V107

Kugelfall-Viskosimeter

Evelyn Romanjuk
evelyn.romanjuk@tu-dortmund.de

Ramona-Gabriela Kallo
ramonagabriela.kallo@tu-dortmund.de

Durchführung: 17.11.17 Abgabe: 24.11.17

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Das Ziel des Versuches dient zur Bestimmung der Viskosität newtonscher Flüssigkeiten sowie die Temperaturabhängigkeit der Viskosität von destilliertem Wasser. Weiterhin soll mit Hilfe der Reynolds-Zahl untersucht werden, ob sich die Strömung laminar verhält. Außerdem soll auch die Apparaturkonstante der großen Kugel bestimmt werden.

2 Theorie

Es wird eine Kugel betrachtet, welche in eine zähe Flüssigkeit fällt, so wird diese aufgrund der Schwerkraft $\vec{F}_{\mathrm{G}}$ nach unten beschleunigt. Je schneller die Kugel sinkt, desto kleiner wird die Beschleunigung. Dem entgegen wirken noch die Reibungskraft $\vec{F}_{\mathrm{R}}$ und die Auftriebskraft $\vec{F}_{\mathrm{A}}$. Die Schwerkraft $\vec{F}_{\mathrm{G}}$ wird dann von der Reibungskraft $\vec{F}_{\mathrm{R}}$ kompensiert bis sich ein Kräftegleichgewicht gestellt hat und sich die Kugel weiterhin mit einer konstanten Geschwindigkeit v bewegt. Die Reibungskraft ist gegeben durch:

$$F_{\mathrm{R}} = 6\pi\eta v r \tag{1}$$

wobei r der Radius der Kugel, v die Geschwingkeit des Körpers und η die Zähigkeit sind. Diese Gleichung wird als Stokessches Gesetz benannt. In diesem Versuch wird das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler angewendet. In einem geringfügigen großen Rohrdurchmesser, gefüllt mit destilliertem Wasser, fällt eine Kugel mit einem kleinen Durchmesser. Es können sich durchaus Wirbel ausbilden, wenn die Kugel durch das senkrecht stehende Rohr fallen würde. In diesem Fall wird das Rohr leicht um einige Grade geneigt, um Wirbel zu vermeiden und damit die Kugel an der Rohrwand hinabgleiten kann. Die Viskosität η wird durch die Fallzeit t und die Apparaturkonstante K, die von der Fallhöhe als auch von der Geometrie des Kugel abhängt, bestimmt:

$$\eta = K\left(\rho_K - \rho_{Fl}\right) \cdot t$$

wobei ρ_K die Dichte der Kugel und ρ_{Fl} die Dichte der Flüssigkeit sind. Dabei hängt die Viskosität η sehr stark von der Temperatur ab und lässt sich bestimmen durch die sogenannten Andradedschen Gleichung:

$$\eta_{\mathrm{T}} = A \cdot exp(\frac{B}{T})$$

wobei A und B die Konstanten der Gleichung sind. Es wird von einer turbulenten Strömung gesprochen, wenn sich in der Flüssigkeit Wirbel ausbilden und eine hohe Strömungsgeschwingkeit vorliegt. Bei einer laminaren Strömung bilden sich keine Wirbel aus und die Flüssigkeit läuft parallel zur Rohrachse. Um zu überprüfen, ob sich die Kugel in einer laminaren oder turbulenten Strömung befindet, wird die Reynoldszahl gebraucht. Diese ist gegeben durch:

$$Re := \frac{\rho v d}{\eta} \tag{2}$$

mit ρ als Dichte der Flüssigkeit, v als mittlere Geschwindigkeit der Kugel, η die Viskosität der Flüssigkeit und d die charakteristische Länge der Kugel sind.

