

Physik Praktikum: Versuch 351

Lars Klompmaker

lars.klompmaker@tu-dortmund.de

Kai Brügge

kai.bruegge@tu-dortmund.de

06.12.2012

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
3	Theoretische Berechnung	3
3.1	Dreiecksspannung	3
3.2	Rechtecksspannung	4
3.3	Sägezahnspannung	5
4	Durchführung	6
4.1	Fourier-Synthese	6
4.2	Fourier-Analyse	6
5	Auswertung und Diskussion	7
5.1	Fourier-Synthese	7
5.1.1	Rechtecksspannung	7
5.1.2	Sägezahnspannung	7
5.1.3	Dreiecksspannung	8
5.2	Fourier-Analyse	9
5.2.1	Rechtecksspannung	9
5.2.2	Sägezahnspannung	9
5.2.3	Dreiecksspannung	9
5.2.4	Diskussion	11
6	Quellen	12

1 Einleitung

Nahezu jede periodische Funktion lässt sich als Summe aus Sinus- und Cosinus-Thermen darstellen. Zur Verdeutlichung dieser Tatsache werden in diesem Versuch verschiedene Spannungsformen aus Sinus- und Cosinus-Thermen zusammengesetzt, sowie periodische Spannungen in ihre Komponenten zerlegt.

2 Theorie

Das Fouriersche Theorem besagt, dass sich eine Funktion der Periode T darstellen lässt als

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) + b_n \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) \right). \quad (1)$$

Die Fourier-Koeffizienten berechnen sich gemäß

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) dt \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) dt \quad (3)$$

Es treten als Frequenz somit nur ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz auf, $\nu = \frac{1}{T}$.

Treten in der eigentlichen Funktion Unstetigkeitsstellen auf, ergeben sich Abweichungen an diesen Stellen, die auch mit steigender Anzahl von Oberschwingungstermen nicht geringer werden. Man nennt die Sprünge das Gibbsche Phänomen.

Trägt man die Fourierkoeffizienten, was die Amplituden der Oberschwingungen darstellt, gegen die Frequenz auf, ergibt sich das jeweilige Frequenzspektrum. Dieses ist bei periodischen Funktionen ein Linienspektrum, dessen Amplituden mit steigender Frequenz sinken. Bei nichtperiodischen Funktionen erhält man ein kontinuierliches Spektrum. Diese Koeffizienten werden bei der Fourier-Analyse gesucht. Möchte man jedoch das gesamte Spektrum einer Funktion haben, muss auf die Fourier-Transformation zurückgegriffen werden:

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\nu t) dt. \quad (4)$$

Dies führt zum Problem, dass nicht über unendliche Zeiträume integriert werden kann. Die ursprüngliche Funktion wird also nur über einen endlichen Zeitraum betrachtet.

3 Theoretische Berechnung

3.1 Dreiecksspannung

$$f(t) = \begin{cases} +\frac{4A}{T}t + A, & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ -\frac{4A}{T}t + A, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

$b_n = 0 \quad \forall n$, da $f(t)$ eine gerade Funktion ist.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 \left(\frac{4A}{T}t + A \right) \cos \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) dt - \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{4A}{T}t - A \right) \cos \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) dt + \cancel{\frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^0 2A \cos \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) dt} \end{aligned}$$

