

V351

Fourier-Analyse und Synthese

Evelyn Romanjuk
evelyn.romanjuk@tu-dortmund.de

Ramona-Gabriela Kallo
ramonagabriela.kallo@tu-dortmund.de

Durchführung: 24.11.17

Abgabe: 01.12.17

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
3 Durchführung	4
3.1 Vorbereitung	4
3.1.1 Rechteckfunktion	4
3.1.2 Sägezahnfunktion	5
3.1.3 Dreieckfunktion	6
3.2 Fourier-Analyse	7
3.3 Fourier-Synthese	7
4 Auswertung	9
4.1 Fourier-Analyse: Fourier-Transformation	9
4.1.1 Rechteckspannung	9
4.1.2 Dreieckspannung	10
4.1.3 Sägezahnspannung	10
4.2 Fourier-Synthese	11
4.2.1 Sägezahnspannung	11
4.2.2 Dreiecksspannung	12
4.2.3 Rechteckspannung	13
5 Diskussion	13
Literatur	14

1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden verschiedene Schwingungsformen aus Sinus- und Cosinus-Thermen zusammengesetzt, sowie periodische Schwingungen in ihre Fourier-Komponenten zerlegt. Jede periodische Funktion lässt sich als Summe aus Sinus- und Cosinus-Thermen darstellen.

2 Theorie

Periodische Funktionen, die nach einem Zeitraum T oder nach der Distanz D zu ihrem Ausgangswert zurückkehren und den Ablauf wiederholen, werden beschrieben als:

$$\begin{aligned}f(t+T) &= f(t) \\f(x+D) &= f(x).\end{aligned}$$

Sie besitzen einen periodisch zeitlichen als auch einen periodisch räumlichen Vorgang. Dies können nur Sinus- oder Cosinusfunktionen sein. Die beiden Funktionen mit einer Periodendauer T und einer Amplitude a bzw. b werden dargestellt als:

$$f(t) = a \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (1)$$

$$f(t) = b \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \quad (2)$$

Mit Hilfe dieser beiden Funktionen werden alle anderen periodischen Vorgänge in der Natur beschrieben. Das Fouriersche Theorem besagt, dass sich eine Funktion $f(t)$ der Periode T darstellen lässt als:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) \right) \quad (3)$$

solange diese Reihe gleichmäßig konvergiert. Die Koeffizienten a_n und b_n berechnen sich gemäß:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) dt \quad (4)$$

und

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) dt \quad (5)$$

mit $n = 1, 2, \dots$ Es treten als Frequenz somit nur ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz auf:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Diese werden auch als harmonische Oberschwingungen bezeichnet. In 3 können nur die Phasen 0 , π , $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ vorkommen. Wenn die Fourierkoeffizienten a_n und b_n als Funktion gegen das Frequenzspektrum aufgetragen werden, was die Amplituden der Oberschwingungen darstellt, ergibt sich das jeweilige Frequenzspektrum. Dies ist in der

Abbildung 4 zu sehen. Dieses ist bei periodischen Funktionen ein Linienspektrum, dessen Amplituden mit steigender Frequenz sinken. Bei nichtperiodischen Funktionen ergibt sich ein kontinuierliches Spektrum. Diese Koeffizienten werden bei der Fourier-Analyse gesucht. Wenn in der Gleichung 3 Unstetigkeitsstellen auftreten, so lässt sich die Funktion an den Stellen nicht approximieren und es ergeben sich Abweichungen, die mit steigender Anzahl von Oberschwingungsthermen nicht geringer werden. Dieses wird als Gibbsches Phänomen bezeichnet. Mit Hilfe einer Fourier-Transformation ist es möglich das gesamte Spektrum einer zeitabhängigen Funktion zu ermitteln. Die Funktion ist gegeben als:

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\nu t} dt \quad (6)$$

wobei g_ν das Frequenz der Spektrum darstellt. g_ν besteht aus einer (konvergierenden) Reihe von δ -Funktionen. Die Umkehrfunktion lässt sich schreiben als:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)e^{-i\nu t} d\nu.$$

In diesem Fall ist es praktisch nicht möglich über unendliche Zeiträume zu integrieren, denn es treten Abweichungen für die exakten Ergebnissen auf. Die Funktion wird also nur für einen endlichen Zeitraum betrachtet. Dafür ergibt sich ein Linienspektrum mit Linien endlicher Breite. g besitzt keine δ -Funktionen mehr sondern nur stetige und differenzierbare Funktionen und es bilden sich Nebenmaxima aus.

