V101

Das Trägheitsmoment - Korrektur

Ramona Kallo
ramonagabriela.kallo@tu-dortmund.de

Evelyn Romanjuk
evelyn.romanjuk@tu-dortmund.de

Durchführung: 03.11.2017 Abgabe: 20.11.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden experimentell und theoretisch die Trägheitsmomenten unterschiedlicher Körper bestimmt und mit Hilfe der Steiner'schen Satzes verifiziert.

2 Theorie

Dreht sich ein Körper der Masse m um eine Drehachse durch seinen Schwerpunkt, so wirkt auf diesen Körper das Drehmoment M mit

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} = \left|\vec{F}\right| \left|\vec{r}\right| \sin\varphi. \tag{1}$$

Ebenso wirkt ein Trägheitsmoment I, das bei mehreren Masseelementen m_i mit

$$I = \sum_i {r_i}^2 \cdot m_i$$

gegeben ist, wobei r_i der Abstand der rotierenden punktförmigen Massen m_i zur Drehachse durch den Massenschwerpunkt ist. Für das Trägheitsmoment bei infinitisimalen Massen $\mathrm{d}m$ gilt

$$I = \int {r_i}^2 \, \mathrm{d}m.$$

Mithilfe des Steinerschen Satzes kann das Trägheitsmoment eines Körpers der Masse m berechnet werden, wenn die Drehachse nicht durch den Massenschwerpunkt geht, sondern parallel um einen Abstand a verschoben ist:

$$I = I_s + m \cdot a^2. \tag{2}$$

Hierbei ist I_s das Trägheitsmoment des Körpers bei der Drehung um die Drehachse durch den Schwerpunkt. In diesem Versuch werden Körper um einen Winkel φ ausgelenkt. Beim Loslassen wirkt das Drehmoment M dann als rücktreibende Kraft. Damit führt der Körper eine harmonische Schwingung mit einer Periodendauer T aus, wobei T mithilfe des Trägheitsmoments I und der Winkelrichtgröße D über

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{3}$$

berechnet werden kann. Bei der statischen Methode kann bei bekanntem Drehmoment die Winkelrichtgröße D entweder über den Zusammenhang

$$M = D \cdot \varphi \tag{4}$$

bestimmt werden oder bei der dynamische Methode durch Messung der Periodendauer und Bestimmung des Trägheitsmoments mit Gleichung (3). Die Formel für die Trägheitsmomente verschiedener Körper sind in Abbildung 1 zu finden.

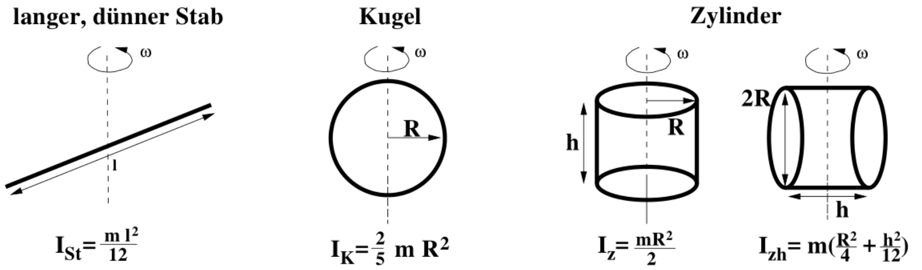

Abbildung 1: Trägheitsmomente verschiedener Körper.[1, S. 1]

3 Versuchsaufbau

Um in diesem Versuch das Trägheitsmoment eines Körpers zu berechnen, wird dieser auf einer drehbaren Achse befestigt, welche sich in einem Rahmen befindet. Diese Drillachse ist über eine Spiralfeder mit dem Rahmen verbunden, sodass die Körper ausgelenkt werden können. Um zu vermeiden, dass sich die Spiralfeder verformt, werden die Körper in der Versuchsdurchführung maximal um einen Winkel von 360° ausgelenkt. Schematisch ist dies in Abbildung 2 zu sehen.

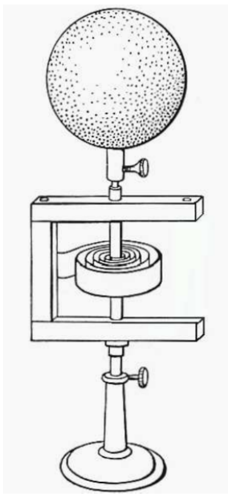

Abbildung 2: Der Versuchsaufbau,[1, S. 3].

