Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung 3

2 Theorie 3

3 Fehlerrechnung 4

4 Durchführung 5

5 Auswertung 5

6 Diskussion 9

Literatur 9

1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird die Apperaturkonstante des verwendeten Viskosimeters und einer zugehörigen Kugel bestimmt. Zusätzlich soll die Reynoldzahl bestimmt werden und beurteilt werden, ob die Flüssigkeit sich laminar verhält. Weiterhin wird die Temperaturabhängigkeit der Viskosität der verwendeten Flüssigkeit untersucht.

2 Theorie

Bewegt sich ein Körper, in diesem Versuch eine Kugel, durch eine Flüssigkeit, so wirken mehrere Kräfte auf ihn. Zum Einen die Gewichtskraft $\vec{F}_{\mathrm{G}}$, die senkrecht nach unten wirkt. Dem entgegen wirkt die Auftriebskraft $\vec{F}_{\mathrm{A}}$, welche proportional zur verdrängten Flüssigkeitsmenge ist. Zusätzlich wirkt die Reibungskraft $\vec{F}_{\mathrm{R}}$ auf den Körper, die immer entgegen der Bewegungsrichtung zeigt. Bevor auf die Reibungskraft näher eingegangen werden kann, ist es wichtig zu klären, ob sich in der Flüssigkeit Wirbel bilden, wenn die Kugel sich durch diese bewegt. Treten diese Wirbel auf, so wird von einer turbulenten Strömung gesprochen. Im gegenteiligen Fall, wenn die Wirbel also nicht auftreten, wird die Strömung als laminar bezeichnet. Um entscheiden zu können, ob eine Flüssigkeit laminar oder turbulent ist, wird die Reynoldszahl[3, S. 99] Re verwendet:

$$Re := \frac{\rho v d}{\eta}. \tag{1}$$

Dabei ist ρ die Dichte der Flüssigkeit, v die mittlere Geschwindigkeit der Kugel, d der Durchmesser des Rohres, welcher in diesem Versuch durch den Durchmesser der großen Kugel genähert wird und η die Viskosität der Flüssigkeit. Diese ist eine für die jeweilige Flüssigkeit charakteristische Größe, welche stark von der Temperatur abhängt:

$$\eta(T) = A\mathrm{e}^{\left(\frac{B}{T}\right)}, \tag{2}$$

wobei A und B zu bestimmende Konstanten sind. Die Gleichung wird Andradesche Gleichung genannt. Ist die Reynoldszahl kleiner als ein kritischer Wert, so tritt laminare Strömung auf. Ist sie hingegen größer, so kann entsprechend turbulente Strömung auftreten. Liegt eine solche laminare Strömung vor, so lässt sich die Reibung durch folgende Formel beschreiben:

$$F_{\mathrm{R}} = 6\pi\eta v r, \tag{3}$$

mit r als Kugelradius. Diese Reibung wird auch als Stokessche Reibung bezeichnet und beschreibt die Reibung zwischen den Flüssigkeitsschichten. Da die Reibungskraft proportional zu der Geschwindigkeit der Kugel ist, bildet sich nach einiger Zeit ein Gleichgewicht zwischen Gewichtskraft, Auftriebskraft und Reibungskraft. Die Kugel bewegt sich dann mit einer konstanten Geschwindigkeit.

In diesem Versuch wird das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler verwendet. Dabei fällt eine Glaskugel durch ein vom Durchmesser nur geringfügig größeres, mit destilliertem Wasser gefülltes, Rohr. Um Wirbel zu vermeiden, wird das Fallrohr leicht geneigt, sodass die Kugel also gleichmäßig an einer Seite hinabrutscht. Die Viskosität des Wassers lässt sich dann über die Fallzeit und einige Gerätekonstanten bestimmen:

$$\eta = K(\rho_{\mathrm{K}} - \rho_{\mathrm{Fl}})t. \tag{4}$$

Der Proportionalitätsfaktor K geht dabei sowohl auf die Fallhöhe, als auch auf die Kugelgeometrie ein.