3 Durchführung

3.1 Vorbereitung

Zur Vorbereitung des Versuches sollten die Fourier-Koeffizienten von drei periodischen Funktionen bestimmt werden. Bei den ausgewählten Funktionen (Sägezahn, Dreieck, Rechteck) wurde eine Vereinfachung vorgeschlagen, so dass es sich nur um gerade oder ungerade Funktionen handeln soll.

Eine gerade Funktion ist definiert als:

$$f(t) = f(-t)$$

Bei diesem Typ verschwindet der Koeffizient b_n .

Eine ungerade Funktion ist definiert als:

$$f(t) = -f(-t)$$

Allerdings verschwindet hier der Koeffizient a_n .

3.1.1 Rechteckfunktion

Die Funktion lautet:

$$f(t) = \begin{cases} A, & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ -A, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Daraus folgt, dass $a_n = 0$ ist, weil $f(t)$ eine ungerade Funktion nach 3.1 ist. Nun wird der Koeffizient b_n nach der Gleichung 1 berechnet:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 A \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt - \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \\
 &= \frac{2}{T} \left(A \frac{T}{2n\pi} \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right) \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 - \frac{2}{T} \left(A \frac{T}{2n\pi} \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{A}{n\pi} (\cos(n\pi) - \cos(0) - \cos(0) + \cos(n\pi)) \\
 &= \frac{2A}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1)
 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für b_n :

$$b_n = -\frac{4A}{n\pi} (-1)^n, \quad (7)$$

wobei n ungerade ist und die Funktion ist in der Abbildung 1 zu sehen.

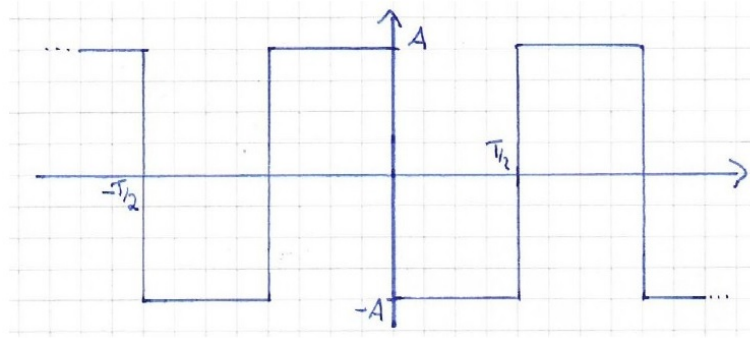


Abbildung 1: Abbildung zur Rechtecksfunktion

3.1.2 Sägezahnfunktion

Die Funktion ist in der Abbildung 2 zu sehen und wird gegeben als:

$$f(t) = \frac{2A}{T} t$$

mit $a_n = 0$, da $f(t)$ eine ungerade Funktion nach 3.1 ist. Nun wird hier der Koeffizient auch nach der Gleichung 1 berechnet. Der letzte Term verschwindet wegen des Integrals des Cosinus über eine volle Periode.

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2A}{T} t \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \frac{4A}{T^2} \cdot \left[-\frac{T}{2n\pi} t \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{T}{2n\pi} \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right] \\
 &= \frac{A}{n\pi} \cos(n\pi)
 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich:

