationsgleichung und Anwendung auf den RC-Kreis

Als Relaxationserscheinung wird das nicht-oszillatorische Zurückkehren eines Systems in seinen Grundzustand bezeichnet, nachdem das System angeregt wurde. Wird eine Größe A beobachtet, so ist die Änderungsgeschwindigkeit proportional zur Abweichung von A zum Endzustand A($\infty$):

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{dt}} = c[A(t) - A(\infty)]. \tag{1}$$

Wird über die Zeit 0 bis t integriert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{A(0)}^{A(t)} \frac{\mathrm{d}A'}{A' - A(\infty)} &= \int_0^t c\,\mathrm{d}t' \\ \Longleftrightarrow\ \ln \frac{A(t) - A(\infty)}{A(0) - A(\infty)} &= ct \\ \Longleftrightarrow\ A(t) &= A(\infty) + [A(0) - A(\infty)] \cdot e^{ct}. \end{aligned} \tag{2}$$

In einem RC-Kreis sind Relaxationserscheinungen bei der Auf-und Entladung des Kondensators über den Widerstand zu beobachten.

### 2.1.1 Entladevorgang

Sei $Q$ die Ladung auf den Platten eines Kondensators mit Kapazität $C$, so lässt sich die Spannung $U_\mathrm{C}$ mit

$$U_\mathrm{C} = \frac{Q}{C} \tag{3}$$

bestimmen. Weiter ist die nach dem Ohmschen Gesetz der Strom $I$ durch den Widerstand $R$ gegeben mit

$$I = \frac{U_\mathrm{C}}{R}. \tag{4}$$

Beim Ladungsausgleich fließt die Ladung $I\mathrm{d}t$ von einer Kondensatorplatte zur anderen über, was eine Ladungsänderung auf den Platten von

$$\mathrm{d}Q = -I\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

herbeiführt. Mit (3), (4) und (5) lässt sich nun eine Differentialgleichung aufstellen, die den zeitlichen Verlauf der Ladung des Kondensators beschreibt:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC} \cdot Q(t). \tag{6}$$

Nach unendlich langer Zeit hat sich der Kondensator vollständig entladen, also gilt

$$Q(\infty) = 0,$$

sodass sich nach Integration [ANALOG ZU DEM OBEN]

$$Q(t) = Q(0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \tag{7}$$

ergibt.

### 2.1.2 Aufladevorgang

Analog zu (2.1.1) kann die Gleichung für den Aufladevorgang mit den Randbedingungen

$$Q(0) = 0$$
$$Q(\infty) = C \cdot U_\mathrm{C}$$

zu

$$Q(t) = C \cdot U_\mathrm{C}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{8}$$

berechnet werden.

In den Gleichungen für den Auf- und Entladevorgang ist $RC$ eine Zeitkonstante, die angibt, wie lange ein System braucht, um auf $\frac{1}{e} \approx 36{,}8\%$ seines Ausgangswertes zu kommen.

## 2.2 Relaxationserscheinungen bei periodischer Auslenkung aus der Gleichgewichtslage

In einem RC-Kreis erfolgt eine periodische Anregung durch eine äußere Wechselspannung $U(t)$ mit

$$U(t) = U_\mathrm{C} \cdot \cos(\omega t). \tag{9}$$

Hierbei gilt, dass U(t) gleich $U_\mathrm{C}$ ist, wenn die Kreisfrequenz $\omega$ gering ist, also wenn gilt: $\omega << \frac{1}{RC}$.

Desweiteren gilt, dass mit höheren Kreisfrequenzen die Auf- und Entladung des Kondensators aufgrund des Widerstandes zunehmend hinter der angelegten Generatorspannung zurückliegen. Daraus ergibt sich eine Phasenverschiebung $\varphi$ zwischen den beiden Spannungen und eine abnehmende Amplitude $A$ der Spannungskurve des Kondensators.

Die Frequenzabhängigkeit von Phasenverschiebung und Amplitude kann mit dem Ansatz

$$U_\mathrm{C} = A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi\{\omega\}) \tag{10}$$

ermittelt werden.

Mit dem 2. Kirchhoffschen Gesetz

$$\begin{aligned} U(t) &= U_\mathrm{R} + U_\mathrm{C} \\ \implies U_0 \cdot \cos(\omega t) &= I(t) \cdot R + A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \tag{11}$$

und

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

folgt:

$$U_\mathrm{C} \cdot \cos(\omega t) = -A\omega RC \cdot \sin(\omega t + \varphi) + A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi). \tag{13}$$

Wird nun in (13) $\omega t = \frac{\pi}{2}$ gesetzt, sowie $\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos(\varphi)$ und $\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\varphi)$, so ergibt sich die Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz mit

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega RC). \tag{14}$$

Zu sehen ist, dass die Phasenverschiebung für niedrigere Frequenzen abnimmt und für hohe Frequenzen gegen $\frac{\pi}{2}$ strebt.

Für $\omega t + \varphi = \frac{\pi}{2}$ folgt aus (13):

$$A(\omega) = -\frac{\sin\varphi}{\omega RC} \cdot U_0. \tag{15}$$

Aus (14) und $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ ergibt sich

$$\sin\varphi = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \tag{16}$$

Wird dies in (15) eingesetzt, so ist das Ergebnis die Gleichung für die Amplitude in Abhängigkeit der Frequenz:

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \tag{17}$$

Es ist zu erkennen, dass für kleine Kreisfrequenzen die Amplitude gegen $U_0$ geht und für hohe Frequenzen verschwindet.

### 2.3 Der RC-Kreis als Integrator

Unter bestimmten Bedingungen kann eine Spannung $U(t)$ mit dem RC-Kreis integriert werden. Dazu wird in das 2. Kirchhoffsche Gesetzt

$$U(t) = U_\mathrm{R}(t) + U_\mathrm{C}(t) = I(t) \cdot R + U_\mathrm{C}(t) \tag{18}$$

die Gleichung (12) eingesetzt, so folgt:

$$U(t) = RC \cdot \frac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{d}t} + U_\mathrm{C}(t) \tag{19}$$

Mit $\omega >> \frac{1}{RC}$ ist $|U_\mathrm{C}| << |U_\mathrm{R}|$ und $|U_\mathrm{C}| << |U|$ und es ergibt sich die Näherung

$$\begin{aligned} U(t) &= RC \cdot \frac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{d}t} \\ \iff U_\mathrm{C}(t) &= \frac{1}{RC}\int_0^t U(t')\,\mathrm{d}t'. \end{aligned} \tag{20}$$