3 Fehlerrechnung

Im Folgenden werden alle Mittelwerte mit folgender Formel bestimmt:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i. \tag{5}$$

Der zugehörige Fehler des Mittelwertes berechnet sich mit

$$\Delta\overline{x} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}. \tag{6}$$

Werden fehlerbehaftete Größen in einer späteren Formel benutzt, so wird der neue Fehler mit Hilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung angegeben:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}. \tag{7}$$

Eventuelle Ausgleichsgeraden berechnen sich über

$$y = a \cdot x + b \tag{8a}$$

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \tag{8b}$$

$$b = \frac{\overline{x^2}\,\overline{y} - \overline{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}. \tag{8c}$$

Die Regression sowohl von Ausgleichsgeraden als auch von anderen Polynomen, sowie die Bestimmung der zugehörigen Fehler, wird mit iPython 2.1.0 durchgeführt.

4 Durchführung

Zunächst werden zwei Glaskugeln unterschiedlicher Größe jeweils drei mal gewogen und ihr Radius r wird ebenfalls drei mal gemessen.

Das in Abbildung 1 zu sehende Viskosimeter wird so justiert, dass es gerade steht. Dies kann mit der Libelle überprüft werden. Das Rohr wird mit destilliertem Wasser vollständig gefüllt und eventuelle Luftblasen werden mit einem Glasstab heraus gezogen. Zuletzt wird die kleinere Kugel hineingegeben, wobei darauf zu achten ist, dass erneut keine Luftblasen eingeschlossen werden. Das Rohr wird verschlossen. Das Viskosimeter wird um 180° gedreht und die Zeit, die die Kugel von der obersten bis zur untersten Linie benötigt, wird gestoppt. Dieser Vorgang wird wiederholt, bis mindestens 10 Messwerte notiert sind. Die kleine Kugel wird herausgenommen und der gesamte Vorgang wird mit der größeren Kugel wiederholt. Diese wird allerdings nach Aufnahme der 10 Messwerte nicht aus dem Rohr entfernt.

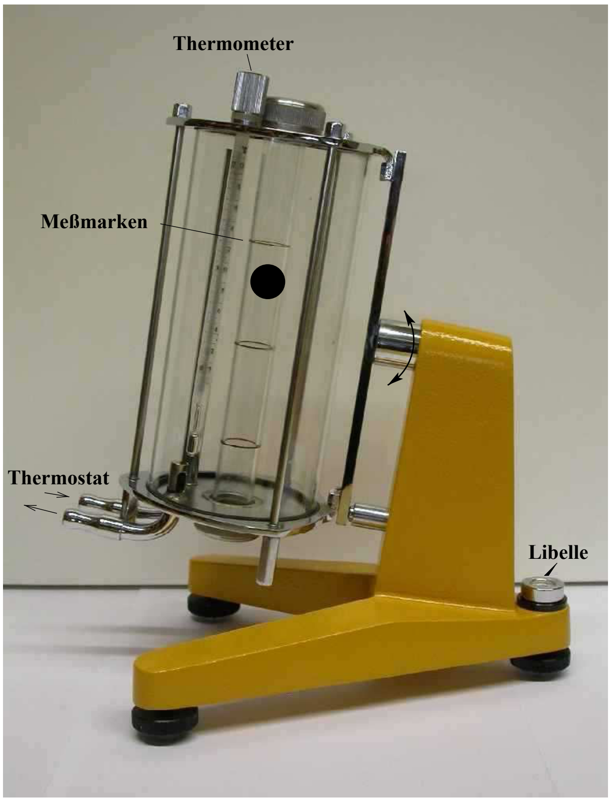

Abbildung 1: Darstellung des verwendeten Viskosimeters[1, S. 2].