4 Durchführung

4.1 Bestimmung der Apparaturkonstanten

Um die Trägheitsmomente unterschiedlicher Körper berechnen zu können, müssen die Winkelrichtgröße D und I_D bekannt sein. Zur Bestimmung der Winkelrichtgröße D wird eine annähernd masselose Stange auf der Drillachse befestigt. An dieser wird eine

Federwaage in einem festen Abstand a zur Drehachse eingehängt und dann in mehreren Messungen in unterschiedlichen Winkel ausgelenkt und die resultierende Kraft gemessen.

4.2 Bestimmung des Trägheitsmoments der Drillachse

Für die Ermittlung von I_D werden zwei identische Gewichte im gleichen Abstand a genutzt, die an jeweils einem Ende des Stabes befestigt werden. Die Zylinder werden als identisch angesehen und besitzen die Masse $m = 221{,}8\,\mathrm{g}$. Ihr Durchmesser beträgt $d = 3{,}50\,\mathrm{cm}$ und ihre Höhe $h = 2{,}95\,\mathrm{cm}$. Der Stab mit den Gewichten wird um einen bestimmten Winkel ausgelenkt und losgelassen, sodass es in Schwingung gerät. Es wird die Periodendauer T einer Schwingung mithilfe einer Stoppuhr gemessen, wobei bei jeder Messung der Abstand der Gewichte zur Drehachse variiert wird.

4.3 Bestimmung des Trägheitsmoments zweier Körper

Statt der Stange wird nun ein Körper auf der Drillachse befestigt und mehrfach um einen festen Winkel ausgelenkt. Jedes Mal wird die Periodendauer T gemessen und notiert. Im Anschluss wird der Körper durch einen anderen ausgetauscht, mit dem auf dieselbe Weise verfahren wird wie zuvor.

4.4 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Holzpuppe

Eine Holzpuppe wird auf der Drillachse befestigt und in zwei verschiedenen Körperhaltungen gebracht. So wie bei den beiden Körper zuvor wird die Holzpuppe nun in Schwingung gebracht, um ihre Periodendauer zu messen. Danach wird die Körperhaltung der Puppe verändert und der Versuch bei gleichbleibenden Bedingungen wiederholt.

5 Auswertung

Der Mittelwert $\bar{x}$ aus n Stichproben x_i ergibt sich aus:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{5}$$

Die Standardabweichung errechnet sich nach:

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{6}$$

mit zufälligen Fehlern behafteten Werten x_i mit $i = 1,...,$n.
Der aus der Standardabweichung resultierende Fehler des Mittelwertes ergibt sich nach:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s_i}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{7}$$

Der resultierende prozentuale Fehler ist somit:

$$r_x = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} \tag{8}$$

Liegt eine Funktion f vor, die abhängig ist von mehreren fehlerbehafteten Größen $x, y, ...$ dann ergibt sich der Fehler von f aus der Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + ...} \tag{9}$$

Eine lineare Funktion ist gegeben als:

$$y = mx + b \tag{10}$$

wobei m die Steigung der Gerade ist und b den Schnittpunkt mit der Ordinate beschreibt. Die Steigung m ist somit:

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \tag{11}$$

Dabei ist der y-Achsenabschnitt b vorgegeben als:

$$b = \frac{\overline{x^2} \cdot \overline{y} - \overline{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \tag{12}$$

5.1 Winkelrichtgröße nach der statischen Methode

Aus der Kraft F und dem Auslenkwinkel φ bei einem Abstand $r = 0{,}194$ m von der Drehachse lässt sich die Winkelrichtgröße bestimmen:

$$D = \frac{F \cdot r}{\varphi}. \tag{13}$$

Die verwendeten Werte und die berechneten Winkelrichtgrößen D stehen in Tabelle 1. Es ergibt sich mit den Gleichungen 5 und 7 ein Mittelwert von:

$$D = (0{,}023 \pm 0{,}001)\,\mathrm{Nm}.$$

Tabelle 1: Messwerte zur Bestimmung der Winkelrichtgröße D

F in N	φ in °	D_{stat} in Nm
0,400	200	0,022
0,420	210	0,022
0,440	230	0,021
0,590	250	0,026
0,590	260	0,025
0,610	280	0,024
0,650	300	0,024
0,650	320	0,023
0,660	340	0,022
0,660	350	0,021
0,660	360	0,020