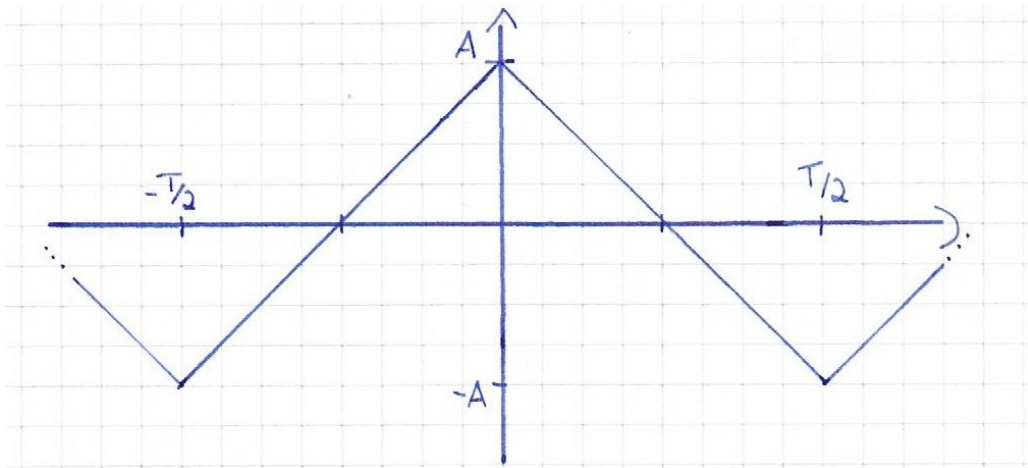


Abbildung 1: Verlauf der Dreiecksspannung

Der letzte Term verschwindet wegen des Integrals des Cosinus über eine volle Periode. Partielle Integration liefert nun:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{8A}{T} \frac{T}{2\pi n} \left[\cancel{t \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right)} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 - \int_{-\frac{T}{2}}^0 \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt - \cancel{t \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right)} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right] \\
 &= \frac{8A}{T^2} \left(\frac{T}{2\pi n} \right)^2 \left[\cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 - \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right] \\
 &= \frac{2A}{\pi^2 n^2} (1 - \cos(-n\pi) - \cos(n\pi) + 1) \\
 &= \frac{4A}{\pi^2 n^2} (1 - \cos(n\pi))
 \end{aligned}$$

und somit:

$$a_n = \frac{8A}{\pi^2 n^2}, n \text{ ungerade.} \quad (5)$$

3.2 Rechtecksspannung

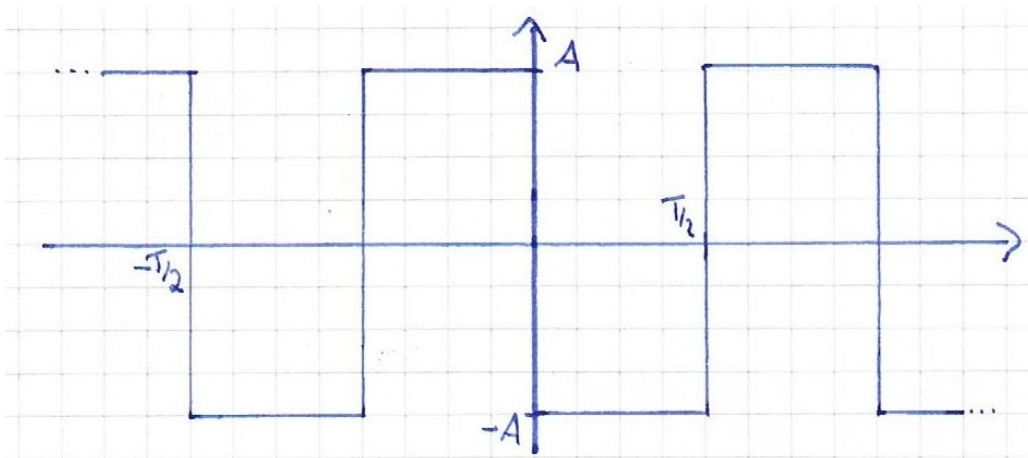


Abbildung 2: Verlauf der Rechtecksspannung

$$f(t) = \begin{cases} A, & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ -A, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

