

VERSUCH NUMMER 102

Drehschwingungen

Valentin Mischke
valentin.mischke@udo.edu

Karl Schiller
karl.schiller@udo.edu

Durchführung: 17.01.2017

Abgabe: 24.01.2017

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	2
2 Theorie	2
2.1 Elastizitätsmodule isotroper Körper	2
2.2 Torsion eines Zylinders	3
2.3 Bestimmung des magnetischen Moments	4
3 Fehlerrechnung	4
4 Durchführung	5
4.1 Versuchsaufbau	5
4.2 Messung des Schubmoduls eines Drahtes	6
4.3 Messung des magnetischen Moments eines Magneten	6
4.4 Messung der Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes	6
5 Auswertung	7
5.1 Schubmodul	7
5.2 Magnetischer Moment	8
5.3 Erdmagnetfeld	10
6 Diskussion	11
Literatur	11

1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden die elastischen Konstanten eines Drahtes bestimmt. Anschließend wird das magnetische Moment eines Magneten vermessen und die Tangentialkomponente des Erdmagnetfeldes bestimmt.

2 Theorie

Kräfte, die über die Oberfläche eines festen Körpers wirken, werden Oberflächenkräfte genannt und verursachen Verformung und Volumenänderung des Körpers. Die einwirkende Kraft pro Fläche wird als Spannung definiert. Dabei kann die Spannung in einen Anteil senkrecht zur Oberfläche, der Normalspannung σ oder Druck P , und einen Anteil parallel zur Oberfläche, der Tangentialspannung τ zerlegt werden. Bei hinreichend kleinen Deformationen sind Verformung und Volumenänderung proportional zur wirkenden Spannung und die zugehörigen Proportionalitätsfaktoren werden elastische Konstanten genannt. Dieser Zusammenhang wird als Hook'sches Gesetz beschrieben.

2.1 Elastizitätsmodule isotroper Körper

Allgemein sind die elastischen Konstanten eines Körpers richtungsabhängig, sodass 6 Variablen für die Gestalt- und Volumenelastizität und 6 Variablen für die Beschreibung der Deformation benötigt werden und sich damit ein 6×6 Elastizitätstensor ergibt. Bei sogenannten isotropen Körpern sind die elastischen Konstanten jedoch richtungsunabhängig, sodass der Tensor unter Verwendung des Energieprinzips auf zwei Konstanten reduziert werden kann.

Aus praktischen Gründen werden für isotrope Körper jedoch vier Elastizitätskonstanten eingeführt. Die Längenänderung ΔL des Körpers bei anliegender Spannung wird mit dem Elastizitätsmodul E senkrecht zur Körperoberfläche und dem Schubmodul G parallel zur Körperfläche angegeben.

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

Die Volumenänderung ΔV des Körpers wird mit dem Kompressionsmodul Q tangential zur Körperoberfläche und der Poissonschen Querkontraktionszahl μ normal zur Körperfläche angegeben.

$$P = Q \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

Da isotrope Körper bereits über zwei Konstanten beschrieben werden können, sind die vier Konstanten in der Form

$$E = 2G(\mu + 1) \tag{1}$$

und

$$E = 3(1 - 2\mu)Q \tag{2}$$

voneinander abhängig.

2.2 Torsion eines Zylinders

Wird ein Zylinder am oberen Ende fest eingespannt und wirkt am unteren Ende gleichzeitig eine Kraft \vec{K} auf ein Flächenstück dF in Tangentialrichtung (eine sogenannte Scherung), so gilt der Zusammenhang

$$dM = r \tau dF.$$

Die Tangentialspannung τ ist dabei über den Schubmodul linear mit dem Auslenkwinkel α verknüpft, für den die Kleinwinkelnäherung $\alpha = r\phi/L$ mit der Länge des Zylinders L gilt (siehe Abbildung 1). Werden diese Zusammenhänge genutzt und die resultierende Gleichung über den Zylinder integriert, ergibt sich für das Drehmoment

$$M = \frac{\pi R^4}{2L} G \phi.$$

Die Konstante

$$D = \frac{\pi G R^4}{2L} \quad (3)$$

wird Richtgröße des Zylinders genannt.