Der Mittelwert und der sich ergebende Fehler werden nach Gleichung 5 und 7 bestimmt und für die Winkelrichtgröße D ergibt sich:

$$D = (0{,}023 \pm 0{,}001)\,\mathrm{Nm}$$

5.2 Dynamische Methode

Die Messdaten zur Bestimmung des Trägheitsmoments I_{D} nach Kapitel 4.2 befinden sich in der Tabelle 2. Für jeweils 10 verschiedene Abstände a wird die Schwingungsdauer T

Tabelle 2: Messdaten der Schwingungsdauer T und des Abstandes a zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes I_{D}

a in m	T in s	a^2 in m^2	T^2 in s^2
0,11	1,00	0,012	1,00
0,13	1,26	0,017	1,58
0,15	1,30	0,022	1,69
0,17	1,44	0,028	2,07
0,19	1,64	0,036	2,68
0,21	1,85	0,044	3,42
0,23	1,95	0,052	3,80
0,25	2,06	0,062	4,24
0,27	2,29	0,072	5,24
0,29	2,41	0,084	5,80

gemessen (siehe Tabelle 2). Anschließend werden a^2 und T^2 berechnet, gegeneinander aufgetragen und eine Ausgleichsgerade erstellt. Dies ist in Abbildung 3 zusammen mit den Messwerten dargestellt. Für die Ausgleichsgerade der Form $y = m \cdot x + b$ ergibt sich:

$$m = (66{,}53 \pm 1{,}87)\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}$$
$$b = (0{,}30 \pm 0{,}09)\,\mathrm{s}^2$$

Es werden die Gleichungen 3 und 2 aus Kapitel 2 benutzt sowie die Formel für das

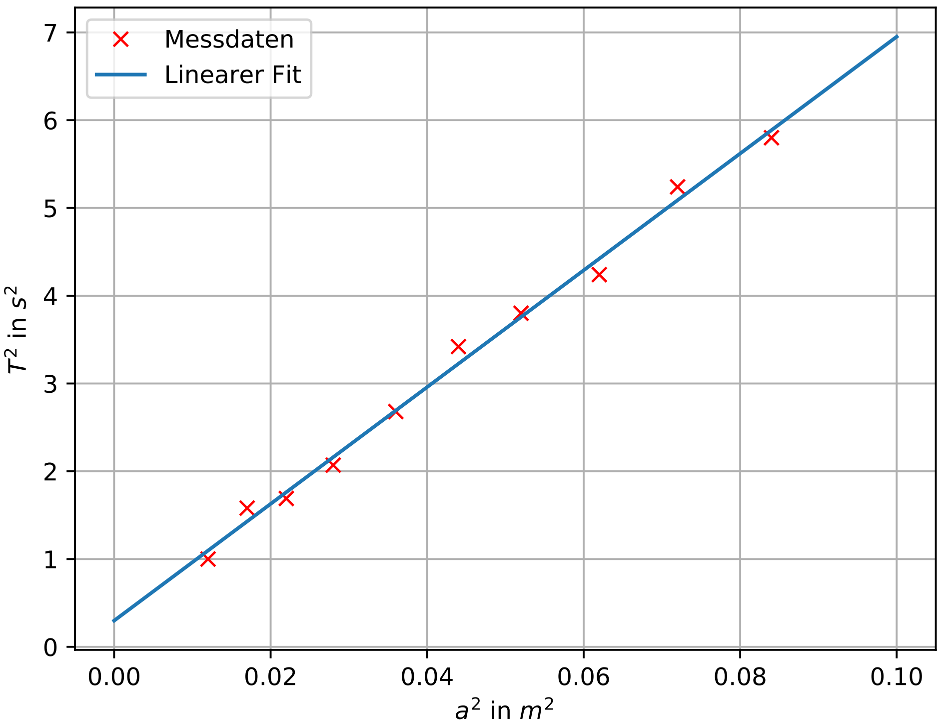

Abbildung 3: Der Graph der Messdaten von der Tabelle 2.