$a_n = 0 \quad \forall n$, da $f(t)$ eine ungerade Funktion ist.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 A \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt - \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \\ &= \frac{2}{T} \left(A \frac{T}{2n\pi} \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 - A \frac{T}{2n\pi} \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \\ &= \frac{A}{n\pi} (\cos(n\pi) - \cos(0) - \cos(0) + \cos(n\pi)) = \frac{2A}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) \end{aligned}$$

und somit:

$$b_n = -\frac{4A}{n\pi}, n \text{ ungerade.} \quad (6)$$

3.3 Sägezahnspannung

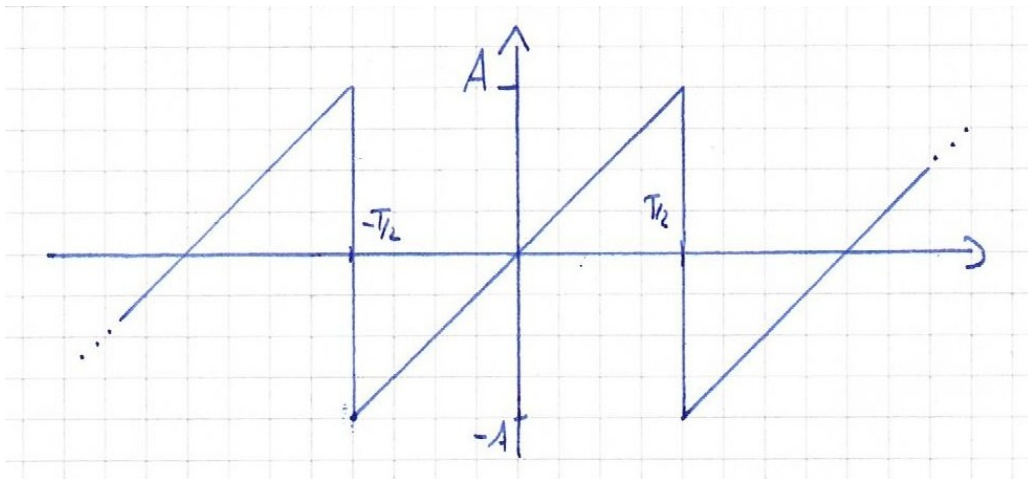


Abbildung 3: Verlauf der Sägezahnspannung

$$f(t) = \frac{2A}{T} t$$

$a_n = 0 \quad \forall n$, da $f(t)$ eine ungerade Funktion ist.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2A}{T} t \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \frac{4A}{T^2} \cdot \left[-\frac{T}{2n\pi} t \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{T}{2n\pi} \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right] \\ &= \frac{A}{n\pi} \cos(n\pi) \end{aligned}$$

und somit:

$$b_n = \frac{A}{n\pi} (-1)^n. \quad (7)$$

4 Durchführung

4.1 Fourier-Synthese

Bei der Fourier-Synthese sollen die drei Spannungstypen aus ihren Komponenten zusammengesetzt werden. Hierfür werden die einzelnen Schwingungen über einen Sinusgenerator erzeugt und zusammengeschaltet. Mit einem Millivoltmeter werden die Amplituden gemäß der theoretischen Berechnung auf die erste Amplitude eingestellt.

Zudem wird die Phasenbeziehung überprüft. An ein Oszilloskop wird die Grundschiwingung an den X-Eingang und die jeweilige Oberschwingung an den Y-Eingang angeschlossen. Die Phase der jeweiligen Oberschwingung wird nun so eingestellt, dass die auf dem Bildschirm sichtbaren Lissajous-Figuren zu einer einzelnen Linie mit zwei Endpunkten wird (vgl. Abbildung 4 links). Die Phase zwischen der Grundschiwingung und der Oberschwingung beträgt nun 0 oder π . Zwischen diesen Phasen kann nicht unterschieden werden, weshalb die einzelnen Schwingungsphasen während der Addition der Schwingungen eventuell noch per Kippschalter verändert werden müssen.

Für die Addition wird der Ausgang des Sinusgenerators an den Oszillographen angeschlossen, die Zeit wird auf der x-Achse dargestellt.