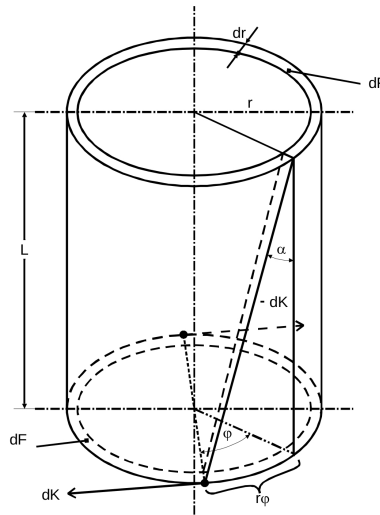


Abbildung 1: Schematische Skizze des verdrehten Zylinders [2].

Wird an das untere Ende des Zylinders eine Kugel mit Masse m_K und Radius R_K gehängt, so schwingt dieser bei kleiner Verdrehung des Zylinders mit der Periodendauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_K + \Theta_{KH}}{D}}. \quad (4)$$

Dabei ist $\Theta_K = \frac{2}{5} m_K R_K^2$ das Trägheitsmoment der Kugel und Θ_{KH} das Trägheitsmoment der Kugelaufhängung. Aus den Gleichungen (4) und (3) ergibt sich somit für den Schubmodul

$$G = 8\pi \frac{L}{T^2 R^4} \left(\frac{2}{5} m_K R_K^2 + \Theta_{KH} \right). \quad (5)$$

2.3 Bestimmung des magnetischen Moments

Das Produkt aus Polstärke und Abstand der beiden Pole wird magnetisches Moment \vec{m} eines Permanentmagneten genannt. Wird der Permanentmagnet in einem homogenen Magnetfeld B um den Winkel α ausgelenkt, gilt für den Betrag des magnetischen Drehmoments

$$M_{\text{mag}} = mB \sin \alpha. \quad (6)$$

Wird der Aufbau aus Kapitel 2.2 verwendet, in ein homogenes Magnetfeld gebracht und in die Kugel ein Permanentmagnet eingefügt, so ergibt sich bei kleiner Auslenkung des Systems für die Periodendauer

$$T_{\text{m}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_{\text{K}} + \Theta_{\text{KH}}}{mB + D}}. \quad (7)$$

3 Fehlerrechnung

Der Mittelwert ergibt sich nach

$$\bar{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (8)$$

Mit der zugehörigen Standardabweichung des Mittelwertes

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N \cdot (N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (9)$$

Wenn in einer Formel fehlerbehaftete Größen verwendet werden, wird der sich ergebende Fehler mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2} \quad (10)$$

4 Durchführung

4.1 Versuchsaufbau

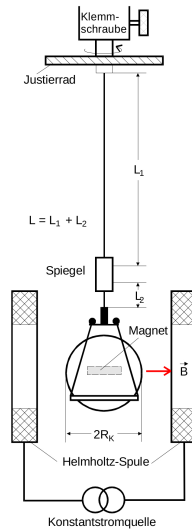


Abbildung 2: Skizze des verwendeten Versuchsaubaus [2].

Eine Kugel ist an einem Torsionsdraht der Länge L in einem Helmholtzspulenpaar aufgehängt. Der Draht ist mit einem Spiegel versehen und kann mit Hilfe eines Justierrades tordiert werden, damit das System schwingt. In der Kugel befindet sich ein kleiner Stabmagnet. Die Periodendauer des schwingenden Systems wird mit Hilfe des in Abbildung 3 dargestellten Aufbaus gemessen. Bei der Durchführung ist darauf zu achten, dass ein Pendeln der Kugel zu unterbinden ist.