3 Versuchsaufbau

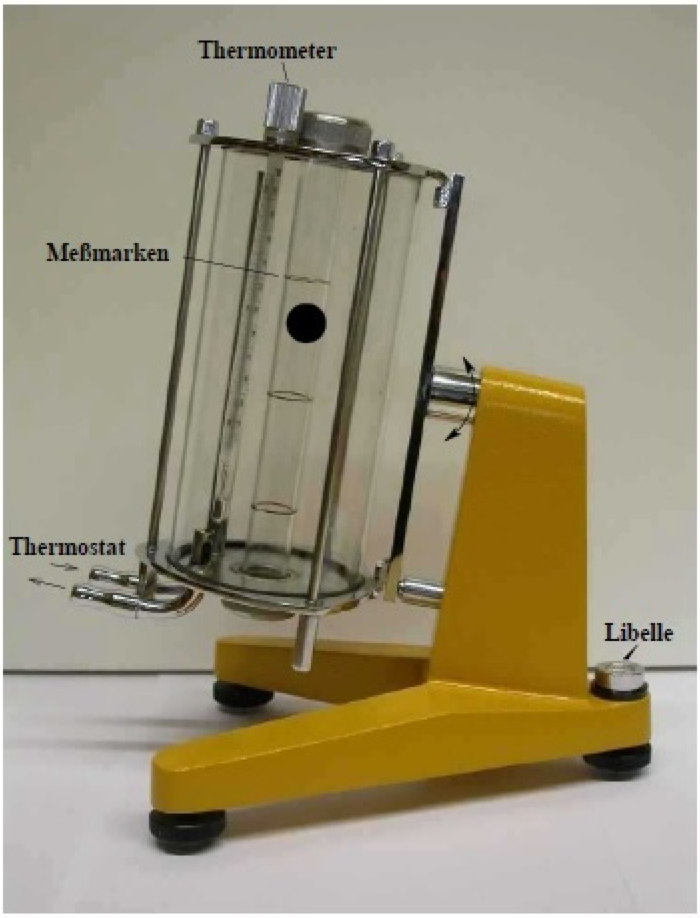

Abbildung 1: Höppler Viskosimeter - Der Aufbau

In der Abbildung 1 ist der Aufbau nach Höppler-Viskosimeter zu sehen. Die Libelle dient zur Justifizierung des Viskosimeters, so dass das gerade stehen soll. Das Fallrohr hat mehrere Meßmarken und befindet sich in einem Wasserbad, wo das Wasser zuerst eine konstante Temperatur besitzt. In das Fallrohr kann die zu untersuchende Kugel eingegeben und Wasser gefüllt werden. Wenn die Kugel in das Fallrohr eingegeben wird, muss das Rohr durch eine Schraube verschlossen sein. Die Temperatur kann durch einen Thermostat erhitzt werden und mit Hilfe von einem Thermometer an dem Viskosimeter abgelesen werden.

4 Durchführung

Als erstes wird jeweils fünf mal der Durchmesser für die kleine und große Kugel gemessen. Danach wird mit Hilfe der Libelle das Viskosimeter so justiert, dass das gerade stehen kann. Als nächstes wird das Rohr mit destilliertem Wasser gefüllt und die Luftblasen mit einem Holzstab herausgenommen. Der kleine Kugel wird zuerst in das Rohr vorsichtig eingeworfen, so dass es erneut keine Luftblasen entstehen können. Letztendlich wird das Rohr mit einer Schraube verschlossen. Das Viskosimeter wird um 180 °C gedreht und mit einem manuellen Stoppuhr die Zeit für 10 Messungen bestimmt. Vor dem Passieren der ersten Meßmarke stellt sich eine konstante Geschwindigkeit v der Kugel. Es wird die Zeit gemessen, die die Kugel von der ersten Meßmarke bis zur letzten Meßmarke braucht. Während dieses Vorgangs besitzt die Kugel immer noch eine konstante Geschwindigkeit. Die kleine Kugel wird vorsichtig herausgenommen und neues distilliertes Wasser in das Rohr gefüllt. Dieser Vorgang wird auch mit der großen Kugel wiederholt. Für die nächste Durchführung wird die große Kugel nicht entfernt. Das Fallrohr befindet sich in einem Wasserbad, das mit Hilfe von einem Thermostaten bis zu 70 °C aufgeheizt werden kann und mit einem Thermometer die zugehörige Temperatur abgelesen werden kann. Für 10 verschiedene Temperaturen, wird die Fallzeit zwei Mal der großen Kugel gemessen also das Viskosimeter wird jeweils zwei Mal um 180 °C gedreht.