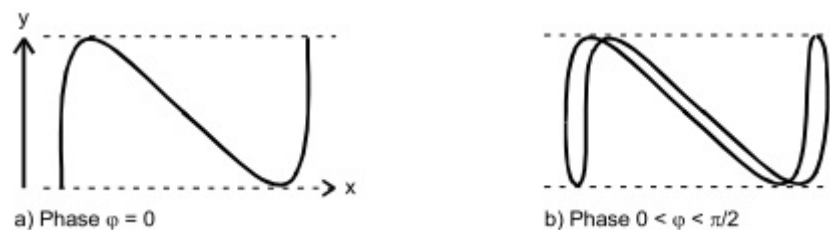


Abbildung 4: Beispiele für Lissajou-Figuren [1]

4.2 Fourier-Analyse

Die Fourier-Analyse wird mit Hilfe der Fourier-Transformation durchgeführt. Mit einem Funktionsgenerator wird ein Signal konstanter Frequenz erzeugt, welches über das Oszilloskop dargestellt wurde. Dieses besitzt im Mathemodus die Funktion, die Fouriertransformation direkt durchzuführen und das Frequenzspektrum der jeweiligen Spannung darzustellen. Es ergibt sich ein Bild ähnlich dem in Abbildung 5. Mittels eines Cursors kann nun für jeden Ausschlag die Amplitude bestimmt werden.

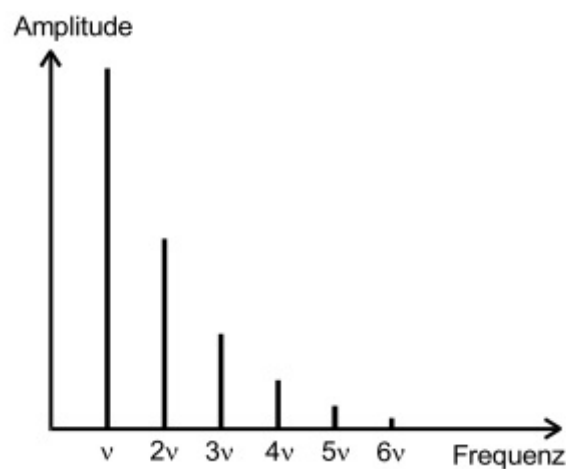


Abbildung 5: Ideales Frequenzspektrum [1]

5 Auswertung und Diskussion

5.1 Fourier-Synthese

Es wurde jeweils für den ersten Kanal des Oberwellengenerators die größtmögliche Spannung eingestellt und gemessen und hieraus jeweils die Spannungen für die folgenden Kanäle errechnet. Diese wurden dann bestmöglich auf diesen Spannungswert eingestellt.

5.1.1 Rechteckspannung

Für die Rechteckspannung wurden nach (5) nur die ungeraden Kanäle verwendet und die Amplitude jeweils auf $\frac{A_1}{n}$ eingestellt. Die theoretisch einzustellenden und die tatsächlich eingestellten Werte finden sich in Tabelle 1, das Ergebnis der zusammengeschalteten Wellen in Abbildung 6.

Kanal n	Gemessen Spannung in V	Theorie Spannung in V	Prozentuale Abweichung
1	0,5841		
3	0,1950	0,1947	0,17
5	0,1170	0,1168	0,17
7	0,0836	0,0834	0,17
9	0,0650	0,0649	0,17