Trägheitsmoment eines liegenden Zylinders aus der Abbildung 2 verwendet für die Berechnung des Trägheitsmoments I_D.

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \left(\frac{I_\mathrm{D}}{D} + 2 \cdot \frac{M(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12})}{D} + 2 \cdot \frac{M \cdot a^2}{D}\right) \tag{14}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{I_\mathrm{D}}{D} + 8\pi^2 \cdot \frac{M(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12})}{D} + 8\pi^2 \cdot \frac{M}{D} \cdot a^2 \tag{15}$$

Nach der dynamischen Methode ergibt sich für die Winkelrichtgröße D aus der Gleichung 14:

$$D_\mathrm{dyn} = \frac{8\pi^2 \cdot M}{m}$$

wobei m die Steigung der Ausgleichsgerade und M die Masse des Zylinders sind. Die Ungenauigkeit ergibt sich nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung zu:

$$\begin{aligned}\Delta D_{\text{dyn}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial D_{\text{dyn}}}{\partial m}\Delta m\right)^2} \\ &= \frac{8\pi^2 M}{m^2}\Delta m\end{aligned}$$

Mit eingesetzten Werten ergibt sich

$$D_{\text{dyn}} = (0{,}263 \pm 0{,}007)\,\text{Nm}$$

Nun muss mit Hilfe der Gleichungen aus Abbildung 1 das Eigenträgheitsmoment der Drillachse sowie die Trägheitsmomente der Gewichte berechnet werden. Da die beiden Massen das gleiche Gewicht haben, wird das Trägheitsmoment I_{Zyl} eines Zylinder mit der zweiten Formel aus der Abbildung 1 bestimmt und ist somit:

$$I_{\text{Zyl}} = 3{,}31 \cdot 10^{-5}\,\text{kg}\,\text{m}^2.$$

Es wird die masselose Stange vernachlässigt und das Trägheitsmoment der Drillachse I_{D} wird mit Hilfe der Gleichung 14 berechnet:

$$I_{\text{D}} = \frac{b \cdot D_{\text{dyn}}}{4\pi^2} - 2M \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right).$$

wobei b der Schnittpunkt mit der Ordinate ist. Der Fehler ergibt sich nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned}\Delta I_{\text{dyn}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial I_{\text{dyn}}}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial I_{\text{dyn}}}{\partial D}\Delta D\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{D}{4\pi^2}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{b}{4\pi^2}\Delta D\right)^2}\end{aligned}$$

Dies ergibt sich zu:

$$I_{\text{D}} = (-64{,}15 \pm 0{,}61) \cdot 10^{-3}\,\text{kg}\,\text{m}^2.$$

5.3 Trägheitsmoment des kleinen Zylinders und einer Kugel

5.3.1 Theoretische Werte

Für die Bestimmung der theoretischen Werte für die beiden Trägheitsmomente der Körper werden die passenden Gleichungen aus Abbildung 1 genommen. Für den kleinen Zylinder mit der Masse $m = 1119{,}3\,\text{g}$, der Höhe $h = 3{,}08\,\text{cm}$, und dem Durchmesser $d = 7{,}5\,\text{cm}$ ergibt sich einen ausgerechneten Trägheitsmoment mit der zweiten Formel aus der Abbildung 1 von:

$$I_{\text{Zyl}} = 4{,}81 \cdot 10^{-4}\,\text{kg}\,\text{m}^2.$$

Für die Kugel mit einer Masse m von 812,4 g und einem Durchmesser d von 12,7 cm ergibt sich ein Trägheitsmoment mit Hilfe der Formel für das Trägheitsmoment einer Kugel aus der Abbildung 1 von:

$$I_{\mathrm{K}} = 1{,}31 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

5.3.2 Experimentelle Betrachtung

Nun wurde die Schwingungsdauer für die beiden Körper gemessen. In der Tabelle 3 sind die gemessen Zeiten für die beiden Körper aufgelistet. Nach den Formeln 5 und 7 ergeben