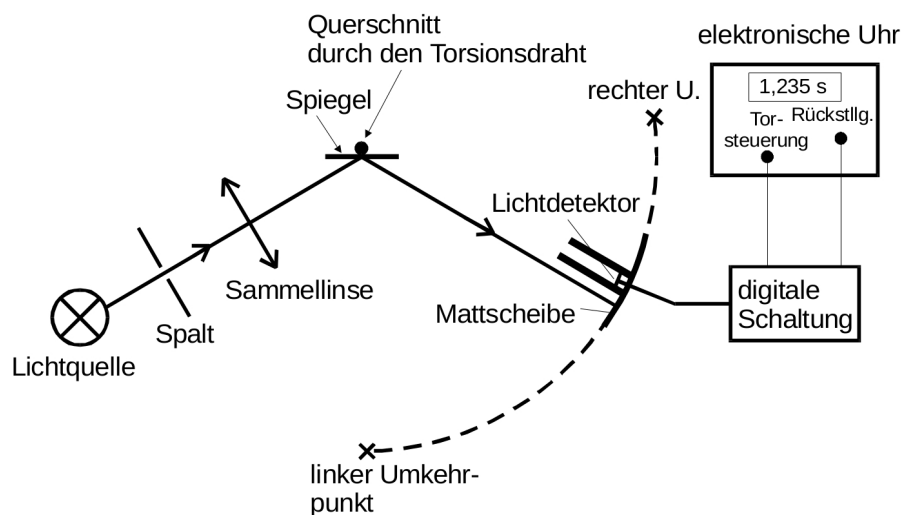


Abbildung 3: Skizze des Aufbaus zur Messung der Periodendauer [2].

Ein von der Lichtquelle ausgehender Lichtstrahl wird gebündelt und am Spiegel des Drahtes reflektiert. Diese Reflexion fällt bei einem bestimmten Winkel des Spiegels in einen

Lichtdetektor, welcher ein elektronische Zählwerk bedient. Die Schaltung zwischen dem Lichtdetektor und der elektronischen Uhr, die aus zwei auf die abfallende Flanke getakteten T-Flipflops und einer monostabilen Kippstufe besteht, ist in Abbildung 4 dargestellt.

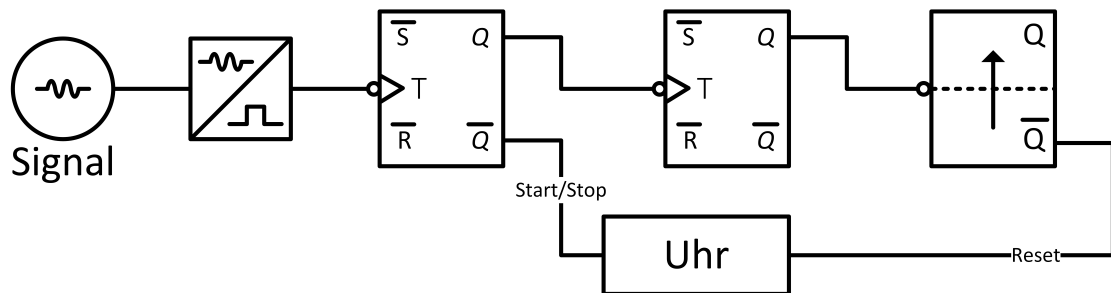


Abbildung 4: Schaltplan zur Bedienung der elektronischen Uhr.

Der erste Lichtimpuls startet die elektronische Uhr, der zweite wird nicht benötigt und der dritte Lichtimpuls stoppt die Uhr, sodass auf ihr die Periodendauer abzulesen ist. Der vierte Impuls setzt die Uhr zurück.

4.2 Messung des Schubmoduls eines Drahtes

Die Konstantstromquelle des Spulenpaares wird ausgeschaltet und das System mit Hilfe des Justierrades ausgelenkt. Dabei ist darauf zu achten, dass die Auslenkung mindestens so groß ist, dass der reflektierte Lichtstrahl den Lichtdetektor erreicht und maximal so groß ist, dass die Kugel um bis zu 360° schwingt. Die Kugel wird in ihrer Aufhängung so gedreht, dass der Stabmagnet in Ruhelage vertikal ausgerichtet ist. Die auf der Uhr angezeigte Periodendauer wird für 12 Schwingungen gemessen.

4.3 Messung des magnetischen Moments eines Magneten

Der Strom der Konstantstromquelle wird zwischen 0,1 A und 1,0 A in 0,1 A-Schritten variiert und für jede Einstellung werden fünf Periodendauern gemessen. Vorher ist die Kugel in Ruhelage so zu drehen, dass der Stabmagnet an dem Magnetfeld in Nord-Richtung des Helmholtz-Spulenpaares ausgerichtet ist. Bei der Durchführung ist zu darauf achten, dass nur um kleine Winkel ausgelenkt werden darf, damit die in Kapitel 2.3 beschriebene Kleinwinkelnäherung gilt.

4.4 Messung der Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes

Die Konstantstromquelle wird für diesen Versuchsteil ausgeschaltet. Der Stabmagnet der Kugel wird in Ruhelage in Nord-Süd-Richtung ausgerichtet und die Periodendauer wird für 12 Schwingungen gemessen.