Tabelle 1: Theoretische und tatsächliche Werte für die Rechteckspannung-Synthese

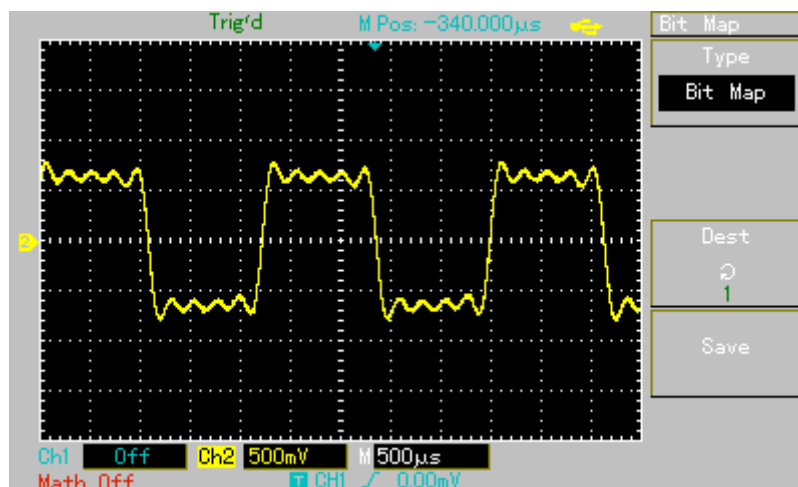


Abbildung 6: Rechteckspannung: Kanäle zusammengeschaltet

Die Synthese ist mit 4 Oberschwingungen (und der Grundschwingung) nicht sehr gut. Dies lässt sich durch die geringe Anzahl der Oberschwingungen erklären. An den Unstetigkeitsstellen erkennt man leichte Überschwingungen, zusätzlich ist dieser Bereich durch eine Gerade mit vergleichsweise großer Steigung angenähert und erstreckt sich über einen breiten Zeitraum.

5.1.2 Sägezahnspannung

Für die Sägezahnspannung wurden entgegen (7) der erste Kanal und die folgenden geraden Kanäle verwendet und die Amplitude jeweils auf $\frac{A_1}{n}$ eingestellt. Die theoretisch einzustellenden und die tatsächlich eingestellten Werte finden sich in Tabelle 3, das Ergebnis der zusammengeschalteten Wellen in Abbildung 7.

Tabelle 2: Theoretische und tatsächliche Werte für die Sägezahnspannung-Synthese

Kanal n	Gemessen Spannung in V	Theorie Spannung in V	Prozentuale Abweichung
1	0,5951		
2	0,2910	0,2976	2,25
4	0,1480	0,1488	0,54
6	0,0979	0,0992	1,31
8	0,0732	0,0744	1,65

Tabelle 3: Theoretische und tatsächliche Werte für die Sägezahnspannung-Synthese

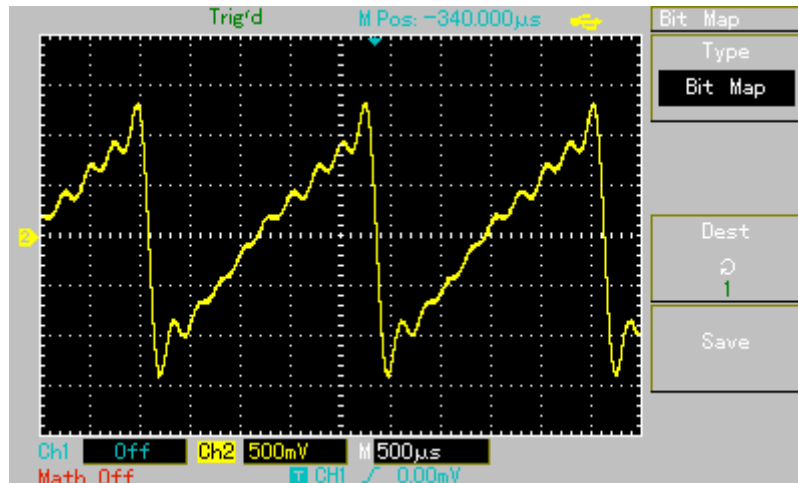


Abbildung 7: Sägezahnspannung: Kanäle zusammenschaltet

Trotz der falschen verwendeten Kanäle ist die Synthese der Sägezahnspannung nicht schlecht. Es treten relativ starke Schwingungen auf den Geraden auf, die allgemeine Form ist jedoch gut nachgebildet. Dies lässt sich erklären, da die Oberwellen in der Stärke des Einflusses auf die Funktion mit steigendem n abnehmen. Die zweite und vierte Oberwelle wurden jedoch verwendet, wodurch die allgemeine Form gegeben wird. Zusätzlich hat die Verwendung der Phasenschalter das Gesamtbild verbessert.