Das Fallrohr wird mit Hilfe des Wasserbades, in dem es sich befindet, schrittweise auf bis zu 70 °C erhitzt. Die Schritte sollten dabei so angepasst sein, dass für mindestens zehn Temperaturen Werte gemessen werden können. Bei jedem Schritt konstanter Temperatur, wird erneut zwei Mal die Fallzeit der Kugel gemessen. Zusätzlich muss über das Thermometer die zugehörige Temperatur notiert werden.

5 Auswertung

Die Masse m_{kl} der kleinen Kugel, die Apparatekonstante K_{kl} und die Falllänge L wurden der Versuchsanleitung[1, S. 3] entnommen. Diese, sowie die weiteren gemessenen

Geometriedaten lauten:

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{kl}} &= 4{,}4531 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \\ m_{\mathrm{gr}} &= (5{,}0 \pm 0{,}0) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \\ r_{\mathrm{kl}} &= (7{,}8 \pm 0{,}0) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \\ r_{\mathrm{gr}} &= (7{,}9 \pm 0{,}0) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \\ K_{\mathrm{kl}} &= 7{,}640 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{Pa\,m^3}}{\mathrm{kg}} \\ L &= 0{,}1\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Die sich daraus ergebenen Dichten lauten:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{kl}} &= \frac{3m_{\mathrm{kl}}}{4\pi r_{\mathrm{kl}}^3} = 2240{,}2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \\ \rho_{\mathrm{gr}} &= \frac{3m_{\mathrm{gr}}}{4\pi r_{\mathrm{gr}}^3} = 2421{,}0\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}. \end{aligned}$$

Die Dichte von Wasser bei 20 °C beträgt[3, S. 290]:

$$\rho_{\mathrm{Fl}} = 998{,}21\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}.$$

Um die Apparatekonstante K_{gr} des Viskosimeters mit der großen Kugel zu ermitteln, wird zunächst die Viskosität η nach (4) mit den Daten der kleinen Kugel bestimmt. Der dafür benötigte Wert für die Zeit t wird aus Tabelle 1 ermittelt:

$$\bar{t}_{\mathrm{kl}} = (12{,}76 \pm 0{,}03)\,\mathrm{s}.$$

Für die Viskosität ergibt sich entsprechend:

$$\eta = (1{,}211 \pm 0{,}002) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}.$$

Für K_{gr} wird (4) nach eben dieser Größe umgestellt. Der in der Rechnung benötigte Wert für die Zeit t wird erneut aus Tabelle 1 ermittelt:

$$\bar{t}_{\mathrm{gr}} = (83{,}03 \pm 0{,}13)\,\mathrm{s}.$$

Es gilt also:

$$K_{\mathrm{gr}} = \frac{\eta}{(\rho_{\mathrm{gr}} - \rho_{\mathrm{Fl}})t} = (1{,}025 \pm 0{,}003) \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{Pa\,m^3}}{\mathrm{kg}}.$$

Um die Temperaturabhängigkeit der Viskosität zu bestimmen, wird die Viskosität nach (4) mit der oben berechneten Apparaturkonstante mehrmals berechnet, zu sehen in Tabelle 2. Für die Dichte des Wassers wurden erneut Literaturdaten[3, S. 290] verwendet. Der Logarithmus der Viskosität wird gegen den Kehrwert der Temperatur abgetragen, zu

Tabelle 1: Fallzeiten der kleinen und großen Kugel.

kleine Kugel t / s	große Kugel t / s
12,64	82,58
12,64	82,30
12,72	82,60
12,80	83,62
12,72	83,04
12,76	83,32
12,92	83,06
12,78	83,44
12,80	83,50
12,84	82,88

Tabelle 2: Messdaten zur Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität.