Tabelle 3: Schwingungsdauer von dem Kugel und Zylinder

Zylinder	T_{Z} in s	**Kugel**	T_{K} in s
	0,50		0,60
	0,36		0,66
	0,32		0,55
	0,32		0,56
	0,31		0,54
	0,41		0,46

sich für die beiden Körper die gemittelte Schwingungsdauer sowie die Ungenauigkeit von:

$$T_{\mathrm{Zyl}} = (0,37 \pm 0,03)s$$
$$T_{\mathrm{Kug}} = (0,56 \pm 0,03)s.$$

Um das Trägheitsmoment des Zylinders zu bestimmen, muss das Gesamtträgheitsmoment des Systems aus der Messung bestimmt werden und dann das Trägheitsmoment der Drillachse abgezogen werden:

$$I = \frac{T^2 D}{4\pi^2} - I_{\mathrm{D}} \tag{16}$$

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{T^2}{4\pi^2}\Delta D\right)^2 + \left(\frac{2TD}{4\pi^2}\Delta T\right)^2 + (-\Delta I_D)^2} \tag{17}$$

Anschließend ergeben sich negative Werte für die beiden Körper nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung mit der Formel 17:

$$I_{\mathrm{Zyl}} = (64{,}30 \pm 0{,}61) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^2}$$
$$I_{\mathrm{Kug}} = (64{,}44 \pm 0{,}61) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

5.4 Trägheitsmoment der Holzpuppe

Die beiden untersuchten Haltungen sind in der Abbildung 4 zu sehen.

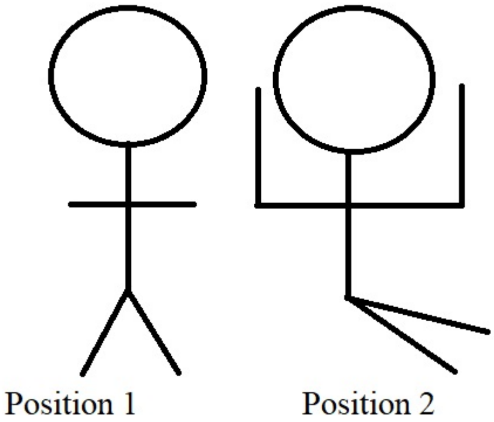

Abbildung 4: Körperhaltungen der Holzpuppe

.

5.4.1 Theoretische Berechnung

Zur Bestimmung der einzelnen Trägheitsmomente der Holzpuppe muss die Puppe in geometrisch einfache Körper zerlegt werden: alle Körperteile wie der Kopf, die Arme, der Rumpf und die Beine werden als Zylinder angenommen. Die Formeln für die theoretischen Trägheitsmomente werden aus der Abbildung 1 genommen. Die Gesamtmasse der Puppe beträgt $m = 163{,}3\,\mathrm{g}$. Das Volumen eines Zylinders und der Fehler nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung ergibt sich nach:

$$V = \pi r^2 l \tag{18}$$

$$\Delta V = 2\pi r l \Delta r, \tag{19}$$

da $\Delta l = 0$. Die Massen m_i der jeweiligen Körperteile ergibt sich dann aus der Gesamtmasse m, dem Gesamtvolumen V und den Teilvolumina V_i:

$$m_i = m\frac{V_i}{V} \tag{20}$$

$$\Delta m_i = \sqrt{\left(\frac{m}{V}\Delta V_i\right)^2 + \left(-m\frac{V_i}{V^2}\right)^2}. \tag{21}$$

In den Tabellen 4 und 5 sind die Daten zur Puppe aufgelistet.

Tabelle 4: Daten zur Puppe: Beine

Beine	l in cm	d in cm	r in cm
	14,20	2,00	1,00
	14,20	1,60	0,80
	14,20	1,25	0,62
	14,20	1,70	0,85
	14,20	1,45	0,72
	14,20	1,00	0,50

Tabelle 5: Daten zur Puppe: Arme

Arme	l in cm	d in cm	r in cm
	13,60	1,60	0,80
	13,60	1,30	0,65
	13,60	1,10	0,55
	13,60	1,45	0,72
	13,60	1,20	0,60
	13,60	1,00	0,50
	13,60	1,55	0,75

Die jeweiligen Mittelwerte sowie die Ungenauigkeiten für die Tabellen 5 und 4 wurden mit den Formeln 5 und 7 berechnet. Es gelten folgende Daten für die Beine:

$$
\begin{aligned}
l_{\text{bein}} &= (14{,}20 \pm 0{,}00)\,\text{cm} \\
d_{\text{bein}} &= (1{,}50 \pm 0{,}14)\,\text{cm} \\
r_{\text{bein}} &= (0{,}75 \pm 0{,}07)\,\text{cm} \\
V_{\text{bein}} &= (25{,}09 \pm 4{,}79)\,\text{cm}^3 \\
m_{\text{bein}} &= (20{,}03 \pm 4{,}09)\,\text{g}.
\end{aligned}
$$