An den Unstetigkeitsstellen treten relativ starke Überschwingungen auf (Gibbsches Phänomen). Die Vermutung liegt nahe, dass mit 9 Oberwellen die Sägezahnfunktion sehr gut angenähert werden würde.

5.1.3 Dreieckspannung

Für die Dreieckspannung wurden entgegen (6) alle Kanäle verwendet und die Amplitude jeweils auf $\frac{A_1}{n^2}$ eingestellt. Die theoretisch einzustellenden und die tatsächlich eingestellten Werte finden sich in Tabelle 4, das Ergebnis der zusammenschalteten Wellen in Abbildung 8.

Diese Schwingung ist sehr gut angenähert, obwohl anstatt der ungeraden Oberwellen alle neun verwendet wurden. Dies lässt sich erklären, weil die Amplituden mit $\frac{1}{n^2}$ abfallen und daher die höheren Oberwellen kaum noch ins Gewicht fallen.

Kanal n	Gemessen Spannung in V	Theorie Spannung in V	Prozentuale
1	0,5851		
2	0,1463	0,1463	0,02
3	0,0664	0,0650	2,14
4	0,0359	0,0366	1,98
5	0,0241	0,0234	2,89
6	0,0165	0,0163	1,62
7	0,0120	0,0119	0,24
8	0,0092	0,0091	0,09
9	0,0071	0,0072	1,17

Tabelle 4: Theoretische und tatsächliche Werte für die Dreieckspannung-Synthese

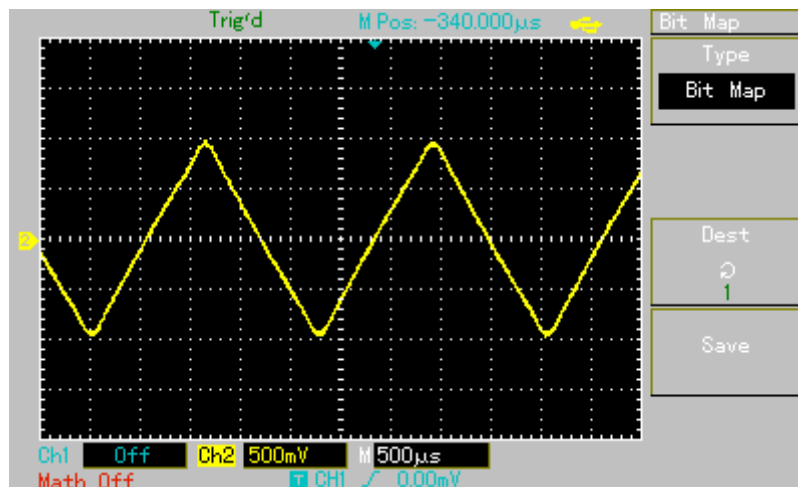


Abbildung 8: Dreieckspannung: Kanäle zusammengeschaltet

5.2 Fourier-Analyse

Das Signal des Funktionsgenerators wird mit dem Oszilloskop angezeigt. Die erzeugte Funktion ist dabei sehr gut. Nun kann direkt das Frequenzspektrum der generierten Funktion wie in Abbildung 5 angezeigt und mit einem Cursor der Maximalwert eines jeden Ausschlags bestimmt werden.

5.2.1 Rechteckspannung

Für die Rechteckspannung ergaben sich die in Tabelle 5 aufgeführten Werte für die Amplitude der Teilschwingungen. Für die ersten Teilschwingungen ist das Spektrum in Abbildung 9 zu sehen.