5 Auswertung

5.1 Fehlerrechnung

In der folgenden Auswertung werden Mittelwerte mit

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{\mathrm{i}} \tag{3}$$

und der zugehörige Fehler mit

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_{\mathrm{i}} - \bar{x})^2} \tag{4}$$

berechnet. Beim Rechnen mit mehreren fehlerbehafteten Werten wird die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung zur Berechnung des neuen Fehlers genutzt:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\delta f}{\delta x_{\mathrm{i}}}\right)^2 \cdot (\Delta x_{\mathrm{i}})^2}. \tag{5}$$

5.2 Bestimmung der Apparatekonstanten

Um später die Viskosität von Wasser bei verschiedenen Temperaturen berechnen zu können, muss die Apparatekonstante K_{gr} der großen Kugel bestimmt werden. Hierfür werden zunächst die Dichten der beiden Kugeln aus den gegebenen Massen

$$m_{\mathrm{kl}} = 4.48 \cdot 10^{-3}\mathrm{kg}$$
$$m_{\mathrm{gr}} = 4.97 \cdot 10^{-3}\mathrm{kg}$$

sowie den Radien der Kugeln aus Tabelle (1) berechnet.

Tabelle 1: Radien der Kugeln

Kleine Kugel $r_{\mathrm{kl}}/10^{-3}\mathrm{m}$	Große Kugel $r_{\mathrm{gr}}/10^{-3}\mathrm{m}$
7,754 50	7,763 00
7,754 50	7,762 50
7,754 25	7,762 75
7,754 25	7,762 75
7,763 75	7,763 25

Der Mittelwert der Radien wird mit Gleichung (3) und der Fehler des Mittelwerts mit Gleichung (4) zu

$$r_{\mathrm{kl}} = (7.75445 \pm 0.00009) \cdot 10^{-3}\mathrm{m}$$
$$r_{\mathrm{gr}} = (7.76285 \pm 0.00013) \cdot 10^{-3}\mathrm{m}$$

berechnet. Die Volumina der Kugeln mit zugehörigem Fehler können dann mit Gleichung (5) errechnet werden. Es ergibt sich:

$$V_{\mathrm{kl}} = (1.95318 \pm 0.00007) \cdot 10^{-6}\mathrm{m}^3$$
$$V_{\mathrm{gr}} = (1.95953 \pm 0.00009) \cdot 10^{-6}\mathrm{m}^3$$

Hieraus können nun die Dichten der beiden Kugeln berechnet werden. Wieder wird Gleichung (5) für die Berechnung des Fehlerwertes genutzt.

$$\rho_{\mathrm{kl}} = (2293.65 \pm 0.08)\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$
$$\rho_{\mathrm{gr}} = (2536.321 \pm 0.116)\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Weiterhin wird für die Berechnung der Apparatekonstanten die Viskosität η_{RT} von Wasser bei Raumtemperatur bestimmt. Verwendet werden

$$K_{\mathrm{kl}} = 7.64 \cdot 10^{-8}\frac{\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}$$
$$\rho_{\mathrm{fl}} = 998.2\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

wobei K_{kl} die bereits gegebene Apparatekonstante der kleinen Kugel ist und ρ_{fl} die Dichte von Wasser bei Raumtemperatur [2]. Zudem entnimmt man die Fallzeit der kleinen Kugel von

$$t_{\mathrm{kl}} = (12.42 \pm 0.09)\mathrm{s}$$

Tabelle 2: Fallzeiten der Kugeln durch Wasser bei Raumtemperatur

Kleine Kugel $t_{\mathrm{kl}}/\mathrm{s}$	Große Kugel $t_{\mathrm{gr}}/\mathrm{s}$
12,03	72,63
12,06	72,34
12,24	73,27
12,37	73,26
12,40	74,61
12,95	72,85
12,60	72,82
12,63	73,56
12,44	74,28
12,47	74,66

aus Tabelle (2).

