

V105 - Korrektur

Das magnetische Moment

Evelyn Romanjuk
evelyn.romanjuk@tu-dortmund.de

Ramona Kallo
ramonagabriela.kallo@tu-dortmund.de

Durchführung: 10.11.17

Abgabe der Korrektur: 01.12.17

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Betrachtung unter Ausnutzung der Gravitation	3
2.2 Betrachtung unter Ausnutzung der Schwingungsdauer	3
2.3 Betrachtung unter Ausnutzung der Präzession	4
3 Versuchsaufbau und Durchführung	4
3.1 Statische Methode unter Verwendung der Gravitation	5
3.2 Dynamische Methode unter Verwendung der Schwingungsdauer	5
3.3 Dynamische Methode unter Verwendung der Präzession	5
4 Auswertung	6
4.1 Bestimmung des magnetischen Momentes unter Ausnutzung der Gravitation	6
4.2 Bestimmung des magnetischen Momentes über die Schwingungsdauer . .	7
4.3 Bestimmung des magnetischen Moments über die Präzession	9
5 Diskussion	12
Literatur	12

1 Zielsetzung

Das Ziel des Versuchs ist auf drei experimentelle Arten das magnetische Moment eines Permanentmagneten auszurechnen und diese anschließend zu vergleichen.

2 Theorie

In dem Magnetismus wird die einfachste Form eines magnetischen Dipols beobachtet. Es gibt keine magnetischen Monopole. Ein magnetischer Dipol besteht aus einem Permanentmagneten oder kann z.B. vom Strom durch Leiter durchflossen sein. Das magnetische Moment ist gegeben durch:

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{A},$$

wobei A die Querschnittsfläche der Schleife und I der Strom, der durch die Leiterschleife fließt, sind. Für ein homogenes Magnetfeld werden in der Regel Helmholtz-Spulen verwendet. Es sind zwei kreisförmige Spulen im Abstand d , welche vom Strom I durchflossen sind und ein auf der Symmetrieachse homogenes Magnetfeld B erzeugen. Das Magnetfeld errechnet sich dann aus:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2 \cdot N}{(R^2 + (\frac{d}{2})^2)^{3/2}}. \quad (1)$$

2.1 Betrachtung unter Ausnutzung der Gravitation

Wird eine Masse mit der Gravitationskraft \vec{F}_g an einem Drehort befestigt, so ergibt sich ein Drehmoment \vec{D}_g mit:

$$\vec{D}_g = m \cdot (\vec{r} \times \vec{g}),$$

wobei \vec{r} der Abstand von der Masse m zum Angriffspunkt der Kraft ist. Es entsteht ein Gleichgewicht, zwischen dem Drehmoment \vec{D}_g und dem Drehmoment \vec{D}_B eines homogenen Magnetfeldes gegeben als:

$$\vec{D}_B = \vec{\mu}_{\text{Dipol}} \times \vec{B}.$$

Weil g und B parallel sind, ergibt sich das magnetische Moment μ_{Dipol} als:

$$\mu_{\text{Dipol}} = \frac{m \cdot r \cdot g}{B}. \quad (2)$$

2.2 Betrachtung unter Ausnutzung der Schwingungsdauer

In einem homogenen Magnetfeld wird die Schwingung eines Magneten wie ein harmonischer Oszillator betrachtet. Dabei wird diese Bewegung durch eine Differentialgleichung 2. Ordnung beschrieben und lautet:

$$-|\vec{\mu}_{\text{Dipol}} \times \vec{B}| = J_K \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Dabei hängt die Lösung der Differentialgleichung von der Magnetfeldstärke B , dem Trägheitsmoment J_K ab und wird über die Schwingungsdauer T bestimmt als:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 J_K}{B\mu_{\text{Dipol}}}. \quad (3)$$

2.3 Betrachtung unter Ausnutzung der Präzession

Als Präzessionsbewegung wird die Bewegung der Drehachse eines starren Körpers auf einer zweiten Achse bezeichnet, wenn eine äußere Kraft wirkt. Diese Art von Bewegung wird durch eine Differentialgleichung beschrieben als:

$$\vec{\mu} \times \vec{B} = \frac{d\vec{L}_K}{dt}.$$

Mit der Präzessionsfrequenz Ω_p als Lösung der Differentialgleichung:

$$\Omega_p = \frac{\mu B}{|L_K|},$$

wobei L_K der Drehimpuls des Körpers ist. Für diesen Fall ergibt sich für das magnetische Moment μ_{Dipol} :

$$\mu_{\text{Dipol}} = \frac{2\pi L_K}{BT_p}. \quad (4)$$

mit T_p als Umlaufdauer.