$$b_n = An\pi(-1)^n. \quad (8)$$

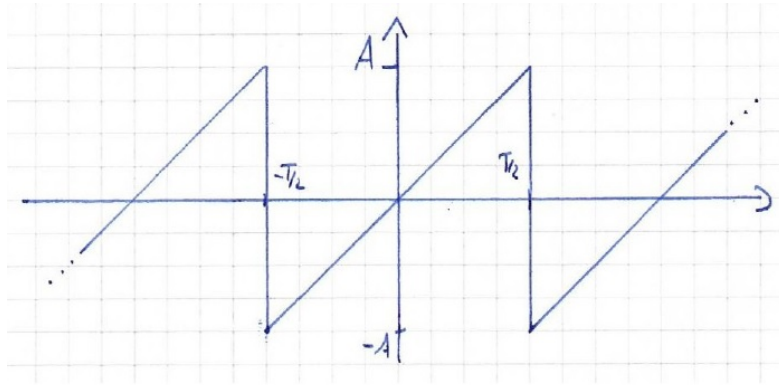


Abbildung 2: Abbildung zur Sägezahnfunktion

3.1.3 Dreieckfunktion

Es erfolgt auch hier die gleiche Berechnung wie bei der Sägezahn- und Rechteckfunktion. Hier wird angenommen, dass es sich um eine gerade Funktion nach 3.1 handelt. Die Funktion lautet:

$$f(t) = \begin{cases} +\frac{4A}{T}t + A, & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ -\frac{4A}{T}t + A, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Damit verschwinden alle b_n , also $b_n = 0$. Die Funktion ist in der Abbildung 3 zu sehen. Nach der Gleichung 1 wird a_n berechnet:

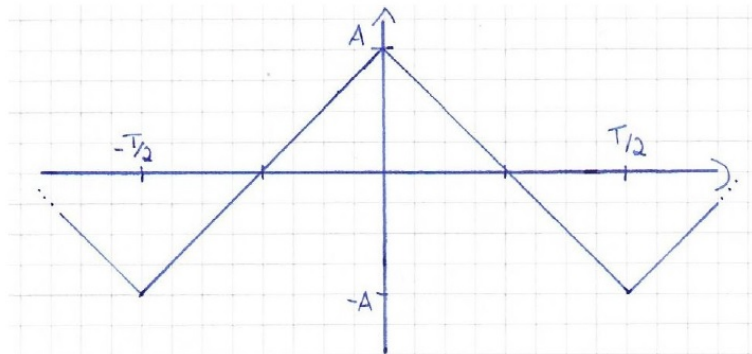


Abbildung 3: Abbildung zu der Dreieckfunktion

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos\left(n \frac{2\pi t}{T}\right) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 \frac{4A}{T} t \cdot \cos\left(n \frac{2\pi t}{T}\right) dt - \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{4A}{T} t \cdot \cos\left(n \frac{2\pi t}{T}\right) dt + \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 2A \cos\left(n \frac{2\pi t}{T}\right) dt \end{aligned}$$

Hier verschwindet ebenfalls der letzte Term wegen des Integrals des Cosinus über volle Periode. Daher ergibt sich:

$$a_n = \frac{8A}{\pi^2 n^2} \quad (9)$$

wobei n ungerade ist.

3.2 Fourier-Analyse

Die Fourier-Analyse wird mit Hilfe der Fourier-Transformation durchgeführt. Es sollen hier die drei ausgewählten Funktionen (Sägezahn, Dreieck, Rechteck) mittels Fourier-Analyse untersucht werden. In erster Reihe steht ein Funktionsgenerator zur Verfügung, welcher an einem Oszilloskop angeschlossen wird und ein Signal konstanter Frequenz erzeugt, welches ebenfalls über das Oszilloskop dargestellt wird. Das Oszilloskop besitzt im Mathemodus die Funktion, die Fourier-Transformation durchzuführen und das Frequenzspektrum der jeweiligen Spannung darzustellen. Für jede Spannung bzw. Funktion ergibt sich ein Linienspektrum wie in der Abbildung 4. Mit einem Cursor werden die Amplituden bestimmt, die Messwerte abgelesen und dann notiert. Am Ende wird dann auch die Frequenz aufgeschrieben.