Temperatur	Fallzeit	Dichte Wasser	Viskosität	Daten für den Graphen	
T / K	t / s	ρ_{Fl} / $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$	η / $10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$	$\ln\left(\frac{\eta}{\mathrm{Pa\,s}}\right)$	$\frac{1}{T}$ / $10^{-3}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$
293,15	83,50	998,21	$1{,}218 \pm 0{,}003$	$-6{,}711$	3,411
293,15	82,88	998,21	$1{,}209 \pm 0{,}003$	$-6{,}718$	3,411
306,15	63,62	995,65	$0{,}930 \pm 0{,}002$	$-6{,}980$	3,266
306,15	63,38	995,65	$0{,}926 \pm 0{,}002$	$-6{,}985$	3,266
309,15	61,38	994,0	$0{,}898 \pm 0{,}002$	$-7{,}015$	3,235
309,15	61,46	994,0	$0{,}899 \pm 0{,}002$	$-7{,}014$	3,235
313,15	55,28	992,2	$0{,}810 \pm 0{,}002$	$-7{,}118$	3,193
313,15	56,10	992,2	$0{,}822 \pm 0{,}002$	$-7{,}104$	3,193
318,15	53,00	990,2	$0{,}777 \pm 0{,}002$	$-7{,}160$	3,143
318,15	52,42	990,2	$0{,}7688 \pm 0{,}0020$	$-7{,}171$	3,143
323,15	47,22	988,0	$0{,}6936 \pm 0{,}0018$	$-7{,}274$	3,095
323,15	47,60	988,0	$0{,}6992 \pm 0{,}0018$	$-7{,}266$	3,095
328,15	44,92	985,7	$0{,}6609 \pm 0{,}0017$	$-7{,}322$	3,047
328,15	45,04	985,7	$0{,}6626 \pm 0{,}0017$	$-7{,}319$	3,047
333,15	41,40	983,2	$0{,}6101 \pm 0{,}0016$	$-7{,}402$	3,002
333,15	41,40	983,2	$0{,}6101 \pm 0{,}0016$	$-7{,}402$	3,002
338,15	39,00	980,6	$0{,}5758 \pm 0{,}0015$	$-7{,}460$	2,957
338,15	39,44	980,6	$0{,}5823 \pm 0{,}0015$	$-7{,}449$	2,957
343,15	35,80	977,8	$0{,}5296 \pm 0{,}0014$	$-7{,}543$	2,914
343,15	35,92	977,8	$0{,}5314 \pm 0{,}0014$	$-7{,}540$	2,914