3 Versuchsaufbau und Durchführung

Der Aufbau des Versuches ist in der Abbildung 1 zu sehen. Zunächst befindet sich ein

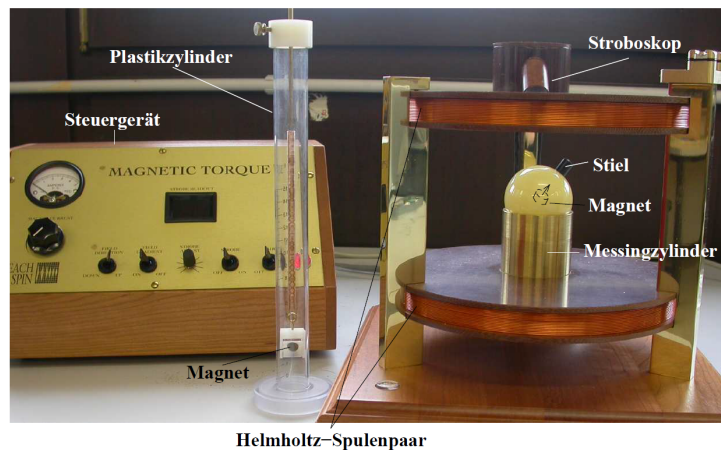


Abbildung 1: Versuchsaufbau [1, S. 3].

Steuergerät auf der linken Seite der Abbildung, wo die entsprechenden Eigenschaften des Magnetfeldes und das Stroboskop eingestellt werden können. Das Luftkissen kann ebenfalls auch an dem Gerät angesteuert werden. Auf der rechten Seite der Abbildung sind die Helmholtz-Spulenpaar mit den Abmessungen $N = 195$, $d = 0,138\text{ m}$ und $R = 0,109\text{ m}$ und der Messingzylinder zu sehen. Auf dem Messingzylinder wird eine Billiardkugel gebracht, die sich mit Hilfe des Luftkissens reibungslos bewegen kann und in deren Mitte ein Permanentmagnet vorhanden ist.

3.1 Statische Methode unter Verwendung der Gravitation

Für den ersten Typ der experimentellen Bestimmung des magnetischen Momentes wird zuerst eine verschiebbare Masse m an einer Aluminiumstange in der Billiardkugel angefügt. Dazu wird das Luftkissen eingeschaltet, sodass die Feldrichtung nach oben zeigte. Hierbei muss die Masse so verschoben und der Strom so festgelegt werden bis sich das System in einem Gleichgewicht befindet. Dabei wird der Radius r der kleinen Masse m vom Zentrum der Billiardkugel für mindestens 10 Messungen festgelegt. Zudem wird die Masse des Aluminiumstifts für die Berechnung ignoriert und die kleine verschiebbare Masse als Punktmasse angesehen.

3.2 Dynamische Methode unter Verwendung der Schwingungsdauer

Für den zweiten Typ wird das Magnetfeld eingeschaltet und die Billiardkugel auf den Messingzylinder gestellt. Dabei wird die Billiardkugel so ausgelenkt, dass sie Schwingungen ausführen kann wie bei einem harmonischen Oszillator und die Stromstärke für mindestens 9 Messungen festgelegt. Die Schwingungsdauer T und die Stromstärke I werden ebenfalls für mindestens 9 Messungen aufgeschrieben.