Und für die Arme gilt jeweils:

$$
\begin{aligned}
l_{\text{arme}} &= (13{,}60 \pm 0{,}00)\,\text{cm} \\
d_{\text{arme}} &= (1{,}31 \pm 0{,}09)\,\text{cm} \\
r_{\text{arme}} &= (0{,}65 \pm 0{,}04)\,\text{cm} \\
V_{\text{arme}} &= (18{,}45 \pm 2{,}43)\,\text{cm}^3 \\
m_{\text{arme}} &= (14{,}72 \pm 2{,}21)\,\text{g}.
\end{aligned}
$$

Für den Kopf und Rumpf werden die Daten in der Tabelle 6 und 7 aufgelistet.

Tabelle 6: Daten zur Puppe: Kopf

Kopf	l in cm	d in cm	r in cm
	4,50	3,10	1,55
	4,50	2,50	1,25
	4,50	2,80	1,40

Die gemittelten Messwerte sowie die Ungenauigkeiten werden nach den Gleichungen 5 und 7 berechnet. Für den Kopf ergibt sich:

$$\begin{aligned} l_{\text{kopf}} &= (4{,}50 \pm 0{,}00)\,\text{cm} \\ d_{\text{kopf}} &= (2{,}80 \pm 0{,}17)\,\text{cm} \\ r_{\text{kopf}} &= (1{,}40 \pm 0{,}09)\,\text{cm} \\ V_{\text{kopf}} &= (19{,}79 \pm 3{,}43)\,\text{cm}^3 \\ m_{\text{kopf}} &= (15{,}79 \pm 2{,}96)\,\text{g}. \end{aligned}$$

Tabelle 7: Daten zur Puppe: Rumpf

Rumpf	l in cm	d in cm	r in cm
	9,80	4,20	2,10
	9,80	4,00	2,10
	9,80	3,20	1,60
	9,80	2,60	1,30
	9,80	3,80	1,90
	9,80	4,00	2,00
	9,80	3,40	1,70
	9,80	3,70	1,85
	9,80	2,50	1,25
	9,80	3,75	1,87
	9,80	7,05	2,02

Für den Rumpf ergeben sich die folgenden ausgerechneten Daten:

$$\begin{aligned} l_{\text{rumpf}} &= (9{,}80 \pm 0{,}00)\,\text{cm} \\ d_{\text{rumpf}} &= (3{,}56 \pm 0{,}17)\,\text{cm} \\ r_{\text{rumpf}} &= (1{,}78 \pm 0{,}09)\,\text{cm} \\ V_{\text{rumpf}} &= (97{,}75 \pm 9{,}57)\,\text{cm}^3 \\ m_{\text{rumpf}} &= (78{,}01 \pm 9{,}50)\,\text{g}. \end{aligned}$$

Zu Berechnung der Trägheitsmomente wird der Satz von Steiner aus Kapitel 2 benötigt. Die hier für benötigten Abstände a von der Drehachse in Position 1 der Puppe ergeben sich aus den gemessenen Längen und Durchmessern der Körperteile:

$$\begin{aligned} a_{\text{arme}} &= \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}d_{\text{rumpf}} \\ &= (8{,}58 \pm 0{,}09)\,\text{cm} \\ a_{\text{beine}} &= \frac{1}{2}d_{\text{rumpf}} - \frac{1}{2}d_{\text{bein}} \\ &= (1{,}03 \pm 0{,}11)\,\text{cm} \end{aligned}$$