5.2.2 Sägezahnspannung

Für die Sägezahnspannung ergaben sich die in Tabelle 6 aufgeführten Werte für die Amplitude der Teilschwingungen. Für die ersten Teilschwingungen ist das Spektrum in Abbildung 10 zu sehen.

5.2.3 Dreieckspannung

Für die Dreieckspannung ergaben sich die in Tabelle 7 aufgeführten Werte für die Amplitude der Teilschwingungen. Für die ersten Teilschwingungen ist das Spektrum in Abbildung 11 zu sehen.

Kanal n	Spannung in V	Prozentuales Verhältnis	Theoretisches Verhältnis	Abweichung
1	3,68	100,00	100,00	0,00
3	1,18	32,07	33,33	3,80
5	0,66	17,93	20,00	10,33
7	0,51	13,80	14,29	3,37
9	0,40	10,98	11,11	1,20

Tabelle 5: Rechteck: Amplituden einiger Teilschwingungen der generierten Funktion und praktisches wie theoretisches Verhältnis zur ersten Amplitude in Prozent

Kanal n	Spannung in V	Prozentuales Verhältnis	Theoretisches Verhältnis	Abweichung
1	1,78	100,00	100,00	0,00
2	0,86	48,09	50,00	3,82
3	0,62	34,61	33,33	3,82
4	0,46	25,62	25,00	2,47
5	0,33	18,43	20,00	7,87
6	0,30	16,63	16,67	0,22
7	0,26	14,72	14,29	3,03
8	0,23	12,81	12,50	2,47
9	0,19	10,56	11,11	4,94

Tabelle 6: Sägezahn: Amplituden einiger Teilschwingungen der generierten Funktion und praktisches wie theoretisches Verhältnis zur ersten Amplitude in Prozent

Kanal n	Spannung in V	Prozentuales Verhältnis	Theoretisches Verhältnis	Abweichung
1	2,28	100,00	100,00	0,00
3	0,26	11,49	11,11	3,42
5	0,09	3,82	4,00	4,39
7	0,05	2,04	2,04	0,28
9	0,03	1,16	1,23	6,21

Tabelle 7: Dreieck: Amplituden einiger Teilschwingungen der generierten Funktion und praktisches wie theoretisches Verhältnis zur ersten Amplitude in Prozent