3.3 Dynamische Methode unter Verwendung der Präzession

Für den letzten Typ der experimentellen Betrachtung wird die Billiardkugel auf das Luftkissen gesetzt, das Luftkissen eingeschaltet, und das Stroboskop auf eine Frequenz von mindestens 4 Hz gestellt. Als nächstes wird die Kugel in Rotation versetzt und entsprechend gewartet bis der weiße Punkt auf dem Stiel stationär ist. Danach wird die Kugel mit einem Stift ausgelenkt und die Spulenstromstärke bei einer geeigneten Frequenz eingeschaltet. Für eine Magnetfeldstärke wird dreimal die Schwingungsdauer gemessen und die gemessenen Daten notiert. Insgesamt wird die Messung mindestens 10 mal durchgeführt.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung des magnetischen Momentes unter Ausnutzung der Gravitation

Die in dieser Methode eingestellten Ströme und gemessenen Abstände r sind in Tabelle (1) zu finden. Die zu den Strömen gehörigen Flussdichten B können mithilfe von Formel (1) berechnet werden.

Tabelle 1: Gravitationsmethode: Ermittelte Größen

I / A	$B / 10^{-3} \text{ T}$	$r / 10^{-2} \text{ m}$
2,0	2,72	2,7
2,3	3,13	3,5
2,5	3,40	4,7
2,6	3,54	4,5
2,8	3,81	5,9
3,0	4,08	4,2
3,2	4,35	7,6
3,5	4,76	7,3
3,7	5,03	8,8
4,0	5,44	9,3

Es wird nun r gegen B aufgetragen wie in Abbildung (2) zu sehen ist. Die Steigung der Ausgleichsgeraden der Form $y = a \cdot x + b$ wird vom Python-Modul Matplotlib berechnet und beträgt

$$a = \frac{r}{B} = (24,816 \pm 3,018) \frac{\text{m}}{\text{T}}$$

und der y-Achsenabschnitt liegt bei

$$b = (-0,041 \pm 0,012) \text{ m}.$$

Mit dem Gewicht der kleinen Masse m von $m = 0,0014 \text{ kg}$ und der Erdbeschleunigung g , welche hier $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ist, lässt sich so ein magnetisches Moment μ_{Dipol} über Gleichung (2) berechnen. Da es sich bei a um eine fehlerbehaftete Größe handelt, wird der Fehler $\Delta\mu_{\text{Dipol}}$ des magnetischen Momentes mithilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet.

$$\begin{aligned}\Delta\mu_{\text{Dipol}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\mu_{\text{Dipol}}}{\partial a}\right)^2 \cdot (\Delta a)^2} \\ \Rightarrow \Delta\mu_{\text{Dipol}} &= \sqrt{(m \cdot g)^2 \cdot (\Delta a)^2} \\ \Leftrightarrow \Delta\mu_{\text{Dipol}} &= m \cdot g \cdot \Delta a\end{aligned}\tag{5}$$

Werden nun alle Werte in Gleichung (2) sowie in (5) eingesetzt, ergibt sich ein magnetisches Moment von