Für die erste Position berechnen sich die Trägheitsmomente wie folgt, m, r und h beziehen sich jeweils auf das gerade betrachtete Körperteil:

$$\begin{aligned} I_{\text{Rumpf}} &= \frac{1}{2}mr^2 \\ \Delta I_{\text{Rumpf}} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}r^2\Delta m\right)^2 + (mr\Delta r)^2} \\ I_{\text{Kopf}} &= \frac{1}{2}mr^2 \\ \Delta I_{\text{Kopf}} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}r^2\Delta m\right)^2 + (mr\Delta r)^2} \\ I_{\text{Bein}} &= \frac{1}{2}mr^2 + ma^2 \\ \Delta I_{\text{Bein}} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}r^2\Delta m + a^2\Delta m\right)^2 + (mr\Delta r)^2 + (2ma\Delta a)^2} \\ I_{\text{Arm}} &= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2 + ma^2 \\ \Delta I_{\text{Arm}} &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}r^2\Delta m + \frac{1}{12}l^2\Delta m + a^2\Delta m\right)^2 + \left(\frac{1}{2}mr\Delta r\right)^2 + (2ma\Delta a)^2}. \end{aligned}$$

Es ergeben sich die folgenden Trägheitsmomente für die jeweiligen Körperteile:

$$\begin{aligned} I_{\text{Bein}} &= (2{,}70 \pm 0{,}72) \cdot 10^{-6}\,\text{kg}\,\text{m}^2 \\ I_{\text{Arm}} &= (1{,}31 \pm 0{,}20) \cdot 10^{-4}\,\text{kg}\,\text{m}^2 \\ I_{\text{Kopf}} &= (1{,}55 \pm 0{,}48) \cdot 10^{-6}\,\text{kg}\,\text{m}^2 \\ I_{\text{Rumpf}} &= (1{,}24 \pm 0{,}29) \cdot 10^{-5}\,\text{kg}\,\text{m}^2 \end{aligned}$$

Aus den oben berechneten Trägheitsmomenten kann jetzt das gesamte Trägheitsmoment für die erste Position aus der Abbildung 4 berechnet werden. Für das gesamte Trägheitsmoment folgt:

$$I_{\text{ges1}} = I_{\text{Kopf}} + I_{\text{Rumpf}} + 2 \cdot I_{\text{Bein}} + 2 \cdot I_{\text{Arm}}$$

$$= (2{,}82 \pm 0{,}40) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Für die zweite Position der Puppe ergeben sich veränderte Abstände a für den Satz von Steiner. Hierbei müssen nun der Ober- und Unterarm getrennt betrachtet werden:

$$\begin{aligned}
a_{\text{Oberarm}} &= \frac{1}{2}d_{\text{Rumpf}} + \frac{1}{4}l_{\text{Arm}} \\
\Delta a_{\text{Oberarm}} &= \frac{1}{2}\Delta d_{\text{Rumpf}} \\
a_{\text{Unterarm}} &= \frac{1}{2}d_{\text{Rumpf}} + \frac{1}{2}l_{\text{Arm}} \\
\Delta a_{\text{Unterarm}} &= \frac{1}{2}\Delta d_{\text{Rumpf}} \\
a_{\text{Bein}} &= \frac{1}{2}d_{\text{Rumpf}} - \frac{1}{2}d_{\text{Bein}} + \frac{1}{2}l_{\text{Bein}} \\
\Delta a_{\text{Bein}} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\Delta d_{\text{Rumpf}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\Delta d_{\text{Bein}}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Für die zweite Position berechnen sich die Trägheitsmomente wie folgt (Kopf und Rumpf sind wie in Position 1), m, r und h beziehen sich jeweils auf das gerade betrachtete Körperteil:

$$\begin{aligned}
I_{\text{Rumpf}} &= \frac{1}{2}mr^2 \\
\Delta I_{\text{Rumpf}} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}r^2\Delta m\right)^2 + (mr\Delta r)^2} \\
I_{\text{Kopf}} &= \frac{1}{2}mr^2 \\
\Delta I_{\text{Kopf}} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}r^2\Delta m\right)^2 + (mr\Delta r)^2} \\
I_{\text{Bein}} &= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2 + ma^2 \\
\Delta I_{\text{Bein}} &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}r^2\Delta m + \frac{1}{12}l^2\Delta m + a^2\Delta m\right)^2 + \left(\frac{1}{2}mr\Delta r\right)^2 + (2ma\Delta a)^2} \\
I_{\text{Oberarm}} &= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2 + ma^2 \\
\Delta I_{\text{Oberarm}} &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}r^2\Delta m + \frac{1}{12}l^2\Delta m + a^2\Delta m\right)^2 + \left(\frac{1}{2}mr\Delta r\right)^2 + (2ma\Delta a)^2} \\
I_{\text{Unterarm}} &= \frac{1}{2}mr^2 + ma^2 \\
\Delta I_{\text{Unterarm}} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}r^2\Delta m + a^2\Delta m\right)^2 + (mr\Delta r)^2 + (2ma\Delta a)^2}.
\end{aligned}$$