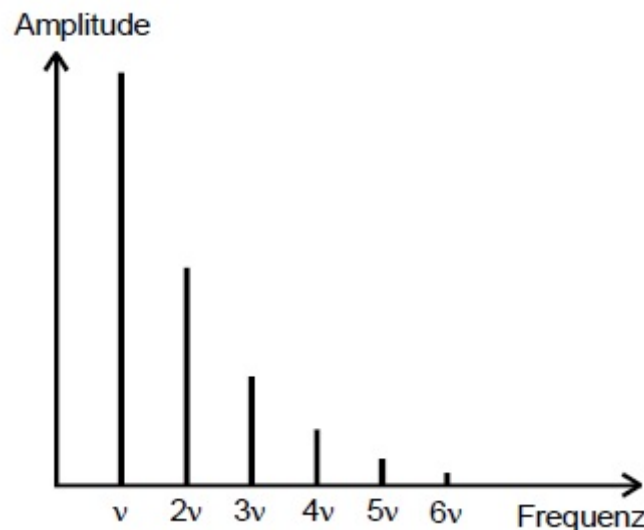


Abbildung 4: Ideales Linienspektrum periodischer Funktionen,[1, S. 1].

3.3 Fourier-Synthese

Bei der Fourier-Synthese werden die drei Spannungstypen aus ihren Komponenten bis $n = 9$ oder 10 zusammengesetzt. Für diesen Teil der experimentellen Betrachtung wird ein Oberwellengenerator benutzt, der die einzelnen Schwingungen erzeugt und zusammenschaltet. Der Generator wird ebenfalls auch mit dem Voltmeter verbunden und muss in XY-Betrieb geschaltet werden um die Phasen bestimmen zu können. Zudem wird

die Phasenbeziehung überprüft. An dem X-Eingang wird die 1. Grundschiwingung und an dem Y-Eingang die jeweilige Oberschiwingung angeschlossen. Die Phase der jeweiligen Oberschiwingung wird nun so lange eingestellt, bis sich die Lissajous-Figur zu einer einzelnen Linie mit zwei Endpunkten ausgebildet hat. (vgl. Abbildung 5 links) Die Phase

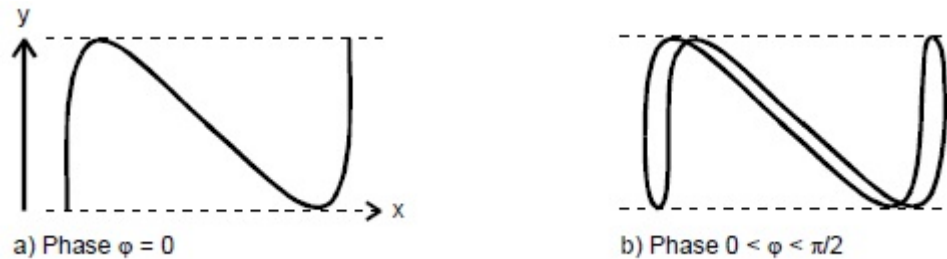


Abbildung 5: Zwei Beispiele für Lissajous-Figuren, [1, S. 7].

beträgt jetzt nun 0 oder π . Zwischen diesen Phasen kann nicht unterschieden werden, weshalb die einzelnen Schwingungsphasen während der Addition der Schwingungen eventuell noch per Kippschalter verändert werden müssen. Im nächsten Schritt werden die Koeffizienten der drei Funktionen aus Kapitel 3.1 betrachtet. Bei der Berechnung für die Rechteckspannung und für die Sägezahnspannung hat sich herausgestellt, dass die beiden Funktionen jeweils mit $\frac{1}{n}$ abfallen. Der einzige Unterschied liegt bei der Dreieckspannung wo die Funktion mit $\frac{1}{n^2}$ abfällt. Die Amplituden der Oberwellen werden eingeregelt und die Ausgänge der Oberwellengenerators werden an ein AC-Millivoltmeter angeschlossen.

Entsprechend wird danach mit Hilfe des Ausgangs "Summenschwingung" des Generators eine Verbindung zum Oszilloskop gemacht und in "xt"-Betrieb geschaltet. Die Phasen werden um 180° verschoben und die einzelnen Oberwellen müssen mit Hilfe der Summationschalter aufaddiert werden. Bei der Rechteckspannung werden nur die ungeraden Oberwellen benutzt und die Phasen um 180° verschoben. Dies wird solange gemacht, bis die erwartete Schwingung angezeigt wird.