$$\mu_{\text{Dipol}} = (0,34 \pm 0,04) \text{ A} \cdot \text{m}^2.$$

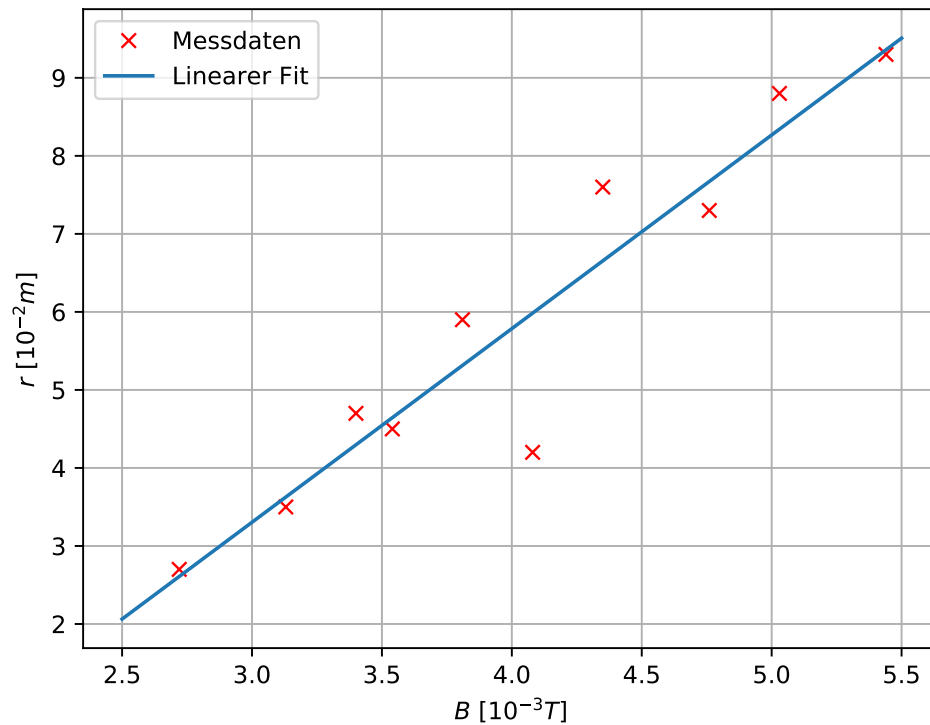


Abbildung 2: Lineare Regression zur Bestimmung des magnetischen Moments über die Gravitation.

4.2 Bestimmung des magnetischen Momentes über die Schwingungsdauer

In diese Messmethode wird das magnetische Moment μ_{Dipol} über Gleichung (3) ermittelt. Das hierfür benötigte Trägheitsmoment J_K der im Versuch verwendeten Billiardkugel mit den Geometriedaten

$$r_K = 2,5 \text{ cm},$$

$$m_K = 150 \text{ g}$$

wird mit

$$J_K = \frac{2 \cdot m_K \cdot r_K^2}{5}$$

bestimmt. Das Trägheitsmoment beträgt damit

$$J_K = 3,75 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2.$$

In Tabelle (2) sind die eingestellten Ströme sowie die gemessenen Periodendauern zu finden. Nun wird T^2 gegen $\frac{1}{B}$ aufgetragen wie in Abbildung (3) zu sehen ist.

Tabelle 2: Schwingungsmethode: Ermittelte Größen

I/A	$B/10^{-3}\text{T}$	$\frac{1}{B}/\frac{1}{\text{T}}$	T/s	T^2/s^2
2,0	2,72	367,65	1,172	1,374
2,3	3,13	319,49	1,106	1,223
2,5	3,40	294,12	1,053	1,109
2,6	3,54	282,49	1,038	1,077
2,8	3,81	262,47	0,991	0,982
3,0	4,08	245,09	0,963	0,927
3,2	4,35	229,89	0,931	0,867
3,5	4,76	208,77	0,897	0,805
3,7	5,03	198,81	0,860	0,739
4,0	5,44	183,82	0,768	0,589

Die von Matplotlib berechnete Steigung der Ausgleichgeraden der Form $y = a \cdot x + b$ beträgt

$$a = T^2 \cdot B = (0,00402 \pm 0,00019) \text{s}^2 \cdot \text{T},$$

der Y-Achsenabschnitt ist

$$b = (-0,07 \pm 0,05) \text{s}^2.$$

Der Fehler $\Delta\mu_{\text{Dipol}}$ des magnetisches Moments wird über die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung ermittelt:

$$\begin{aligned} \Delta\mu_{\text{Dipol}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\mu_{\text{Dipol}}}{\partial a}\right)^2 \cdot (\Delta a)^2} \\ \Rightarrow \Delta\mu_{\text{Dipol}} &= \sqrt{\left(-\frac{4\pi^2 \cdot J_{\text{K}}}{a^2}\right)^2 \cdot (\Delta a)^2} \\ \Leftrightarrow \Delta\mu_{\text{Dipol}} &= \frac{4\pi^2 \cdot J_{\text{K}}}{a^2} \cdot \Delta a \end{aligned} \quad (6)$$