5 Auswertung

5.1 Schubmodul

Aus den gemessenen Periodendauern T und den Formeln (5), (8) und (9) lässt sich das mittlere Schubmodul

$$\overline{G} = (69,7 \pm 2,8) \text{ GPa}$$

bestimmen. Dabei wurde der gemittelte Drahtdurchmesser nach Formel (8) und (9)

$$\overline{R} = (0,102 \pm 0,001) \text{ mm}$$

verwendet. Die Masse der Kugel $m_K = (588,3 \pm 0,2) \text{ g}$ und ihr Radius $R_K = (25,52 \pm 0,01) \text{ mm}$ wurden der Versuchsaapparatur entnommen. Das Trägheitsmoment der Kugelhalterung θ_{KH} ist auf $22,5 \text{ g cm}^2$ gegeben gewesen. Damit ergibt sich das Gesamtträgheitsmoment θ der Kugel und ihrer Halterung zu

$$\theta = (0,155\,45 \pm 0,000\,14) \text{ g m}^2.$$

Aus dem Schubmodul $G = (69,7 \pm 2,8) \text{ GPa}$ und dem gegebenen Elastizitätsmodul $E = (210,0 \pm 0,5) \text{ GPa}$, sowie der Formel (10) lässt sich der Kompressionsmodul

$$Q = (-10 \pm 50) \text{ TPa}$$

nach Formel (2) und einsetzen der Formel (1) bestimmen. Desweiteren ergibt sich die Poissonsche Querkonstraktionszahl μ nach Formel (1) und (10) zu

$$\mu = 0,51 \pm 0,06. \quad (11)$$

Tabelle 1: Messwerte mit senkrecht stehendem Magneten zur Bestimmung des Schubmoduls. [5]

T/s	G/GPa
18,474	$69,69 \pm 2,85$
18,474	$69,69 \pm 2,85$
18,477	$69,67 \pm 2,84$
18,476	$69,68 \pm 2,84$
18,473	$69,70 \pm 2,85$
18,474	$69,69 \pm 2,85$
18,472	$69,71 \pm 2,85$
18,473	$69,70 \pm 2,85$
18,472	$69,71 \pm 2,85$
18,473	$69,70 \pm 2,85$
18,474	$69,69 \pm 2,85$
18,472	$69,71 \pm 2,85$

Tabelle 2: Messwerte zur Bestimmung des Drahtdurchmessers.

Messung	d/mm
1	0,205
2	0,205
3	0,205
4	0,206
5	0,203
6	0,206
7	0,205
8	0,203
9	0,200
10	0,201
11	0,207
12	0,202

5.2 Magnetischer Moment

In der Abbildung 5 ist das Magnetfeld des Helmholtzspulen-Paares im Mittelpunkt, welches nach

$$B = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{8IN}{\sqrt{125}R_{\text{SP}}} \quad (12)$$

berechnet wird, gegen den Kehrwert der gemittelten und quadrierten Periodendauer $\frac{1}{T_1^2}$ aufgetragen, wodurch sich eine Gerade ergibt. In der Formel (12) ist $N = 80$ die Anzahl der Windungen der Spulen, $R_{\text{SP}} = 72 \text{ mm}$ ist der Radius der Spulen und I der Strom, welcher durch die Spulen fließt. Die Regression wurde mit curvefit von scipy [4] und der Funktion

$$B = a \cdot \frac{1}{T^2} + b$$

durchgeführt. Die Parameter ergeben sich zu

$$a = (0,0946 \pm 0,0029) \frac{\text{kg}}{\text{A}} \quad b = (-0,0002 \pm 0,0000) \text{ T}.$$

Durch Koeffizientenvergleich mit der umgestellten Formel (7) und der Formel (10) ergibt sich die Bestimmung des magnetischen Moments m des eingeschraubten Magneten zu