Nun lässt sich die Viskosität η_{RT} mit Gleichung 2 bestimmen. Sie beträgt

$$\eta_{\mathrm{RT}} = (1.23 \pm 0.09) \cdot 10^{-3}\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$$

wobei der Fehlerwert wiederum aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung (5) stammt. Zuletzt wird Gleichung 2 nach K_{gr} umgestellt. Mit den zuvor errechneten Werten ergibt sich eine Apparatekonstante von

$$K_{\mathrm{gr}} = (6.43 \pm 0.08) \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}$$

5.3 Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität

Wie bei der Bestimmung der Apparatekonstanten K_{gr} kann Gleichung 2 für die Berechnung der Viskositäten von Wasser bei unterschiedlichen Temperaturen verwendet werden. Hierbei sind K_{gr}, ρ_{gr} und t_{gr} fehlerbehaftete Größen, weshalb die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung mit Gleichung (5) durchgeführt werden muss. Für die Dichte ρ_{fl} von Wasser bei verschiedenen Temperaturen werden Literaturdaten [2] verwendet.

Im Folgenden wird der natürliche Logarithmus der Viskosität gegen den Kehrwert der Temperatur aufgetragen, wie in Abbildung (2) zu sehen ist. Mithilfe des Graphen lassen sich nun die Konstanten der Andradeschen Gleichung errechnen:

$$\begin{aligned} \eta(T) &= Ae^{\frac{B}{T}} \\ \Longleftrightarrow \quad ln(\eta) &= ln(A) + \frac{B}{T} \\ A &= (2.2 \pm 0.5) \cdot 10^{-5}\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s} \\ B &= (1698.9 \pm 39.3)\mathrm{K} \end{aligned}$$

Tabelle 3: Messdaten zur Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser

Temperatur T/K	Fallzeit $t_{\mathrm{gr}}/\mathrm{s}$	Dichte Wasser $\rho_{\mathrm{fl}}/\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$	Viskosität $\eta/10^{-3}\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$
303,15	61,76 ± 1,07	995,64	6,12 ± 0,13
307,15	55,7 ± 0,4	994,37	5,52 ± 0,08
310,15	52,6 ± 0,2	993,32	5,22 ± 0,06
313,20	49,5 ± 0,2	992,19	4,91 ± 0,06
317,15	47,6 ± 0,4	990,63	4,73 ± 0,07
321,15	43,5 ± 0,1	988,93	4,33 ± 0,05
325,65	40,7 ± 0,2	986,89	4,05 ± 0,02
329,65	37,9 ± 0,4	984,97	3,78 ± 0,06
333,15	36,5 ± 0,3	983,20	3,64 ± 0,05
336,15	34,9 ± 0,1	981,63	3,49 ± 0,04