Nach Einsetzen der Werte für J_{K} , a und Δa in Gleichung (3) und (6) folgt für das magnetische Moment:

$$\mu_{\text{Dipol}} = (0,368 \pm 0,017) \text{A} \cdot \text{m}^2.$$

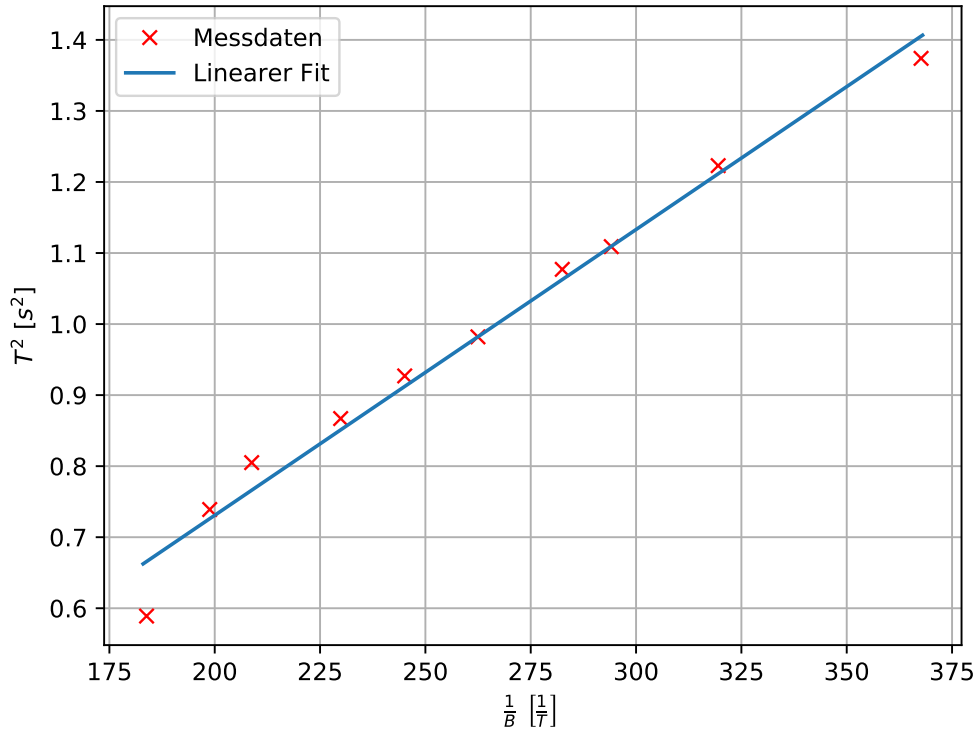


Abbildung 3: Lineare Regression zur Bestimmung des magnetischen Moments über die Schwingungsdauer.

4.3 Bestimmung des magnetischen Moments über die Präzession

Mit Gleichung (4) kann μ_{Dipol} über die Präzessionsmethode berechnet werden. Der Drehimpuls L_K ist

$$L_K = J_K \cdot 2\pi\nu. \quad (7)$$

Das Trägheitsmoment mit $J_K = 3,75 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$ und die Frequenz, welche $\nu = 5,8 \text{ Hz}$ beträgt, können in (7) eingesetzt werden. Der Drehimpuls ist damit

$$L_K = 1,367 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}.$$

Aus Tabelle (3) können die Ströme I , die daraus resultierenden magnetischen Flussdichten B und die Periodendauern T entnommen werden. Weiterhin enthält sie die gemittelten Periodendauern \bar{T} sowie die Kehrwerte $\frac{1}{T}$. Der Mittelwert wird hierbei mit

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i$$

und der zugehörige Fehler mit

$$\Delta\bar{T} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2}$$

berechnet. Der Fehler der gemittelten, reziproken Periodendauern $\frac{1}{\bar{T}}$ wird weiterhin mithilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung kalkuliert:

$$\begin{aligned} \Delta\frac{1}{\bar{T}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \frac{1}{\bar{T}}}{\partial \bar{T}}\right)^2 \cdot (\Delta\bar{T})^2} \\ \Rightarrow \Delta\frac{1}{\bar{T}} &= \sqrt{\left(-\frac{1}{\bar{T}^2}\right)^2 \cdot (\Delta\bar{T})^2} \\ \Leftrightarrow \Delta\frac{1}{\bar{T}} &= \frac{\Delta\bar{T}}{\bar{T}^2}. \end{aligned}$$