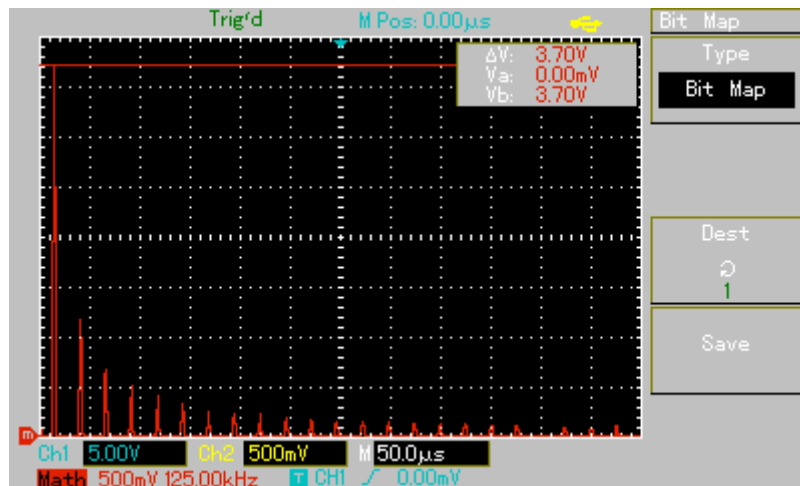


Abbildung 9: Frequenzspektrum der generierten Rechteckspannung

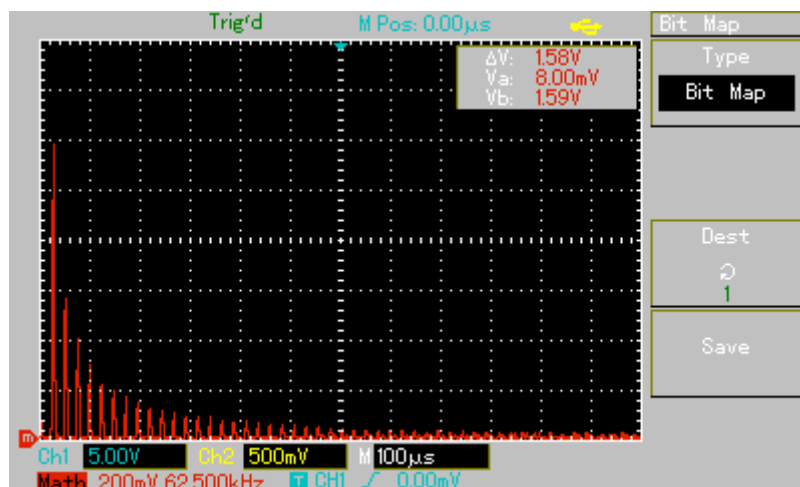


Abbildung 10: Frequenzspektrum der generierten Sägezahnspannung

5.2.4 Diskussion

Die vom Funktionsgenerator erstellten Spannungen sind sehr nah an der idealen Vorstellung. Die Flanken der erstellten Resonanzkurve fallen zudem stark ab, was auf eine genaue Messapparatur schließen lässt.

Bei der Dreieckspannung kann man deutlich sehen, dass die Amplituden mit $\frac{1}{n^2}$ abfallen und nicht wie bei der Rechteck- und Sägezahnspannung mit $\frac{1}{n}$.

Die bestimmten Amplituden stimmen außerdem sehr genau mit den theoretisch berechneten überein.

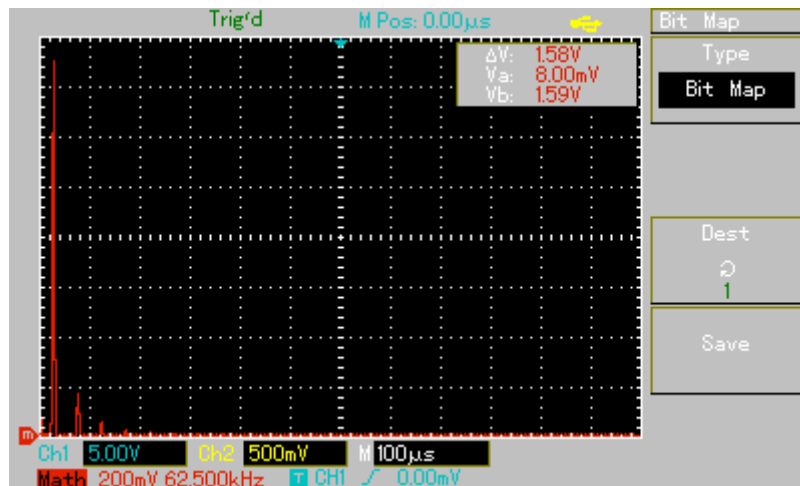


Abbildung 11: Frequenzspektrum der generierten Dreiecksspannung

6 Quellen

- [1] Skript zum Versuch 351 des physikalischen Anfängerpraktikums an der TU Dortmund zu finden unter:

<http://129.217.224.2/HOME PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V351.pdf> (Stand 12.12.2012)

$$n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_4}{\lambda^4} + \dots \quad \text{mit } A_i > 0 \text{ für } \lambda \gg \lambda_1 \quad (8)$$

$$n^2(\lambda) = 1 - A'_2\lambda^2 - A'_4\lambda^4 + \dots \quad \text{mit } A'_i > 0 \text{ für } \lambda \ll \lambda_1 \quad (9)$$

$$(10)$$