Es ergeben sich die folgenden Trägheitsmomente für die jeweiligen Körperteile:

$$\begin{aligned}
I_{\text{Kopf}} &= (1{,}55 \pm 0{,}48) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg\,m^2}\\
I_{\text{Rumpf}} &= (1{,}24 \pm 0{,}29) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2}\\
I_{\text{Bein}} &= (1{,}66 \pm 0{,}34) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}\\
I_{\text{Oberarm}} &= (6{,}42 \pm 0{,}95) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2}\\
I_{\text{Unterarm}} &= (1{,}09 \pm 0{,}17) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}
\end{aligned}$$

Analog berechnet sich das Trägheitsmoment für die zweite Position aus der Abbildung 4 mit den oben errechneten Trägheitsmomenten und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
I_{\text{ges2}} &= I_{\text{Kopf}} + I_{\text{Rumpf}} + 2 \cdot I_{\text{Bein}} + 2 \cdot I_{\text{Oberarm}} + 2 \cdot I_{\text{Unterarm}}\\
&= (6{,}89 \pm 0{,}78) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}
\end{aligned}$$

5.4.2 Experimentelle Betrachtung

Die experimentelle Bestimmung der Trägheitsmomente der beiden Puppen erfolgt analog zu den zwei Körpern aus den vorherigen Kapitel 5.3. In der Tabelle 8 sind die Daten für die Schwingungsdauer der beiden Körperhaltungen aufgelistet. Das Trägheitsmoment für die experimentelle Betrachtung berechnet sich mit Hilfe der Gleichung 16.

Tabelle 8: Daten für die Schwingungsdauer der beiden Körperhaltungen

Fehler	T_1 in s	T_2 in s
	0,32	0,27
	0,27	0,27
	0,18	0,20
	0,23	0,24
	0,23	0,27

Ebenfalls wurde hier der Mittelwert sowie die Ungenauigkeit nach 5 und 7 für die beiden Messzeiten der Körperhaltungen bestimmt. Daraus folgt für die beiden Positionen:

$$\begin{aligned}
T_1 &= (0{,}25 \pm 0{,}02)\,\mathrm{s}\\
T_2 &= (0{,}25 \pm 0{,}01)\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

Außerdem berechnen sich die beiden Trägheitsmomente für die Körperhaltungen mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung nach der Gleichung 9 aus der Kapitel 5 und es ergeben sich die folgenden Trägheitsmomente:

$$\begin{aligned}
I_{\text{exp1}} &= (64{,}18 \pm 0{,}61) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^2}\\
I_{\text{exp2}} &= (64{,}25 \pm 0{,}61) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^2}
\end{aligned}$$

6 Diskussion

Das Ergebnis für die Winkelrichtgröße D bei der statischen Methode entspricht den Erwartungen. Da es um eine statische Methode ging,also keine Zeitmessung, ergab sich ein Fehler von 2,36 %. Das Ergebnis für das Trägheitsmoment der Drillachse ist inklusive der Fehler negativ und somit physikalisch nicht sinnvoll. Der negative Wert ergibt sich, da das Trägheitsmoment der beiden Zylinder höher als der andere Term. Dies lässt sich vermutlich auf eine ungenaue oder fehlerhafte Messung zurückführen. Bei den errechneten Werte für die theoretische und experimentelle Betrachtung bei der Holzpuppe und bei den beiden Körper ist zu sehen, dass sie nicht übereinstimmen. Ein Grund dafür sind die kleineren Werte für die Messung der Periodendauer T, die viel niedriger waren als einer Sekunde. Die Messung würde mit schwereren Gegenständen besser funktionieren da so die Schwingungsdauer genauer gemessen werden kann oder mit einem anderen Stoppuhr, der nicht manuell manövriert werden muss. Die Reaktionszeit spielt somit eine relevante Rolle bei der Dürchführung des Versuches.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuch 101: Das Trägheitsmoment.* 2017. URL: http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/TraegheitMP.pdf (besucht am 18. 11. 2017).