Tabelle 3: Präzessionsmethode: Ermittelte Größen

I/A	$B/10^{-3}\text{T}$	T_1/s	T_2/s	T_3/s	\bar{T}/s	$\frac{1}{\bar{T}}/10^2\text{s}$
0,5	0,68	25,28	25,06	20,88	23,70 \pm 0,40	4,2194 \pm 0,0007
1,0	1,36	12,88	15,15	15,75	14,60 \pm 0,20	6,8493 \pm 0,0009
1,5	2,04	10,06	8,13	8,60	8,93 \pm 0,15	11,1982 \pm 0,0018
2,0	2,72	8,31	8,04	7,50	7,95 \pm 0,06	12,5786 \pm 0,0009
2,5	3,40	6,69	5,91	5,90	6,16 \pm 0,07	16,2338 \pm 0,0018
2,7	3,67	6,59	6,69	7,29	6,86 \pm 0,05	14,5573 \pm 0,0011
3,0	4,08	4,62	5,78	6,06	5,486 \pm 0,114	18,228 \pm 0,003
3,5	4,76	4,66	5,09	4,59	4,78 \pm 0,04	20,9205 \pm 0,0018
3,7	5,03	4,69	4,37	5,09	4,72 \pm 0,05	21,186 \pm 0,002
4,0	5,44	5,00	4,81	4,50	4,77 \pm 0,04	20,9644 \pm 0,0018

In Abbildung (4) werden die gemittelten, reziproken Periodendauern $\frac{1}{\bar{T}} = T_p$ gegen die magnetischen Flussdichten aufgetragen. Aus der linearen Regression der Form $y = a \cdot x + b$ ergibt sich die Steigung a und der y-Achsenabschnitt b , welche wiederum von Matplotlib ausgegeben werden:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{T_p \cdot B} = (36,5 \pm 3,4) \frac{1}{\text{s} \cdot \text{T}}, \\ b &= (2,2 \pm 1,3) \cdot 10^2 \text{s}. \end{aligned}$$

Für den Fehler $\Delta\mu_{\text{Dipol}}$ des magnetischen Moments wird die Gauß'sche Fehlerfort-

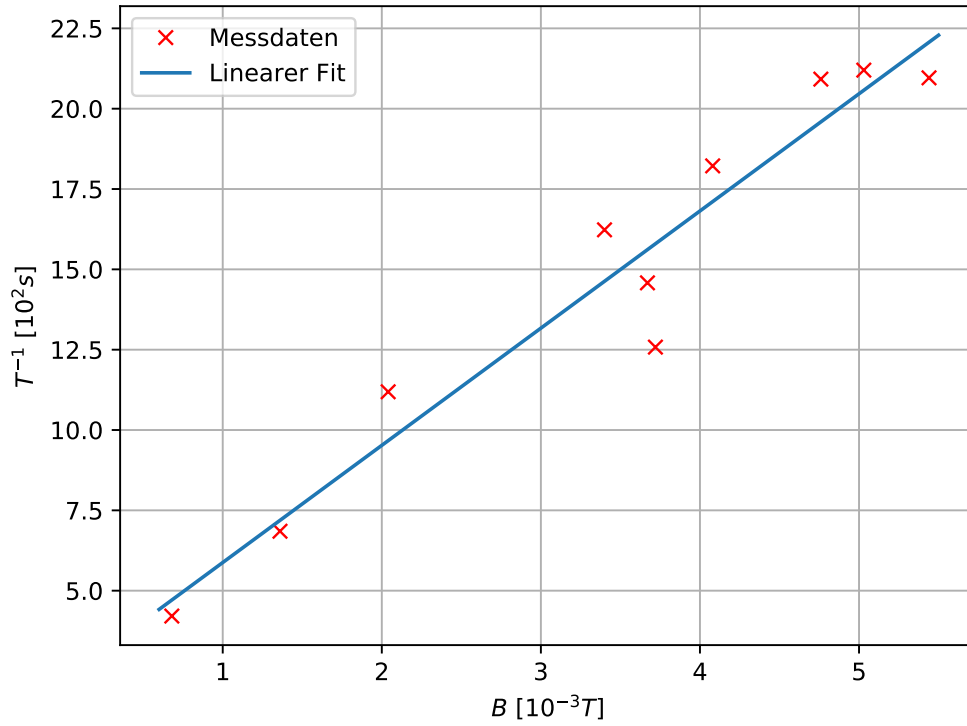


Abbildung 4: Lineare Regression zur Bestimmung des magnetischen Moments über die Präzession