$$m = \frac{4\pi^2\theta}{a} = (0,65 \pm 0,02) \text{ A m}^2.$$

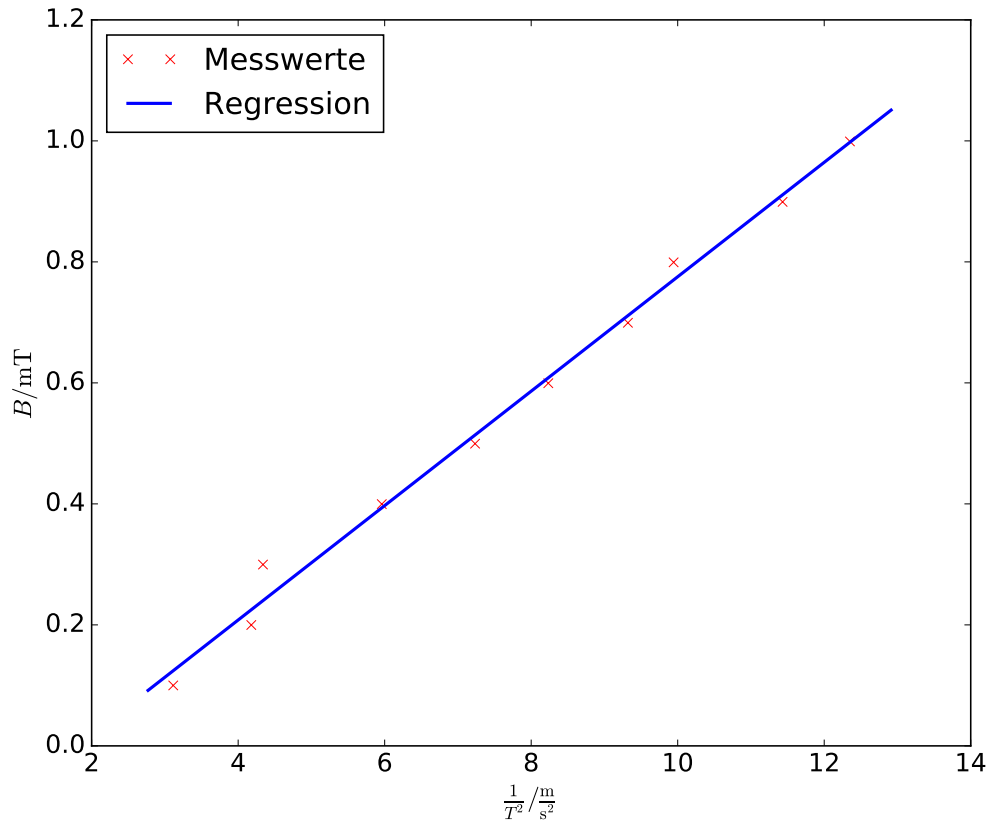


Abbildung 5: Das B-Feld des Helmholtzspulenpaares gegen $\frac{1}{T_i^2}$ aufgetragen. [3]

Tabelle 3: Messwerte zur Bestimmung des magnetischen Moments.

0,1 A $T_{0,1}/\text{s}$	0,2 A $T_{0,2}/\text{s}$	0,3 A $T_{0,3}/\text{s}$	0,4 A $T_{0,4}/\text{s}$	0,5 A $T_{0,5}/\text{s}$	0,6 A $T_{0,6}/\text{s}$	0,7 A $T_{0,7}/\text{s}$	0,8 A $T_{0,8}/\text{s}$	0,9 A $T_{0,9}/\text{s}$	1,0 A $T_{1,0}/\text{s}$
17,927	15,467	13,995	12,984	11,767	11,037	10,341	10,045	9,378	9,003
17,919	15,460	19,983	12,964	11,776	11,015	10,363	10,026	9,362	8,999
17,921	15,456	13,982	12,949	11,755	11,034	10,369	10,032	9,311	8,992
17,915	15,451	13,977	12,938	11,744	11,009	10,368	10,012	9,350	8,997
17,921	15,508	13,969	12,928	11,745	11,008	10,349	10,025	9,363	8,999

Tabelle 4: Mittelwerte der Schwingungsdauern zur Bestimmung der Regression des B-Feldes. [5]

Index i	$\overline{T_i}/s$	$\frac{1}{\overline{T_i^2}}/\frac{m}{s^2}$	I_i/A	B/mT
0,1	$17,92 \pm 0,00$	$3,11 \pm 0,00$	0,1	0,1
0,2	$15,47 \pm 0,02$	$4,18 \pm 0,01$	0,2	0,2
0,3	$15,18 \pm 2,40$	$4,34 \pm 1,37$	0,3	0,3
0,4	$12,95 \pm 0,02$	$5,96 \pm 0,02$	0,4	0,4
0,5	$11,76 \pm 0,01$	$7,23 \pm 0,02$	0,5	0,5
0,6	$11,02 \pm 0,01$	$8,23 \pm 0,02$	0,6	0,6
0,7	$10,36 \pm 0,01$	$9,32 \pm 0,02$	0,7	0,7
0,8	$10,03 \pm 0,01$	$9,94 \pm 0,02$	0,8	0,8
0,9	$9,35 \pm 0,02$	$11,43 \pm 0,06$	0,9	0,9
1,0	$9,00 \pm 0,00$	$12,35 \pm 0,01$	1,0	1,0