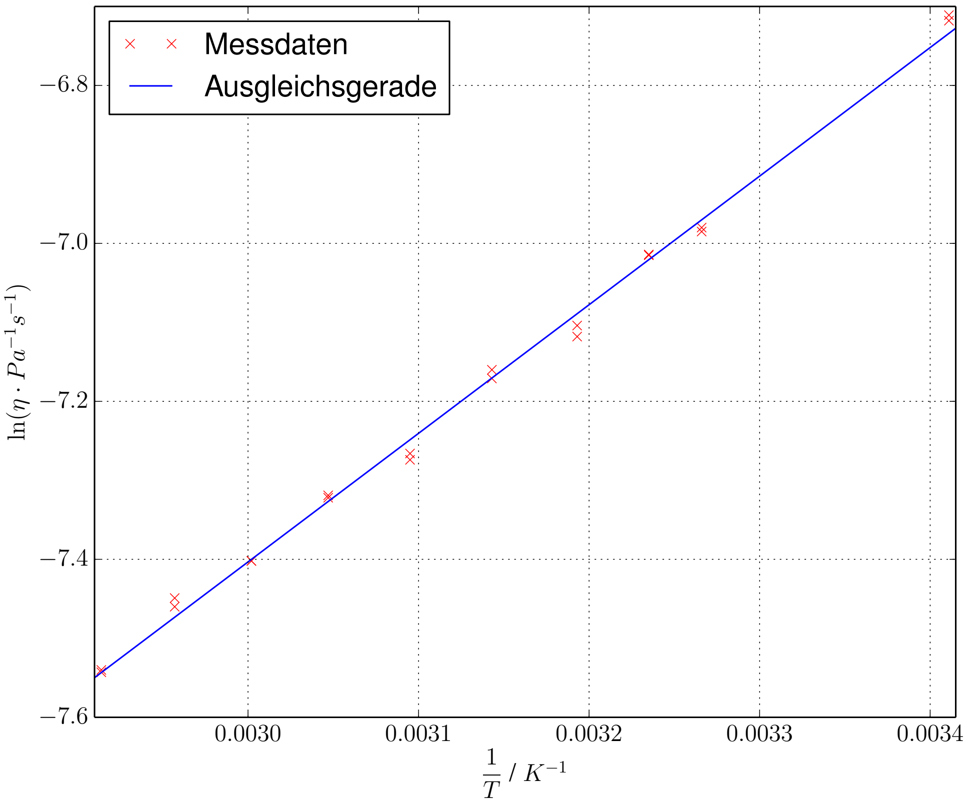

Abbildung 2: Ausgleichsrechnung zur Bestimmung der Konstanten der Andradeschen Gleichung.

sehen in Abbildung 2. Dadurch lassen sich die Konstanten der Andradeschen Gleichung bestimmen:

$$\begin{aligned} \eta(T) &= A\mathrm{e}^{\left(\frac{B}{T}\right)} \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{\eta}{10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}}\right) &= \ln\left(\frac{A}{10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}}\right) + B \cdot \frac{1}{T} \\ A &= (4{,}6 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Pa\,s} \\ B &= (1630 \pm 20)\,\mathrm{K}. \end{aligned} \tag{9}$$

Im letzten Auswertungsteil wird überprüft, ob die Strömung wirklich laminar ist. Dafür wird (1) verwendet und geprüft, ob diese Zahl kleiner als 1160 ist[3, S. 99]. Da die Zahl proportional zu $\frac{1}{t\eta}$ ist und die Dichte des Wassers nur leicht abfällt, reicht es für die große Kugel aus, den Wert bei der höchsten Temperatur und damit der geringsten gemessenen

Fallzeit zu überprüfen:

$$Re = \frac{\rho 2 r L}{t\eta}$$

$$\text{kleine Kugel:} \qquad Re = 100{,}8 \pm 0{,}3$$

$$\text{große Kugel:} \qquad Re = 81{,}4 \pm 0{,}5.$$

Da beide Werte deutlich kleiner als 1160 sind, ist davon auszugehen, dass das Strömungsverhalten bei beiden Kugeln laminar ist.

6 Diskussion

Es zeigt sich ein sehr kleiner Fehler bei der Apperaturkonstanten K_{gr}. Dies lässt auf eine prinzipiell genaue Messung schließen. Allerdings weicht der Wert für die Viskosität von Wasser bei Raumtemperatur um etwa 20 % vom Literaturwert ab. Da der gemessene Wert höher als der erwartete Wert ist, ist zu vermuten, dass sich das Rohr nicht vollständig von Luftblasen befreien lies oder eine geringe Reibung zwischen Glaskugel und der geneigten Rohrwand als systematische Fehlerquelle auftrat. Eventuelle Wirbel als Fehlerquelle sind auszuschließen, da die Reynoldzahlen deutlich unter den kritischen Werten lagen.

Die Ausgleichsgrade zur Bestimmung der Konstanten der Andradeschen Gleichung liegt nah an den Messwerten und kann, bis auf die oben genannten systematischen Fehler, als richtig vermutet werden. Werden diese Werte mit Literaturdaten[2] verglichen, so verstärkt sich diese Vermutung. Die Konstante B hat eine Abweichung von etwa 20 %. Die hohe Abweichung um etwa 77 % der Konstanten A stammt vermutlich durch die logarithmische Auswertung und eine damit verbundene, nichtlineare Vergrößerung der Fehler.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 107, Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler*. 15. Jan. 2015. eprint: `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Viskositaet.pdf`.

[2] CHEMIE.DE Information Service GmbH. *Andrade-Gleichung*. 21. Jan. 2015. eprint: `http://www.chemie.de/lexikon/Andrade-Gleichung.html`.

[3] Dieter Geschke (Hrsg.) In: *Physikalisches Praktikum* 12 (2001).