Für die Sägezahnspannung wird der gleiche Schritt wie zuvor angewandt und die Phase neu um 180° verschoben und solange variiert bis die entsprechende Schwingung auf dem Bildschirm angezeigt wird. Für diese Schwingung muss jedoch jede Amplitude betrachtet werden.

Bei der Dreieckspannung werden ebenfalls wie bei der Rechteckspannung auch nur ungeraden Oberwellen verwendet, die Amplituden wieder neu eingestellt und möglichst genau um 180° so verschoben. Zudem werden die Unstetigkeitsstellen von $f(t)$ beobachtet. Um die einzelnen Oberwellen für die drei Spannungen zu bestimmen, wird die erste eingestellte Oberwelle benötigt, die einen maximalen Wert von $U_1 = 0,678 \text{ V}$ beträgt.

Bei der Rechteck- und Dreieckspannung werden nur die ungeraden Oberwellen betrachtet, und die Berechnung der einzelnen Oberwellen wird mit Hilfe der folgenden Formeln durchgeführt:

$$U_{2i-1} = \frac{U_1}{2i-1} \quad (10)$$

und

$$U_{2i-1} = \frac{U_1}{(2i-1)^2} \quad (11)$$

wobei $i = 1, 2, \dots$ ist und der Nenner einfach die Teilungszahl für die ungeraden Oberwellenschwingungen entspricht. Bei der Sägezahnspannung wird die folgende Formel eingeführt:

$$U_i = \frac{U_1}{i} \quad (12)$$

wobei $i = 1, 2, \dots$ ist und der Nenner die Teilungszahl für jede Oberwellenschwingung entspricht.

4 Auswertung

4.1 Fourier-Analyse: Fourier-Transformation

Das Signal des Funktionsgenerator wird mit dem Oszilloskop angezeigt und es hat sich für jede Spannung ein Frequenzspektrum wie in Abbildung 4 dargestellt ist.

4.1.1 Rechteckspannung

In der Tabelle 1 befinden sich die aufgeführten Werte für die Amplitude der Teilschwingungen. Die theoretischen Werte wurden nach der Formel 10 bestimmt. Die Abweichung errechnet sich nach:

$$a = \left| \frac{a_{\text{theorie}} - a_{\text{gemessen}}}{a_{\text{theorie}}} \right| \cdot 100 \%. \quad (13)$$

Das theoretische Verhältnis wird mit der folgenden Formel bestimmt:

$$U_i = \frac{100}{n} \quad (14)$$

wobei n der Kanal der jeweiligen Amplituden ist und $i = 1, 2, \dots$ ist. Das prozentuale Verhältnis errechnet sich nach:

$$U_i = \frac{U_{\text{gemessen}}}{U_1} \quad (15)$$

wobei U_{gemessen} einfach die gemessenen Daten für jeden Kanal sind.

Tabelle 1: Rechteck: Gemessene Daten, theoretisches und prozentuales Verhältnis sowie die Abweichung a in Prozent

n	gemessene U/V	theoretische U/V	Prozent. Verhält.	Theo. Verhält.	Abweichung a
1	456	456	100	100	0
3	76	152	16,60	33,33	50,00
5	64	91,20	10,53	20,00	47,36
7	28	65,10	6,14	14,29	56,99
9	20	50,60	4,39	11,11	60,47

4.1.2 Dreiecksspannung

In der Tabelle 2 befinden sich die gemessenen Daten für die Amplitude der Teilschwingungen. Für die Berechnung der theoretischen Werte bei der Dreiecksspannung wird aus Kapitel 3 die Formel 11 benötigt. Das prozentuale Verhältnis und das theoretische Verhältnis werden nach den Formeln 14 und 15 berechnet.