5.3 Erdmagnetfeld

Aus den Schwingungsdauern T ohne eingeschaltetem Magnetfeld und dem in Abschnitt 5.2 berechneten magnetischen Moments $m = (0,65 \pm 0,02) A m^2$ lässt sich die horizontal Komponente des Erdmagnetfeldes mit der umgestellten Formel (7) und der Formel (10) auf

$$B_h = (17,5 \pm 0,5) \mu T$$

bestimmen.

Tabelle 5: Messwerte zur Bestimmung der horizontal Komponente des Erdmagnetfeldes. [5]

T/s	$\frac{1}{T^2}/\frac{m}{s^2}$	B/mT
17,940	3,11	$0,02 \pm 0,0$
17,935	3,11	$0,02 \pm 0,0$
17,934	3,11	$0,02 \pm 0,0$
17,925	3,11	$0,02 \pm 0,0$
17,926	3,11	$0,02 \pm 0,0$
17,920	3,11	$0,02 \pm 0,0$
17,915	3,12	$0,02 \pm 0,0$
17,911	3,12	$0,02 \pm 0,0$
17,906	3,12	$0,02 \pm 0,0$
17,900	3,12	$0,02 \pm 0,0$
17,898	3,12	$0,02 \pm 0,0$
17,896	3,12	$0,02 \pm 0,0$

6 Diskussion

Beim Vergleich zwischen dem im Abschnitt 5.1 ermitteltem Schubmodul $G = (69,7 \pm 2,8)$ GPa und dem Literaturwert $G_{\text{Lit}} = 81$ GPa [7] ergibt sich eine Abweichung von -14% . Es kann ausgesagt werden, dass es sich bei dem untersuchten Material um Stahl handelt, allerdings nicht um welche Sorte, da es eine Vielzahl an Sorten mit gleichem Schubmodul [7] gibt.

Für das magnetische Moment $m = (0,65 \pm 0,02)$ A m² in Abschnitt 5.2 kann keine Aussage über das tatsächliche magnetische Moment getroffen werden, da nicht bekannt ist, welcher Magnet in der Kugel verbaut ist.

Die in Abschnitt 4.4 berechnete horizontal Komponente des Erdmagnetfeldes $B_h = (17,5 \pm 0,5)$ μ T weicht nur um $-12,6\%$ vom Literaturwert $B_{h,\text{Lit}} = 20$ μ T [1] ab.

Die zuvor erwähnten Abweichungen können durch einige Gründe erklärt werden. Der größte Fehler entstand vermutlich durch die Licht gesteuerte Messuhr, denn durch Hintergrundstrahlung wurde die Messung beeinflusst. Ebenso wurde die Messung zwischendurch unterbrochen, da sich Personen hinter dem Versuchsaufbau bewegten, was zu einer vorzeitigen Auslösung der Messung führte. Weiterhin konnte die Kugel nur nach Augenmaß und nur durch einen Punkt auf der Kugel möglichst waagerecht, beziehungsweise in Süd-Nord-Richtung ausgerichtet werden. Da es nur einen Punkt auf der Kugel gab, welcher die Position des Magneten kennzeichnete, konnte somit die absolute Lage des Magneten nicht bestimmt werden. Ein Pendeln der Kugel konnte trotz Verwendung der Bremse nicht vermieden werden. Beim Versuchsteil aus Abschnitt 4.3 war der Strom nur über die Spannung zu regulieren und die Einteilung der Stromskala war nur grob, sodass ein genaues Einstellen des Stroms nicht möglich war.

Literatur

- [1] Prof. Dr. Friedrich H. Balck, Hrsg. 2016. URL: <http://www.biosensor-physik.de/biosensor/erdmagnetfeld.htm> (besucht am 22.01.2017).
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 102 Drehschwingungen*. 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V102.pdf> (besucht am 16.10.2016).
- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [4] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [5] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [6] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.

- [7] Anton Schweizer, Hrsg. 2016. URL: http://www.schweizer-fn.de/festigkeit/festigkeitswerte/stahl/stahl_start.php (besucht am 22.01.2017).