pflanzung genutzt:

$$\begin{aligned}
 \Delta\mu_{\text{Dipol}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\mu_{\text{Dipol}}}{\partial a}\right)^2 \cdot (\Delta a)^2} \\
 \Rightarrow \Delta\mu_{\text{Dipol}} &= \sqrt{\left(2\pi \cdot L_K\right)^2 \cdot (\Delta a)^2} \\
 \Leftrightarrow \Delta\mu_{\text{Dipol}} &= 2\pi \cdot L_K \cdot \Delta a \tag{8}
 \end{aligned}$$

Nach Einsetzen von L_K , a und Δa in Gleichung (4), sowie (8) ergibt sich ein magnetisches Moment von

$$\mu_{\text{Dipol}} = (0,31 \pm 0,03) \text{ A} \cdot \text{m}^2.$$

5 Diskussion

Ziel dieses Versuches ist es, das magnetische Moment eines Permanentmagneten auf drei verschiedene Weisen zu bestimmen. In jeder der Messmethoden gab es Fehlerquellen, die berücksichtigt werden müssen. Zunächst die Gravitationsmethode. Hier können Fehler beim Vermessen der Billiardkugel mitsamt des Stiels auftreten. Zudem ist es möglich, dass die Abstände r von der Masse bis zur Kugel nur ungenau bestimmt werden. Diese ungenauen Abstände würden sich damit direkt auf die Berechnung von μ_{Dipol} auswirken.

Bei der Methode über die Schwingungsdauer könnte es sein, dass die Auslenkungen nicht bei jeder Messung gleich groß sind und die Durchführungen somit nicht einheitlich, da Periodendauern dadurch vergrößert oder verkleinert werden. Bei kleinen Periodendauern könnten sich außerdem Fehler beim Stoppen der Zeit ergeben.

Zuletzt gibt es auch bei der Präzessionsmethode einige Fehlerquellen. Zunächst muss die Kugel in Rotation und in einen stabilen Zustand versetzt werden. Wenn dies gelingt, präzidiert die Kugel häufig schon, bevor der Strom richtig eingestellt wird. Außerdem kommt es auch hier, wie in der Schwingungsmethode, vor, dass die Kugel nicht immer gleich stark ausgelenkt wird. Weiterhin ergeben sich auch Fehler beim Messen der Periodendauer, da es nicht immer genau ersichtlich ist, wann eine Periode erreicht wird.

Ferner spielt bei allen Messmethoden eine Rolle wie lange der Strom eingeschaltet ist, weil beim Erwärmen des Spulendrahtes dessen Widerstand ansteigt. Daraus würde folgen, dass das Magnetfeld schwächer wird, was sich auf die gesamte Berechnung der magnetischen Momente der verschiedenen Messmethoden auswirkt.

Die Ergebnisse dieses Versuchs sind die folgenden magnetischen Momente:

$$\begin{aligned}\mu_{\text{Dipol, Grav}} &= (0,34 \pm 0,04) \text{ A} \cdot \text{m}^2 \\ \mu_{\text{Dipol, Schwing}} &= (0,368 \pm 0,017) \text{ A} \cdot \text{m}^2 \\ \mu_{\text{Dipol, Präz}} &= (0,31 \pm 0,03) \text{ A} \cdot \text{m}^2\end{aligned}$$

Diese Werte weichen mindestens mit 7,61% und maximal mit 18,71% voneinander ab. Es ist zu erkennen, dass das magnetische Moment, das über die Gravitationsmethode bestimmt wurde, den größten Fehlerwert aufweist. Dagegen hat die Schwingungsmethode den kleinsten und ist somit die genaueste der drei Messmethoden.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch M4: Das Magnetische Moment*. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/MagneticToMP.pdf> (besucht am 12.11.2017).