Tabelle 2: Dreieck: Gemessene Daten, theoretisches und prozentuales Verhältnis sowie die Abweichung a in Prozent

n	gemessen U/V	theoretische U/V	Prozent. Verhält.	Theo. Verhält.	Abweichung a
1	254	254	100	100	0
3	30	25,2	11,81	11,11	19,05
5	10	10,16	3,93	4,00	1,57
7	20	5,18	0,78	2,04	61,39
9	0	3,13	0	1,23	100

4.1.3 Sägezahnspannung

In der Tabelle 3 befinden sich ebenfalls die aufgeführten Werte für die Amplitude der Teilschwingungen. Analog werden hier die Berechnungen für das theoretische und prozentuale Verhältnis mit den Formeln 15 und 14 durchgeführt. Für die theoretischen Werte bei der Sägezahnspannung wird die Formel 10 aus Kapitel 3 benötigt.

Tabelle 3: Sägezahn: Gemessene Daten, theoretisches und prozentuales Verhältnis sowie die Abweichung a in Prozent

n	gemessene U/V	theoretische U/V	Prozent. Verhält.	Theo.Verhält.	Abweichung a
1	200	200	100	100	0
2	120	100	60,00	50,00	20,00
3	70	66,6	58,33	33,33	5,10
4	60	50,00	85,71	25,00	20,00
5	42	40,00	70,00	20,00	5,00
6	38	33,30	90,48	16,67	14,11
7	32	28,57	84,21	14,29	12,00
8	28	25,00	87,50	12,50	12,00
9	26	22,20	92,85	11,11	17,11
10	22	20,00	84,61	10,00	10,00

4.2 Fourier-Synthese

Hier wurden mit Hilfe der größtmöglichen Spannung, die schon in Kapitel 3 benannt wurde, die Spannungen für die möglichen Kanäle ausgerechnet und danach versucht, auf den entsprechenden Spannungswert einzustellen.

4.2.1 Sägezahnspannung

In der Tabelle 4 befinden sich ebenfalls theoretisch einzustellenden Werte sowie das theoretische Verhältnis errechnet mit Hilfe der Formel 14. Das Ergebnis ist in der Abbildung 6 zu sehen. In Kapitel 3 wurde schon die eingestellte Oberwelle benannt und für die Rechteckfunktion wird die Formel 12 bei der Berechnung der theoretischen Werte verwendet.

Tabelle 4: Theoretische Daten für Sägezahn und theoretisches Verhältnis in Prozent

n	theoretische U/V	theoretisches Verhält.
1	0,678	100
2	0,339	50,00
3	0,226	33,33
4	0,169	25,00
5	0,135	20,00
6	0,113	16,67
7	0,096	14,29
8	0,084	12,50
9	0,075	11,11
10	0,067	10,00



Abbildung 6: Sägezahnspannung: Kanäle zusammenschaltet

4.2.2 Dreiecksspannung

In der Tabelle 5 befinden sich ebenfalls theoretisch einzustellenden Werte sowie das theoretische Verhältnis errechnet mit Hilfe der Formel 14. Das Ergebnis ist in der Abbildung 7 zu sehen.

Tabelle 5: Theoretischen Daten für Dreieck und theoretisches Verhältnis in Prozent

n	theoretische U/V	theoretisches Verhält.
1	0,678	100
3	0,075	11,11
5	0,027	4,00

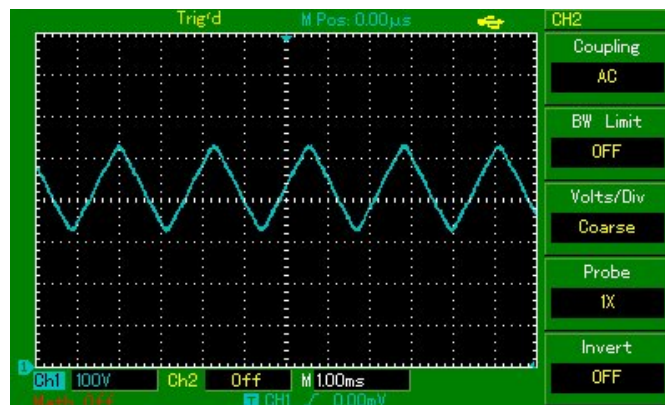


Abbildung 7: Dreiecksspannung: Kanäle zusammenschaltet

4.2.3 Rechteckspannung

In der Tabelle 6 befinden sich die theoretisch einzustellenden Werte sowie das theoretische Verhältnis errechnet mit Hilfe der Formel 14. Das Ergebnis ist in der Abbildung 8 zu sehen.