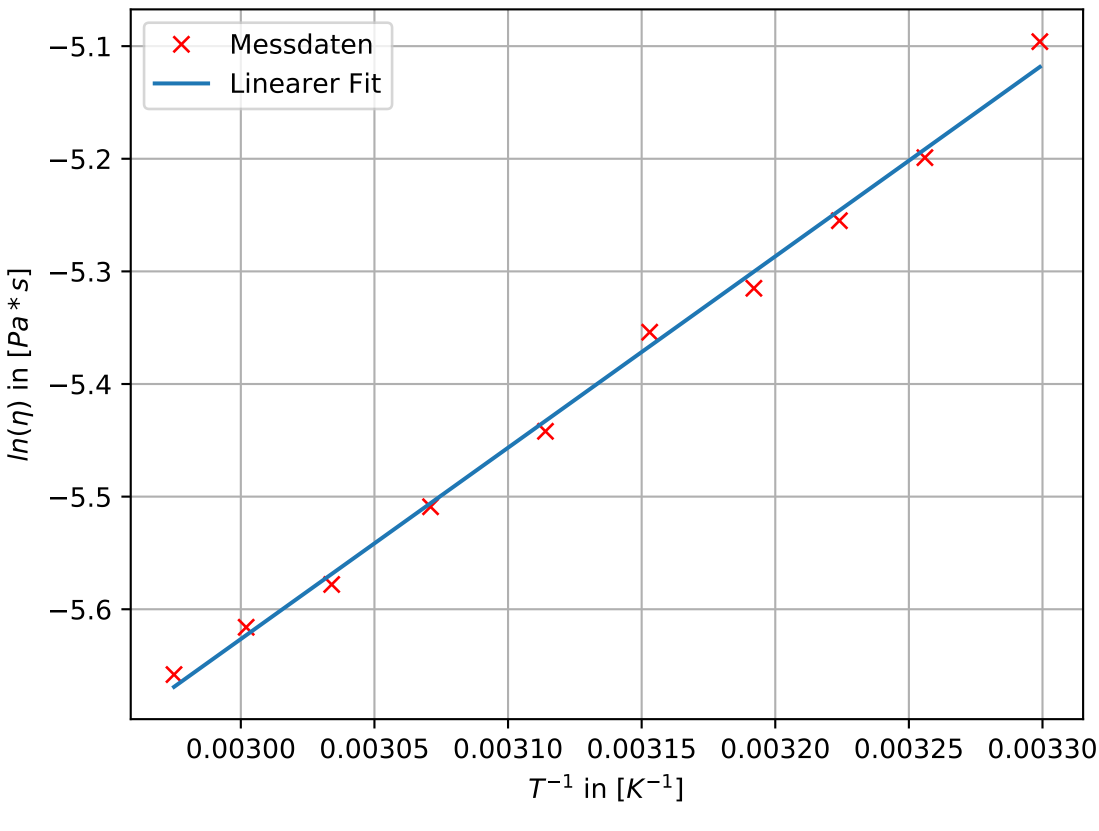

Abbildung 2: Bestimmung der Konstanten der Andradeschen Gleichung

Zuletzt wird geprüft, ob die Strömung laminar oder turbulent ist. Hierzu wird die Reynoldszahl Re_{max} der kleinen und der großen Kugel berechnet und dann mit dem kritischen Wert der Reynoldszahl Re_{krit}=1160 verglichen. Wird in Gleichung 2 $d = 2r_{\mathrm{kl/gr}}$ und $v = \frac{x}{t_{\mathrm{kl/gr}}}$ gesetzt, so ergibt sich

$$Re = \frac{\rho \cdot 2r_{\mathrm{kl/gr}} \cdot x}{\eta \cdot t_{\mathrm{kl/gr}}} \tag{6}$$

wobei x die Fallstrecke der Kugeln ist und $x = 0.1\mathrm{m}$ [1, S. 3] beträgt. Um den maximalen Wert der Reynoldszahl zu erhalten, wird jeweils die kleinste Fallzeit der Kugeln gewählt. Bei der großen Kugel entspricht dies der Fallzeit bei der höchsten Wassertemperatur. Die Reynoldszahlen der beiden Kugel betragen damit

$$Re_{\mathrm{max,kl}} = 101.4 \pm 7.5$$
$$Re_{\mathrm{max,gr}} = 12.5 \pm 0.2$$

6 Diskussion

Raumtemperatur recht stark von ihrem Literaturwert von $1\,\mathrm{mPa \cdot s}$ abweicht. Diese Abweichung beträgt rund 23%. Da die Fallzeit und die Dichte der kleinen Kugel jeweils geringe Fehlerwerte hatten, könnte man vermuten, dass die gegebene Apparatekonstante der kleinen Kugel zu ungenau bestimmt wurde. Dennoch weist die Apparatekonstante K_{gr}, welche unter anderem mit dieser Viskosität berechnet wurde, einen geringen Fehler auf. Daher kann man davon ausgehen, dass dieser Fehler sich nicht allzu stark auf diese weiteren Rechnungen auswirkte. Weiterhin liegen die berechneten Reynoldszahlen sehr deutlich unter dem kritischen Wert von 1160, woraus zu schließen ist, dass die Strömung im Rohr laminar ist und Wirbel nicht die Durchführung oder die Ergebnisse beeinflusst haben. Zuletzt ist in Abbildung (2) zu erkennen, dass die meisten Messwerte recht nah an der Ausgleichsgeraden liegen, sodass diese, als auch die daraus bestimmten Konstanten der Andradeschen Gleichung als relativ genau betrachtet werden können.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuch 207: Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler*. 2017. URL: `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/ViskositaetMP.pdf`.

[2] Frostburg State University. *Water Density Calculator*. URL: `http://antoine.frostburg.edu/chem/senese/javascript/water-density.html`.