Tabelle 6: Theoretischen Daten für Rechteck und theoretisches Verhältnis in Prozent

n	theoretische U/V	theoretisches Verhält.
1	0,678	100
3	0,226	33,33
5	0,135	20,00
7	0,096	14,29
9	0,075	11,11

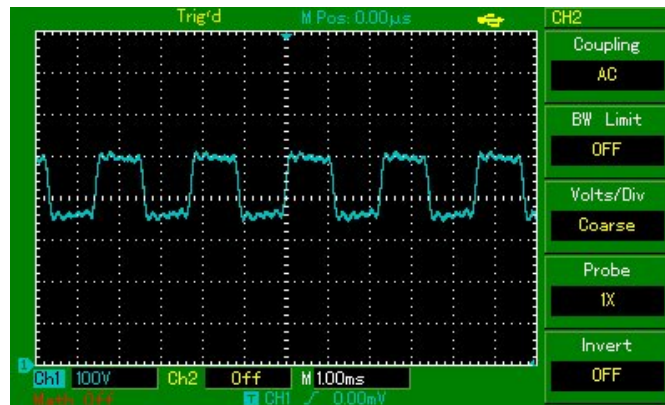


Abbildung 8: Rechteckspannung: Kanäle zusammenschaltet

5 Diskussion

Bei der Synthese wurden leider die experimentellen Werte nicht aufgeschrieben und somit war es nicht möglich die Abweichung zu bestimmen. Jedoch wurden während der Durchführung die theoretischen Werte ausgerechnet und somit die Abweichung von der Theorie bestimmt. Es tritt eine Abweichung von maximal 8,6 % auf.

Bei der Sägezahnspannung in der Abbildung 6 ist die Funktion sehr gut ersichtlich. An den Unstetigkeitsstellen lässt sich das Gibbsche Phänomen erkennen, denn es treten starke Überschwingungen auf. An den 5. Oberwellen lässt sich auch noch erkennen, dass diese in der Stärke des Einflusses auf die Funktion mit steigendem n abnehmen.

Bei der Dreieckspannung in der Abbildung 7 ist die Schwingung sehr gut dargestellt. Hier lässt sich auch erkennen dass die Amplituden mit $\frac{1}{n^2}$ abfallen und die höheren Oberwellen kaum ins Gewicht fallen. Außerdem wurden die höheren Amplituden vernachlässigt, weil je niedriger n wurde, desto schwerer war es den Wert bei den AC-Voltmeter einzustellen.

Bei der Rechteckspannung in der Abbildung 8 ist die Funktion mit den 5. Oberwellen ersichtlich. An den Unstetigkeitsstellen sind ebenfalls starke Überschwüngen zu sehen. Anschließend lässt sich bei der Synthese erschließen, dass es gute Ergebnisse herausgestellt haben. Das Gibbsche Phänomen ist am besten bei der Dreieckspannung und Rechteckspannung erkennbar.

Bei der Analyse haben sich bei den Messwerten große Spannungen ergeben. Hier ergeben sich zwischen den gemessenen und theoretischen Werte kleine Abweichungen bei der Sägezahn- sowie Dreieckspannung. Bei der Rechteckspannung ist die größte Abweichung erkennbar. Bei der Fourier-Analyse entstehen Abweichungen zwischen den ermittelten Koeffizienten über die gemessenen Amplituden der Schwingungen und den theoretisch gerechneten Werten. Es ergeben sich dadurch auch systematische Fehler, denn es wird über ein unendliches Integral statt ein endliches Integral integriert.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 351: Fourier-Analyse und Synthese*. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/V351.pdf> (besucht am 25.11.2017).